TERMINALE STI

mathématiques

A. EXCELLENT
A. LAURENT
M. HIBOU
É. SOROSINA
B. EXCELLENT
J.-M. LAURENT
P. MORENO

HACHETTE
Éducation

TERMINALE STI

mathématiques

AGNÈS EXCELLENT
Professeur de mathématiques
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

ANNICK LAURENT
Professeur de mathématiques
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

MATHIEU HIBOU
Professeur de mathématiques
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

ÉRIC SOROSINA
Professeur de mathématiques
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

BERNARD EXCELLENT
Professeur de mathématiques
au Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

JEAN-MARIE LAURENT
Professeur de physique appliquée
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

PIERRE MORENO
Professeur de construction mécanique
au Lycée Louis Armand, Nogent-sur-Marne

HACHETTE
Éducation

avant-propos

Cette nouvelle édition a été conçue pour répondre aux exigences des enseignants et pour faciliter les apprentissages des élèves. Dans ce but, nous avons organisé les chapitres comme suit :

- Les activités permettent de faire le lien avec le programme de Première et d'introduire les nouvelles notions, souvent en les présentant dans les disciplines techniques.

- Le cours propose une approche simple des notions en conservant la rigueur indispensable d'un enseignement.

- Les travaux pratiques complètent et enrichissent le cours en permettant aux élèves de s'assurer de leur bonne compréhension des notions développées en cours.

- L'essentiel résume les acquis fondamentaux du cours.

- Les méthodes présentent les savoir-faire spécifiques du chapitre sous forme d'exercices commentés au fur et à mesure de leur résolution.

- Les exercices sont organisés en trois parties.

  - Une partie *d'exercices d'application* ordonnés par thèmes et suivant la progression du cours.

    1 Les exercices dont le numéro est dans un cadre rouge sont des exercices d'application directe des notions abordées dans le chapitre.

    1 Les exercices dont le numéro est dans un cadre jaune nécessitent de prendre un peu de recul par rapport au cours.

    C Enfin, ce symbole indique les exercices corrigés en fin d'ouvrage.

  - Une partie *« pour aller plus loin »*, qui rassemble des *extraits de sujets de Baccalauréat* et des *problèmes* plus concrets touchant à des domaines variés (vie quotidienne, électricité, mécanique par exemple).

  - Une partie *« pour préparer le bac »*, destinée à aider les élèves à préparer efficacement l'examen.

Enfin, la pratique des outils informatiques, calculatrices ou logiciels, est introduite au travers des activités, des travaux pratiques ou des exercices, chaque fois que leur utilisation enrichit la réflexion ou aide à la compréhension :

indique l'utilisation des calculatrices.

indique l'utilisation d'un logiciel.

Bref, un livre que nous avons voulu vivant, accessible et ouvert !

Les auteurs

sommaire

sommaire

Chapitre 7 : Équations différentielles

Chapitre 8 : Nombres complexes

Chapitre 9 : Suites

Chapitre 10 : Probabilités

Chapitre 11 : Géométrie

CHAPITRE 1

Dérivation

OBJECTIFS

- Consolider les connaissances acquises en Première sur la dérivation (calcul de fonctions dérivées, sens de variation, tangente).
- Calculer la dérivée d'une fonction composée.
- Utiliser l'étude d'une fonction sur un intervalle pour résoudre une équation de la forme $f(x) = \lambda$ ou une inéquation de la forme $f(x) \leqslant \lambda$ **(TP1–TP2).**
- Faire le lien entre inéquation et position relative de deux courbes **(TP3).**
- Utiliser la calculatrice dans les problèmes liés aux fonctions **(TP1–TP3).**

Prérequis

- définition de la composée de deux fonctions

ACTIVITÉ 1 « Souvenirs, souvenirs »

Objectif : Vérifier les acquis de Première sur la dérivation.

1. Calcul d'une fonction dérivée

a. On note u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonctions dérivées u' et v', et a, k et b trois constantes réelles. Donner la fonction dérivée de :

1. $x \mapsto u(x) + v(x)$
2. $x \mapsto ku(x)$
3. $x \mapsto u(x) \cdot v(x)$;
4. $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$
5. $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$
6. $x \mapsto u(ax+b)$.

b. Associer à chacune des fonctions suivantes dérivables sur l'intervalle I, la (ou les) formule(s) précédente(s) à appliquer pour calculer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 2}$ et $I =]1, +\infty[$ $\qquad$ $f_2(x) = x\sqrt{x}$ et $I =]0, +\infty[$

$f_3(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$ et $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_4(x) = x^2 + \dfrac{2x}{x^2+4}$ et $I = \mathbb{R}$

$f_5(x) = \sqrt{2x+1}$ et $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ $\qquad$ $f_6(x) = \dfrac{\cos x}{4}$ et $I = \mathbb{R}$.

c. Calculer les fonctions dérivées des fonctions du **b.**.

2. Étude des variations d'une fonction

a. Utilisation de la fonction dérivée pour l'étude des variations

Chacune des quatre fonctions qui suivent a pour tableau l'un des cinq tableaux donnés ci-après. Pour chaque fonction, préciser le tableau de variation qui lui correspond (on justifiera le choix), puis compléter ce tableau.

• Fonctions :

$f_1(x) = -x^2 + x + 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 3x - 5$

$f_3(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 2x^2 + x - 1$ $\qquad$ $f_4(x) = \dfrac{-1}{x^2 - x + 3}$

• Tableaux de variation :

1

x	-1		$\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

2

x	-1		$\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f					

3

x	-1		$\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f					

4

x	-1		$\frac{1}{2}$		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f							

5

x	-1		$\frac{1}{2}$		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f							

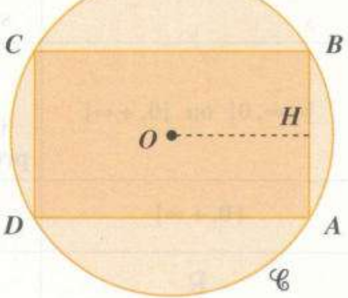
b. Vérification à l'aide de la calculatrice graphique

Pour chacune des fonctions du **a.**, déterminer la fenêtre graphique à utiliser (valeur minimum et maximum de x, valeur minimum et maximum de y) pour vérifier sur la calculatrice graphique le sens de variation et les extremums obtenus dans l'étude précédente.

ACTIVITÉ 2 Un problème d'optimisation

Objectif : Introduire, sur un exemple, le besoin d'une nouvelle formule de dérivation, celle des fonctions composées.

On souhaite tailler dans un tronc d'arbre de rayon $R = 50$ cm une poutre de section rectangulaire d'aire maximale. La section du tronc est représentée ci-contre par le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R et la section de la poutre par le rectangle $ABCD$ inscrit dans $\mathscr{C}$. On appelle x la longueur AD exprimée en cm.



a. Dans quel intervalle varie x ?

b. En utilisant le triangle OHB, calculer HB en fonction de x puis vérifier que $AB^2 = 10\,000 - x^2$.

c. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la section de poutre, en fonction de x, est définie par $\mathscr{A}(x) = x\sqrt{10\,000 - x^2}$.

Pour choisir x de façon que l'aire de la section de poutre soit maximale, on est amené à étudier les variations de la fonction $\mathscr{A}$ définie sur $[0, 100]$ par : $x \mapsto x\sqrt{10\,000 - x^2}$. Il faut donc savoir si cette fonction est dérivable et calculer sa fonction dérivée.

d. • $\mathscr{A}$ est le produit de deux fonctions. Préciser lesquelles.

Pour calculer la dérivée de $\mathscr{A}$, on a besoin de calculer celle de la fonction f définie sur $[0, 100]$ par $x \mapsto \sqrt{10\,000 - x^2}$.

• Montrer que cette fonction est la composée d'une fonction polynôme et d'une fonction de référence que l'on précisera. Peut-on calculer la dérivée de cette fonction avec ce qui a été vu en Première ?

Dans ce chapitre, on va apprendre à déterminer la fonction dérivée des fonctions composées.

1 Calcul de fonctions dérivées

1 L'essentiel de Première

Dans ce paragraphe, on revient sur les principales notions et propriétés vues en classe de Première à propos de la dérivation.

Dérivées des fonctions usuelles et opérations sur les fonctions dérivées

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que **f est dérivable en x_0** si et seulement si il existe un nombre réel a et une fonction φ, définie au voisinage de zéro, tels que $f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.

Le nombre a est alors appelé **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $\boldsymbol{f'(x_0)}$.
Si, de plus, pour tout x de I, f est dérivable en x, on dit que **f est dérivable sur I.**

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus en classe de Première sur les fonctions dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f définie sur :	Par :	Fonction dérivée f' définie par :	Fonction f dérivable sur :
$\mathbb{R}$	$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$ (n entier strictement positif)	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ (n entier strictement positif)	$f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$ (cas particulier du précédent pour $n=1$)	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$[0,+\infty[$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}$	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$

Exemple : On veut déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f: x\mapsto x^5 \quad ; \quad g: x\mapsto \frac{1}{x^4}.$$

- $f(x)$ est de la forme x^n, avec $n=5$. On a donc : $f'(x)=5x^4$.
- $g(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{x^n}$, avec $n=4$. On a donc : $g'(x)=-\dfrac{4}{x^5}$.

▸Exercices n° 1 à 3

Théorème Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, de fonctions dérivées respectives u' et v', et k, a et b trois nombres réels :

1. les fonctions $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I, et $(u+v)' = u' + v'$ 1,
$(ku)' = ku'$ 2 et $(uv)' = u'v + uv'$ 3 ;

2. si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ 4 ;

3. si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 5 ;

4. pour tout x de l'intervalle ouvert J tel que $ax+b$ appartienne à I, la fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et $f'(x) = a \times u'(ax+b)$ 6.

Exemple : On veut déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (3x^2 + 2x - 1)\cos x.$$

g est un produit de deux fonctions : on utilise donc la formule 3 du théorème.

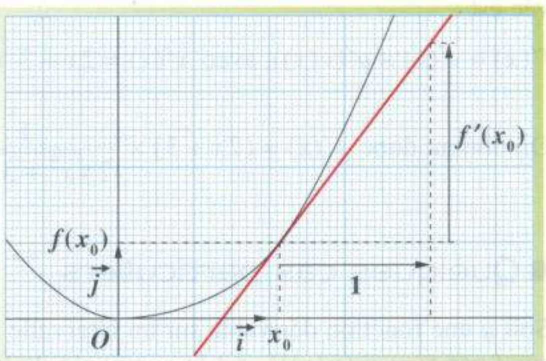
$g'(x) = (6x+2)\cos x + (3x^2 + 2x - 1)(-\sin x)$, soit
$g'(x) = (6x+2)\cos x - (3x^2 + 2x - 1)\sin x$.

▸Exercices n° 4 à 19

■ Dérivée et tangente

L'existence du nombre dérivé permet de définir la notion de tangente.

Définition Soit f une fonction dérivable en x_0. On appelle **tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0** la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.



▸Exercices n° 20 à 23

Théorème Soit f une fonction dérivable en x_0. La courbe représentative de f admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente dont une équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

On veut déterminer une équation de la tangente $\mathscr{C}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

$f(3) = 4$; $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$; $f'(3) = -3$, donc, en appliquant la formule donnée ci-dessus, on obtient $y = f'(3)(x-3) + f(3)$, soit ici, $y = (-3)(x-3) + 4$.
$\mathscr{C}$ admet donc pour équation $y = -3x + 13$.

▸Exercices n° 24 à 27

2 Dérivation des fonctions composées

Cas général

Dans le paragraphe précédent, on a revu la dérivation des fonctions composées avec une fonction affine, fonctions de la forme $x \mapsto u(ax+b)$.
Pour résoudre le problème proposé dans l'activité préparatoire 2, on a besoin de calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $[0, 100]$ par $f(x) = \sqrt{10\,000 - x^2}$. Cette fonction est la composée d'une fonction polynôme ($x \mapsto 10\,000 - x^2$) et de la fonction racine carrée.
Le théorème ci-dessous donne une formule permettant d'effectuer de tels calculs.

Théorème Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si v est une fonction dérivable d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I, alors la fonction f définie sur J par $f(x) = u(v(x))$, appelée fonction composée de v par u et notée $f = u \circ v$, est dérivable sur J et $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$:

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x)).$$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 5}$. f est une fonction composée : on applique d'abord une fonction polynôme de degré 2, puis la fonction racine carrée :

$$f : x \overset{v}{\mapsto} x^2 + 3x + 5 = X$$
$$X \overset{u}{\mapsto} \sqrt{X} = \sqrt{x^2 + 3x + 5}.$$

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une somme de fonctions dérivables) et à valeurs dans $]0, +\infty[$ (polynôme du second degré qui ne s'annule pas) ; la fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$, par conséquent d'après le théorème précédent, la fonction $f = u \circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$, avec $v'(x) = 2x + 3$ et $u'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.

On obtient donc $f'(x) = (2x+3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}} = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$.

▸Exercices n° 28 et 29

Quelques cas particuliers

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel. La fonction f définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$ est la composée de la fonction u et de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^n$: $\quad x \overset{u}{\mapsto} u(x) = X$

$$X \overset{v}{\mapsto} v(X) = X^n = (u(x))^n.$$

On a $f(x) = v(u(x))$, et en appliquant la formule du paragraphe précédent :
$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$. Or $v'(X) = nX^{n-1}$, donc $v'(u(x)) = n(u(x))^{n-1}$, et on conclut :

$$f'(x) = u'(x) \times n(u(x))^{n-1}.$$

Le calcul ci-dessus peut être fait pour différentes fonctions v, et le corollaire suivant détaille l'application du théorème énoncé dans la partie « cas général » pour certains cas particuliers courants.

Corollaire Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.

1. La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

2. Si u ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

3. Si u est à valeurs dans $]0, +\infty[$, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4. Les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I et $(\cos u)' = -u'\sin u$, $(\sin u)' = u'\cos u$.

Exemple 1 : On veut calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ et $g(x) = \sin(x^2 + 1)$.

• f est de la forme u^4, où u, définie par $u(x) = x^2 + 3x + 1$, est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4u'(x)(u(x))^3$; donc, puisque $u'(x) = 2x + 3$, $f'(x) = 4(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^3$.

• g est de la forme $\sin u$, où u, définie par $u(x) = x^2 + 1$, est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$; donc, puisque $u'(x) = 2x$, $g'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$.

Exemple 2 : On s'intéresse à la fonction utilisée dans l'exemple de la partie « cas général». f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$. f est donc de la forme $\sqrt{u}$, où u, définie par $u(x) = x^2 + 3x + 5$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, donc, puisque $u'(x) = 2x + 3$, $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$. On retrouve bien le même résultat.

▸Exercices n° 30 à 36

2 Applications de la dérivation

1 Sens de variation et extremums

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si, pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur I.
Si, pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[-3, 2]$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

On veut déterminer le sens de variation de f.

On calcule sa dérivée : $f'(x) = \dfrac{(2x + 2)(x^2 + 2) - (x^2 + 2x + 3)(2x)}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2)^2}$.

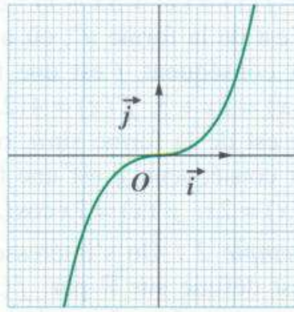
$f'(x)$ est un quotient : pour tout x de $[-3, 2]$, $(x^2 + 2)^2$ est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 - 2x + 4$, polynôme du second degré qui s'annule pour $x = -2$ et $x = 1$. On établit le tableau de signe de ce polynôme, d'où l'on déduit le signe de $f'(x)$ en fonction de x :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-2x^2 - 2x + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent, sur $[-3, -2[$, $f'(x)$ est strictement négatif, donc f est strictement décroissante, sur $]-2, 1[$, $f'(x)$ est strictement positif, donc f est strictement croissante et sur $]1, 2]$, $f'(x)$ est strictement négatif, donc f est strictement décroissante.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{6}{11}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘	$\frac{11}{6}$

Par lecture du tableau de variation, f admet pour minimum $\frac{1}{2}$ (atteint en -2) et pour maximum 2 (atteint en 1).



Remarque : Dans l'exemple précédent, la recherche d'extremums s'est faite à l'aide du tableau de variation. On rappelle que si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et que f présente un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$. Cependant la réciproque de ce résultat est fausse : la fonction cube est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0; pourtant elle ne présente pas d'extremum en 0.

▸Exercices n° 37 à 54

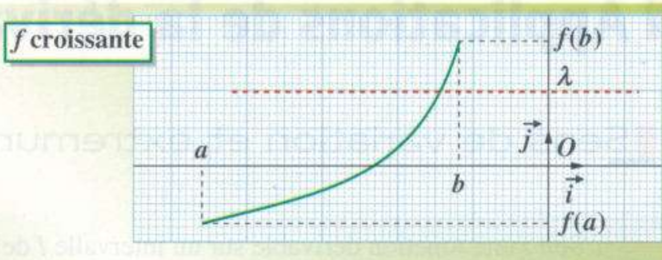
2 Résolution approchée d'équations

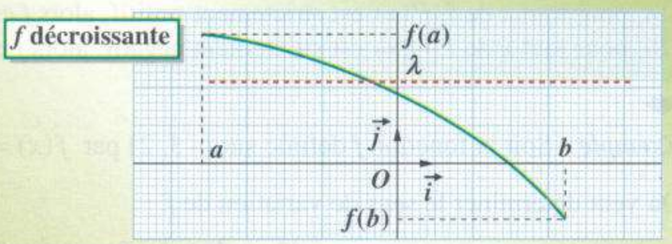
Le théorème suivant permet, sous certaines conditions, de montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation du type $f(x) = \lambda$.

Théorème Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et λ un réel tels que :

- f est dérivable sur $[a, b]$;
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$;
- λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (respectivement entre $f(b)$ et $f(a)$).

Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

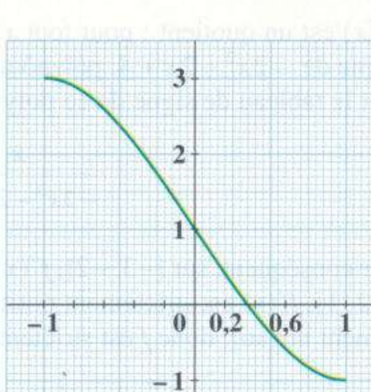




Exemple : Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est dérivable (c'est une fonction polynôme) et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$. On constate que :

- f est dérivable sur $[-1, 1]$;
- f est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ car f' est négative sur $[-1, 1]$;
- 0 est compris entre $f(1) = -1$ et $f(-1) = 3$;

donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution dans $[-1, 1]$. Par balayage (on fait plusieurs tableaux de valeurs de pas de plus en plus petit), on obtient que cette solution vaut 0,35 au centième près.



▸Exercices n° 55 à 62 et TP1

3 Dérivées successives

> Ce paragraphe ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

1 Définition

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de fonction dérivée f'.
• Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la fonction dérivée de f', notée f'', est appelée fonction dérivée seconde de f.
• Si f'' est dérivable sur I, sa dérivée est notée f''' ou $f^{(3)}$ et appelée dérivée troisième de f.
On peut ainsi définir les dérivées successives de f, la dérivée n-ième étant notée $f^{(n)}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2$.
f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x) = 24x + 6$.
$f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)}(x) = 24$.
Toutes les dérivées successives de f sont elles-mêmes dérivables et pour $n \geqslant 5$, $f^{(n)}(x) = 0$.

Remarque : Attention à ne pas confondre les notations $f^{(n)}$, qui signifie dérivée n-ième de f, et f^n qui signifie puissance n-ième de f.
En reprenant l'exemple ci-dessus, on a $f^4(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4$ et $f^{(4)}(x) = 24$.

▸Exercices n° 63 à 67

2 Notation différentielle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction de la variable x, on peut aussi noter sa fonction dérivée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation utilisée en particulier en physique) : $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ou encore $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

De même, si f est deux fois dérivable sur I, la dérivée seconde de la fonction f de la variable x est notée $f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Exemple : En mécanique, la distance x parcourue par un mobile est une fonction du temps t : $t \mapsto x(t)$.
La vitesse instantanée est la dérivée de la fonction qui, à l'instant t, fait correspondre la distance parcourue $x(t)$: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, soit $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.

L'accélération instantanée est la dérivée seconde de cette fonction : $x''(t) = a(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$.

▸Exercices n° 78 à 82

TP1 Exemple de résolution approchée d'une équation de la forme $f(x) = \lambda$

On souhaite résoudre l'équation $1 - 3x - \dfrac{3}{2x^2} = 0$ sur $[-2\,;\,-0{,}5]$. Pour cela, on considère la fonction dérivable f définie sur $[-2\,;\,-0{,}5]$ par $f(x) = 1 - 3x - \dfrac{3}{2x^2}$ et on utilise l'étude de f pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et des valeurs approchées de ces solutions.

1 Étude de f sur $[-2\,;\,-0{,}5]$

a. Calculer la fonction dérivée de f et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{3(1-x)(1+x+x^2)}{x^3}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,-0{,}5]$.

c. Établir le tableau de variation de f.

d. Tracer, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, d'unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[-2\,;\,-0{,}5]$.

2 Résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\,;\,-0{,}5]$

a. Recopier en complétant (on pourra s'aider du théorème du cours sur les équations de la forme $f(x) = \lambda$) :

- f est .... sur $[-2\,;\,-0{,}5]$;
- f est strictement .... sur $[-2\,;\,-0{,}5]$;
- .... est compris entre .... et ....

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans ....

b. • Établir à l'aide de la calculatrice un tableau des valeurs de f pour x variant de -2 à $-0{,}5$ avec un pas de 0,5. En déduire un intervalle I_1 d'amplitude 0,5 contenant α.

• Établir à l'aide de la calculatrice un tableau des valeurs de f pour x variant dans I_1 avec un pas de 0,1. En déduire un encadrement de α à 10^{-1} près.

• Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.

c. Comment retrouve-t-on sur la représentation graphique la solution obtenue ? (On fera apparaître le tracé utile sur la représentation graphique.)

▸Exercices n° 55 à 60

TP2 Exemple d'étude d'une inéquation de la forme $f(x) \leqslant \lambda$

> D'après un problème de BTS informatique de gestion.

Une entreprise a lancé fin décembre 2004 un nouveau jeu sur console. À partir d'études statistiques sur les ventes de ce type de jeu, la société choisit, pour modéliser les ventes, la fonction dérivable V définie sur $[1, +\infty[$ par $V(x) = 2x(6 - \sqrt{x})$. En effet, pour tout entier $x \geqslant 1$, où x représente la date exprimée en mois ($x = 1$ représente le mois de janvier 2005), $V(x)$ représente le nombre de jeux, exprimé en milliers, vendus durant le mois x.

1 Résoudre l'équation $V(x) = 0$. Comment interpréter ce résultat ?

2 a. Montrer que $V'(x) = 12 - 3\sqrt{x}$.

b. Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[1, 36]$.

3 Tracer la courbe représentative de la fonction V dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 1 cm en abscisse pour 2 mois et 1 cm en ordonnée pour 10 milliers de jeux).

4 La société décide d'arrêter la fabrication le mois pour lequel le nombre de jeux vendus devient inférieur à 10 000.

a. Résoudre graphiquement l'équation $V(x) = 10$.

b. On appelle x_1 la plus grande des deux solutions de cette équation.
Justifier, à l'aide du sens de variation de V, que $V(x) \leqslant 10$ pour $x \in [x_1, 36]$.
À quelle date la société arrêtera-t-elle la fabrication ?

▸Exercices n° 61 et 62

TP3 Exemple d'étude de la position relative de deux courbes

1 Étude de deux fonctions

Soit les fonctions f et g définies sur $[-1, 4]$ respectivement par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+10}{x+2}.$$

a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2 Étude de la position relative des deux courbes à l'aide de la calculatrice graphique

a. Utiliser les valeurs extrêmes obtenues dans les deux tableaux de variation précédents pour régler la fenêtre graphique de la calculatrice. Afficher alors les courbes représentatives des fonctions f et g sur $[-1, 4]$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, Γ celle de g et A leur point d'intersection.

b. Activer la fonction « trace » de la calculatrice.
Placer le curseur sur $\mathscr{C}$ en un point à gauche de A, puis sur Γ en gardant la même abscisse (utiliser les flèches vers le haut et vers le bas). Que peut-on dire de l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ par rapport à l'ordonnée du point de Γ ?
Déplacer le curseur vers la droite et comparer à chaque fois les ordonnées sur les deux courbes, pour une même abscisse. Que se passe-t-il lorsque le curseur est passé à droite de A ?

c. On appelle x_0 l'abscisse de A. Que peut-on dire du signe de $f(x) - g(x)$ lorsque x est inférieur à x_0 ? Lorsque x est supérieur à x_0 ?
Comment est située $\mathscr{C}$ par rapport à Γ à gauche de A ? À droite de A ?

3 Étude de la position relative des deux courbes par le calcul

a. Pour tout x de $[-1, 4]$, on note $d(x) = f(x) - g(x)$.

Montrer que $d(x) = \dfrac{(x-2)\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4\right)}{x+2}$.

b. Établir le tableau de signes de $d(x)$ sur $[-1, 4]$.

c. Que peut-on dire de la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ lorsque $d(x)$ est négatif ? Lorsque $d(x)$ est positif ? Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ se trouve-t-elle au-dessus de la courbe Γ ? En dessous de la courbe Γ ?

▸Exercices n° 68 à 71

l'essentiel

1> Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que **f est dérivable en x_0** si et seulement si il existe un nombre réel a et une fonction φ définie au voisinage de zéro tels que $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Le nombre a est alors appelé **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Si, pour tout x de I, f est dérivable en x, on dit que **f est dérivable sur I et on note f' sa fonction dérivée.**

2> Tangente

Soit f une fonction dérivable en x_0. La **tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0** est la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Elle admet pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3> Calculs de fonction dérivée

a ■ Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f définie sur :	Par :	Fonction dérivée f' définie par :	Fonction f dérivable sur :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ (n entier strictement positif)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier strictement positif)	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (cas particulier du précédent pour $n = 1$)	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$[0, +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

b ■ Opérations sur les fonctions dérivables

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle, alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si v est une fonction dérivable d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I, alors $u \circ v$ est dérivable sur J et $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$.

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.

1. La fonction u^n est dérivable sur I et $\mathbf{(u^n)' = n u' u^{n-1}}$.

2. Si u ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

Cas particulier pour $n = 1$: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

3. Si u est à valeurs dans $]0, +\infty[$, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4. Les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I et $\mathbf{(\cos u)' = -u' \sin u}$, $\mathbf{(\sin u)' = u' \cos u}$.

4> Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si, pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur I.

5> Extremum

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si f admet un extremum relatif en un point x_0 (distinct des bornes de I), alors la dérivée de f est nulle en x_0.

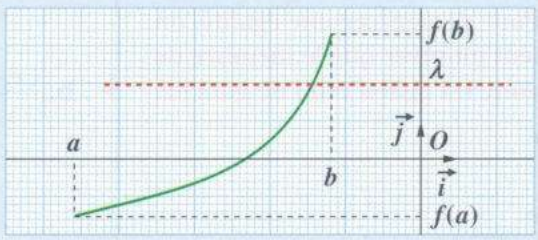
Attention, la réciproque de ce résultat est fausse : le fait que $f'(x_0) = 0$ n'entraîne pas nécessairement l'existence d'un extremum de f en x_0.

6> Dérivation et résolution approchée d'équations de la forme $f(x) = \lambda$

■ Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et λ un réel tels que :

- f est dérivable sur $[a, b]$;
- f est strictement croissante sur $[a, b]$;
- λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

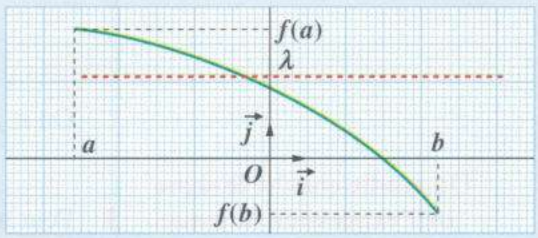
Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $[a, b]$.



■ Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et λ un réel tels que :

- f est dérivable sur $[a, b]$;
- f est strictement décroissante sur $[a, b]$;
- λ est compris entre $f(b)$ et $f(a)$.

Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $[a, b]$.



7> Dérivées successives

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée, f'' la dérivée de f', f''' ou $f^{(3)}$ la dérivée de f''.

8> Notation différentielle

Si f est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut (en particulier en physique) noter sa fonction dérivée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ et la dérivée seconde $f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Étudier les variations d'une fonction

1 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

a. Calculer la dérivée $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$.

Étudier son signe.

c. Établir le tableau de variation de f.

Réponses

On détermine la forme de f et on applique la formule qui convient.

a. f est une somme de fonctions.

On obtient : $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il est souvent nécessaire de changer sa forme et de mettre $f'(x)$ sous forme d'un quotient ou d'un produit.

Ici, comme $f'(x)$ est une somme comportant une partie rationnelle, on l'écrit sous la forme d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}.$$

Pour démontrer une égalité, on peut montrer que le membre de droite est égal à celui de gauche.

b.
$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3} &= \frac{(x^2-2x+1)(x+2)}{x^3}\\ &= \frac{x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2}{x^3}\\ &= \frac{x^3-3x+2}{x^3}\\ &= f'(x).\end{aligned}$$

On a $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$.

On étudie ensuite le signe de l'expression obtenue.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, x^3 est strictement positif : $f'(x)$ est alors du signe de $(x-1)^2(x+2)$, $x+2$ est strictement positif sur $]0, +\infty[$, $(x-1)^2$ est positif et s'annule pour $x = 1$.

Donc $f'(x)$ est positif sur $]0, +\infty[$ et s'annule pour $x = 1$.

On déduit de cette étude le tableau de variation de f.

c.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖	↗	3	↗	

Écrire une équation de la tangente à une courbe en un point

2 On reprend la fonction de l'exercice précédent. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 2.

Réponse

On utilise la formule du cours : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ici $x_0 = 2$, donc : $f(x_0) = \dfrac{13}{4}$ et $f'(x_0) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, donc la tangente à la courbe représentative de f en A admet pour équation : $y = \dfrac{1}{2}(x-2) + \dfrac{13}{4}$, soit $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{4}$.

Utiliser l'étude des variations d'une fonction pour résoudre une équation ou une inéquation

3 On reprend la fonction et le tableau de variation de l'exercice **1**.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0{,}25\ ;\ 1]$.

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.

c. Déduire de ce qui précède les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Réponses

On utilise les variations de la fonction f et le théorème de la page 12.

a. Sur $[0{,}25\ ;\ 1]$, f est dérivable, strictement croissante et 0 est compris entre $f(0{,}25) = -3{,}75$ et $f(1) = 3$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0{,}25\ ;\ 1]$.

On utilise les tableaux de valeurs de la calculatrice et on procède par approximations successives.

b. $f(0{,}25) < 0$ et $f(1) > 0$, donc $\alpha \in [0{,}25\ ;\ 1]$.

À 10^{-1} près, on a :

x	0,3	0,4
$f(x)$	– 0,81	1,65

Comme $f(0{,}3) < 0$ et $f(0{,}4) > 0$, $\alpha \in [0{,}3\ ;\ 0{,}4]$.

À 10^{-2} près, on a :

x	0,31	0,32	0,33
$f(x)$	– 0,42	– 0,07	0,24

Comme $f(0{,}32) < 0$ et $f(0{,}33) > 0$, $\alpha \in [0{,}32\ ;\ 0{,}33]$.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est donc 0,32.

On utilise le sens de variation de f et la solution de l'équation $f(x) = 0$.

c.

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$+$	
f	‖	↗	0	↗	3	↗	

donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$.

Étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$, où $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont les équations respectives des courbes.

4 Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f de l'exercice précédent et de la droite Δ d'équation $y = x$.

Réponse

$f(x) - x = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3x-1}{x^2}$; x^2 est strictement positif sur $]0, +\infty[$ donc $f(x) - x$ est du signe de $3x - 1$:

- si $x \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right[$, $f(x) - x < 0$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ,
- si $x \in \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$, $f(x) - x > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ,
- $\mathcal{C}$ coupe Δ au point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Calculer la fonction dérivée d'une fonction composée

On remarque que $f = u \circ v$ donc que $f(x) = u(v(x))$. On identifie les fonctions u et v et on utilise $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$.

5 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$.

Réponse

f est une fonction composée : on applique d'abord une fonction polynôme de degré 2, puis la fonction cosinus :

$$x \overset{v}{\mapsto} x^2 + 1 = X$$
$$X \overset{u}{\mapsto} u(X) = \cos X$$

avec $v'(x) = 2x$ et $u'(X) = -\sin X$.
On obtient $f'(x) = -2x \sin(x^2 + 1)$.

Calcul de fonctions dérivées (rappels de Première)

Dans les exercices **1** à **19**, calculer la fonction dérivée de la fonction indiquée, qui est définie et dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ donné.

1

a. $f(x) = x^7$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = x^5$ et $I = \mathbb{R}$.

2

a. $f(x) = 6$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = -2005$ et $I = \mathbb{R}$.

3

a. $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $I =]0, +\infty[$.

b. $g(t) = \dfrac{1}{t^5}$ et $I =]-\infty, 0[$.

4

C **a.** $f(x) = x^2 + 7x - 3$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $u(x) = -5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ et $I = \mathbb{R}$.

5

a. $g(x) = \dfrac{2x^4}{5} + \dfrac{x^2}{3} - 7x - 3$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $h(t) = -\dfrac{t^4}{8} + \dfrac{2t^2}{3} - 5$ et $I = \mathbb{R}$.

6

C **a.** $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + \dfrac{1}{t}$ et $I =]-\infty, 0[$.

b. $g(t) = 4t^4 + 2t^2 - \dfrac{1}{t^3}$ et $I =]0, +\infty[$.

7

a. $j(x) = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{5}{x^4}$ et $I =]0, +\infty[$.

b. $k(x) = \dfrac{3x^7}{7} + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{7}{x^2}$ et $I =]0, +\infty[$.

8

a. $v(x) = x + 2\sqrt{x}$ et $I =]0, +\infty[$.

b. $w(x) = 3x^3 - \dfrac{4\sqrt{x}}{5}$ et $I =]0, +\infty[$.

9

C **a.** $f(x) = (x^2 + 3x - 1)(2x^2 + 1)$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $h(t) = (3t + 1)\cos t$ et $I = \mathbb{R}$.

10

a. $f(x) = x^4\sqrt{x}$ et $I =]0, +\infty[$.

b. $g(x) = 5x^3 \sin x$ et $I = \mathbb{R}$.

11

a. $\varphi(t) = \cos t \sin t$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $\lambda(t) = (3t^2 + 8)\sin t$ et $I = \mathbb{R}$.

12

C **a.** $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 5}$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \dfrac{-4}{x^4 - 1}$ et $I =]-1, 1[$.

13

a. $f(t) = t + 3 - \dfrac{1}{t + 2}$ et $I =]-\infty, -2[$.

b. $k(t) = 5\sqrt{t} - 7 + \dfrac{3}{t - 2}$ et $I =]0, 2[$.

14

C **a.** $f(x) = \dfrac{3x + 5}{x - 3}$ et $I =]3, +\infty[$.

b. $j(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{2x + 1}$ et $I = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$.

15

a. $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $I =]0, +\infty[$.

b. $g(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{x + 1}$ et $I =]0, +\infty[$.

16

C **a.** $f(x) = \sqrt{3x - 1}$ et $I = \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

b. $g(t) = (5t + 3)^3$ et $I = \mathbb{R}$.

17

a. $f(x) = \sqrt{-5x + 10}$ et $I =]-\infty, 2[$.

b. $u(t) = (-4t + 7)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

18

a. $f(\theta) = \cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

19

a. $f(t) = 5(3 - 4t)^5$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = 3\cos \pi x$ et $I = \mathbb{R}$.

exercices

Dérivation et tangente

Dans les exercices **20** à **23**, calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a puis tracer cette tangente.

20

C $f(x) = x^2 + x - 3$ et $a = -1$.

21

$f(x) = \cos x \sin x$ et $a = \pi$.

22

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$ et $a = -1$.

23

$f(t) = \sqrt{3t - 5}$ et $a = 2$

Dans les exercices **24** à **27**, déterminer une équation de la tangente en a à la courbe représentative de la fonction f.

24

C $f(x) = x^3 - x - 3$ et $a = 1$.

25

$f(x) = t\sqrt{t}$ et $a = 9$.

26

$f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + x + 1}$ et $a = -1$.

27

$f(x) = \cos 3x$ et $a = \dfrac{\pi}{4}$.

Dérivation des fonctions composées

Dans les exercices **28** à **36**, calculer la fonction dérivée de la fonction indiquée, qui est définie et dérivable sur l'intervalle I donné.

28

C **a.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

29

a. $g(x) = \sqrt{3x^4 + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $h(x) = (3x^3 + 2x^2)^3$ et $I = \mathbb{R}$.

30

a. $f(x) = (x + \sin x)^4$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $k(x) = (3x^3 - \cos x)^3$ et $I = \mathbb{R}$.

31

a. $f(\theta) = \cos^2\theta$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $g(\theta) = \sin^3\theta$ et $I = \mathbb{R}$.

32

a. $f(\theta) = \cos(\theta^2)$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $g(\theta) = \sin(\theta^3)$ et $I = \mathbb{R}$.

33

C **a.** $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x + 7)^3}$ et $I = \mathbb{R}$.
b. $f(x) = \dfrac{1}{(3x^4 + 5x + 3)^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

34

a. $h(x) = \dfrac{5}{(x^3 - 1)^2}$ et $I =]-\infty, 1[$.
b. $i(x) = -7(x^2 + 1)^3$ et $I = \mathbb{R}$.

35

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ et $I =]-2, +\infty[$.
b. $j(t) = \sqrt{t^2 + t + 1}$ et $I = \mathbb{R}$.

36

a. $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$ et $I =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
b. $f(t) = \sin^2\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

Dérivation et variations

Dans les exercices **37** à **43**, f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I indiqué. Calculer la fonction dérivée de f, étudier son signe, en déduire le sens de variation de f et dresser enfin le tableau de variation de f.

37

C $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ et $I = \mathbb{R}$.

38

$f(t) = \dfrac{2t - 1}{t - 1}$ et $I =]-\infty, 1[$.

39

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $I = \left[\dfrac{1}{10}, 5\right]$.

40

$f(x) = \sqrt{-2x + 4}$ et $I =]-\infty, 2[$.

41

$f(t) = (t^2 + t + 1)^3$ et $I = [-1, 2]$.

42

$$f(t) = \frac{5}{(t^4+1)^2} \text{ et } I = [-3, 3].$$

43

$$f(\theta) = \cos^2\theta \text{ et } I = [0, \pi].$$

Dérivation et représentation graphique

44

C Soit la fonction f définie sur $I = [-1,5 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x+2}$$

a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. On appelle x_0 et x_1 les solutions (avec $x_0 < x_1$). Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b. Déterminer le signe de f. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

c. Calculer la fonction dérivée de f, étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

d. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Tracer la tangente $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 et la tangente $\mathscr{C}_2$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_1, puis tracer $\mathscr{C}$.

45

Soit la fonction f définie sur $I = [-1, 1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

a. Montrer que f est paire. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b. En remarquant que f est dérivable sur $]-1, 1[$, déterminer la fonction dérivée de f.

c. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

d. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm, tracer la courbe représentative de f.

46

Soit la fonction f définie sur $I = [-3, 15]$ par

$$f(x) = \frac{x^2+11x+24}{(x+5)^2}.$$

a. Calculer la fonction dérivée de f, étudier le signe de $f'(x)$, puis déterminer le tableau de variation de f.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

b. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse (-3).

c. Tracer $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.

47

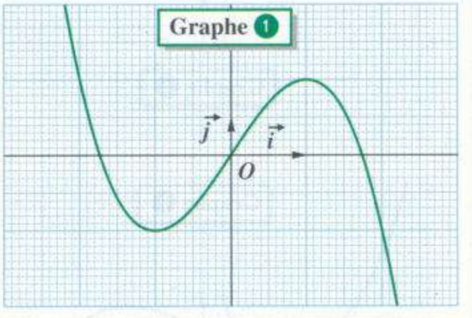
C Les quatre représentations ci-dessous sont les graphes de quatre fonctions f, g, h et k, dont on donne les fonctions dérivées. Retrouver quelle fonction est représentée par chaque graphe.

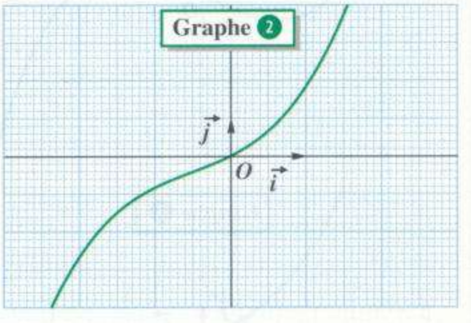
a. $f'(x) = -3x^2 + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

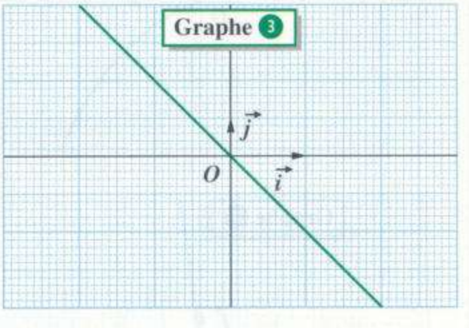
b. $g'(x) = 3x + 5$ sur $I = \mathbb{R}$.

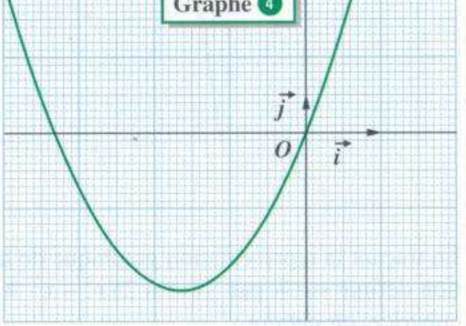
c. $h'(x) = x^2 + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

d. $k'(x) = -2$ sur $I = \mathbb{R}$.









48

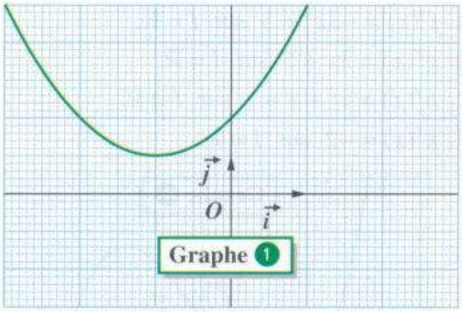
Même exercice que le précédent avec :

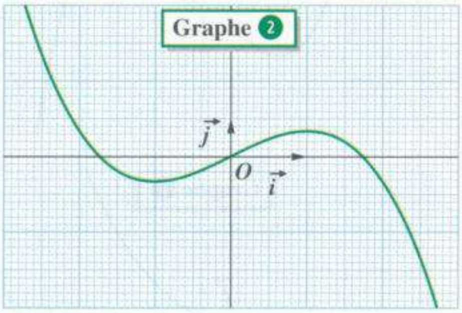
a. $f'(x) = -x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

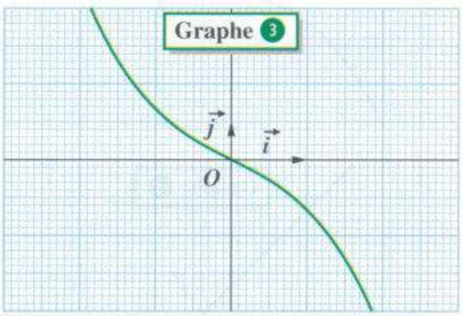
b. $g'(x) = 7$ sur $I = \mathbb{R}$.

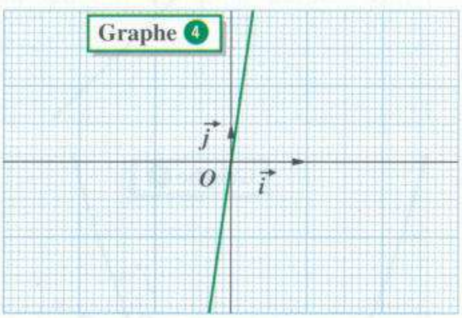
c. $h'(x) = -x^2 - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

d. $k'(x) = 2x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$.



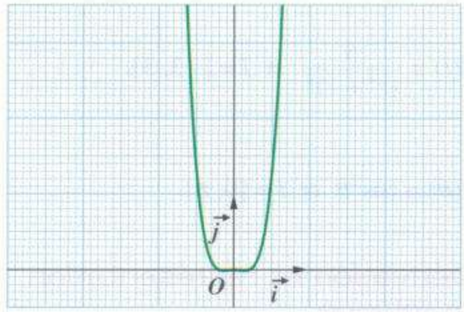






49

C En traçant la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 25x^4 - x^2$ à la calculatrice, on obtient :

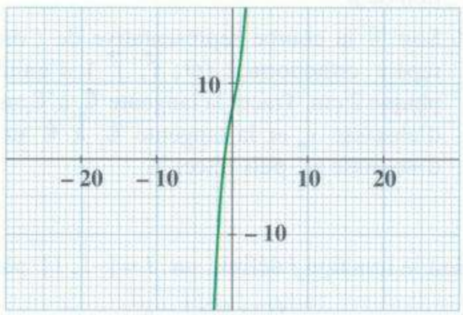


a. La courbe laisse supposer un certain sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Est-ce réellement le cas ? Justifier votre réponse en calculant la fonction dérivée de f.

b. Si la courbe ci-dessus induit en erreur, proposer un réglage de la fenêtre de la calculatrice qui permette de rendre visible tous les changements de sens de variation.

50

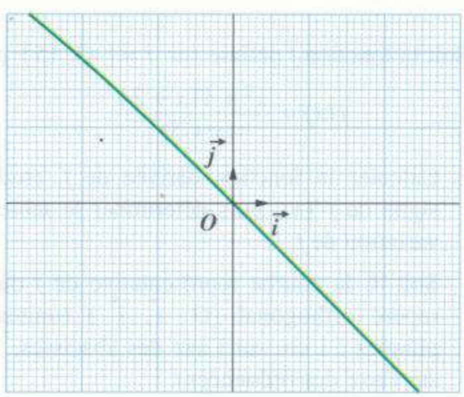
En traçant la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + 7$ à la calculatrice, on obtient :



La courbe laisse supposer un certain sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Est-ce réellement le cas ? Justifier votre réponse en calculant la fonction dérivée de f.

51

En traçant la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{900}x^3 - \dfrac{1}{120}x^2 - x$ à la calculatrice, on obtient :



a. La courbe laisse supposer un certain sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Est-ce réellement le cas ? Justifier votre réponse en calculant la fonction dérivée de f.

b. Si la courbe ci-avant induit en erreur, proposer un réglage de la fenêtre de la calculatrice qui permette de rendre visible tous les changements de sens de variation.

Dérivation, extremums et encadrement

52

C Soit la fonction f définie sur $I = [-5, 3]$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 36x + 4.$$

a. En utilisant la dérivée de f, dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire un encadrement de $f(x)$ quand x varie dans $[-5, 3]$.

53

Soit la fonction f définie sur $I = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}.$$

a. En utilisant la dérivée de f, dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire les extremums de f (sur I).

54

Soit la fonction f définie sur $I = [-7, 3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}.$$

a. En utilisant la dérivée de f, dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant \sqrt{3}$.

c. Préciser enfin le maximum de f (sur I).

Dérivation, résolution approchée d'une équation et signe

55

C Soit f la fonction définie sur $[-4, 4]$ par :

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x - 7.$$

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[-4, 4]$. Donner la valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près par défaut.

c. En déduire le signe de f sur $[-4, 4]$.

56

Même exercice que le précédent avec :

$$f(x) = -2x^3 - x + 5 \text{ dans } [0, 2].$$

57

Soit u et v les fonctions définies sur $[-2, 2]$ par :

$$u(x) = \frac{3x^3 - 3}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad v(x) = -x.$$

a. Montrer que l'équation $u(x) = v(x)$ équivaut à l'équation $4x^3 + x - 3 = 0$.

b. Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par :

$$f(x) = 4x^3 + x - 3.$$

Dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[-2, 2]$. Donner la valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près par défaut.

d. Que peut-on en déduire sur l'équation $u(x) = v(x)$? Interpréter graphiquement ce résultat sur les courbes représentatives de u et v.

58

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 5$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique x_0 dans $[-1, 2]$. Donner la valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près par défaut.

c. Résoudre l'inéquation $f(x) < 10$.

d. Préciser tous les réels λ tels que l'équation $f(x) = \lambda$ admette une unique solution dans $[-1, 2]$. Justifier.

59

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $[-3, 3]$ par $f(x) = x^3$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Soit a appartenant à $[-27, 27]$. Montrer que l'équation $x^3 = a$ admet une solution unique dans $[-3, 3]$ (cette solution est appelée racine cubique de a et se note $\sqrt[3]{a}$).

c. Déterminer une valeur approchée à 0,1 près de $\sqrt[3]{11}$ puis de $\sqrt[3]{-23}$.

60

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 2\sin x - x$.

a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0, \pi]$. Donner la valeur de x_0 à 10^{-2} près par défaut.

d. Soit la fonction g définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = 2\sin x - x$.
Montrer que g est une fonction impaire. En déduire que l'équation $2\sin x - x = 0$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

61

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ par :

$$f(x) = -3x + 5 - \frac{3}{2x^2}.$$

a. Montrer que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

b. Déterminer la fonction dérivée de f et la mettre sous la forme d'un quotient.

c. À l'aide de la question **a.**, étudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Dresser enfin le tableau de variation de f.

d. Déduire de l'étude précédente que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

e. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions.

f. Résoudre alors l'inéquation $f(x) > 0$.

62

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x.$$

a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[0, \pi]$. Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 0,01.

e. En déduire le signe de f sur $[0, \pi]$.

Dérivées successives

63

C Calculer les fonctions dérivées première, seconde, troisième et quatrième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$. Quelle relation simple peut-on écrire entre f et $f^{(4)}$? entre f et f'' ?

64

Même exercice que le précédent avec $f(x) = \sin x$.

65

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin 3x$. Calculer les fonctions dérivées première et deuxième de g. Quelle relation simple peut-on écrire entre g'' et g ?

66

C Soit la fonction f définie sur $[0, 4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + 3.$$

a. Calculer f' puis f''.

b. Étudier le signe de f'' et en déduire le sens de variation de f'.

c. Dresser le tableau de variation de f'.

d. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f'.

e. Dresser alors le tableau de variation de f.

67

Même exercice que le précédent avec la fonction f définie sur $[0, 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2.$$

Position relative de deux courbes

68

C Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}.$$

a. Étudier les variations de f.

b. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.

c. Représenter, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 1 cm, la courbe de f et la droite $\mathcal{D}$.

69

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

a. Étudier les variations de f.

b. Pour tout réel x, exprimer $f(x) - g(x)$ sous la forme d'un quotient.

c. En déduire la position relative des courbes représentatives de f et g.

d. Tracer, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm), les courbes représentatives de f et de g.

70

Même exercice que le précédent avec :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 \quad \text{sur }]-1, +\infty[.$$

71

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

a. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

b. Donner une équation de $\mathcal{T}$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. Soit la fonction g définie sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Montrer que $g(x) = \dfrac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$ et déterminer le tableau de signe de $g(x)$.

d. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$.

e. Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}$.

Pour aller plus loin…

72

Soit la fonction f définie sur $I = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ par

$f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x-3}$, où a et b sont deux nombres réels. On suppose que f admet en 0 un extremum qui vaut -1.

a. Que vaut $f(0)$? $f'(0)$? Justifier.

b. Exprimer la fonction dérivée de f en fonction de a et b.

c. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de a et b.

d. Ecrire l'expression de f, puis étudier ses variations.

e. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

73

Soit la fonction f définie sur $I = [-3, 3]$ par

$f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$, où a et b sont deux nombres réels. On suppose que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f passe par le point $A(1, 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à -2.

a. Que vaut $f(1)$? $f'(1)$? Justifier.

b. En déduire les valeurs des réels a et b.

c. Déterminer le tableau de variation de f.

d. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, tracer la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1, puis tracer $\mathscr{C}$.

74

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout réel x positif, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sin x - x$.

b. Calculer $f(0)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$,

c. Conclure sur une des inégalités cherchées.

2. Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

a. Calculer les dérivées première et seconde de g.

b. Utiliser la question **1.** pour montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, $g''(x)$ est positif.

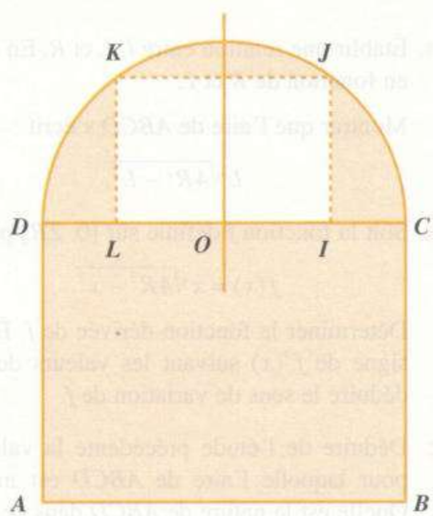
c. À partir du signe de $g''(x)$, établir le sens de variation de g' sur $[0, +\infty[$. Calculer $g'(0)$ et en déduire le signe de $g'(x)$ sur $[0, +\infty[$.

d. À partir du signe de $g'(x)$, déterminer le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

e. Conclure de cette étude la deuxième inégalité.

75

La façade représentée ci-dessous est formée d'un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$. La partie supérieure a la forme d'un demi-cercle $\mathscr{C}$. On veut y percer une ouverture rectangulaire $IJKL$ d'aire la plus grande possible.



Dans la suite, on se place dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ tel que le point C ait pour coordonnées $(3, 0)$ et que le demi-cercle $\mathscr{C}$ soit situé au dessus de l'axe des abscisses.

a. Donner une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 3. En déduire que le demi-cercle $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 3]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

b. On note x l'abscisse du point I. Préciser alors les coordonnées de J puis montrer que l'aire du rectangle $IJKL$ est $a(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$.

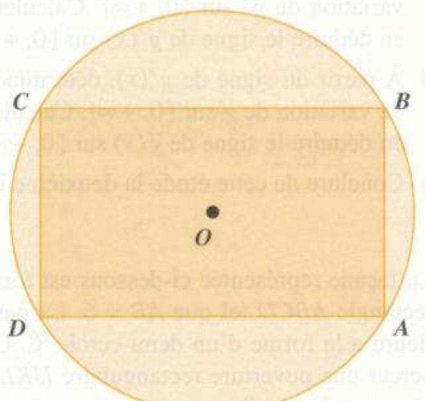
c. Étudier les variations de la fonction a sur $[0, 3]$.

d. Déterminer alors la position de I pour laquelle l'aire de l'ouverture est maximale.

76

On souhaite tailler dans un tronc d'arbre de rayon R une poutre de section rectangulaire d'aire maximale. La section du tronc est représentée ci-dessous par le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R et la section de la poutre par le rectangle $ABCD$ inscrit dans $\mathscr{C}$.

On pose $AD = L$ et $AB = l$.



a. Établir une relation entre l, L et R. En déduire l en fonction de R et L.

Montrer que l'aire de $ABCD$ s'écrit :

$$L\sqrt{4R^2 - L^2}.$$

b. Soit la fonction f définie sur $[0, 2R]$ par :

$$f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Déterminer la fonction dérivée de f. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f.

c. Déduire de l'étude précédente la valeur de L pour laquelle l'aire de $ABCD$ est maximale. Quelle est la nature de $ABCD$ dans ce cas ?

77

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0, 8)$, $B(2, 8)$ et $C(6, 0)$.

On souhaite inscrire un arc de parabole $\mathscr{P}$ dans le trapèze $OABC$ tel que $\mathscr{P}$ vérifie les conditions suivantes :

(1) $\mathscr{P}$ est tangente à (AB) en A ;

(2) $\mathscr{P}$ est tangente à (BC) en un point I que l'on déterminera dans l'exercice.

On cherche donc une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ vérifie les conditions précédentes.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

2. a. D'après la condition (1), que vaut $f(0)$? En déduire la valeur de c.

b. D'après la condition (1), quelle particularité possède la tangente à la courbe $\mathscr{P}$ de f au point d'abscisse 0 ? Que vaut $f'(0)$?

c. En déduire que $b = 0$.

3. a. Déterminer l'équation réduite de la droite (BC). Préciser sa pente.

On appelle x_0 l'abscisse du point I où $\mathscr{P}$ est tangente à (BC).

b. Que représente $f'(x_0)$ pour la tangente à $\mathscr{P}$ en I ? En déduire que $x_0 = -\dfrac{1}{a}$.

c. En utilisant le point I, justifier que :

$$ax_0^2 + 8 = -2x_0 + 12.$$

d. Déduire des deux résultats la valeur de a puis celle de x_0.

e. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 8$ vérifie les conditions (1) et (2).

4. Représenter les points A, B, C et I. Tracer les segments $[AB]$ et $[BC]$, puis tracer la courbe $\mathscr{P}$.

78

L'intensité du courant dans un condensateur est donnée par $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$, C étant la capacité du condensateur.

a. Exprimer $i(t)$ si $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$.

b. En utilisant la relation $\cos a = \sin\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$, exprimer l'intensité à l'aide de la fonction sinus.

79

L'énergie stockée dans un condensateur s'écrit $W(t) = \frac{1}{2}\,Cu^2(t)$, où C est la capacité du condensateur et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

On suppose ici que $u(t) = U\sqrt{2}\sin t$.

a. Exprimer $W(t)$, puis calculer $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}(t)$ en fonction de C et U.

b. Étudier le signe de $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de W sur $[0, 2\pi]$.

80

L'intensité efficace dans un circuit RLC en série, alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$, est donnée par :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

où U, R, L, C sont des constantes strictement positives. On cherche la valeur de ω pour laquelle I est maximale, c'est-à-dire pour laquelle la grandeur $A = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ est minimale.

a. Calculer la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}$.

Étudier son signe et établir le tableau de variation de A quand ω varie dans $]0, +\infty[$.

b. En déduire qu'il existe une seule valeur de ω que l'on précisera pour laquelle I est maximale.

81

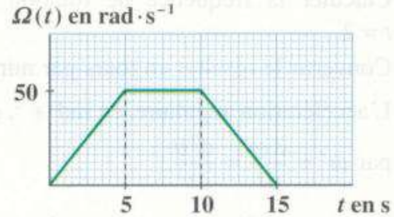
Pour un moteur en rotation entraînant une charge à la vitesse angulaire $\Omega(t)$, la loi de la mécanique s'écrit $J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = C_e + C_r$ où :

• J est le moment d'inertie du système (on prendra ici $J = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2}$) ;

• C_r est le moment du couple résistant total, incluant les pertes (on prendra ici $C_r = -20\ \mathrm{N \cdot m}$) ;

• C_e est le moment du couple électromagnétique du moteur.

Pour ce système, le cahier des charges impose la loi de vitesse suivante, définie graphiquement par :



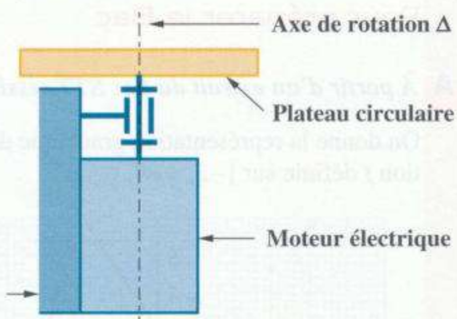
a. Sur chacun des trois intervalles $[0, 5[$, $[5, 10[$ et $[10, 15]$, déterminer $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t)$ puis en déduire $C_e(t)$.

b. Tracer la représentation graphique de la fonction C_e sur $[0, 15]$.

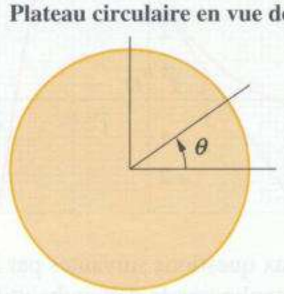
c. Arrêt d'urgence : on veut maintenant que l'arrêt se fasse sur l'intervalle de temps $[10, 12]$ à la place de $[10, 15]$. Déterminer la nouvelle expression de $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t)$ sur $[10, 12]$, en déduire la nouvelle expression de $C_e(t)$ sur cet intervalle.

82

Un moteur électrique permet d'entraîner en rotation un plateau circulaire.



Plateau circulaire en vue de dessus



Pendant la phase de démarrage, la loi du mouvement est donnée par $\theta(t) = 12{,}5\pi t^2$, où θ est l'angle de rotation du plateau en radians et t le temps en secondes.

1. Calculer l'angle θ balayé par le plateau au temps $t = 2$ et en déduire le nombre n_2 de tours effectués.

2. La fréquence de rotation, en radians par seconde ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$), est donnée par $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

a. Expliciter $\omega(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

b. Calculer la fréquence de rotation au temps $t = 2$.

Convertir le résultat en tours par minute.

3. L'accélération angulaire, en $\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$, est donnée par $\omega' = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

a. Expliciter $\omega'(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

b. Calculer l'accélération angulaire au temps $t = 2$.

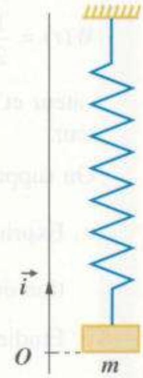
4. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au plateau permet de déterminer le moment du couple exercé par le moteur sur le plateau : $\mathcal{M}_{\text{couple}/\Delta} = I_\Delta \omega'$ où :

- $\mathcal{M}_{\text{couple}/\Delta}$ est le moment du couple moteur sur l'axe Δ en $\mathrm{N \cdot m}$,
- I_Δ est le moment d'inertie du plateau par rapport à l'axe Δ en $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Sachant que $I_\Delta = 0{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, calculer $\mathcal{M}_{\text{couple}/\Delta}$ au temps $t = 2$.

83

Une masse m est suspendue à un ressort. Sa position est repérée par son abscisse $x = f(t)$. Les lois de la cinématique montrent que, pour tout nombre réel t positif, on a $f''(t) = -4f(t)$.



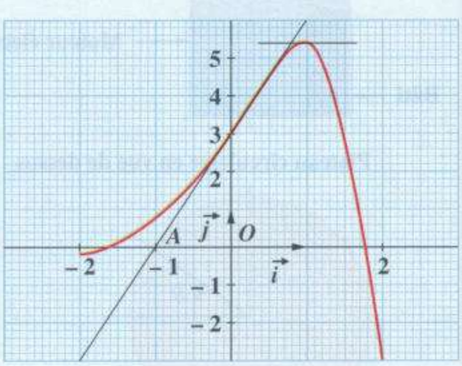
a. En calculant la dérivée seconde de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$, où a et b sont deux nombres réels, montrer que cette fonction vérifie l'égalité proposée.

b. On admet que la fonction cherchée a la forme proposée à la question précédente. À l'instant $t = 0$, la masse est à la position $x = 0$ et a une vitesse initiale $v_0 = f'(0) = 2$. En déduire les valeurs de a et b et l'expression de la fonction f.

Pour préparer le Bac

A *À partir d'un extrait du bac STT session 2002*

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2, +\infty[$.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique (on expliquera la démarche utilisée).

1. Quelles sont les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$?

2. La tangente au point d'abscisse 0 passe par $A(-1, 0)$; en déduire $f'(0)$.

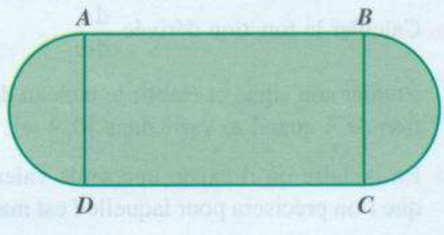
3. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de la solution positive α et de la solution négative β de l'équation $f(x) = 0$.

4. a. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

b. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

B *Sujet de Bac STI session 1998*

Un terrain de jeu est formé d'un rectangle $ABCD$ et de deux demi-disques de diamètres respectifs $[AD]$ et $[BC]$. On note x le rayon de chaque demi-disque et l la longueur AB, mesurés en mètres.



1. Calculer le périmètre du terrain en fonction de x et l.

2. Dans toute la suite de l'exercice, le périmètre du terrain est de 400 mètres.

a. Exprimer l en fonction de x.

b. Montrer que l'aire, en $\mathrm{m^2}$, du terrain peut s'écrire $400x - \pi x^2$.

3. Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = 400x - \pi x^2$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

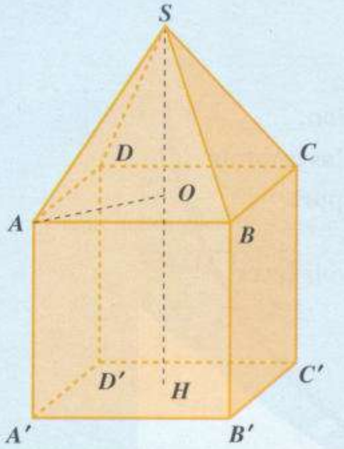
b. En déduire la valeur exacte de x pour laquelle l'aire du terrain est maximale, puis calculer la valeur de l correspondante. Que constate-t-on ?

c. Calculer la valeur exacte de cette aire maximale, puis en donner une valeur approchée à une unité près par défaut.

C *Sujet de bac STI session 1999*

Partie A

Une lanterne a la forme d'une pyramide régulière, $SABCD$, à base carrée reposant sur un cube $ABCDA'B'C'D'$.



La hauteur SH de la lanterne est de 30 cm. Soit h, en cm, la hauteur SO de la pyramide et x, en cm, la longueur de l'arête du cube. On admet que $0 \leqslant x \leqslant 30$.

1. Exprimer en fonction de x la hauteur h de la pyramide.

2. Exprimer en fonction de x le volume V de la lanterne.

On rappelle que le volume d'une pyramide est : $\dfrac{\text{Surface de base} \times \text{Hauteur}}{3}$.

Partie B

1. Soit la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0, 30]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}(30x^2 + 2x^3)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ (1 cm représente 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 1 500 unités sur l'axe des ordonnées).

a. Calculer la dérivée f' de f.

b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.

2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant (donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à la centaine près) :

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

b. Construire $\mathscr{C}$.

3. Déterminer, à l'aide de la représentation graphique, la valeur de x pour laquelle $f(x) = 15\,000$.

Partie C

La longueur de l'arête du cube est de 24 cm. Déterminer alors :

1. le volume de la lanterne ;

2. la hauteur h de la pyramide ;

3. la longueur SA.

CHAPITRE 2

Limites

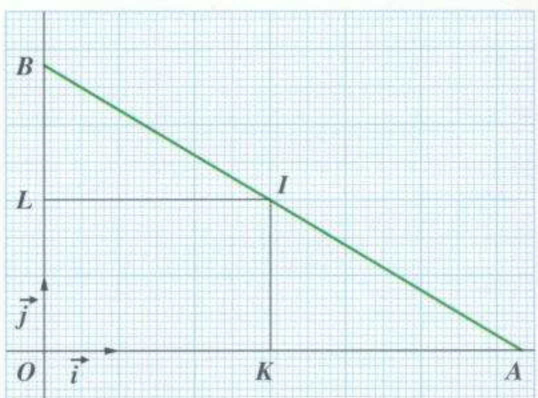
OBJECTIFS

- Savoir étudier le comportement d'une fonction lorsque la variable s'approche des bornes de son intervalle de définition.
- Savoir interpréter graphiquement une limite en terme d'asymptote.
- Savoir étudier la position relative d'une courbe par rapport à une asymptote.
- Comprendre ce qu'est une forme indéterminée et savoir lever certaines indéterminations **(TP1)**.
- Utiliser les limites pour compléter l'étude des fonctions **(TP2)**.
- Connaître les principales propriétés de la fonction tangente **(TP3)**.

ACTIVITÉ 1 « C'est un comble ! »

Objectif : Introduire la notion de limite dans un cadre concret.

En faisant les plans d'une maison, on souhaite prévoir, sous le toit, une pièce de largeur 3 mètres et de hauteur 2 mètres.
Cette pièce est représentée par le rectangle *OKIL*. La toiture est représentée par le segment $[AB]$ passant par *I*.



1. On appelle x l'abscisse de A dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.

a. Dans quel intervalle varie x ? Justifier.

b. Montrer que la hauteur de toit, c'est-à-dire l'ordonnée de B, est $OB = \dfrac{2x}{x-3}$.

c. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$. Dresser son tableau de variation, puis tracer sa représentation graphique sur la calculatrice pour $x \in [3{,}5\,;\,15]$.

2. Quand A s'approche de K

a. Que peut-on dire de x lorsque A s'approche de K ?

b. Que peut-on penser de la hauteur OB lorsque A s'approche de K ?
Comment cela peut-il se traduire sur la représentation graphique de f ?

c. Compléter le tableau suivant :

x	3,1	3,01	3,001	3,0001
$f(x)$				

d. Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de $f(x)$ lorsque x s'approche de 3 ?

e. Lorsque x s'approche de 3, on peut poser $x = 3 + h$, où h est proche de zéro et positif (h représente l'écart entre A et K). Montrer que $f(3+h) = 2 + \dfrac{6}{h}$. Résoudre alors l'inéquation $2 + \dfrac{6}{h} > 10^{15}$ et préciser un entier naturel p tel que, si $0 < h < 10^{-p}$, alors $f(3+h) > 10^{15}$.

f. Recopier et compléter : Lorsque x tend vers ...., $f(x)$ tend vers .... ; on note : $\lim\limits_{x \to ......} f(x) = ...$

3. Quand A s'éloigne... (... et que l'on s'éloigne des problèmes de greniers)

a. Que peut-on dire de x lorsque A est très loin de K ?

b. Comment évolue alors la position de B ? la hauteur OB ?
Comment cela peut-il se traduire sur la représentation graphique de f ?

c. Compléter le tableau suivant :

x	10	50	100	1 000
$f(x)$				

d. Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient très grand ?

e. Montrer que pour tout $x > 3$, $\dfrac{2x}{x-3} > 2$. Déterminer ensuite un entier naturel m tel que, si $x > m$, alors $0 < f(x) - 2 < 10^{-15}$.

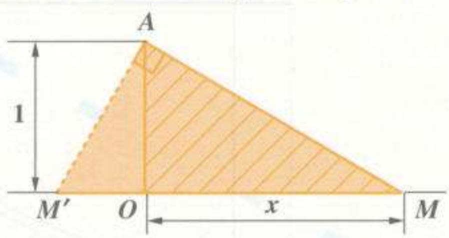
f. Recopier et compléter : Lorsque x tend vers ...., $f(x)$ tend vers .... ; on note : $\lim\limits_{x \to ......} f(x) = ...$

Dans ce chapitre, on étudie le comportement d'une fonction lorsque la variable devient très grande ou s'approche d'une valeur pour laquelle la fonction n'est pas définie. On verra ensuite comment les résultats d'une telle étude se traduisent sur la représentation graphique d'une fonction.

ACTIVITÉ 2 Comparaison d'aires et position relative de courbes

Objectif : Introduire la notion d'asymptote oblique à partir d'une situation géométrique.

OAM est un triangle rectangle en O et tel que $OA = 1$. On construit sur la demi-droite opposée à $[OM)$ le point M' tel que le triangle AMM' soit rectangle en A. On pose $OM = x$ et on s'intéresse aux aires des triangles AMM' et MAO.



1. Expérimentation à l'aide de GéoplanW

On va se servir de GéoplanW pour émettre des conjectures sur les aires des triangles MAO et AMM'.

a. Créer :

• la variable réelle x dans l'intervalle [0, 30] (*créer → numérique → variable réelle libre dans un intervalle*) ;

• les points O, A et M de coordonnées respectives (0, 0), (0, 1) et (x, 0) (*créer → point → point repéré → dans le plan*) ;

• la droite (AM) et sa perpendiculaire d passant par A (*créer → ligne → droite → perpendiculaire*) ;
• le point M' intersection de d et (OM) (*créer → point → intersection de 2 droites*).
• les triangles MAO et AMM' ; (*créer → ligne → polygone → polygone défini par ses sommets*).

b. Faire calculer à GéoplanW les aires des triangles AMM' et MAO que l'on appellera respectivement A_1 et A_2 (*créer → numérique → calcul géométrique → aire d'un triangle*), puis afficher ces valeurs (*créer → affichage → variable numérique déjà définie*).

c. Créer les points K et L de coordonnées respectives (x, A_1) et (x, A_2).

d. Faire varier la position de M en modifiant la variable x à l'aide des touches → et ← du clavier (*piloter → piloter au clavier*).
• Lorsque x devient grand, comparer les triangles AMM' et MAO, leurs aires A_1 et A_2, puis les courbes décrites par les points K et L (sélectionner les points K et L *afficher → sélection trace*, puis passer en mode trace *afficher → mode trace (bascule)*).
• Faire une conjecture sur la limite de $A_1 - A_2$ lorsque x tend vers l'infini. Comment est-ce que cette conjecture se traduit sur les courbes décrites par K et L ?

2. Étude théorique

a. En utilisant le théorème de Pythagore, calculer AM en fonction de x puis AM' en fonction de OM'. En déduire que $OM' = \dfrac{1}{x}$.

b. Calculer l'aire A_1 du triangle AMM' en fonction de x.
On appelle f la fonction, définie sur $]0, +\infty[$, qui à x fait correspondre A_1.
Vérifier que $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Quel est le point de l'expérimentation avec GéoplanW qui décrit la courbe représentative de f ?

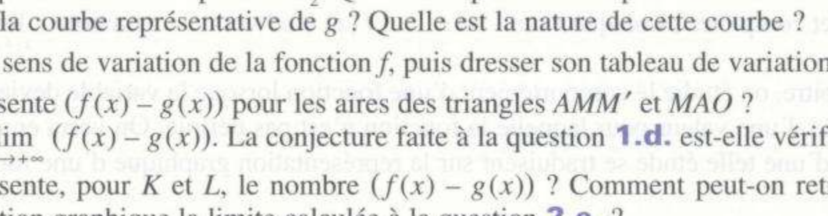
c. Calculer l'aire A_2 du triangle OAM en fonction de x. On appelle g la fonction, définie sur $]0, +\infty[$, qui à x fait correspondre A_2. Quel est le point de l'expérimentation avec GéoplanW qui décrit la courbe représentative de g ? Quelle est la nature de cette courbe ?

d. Étudier le sens de variation de la fonction f, puis dresser son tableau de variation.

e. Que représente $(f(x) - g(x))$ pour les aires des triangles AMM' et MAO ?
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$. La conjecture faite à la question **1.d.** est-elle vérifiée ?

f. Que représente, pour K et L, le nombre $(f(x) - g(x))$? Comment peut-on retrouver sur la représentation graphique la limite calculée à la question **2.e.** ?

La courbe représentative de la fonction g est une droite $\mathscr{D}$. Elle peut ici servir de « guide » pour le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f pour les grandes valeurs de x (on dit que $\mathscr{D}$ est une asymptote de $\mathscr{C}$). Dans ce chapitre, on étudie cette notion d'asymptote.



1 Notion de limite

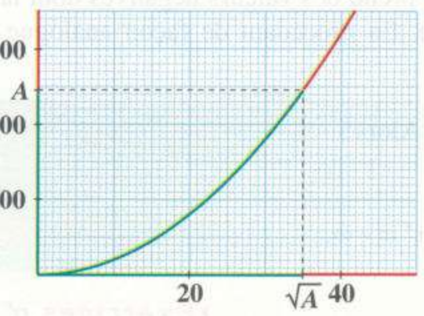
Les activités présentent des situations dans lesquelles on est amené à se demander comment évoluent les valeurs prises par une fonction lorsque la variable devient « très grande » ou s'approche d'une valeur pour laquelle la fonction n'est pas définie. C'est pour répondre à ce type de question qu'on introduit la notion de limite.

1 Limite en $+\infty$ de quelques fonctions de référence

On étudie d'abord le comportement de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x devient de plus en plus grand.

$f(x)=x^2$

Du point de vue graphique



De façon empirique, on voit que plus x est grand, plus le point M d'abscisse x de la courbe d'équation $y=x^2$ se déplace vers le « haut », donc a son ordonnée x^2 grande. Plus précisément, $f(x)$ est plus grand que n'importe quel nombre A dès que x est plus grand que $\sqrt{A}$.

Du point de vue numérique

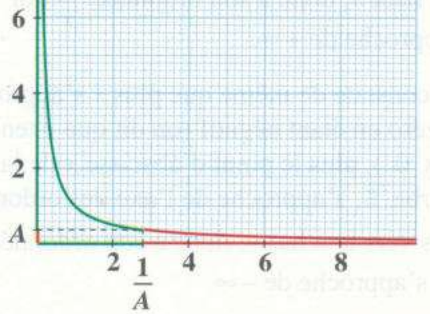
x	1 000	10 000	10^{10}	10^{100}
$f(x)=x^2$	1 000 000	100 000 000	10^{20}	10^{200}

On peut donc rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut, il suffit de choisir x suffisamment grand. On dit alors que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

En résumé, on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

$g(x)=\dfrac{1}{x}$

Du point de vue graphique



De façon empirique, on voit que plus x est grand, plus le point N d'abscisse x de la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ s'approche de l'axe des abscisses donc a son ordonnée $\dfrac{1}{x}$ proche de 0.
Plus précisément, $g(x)$ est compris entre 0 et n'importe quel nombre A, dès que x est plus grand que $\dfrac{1}{A}$.

Du point de vue numérique

x	1 000	10 000	10^{10}	10^{100}
$g(x)=\dfrac{1}{x}$	0,001	0,0001	10^{-10}	10^{-100}

On constate que l'on peut rendre $g(x)$ aussi proche de 0 que l'on veut, en choisissant x suffisamment grand. On dit que alors que la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

En résumé, on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$.

Avec une étude similaire, on obtient :

Propriété Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

2 Limite en $-\infty$ de quelques fonctions de référence

Ici, on s'intéresse au comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est très grande (on dit que x tend vers $-\infty$). En procédant de façon analogue au cas « $+\infty$ », on obtient :

Propriété Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Alors :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$;
- si n est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ et si n est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$.

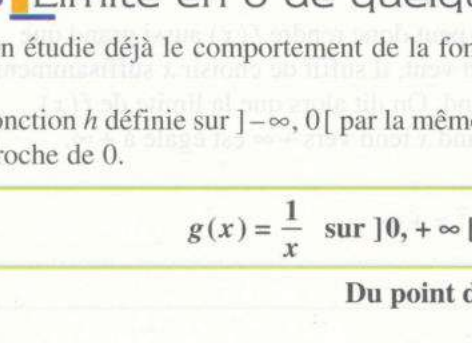
▸Exercices n° 1 et 2

3 Limite en 0 de quelques fonctions de référence

On étudie déjà le comportement de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ puis de la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par la même expression $h(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x devient de plus en plus proche de 0.

$g(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et $h(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$

Du point de vue graphique



On constate que plus x s'approche de zéro en étant positif (on dit que x tend vers 0^+), plus le point N d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_g$ s'approche de l'axe des ordonnées vers le « haut », donc a son ordonnée $\dfrac{1}{x}$ qui s'approche de $+\infty$.

On constate de même que plus x s'approche de zéro en étant négatif (on dit que x tend vers 0^-), plus le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_h$ s'approche de l'axe des ordonnées vers le « bas », donc a son ordonnée $\dfrac{1}{x}$ qui s'approche de $-\infty$.

Du point de vue numérique

On s'intéresse au comportement de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs proches de zéro, supérieures à zéro. On dit que x tend vers 0^+, ce qu'on note $x \to 0^+$ ou $x \to 0,\ x > 0$.

x	0,001	0,0001	10^{-10}	10^{-100}
$g(x) = \dfrac{1}{x}$	1 000	10 000	10^{10}	10^{100}

On peut rendre $g(x)$ aussi grand que l'on veut, il suffit de choisir x suffisamment proche de 0. On dit que la limite de $g(x)$ est $+\infty$ quand x tend vers 0^+.

On s'intéresse au comportement de $h(x)$ lorsque x prend des valeurs proches de zéro, inférieures à zéro. On dit que x tend vers 0^-, ce qu'on note $x \to 0^-$ ou $x \to 0,\ x < 0$.

x	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	-10^{-10}	-10^{-100}
$h(x) = \dfrac{1}{x}$	$-1\,000$	$-10\,000$	-10^{10}	-10^{100}

Quand x tend vers 0^-, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ est négatif et devient de plus en plus grand en valeur absolue. On dit que la limite de $h(x)$ est $-\infty$ quand x tend vers 0^-.

En résumé, on note : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Avec une étude similaire, on obtient :

Propriété Soit n un nombre entier strictement positif. Alors :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et si n est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.

▸Exercice n° 3

4 Limite en un réel a

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel (appartenant à I ou borne de I). Si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ existe alors on appelle limite de f en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, la limite définie par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h).$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

Pour étudier $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, on pose $x = 3 + h$ où $h \in]0, +\infty[$ et on obtient

$$f(3+h) = \frac{1}{3+h-3} = \frac{1}{h} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty.$$

Pour toutes les fonctions usuelles qui sont définies au point a où l'on cherche la limite (par exemple pour la limite en 0 de la fonction $x \mapsto x^2$), cette limite est simplement la valeur prise par la fonction en a :

Propriété Soit f une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel de I. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

▸Exercices n° 4 et 5

COURS

2 Résultats usuels sur les limites

À partir des quelques limites des fonctions de référence étudiées ci-dessus, on peut obtenir les limites de nombreuses fonctions (mais pas de toutes) grâce aux résultats énoncés ci-dessous, qui sont admis.

1 Produit d'une fonction par une constante

Théorème Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un réel non nul.

- Si $f(x)$ tend vers a, alors $k \times f(x)$ tend vers ka.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $+\infty$ si k est positif et $-\infty$ si k est négatif.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $-\infty$ si k est positif et $+\infty$ si k est négatif.

Les résultats précédents sont valables, que x tende vers un nombre x_0 (appartenant à I ou borne de I), ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Remarque : Les résultats des deux dernières lignes sont conformes à la règle du signe d'un produit.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2$. On étudie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. D'après les limites de référence, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc, d'après la dernière ligne du théorème précédent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

▸Exercices n° 6 à 9

2 Somme de deux fonctions

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et, a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers b, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $a + b$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.

Les résultats précédents sont valables, que x tende vers un nombre x_0 (appartenant à I ou borne de I), vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^3}$. D'après les limites de référence $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$. On déduit du deuxième cas du théorème précédent que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Remarque : On ne dispose pas de résultat général dans le cas où $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ (la limite de $f(x) + g(x)$ dépend des fonctions f et g). On dit que la somme d'une fonction qui tend vers $+\infty$ et d'une fonction qui tend vers $-\infty$ est une forme indéterminée. Ce problème est illustré par des exemples dans le TP1.

▸Exercices n° 10 à 12

3 Produit de deux fonctions

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et, a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ tend vers b, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers ab.
- Si $f(x)$ tend vers a (avec $a \neq 0$) et $g(x)$ tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), alors $f(x) \times g(x)$ tend vers l'infini, le signe de la limite étant donné par la règle du signe d'un produit.
- Si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), alors $f(x) \times g(x)$ tend vers l'infini, le signe de la limite étant donné par la règle du signe d'un produit.

Les résultats précédents sont valables, que x tende vers un nombre x_0 (appartenant à I ou borne de I), vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (-2x^2 + 3)\sqrt{x}$. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 + 3) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;

donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : On ne dispose pas de résultat général dans le cas où $f(x)$ tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) et $g(x)$ tend vers 0 (la limite de $f(x) \times g(x)$ dépend des fonctions f et g). On dit que le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction qui tend vers l'infini est une forme indéterminée. Ce problème est illustré par des exemples dans le TP1.

▸Exercices n° 13 et 14

4 Inverse d'une fonction

Théorème Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que f ne s'annule pas sur I.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers 0.
- Si $f(x)$ tend vers un réel a non nul, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{a}$.
- Si $f(x)$ tend vers 0, et est strictement positif sur I, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers 0, et est strictement négatif sur I, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $-\infty$.

Les résultats précédents sont valables, que x tende vers un nombre x_0 (appartenant à I ou borne de I), vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Remarque : Lorsque la fonction f tend vers zéro, f prend des valeurs très proche de zéro, mais ces valeurs peuvent être positives ou négatives. L'inverse de $f(x)$ prend alors des valeurs, dont la valeur absolue est très grande, mais qui peuvent être positives ou négatives. Ce problème de signe fait partie du travail de détermination de la limite (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. On étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

On a $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$ (c'est la limite d'une fonction polynôme en un point où elle est définie).

Pour appliquer le théorème précédent, on étudie le signe de $(x^2 - 1)$ lorsque x est proche de 1 et appartient à l'intervalle $]-1, 1[$. Comme $(x^2 - 1)$ est un polynôme du second degré qui s'annule pour $x = 1$ et $x = -1$, son tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, la fonction f étant définie sur $]-1, 1[$, $(x^2 - 1)$ tend vers zéro et est strictement négatif quand x est proche de 1 et inférieur à 1. On peut donc conclure :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty \quad \left(\text{ou } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty\right).$$

▸Exercices n° 15 à 20

5 Quotient de deux fonctions

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas sur I.

- Si $f(x)$ tend vers un nombre a (nul ou non) et $g(x)$ vers un nombre b (non nul), alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\dfrac{a}{b}$.
- Si $f(x)$ tend vers un nombre a (nul ou non) et $g(x)$ vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0.
- Si $f(x)$ tend vers un réel non nul a et $g(x)$ tend vers 0 en étant de signe constant sur I, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$,

le signe de la limite étant donné par la règle du signe d'un quotient.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{-2x^2 - x + 3}$. On étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

On cherche d'abord séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur :

- $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$;
- $\lim\limits_{x \to 1} (-2x^2 - x + 3) = 0$.

On étudie ensuite le signe du numérateur et du dénominateur lorsque x est proche de 1, en tenant compte du fait que f est définie sur $]1, +\infty[$:

- quand x est proche de 1, le numérateur tend vers 3, donc est positif ;
- comme $-2x^2 - x + 3$ est un polynôme du second degré qui s'annule pour $x = 1$ et $x = -\dfrac{3}{2}$, son tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2 - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, f étant définie sur $]1, +\infty[$, $-2x^2 - x + 3$ est négatif lorsque x est proche de 1 et supérieur à 1.

Conclusion : d'après le troisième cas du théorème et la règle des signes, on a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.

Remarque : On ne dispose pas de résultat général dans les cas où :

• $f(x)$ tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) et $g(x)$ tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$),

• $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0,

(la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dépend des fonctions f et g). On dit que le quotient de deux fonctions qui tendent vers l'infini ainsi que le quotient de deux fonctions qui tendent vers 0 sont des formes indéterminées. Ces cas sont illustrés par des exemples dans le TP1.

▸Exercices n° 21 à 24

6 Limite d'une fonction composée

Théorème Soit v une fonction définie d'un intervalle I dans un intervalle J et u une fonction définie sur J.
Si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} u(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(v(x)) = c$, où a, b et c sont des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = \sqrt{-x+1}$. On constate que f est la composée de la fonction affine v définie de $]-\infty, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ par $v(x) = -x+1$ et de la fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u(x) = \sqrt{x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x+1} = +\infty$.

▸Exercices n° 31 à 36

7 Limites et inégalités

Théorème Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

• Si, pour tout x de I, $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• Si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

• Si, pour tout x de I, $v(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

• Si, pour tout x de I, $|f(x) - L| \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

• Si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = L'$, alors $L \leqslant L'$.

(Dans les trois dernières propositions, L et L' désignent deux réels.)

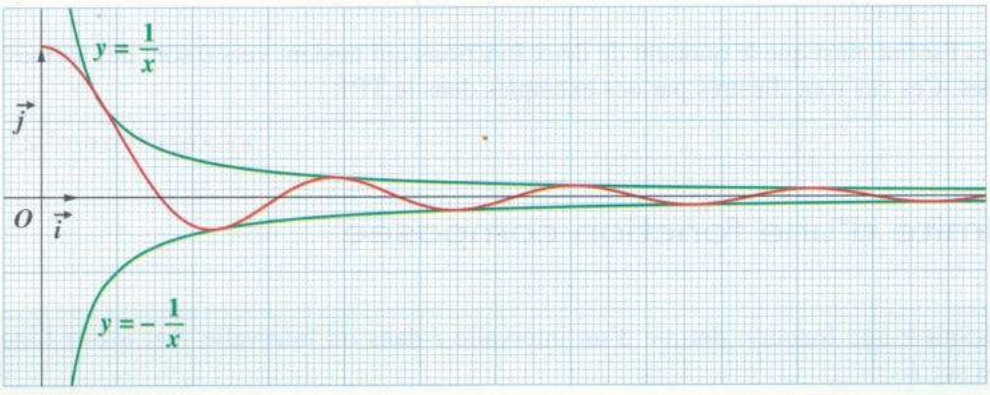
Remarque : On a des énoncés analogues si x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc pour tout x strictement positif, on a $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

On déduit de la troisième ligne du théorème que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

COURS

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction f est comprise entre les courbes des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, qui toutes deux s'approchent de l'axe des abscisses quand x devient grand. Il en est donc de même pour la courbe représentative de f.



▸Exercices n° 39 et 40

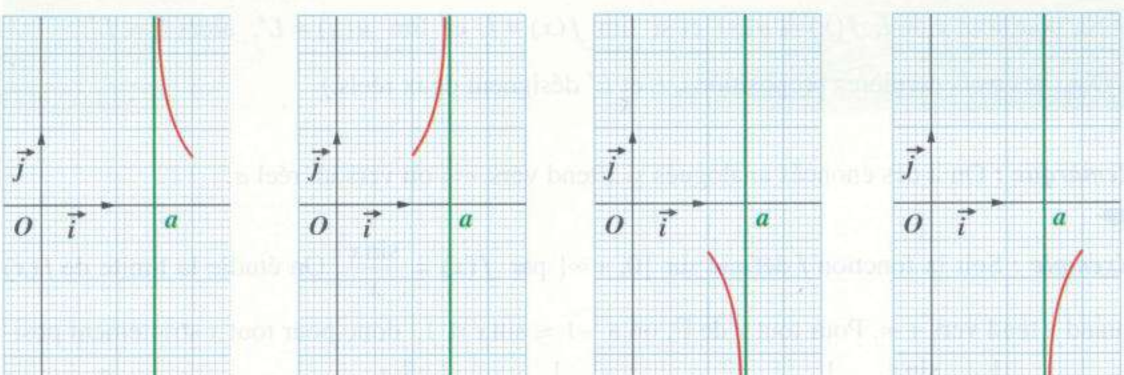
3 Interprétation graphique des limites : notion d'asymptote

Dans ce paragraphe, on fait le lien entre limite(s) d'une fonction f et représentation graphique de f.

1 Limite infinie en un point : asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$ (ou $[c, a[$) avec a, b et c trois réels. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

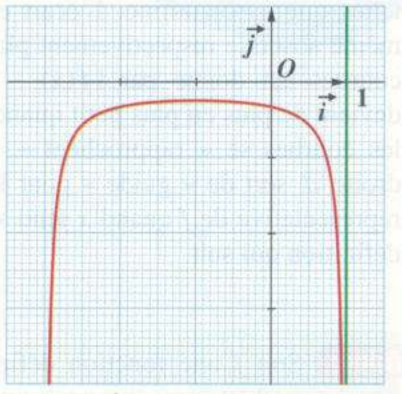
f définie sur $]a, b]$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.	**f définie sur $[c, a[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.**	**f définie sur $[c, a[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.**	**f définie sur $]a, b]$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.**



Les points de la courbe représentative de f dont les abscisses sont proches de a ont une ordonnée « très grande » en valeur absolue. La courbe « s'approche » de la droite d'équation $x = a$.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $]-3,\ 1[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$



Quand x tend vers 1, $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 3) = 0$. Donc la limite cherchée est infinie ; il faut en déterminer le signe. Comme $(x^2 + 2x - 3)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en (-3) et en 1, il est négatif pour tout x de $]-3,\ 1[$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = -\infty$.

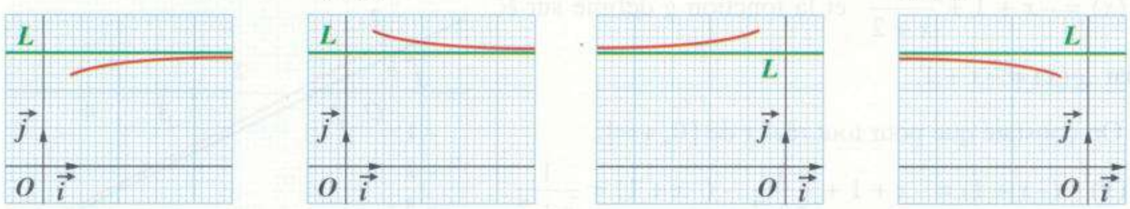
La courbe représentative de h admet donc la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote.

▸Exercices n° 41 à 43

2 Limite finie à l'infini : asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Définition Soit f une fonction définie sur $[a,\ +\infty[$ (respectivement $]-\infty,\ a]$), avec $a \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

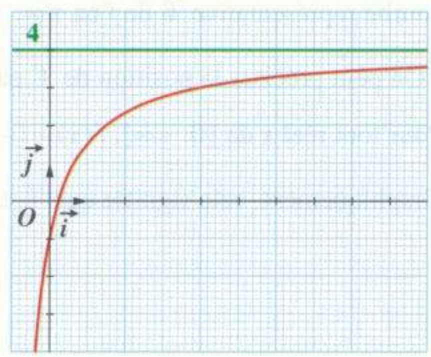
f définie sur $[a,\ +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. **$f$ définie sur $]-\infty,\ a]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.**



Par exemple, si $x \to +\infty$, les points de la courbe représentative de f ayant une abscisse très grande ont une ordonnée de plus en plus proche de L. La courbe « s'approche » de la droite d'équation $y = L$ quand x devient très grand, à droite des deux premiers graphes.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-1,\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 4 - \frac{5}{x + 1}.$$



On étudie la limite de f en $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x + 1} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$. La courbe représentative de la fonction f admet donc la droite d'équation $y = 4$ pour asymptote en $+\infty$.

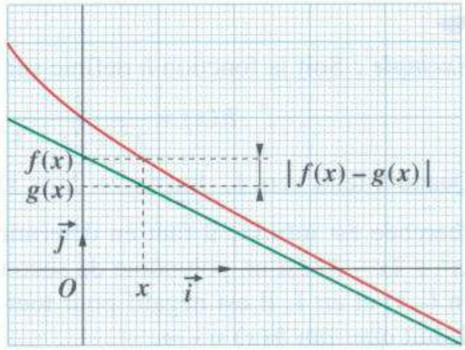
▸Exercices n° 44 à 46

3 Droites asymptotes

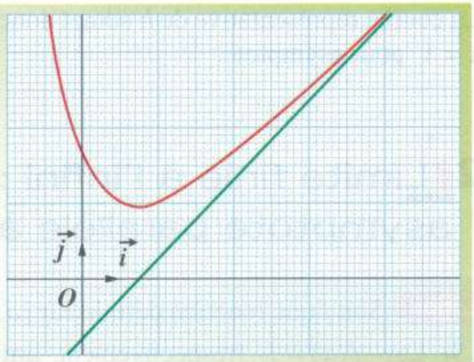
Certaines fonctions, ayant une limite infinie quand x tend vers l'infini, peuvent être comparées à des fonctions affines. On précise ces propos.

COURS

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que g soit affine. L'écart entre deux points de même abscisse respectivement placés sur chacune des courbes est donné par $|f(x) - g(x)|$. Si cet écart devient de plus en plus petit quand x tend vers l'infini, les courbes se « rapprochent » l'une de l'autre. La droite $\mathscr{D}$ sert de « guide » pour le tracé de la courbe représentative de f quand x tend vers l'infini. D'où la définition qui suit.



Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [c, +\infty[$ et $g : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ les représentations graphiques respectives de f et g.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite $\mathscr{D}$ est dite asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.
(De même, si f est définie sur $]-\infty, c]$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.)

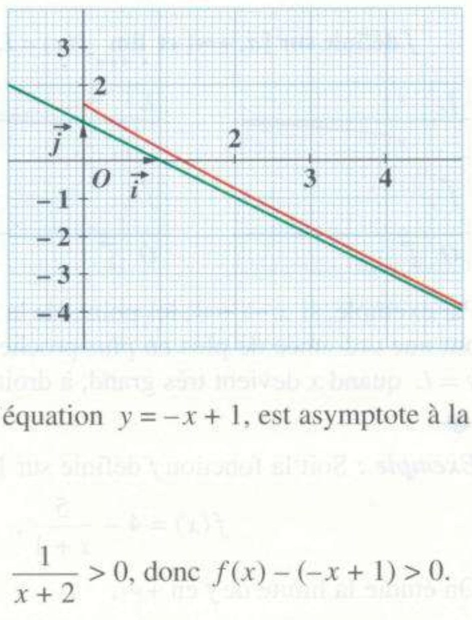


Exemple : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 1$.

• On constate que pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$f(x) - (-x + 1) = -x + 1 + \dfrac{1}{x+2} - (-x + 1) = \dfrac{1}{x+2}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x + 1)) = 0$.



La courbe représentative de g, c'est-à-dire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 1$, est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.

• On peut préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $f(x) - (-x + 1) = \dfrac{1}{x+2}$ et $\dfrac{1}{x+2} > 0$, donc $f(x) - (-x + 1) > 0$.

Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $[0, +\infty[$.

▸Exercices n° 53 à 59

TP 1 Des méthodes pour lever une indétermination

1 Formes indéterminées

1 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Recopier et compléter le tableau suivant :

$f(x) =$	$g(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$	$f(x) + g(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) =$
$x^2 + 1$	$-x^2 - 3x - 2$			$-3x - 1$	
$2x^2 + x + 3$	$-2x^2 - x - 1$				
$x^2 + x + 1$	$-x^2 - 1$				

Y a-t-il une règle sur la limite de la somme de deux fonctions, lorsque l'une tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$?

2 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On travaille sur un intervalle $]a, +\infty[$ sur lequel g ne s'annule pas. Recopier et compléter le tableau suivant (penser à simplifier) :

$f(x) =$	$g(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$
$x^3 + x$	x				
x	x^2				
$5x$	x				

Y a-t-il une règle sur la limite du quotient de deux fonctions qui tendent vers $+\infty$?

En prenant les opposés des expressions proposées pour f et g, on obtient des résultats du même type sur la limite du quotient de deux fonctions qui tendent vers $-\infty$.

Dans le cours, on a vu d'autres formes indéterminées. On peut ainsi montrer, comme dans les questions **1** et **2**, qu'il n'existe pas de règle qui permette de conclure sur la limite :

- d'un produit de deux fonctions dont l'une a une limite infinie et l'autre tend vers 0 ;
- d'un quotient de deux fonctions qui tendent vers 0.

2 Quelques méthodes pour lever une indétermination

1 Limite à l'infini d'une fonction polynôme

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x - 2$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2)$.

Peut-on déterminer directement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

b. On va changer la forme de $f(x)$, en passant d'une somme à un produit. Déterminer les réels a et b tels que, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(3 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}\right)$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$. Rappeler $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ et conclure quant à $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ à l'aide de la factorisation obtenue à la question **b.**.

d. Utiliser la même méthode pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 2x - 3)$.

Bilan Pour déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme, dans le cas où on a une forme indéterminée, on met en facteur x^n, n étant le degré du polynôme.

▸Exercices n° 25 à 27

2 Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

a. Soit g la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 3}{x + 2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2 - x + 3)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2)$. Peut-on déterminer directement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$?

b. En factorisant x^2 au numérateur et x au dénominateur, montrer que pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{x\left(-2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}.$$

c. Déterminer la limite en $+\infty$ du numérateur puis celle du dénominateur dans l'expression précédente. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

d. En utilisant la même méthode, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x + 3}{-x^2 + x + 1}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x - 3}{2x^3 - x^2 + 4}$.

Bilan Pour déterminer la limite d'une fonction rationnelle quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, dans le cas d'une forme indéterminée, on factorise le numérateur par x^n (où n est le degré du numérateur), le dénominateur par x^m (où m est le degré du dénominateur) et on « simplifie » l'expression obtenue.

Dans les deux situations étudiées, la méthode utilisée pour déterminer une limite en présence d'une **forme indéterminée** consiste à **changer la forme** de l'expression de la fonction, principalement à l'aide de factorisations.

▸Exercices n° 28 à 30

TP2 Exemples d'étude de fonctions

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 5}{x^2 + x + 1}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

a. Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Expliquer alors pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}$, dont on donnera une équation.

c. Déterminer la fonction dérivée de f. Étudier son signe et établir le tableau de variation de f.

d. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ à la calculatrice. L'étude et le tracé sont-ils cohérents (limites et variation) ? On pourra éventuellement faire varier la fenêtre d'affichage.

e. Étudier le signe de $d(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 5}{x^2 + x + 1} - (-1)$ et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$. Vérifier que le résultat obtenu est bien cohérent avec le tracé sur la calculatrice graphique.

f. Établir un tableau de valeurs de f, puis tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

2 Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unité 1 cm.

a. Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 0[$.

b. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en 0. En déduire l'existence d'une asymptote verticale à $\mathscr{C}$, que l'on précisera.

c. Déterminer la fonction dérivée de f. Étudier son signe et établir le tableau de variation de f.

d. Tracer $\mathscr{C}$ à la calculatrice. L'étude et le tracé sont-ils cohérents (limites et variation) ? On pourra éventuellement faire varier la fenêtre d'affichage.

e. Montrer qu'il existe trois réels (à préciser) a, b et c tels que, pour tout réel x de $]-\infty, 0[$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$.

f. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$, puis étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

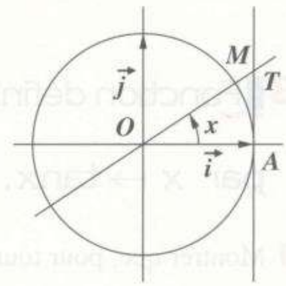
g. Tracer $\mathscr{D}$ à la calculatrice et vérifier que les réponses à la question **f.** sont bien cohérentes avec le tracé.

h. Établir un tableau de valeurs de f, puis tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

TP3 Étude de la fonction tangente

1 Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. Pour tout réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique) tel qu'une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ soit x.



Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$. Si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (où k est un nombre entier relatif), la droite (OM) a un point d'intersection T avec l'axe $(A\,;\vec{j}\,)$. On appelle tangente de x, et on note $\tan x$, l'ordonnée du point T.

En considérant le coefficient directeur de la droite (OM) (qui est aussi le coefficient directeur de la droite (OT)), montrer que, pour tout x différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2 Étude de la fonction f définie sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$

1 Parité

a. Pour tout x élément de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, déterminer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour la fonction f et sa courbe représentative ?

c. Régler la fenêtre de la calculatrice pour x variant de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $\dfrac{\pi}{2}$, puis tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \tan x$. Ce tracé est-il cohérent avec la réponse à la question **b.** ?

d. Sur quel intervalle peut-on se contenter d'étudier la fonction f ? Justifier.

2 Étude de la restriction de f à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a. En utilisant les théorèmes sur les limites d'un quotient, déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$.

b. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3 a. En partant de la relation $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, montrer que $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, puis que $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b. Quel est le signe de $f'(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$?

c. Établir le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4 Vérifier la cohérence des résultats aux questions **2** et **3** avec le tracé de la calculatrice.

5 Compléter le tableau suivant (en donnant les valeurs exactes).

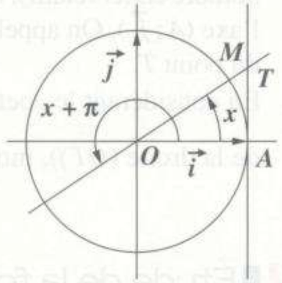
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$				

6 Tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, puis la courbe $\mathscr{C}_1$ représentative de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

À partir de la courbe $\mathscr{C}_1$ et des résultats du **1**, tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3 Fonction définie sur un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ par $x \mapsto \tan x$, où k est un nombre entier relatif

1 Montrer que, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(x + \pi) = \tan x$ (la fonction tangente est dite périodique de période π).



2 À partir de la courbe $\mathscr{C}_2$, par quelle transformation géométrique peut-on obtenir la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $x \mapsto \tan x$ sur un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$?

3 Sur la calculatrice graphique, régler la fenêtre pour x variant entre $-\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ et y variant entre -5 et 5. Qu'observe-t-on en traçant la représentation de la fonction $x \mapsto \tan x$?

1> Limites de référence

n est un entier naturel non nul.

Quand x tend vers $+\infty$		
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
Quand x tend vers $-\infty$		
si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$		$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$		
Quand x tend vers 0		
$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
		si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
		si n est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

2> Résultats usuels sur les limites

x tend vers un nombre réel, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

$f(x)$ tend vers	$g(x)$ tend vers	$f(x)+g(x)$ tend vers	$f(x) \times g(x)$ tend vers	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers
$L \neq 0$	$L' \neq 0$	$L + L'$	$L \times L'$	$\dfrac{L}{L'}$
0	$L \neq 0$	L	0	0
$L \neq 0$	0	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$			
$+\infty$	0	$+\infty$	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
$-\infty$		$-\infty$		
0	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	0
	$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$L \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes
$-\infty$		$-\infty$		
$L \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant la règle des signes	0
	$-\infty$	$-\infty$		

3> Limite d'une fonction composée

Soit v une fonction définie d'un intervalle I dans un intervalle J et u une fonction définie sur J.

Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} u(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} u(v(x)) = c$, où a, b et c sont des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

4> Limites et inégalités

a est un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I.

- Si, pour tout x de I, $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Si, pour tout x de I, $v(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \lim\limits_{x \to a} u(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.
- Si, pour tout x de I, $|f(x) - L| \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.
- Si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = L'$, alors $L \leqslant L'$.

(Dans les trois dernières propositions, L et L' désignent deux réels.)

5> Asymptotes

a ■ Parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$ ou $[c, a[$ avec a, b et c trois réels.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b ■ Parallèle à l'axe des abscisses

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a]$), avec $a \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

c ■ D'équation $y = ax + b$

Soit f une fonction définie sur $[c, +\infty[$. La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty, c]$. La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Calculer une limite en appliquant les théorèmes sur les opérations

1 **a.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x^3$. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c. Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = -x^4\sqrt{x}$. Calculer la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Soit la fonction k définie sur $]3, +\infty[$ par $k(x) = \dfrac{x-5}{3-x}$. Calculer la limite de $k(x)$ lorsque x tend vers 3.

Réponses

On détermine la forme de la fonction.

a. Il s'agit d'une somme de fonctions.

Les deux fonctions tendent vers $+\infty$, donc d'après le théorème sur la somme :

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On détermine la forme de la fonction.

b. Il s'agit du produit d'une fonction par une constante.

La fonction tend vers l'infini, donc le produit par une constante tend vers l'infini et la règle des signes s'applique.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

On détermine la forme de la fonction.

c. Il s'agit du produit de deux fonctions.

Les deux fonctions tendent vers l'infini, le produit aussi, et la règle des signes s'applique.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

On détermine la forme de la fonction.

d. Il s'agit du quotient de deux fonctions.

Le numérateur tend vers un nombre fini, le dénominateur vers 0 donc le quotient tend vers l'infini : il faut déterminer le signe.

$\lim\limits_{x \to 3} (x-5) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 3} (3-x) = 0$.

Lorsque x est proche de 3, le numérateur est proche de -2, donc négatif.
Lorsque x est proche de 3 et supérieur à 3 (k est définie sur $]3, +\infty[$), $(3-x)$ est négatif (on peut écrire : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (3-x) = 0^-$).

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 3} k(x) = +\infty$.

Calculer la limite d'une fonction composée

2 Soit la fonction l définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$l(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Calculer la limite de $l(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On détermine la forme de la fonction.

Réponse

Il s'agit de la composée de la fonction cosinus par la fonction inverse :

$x \mapsto \dfrac{1}{x} = X$

$$X \mapsto \cos X = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour déterminer $\lim\limits_{x \to a} u(v(x))$, on commence par étudier $\lim\limits_{x \to a} v(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x) = 1$.

Calculer une limite à l'aide d'une inégalité

3 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

En encadrant $f(x)$ entre deux fonctions affines, déterminer la limite de f en 0.

Réponse

Lorsque x tend vers 0, $\dfrac{1}{x}$ tend vers l'infini. Or la fonction cosinus n'a pas de limite à l'infini.

Si on ne peut pas utiliser les théorèmes précédents (composition puis produit), on cherche à encadrer la fonction.

Pour tout réel a, $-1 \leqslant \cos a \leqslant 1$, donc, pour tout nombre x de $]0, +\infty[$, $-1 \leqslant \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$. En multipliant chaque membre de cette double inégalité par le nombre x positif, on obtient : $-x \leqslant x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.

D'après le théorème sur les limites et les inégalités :

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Calculer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle à l'infini

4 **a.** Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 3$.

b. Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^4 + 1}$.

Réponses

Le théorème sur la somme ne permet pas toujours de déterminer le résultat.

a. Lorsque x tend vers $+\infty$, $(-2x^3)$ tend vers $-\infty$ et x^2 vers $+\infty$: il s'agit d'une **forme indéterminée** (somme de deux fonctions qui tendent vers des infinis de signes contraires).

Pour lever l'indétermination, on factorise la puissance de x la plus élevée, ce qui transforme la somme en produit.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right)$.

Par le théorème sur la somme, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = -2\,;$$

d'autre part, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Par le théorème sur le produit, on en déduit :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Le théorème sur le quotient ne permet pas toujours de déterminer le résultat.

b. Lorsque x tend vers $-\infty$, le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur tend vers $+\infty$; il s'agit d'une **forme indéterminée** (quotient de deux fonctions qui tendent vers l'infini).

Pour lever l'indétermination, on factorise la puissance de x la plus élevée au numérateur et au dénominateur puis on simplifie.

$$g(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^4\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}.$$

Sous cette nouvelle forme, on peut appliquer le théorème sur le quotient.
Le numérateur tend maintenant vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$; on peut donc conclure : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

Reconnaître l'existence d'une asymptote parallèle à un axe

5 La fonction f est définie sur $]-\infty, 1[$.

a. On a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$. En donner une interprétation graphique.

b. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$. En donner une interprétation graphique.

Pour faire l'interprétation graphique de la limite d'une fonction, il faut penser aux asymptotes.

Réponses

a. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

Démontrer qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative d'une fonction

6 Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :
$$f(x) = -2x + 3 + \frac{1}{x-1}.$$
Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.

Réponse

On calcule l'expression de $f(x) - (ax + b)$.

$$f(x) - (-2x + 3) = -2x + 3 + \frac{1}{x-1} - (-2x + 3) = \frac{1}{x-1}.$$

On montre que cette expression tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-2x + 3)) = 0$: la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ pour asymptote en $+\infty$.

exercices

Limites de référence

1

C Déterminer les limites demandées :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$.

2

Même exercice que le précédent :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$. **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$.

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4$. **d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

3

Même exercice que le précédent :

a. f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b. g définie sur $]-\infty, 0[$ par $g(x) = \frac{1}{x^5}$: $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

c. h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x^3}$: $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

4

C Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En posant $x = 1 + h$, déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

5

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 2[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x-2}.$$

En posant $x = 2 + h$, déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2.

Limite d'une somme ou d'un produit

6

C Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3)$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^2)$.

7

Même exercice que le précédent :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3)$. **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-7x^4)$.

8

C Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$g(x) = \frac{-3}{x^4}.$$

a. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

9

Même exercice que le précédent avec la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par $h(x) = \frac{-1}{2x^3}$.

10

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la limite quand x tend vers 0, puis la limite quand x tend vers $+\infty$.

a. f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^5}$.

b. g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 + \frac{5}{x}$.

11

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la limite quand x tend vers 0, puis la limite quand x tend vers $-\infty$.

a. f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = 4 + \frac{3}{x}$.

b. g définie sur $]-\infty, 0[$ par $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$.

12

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la limite quand x tend vers 0, puis la limite quand x tend vers $+\infty$.

a. f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

b. g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

13

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2\sqrt{x}$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 1)\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

14

Même exercice que le précédent avec :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)(1 - 7x^4)$.

Limite de l'inverse d'une fonction

15 C Soit la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{-x+3}.$$
a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 3.

16 Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 3[$ par :
$$g(x) = \frac{1}{-x+3}.$$
a. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 3.

17 Soit la fonction f définie sur $]4, +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^2-16}.$$
a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 4.

18 Soit la fonction f définie sur $]-4, 4[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^2-16}.$$
a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 4.
b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers (-4).

19 Soit la fonction f définie sur $]-\infty, -2[$ par :
$$f(x) = \frac{3}{x^2-4}.$$
a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers (-2).

20 Soit la fonction g définie sur $]-\infty, -2[$ par :
$$g(x) = \frac{-3}{x^2-4}.$$
a. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers (-2).

Limite d'un quotient

21 C Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}.$$
Déterminer la limite de f quand x tend vers 1.

22 Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 1[$ par :
$$g(x) = \frac{2x-3}{x-1}.$$
Déterminer la limite de g quand x tend vers 1.

23 Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 0[$ par :
$$g(x) = \frac{2x-3}{x}.$$
Déterminer la limite de g quand x tend vers 0.

24 Soit la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par :
$$f(x) = \frac{-x^2+x-1}{x^2-1}.$$
a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1.

Limite à l'infini des fonctions polynômes

25 C Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :
a. $f(x) = x^2 + 2x - 3$. b. $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

26 Même exercice que le précédent.
a. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - 1$.
b. $g(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 8$.

27 Même exercice que le précédent.
a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. b. $g(x) = -2x^4 + 3x - 1$.

Limite à l'infini des fonctions rationnelles

28 C Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions dont l'expression est donnée.
a. $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+4}$. b. $f(x) = -\dfrac{3x+1}{x^2+2}$.
c. $f(x) = \dfrac{x^3+x+3}{x^2+5}$.

29

Même exercice que le précédent.

a. $f(x) = \dfrac{x^4 + x + 3}{2x^4 + x + 5}$. **b.** $g(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 + x + 6}$.

30

Même exercice que le précédent.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + 1}$. **b.** $g(x) = \dfrac{x^5 - 1}{2x^3 + 3}$.

Limite d'une fonction composée

31 **C**

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

32

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, -1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.

33

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{-2x + 6}.$$

Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.

34

Soit la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x + 3}.$$

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. (Après avoir constaté que l'on est en présence d'une forme indéterminée, on montrera que, pour $x \neq 0$, $f(x) = x\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}}\right)$, puis on déterminera la limite.)

35

Soit la fonction g définie sur $[2, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x}.$$

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

36

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Toutes sortes de limites

37

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de son intervalle I de définition :

a. $f(x) = -5x + 3 - \dfrac{2}{x}$; $I =]-\infty, 0[$.

b. $f(x) = -7x^2 + 3x + 1$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = \sqrt{-x^2 + \dfrac{1}{x}}$; $I =]0, 1]$.

d. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$; $I = \mathbb{R}$.

e. $f(x) = \dfrac{x - 3}{-2x^2 + 5x - 2}$; $I =]2, +\infty[$.

f. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{-x + 3}$; $I =]3, +\infty[$.

g. $f(x) = -3x + 1 + \dfrac{5}{x - 1}$; $I =]1, +\infty[$.

h. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{-2x^2 - x + 3}$; $I = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right[$.

38

Même exercice que le précédent.

a. $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x - 5}$; $I =]5, +\infty[$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^4 + x^3 + x^2$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 3x - 4}$; $I =]-\infty, -4[$.

d. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 3}{3x - 4}$; $I = \left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$.

e. $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$; $I = \mathbb{R}$.

f. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + 3$; $I =]0, +\infty[$.

g. $f(x) = \dfrac{x + 3}{3x^2 + 4}$; $I = \mathbb{R}$.

h. $f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{x - 2}$; $I =]-\infty, 2[$.

Limites et inégalités

39

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$-x \leqslant f(x) \leqslant x.$$

En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

40

On admet que, pour tout nombre x positif, on a la double inégalité : $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

(Résultat démontré à l'exercice 65 du chapitre 1.)

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

À partir du résultat rappelé ci-dessus, déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers zéro.

Limites et asymptotes

41

C Donner une interprétation graphique de ces limites.

a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$. **b.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

42

Soit la fonction g définie sur $]2, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{-x+3}{x^2+x-6}.$$

Déterminer la limite de g quand x tend vers 2. Donner une interprétation graphique du résultat.

43

Soit la fonction h définie sur $]-3, -1[$ par :

$$h(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}.$$

a. Déterminer la limite de $h(x)$ quand x tend vers (-3).

b. Déterminer la limite de $h(x)$ quand x tend vers (-1).

c. Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

44

C Donner une interprétation graphique de ces limites.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

45

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{-x^2}{x^2+3}.$$

Donner une interprétation graphique des résultats.

46

Même exercice que le précédent avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^4 - x + 1}{2x^4 + 3}$.

47

C Soit une fonction f définie sur $]2, +\infty[$. On sait que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$. Donner une interprétation graphique de ces limites.

48

Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donner une interprétation graphique du résultat.

49

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, -2[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4-x^2}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donner une interprétation graphique des résultats.

50

On donne ci-dessous les tableaux de variation de deux fonctions f et g.

En déduire les limites des deux fonctions aux bornes de leur ensemble de définition et donner une interprétation graphique de ces résultats.

a.

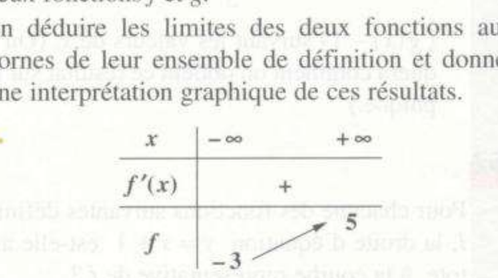
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-3	$\nearrow$	5

b.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-2

51

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



1. On précise que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées et la droite Δ d'équation $y = 1$ pour asymptotes. Déterminer :

a. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On précise que la courbe $\mathscr{C}$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points. Par lecture du graphique :

a. déterminer les solutions de l'équation $g(x) = 0$;

b. établir un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 1. En déduire $g'(1)$ par lecture graphique.

4. On admet que la fonction présente un minimum pour $x = \dfrac{8}{5}$ et que ce minimum est :

$$g\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{9}{16}.$$

Établir le tableau de variation de g.

5. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ au point d'abscisse $\dfrac{4}{5}$. Déterminer le signe de $(g(x) - 1)$ suivant les valeurs de x. (On expliquera comment on obtient ce résultat sur le graphique.)

52

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur I, la droite d'équation $y = x + 1$ est-elle asymptote à la courbe représentative de f ?

a. $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x+1}$; $I =]-1, +\infty[$.

c. $f(x) = x + 1 + \dfrac{x^2+1}{x+1}$; $I =]-1, +\infty[$.

d. $f(x) = x + 1 + \dfrac{x+1}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$.

53

C Soit la fonction f définie sur $]-5, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 3 + \frac{1}{x+5}.$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.

c. Étudier la position de Δ par rapport à $\mathscr{C}$.

54

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2x + \frac{x-1}{x^2+2}.$$

a. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier la position de Δ par rapport à $\mathscr{C}$.

55

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}.$$

a. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

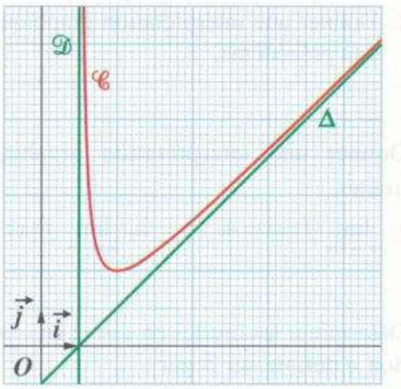
b. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

c. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet deux asymptotes : l'une, parallèle à l'axe des ordonnées, dont on donnera une équation, l'autre, Δ, d'équation $y = x + 1$.

d. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

56

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]1, +\infty[$. On admet que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ et la droite Δ d'équation $x = 1$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.



À partir de cette hypothèse et de la courbe représentative :

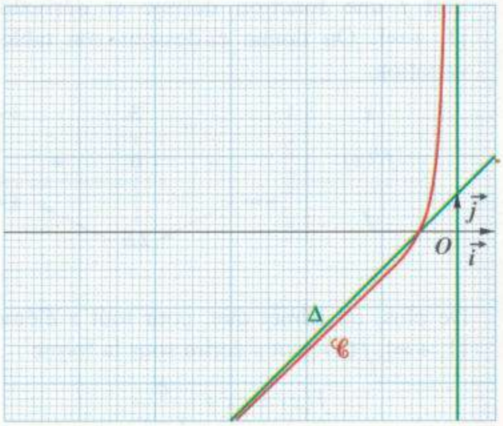
a. donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$;

b. donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$, où $\varphi(x) = f(x) - (x - 1)$;

c. donner le signe de $\varphi(x)$ pour tout x de $]1, +\infty[$.

57

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



1. On précise que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées et la droite Δ d'équation $y = x + 1$ pour asymptotes. Déterminer :

a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. Établir le tableau de variation de la fonction.

3. On précise que la courbe $\mathscr{C}$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en un point. Par lecture du graphique :

a. déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$;

b. établir un tableau donnant le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]-\infty, 0[$.

4. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ au point d'abscisse -1. Déterminer le signe de $f(x) - (x + 1)$ suivant les valeurs de x. (On expliquera comment on obtient ce résultat sur le graphique.)

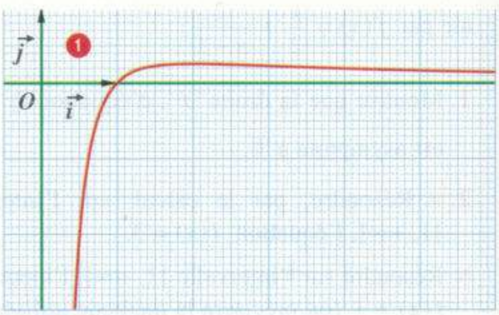
58

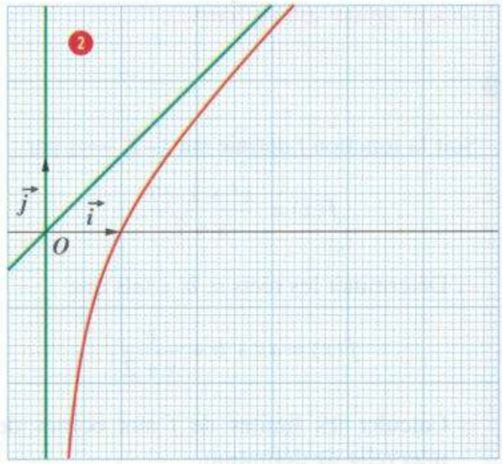
Associer à chacune des fonctions suivantes sa représentation graphique (en rouge) en justifiant votre choix par un argument graphique.

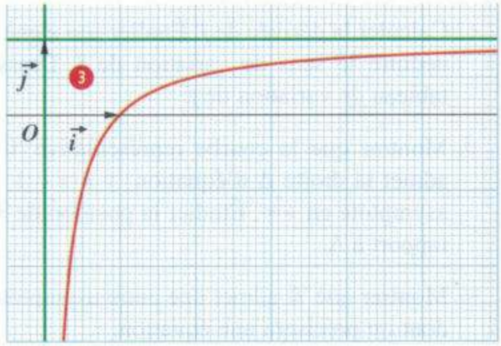
a. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$. **b.** $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

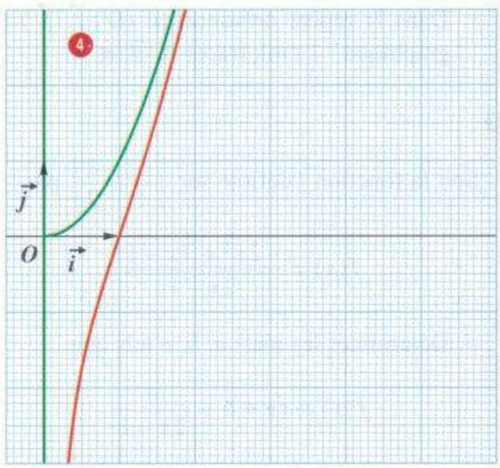
c. $h(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x}$. **d.** $k(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

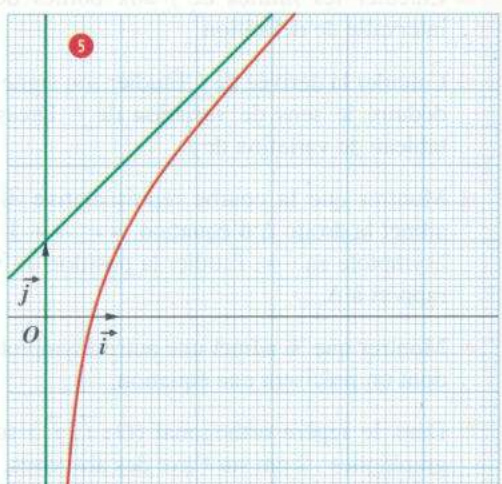
e. $m(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$.











Pour aller plus loin...

59

Soit la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 7}{x + 2}.$$

a. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$

b. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

c. Calculer la dérivée de f. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

d. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

e. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une autre asymptote, $\mathscr{D}$, dont on précisera une équation.

f. Dans le repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique : 1 cm), tracer Δ, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

60

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 1}{2x - 1}.$$

a. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 1}.$$

b. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

c. Calculer la dérivée de f. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

d. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet la droite Δ d'équation $y = -x + 3$ pour asymptote en $-\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

e. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une autre asymptote, $\mathscr{D}$, dont on précisera une équation.

f. Dans le repère orthogonal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées), tracer Δ, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

61 ***À partir d'un tableau de variation***
D'après un problème de baccalauréat

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1, +\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variation.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	2,5	↗	$+\infty$

De plus, on admet que, pour tout x élément de $]1, +\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x - c},$$

où a, b, c, sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variation de f.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. a. Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$. Donner une équation de $\mathscr{D}$.

b. En déduire la valeur de c.
Pour les questions suivantes, on prendra :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x - 1}.$$

2. Le tableau de variation nous fournit les coordonnées d'un point particulier de $\mathscr{C}$. En déduire une relation entre a et b.

3. Calculer la dérivée f' de la fonction f (on rappelle que a et b sont des constantes).
Utiliser le tableau de variation pour trouver une deuxième relation entre a et b.

4. Déterminer les nombres réels a et b à partir des deux questions précédentes.

Partie B

On admet que la fonction de la **partie A** est définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x - 1}$.

1. Montrer que la droite $\mathscr{D}'$, d'équation $y = \frac{x}{2}$, est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. a. Résoudre, par le calcul, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 3$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$, l'inéquation $f(x) > 3$ (on précisera la méthode utilisée).

3. Quelle est la dérivée de la fonction f ?
Écrire une équation de la droite $\mathscr{C}_1$ tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse 2, et une équation de la droite $\mathscr{C}_2$ tangente à $\mathscr{C}$ au point N d'abscisse 5.

4. Construire les droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et la courbe $\mathscr{C}$.

62

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = x^2 - \frac{8}{x-1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

a. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on précisera l'équation.

c. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2}$.

Étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

d. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x^2)$. Que peut-on dire de la courbe $\mathscr{C}$ et de la parabole $\mathscr{P}$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{P}$.

e. Tracer $\mathscr{D}$, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$.

63

Un automobiliste parcourt une distance D.

1. La première moitié du trajet se fait sur une route traversant plusieurs villages et il roule à une vitesse moyenne de $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. L'autre moitié se fait sur autoroute et il roule à une vitesse moyenne de $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Exprimer en fonction de D le temps t_1 pour la première moitié du parcours, le temps t_2 pour la seconde moitié du parcours.

On appelle v la vitesse moyenne sur le parcours complet ; exprimer en fonction de D et v le temps t pour le trajet complet.

Déduire de la relation $t = t_1 + t_2$ la vitesse moyenne v.

2. La première moitié du parcours est toujours effectuée à la vitesse moyenne de $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On appelle x la vitesse moyenne sur la seconde moitié.

a. En suivant la même démarche que précédemment, montrer que la vitesse moyenne sur le trajet complet est $v(x) = \dfrac{100x}{50+x}$.

b. Étudier les variations de la fonction v définie sur $\mathbb{R}^+$ par $v(x) = \dfrac{100x}{50+x}$ (dérivée, sens de variation, limite en $+\infty$). Dresser son tableau de variation.

c. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de v dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm pour 50 sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 sur l'axe des ordonnées).

Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on précisera une équation.

Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.

d. À partir de l'étude précédente, déduire que la vitesse moyenne sur le parcours complet est inférieure à une vitesse donnée v_0 que l'on précisera.

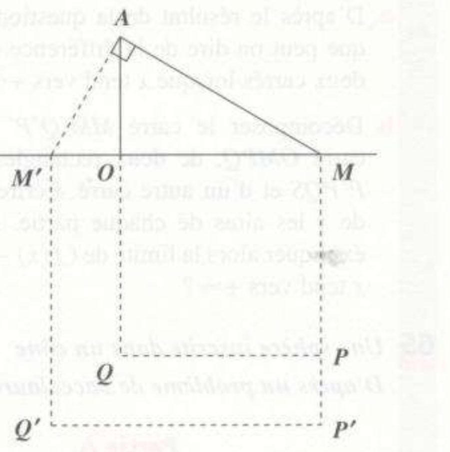
Peut-on expliquer ce résultat ?

(Indication : raisonner sur les temps : si l'automobiliste parcourt la distance d à la vitesse moyenne de $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, il met un temps $t_1 = ...$

Si le même automobiliste voulait parcourir la distance $2d$ à la vitesse v_0, il lui faudrait un temps $t = ...$ Peut-il, en étant arrivé à la moitié de son parcours après le temps t_1, espérer faire le parcours total à la vitesse moyenne v_0 ?).

64 ***Où l'on retrouve de façon différente la situation de l'activité 2***

OAM est un triangle rectangle en O et tel que $OA = 1$.



1. On construit sur la demi-droite opposée à $[OM)$ le point M' tel que le triangle MAM' soit rectangle en A.

On pose $OM = x$.

a. En utilisant trois fois la propriété de Pythagore, démontrer que $OM' = \dfrac{1}{x}$.

b. On construit, comme indiqué sur la figure, le carré $OMPQ$ de côté x et le carré $MM'Q'P'$ de côté $\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Écrire, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}_1$ du carré $OMPQ$. On appelle g la fonction, définie sur $]0, +\infty[$, qui à x fait correspondre $\mathcal{A}_1$.

Écrire, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}_2$ du carré $MM'Q'P'$. On appelle f la fonction, définie sur $]0, +\infty[$, qui à x fait correspondre $\mathcal{A}_2$.

2. Représentation graphique des fonctions f et g.

a. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer la limite de f quand x tend vers zéro. Donner une interprétation graphique du résultat.

c. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 + 2.$$

Montrer que la courbe représentative de h est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

f. Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 0,5 cm en ordonnée) tracer la courbe représentative de g, celle de h, puis celle de f.

Que peut-on dire de la différence $(f(x) - g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

3. Revenons à… nos carrés.

a. D'après le résultat de la question précédente, que peut-on dire de la différence des aires des deux carrés lorsque x tend vers $+\infty$?

b. Décomposer le carré $MM'Q'P'$ à l'aide du carré $OMPQ$, de deux rectangles $M'OQR$ et $P'PQS$ et d'un autre carré. Écrire en fonction de x les aires de chaque partie. Pouvez-vous expliquer alors la limite de $(f(x) - g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

65 ***Une sphère inscrite dans un cône***
D'après un problème de baccalauréat

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

1. a. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout x de $]1, +\infty[$, on ait :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 - 1}.$$

b. Étudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.

2. Soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1$, dans le repère précédent.

a. Quelle est la limite de $(f(x) - g(x))$ quand x tend vers $+\infty$? Donner une interprétation graphique de cette limite.

b. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{P}$.

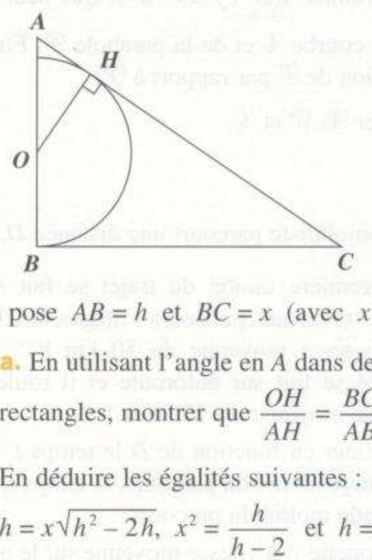
3. Calculer la fonction dérivée de f, étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

4. Représenter $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Dans la figure ci-dessous :

Le triangle ABC est rectangle en B. Le demi-cercle de centre O a pour rayon 1. La droite (BC) est tangente en B au demi-cercle. La droite (AC) est tangente en H au demi-cercle.



On pose $AB = h$ et $BC = x$ (avec $x > 1$).

1. a. En utilisant l'angle en A dans deux triangles rectangles, montrer que $\dfrac{OH}{AH} = \dfrac{BC}{AB}$.

b. En déduire les égalités suivantes :

$$h = x\sqrt{h^2 - 2h},\ x^2 = \frac{h}{h-2} \text{ et } h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

2. On rappelle que le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de base circulaire d'aire S est $\mathscr{V} = \dfrac{hS}{3}$.

En pivotant autour de (AB), le triangle ABC engendre un cône de révolution de sommet A.

a. Exprimer le volume $\mathscr{V}(x)$ du cône en fonction de x.

b. À l'aide des résultats de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x le volume est minimal. Calculer pour cette valeur de x l'angle en A du triangle ABC (à 0,1 degré près).

66

Les schémas ci-contre représentent en perspective (*figure 1*) et en coupe (*figure 2*), un mécanisme, appelé train épicycloïdal, utilisé comme réducteur ou multiplicateur de fréquence de rotation.

La formule de Willis permet de déterminer le rapport R des fréquences de rotation de l'élément de sortie et de l'élément d'entrée en fonction des caractéristiques des roues dentées.
Remarque : Si ce rapport est :

- supérieur à 1, le mécanisme sera un multiplicateur de fréquence de rotation ;
- inférieur à 1, le mécanisme sera un réducteur de fréquence de rotation.

On appelle r le quotient du nombre de dents de la roue dentée 2 par le nombre de dents de la roue dentée 1. On établit alors les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.
Dans chaque cas :

Étudier la fonction f_i (pour $i = 1, 2, 3$ ou 4) sur $]0, +\infty[$ et tracer sa représentation graphique.

Préciser, dans le cas où la courbe admet une asymptote en $+\infty$, l'équation de cette asymptote.

Dire si le mécanisme est utilisé comme réducteur ou comme multiplicateur de fréquence de rotation.

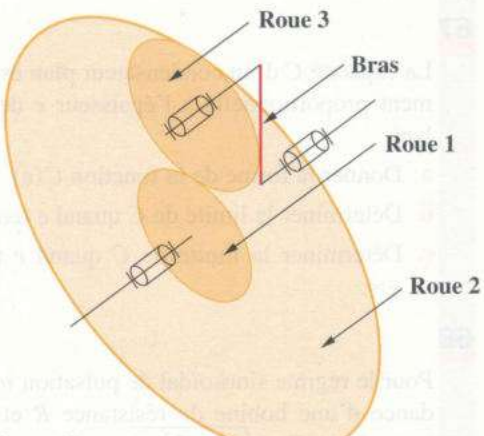


Figure 1

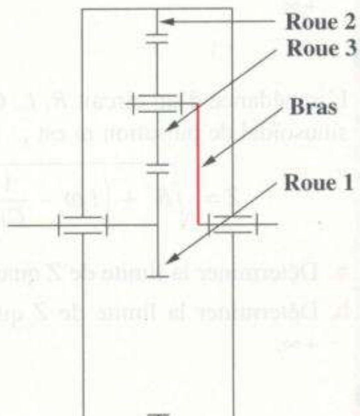
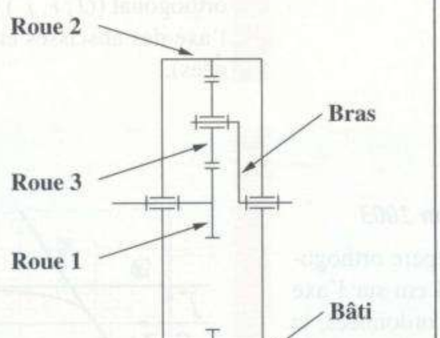
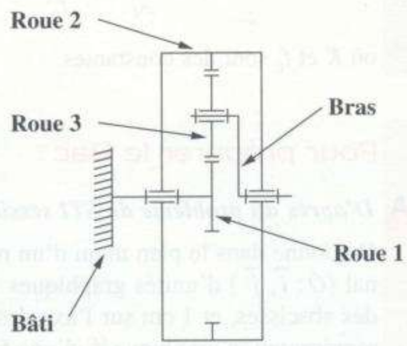


Figure 2

Élément lié au bâti	**Cas 1 et 2 : roue 2**		**Cas 3 et 4 : roue 1**	
Schéma				
	Cas 1	**Cas 2**	**Cas 3**	**Cas 4**
Élément moteur	**Bras**	**Roue 1**	**Bras**	**Roue 2**
Élément de sortie	**Roue 1**	**Bras**	**Roue 2**	**Bras**
Rapport R	$R = f_1(r) = 1 + r$	$R = f_2(r) = \dfrac{1}{1 + r}$	$R = f_3(r) = \dfrac{r+1}{r}$	$R = f_4(r) = \dfrac{r}{r+1}$

67

La capacité C d'un condensateur plan est inversement proportionnelle à l'épaisseur e de son isolant.

a. Donner la forme de la fonction $C(e)$.

b. Déterminer la limite de C quand e tend vers 0.

c. Déterminer la limite de C quand e tend vers $+\infty$.

68

Pour le régime sinusoïdal de pulsation ω, l'impédance d'une bobine de résistance R et d'inductance L est $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.

a. Déterminer la limite de Z quand ω tend vers 0.

b. Déterminer la limite de Z quand ω tend vers $+\infty$.

69

L'impédance d'un circuit R, L, C série en régime sinusoïdal de pulsation ω est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

a. Déterminer la limite de Z quand ω tend vers 0.

b. Déterminer la limite de Z quand ω tend vers $+\infty$.

70

Le module T de la fonction de transfert d'un filtre « passe-bas » s'écrit, en fonction de la fréquence f :

$$T(f) = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}},$$

où K et f_0 sont des constantes.

Déterminer la limite de $T(f)$ quand f tend vers $+\infty$ (physiquement, on assimile $T(f)$ à cette limite lorsque f est très grand devant f_0).

Déterminer la limite de $T(f)$ quand f tend vers 0 (physiquement, si f tend vers zéro, on s'approche du cas du régime constant).

71

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec le module de la fonction de transfert d'un filtre « passe-haut » : $T(f) = \dfrac{K\frac{f}{f_0}}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}}$.

72

Un générateur de tension continue de force électromotrice $E = 6$ V et de résistance interne $r = 1{,}2\ \Omega$, alimente un résistor de résistance variable R. On se propose d'étudier la puissance P reçue par le résistor en fonction de R. On rappelle que $P = RI^2$ et $I = \dfrac{E}{r + R}$.

Exprimer P en fonction de R.

Étudier le sens de variation de la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$, qui à R associe P.

Calculer la limite de cette fonction quand R tend vers $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Dresser le tableau de variation de f.

Tracer sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

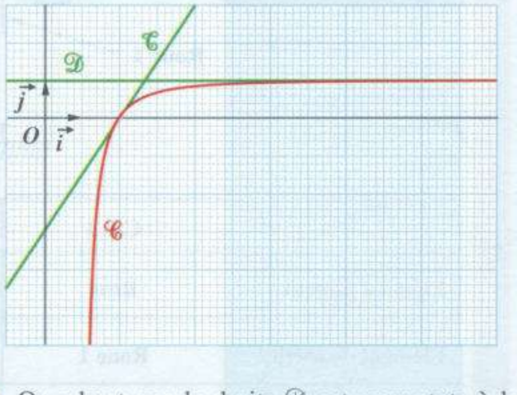
Pour préparer le Bac

A *D'après un problème de STI session 2003*

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses, et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ ainsi que deux droites, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$. La droite $\mathscr{T}$ passe par les points de coordonnées respectives (2, 0) et (0, – 3). La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = 1$.

1. a. Déterminer graphiquement $g(2)$.

b. Sachant que la droite $\mathscr{T}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.



c. On admet que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1 et g_2 sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \;;\; g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x}.$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$ et $g_2(2)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(2)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(2)$.

Ces résultats permettent-ils d'éliminer l'une des deux fonctions ?

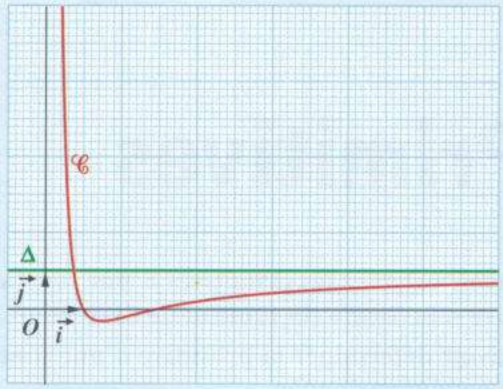
b. On note $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$ les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

B ***D'après un problème de STI session 2000***

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure ci-après.

On précise que la courbe $\mathscr{C}$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet la droite Δ d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$.

1. À partir de cette représentation graphique, déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.



2. Dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. On admet que $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$, où a, b et c sont trois nombres réels.

a. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que $a = 1$.

b. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.

c. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant a, b et c par leurs valeurs.

4. La représentation graphique suggère l'existence d'une asymptote verticale. Justifier ce résultat par un calcul de limite.

CHAPITRE 3

Primitives

OBJECTIFS

- Savoir calculer les primitives d'une fonction en utilisant une lecture « inverse » du tableau de dérivation.
- Savoir déterminer la primitive d'une fonction donnée qui vérifie une condition donnée.
- Acquérir des méthodes pour la recherche des primitives d'un produit ou d'un quotient de fonctions **(TP)**.

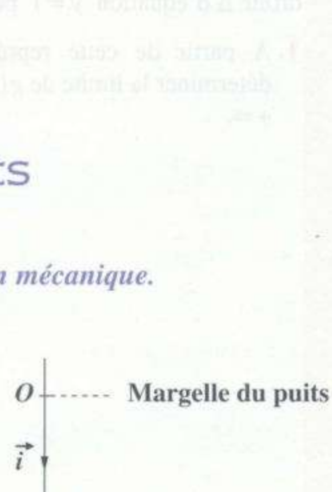
Prérequis

- calcul de fonctions dérivées

ACTIVITÉ 1 Des primitives au fond d'un puits

Objectif : Introduire la notion de primitive et justifier son intérêt en mécanique.

On rappelle que la vitesse instantanée d'un objet en mouvement est la dérivée de la fonction qui, au temps t, fait correspondre la position de l'objet. De même, l'accélération est la dérivée de la vitesse.



On lâche une pierre depuis le centre O de la margelle d'un puits. La position de la pierre à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$. On note g l'accélération de la pesanteur. Dans toute la suite, on prendra $g = 10$.

1.a. On suppose ici que $x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + 2t = 5t^2 + 2t$. Calculer alors la vitesse instantanée $v(t)$, puis l'accélération $\gamma(t)$ de la pierre. Préciser aussi la position et la vitesse de la pierre à l'instant du lâcher (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$).

b. Reprendre la question **a.** avec $x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 - 1 = 5t^2 - 1$.

2. On peut suivre la démarche contraire, et chercher la vitesse, puis l'équation du mouvement, à partir de l'expression de l'accélération (ce qui est la démarche « naturelle » en mécanique si on part du principe fondamental de la dynamique).

a. On suppose que $\gamma(t) = g = 10$.

• Donner une expression possible de la vitesse en utilisant la question **1.**.

• Y a-t-il plusieurs expressions de la vitesse qui donnent la même accélération ?

• Peut-on choisir une expression de la vitesse correspondant à un lâcher de la pierre sans vitesse initiale (c'est-à-dire que $v(0) = 0$) ? Justifier.

b. On suppose maintenant que $v(t) = gt = 10t$.

• Donner une expression possible de l'équation du mouvement en utilisant la question **1.**.

• Y a-t-il plusieurs expressions qui conviennent ?

• Peut-on choisir une expression correspondant au fait que la pierre est lâchée en O (c'est-à-dire que $x(0) = 0$) ?

ACTIVITÉ 2 Des primitives dans un condensateur

Objectif : Introduire la notion de primitive et justifier son intérêt en électricité.

Aux bornes d'un condensateur parfait de capacité C, la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont liées par la relation $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$. Dans toute la suite, on prendra $C = 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}$ F.

1. En Première, on a vu comment calculer la dérivée d'une fonction dérivable, ce qui permet de déterminer l'intensité $i(t)$, connaissant la tension $u(t)$. Dans chacun des cas suivants, calculer $i(t)$:

a. $u(t) = 6$;

b. $u(t) = 3t + 2$;

c. $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$, avec $U = 220$ V et $\omega = 314\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

2. Il est naturel de se poser la question contraire : « connaissant l'intensité $i(t)$, peut-on déterminer la tension $u(t)$? ».

a. Si $i(t) = 0$, donner une expression possible de $u(t)$. Cette expression de $u(t)$ est-elle la seule possible ? Justifier.

b. Si $i(t) = 3 \cdot 10^{-6}$, donner plusieurs expressions qui conviennent pour $u(t)$. En existe-t-il une pour laquelle la tension à l'instant $t = 0$ est nulle, c'est-à-dire telle que $u(0) = 0$? Justifier.

c. Si $i(t) = 6{,}908 \cdot 10^{-2}\sqrt{2}\cos 314t$, donner une expression possible de $u(t)$ (on pourra utiliser le résultat de la question **1.c.**).

Dans les deux activités, on a été amené à chercher une fonction dont on connaît la fonction dérivée. C'est ce que l'on appelle chercher une primitive. Dans ce chapitre, on va apprendre à déterminer toutes les primitives d'une fonction donnée en utilisant « à l'envers » les formules de dérivation. On verra ensuite comment déterminer une primitive vérifiant une condition donnée (comme dans la dernière question de l'activité 1 ou la question **2.b.** de l'activité 2).

1 Primitives d'une fonction dérivable sur un intervalle

On a vu dans les activités que l'on peut être amené à chercher une fonction en connaissant sa fonction dérivée f. C'est-à-dire que l'on cherche une fonction F telle que $F' = f$.

Définition Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle fonction primitive de f sur I, toute fonction F dont la fonction dérivée sur I est f.
« f est la fonction dérivée de F sur I » a le même sens que « F est une primitive de f sur I ».

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ est la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction F définie par $F(x) = x^2$. C'est aussi la fonction dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 3$. Les fonctions F et G sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On a défini la notion de primitive d'une fonction **dérivable**, car le théorème suivant, dont la démonstration amènerait bien au-delà du programme de Terminale STI, permet d'affirmer l'existence d'une primitive d'une fonction dérivable.

Théorème Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$, c'est-à-dire que f admet une primitive sur I.

L'exemple précédent, ainsi que ceux vus dans les activités, montrent qu'une fonction admet plusieurs primitives. La dérivée d'une fonction constante étant nulle, deux fonctions qui diffèrent d'une constante ont la même fonction dérivée, donc sont deux primitives d'une même fonction.

Réciproquement, si F et G sont deux fonctions primitives de la même fonction f sur I, cela signifie que, pour tout x de I, $F'(x) = G'(x) = f(x)$. On en déduit que $G'(x) - F'(x) = 0$. La fonction $G - F$ a donc une dérivée nulle sur I, ce qui signifie qu'elle est constante sur I. On en conclut donc que, pour tout x de I, $G(x) - F(x) = c$, où c est un nombre réel quelconque.

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si F est une fonction primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f est de la forme $F + c$, où c est une constante réelle quelconque.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x + 1$. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ est une primitive de f puisque $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 1 = 3x^2 + x + 1 = f(x)$.

D'après le théorème précédent, les primitives de f sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$, où c est une constante réelle.

▸Exercices n° 1 à 8

2 Détermination des primitives d'une fonction

1 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture « inverse » du tableau des dérivées usuelles, on obtient le tableau suivant.

La fonction f définie par :	admet comme primitives les fonctions définies par (c est une constante réelle) :	sur :
$f(x)=0$	$F(x)=c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=k$	$F(x)=kx+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (n entier strictement positif)	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ (n entier supérieur ou égal à 2)	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$]0, +\infty[$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+c$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions F de la forme $F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}+c$, où c est un nombre réel quelconque.

▸Exercices n° 9 à 11

2 Opérations sur les primitives

■ Produit par une constante

u est une fonction dérivable sur I, de fonction dérivée u'. D'après les propriétés sur la dérivation des fonctions, si k est une constante réelle, ku' est la fonction dérivée de ku. On en déduit la propriété suivante.

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle. Si F est une primitive sur I de f, alors kF est une primitive sur I de kf.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{3}$. Les primitives de f sont les fonctions F de la forme $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{x^5}{5}+c$, c'est-à-dire $F(x)=\dfrac{x^5}{15}+c$, où c est un nombre réel quelconque.

▸Exercices n° 12 et 13

Somme de deux fonctions

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonctions dérivées u' et v'. La fonction dérivée de $u + v$ est $u' + v'$. On en déduit la propriété suivante.

Propriété Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive sur I de f et G est une primitive sur I de g, alors $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^5}$. Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions F de la forme $F(x) = 3 \times 2\sqrt{x} - 2 \times \dfrac{-1}{4x^4} + c$, c'est-à-dire $F(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x^4} + c$, où c est un nombre réel quelconque.

▸Exercices n° 14 et 15

Conséquences de la dérivation des fonctions composées

Des formules de dérivation des fonctions composées, on déduit les résultats suivants, u étant une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (quand cela est nécessaire, on suppose que $u(x)$ est non nul, ou positif, sur l'intervalle I).

Fonction f définie sur I par :	Fonctions primitives F définies sur I par (c est une constante réelle) :
$f(x) = u'(ax+b)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\, u(ax+b) + c$
$f(x) = \sin(ax+b)$ (cas particulier de la première ligne)	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$f(x) = \cos(ax+b)$ (cas particulier de la première ligne)	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$f(x) = u'(x) \times (u(x))^n$ (n est un nombre entier strictement positif)	$F(x) = \dfrac{1}{(n+1)}\,(u(x))^{n+1} + c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$ (n est un nombre entier supérieur ou égal à 2)	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+2)^5}$.

f est un quotient de deux fonctions : seules les formules des cinquième et sixième lignes du tableau précédent donnent un moyen de déterminer les primitives d'un quotient. On cherche donc si f est de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ ou $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Ici, il ne peut s'agir que de la première des deux formules, avec $n = 5$ et $u(x) = x^3 + 2$. On a alors $u'(x) = 3x^2$. Pour se ramener à la formule connue, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3x^2}{(x^3+2)^5}$.

On obtient alors $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^5}$, et une primitive de f est donc définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-1}{4(u(x))^4}$.

Les primitives de f sont donc les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{-1}{12(x^3+2)^4} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(D'autres exemples de ce type de calcul sont traités dans les travaux pratiques.)

▸Exercices n° 16 à 36 et TP

3 Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

Dans les activités préparatoires, on a vu que, une fonction ayant une infinité de primitives, on pouvait chercher l'une d'entre elles répondant aux conditions d'une expérience. Voici comment se traduit ce problème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un nombre de l'intervalle I et a un nombre réel quelconque. On cherche une primitive G de f telle que $G(x_0) = a$.

f étant dérivable, elle admet une primitive F sur I (d'après le premier théorème de ce cours). Par conséquent $G(x) = F(x) + c$, donc $a = F(x_0) + c$ et donc $c = a - F(x_0)$. On a donc bien trouvé une unique primitive de f vérifiant la condition initiale $G(x_0) = a$. On obtient donc le théorème suivant.

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un nombre de l'intervalle I et a un nombre réel quelconque. Il existe une unique fonction F, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = a$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin \omega t$. On va déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 0$.

F est une primitive de f, donc elle est de la forme $F(t) = -\dfrac{1}{\omega}\cos \omega t + c,\ c \in \mathbb{R}$. On applique la condition fixée : $F(0) = -\dfrac{1}{\omega}\cos 0 + c$ donc $0 = -\dfrac{1}{\omega} + c$. On en déduit que $c = \dfrac{1}{\omega}$ et que la primitive cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\dfrac{1}{\omega}\cos \omega t + \dfrac{1}{\omega}$.

▸Exercices n° 37 à 47

COURS

TP Exemples de recherche des primitives d'un produit ou d'un quotient de fonctions

Avant de débuter, une mise en garde justifie l'intérêt du TP.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de primitives F et G. Alors :
- **le produit FG des primitives n'est pas une primitive du produit fg** (car la dérivée d'un produit $u \cdot v$ n'est pas égale au produit $u' \cdot v'$ des dérivées) ;
- **le quotient $\frac{F}{G}$ des primitives n'est pas une primitive du quotient $\frac{f}{g}$** (car la dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$ n'est pas égale au quotient $\frac{u'}{v'}$ des dérivées).

1 Utilisation des formules du cours

Si on reprend le cours, les seules formules qui permettent de calculer la primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions sont les suivantes : $u'u^n$ (où n est un entier supérieur ou égal à 1), $\frac{u'}{u^n}$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2) et $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

1 Cas d'un produit

a. Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (6x+6)(3x^2+6x-7)^3$.
- Cette fonction est un produit de fonctions : de quelle formule se rapproche-t-on ?
- Si on pose $u(x) = 3x^2 + 6x - 7$, calculer $u'(x)$.
- A-t-on la forme exacte de la formule choisie ?
- En appliquant cette formule, en déduire les primitives de f.

b. Soit la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x+1)(2x^2+4x-3)^5$.
- Cette fonction est un produit de fonctions : de quelle formule se rapproche-t-on ?
- On pose $u(x) = 2x^2 + 4x - 3$. Déterminer $u'(x)$ et préciser le réel k tel que $(x+1) = k \times u'(x)$.
- En observant alors que $g(x) = k\,u'(x)(u(x))^5$, déterminer les primitives de g.

c. En suivant la même démarche que précédemment, déterminer les primitives de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sin x \cos^4 x$.

2 Cas d'un quotient

a. Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+2)^2}$.
- Cette fonction f est le quotient de deux fonctions. Lesquelles ? De quelle formule vue en **1** se rapproche-t-on ? Peut-on directement l'appliquer ? Pourquoi ?
- On pose $u(x) = x^4 + 2$. Déterminer $u'(x)$ et préciser alors le réel k tel que $x^3 = k \times u'(x)$.
- En observant que $f(x) = k \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, déterminer les primitives de f.

b. En suivant la même démarche que précédemment, déterminer les primitives de la fonction g dérivable sur $]-2, 2[$ définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

▸Exercices n° 18 à 27

2 Changement d'écriture de la fonction

1 Cas d'une fonction rationnelle

a. Soit la fonction f dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

• En utilisant la démarche vue dans le **1**, déterminer une primitive de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

• En déduire les primitives de f.

b. Soit la fonction g définie sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ par $g(x) = \dfrac{8x^2 + 8x + 3}{(2x+1)^2}$.

• Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la méthode du **1** pour déterminer une primitive de g (on pourra utiliser un argument de degré).

• Vérifier que, pour tout x de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, $2 + \dfrac{1}{(2x+1)^2} = \dfrac{8x^2 + 8x + 3}{(2x+1)^2}$.

• En déduire les primitives de g.

Sur cet exemple, on voit que, pour une fonction rationnelle, une écriture peut permettre d'en trouver les primitives alors qu'une autre écriture de la même fonction rend cette détermination impossible.

c. Soit la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 4}{(x-1)^2}$.

• Expliquer pourquoi on ne peut appliquer la méthode du **1** pour déterminer une primitive de h (on pourra utiliser un argument de degré).

• Montrer qu'il existe trois réels a, b et c, que l'on déterminera, tels que, pour tout x de $]1, +\infty[$, $h(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ (indication : on pourra partir de l'expression $ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ et la mettre au même dénominateur).

• En déduire les primitives de h sur $]1, +\infty[$.

▸Exercices n° 30 à 33

2 Cas d'une fonction trigonométrique

a. Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin^2 x$.

• Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la méthode du **1** pour déterminer une primitive de f.

• On cherche à transformer l'écriture de la fonction f. On rappelle alors les formules de linéarisation vues en Première :

$$\text{pour tout réel } x,\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Après avoir linéarisé $f(x)$, déterminer les primitives de f.

b. Soit la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2 + \cos^2 x$. En suivant la même démarche qu'à la question **a.**, déterminer les primitives de g.

Remarque : Dans le chapitre sur les nombres complexes, on présentera des formules, appelées formules d'Euler, qui permettent de linéariser d'autres fonctions trigonométriques (en particulier des fonctions de la forme $x \mapsto \cos^n x$ et $x \mapsto \sin^n x$ où $n \geqslant 3$).

▸Exercices n° 34 à 36

1> Fonction primitive

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle fonction primitive de f sur I, toute fonction F dont la fonction dérivée sur I est f.

« f est la fonction dérivée de F sur I » est équivalent à « F est une primitive de f sur I ».

On admet l'existence d'une primitive d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

2> Ensemble de primitives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si F est une fonction primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f est de la forme $F + c$, où c est une constante réelle quelconque.

3> Calculs de primitives

a ■ Fonctions primitives des fonctions usuelles

La fonction f définie par :	**admet comme primitives les fonctions définies par (c est une constante réelle) :**	**sur :**
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (**n entier strictement positif**)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (**n entier supérieur ou égal à 2**)	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, \; k \in \mathbb{Z}$

b ■ Opérations sur les fonctions primitives

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle. Si F est une primitive sur I de f, alors kF est une primitive sur I de kf.

• Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive sur I de f et G est une primitive sur I de g, alors $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.

c Primitives de fonctions composées

Dans cette partie, F est une primitive de f et c une constante réelle.

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (quand cela est nécessaire, on suppose que $u(x)$ est non nul, ou positif, sur l'intervalle I).

• Si $f(x) = u'(ax+b)$,

alors $F(x) = \dfrac{1}{a}u(ax+b) + c.$

• Si $f(x) = u'(x) \times (u(x))^n$ (n est un nombre entier strictement positif),

alors $F(x) = \dfrac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + c.$

• Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$ (n est un nombre entier supérieur ou égal à 2),

alors $F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c.$

• Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$,

alors $F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c.$

Cas particuliers intéressants à mémoriser

• Si $f(x) = \sin(ax+b)$,

alors $F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c.$

• Si $f(x) = \cos(ax+b)$,

alors $F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c.$

• Si $f(x) = u'(x)u(x)$,

alors $F(x) = \dfrac{1}{2}(u(x))^2 + c.$

• Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$,

alors $F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + c.$

4> Primitive vérifiant une condition donnée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un nombre de l'intervalle I et a un nombre réel quelconque. Il existe une unique fonction primitive F de f telle que $F(x_0) = a$.

Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

1 Soit les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x} + 7 \text{ et } g(x) = x + 3 + \frac{1}{x^2}.$$

Montrer que f est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

« f est une primitive de g sur I » est équivalent à « g est la fonction dérivée de f sur I » : si on connaît f, il suffit donc de montrer que $f' = g$.

Réponse

On calcule $f'(x)$ et on compare avec $g(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2} + 3 + \frac{1}{x^2}$$
$$= x + 3 + \frac{1}{x^2}$$
$$= g(x).$$

Donc f est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Déterminer les primitives d'une fonction définie par une somme

2 Déterminer les primitives des fonctions définies sur I par :

a. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$.

f est une somme : on cherche une primitive de chacun de ses termes.

Réponses

a. $f(x) = x^4 + 5 \times x^2 + 3$;

Si n est un entier strictement positif, $x \mapsto x^n$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$.

$x \mapsto x^4$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{5}x^5$

$x \mapsto x^2$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$

Si k est une constante réelle et u une fonction dérivable, ku a pour primitive kU.

$x \mapsto 5 \times x^2$ a pour primitive $x \mapsto 5 \times \frac{1}{3}x^3$

$x \mapsto 3$ a pour primitive $x \mapsto 3x$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 5 \times \frac{1}{3}x^3 + 3x + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$$

soit $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 + 3x + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Si n est un entier supérieur ou égal à 2,
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ a pour primitive
$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

b. $f(x) = 2 \times \frac{1}{x^3} - 3 \times \frac{1}{x^2}$;

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$ a pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{x}$

$$F(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + c \; ; \; c \in \mathbb{R}$$

soit $F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives d'une fonction définie par un produit

En général, une primitive d'un produit de fonctions n'est pas le produit de primitives de ces fonctions.
Pour déterminer une primitive d'un produit de deux facteurs, on cherche à l'identifier à la formule du cours :
Pour $n \geqslant 1$,
si $f(x) = u'(x)(u(x))^n$,
alors les primitives de f sont définies par
$F(x) = \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + c$.

3 Déterminer les primitives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = 4x^3(x^4 + 7)$;

b. $f(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 7)^3$.

Réponses

a. Ici $n = 1$ et $x \mapsto 4x^3$ est la dérivée de $x \mapsto x^4 + 7$;

$$F(x) = \frac{1}{2}(x^4 + 7)^2 + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

b. Ici $n = 3$. En posant $u(x) = x^2 + 2x + 7$, on a $u'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$;

on peut écrire $f(x) = \frac{1}{2} \times (2x+2)(x^2 + 2x + 7)^3$

qui est de la forme $\frac{1}{2} \times u'(x) \times (u(x))^3$

or $x \mapsto u'(x) \times (u(x))^3$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{4}(u(x))^4$

d'où :

$$F(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 2x + 7)^4 + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les primitives d'une fonction définie par un quotient

Une primitive d'un quotient de deux fonctions n'est pas le quotient de primitives de ces fonctions.
Pour déterminer une primitive d'un quotient, on cherche à l'identifier à la formule du cours :
Pour $n > 1$, si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$, alors les primitives de f sont définies par
$$F(x) = -\frac{1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c.$$

4 Déterminer les primitives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+7)^2}$;

b. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^4+7)^4}$.

Réponses

a. Ici $n = 2$. En posant $u(x) = x^2 + x + 7$, on a $u'(x) = 2x + 1$.

D'où $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+7} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

b. Ici $n = 4$. En posant $u(x) = x^4 + 7$, on a $u'(x) = 4x^3$ et $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4x^3}{(x^4+7)^4}$;

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^4}$ a pour primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{3(u(x))^3} + c$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{3(x^4+7)^3}\right) + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Soit $F(x) = -\dfrac{1}{12(x^4+7)^3} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives d'une fonction trigonométrique

Si $f(x) = \sin(ax+b)$, alors les primitives de f sont définies par
$$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c.$$

5 Déterminer les primitives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b. $f(x) = \sin x \cos x$;

c. $f(x) = \sin^2 3x$.

Réponses

a. En appliquant directement la formule, on a

$$F(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

Si $f(x) = u'(x)u(x)$, alors les primitives de f sont définies par $F(x) = \frac{1}{2}(u(x))^2 + c$.

b. $f(x)$ est un produit.
$x \mapsto \cos x$ est la dérivée de $x \mapsto \sin x$.
En appliquant directement la formule, on a
$F(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + c$; $c \in \mathbb{R}$, soit :

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'une puissance de fonction trigonométrique : on linéarise à l'aide de la formule : $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.

c. $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)$

Si $f(x) = \cos(ax + b)$, alors les primitives de f sont définies par $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$.

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$; $c \in \mathbb{R}$, soit :

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Réponses

On commence par déterminer la forme générale des primitives de la fonction donnée.

$x \mapsto f(x)$ a pour primitives :

$$x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

On détermine la constante à l'aide de la condition initiale.

$F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} + c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

la primitive demandée est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

exercices

Ensemble des primitives d'une fonction

Dans les exercices **1** à **6**, vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

1

C $f(x) = x^3 - x^2 + 4x$;

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 2005$; $I = \mathbb{R}$.

2

$f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$;

$F(x) = x^2 + 3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$.

3

$f(x) = -\sin(3x - 1)$;

$F(x) = \dfrac{1}{3}\cos(3x - 1)$; $I = \mathbb{R}$.

4

$f(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$;

$F(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} - 5$; $I =]1, +\infty[$.

5

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$;

$F(x) = \sqrt{3x^2 + 1} + 2$; $I = \mathbb{R}$.

6

$f(x) = \sin x \cos^2 x$;

$F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3 x$; $I = \mathbb{R}$.

7

C Soit la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{9x + 1}{\sqrt{x}}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)\sqrt{x}$ soit une primitive de f sur I.

b. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

8

Soit la fonction f définie sur $I =]-1, 3[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x - 7}{(x^2 - 2x - 3)^2}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 - 2x - 3}$ soit une primitive de f sur I.

b. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

Primitives des fonctions usuelles

9

Soit f une fonction dérivable sur I. On note f' la dérivée de f et F une primitive de f sur I. Compléter le tableau ci-dessous (s'il y a plusieurs possibilités, en choisir une).

I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$F(x)$			x^4			
$f(x)$	x^2			$\dfrac{1}{x^2}$		3
$f'(x)$		1			$\sin x$	

10

C Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I.

a. $f(x) = x^5$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(t) = 5$; $I = \mathbb{R}$.

c. $h(\theta) = \sin\theta$; $I = \mathbb{R}$.

d. $j(t) = \dfrac{1}{t^2}$; $I =]-\infty, 0[$.

11

Même exercice que le précédent avec :

a. $f(x) = x^3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$; $I =]-\infty, 0[$.

c. $h(t) = \cos t$; $I = \mathbb{R}$.

d. $k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; $I =]0, +\infty[$.

Calculs de primitives

Dans les exercices **12** à **29**, déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I.

12

C **a.** $g(t) = \dfrac{-2}{t^3}$; $I =]0, +\infty[$.

b. $h(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = \dfrac{5}{\cos^2 x}$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

d. $k(t) = -3\cos t$; $I = \mathbb{R}$.

13

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{5}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(t) = -2\sin t$; $I = \mathbb{R}$.

c. $h(x) = \dfrac{1}{3x^5}$; $I =]0, +\infty[$.

d. $k(t) = \dfrac{-2}{t^2}$; $I =]-\infty, 0[$.

14

a. $g(x) = x^2 + x + 3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$; $I = \mathbb{R}$.

c. $h(t) = \dfrac{3}{t^2} - \dfrac{5}{2t^4}$; $I =]0, +\infty[$.

d. $k(t) = \dfrac{t^3 + 4t^2 - 2}{t^2}$; $I =]0, +\infty[$.

15

a. $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = x^2 - \dfrac{3}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$.

c. $k(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{5x^3}$; $I =]0, +\infty[$.

d. $h(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{2x^3}$; $I =]-\infty, 0[$.

16

C **a.** $f(x) = \cos 2x$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x - 10}}$; $I =]2, +\infty[$.

17

a. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3 - x}}$; $I =]-\infty, 3[$.

b. $h(t) = \sin\left(3t + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $I = \mathbb{R}$.

18

a. $h(t) = 3(3t - 1)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x + 1}}$; $I = \left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

19

a. $h(x) = 5(5x - 2)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \dfrac{4}{(4x + 1)^3}$; $I = \left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

20

a. $f(x) = (x + 1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = \dfrac{4}{(x + 1)^3}$; $I =]-\infty, -1[$.

21

C **a.** $f(x) = (2x - 2)(x^2 - 2x - 1)$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$; $I = \mathbb{R}$.

22

a. $h(x) = 3x^2(x^3 + 5)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 3)^2}$; $I = \mathbb{R}$.

23

a. $f(x) = \dfrac{6x + 3}{(x^2 + x + 3)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = 4x(x^2 - 1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

24

C **a.** $f(x) = x(3x^2 + 1)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = \dfrac{3x^2 + x}{(2x^3 + x^2 - 4)^3}$; $I = [2, +\infty[$.

25

a. $f(t) = \dfrac{t^2}{(t^3 - 1)^2}$; $I =]1, +\infty[$.

b. $g(x) = x(x^2 + 3)^3$; $I = \mathbb{R}$.

26

a. $g(x) = (x - 1)(3x^2 - 6x + 4)$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x + 1)^4}$; $I =]-1, +\infty[$.

27

a. $f(t) = \cos t \sin^2 t$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = (1 + \tan^2 x)\tan^3 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

28

C **a.** $f(t) = \cos 3t$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = 5x^4 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{1}{3}x + 1$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 4)^2}$; $I = \mathbb{R}$.

d. $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; $I =]2, +\infty[$.

e. $h(x) = \dfrac{3x}{(x^2+3)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

f. $f(x) = 3x + 2 - \dfrac{1}{(x+5)^2}$; $I =]-\infty, -5[$.

29

a. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}$; $I =]0, +\infty[$.

b. $g(t) = t(t^2+1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

c. $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$; $I =]-\infty, 1[$.

d. $f(t) = \sin t \cos^2 t$; $I = \mathbb{R}$.

e. $f(x) = x^2(2x^3+1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

f. $g(x) = x^2 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{(3x-2)^2}$; $I = \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

30

C Soit la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on précisera tels que, pour tout x de $]-2, +\infty[$, on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}.$$

b. En déduire les primitives de f sur $]-2, +\infty[$.

31

Soit la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2+12x-17}{(x-3)^2}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on précisera tels que, pour tout x de $]3, +\infty[$, on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-3)^2}.$$

b. En déduire les primitives de f sur $]3, +\infty[$.

32

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-5x^2+7x-2}{(x-1)^2}.$$

a. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on précisera tels que, pour tout x de $]-\infty, 1[$, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

b. En déduire les primitives de f sur $]-\infty, 1[$.

33

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(2x+1)^3}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on précisera tels que, pour tout x de $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}.$$

b. En déduire les primitives de f sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$.

Dans les exercices **34** et **35**, linéariser l'expression de la fonction puis déterminer ses primitives sur $\mathbb{R}$.

34

C **a.** $g(t) = \sin^2 3t$.

b. $f(x) = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

35

a. $f(t) = 3\sin^2 2t$.

b. $g(x) = \cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

36

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^4 x$.

a. En écrivant $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ et en linéarisant $\sin^2 x$, montrer que :

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x).$$

b. En linéarisant $\cos^2 2x$ dans cette dernière expression, montrer que :

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

c. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Primitive vérifiant une condition initiale

Dans les exercices **37** à **47**, déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.

37

C $f(x) = \cos x$; $F(0) = 1$; $I = \mathbb{R}$.

38

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$; $F(1) = 2$; $I =]0, +\infty[$

39

$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$; $F(1) = 1$; $I =]-1, +\infty[$.

40

$f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^3}$; $F(0) = 1$; $I = \mathbb{R}$.

41

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $F(3) = 2\sqrt{2}$; $I =]1, +\infty[$.

42

$f(x) = 3x^2(x^3+2)$; $F(-1) = 1$; $I = \mathbb{R}$.

43

$f(x) = (2x^5 - x^2)(x^6 - x^3 + 1)^2$; $F(0) = 0$; $I = \mathbb{R}$.

44

$f(t) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; $I = \mathbb{R}$.

45

$f(x) = 2\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$; $I = \mathbb{R}$.

46

$f(x) = \sin x \cos^3 x$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

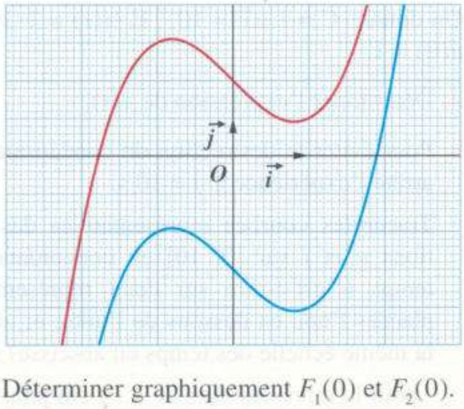
47

$f(t) = 3\cos^2\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $F(0) = 1$; $I = \mathbb{R}$.

Pour aller plus loin...

48

Sur le graphique ci-dessous, la courbe rouge est la représentation graphique d'une fonction F_1 et la courbe bleue celle d'une fonction F_2, toutes deux primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction dérivable f.

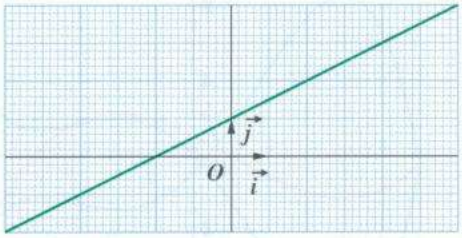


a. Déterminer graphiquement $F_1(0)$ et $F_2(0)$.

b. On sait de plus que $f(x) = 3x^2 - 2$.
Déterminer les primitives de f. En déduire les expressions de F_1 et de F_2.

49

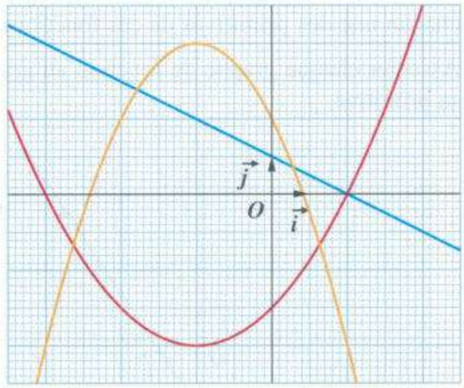
La courbe suivante est la courbe représentative d'une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$.



a. Par lecture graphique, établir le tableau de signes de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$. Justifier.

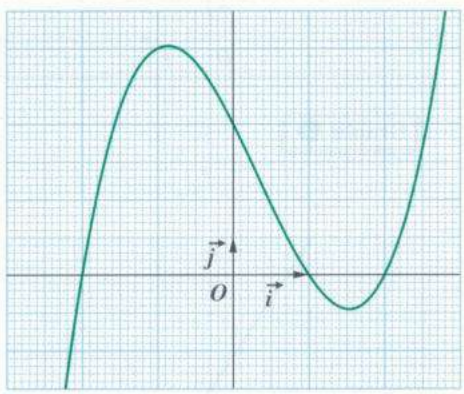
b. Soit F une primitive de f. Déduire de la question précédente le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$. Justifier.

c. Parmi les courbes suivantes se trouve la courbe de F. Laquelle est-ce ? Justifier.



50

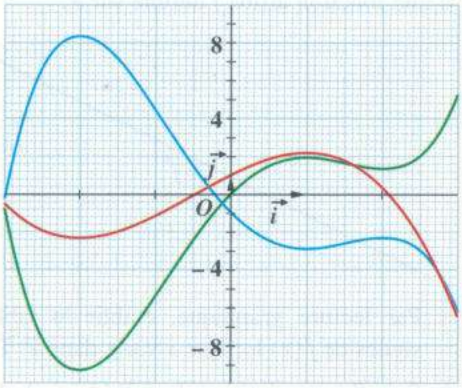
La courbe suivante est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $I = [-3, 3]$.



a. Par lecture graphique, établir le tableau de signes de $f(x)$ lorsque x varie dans I. Justifier.

b. Soit F une primitive de f. Déduire de la question précédente le sens de variation de F sur I. Justifier.

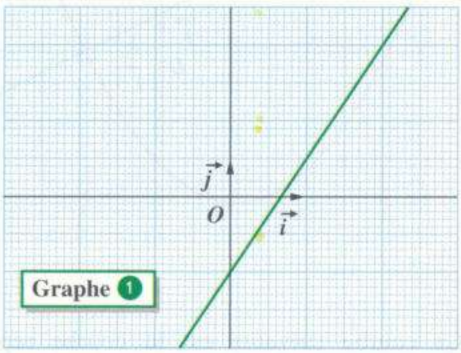
c. Parmi les courbes suivantes, se trouve la courbe de F. Laquelle est-ce ? Justifier.

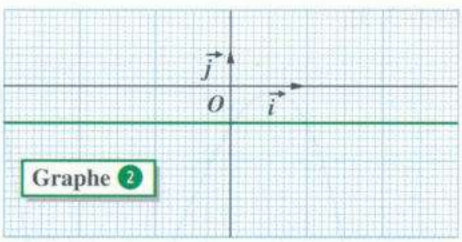


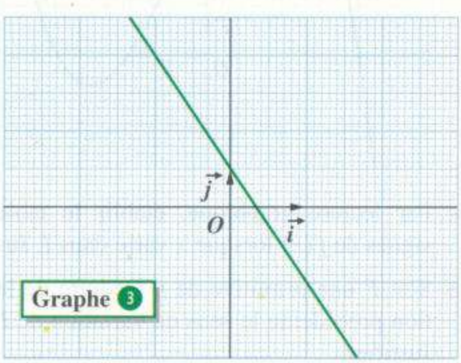
51

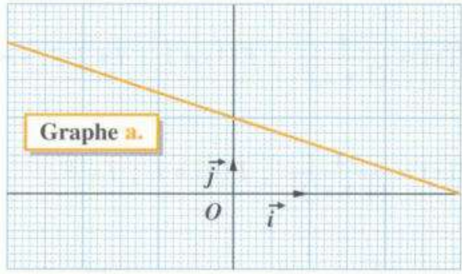
Les graphes ❶, ❷ et ❸ sont les représentations graphiques respectives de fonctions f_1, f_2 et f_3 dérivables sur $\mathbb{R}$. Les graphes **a.**, **b.** et **c.** représentent chacun une des primitives de ces fonctions.

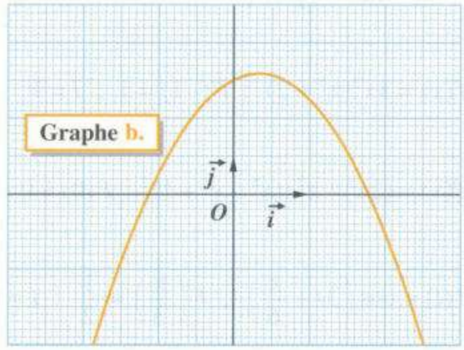
Associer chaque graphe de fonction au graphe de sa primitive.

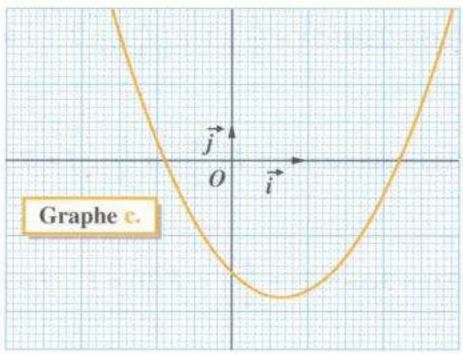












52

On rappelle que, pour un condensateur parfait de capacité C, on a $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$, où t est exprimé en secondes, i en ampères et u en volts.

On donne $C = 1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F, $i(t) = 2 \cdot 10^{-6}$ et $u(0) = 1$.

a. Déterminer l'expression de $u(t)$.

b. Pour éviter la destruction du condensateur, on arrête l'expérience à $t = 10$ s.

Tracer les courbes représentatives des fonctions u et i sur $[0, 10]$ en concordance des temps (c'est-à-dire sur deux représentations placées l'une en dessous de l'autre et utilisant la même échelle des temps en abscisse) avec :

• pour la représentation de u : 1 cm pour 1 s en abscisse et 1 cm pour 1 V en ordonnée ;

• pour la représentation de i : 1 cm pour 1 s en abscisse et 1 cm pour 10^{-6} A en ordonnée.

53

On rappelle que, pour une bobine parfaite d'inductance L, on a : $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$.

a. On donne $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$ et $i(0) = -\dfrac{U\sqrt{2}}{L\omega}$.
Déterminer l'expression de $i(t)$.

b. On donne $L = 1$ H, $U = 220$ V, $\omega = 314$ rad · s^{-1}.
Tracer les courbes représentatives des fonctions u et i en concordance des temps (c'est-à-dire sur deux représentations placées l'une en dessous de l'autre et utilisant la même échelle des temps en abscisse) avec :
- pour la représentation de u : 1 cm pour 5 ms en abscisse et 1 cm pour 100 V en ordonnée ;
- pour la représentation de i : 1 cm pour 5 ms en abscisse et 1 cm pour 0,5 A en ordonnée.

54

On rappelle que, pour une bobine parfaite d'inductance L, on a : $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$.

a. On donne : u périodique de période T,

$$\begin{cases} u(t) = E & \text{pour } t \in \left]0, \dfrac{T}{2}\right[\\ u(t) = -E & \text{pour } t \in \left]\dfrac{T}{2}, T\right[\end{cases} \text{ et } i(0) = I_{\mathrm{m}}.$$

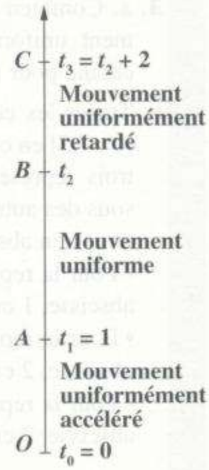
De plus, on rappelle que l'intensité ne peut varier de manière discontinue dans une bobine, ce qui se traduit par le fait que les limites à droite et à gauche de la fonction i en $\dfrac{T}{2}$ sont égales.

Exprimer $i(t)$ en fonction de E, L, T et I_{m} sur chacun des intervalles $\left]0, \dfrac{T}{2}\right[$, $\left]\dfrac{T}{2}, T\right[$.

b. On donne $E = 10$ V, $T = 0{,}6$ s, $L = 1$ H et $I_{\mathrm{m}} = -1{,}5$ A.
Tracer les courbes représentatives des fonctions u et i en concordance des temps (c'est-à-dire sur deux représentations placées l'une en dessous de l'autre et utilisant la même échelle des temps en abscisse) avec :
- pour la représentation de u : 1 cm pour 0,1 s en abscisse et 0,5 cm pour 1 V en ordonnée.
- pour la représentation de i : 1 cm pour 0,1 s en abscisse et 1 cm pour 0,5 A en ordonnée.

55

Un ascenseur s'élève de 12 mètres, du point O jusqu'au point C. Le mouvement se fait en trois phases :
- une phase de 1 seconde à une accélération constante de 2 m · s^{-2} (mouvement uniformément accéléré) ;
- une phase avec une accélération nulle pendant un temps qui sera à déterminer (mouvement uniforme) ;
- une phase de 2 secondes de décélération avec une accélération constante égale à -1 m · s^{-2} (mouvement uniformément retardé).



La fonction accélération a est donc définie par :
- phase 1 : pour $0 \leqslant t < 1$, $a(t) = a_1(t) = 2$;
- phase 2 : pour $1 \leqslant t < t_2$, $a(t) = a_2(t) = 0$;
- phase 3 : pour $t_2 \leqslant t \leqslant t_2 + 2$, $a(t) = a_3(t) = -1$.

1. Étude des vitesses

a. Sachant que la vitesse v vérifie $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, déterminer la forme des expressions de la vitesse $v(t) = v_1(t)$ sur $[0, 1[$, $v(t) = v_2(t)$ sur $[1, t_2[$ et $v(t) = v_3(t)$ sur $[t_2, t_2 + 2]$.

b. Sachant que $v(0) = 0$, déterminer l'expression de $v_1(t)$.

c. En utilisant le fait que la vitesse varie de façon continue, ce qui se traduit par $\lim\limits_{t \to 1} v_1(t) = v_2(1)$, déterminer $v_2(t)$.

d. En utilisant de même le fait que $\lim\limits_{t \to t_2} v_2(t) = v_3(t_2)$, montrer que $v_3(t) = -t + (t_2 + 2)$.

2. Étude du déplacement

a. Sachant que la distance x parcourue en fonction du temps vérifie $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, déterminer la forme des expressions de x dans les différents intervalles : $x(t) = x_1(t)$ sur $[0, 1[$, $x(t) = x_2(t)$ sur $[1, t_2[$ et $x(t) = x_3(t)$ sur $[t_2, t_2 + 2]$ (on appellera c_3 la constante utilisée dans l'expression de x_3).

b. Sachant que $x(0) = 0$, déterminer $x_1(t)$.

c. En utilisant le fait que x varie de façon continue, c'est-à-dire que $\lim\limits_{t \to 1} x_1(t) = x_2(1)$, déterminer $x_2(t)$.

d. • En utilisant de même le fait que $\lim\limits_{t \to t_2} x_2(t) = x_3(t_2)$, déterminer une première équation liant t_2 et c_3.
• Justifier par ailleurs que $x_3(t_2 + 2) = 12$ et en déduire une deuxième équation liant t_2 et c_3.
• En déduire alors les valeurs de t_2 et c_3, à l'aide du système formé des deux équations précédentes.
• Préciser enfin l'expression de $x_3(t)$.

3. **a.** Combien de temps dure la phase de déplacement uniforme ? Combien de temps met la cabine pour aller de O à C ?

b. Tracer les courbes des fonctions a, v et x sur $[0 ; 7{,}5]$ en concordance des temps (c'est-à-dire trois représentations placées les unes au-dessous des autres et utilisant la même échelle des temps en abscisse) en prenant :

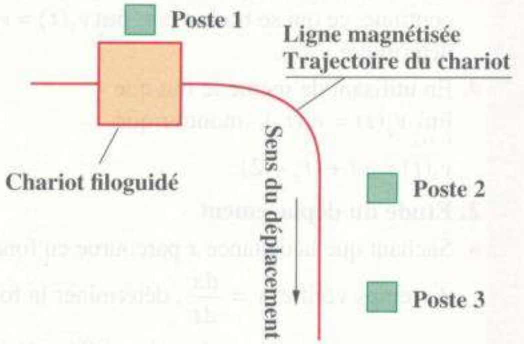
• Pour la représentation de x : 2 cm pour 1s en abscisse, 1 cm pour 1m en ordonnée.

• Pour la représentation de v : 2 cm pour 1s en abscisse, 2 cm pour $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en ordonnée.

• Pour la représentation de a : 2 cm pour 1s en abscisse, 2 cm pour $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en ordonnée.

56

Dans un atelier, on utilise un chariot filoguidé (chariot autonome qui décrit une trajectoire matérialisée par une ligne magnétisée placée sur le sol) pour la manutention automatique des pièces entre plusieurs postes de travail. Le temps t est exprimé en secondes. On appelle a la fonction qui à l'instant t associe l'accélération du chariot (exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), v la fonction qui à l'instant t associe la vitesse du chariot (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), et x la fonction qui à l'instant t associe la distance parcourue depuis le démarrage (en m).



Pour obtenir un effort de traction progressif lors du démarrage, on adopte une accélération a dont la loi de variation au cours du temps est sinusoïdale et admet une expression sur $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ de la forme $a(t) = -0{,}45(\cos(\omega t) - 1)$, où $\omega \in]0, 2\pi]$.
D'autre part, on a les conditions suivantes :
$a(0) = v(0) = x(0) = 0$

et l'on souhaite que $a\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

1. **a.** À l'aide de cette dernière condition, calculer ω.

b. Si t appartient à $\left[0, \frac{4}{3}\right]$, dans quel intervalle varie ωt ?

c. Lorsque u varie dans $[0, 2\pi]$, quel est le minimum de la fonction $u \mapsto \cos u$ et pour quelle valeur de u se minimum est-il atteint ?

d. On étudie le mouvement du chariot sur $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.
Déduire des questions précédentes l'accélération maximum et l'instant où celle-ci est atteinte.

2. Sachant que la vitesse est une primitive de l'accélération, et à l'aide des conditions initiales, déterminer l'expression de la fonction v. Calculer la vitesse à l'instant $t = \frac{4}{3}$.

3. Sachant que x est une primitive de v et à l'aide des conditions initiales, déterminer l'expression de la fonction x. Calculer la distance parcourue à l'instant $t = \frac{4}{3}$.

57

Lors d'un concours de tir à l'arc, une flèche est décochée d'une hauteur initiale $h_0 = 1{,}6$ m, avec une vitesse initiale, d'intensité v_0 de $30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, faisant avec l'horizontale un angle α de 30° L'objectif de l'exercice est de déterminer la trajectoire de la flèche.

1. L'altitude de la flèche à l'instant t est notée $y(t)$. La composante verticale de sa vitesse à l'instant t est $v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$. La composante verticale de son accélération à l'instant t est $a_y(t) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(t)$.

a. La flèche est soumise à l'accélération de la pesanteur, que l'on prendra ici égale à $10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (c'est-à-dire que, pour tout t, $a_y(t) = -g = -10$).
En utilisant les conditions initiales fixées ($v_y(0) = v_0 \sin\alpha = 15$), déterminer l'expression de $v_y(t)$.

b. À partir du résultat précédent, et en utilisant les conditions initiales fixées ($y(0) = h_0 = 1{,}6$), déterminer l'expression de $y(t)$.

2. L'abscisse de la flèche à l'instant t est notée $x(t)$. La composante horizontale de sa vitesse à l'instant t est $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$. La composante horizontale de son accélération à l'instant t est $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t)$.

a. Sachant que la flèche n'est soumise qu'à l'accélération de la pesanteur, dont la composante horizontale est nulle (c'est-à-dire que, pour tout t, $a_x(t) = 0$), et en utilisant les conditions initiales fixées ($v_x(0) = v_0 \cos\alpha = 15\sqrt{3}$), déterminer l'expression de $v_x(t)$.

b. À partir du résultat précédent, et en utilisant les conditions initiales fixées ($x(0) = 0$), déterminer l'expression de $x(t)$.

3. a. En utilisant les résultats du **2.b.**, déterminer l'expression de t en fonction de x.

b. À l'aide des résultats du **1.b.**, en déduire que :

$$y = -\frac{1}{135}x^2 + x\frac{\sqrt{3}}{3} + 1{,}6.$$

À quelle famille de courbes appartient la trajectoire de la flèche ?

4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{135}x^2 + x\frac{\sqrt{3}}{3} + 1{,}6.$$

a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
En déduire le tableau de variation de f.

b. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ? À ce moment, que dire de la vitesse de la flèche ? Justifier.

c. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm pour 10 m.

d. Par lecture graphique, déterminer à quelle distance du point de lancer la flèche tombera sur le sol.

Pour préparer le Bac

A *D'après un extrait de STI session 1997*

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{9x^3 - 6x^2 + x + 2}{(3x-1)^2}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que, pour tout x de $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$,

$$f(x) = ax + \frac{b}{(3x-1)^2}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

3. Déterminer la primitive de f sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.

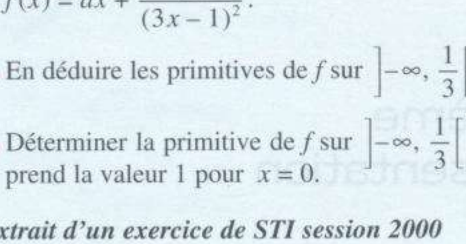
B *Extrait d'un exercice de STI session 2000*

a. Justifier l'égalité $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$.

b. Déterminer une fonction primitive de la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par $f(x) = \cos^2 2x$.

C *D'après un exercice de STT session 1999*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. La courbe $\mathscr{C}_1$ tracée ci-après est la courbe représentative d'une fonction F définie sur l'intervalle $[-1\,;1{,}5]$.



On admet que la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point de coordonnées $(0, -1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

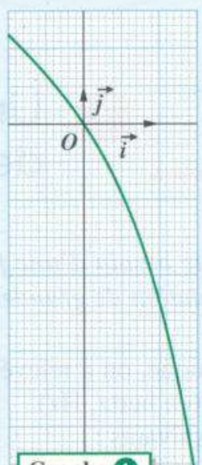
1. a. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$, déterminer $F(0)$ et $F'(0)$.

b. Dresser le tableau de variation de F sur $[-1\,;1{,}5]$.

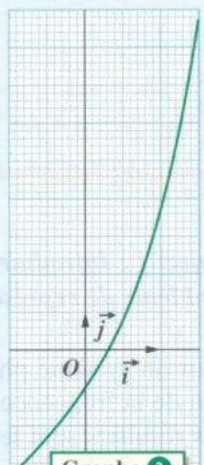
2. On suppose que F est une primitive d'une fonction f.

a. Déterminer $f(0)$.

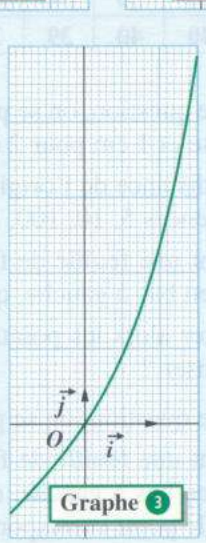
b. L'un des tracés ci-dessous est celui de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f. Déterminer lequel, en justifiant la réponse.



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

CHAPITRE 4

Logarithme népérien

OBJECTIFS

- **Définir la fonction logarithme népérien.**
- **Connaître et savoir utiliser ses propriétés algébriques.**
- **Connaître et savoir utiliser sa fonction dérivée et ses limites.**
- **Savoir déterminer la dérivée d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs strictement positives sur I.**
- **Savoir déterminer les primitives d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs strictement positives sur I.**

ACTIVITÉ 1 Un problème de représentation

Objectif : Introduire le besoin d'une fonction transformant un produit en somme grâce à un problème de représentation de grandeurs physiques.

Pour un système physique, on a relevé expérimentalement le gain G (en décibels, dB) en fonction de la fréquence f (en hertz, Hz).
Les résultats sont les suivants :

f	5	10	50	100	200	300	400	500	800	1 000	2 000	4 000	8 000	10 000	20 000
G	40	40	40	39	38	37	35	33	29,5	28	22	16,5	11	9,5	3,5

1. Dans cette question, on se place dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm pour 10 Hz en abscisse et 1 cm pour 2 dB en ordonnée.

a. À quelle distance de l'origine placera-t-on les points de l'axe des abscisses qui correspondent aux fréquences 5, 10, 100, 1 000, 10 000 et 20 000 Hz ? Qu'en penser ?

b. En prenant une feuille de format A4 (21 × 29,7 cm) dans le sens de la largeur et en mettant l'origine en bas à gauche, quelle est la plus grande fréquence que l'on peut représenter ?

c. Représenter alors les points de coordonnées (f, G) qui peuvent figurer sur une telle feuille. Qu'en penser ?

2. Dans cette question, on se place dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a. En prenant une feuille de format A4 (21 × 29,7 cm) dans le sens de la largeur et en mettant l'origine en bas à gauche, quelle échelle maximale peut-on utiliser pour placer sur l'axe des abscisses le point correspondant à 20 000 Hz ?

b. À quelle distance de l'origine devrait-on alors placer les points de l'axe des abscisses qui correspondent aux fréquences 5, 10, 50 et 100 Hz ?

c. On estime que pour pouvoir distinguer deux fréquences, il faut qu'elles soient représentées sur l'axe des abscisses par deux points distants d'au moins 0,1 cm. Si l'on prend une échelle qui permette de représenter la fréquence 20 000 Hz (soit 0,001 cm pour 1 Hz), quelle est la plus petite fréquence que l'on peut placer sur la représentation ?

d. En utilisant cette échelle (0,001 cm pour 1 Hz en abscisse et 1 cm pour 2 dB en ordonnée), représenter les points de coordonnées (f, G) qui peuvent figurer sur votre feuille. Qu'en penser ?

3. Afin de pouvoir faire apparaître la fréquence 20 000 Hz et distinguer toutes les fréquences mesurées, on est amené à utiliser, en abscisses, une graduation qui n'est pas linéaire : la graduation logarithmique. On choisit une unité de longueur ℓ : les fréquences étant représentées à partir de 1 ($= 10^0$), la fréquence 10 ($= 10^1$) est placée à la distance ℓ de l'origine, la fréquence 100 ($= 10^2$) est placée à la distance 2ℓ de l'origine, la fréquence 10^3 à la distance 3ℓ de l'origine, etc.

On choisit ici un repère orthogonal avec :
- une graduation logarithmique d'unité $\ell = 5$ cm sur l'axe des abscisses ;
- une graduation linéaire de 1 cm pour 2 dB sur l'axe des ordonnées.

a. Sur une feuille de format A4, tracer le repère précédent et placer les points de l'axe des abscisses correspondant aux fréquences 1, 10, 100 et 1 000 Hz.

b. À quelle fréquence correspond le point de l'axe des abscisses situé à 20 cm de l'origine ?

c. Placer alors les points de coordonnées (f, G) pour les fréquences 10, 100, 1 000 et 10 000 Hz.

Le problème qui reste posé est de savoir comment représenter les points qui correspondent aux fréquences intermédiaires (50, 200, 500, 3 000 et 20 000 Hz) sur un axe des abscisses muni d'une graduation logarithmique.

Pour cela, il faudrait déjà pouvoir définir une fonction f telle que : $f(10^1) = \ell$, $f(10^2) = 2\ell$, $f(10^3) = 3\ell$, … On montre assez simplement que de telles fonctions vérifient, pour tous entiers m et n, $f(10^n \times 10^m) = f(10^n) + f(10^m)$ et, plus généralement, que ces fonctions « transforment un produit en somme », c'est-à-dire vérifient, pour tous réels a et b strictement positifs, $f(a \times b) = f(a) + f(b)$. Ce sont les fonctions ayant cette propriété que l'on va étudier dans ce chapitre : les fonctions logarithmes.

ACTIVITÉ 2 Sur les traces de John Napier (Neper)

Objectif : Faire découvrir aux élèves quelques propriétés d'une fonction qui transformerait une suite géométrique en une suite arithmétique.

©Roger-Viollet/Boyer

John Napier est un mathématicien écossais du XVI^e siècle (1550-1617). À la fin de sa vie, préoccupé par l'idée que des calculs longs et fastidieux freinent les progrès de la science, il concentre ses recherches sur différents moyens de faciliter les calculs. En particulier, il étudie les liens entre termes d'une suite géométrique et termes d'une suite arithmétique.

1. Par quelle opération passe-t-on d'un terme d'une suite géométrique au terme suivant ? Par quelle opération passe-t-on d'un terme d'une suite arithmétique au terme suivant ?

Cette étude, reprise et approfondie ensuite, aboutit à la recherche d'une fonction f telle que :

$$f(a \times b) = f(a) + f(b) \quad \mathbf{(1)}.$$

Avec les notations et les connaissances mathématiques d'aujourd'hui, on va chercher quelques propriétés d'une telle fonction f.

2. Recherche de quelques valeurs particulières

a. On peut d'abord se demander si une telle fonction f peut être définie pour $x = 0$.

Pour répondre à cette question, on suppose donc qu'il existe au moins une fonction f vérifiant **(1)** et définie en 0.

• En appliquant la relation **(1)** avec $a = 0$, montrer alors que, pour tout nombre réel b, $f(b) = 0$.

• Quelle est la seule fonction vérifiant **(1)** et définie en 0 ?

Cette dernière fonction n'a évidemment pas d'intérêt dans le cadre du problème posé (faciliter les calculs). Dans la suite, on cherche donc une fonction f satisfaisant à la relation **(1)** et définie sur $]0, +\infty[$.

b. En appliquant la relation **(1)** pour $a = b = 1$, déterminer la valeur de $f(1)$.

3. Fonction dérivée

On impose, pour avoir une fonction suffisamment « régulière », que f soit dérivable sur $]0, +\infty[$. On appelle f' la fonction dérivée de f.

Pour $a > 0$, on pose : $g_1 : x \mapsto f(ax)$ et $g_2 : x \mapsto f(a) + f(x)$.

D'après la relation **(1)**, pour tout x de $]0, +\infty[$, $g_1(x) = g_2(x)$.

Si f est dérivable sur $]0, +\infty[$, g_1 et g_2 le sont aussi et $g_1'(x) = g_2'(x)$ **(2)**.

a. Écrire $g_2'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

b. Écrire $g_1'(x)$ en fonction de a et $f'(x)$.

c. Avec la relation **(2)**, on obtient, pour tout x et tout a de $]0, +\infty[$, $f'(x) = af'(ax)$.

En prenant $x = 1$ dans cette dernière égalité, déterminer l'expression de $f'(a)$ pour tout a de $]0, +\infty[$.

d. Conclusion : la fonction f cherchée, si elle existe, a pour fonction dérivée une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{k}{x}$, où k est une constante réelle.

Connaît-on, en lisant le tableau de dérivation, une fonction dont la dérivée soit $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

4. Synthèse

Si l'on suppose qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, qui vérifie la relation **(1)** :

Quelle doit être la valeur de $f(1)$?

Quelle doit être la forme de $f'(x)$?

C'est une telle fonction qu'on va définir dans ce chapitre et dont on étudie tant les propriétés analytiques (sens de variation, limites, etc.) que les propriétés algébriques (propriétés liées à la relation **(1)**).

1 Définition

Dans l'activité 2, on a constaté que la recherche de certaines fonctions conduisait à s'intéresser aux primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Comme cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives, qui diffèrent les unes des autres d'une constante. Fixer une primitive particulière revient à choisir une valeur prise par celle-ci en un point. D'après le travail fait en activité, il est alors naturel de s'intéresser à la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 si $x = 1$, ce que l'on fait dans ce qui suit.

Définition On appelle fonction logarithme népérien, et on note ln, l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

De cette définition, on déduit quelques propriétés immédiates.

Propriétés
- $\ln 1 = 0$.
- La fonction ln est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction : $$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Puisque, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{1}{x}$ est strictement positif, la fonction ln a une dérivée strictement positive et est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.

Propriété La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule pour $x = 1$, on en déduit que l'image d'un réel inférieur à 1 est négative et que l'image d'un réel supérieur à 1 est positive.

D'autre part, la fonction ln étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, deux nombres réels distincts ont une image distincte.

Propriétés
- Pour tout $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\ln x > 0$.
- Pour tous réels a et b de $]0, +\infty[$, $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation $\ln(x + 3) = \ln 2$.

Cette équation est définie si $(x + 3)$ est un nombre strictement positif, soit si x appartient à $]-3, +\infty[$. D'après la dernière propriété, $\ln(x + 3) = \ln 2$ si et seulement si $x + 3 = 2$, soit $x = -1$. Cette valeur étant dans l'ensemble de définition de l'équation, celle-ci admet une solution et une seule : -1.

▸Exercices n° 1 à 4

2 Propriétés algébriques

Dans les deux activités, on a recherché des fonctions qui « transforment un produit en somme » et on a été ainsi amené à s'intéresser à une primitive de la fonction inverse. On va maintenant vérifier que la fonction ln répond bien au problème posé et présenter toutes les propriétés qui s'en déduisent.

1 Logarithme d'un produit

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(ax)$. On constate que g est la composée de la fonction $x \mapsto ax$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln, dérivable sur $]0, +\infty[$ dont la fonction dérivée est la fonction inverse. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on en déduit que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = a \times \dfrac{1}{(ax)} = \dfrac{1}{x}$.

La fonction g est donc aussi une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln x + c$, et en particulier, $g(1) = \ln 1 + c = c$. Par ailleurs, par définition de g, $g(1) = \ln(a \times 1) = \ln a$ donc $g(x) = \ln x + \ln a$. On déduit que, pour tout x et tout a de $]0, +\infty[$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

Propriété Pour tous réels a et b de $]0, +\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple : $\ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3}) = \ln[(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})] = \ln(4 - 3) = \ln 1 = 0$.

▸Exercices n° 5 et 6

2 Logarithme d'un inverse et d'un quotient

Soit a et b deux réels strictement positifs. En utilisant la propriété précédente, on a :

- $0 = \ln 1 = \ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\dfrac{1}{a}$, donc $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

Propriétés
- Pour tout réel $a > 0$, $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Exemple : On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln 5 - \ln x = \ln x - \ln 2$. Cette équation est définie pour tout réel x strictement positif. Si x appartient à $]0, +\infty[$, (E) équivaut à : $\ln\left(\dfrac{5}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, c'est-à-dire à $\dfrac{5}{x} = \dfrac{x}{2}$, soit $x^2 = 10$. Cette dernière équation admet deux solutions : $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$. Puisque x est strictement positif, (E) admet donc une seule solution : $\sqrt{10}$.

▸Exercices n° 7 et 8

3 Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

À partir de la propriété sur le logarithme d'un produit, on peut écrire, pour tout réel a strictement positif : $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$.

À partir de la propriété sur le logarithme d'un quotient, on peut écrire, pour tout réel a strictement positif : $\ln(a^{-2}) = \ln\left(\dfrac{1}{a^2}\right) = -\ln(a^2) = -2\ln a$.

On admet que ces deux propriétés peuvent être généralisées et que l'on a, pour tout entier relatif n et tout réel a strictement positif : $\ln(a^n) = n\ln a$.

Par ailleurs, pour tout réel $a > 0$, $\ln a = \ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Propriétés
- Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln a$.
- Pour tout réel $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exemple : $\ln(\sqrt{125})$ s'exprime facilement à l'aide de $\ln 5$:

$$\ln(\sqrt{125}) = \frac{1}{2}\ln 125 = \frac{1}{2}\ln 5^3 = \frac{1}{2} \times 3\ln 5 = \frac{3}{2}\ln 5.$$

▸Exercices n° 9 à 15

3 Étude de la fonction logarithme népérien

1 Généralités

■ Ensemble de définition

La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ (c'est une conséquence de la définition de ln).

■ Fonction dérivée et sens de variation

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

■ Limite en $+\infty$

Comme $10 > 1$, $\ln 10 > 0$ et pour tout entier naturel n, $\ln(10^n) = n\ln 10$. On en déduit que si on prend un réel A, aussi grand que l'on veut, alors il existe un entier naturel n tel que $n\ln 10$ soit plus grand que A, c'est-à-dire tel que $\ln(10^n)$ soit supérieur à A. Dès que x est supérieur à 10^n, $\ln x$ est supérieur à A. Cette propriété se traduit par : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

■ Limite en 0

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$). En passant à la limite dans $\ln x = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (la courbe représentative de la fonction ln admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote).

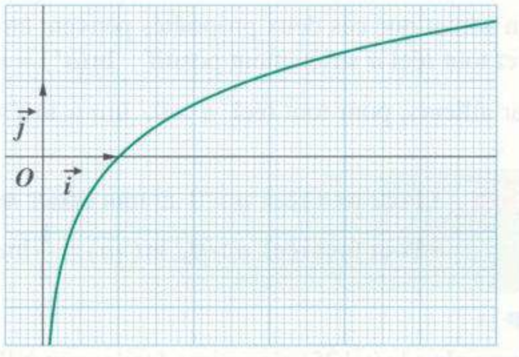
Conclusion

- La fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Sa fonction dérivée est la fonction inverse.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et la courbe représentative de la fonction ln admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

Tableau de variation de ln

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe représentative de ln



Remarque : Au même titre que les fonctions affines, carrée ou inverse, la fonction ln fait partie des fonctions de référence. À ce titre, les propriétés précédentes, le tableau de variation et la courbe représentative de ln doivent être mémorisés.

▸Exercices n° 16 à 24

2 Le nombre e

D'après l'étude précédente, on sait que :

- la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$;
- la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$;
- la fonction ln prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

On en déduit que l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution réelle que l'on note e. Par approximations successives à la calculatrice en utilisant la touche « ln », on trouve $e \approx 2{,}718$ (valeur approchée par défaut à 10^{-3} près).

Propriété Il existe un unique réel, noté e, tel que $\ln e = 1$.

Exemple : On résout l'équation $\ln x = 5$. Comme $5 = 5 \times 1 = 5 \times \ln e = \ln(e^5)$, l'équation équivaut à $\ln x = \ln(e^5)$, donc elle admet une seule solution : e^5.

▸Exercices n° 25 à 36

4 Dérivées et primitives

1 Calcul de dérivées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$. On constate alors que f est la composée de u et de

$g : x \mapsto \ln x$. On déduit du théorème sur la dérivation des fonctions composées que f est dérivable sur I et que $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$, c'est-à-dire que $f'(x) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$. La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est alors dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. On constate que f est de la forme $\ln u$, où u est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ définie par $u(x) = x^2 + 1$. On déduit de la propriété précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

▸Exercices n° 37 à 42

2 Calcul de primitives

D'après ce qui précède, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable et admet pour dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$; on peut donc dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ pour primitive.

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$. Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F de la forme $F(x) = \ln u(x) + c$, où c est une constante réelle.

Exemple : On souhaite déterminer les primitives de la fonction f définie sur $I =]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

La fonction f se présente sous la forme d'un quotient. On constate que $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où u est la fonction dérivable sur I définie par $u(x) = x^2 - 1$. Comme x appartient à $]1, +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$, donc $u(x) > 0$. Toutes les conditions d'application de la propriété précédente sont réunies, donc les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par $F(x) = \ln(x^2 - 1) + c$, où c est une constante réelle.

Remarque : On peut se demander ce qu'il se passe si u est à valeurs strictement négatives dans la propriété précédente (c'est par exemple le cas dans l'exemple précédent si on travaille sur $]-1, 1[$). On peut alors montrer que les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln[-u(x)] + c$, où c est une constante réelle (ce cas $u < 0$ est hors-programme).

▸Exercices n° 43 à 57

TP1 Des limites de référence

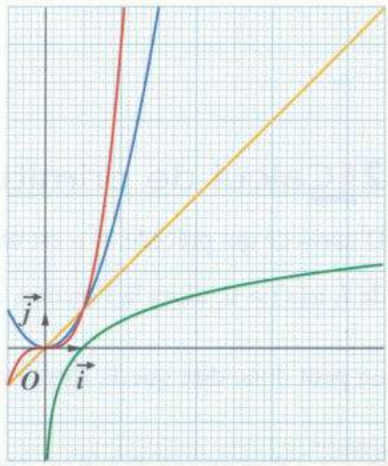
1 Étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$

Il s'agit ici de comparer, pour les « grandes » valeurs de x, le comportement de la fonction $x \mapsto \ln x$ avec celui des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ (où n désigne un entier strictement positif).

1 Rappeler la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln x$ et la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^n$ (où n est un entier strictement positif).

Peut-on en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ grâce au théorème sur la limite d'un quotient ? Pourquoi ?

2 On a représenté ci-contre les courbes des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$. Quelle conjecture peut-on faire à partir de ces représentations sur la façon dont les fonctions tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$? Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$?



3 L'objectif de cette partie est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$.

Soit la fonction dérivable f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2x}$. En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et établir le tableau de variation de f (on ne cherchera pas à déterminer les limites de f).

b. Déduire du tableau de variation précédent que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) < 0$.

c. Déduire de la question précédente une comparaison entre $\ln x$ et $\sqrt{x}$.
Justifier alors que, pour tout x strictement supérieur à 1, $0 < \ln x < \sqrt{x}$.

d. Déduire de ce qui précède que, pour tout x strictement supérieur à 1, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

e. Quelle est la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$?

En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

f. Soit n un entier strictement supérieur à 1. En écrivant $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \dfrac{\ln x}{x}$, déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$.

Le résultat obtenu confirme-t-il la conjecture faite à partir de la représentation graphique du **2** ?

4 Application : on souhaite déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f(x) = \ln x - x^2$.

a. Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln x$? La limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^2$?
Peut-on alors conclure sur la limite de f en $+\infty$? Pourquoi ?

b. Pour trouver la limite cherchée, on cherche à se ramener à une limite de référence par un changement d'écriture de la fonction.

- Écrire l'expression de $f(x)$ obtenue en mettant x^2 en facteur.
- Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$, de la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$?
- En utilisant le théorème sur la limite d'un produit, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Étude de $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x$

1 Rappeler la limite, quand x tend vers 0, de la fonction $x \mapsto \ln x$ et de la fonction $x \mapsto x^n$. Peut-on en déduire $\lim\limits_{x \to 0} (x^n \ln x)$ grâce au théorème sur la limite d'un produit ? Pourquoi ?

On peut démontrer le résultat suivant, que l'on admettra ici :

> Pour tout entier n strictement positif, $\lim\limits_{x \to 0} (x^n \ln x) = 0$.

2 Application : on souhaite déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

a. Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x$. Peut-on conclure sur la limite cherchée avec le théorème sur la limite d'une somme ?

b. Pour déterminer la limite cherchée, on cherche à se ramener à une limite de référence par un changement d'écriture de la fonction.

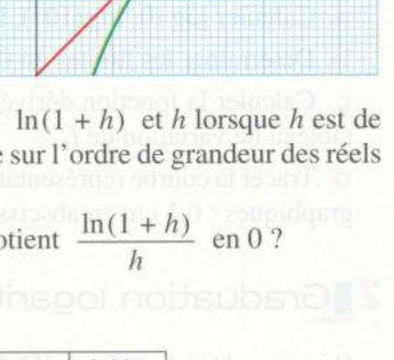
• Écrire l'expression de $f(x)$ obtenue en mettant $\frac{1}{x}$ en facteur.

• Donner alors $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$, puis $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x \ln x)$. En utilisant alors le théorème sur la limite d'un produit, conclure.

3 Approximation affine de $\ln(1 + h)$ en zéro ; étude de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$

1 Observation et conjecture

Sur la représentation ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction ln et $\mathscr{T}$ est sa tangente au point d'abscisse 1.



a. Donner l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

b. On a placé sur l'axe des abscisses le point d'abscisse $1 + h$ (où h est un réel proche de 0).

• On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $1 + h$. Donner son ordonnée en fonction de h.

• On appelle B le point de $\mathscr{T}$ de même abscisse $1 + h$. Donner son ordonnée en fonction de h.

c. À partir du graphique, que peut-on penser de l'écart entre $\ln(1 + h)$ et h lorsque h est de plus en plus proche de 0 ? Que peut-on faire comme conjecture sur l'ordre de grandeur des réels h et $\ln(1 + h)$ lorsque h est proche de zéro ?

Que peut-on alors faire comme conjecture sur la limite du quotient $\frac{\ln(1 + h)}{h}$ en 0 ?

d. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

h	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,1$	$0,01$	$0,001$
$\ln(1 + h)$						

L'observation de ces quelques valeurs confirme-t-elle l'observation graphique ?

Quelle fonction affine peut-on proposer comme approximation de la fonction $h \mapsto \ln(1 + h)$ lorsque h est proche de zéro ?

TRAVAUX PRATIQUES

Quelle conjecture peut-on alors faire sur la limite en 0 de $\frac{\ln(1+h)}{h}$?

On admet ici les résultats suivants :

- Lorsque h est proche de 0, on peut utiliser la fonction $h \mapsto h$ comme approximation affine de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2 Application

On souhaite déterminer la limite, quand x tend vers 1, de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

a. Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \ln x$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1)$. Peut-on conclure sur la limite cherchée avec le théorème sur la limite d'un quotient ?

b. On pose $x - 1 = h$, d'où $x = 1 + h$ (quand x tend vers 1, h tend vers 0).
On a alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1+h)$. Déterminer alors la limite cherchée.

Bilan
- Pour tout entier n strictement positif : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x^n \ln x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

▸Exercices n° 58 à 70

TP2 Logarithme décimal et échelle logarithmique

1 Définition

Définition On appelle logarithme décimal, ou logarithme de base 10, et on note log, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

a. Calculer $\log 10$, $\log(10^2)$, $\log(10^3)$ et plus généralement $\log(10^n)$, où n est un entier.

b. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction log.

c. Calculer la fonction dérivée de la fonction $f = \log$. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction log dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 0,1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

2 Graduation logarithmique

On reprend les données de l'activité 2. Pour un système physique, on a mesuré expérimentalement le gain G (en décibels, dB) en fonction de la fréquence f (en hertz, Hz). Les résultats sont les suivants :

f	5	10	50	100	200	300	400	500	800	1 000	2 000	4 000	8 000	10 000	20 000
G	40	40	40	39	38	37	35	33	29,5	28	22	16,5	11	9,5	3,5

Le problème posé consiste à représenter sur un axe des valeurs variant dans un très grand intervalle (de 5 à 20 000 dans l'exemple) en gardant distinguables des valeurs « petites » (par exemple 5, 10, 50, 100). Pour cela, on gradue l'axe des abscisses du repère en représentant x par un point situé à une distance de l'origine proportionnelle, non pas à x, mais à $\log x$. Autrement dit, **la grandeur x est représentée** sur l'axe des abscisses **par le point d'abscisse $\log x$**.

a. Prendre une feuille de format A4 dans le sens de la largeur et placer l'origine du repère dans le coin en bas à gauche. Tracer l'axe des abscisses et prendre comme unité 5 cm.

Placer, à partir de l'origine marquée 1 ($\log 1 = 0$), les points représentant les fréquences 10, 10^2 et 10^3 Hz. Quelle fréquence représente le point d'abscisse 4 ? À combien de cm de l'origine est-il placé ?

b. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, $\log(a \times 10^n) = \log a + n$.

c. En appliquant la relation précédente pour $a = 5$, placer sur l'axe des abscisses les points représentant les fréquences 5, 50 et 500 Hz. De la même façon, placer les points représentant les fréquences 200, 2 000, 20 000, puis 300, 3 000, 400, 4 000, 800 et 8 000 Hz.

(Un repère, dont l'axe des abscisses est ainsi gradué, et dont l'axe des ordonnées est gradué de façon linéaire, est appelé semi-logarithmique. Si les deux axes sont gradués avec une échelle logarithmique, on parle de graduation logarithmique ou parfois de graduation « log-log ».)

3 Application

Tracer sur la figure de la partie **2** l'axe des ordonnées et prendre une graduation linéaire d'unité 0,5 cm. On reprend les valeurs données dans la partie précédente.

a. Placer les points représentant le gain en fonction de la fréquence dans ce repère muni d'une graduation semi-logarithmique.

b. Pour $f > 3\,000$, comment semblent se situer les points ? Quel type de relation y a-t-il entre leur abscisse et leur ordonnée ? En utilisant le fait que l'ordonnée des points représente le gain G et l'abscisse représente $\log f$, quel type de relation lie le gain à la fréquence pour les grandes valeurs de f ?

c. On admet que les points tracés s'approchent, pour f suffisamment grand, d'une droite. On prend comme approximation que cette droite passe par les deux derniers points représentés.

• Tracer cette droite.

• Soit le point A représentant la dernière valeur ($f = 20\,000$ et $G = 3{,}5$) : les coordonnées de A sont ($\log 20\,000$; 3,5). Relever de même les coordonnées du point précédent B, correspondant à la fréquence 10 000 Hz. À partir de ces deux points, déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

d. À partir du résultat obtenu graphiquement à la question précédente, on considère que, pour les grandes valeurs de f, la relation entre gain et fréquence est $G = -20\log(f) + c$, où c est un réel. On appelle G_1 le gain pour une fréquence f_1 et G_2 le gain pour la fréquence $10f_1$.

• Exprimer G_1 et G_2 en fonction de f_1 et c, et en déduire que $G_2 - G_1 = -20$.

• En utilisant les données du tableau et la relation établie ci-dessus, déterminer le gain du système pour une fréquence de 5 000 Hz.

On remarque que, quand la fréquence est multipliée par 10 (variation dite d'une décade), le gain est diminué de 20 dB. Le coefficient directeur de la droite (AB) (déterminé à la question **d.**) est exprimé en dB/décade : ici, on a un coefficient directeur de -20 dB/décade.

▸Exercices n° 83 et 84

1> Définition

On appelle fonction logarithme népérien, et on note ln, l'unique fonction primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

2> Théorème et propriétés

Théorème

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln a = \ln b \text{ si et seulement si } a = b.$$

Propriétés

- $\ln 1 = 0$.
- Il existe un unique nombre, noté e, tel que $\ln e = 1$.
- Pour tout nombre entier n et tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \; ; \; \ln(a^n) = n \ln a \; ; \; \ln \frac{1}{a} = -\ln a \; ; \; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

3> Étude de la fonction logarithme népérien

- La fonction logarithme népérien f est définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $f(x) = \ln x$, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $f'(x) > 0$ et la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

• Tableau de variation de ln

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Courbe représentative de ln

4> Autres limites de référence

Pour tout réel α strictement positif, on a :

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0 \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

5> Dérivation et primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de fonction dérivée u'.

- La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln u$.

Utiliser les propriétés du logarithme népérien pour résoudre une équation ou une inéquation

1 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x) + \ln(8x) = 4$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x+3) \leqslant 0$.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2 + 4\ln x + 3 = 0$.

Réponses

On détermine l'ensemble de définition de l'équation.

a. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; l'équation existe si $2x > 0$ et $8x > 0$; l'équation est donc définie sur $]0, +\infty[$.

On se ramène à une égalité du type $\ln a = \ln b$ en utilisant :
• Si $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

$\ln(2x) + \ln(8x) = \ln(16x^2)$
l'équation devient : $\ln(16x^2) = 4$

• Il existe un unique nombre, noté e, tel que $\ln e = 1$.

$\ln(16x^2) = 4\ln e$

• Pour tout entier n et tout réel a strictement positif, on a $\ln(a^n) = n\ln a$.

$\ln(16x^2) = \ln e^4$

On résout l'équation en utilisant : avec $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.

d'où $16x^2 = e^4$ soit $x^2 = \dfrac{1}{16}e^4$

on obtient $x = \dfrac{1}{4}e^2$ ou $x = -\dfrac{1}{4}e^2$.

On ne garde que les solutions appartenant à l'ensemble de définition.

En tenant compte de l'ensemble de définition, on trouve :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}e^2\right\}.$$

On détermine l'ensemble de définition de l'inéquation.

b. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; l'inéquation existe si $x + 3 > 0$, l'inéquation est par conséquent définie sur $]-3, +\infty[$.

On se ramène à une inéquation du type $\ln a < \ln b$.

$\ln(x+3) \leqslant 0$ équivaut à $\ln(x+3) \leqslant \ln 1$.

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$:

On a alors $x + 3 \leqslant 1$, soit $x \leqslant -2$; en tenant compte de l'ensemble de définition, on trouve $\mathcal{S} =]-3, -2]$.

On procède à un changement de variable en posant $X = \ln x$.

c. L'équation est définie sur $]0, +\infty[$.
L'équation devient $X^2 + 4X + 3 = 0$, qui a pour solutions $X = -1$ ou $X = -3$.

On revient ensuite à l'inconnue initiale.

On obtient les solutions de l'équation initiale en posant $\ln x = -1$ et $\ln x = -3$.
On sait que $\ln e = 1$, d'où $\ln x = -\ln e$ ou $\ln x = -3\ln e$; en appliquant la propriété $\ln(a^n) = n\ln a$, on a :
$$-\ln e = \ln e^{-1} \text{ et } -3\ln e = \ln e^{-3}.$$
En appliquant la propriété $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$, on obtient $x = e^{-1}$ ou $x = e^{-3}$; on trouve donc :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}\right\}.$$

Calculer une fonction dérivée

2 Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $I = \mathbb{R}$.

Réponses

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

a. f est le produit de deux fonctions et :

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

On utilise le résultat du cours : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de fonction dérivée u'. La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

b. f est une fonction composée de la forme $\ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Déterminer des fonctions primitives

3 Déterminer les primitives sur I des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} + \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}$; $I = \mathbb{R}$.

La fonction f est un quotient. On cherche si elle est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de fonction dérivée u'.

Réponses

a. $x \mapsto x^2 + 1$ a pour dérivée $x \mapsto 2x$;

Une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln u$.

f peut s'écrire $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$. Une primitive de f est de la forme $\dfrac{1}{2} \times \ln u$; d'où

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

f est la somme de deux fonctions.

b. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

$\dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}$ peut s'écrire $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, donc est de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$; or $\dfrac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{u}$.

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + 1} + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Calculer des limites

4 Déterminer les limites aux bornes de I des fonctions suivantes, définies sur I :

a. $f(x) = x^2 \ln x + 1$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = \ln x - x$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$; $I =]1, +\infty[$.

Réponses

En $+\infty$, on utilise le théorème sur la limite d'un produit.

a. On cherche la limite du produit $x^2 \ln x$:

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En 0, il s'agit d'une forme indéterminée ; on utilise une limite de référence : pour tout réel $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

• en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

En 0, on utilise le théorème sur la limite d'une somme.

b. f est la somme de deux fonctions et on a :

• en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

En présence d'une forme indéterminée en $+\infty$, on peut penser à utiliser la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, pour tout réel $\alpha > 0$. Pour ce faire, on cherche à factoriser x^α.

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

On est en présence d'une forme indéterminée ; pour utiliser la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, avec $\alpha = 1$, on factorise x : $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$,

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

f est une fonction composée de la forme $\ln u$: on étudie d'abord les limites de u.

c. • en 1 : $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+$, donc

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

• Il s'agit de calculer la limite d'une fonction rationnelle à l'infini ; pour x non nul, on a :

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$.

Définition et propriétés algébriques

Dans les exercices **1** à **10**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations proposées.

1 C
a. $\ln(x+2) = \ln(5-x)$. b. $\ln(x+3) = 0$.
c. $\ln(1-x^2) = \ln(1-x)$.

2
a. $\ln(2x-1) = \ln(4-x)$.
b. $\ln(-2x^2+5x+3) = \ln(4x^2-1)$.
c. $(x-1)\ln(x-2) = 0$.

3 C
a. $\ln(x-1) \geqslant 0$. b. $\ln(x+2) \leqslant \ln 5$.
c. $x \ln 0{,}5 \leqslant \ln 4$.

4
a. $\ln(x+3) \leqslant 0$. b. $\ln(x-2) \geqslant \ln 4$.
c. $x\ln 2 \leqslant \ln 6$.

5 C
a. $\ln(2x-5) + \ln x = \ln 3$.
b. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$.
c. $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x-1)$.

6
a. $\ln(x+4) + \ln(2x) = \ln 4$.
b. $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x+5)$.
c. $\ln(2x-1) + \ln(x+1) = \ln x$.

7 C
a. $\ln(3x) - \ln(2x+1) = \ln 6$.
b. $\ln(4x-1) - \ln(x^2-1) = \ln 4$.
c. $\ln(3x-1) - \ln x = \ln(x+1)$.

8
a. $\ln(2x-1) - \ln(x-1) = \ln 3$.
b. $\ln(2x) - \ln x = \ln 2$.
c. $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(x+2)$.

9 C
a. $2\ln(1-x) = \ln(x+5)$.
b. $\ln(2x^2-5x+1) = \dfrac{1}{2}\ln 16$.
c. $\ln x + \ln(x-1) = 2\ln(x-2)$.

10
a. $\ln(2x^2-3x+16) = 2\ln(x+2)$.
b. $\ln(3x^2-11x+15) = \dfrac{1}{2}\ln 81$.
c. $\ln 2 + 2\ln(x+1) = \ln(10x+10)$.

11 C
Exprimer en fonction de $\ln 3$ et $\ln 2$:
a. $\ln 12$. b. $\ln 18$. c. $\ln 96$. d. $\ln 432$.
e. $\ln\dfrac{128}{243}$. f. $\ln\dfrac{192}{108}$.

12
Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:
a. $\ln 15$. b. $\ln 24$. c. $\ln 30$. d. $\ln 120$.
e. $\ln\dfrac{27}{10}$. f. $\ln\dfrac{75}{256}$.

Dans les exercices **13** à **15**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations proposées.

13
a. $\ln\sqrt{x} = \ln(2x+1)$.
b. $\ln\sqrt{2x-3} + \ln\sqrt{x} = \ln(6-x)$.

14 C
a. $\ln(x+1) + \ln(x-1) \leqslant 2\ln x$.
b. $\ln(-2x-1) + \ln(-3x-1) \leqslant 2\ln(1-x)$.

15
a. $\ln(2x-1) + \ln(x+3) \leqslant \ln x$.
b. $\ln(x-1) + \ln(5-x) \leqslant 2\ln(2+x)$.

Étude de la fonction logarithme népérien

16 C
Calculer la dérivée de la fonction f sur I.
a. $f(x) = 3\ln x + x$; $I =]0, +\infty[$.
b. $f(x) = (x+1)\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

17
Calculer la dérivée de la fonction f sur I.
a. $f(x) = (\ln x)^3$; $I =]0, +\infty[$.
b. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

18 C
Déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition des fonctions f définies sur I par :
a. $f(x) = -3\ln x$; $I =]0, +\infty[$.
b. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{\ln x}$; $I =]1, +\infty[$.

19

Déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition des fonctions f définies sur I par :

a. $f(x) = \dfrac{3}{\ln x}$; $I =]1, +\infty[$.

b. $f(x) = -\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

20

Déterminer la limite en zéro de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Dans les exercices **21** à **24**, déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition des fonctions proposées.

21

C $f(x) = \ln(-2x + 1)$; $I = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

22

$f(x) = \ln(x + 1)$; $I =]-1, +\infty[$.

23

$f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

24

$f(x) = \ln \dfrac{x+3}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

Le nombre e

25

C Simplifier les écritures suivantes :

a. $\ln e^2$. **b.** $\ln \sqrt{e}$. **c.** $\ln \dfrac{1}{e}$.

26

Simplifier les écritures suivantes :

a. $2 \ln e^3$. **b.** $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **c.** $\ln e^2 + \ln \dfrac{1}{e^4}$.

27

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Calculer $f(e)$; $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$; $f(\sqrt{e})$; $f(e^2)$.

28

C Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\ln x = -1$. **b.** $2 \ln x \leqslant 1$. **c.** $\ln x = \dfrac{1}{4}$.

29

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\ln x = 3$. **b.** $\ln x \geqslant 3$. **c.** $\ln x - \ln 5 > 3$.

30

C **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b. On souhaite résoudre l'équation :

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0.$$

En posant $X = \ln x$, montrer que l'on se ramène aux équations $\ln x = 4$ et $\ln x = -1$. Résoudre ces deux équations et conclure.

31

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

b. On souhaite résoudre l'équation :

$$2(\ln x)^2 - 3 \ln x - 2 = 0.$$

En posant $X = \ln x$, montrer que l'on se ramène aux équations $\ln x = -\dfrac{1}{2}$ et $\ln x = 2$. Résoudre ces deux équations et conclure.

32

a. On considère le polynôme :

$$P(x) = 2x^3 - 14x + 12.$$

À partir d'une solution évidente de l'équation $P(x) = 0$, factoriser $P(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^3 - 14x + 12 = 0.$$

c. En déduire les solutions de l'équation :

$$2(\ln x)^3 - 14 \ln x + 12 = 0.$$

33

1. Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$, x étant un réel.

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 = 0.$$

34

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1.$$

a. Calculer $P(1)$. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

c. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$\ln(6x-3) + \ln(x+1) = \ln(2x-2)$.

35

a. Résoudre le système : $\begin{cases} X + 2Y = 1 \\ X - Y = 4. \end{cases}$

b. En effectuant les changements de variable suivants, $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, résoudre le système :

$$\begin{cases} \ln(xy^2) = 1 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 4. \end{cases}$$

36

On considère le polynôme :
$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3.$$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que : $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x+1)(2x^2 + ax + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a. $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$;

b. $\ln(2x+3) + \ln(x^2+2x+2) = \ln(8x+9)$.

Calculs de fonction dérivée

Dans les exercices **37** à **42**, déterminer la dérivée de f définie sur l'intervalle I.

37

C **a.** $f(x) = \ln(x^2+1)$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = (x^2+1)\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = (\ln x)^2$; $I =]0, +\infty[$.

38

a. $f(x) = \ln x^2 - \ln x + 1$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^4$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = \ln\dfrac{3x+2}{x+1}$; $I =]-\infty, -1[$.

39

a. $f(x) = \ln(2x+1)$; $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

b. $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{2\ln x + 1}$; $I = [1, +\infty[$.

40

a. $f(x) = \ln(1-2x)$; $I = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

b. $f(x) = \ln(x^2+3x+4)$; $I = \mathbb{R}$.

41

a. $f(x) = \ln(2x^2-3x+2)$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x}$; $I =]-\infty, 0[$.

42

a. $f(x) = \ln\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$; $I =]-1, +\infty[$.

b. $f(x) = \ln(x^2) - (\ln x)^2 + x$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = x\ln 2 + \ln(2x) + x$; $I =]0, +\infty[$.

Recherche de primitives

43

C Montrer que F est une primitive de f sur I :

a. $F(x) = 3x^2 + 2\ln x$; $f(x) = \dfrac{6x^2+2}{x}$;
$I =]0, +\infty[$.

b. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x-1) + x - 3$; $f(x) = \dfrac{2x}{2x-1}$;
$I = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

44

Montrer que F est une primitive de f sur I :

a. $F(x) = \ln x - \ln(x-1)$; $f(x) = \dfrac{-1}{x(x-1)}$;
$I =]1, +\infty[$.

b. $F(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$.

45

Montrer que F est une primitive de f sur I :

a. $F(x) = x\ln x - x$; $f(x) = \ln x$; $I =]0, +\infty[$.

b. $F(x) = (\ln x)^2 + x$; $f(x) = \dfrac{2\ln x + x}{x}$;
$I =]0, +\infty[$.

Dans les exercices **46** à **50**, déterminer les primitives de f définie sur l'intervalle I.

46

C **a.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$.

47

a. $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = \tan x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$.

48

C **a.** $f(x) = \dfrac{4}{2x-1}$; $I = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$; $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

49

a. $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3\ln x}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

50

a. $f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$; $I =]1, +\infty[$.

b. $f(x) = -\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$; $I =]-2, +\infty[$.

51

C Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 5 - \frac{2}{x-3}.$$

a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur I par $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$.

b. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2+2}.$$

a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$.

b. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

53

Soit f la fonction définie sur $I =]2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x-2}.$$

b. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $]2, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

c. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

54

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x + 3.$$

Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que la fonction F, définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x(a\ln x + b)$, soit une primitive de f.

55

Déterminer la primitive F de f définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ et vérifiant la condition $F(2) = 4$.

56

Déterminer la primitive F de f définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-1}$ et vérifiant la condition $F(2) = \ln 3$.

57

Soit les fonctions f et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = (\ln x)^2.$$

Calculer la fonction dérivée de la fonction h. En déduire les primitives de f sur $]0, +\infty[$.
Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

Limites

Dans les exercices **58** à **63**, déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur I.

58

C $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$.

59

$f(x) = 1 - x - \ln x$; $I =]0, +\infty[$.

60

$f(x) = x^2 - 2x + 3 + 8\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

61

C $f(x) = x - \ln x$; $I =]0, +\infty[$ (on factorisera x).

62

$f(x) = 3x - \ln x + 1$; $I =]0, +\infty[$ (on factorisera x).

63

$f(x) = x\ln x - x^2$; $I =]0, +\infty[$ (on factorisera x^2).

Dans les exercices **64** à **67**, déterminer la limite en zéro de la fonction f définie sur I.

64

C $f(x) = x\ln x - x^2$; $I =]0, +\infty[$.

65

$f(x) = -x^2\ln x - 3x$; $I =]0, +\infty[$.

66

$f(x) = x^3 \ln x + 2x - 1$; $I =]0, +\infty[$.

67

$f(x) = x(2 + \ln x)$; $I =]0, +\infty[$.

68

Déterminer la limite en zéro de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

69

Déterminer la limite en zéro de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+1) + x}{x}$.

70

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition I de la fonction f définie par :

a. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - 2$; $I =]0, +\infty[$.

b. $f(x) = x^2 + 1 - \ln x$; $I =]0, +\infty[$.

c. $f(x) = x \ln x - 4x$; $I =]0, +\infty[$.

d. $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$; $I =]-1, 1[$.

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$; $I =]1, +\infty[$.

Limites et asymptotes

71

C Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - x - \frac{\ln x}{x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Déterminer la limite de f en $+\infty$; démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3 - x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Étudier ensuite la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

72

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{2x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Déterminer la limite de f en $+\infty$; démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Étudier ensuite la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

73

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3\ln x}{x} + x - 1,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Déterminer la limite de f en $+\infty$; démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Étudier ensuite la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

74

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - \ln \frac{x+3}{x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Soit la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. Montrer que les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sont asymptotes quand x tend vers $+\infty$.

Études de fonctions

75

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 4 + \ln x.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet une asymptote dont on précisera une équation.

b. Calculer $f'(x)$. Déterminer son signe sur $]0, +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (unité graphique : 1 cm).

e. Déduire de l'étude précédente que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

76

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 4\ln x - x.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet une asymptote dont on précisera une équation.

b. Calculer $f'(x)$. Déterminer son signe sur $]0, +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (unité graphique : 1 cm).

e. Déduire de l'étude précédente que l'équation $4\ln x = x$ admet deux solutions dans $]0, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune d'elles.

77

Soit la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\frac{x-2}{x+2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de f en 2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ pour asymptote.

c. Justifier que, pour tout nombre réel x de $]2, +\infty[$, $\frac{x-2}{x+2}$ est strictement inférieur à 1.

En déduire le signe de $\ln\frac{x-2}{x+2}$, puis la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3. a. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et en déduire le sens de variation de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}$, et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

78

Soit la fonction f définie sur $]0, 6[$ par :

$$f(x) = \ln(6-x) - 2\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. a. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et en déduire le sens de variation de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Résoudre dans $]0, 6[$ (par le calcul) l'équation $f(x) = 0$. Soit x_0 la solution. Préciser une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

4. Tracer les deux asymptotes, la tangente $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Pour aller plus loin…

79

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Déterminer g', étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g (on ne demande pas les limites en $+\infty$ et en 0).

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. a. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 2x$ comme asymptote.

b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$.

3. a. Montrer que pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Tracer Δ et $\mathscr{C}$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$.

Partie C

En remarquant que $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, calculer une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

80

Partie A
Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$.

1. Vérifier que $f(x) = \ln 2 + \ln\frac{x}{x+1}$ pour tout nombre réel x de l'intervalle I.

2. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

b. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ (l'unité de longueur est 2 cm).

a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(O\,;\vec{i}\,)$.

b. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathcal{T}$.

4. Déterminer le nombre α tel que la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Partie B

Étude d'une fonction primitive

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(2x) - (x+1)\ln(x+1)$.

1. Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

2. a. Étudier le signe de $f(x)$ d'après les résultats de la partie **A**.

b. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle I.

81

Partie A

Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

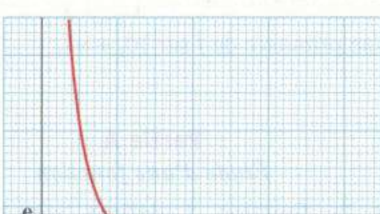
$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + \mathrm{e}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

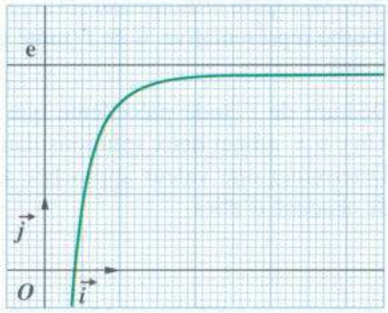
1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_g$?

2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.

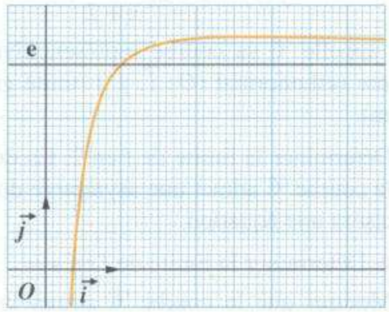
3.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

L'une des trois courbes précédentes est la courbe $\mathscr{C}_g$. Indiquer le numéro correspondant à $\mathscr{C}_g$ en précisant les raisons de votre choix.

4. Calculer $g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. En déduire, pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, le signe de $g(x)$.

Partie B

Étude de fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \mathrm{e}x - \mathrm{e}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Soit x appartenant à $]0,+\infty[$.
Vérifier que $f'(x) = g(x)$.

2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.

5. Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$H(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x) = (\ln x)^2.$$

Vérifier que H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.
En déduire une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

82

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x.$$

On admet que le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

1. Calculer $g(\sqrt{2})$.

2. En déduire que g est une fonction positive sur l'intervalle I.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm.

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}.$$

d. Déduire de la partie **A** le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.

e. Faire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par $h(x) = -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

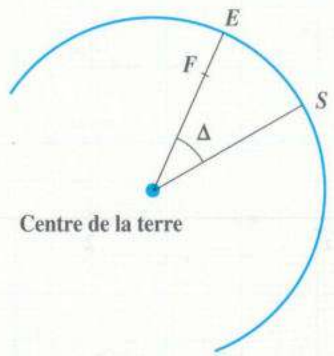
En remarquant que $\dfrac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, déterminer une primitive de la fonction h.

Dans les exercices **83** et **84**, on rappelle que, pour tout réel x strictement positif, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

83 Échelle de Richter

L'intensité d'un séisme varie considérablement d'un lieu à un autre. On a cherché à développer une quantité, appelée magnitude, liée à l'énergie développée au foyer F du séisme.

Par exemple, pour une station S, la magnitude M sera donnée par $M = \log a + 1{,}62\log\Delta + 2$, où a est l'amplitude maximale du mouvement horizontal du sol, enregistrée par la station et mesurée en µm (10^{-6} m), et Δ l'angle en degrés correspondant à l'éloignement de la station S par rapport à l'épicentre E.



a. Calculer M pour $\Delta = 60°$ et $a = 13{,}1$ nm (nanomètre : 10^{-9} m).

b. Calculer a pour $M = 9$ et $\Delta = 90°$.

84 Échelle des pH

Pour l'ensemble des solutions aqueuses utilisées en chimie, les concentrations des ions H_3O^+ peuvent varier considérablement (environ de 10^{-14} moles par litre à 1 mole par litre). C'est pourquoi on introduit une échelle logarithmique : l'échelle des pH. En notant $[H_3O^+]$ la concentration des ions H_3O^+, exprimée en moles par litre, on a :

$$\text{pH} = -\log[H_3O^+].$$

Si pH = 7, on dit que la solution est neutre, si pH > 7, la solution est dite « basique », si pH < 7, elle est dite « acide ».

Calculer le pH pour des solutions dont les concentrations en ions H_3O^+ sont respectivement :

a. 10^{-2} mol·L^{-1} ; **b.** 10^{-10} mol·L^{-1} ;

c. $6{,}3\cdot10^{-3}$ mol·L^{-1} ; **d.** $5{,}2\cdot10^{-7}$ mol·L^{-1}.

Pour préparer le Bac

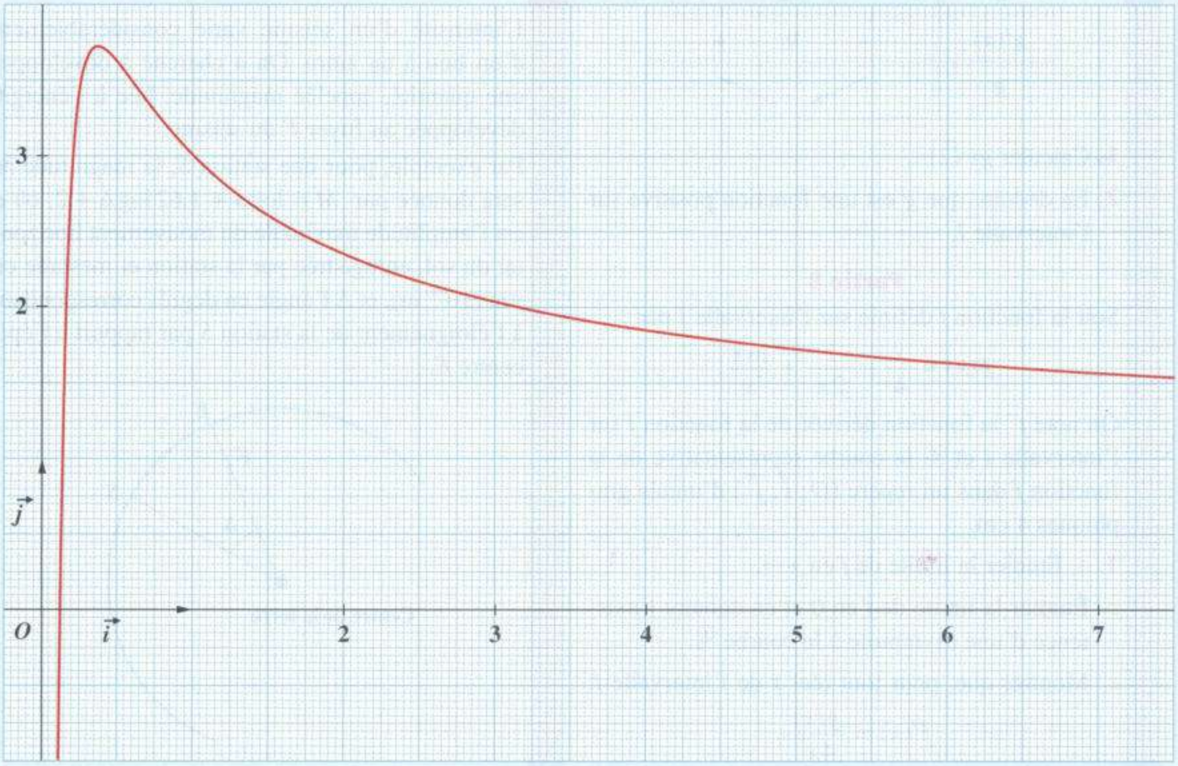
A ***D'après le problème STI Génies Civil, Énergétique et Mécanique 2000***

Dans tout le problème, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2 + \ln x}{x}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est tracée sur le graphique ci-dessous (à recopier à l'aide d'un calque et à compléter au fur et à mesure).



Partie A
Étude de la fonction f

1. D'après le graphique ci-dessus, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Le prouver par le calcul.

2. a. Vérifier que, pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$. Donner son équation et la tracer sur le graphique.

3. a. Prouver que, pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.

c. Établir le tableau de variation de f.

Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie B
Position relative de deux courbes

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x + 2}{x},$$

et $\mathscr{H}$ la courbe représentative de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Étudier rapidement la fonction g sur $]0, +\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe $\mathscr{H}$.

2. a. Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.

b. Montrer que les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ se coupent en un point K d'abscisse 1.

c. Étudier la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$.

3. Placer le point K et construire la courbe $\mathscr{H}$ sur le graphique précédent.

Partie C
Calcul de primitives

1. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Vérifier que u est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

3. Déduire des deux questions précédentes une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

B ***STI Génies Civil, Énergétique et Mécanique 2004***

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2).$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires

1. Montrer que sur $]-1, +\infty[$, $(2x+2) > 0$ et $(x+2) > 0$.

2. Étudier le signe de $x^2 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que, sur $]-1, +\infty[$, $x^2 + 3x + 1$ s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur.

Partie A
Limites et asymptotes

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. a. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = -x + \ln 2 + \ln\frac{x+1}{x+2}.$$

b. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

d. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $]-1, +\infty[$.

Partie B
Étude des variations

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que :

$$f'(x) = -\frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}.$$

À l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires, étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.

3. Construire le tableau de variation de la fonction f (on se contentera d'une valeur approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f).

Partie C
Représentation graphique

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $[-0,8\ ;\ -0,4]$, une solution unique notée β. Donner un encadrement à 10^{-2} près de β.

2. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant (on donnera les résultat arrondis à 10^{-1} près).

x	$-0,8$	$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite $\mathscr{T}$, les asymptotes et $\mathscr{C}$ dans le repère donné.

CHAPITRE 5

Fonction exponentielle

OBJECTIFS

- **Définir la fonction exponentielle.**
- **Connaître et savoir utiliser ses propriétés algébriques.**
- **Connaître et savoir utiliser sa fonction dérivée et ses limites.**
- **Définir les fonctions de la forme $x \mapsto x^{\alpha}$, où α est un nombre réel quelconque et comparer les comportements en $+\infty$ des fonctions puissance, logarithme népérien et exponentielle (TP).**

ACTIVITÉ 1 Charge d'un condensateur

Objectif : Montrer dans un cadre pratique l'utilité de définir une fonction réciproque de la fonction logarithme.

On étudie la décharge d'un condensateur préalablement chargé sous une tension $E = 5$ V.
On dispose pour cela d'un relevé des valeurs de la tension $u_C(t)$ pour quelques valeurs de t.

t (en secondes)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3
$u_C(t)$ (en volts)	5	4,1	3,35	2,75	2,25	1,85	1,5	1,25	1,01	0,83	0,68	0,09	0,01

1. Tracer un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ (on placera le point O à gauche et centré en hauteur ; unités graphiques : 4 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

2.a. Placer les points dont les coordonnées $(t, u_C(t))$ sont données dans le tableau ci-dessus.

b. Dans le même repère, mais en utilisant une autre couleur, placer les points de coordonnées $(t, \ln[u_C(t)])$, pour les valeurs de t données dans le tableau.

c. Que constate-t-on ?

3.a. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(0\,;1{,}61)$ et $B(0{,}8\,;0{,}01)$.

b. Vérifier (en tenant compte du fait que les valeurs utilisées sont des valeurs approchées à 10^{-2} près) que les autres points placés sur le second graphique appartiennent à la droite $\mathscr{D}$.

c. On peut alors faire une conjecture sur la relation entre $u_C(t)$ et t : $\ln(u_C(t)) = 1{,}61 - 2t$.

Pour exprimer $u_C(t)$ en fonction de t, il est nécessaire de connaître la fonction qui, à un nombre (ici $1{,}61 - 2t$) fait correspondre le nombre dont il est le logarithme népérien, c'est-à-dire la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

On va, dans ce chapitre, définir la fonction réciproque de la fonction ln et en étudier les propriétés.

ACTIVITÉ 2 À la recherche d'une nouvelle fonction

Objectif : Obtenir le tracé de la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

1.a. On a vu dans le chapitre précédent que, la fonction ln étant dérivable et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, tout réel b est le logarithme d'un unique nombre réel a strictement positif : pour tout réel b, il existe un unique réel strictement positif a tel que $\ln a = b$.
On sait d'ailleurs trouver a pour certaines valeurs de b. Par exemple, si $b = 2$, on cherche a tel que $\ln a = 2$, on a alors $\ln a = 2 = 2\ln \mathrm{e} = \ln(\mathrm{e}^2)$ et on en conclut que $a = \mathrm{e}^2$.
• De même, si $b = -3$, que vaut a ? Si $b = 0$, que vaut a ?
• Sait-on trouver a si $b = 3{,}2$? si $b = \pi$?

b. On cherche, dans ce chapitre, comment trouver a pour tout réel b, autrement dit, on veut déterminer une fonction u, que l'on supposera dérivable, telle que, si $\ln a = b$, alors $a = u(b)$.
Que valent $u(2)$, $u(-3)$ et $u(0)$?

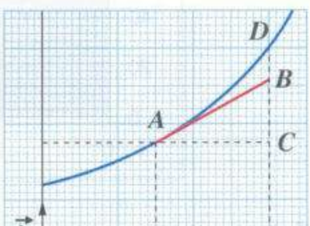
2. Dans cette activité, on va chercher une approximation de la courbe de cette fonction u grâce à une propriété de cette fonction que l'on va démontrer dans cette question.

a. Soit b un nombre réel. Quel est le signe de $u(b)$?

b. Si $a = u(b)$, on a alors d'une part $\ln a = b$ et d'autre part $\ln a = \ln[u(b)]$: que peut-on en déduire ?

c. En dérivant les deux membres de l'égalité $\ln[u(x)] = x$ établie précédemment, montrer que la fonction u vérifie l'égalité $u'(x) = u(x)$.

3.a. La méthode que l'on va utiliser maintenant consiste à considérer, pour une fonction dérivable, que l'on peut remplacer un petit morceau de sa courbe par un petit morceau de tangente.
Sur la représentation ci-contre, on a tracé en bleu la courbe représentative d'une fonction f et en rouge la tangente au point A d'abscisse x à cette courbe.
Le point A a pour coordonnées $(x, f(x))$;
C a pour coordonnées $(x + h, f(x))$.



• Quelle est l'ordonnée du point D de la courbe d'abscisse $x + h$?
• Quelle est l'ordonnée du point B de la tangente à la courbe d'abscisse $x + h$? (Rappel : le coefficient directeur de la tangente est $f'(x)$.)
• Expliquer alors pourquoi, pour h petit, on peut écrire $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$.

b. En adaptant l'approximation précédente à la fonction u, sachant que $u'(x) = u(x)$, montrer que, pour h petit, on a $u(x + h) \approx (1 + h)u(x)$.

c. Connaissant $u(x)$, on peut donc obtenir une valeur approchée de $u(x + h)$. En se servant du fait que $u(0) = 1$, calculer une valeur approchée de $u(0{,}01)$. Déterminer ensuite une valeur approchée de $u(0{,}02)$ en se servant de la valeur approchée de $u(0{,}01)$.

ACTIVITÉS

4. Il serait fastidieux de continuer les calculs de la question **c.** à la main. On va donc se servir d'un tableur (la syntaxe est ici indiquée pour Excel).

a. Remplir les 6 premières cases du tableau comme suit :

	A	B	C
1	x	u(x)	h
2	0	1	0,01

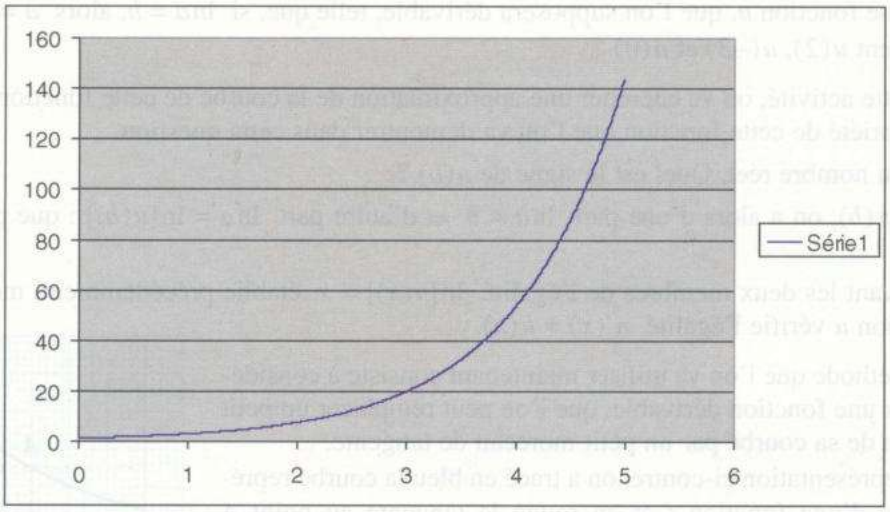
Dans la colonne A, on lira les valeurs de x et dans la colonne B, les approximations de $u(x)$ obtenues. La case C2 contient la valeur du pas h (ici $h = 0{,}01$).

b. Remplir la case A3 par « =A2+$C$2 » (la référence $C$2 est une référence absolue : si l'on recopie la formule dans la ligne suivante, le A2 sera remplacé automatiquement par A3, alors que $C$2 ne sera pas modifié). Quelle valeur sera affichée dans A3 ?

c. Remplir la case B3 par « =(1+$C$2)*B2 ».
Quelle doit être la valeur affichée dans B3 en fonction de u et de h ?
Vérifier que l'on obtient à l'ordinateur la même valeur qu'à la question **3.c.**.

d. Faire un « copier – coller » des cases A3B3 jusqu'à la ligne 502 pour obtenir ainsi 500 valeurs (pour cela, sélectionner ces deux cases, placer la souris en bas à droite de B3 et en maintenant le clic gauche, faire glisser la souris jusqu'à B502).
À quoi correspond le nombre de la case B502 ?

e. On va tracer une approximation de la courbe représentative de u.
Sélectionner *Insertion → Graphique*, puis choisir « *nuage de points – nuages de points reliés par une courbe sans marquage des données* » comme type de graphique. Cliquer sur suivant puis entrer dans le champ « *plage de données* » : « =Feuil1!$A$2:$B$502 ». Cliquer ensuite sur « *terminer* » pour obtenir le graphique.



f. Pour vérifier que les approximations sont satisfaisantes, on peut ajouter au tableau une colonne de valeurs dans la colonne D : remplir la cellule D2 avec « =ln(B2) » puis copier cette cellule jusqu'à la cellule D502. Qu'observe-t-on ? Expliquer.

g. • Changement de pas : remplacer dans la cellule C2 la valeur 0,01 par 0,05.
• Qu'observe-t-on sur les valeurs de la colonne A ? Expliquer.
• Qu'observe-t-on sur la courbe ?
• Qu'observe-t-on sur les valeurs de la colonne D ? Les approximations des valeurs de u sont-elles aussi satisfaisantes ?
• Tester d'autres valeurs pour le pas et observer les changements.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, fonction qui, à $a = \ln b$, fait correspondre b, pour laquelle on a obtenu ici une approximation de la courbe représentative.

1 Définition et propriétés algébriques

1 Définition

La fonction logarithme népérien est une fonction dérivable, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ ($\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$). On en déduit que, pour tout nombre réel a, il existe un unique nombre réel b (strictement positif) tel que $\ln b = a$. On peut donc définir la fonction réciproque de la fonction ln, qui, à tout nombre réel, associe « le nombre dont il est le logarithme népérien ».

x	0	b	$+\infty$
ln	$-\infty$ $\nearrow$	a $\nearrow$	$+\infty$

Définition On appelle fonction exponentielle de base e, et on note exp, la fonction qui, à tout réel x associe l'unique nombre réel y, tel que $\ln y = x$.

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$
$$x \mapsto y = \exp x, \text{ tel que } \ln y = x.$$

Exemples :

- $\ln e = 1$; on en déduit que $\exp(1) = e$.
- $\ln 1 = 0$; on en déduit que $\exp(0) = 1$.
- Si l'on cherche $\exp(2)$, on cherche l'unique nombre y tel que $\ln y = 2$. On a vu dans le chapitre précédent que $2 = 2 \times 1 = 2 \times \ln e = \ln(e^2)$.

On en déduit que : $\exp(2) = e^2$.

2 Conséquences

- Pour tout nombre réel x, $\exp(x)$ est un nombre réel strictement positif.
- Si y est un nombre réel strictement positif, on pose $\ln y = x$, alors $\exp(x) = y$ et, en remplaçant x par $\ln y$ dans cette dernière expression, on obtient $\exp(\ln y) = y$.
- Si x est un nombre réel quelconque, on pose $\exp(x) = y$, alors y est un nombre réel strictement positif et $\ln y = x$. En remplaçant y par $\exp(x)$ dans cette dernière expression, on obtient : $\ln(\exp(x)) = x$.
- Soit a et b deux nombres réels quelconques, en utilisant les propriétés algébriques de la fonction ln, on obtient :

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b.$$

On en déduit que $\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = a + b$, donc $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a + b)$.

3 Notation et propriétés algébriques

Dans le paragraphe précédent, on a vu que $\exp(2) = e^2$.

Par ailleurs, $\ln \dfrac{1}{e^3} = \ln(e^{-3}) = -3$; on en déduit que $\exp(-3) = e^{-3}$.

De manière générale, pour tout nombre entier relatif, $\ln(e^n) = n$; par conséquent, $\exp(n) = e^n$.

D'autre part, on vient de prouver que, pour tous nombres réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$, ce que l'on peut comparer avec la propriété connue sur les exposants : $e^{n+m} = e^n \times e^m$. À partir de ces observations, on adopte la notation suivante.

Notation Pour tout nombre réel x, on note $\exp(x) = e^x$.

Les propriétés établies précédemment s'écrivent donc :

Propriétés
- Pour tout nombre réel x, e^x est un nombre strictement positif.
- Pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.

Exemple : On cherche à écrire plus simplement le nombre $e^{3\ln 2}$.

En utilisant une propriété de la fonction ln, puis ce qui précède, on obtient :

$$e^{3\ln 2} = e^{\ln(2^3)} = e^{\ln 8} = 8.$$

▸Exercices n° 1 et 2

Si l'on reprend les autres propriétés établies dans les paragraphes **1** et **2**, et qu'on les écrit avec cette nouvelle notation, on retrouve des propriétés connues sur les puissances.

Propriétés a) $e^0 = 1$.

b) $e^1 = e$.

c) Pour tous nombres réels x et y, on a $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

Exemple : On cherche à écrire plus simplement $e^x \times e^{-x}$.

D'après la propriété c), $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)}$, donc $e^x \times e^{-x} = e^0$, et par conséquent $e^x \times e^{-x} = 1$, d'après la propriété a).

Des propriétés précédentes, on déduit que pour tout nombre entier n et tous nombres réels x et y :

a) $\ln((e^x)^n) = n\ln(e^x) = nx$, donc $(e^x)^n = e^{nx}$;

b) $\ln\dfrac{1}{e^x} = -\ln(e^x) = -x$, donc $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;

c) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^x \times e^{-y} = e^{x-y}$.

Propriété Pour tout nombre entier n et tous nombres réels x et y, on a :

a) $(e^x)^n = e^{nx}$; b) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$; c) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Exemple : On souhaite écrire plus simplement l'expression $a(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}$.

On a : $a(x) = e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$ (ce que l'on peut aussi écrire $\dfrac{1}{e^x}$).

▸Exercices n° 3 à 10

2 Étude de la fonction exponentielle

1 Ensemble de définition

La fonction ln est définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction exponentielle est définie de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

2 Dérivée et sens de variation

On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a montré dans l'activité 2 que cette fonction est égale à sa fonction dérivée.

Théorème Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$.

On en déduit que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est strictement positif (puisque e^x est un nombre strictement positif quel que soit x), et donc que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▸Exercices n° 11 à 17

3 Limites

Limite en $-\infty$

On va utiliser ici la limite de la fonction ln en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

On pose $y = e^x$; on a alors $\ln y = x$ et $\lim\limits_{y \to 0} \ln y = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{y \to 0} e^{\ln y} = \lim\limits_{y \to 0} y = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

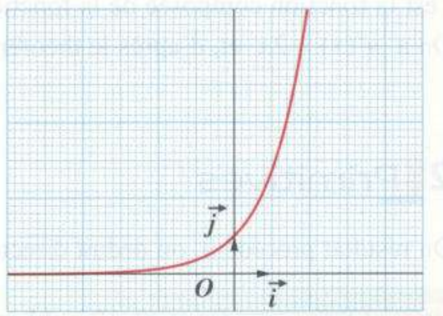
Limite en $+\infty$

À partir de $\lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$, et en posant toujours $\ln y = x$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Théorème $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

4 Tableau de variation et courbe représentative

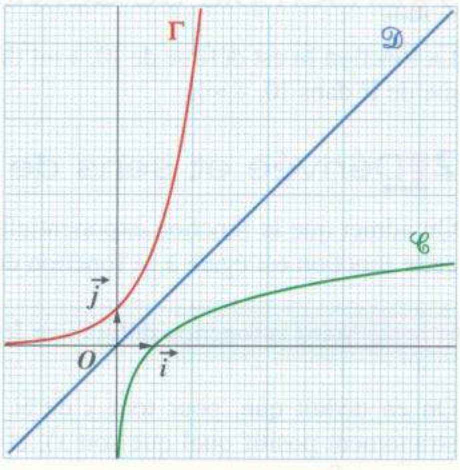
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$



▸Exercices n° 18 à 23

5 Lien entre les courbes représentatives des fonctions ln et exponentielle

On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction ln et la courbe Γ représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.



Un point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si ses coordonnées sont de la forme $(x, \ln x)$, où x est un nombre réel strictement positif.

On pose $a = \ln x$, on a $x = \mathrm{e}^a$. Le point M', symétrique de M par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$, a pour coordonnées $(\ln x, x)$, soit (a, e^a), donc appartient à la courbe Γ.

De même, un point N appartient à Γ si et seulement si ses coordonnées sont de la forme (x, e^x), où x est un nombre réel quelconque. Le point N', symétrique de N par rapport à $\mathscr{D}$, a pour coordonnées (e^x, x) ; si on pose $b = \mathrm{e}^x$, les coordonnées de N' sont de la forme $(b, \ln b)$: on en déduit que N' est un point de $\mathscr{C}$.

En conclusion :

Propriété Dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3 Dérivation et primitives

1 Dérivation

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u'. En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

Théorème Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u', alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. On cherche sa fonction dérivée.
f est la fonction composée de la fonction $u : x \mapsto x^2$ et de la fonction exponentielle.
On a $u'(x) = 2x$ et, d'après le théorème, $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

▸Exercices n° 24 à 28

2 Primitives

Du résultat précédent, on déduit directement le théorème suivant.

Théorème Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u'.
Une primitive de la fonction $u'\,\mathrm{e}^u$ est la fonction e^u.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2+3}$. On cherche les primitives de f sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'un produit, dans lequel l'un des facteurs est de la forme e^u. Pour appliquer la formule du théorème, il faudrait avoir une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$. Ici, $u(x) = x^2 + 3$, donc $u'(x) = 2x$. On peut modifier l'écriture de $f(x)$ pour mettre en évidence la forme cherchée :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \mathrm{e}^{x^2+3} = \frac{1}{2} \times u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}.$$

Ses primitives sont de la forme : $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{u(x)} + c = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+3} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Dans les cas de composées avec des fonctions affines, on cherche à déterminer les primitives d'une fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$. Cette fonction est de la forme e^u, avec $u(x) = ax + b$.

Puisque $u'(x) = a$, on en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{a} \times u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Par conséquent, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par :

$$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{u(x)} + c = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Corollaire Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax+b} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Exemple : Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + c$, où c est une constante réelle quelconque.

▸Exercices n° 29 à 40

TP1 Fonctions puissances

> Ces TP ne concernent pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués.**

1 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$, où n est un nombre entier strictement positif

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, où n est un nombre entier strictement positif.

1 Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminer $f_n'(x)$.

2 Si n est pair :

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n$.

b. Quelle est la parité de $n - 1$? En déduire le signe de $f_n'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f_n.

d. Sur la calculatrice graphique, tracer les courbes représentatives de f_4, f_6, f_8 et f_{10}.

e. Par lecture graphique, comparer x^4, x^6, x^8 et x^{10} pour $x \in]-1, 1[$, pour $x \in]-\infty, -1[$, puis pour $x \in]1, +\infty[$ (on pourra modifier la fenêtre graphique plusieurs fois pour répondre à cette question).

3 a. Si n est impair : répondre aux questions **a.**, **b.** et **c.** de la partie **2**, puis tracer les courbes représentatives de f_5, f_7, f_9 et f_{11} à la calculatrice.

b. Reprendre la question **e.** avec x^5, x^7, x^9 et x^{11}.

2 Fonction définie sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ par $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, où n est un nombre entier strictement positif

Soit f_n la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

1 Pour tout x de I, déterminer $f_n'(x)$.

2 Si n est pair :

a. Quelle est la parité de $n + 1$? En déduire le signe de $f_n'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f_n.

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$. En déduire l'existence d'une première asymptote à la courbe représentative de f_n.

d. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$. En déduire l'existence d'une seconde asymptote à la courbe représentative de f_n.

e. Dresser le tableau de variation de f_n.

3 Reprendre la question **2** avec f_n définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$. (On remplacera $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ à la question **2d.** par $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$.)

4 Tracer à la calculatrice les courbes représentatives des fonctions définies respectivement sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, pour $n = 2$, 4 puis 6.

5 Si n est impair, reprendre les questions **2** et **3**.

6 Tracer à la calculatrice les courbes représentatives des fonctions définies respectivement sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, pour $n = 1$, 3 puis 5.

3 Fonction définie sur]0, +∞[par $x \mapsto x^{\alpha}$, où α est un nombre réel

1 Soit n un entier relatif et x un réel strictement positif. Écrire $e^{n \ln x}$ sans faire apparaître le nombre e ni la fonction ln.
Par analogie avec l'égalité obtenue ci-dessus, on note, pour tout réel α, $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.

2 Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, où α est un nombre réel fixé, appelée fonction puissance α.

En utilisant la dérivation d'une fonction de la forme e^u, calculer $f'(x)$. Montrer que l'on peut écrire $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

3 Cas où $\alpha = \dfrac{1}{n}$

a. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$. (Attention : $\dfrac{1}{n}$ n'étant en général pas un entier, il faut revenir à la définition des fonctions puissances à l'aide de l'exponentielle.)

La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la fonction réciproque de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^n$. On note : $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

À quelle fonction connue correspond la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$?

b. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[4]{x}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 0,5 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

- En écrivant $f(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle, déterminer les limites de f en $+\infty$ et en zéro.
- Calculer $f'(x)$. Étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
- Tracer la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, puis tracer $\mathscr{C}$.

Bilan a) Soit α un nombre réel. Pour tout x de $]0, +\infty[$, on note $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.
b) La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{\alpha}$, où α est un nombre réel quelconque, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.
c) La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la fonction réciproque de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^n$. On note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

▸Exercices n° 41 à 44

TP2 Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^{\alpha}$ et $x \mapsto e^x$ en $+\infty$

À la calculatrice, tracer dans une même fenêtre (on règlera la fenêtre graphique de la façon suivante : x entre $-0{,}1$ et 10 et y entre $-0{,}1$ et 10) les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$. Que constate-t-on pour les grandes valeurs de x ?

Par des calculs de limites de quotient, on va montrer dans la suite que, pour toute puissance α strictement positive, pour les grandes valeurs de x, e^x est « très supérieur » à x^{α} et x^{α} est « très supérieur » à $\ln x$.

TRAVAUX PRATIQUES

1 Limite de $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$ en $+\infty$, où α est un réel strictement positif

a. À la calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$ pour $\alpha = 2$, 4 et 6 (on règlera la fenêtre graphique de la façon suivante : x entre 0 et 20, y entre 0 et 10). Faire alors une conjecture sur $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.

b. Montrer que $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = e^{A(x)}$, où A est une fonction que l'on déterminera.

c. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

En factorisant x dans l'expression $A(x)$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.

d. En déduire la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^\alpha}{e^x} = x^\alpha \times e^{-x}$.

e. Dans le cas où α est un entier naturel ($\alpha = n$), la fonction $x \mapsto x^n \times e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
On pose $t = -x$. Justifier alors que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^n t^n e^{-t}$.
En déduire, à l'aide du résultat de la question **d.**, la limite en $-\infty$ de $x \mapsto x^n e^x$.

2 Limite de $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ en $+\infty$, où α est un nombre réel strictement positif

À la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ pour $\alpha = 2$, 4 et 6 (on règlera alors la fenêtre graphique de la façon suivante : x entre 0 et 20, y entre $-0{,}1$ et $0{,}2$). Faire alors une conjecture sur $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

On a vu dans le chapitre 4 la démonstration de cette limite pour une puissance entière positive ; on admet que le résultat reste le même pour toute puissance réelle strictement positive.

Bilan a) Si α est un nombre réel strictement positif :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

b) Si n est un entier naturel :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

▸Exercices n° 45 à 52

1> Définition

On appelle fonction exponentielle (de base e), et on note exp, la fonction qui, à tout réel x, associe l'unique nombre réel y tel que $\ln y = x$.

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$
$$x \mapsto y = \exp x \quad \text{tel que} \quad \ln y = x.$$

2> Notation et propriétés

Notation

Pour tout nombre réel x, on écrit $\exp(x) = e^x$.

Propriétés

- Pour tout nombre réel x, e^x est un nombre strictement positif.
- Pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
- Pour tout nombre entier n et tous nombres réels x et y, on a :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} ; \quad (e^x)^n = e^{nx} ; \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} ; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

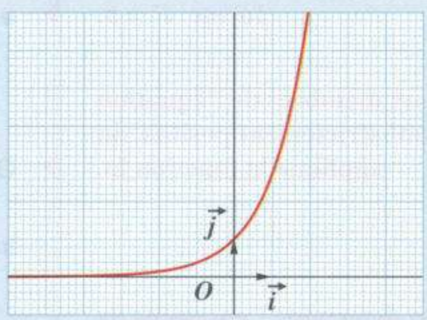
3> Étude de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle f est définie de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
- Si $f(x) = e^x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$.
- $f'(x) > 0$ et la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- Tableau de variation de la fonction exp

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Représentation graphique de la fonction exp



4> Autres limites de référence

Pour tout entier naturel n, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et pour tout réel α positif $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

5> Dérivation et primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u'.

- La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Une primitive de la fonction $u' e^u$ sur I est la fonction e^u.

Simplifier l'écriture d'une expression en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle

1 Simplifier l'écriture des expressions suivantes définies sur I :

a. $a(x) = e^{x+\ln 4}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $b(x) = e^{-4\ln x}$; $I =]0, +\infty[$.

c. $c(x) = \ln(2e^x)$; $I = \mathbb{R}$.

Réponses

On utilise les formules : $e^x \times e^y = e^{x+y}$ et pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

a. $a(x) = e^x \times e^{\ln 4}$; or $e^{\ln 4} = 4$ d'où $a(x) = e^x \times 4$ soit $a(x) = 4e^x$.

On utilise la formule : $(e^x)^n = e^{nx}$.

b. $b(x) = (e^{\ln x})^{-4}$ or $e^{\ln x} = x$ d'où $b(x) = x^{-4}$, soit $b(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

On utilise la formule : pour tout réel x, $\ln e^x = x$.

c. On sait que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, d'où $c(x) = \ln 2 + \ln e^x$ et $c(x) = \ln 2 + x$.

Résoudre une équation ou une inéquation

2 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^x - 3 = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x-1) \leqslant -3$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$.

Réponses

On écrit l'équation sous la forme $e^a = b$.

a. L'équation s'écrit $e^x = \dfrac{3}{2}$.

Les deux membres de l'équation étant strictement positifs, on applique la fonction ln.

On a $e^x > 0$ et $\dfrac{3}{2} > 0$; on applique la fonction ln :

$\ln e^x = \ln \dfrac{3}{2}$, on sait que $\ln e^x = x$, d'où $\mathcal{S} = \left\{ \ln \dfrac{3}{2} \right\}$.

On détermine l'ensemble de définition de l'inéquation.

b. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; l'inéquation existe si $2x - 1 > 0$, donc l'inéquation est définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

On applique la fonction exp aux deux membres de l'inéquation ; la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $a \leqslant b$ si et seulement si $e^a \leqslant e^b$.

$e^{\ln(2x-1)} \leqslant e^{-3}$, d'où $2x - 1 \leqslant e^{-3}$; $2x \leqslant e^{-3} + 1$, soit $x \leqslant \dfrac{1}{2}(e^{-3} + 1)$ et donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^3} + 1\right)\right]$.

On procède à un changement de variable en posant $X = e^x$ pour se ramener à une équation du second degré.

c. Si $X = e^x$, on a $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$ et l'équation devient $2X^2 - 3X - 2 = 0$, équation du second degré qui a pour solutions $X = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = 2$.

On revient ensuite à l'inconnue x.

La solution $X = -\dfrac{1}{2}$ ne convient pas car, pour tout x réel, e^x est strictement positif. On obtient la solution de l'équation initiale en posant $e^x = 2$, d'où $x = \ln 2$. $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$.

Calculer une fonction dérivée, étudier son signe

3 **a.** Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$. Étudier le signe de $f'(x)$.

Réponses

La fonction exp est dérivable et $(e^x)' = e^x$.

a. f est le produit de deux fonctions.
$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u', alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.

b. f est le produit de deux fonctions et
$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.
Si $x < 1$, $1 - x > 0$ et $f'(x)$ est strictement positif ;
si $x > 1$, $1 - x < 0$ et $f'(x)$ est strictement négatif ;
si $x = 1$, $f'(x) = 0$.

Calculer des primitives

4 Déterminer les fonctions primitives F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = e^{3x}$.

b. $f(t) = \dfrac{e^t}{e^t + 2}$.

Réponses

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonction dérivée u', une primitive de la fonction $u'e^u$ sur I est la fonction e^u.

a. La fonction $x \mapsto 3x$ a pour dérivée 3 ; f peut s'écrire $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 3e^{3x}$, donc est de la forme $\dfrac{1}{3} \times u'e^u$; une primitive de f est de la forme $\dfrac{1}{3} \times e^u$;

d'où $F(x) = \dfrac{1}{3} e^{3x} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$,

donc f a une primitive de la forme $\ln u$.

b. f est un quotient. Si l'on pose $u(t) = \mathrm{e}^t + 2$, alors $u'(t) = \mathrm{e}^t$. D'où $F(t) = \ln(\mathrm{e}^t + 2) + c$; $c \in \mathbb{R}$.

Calculer des limites

5 Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = (x+3)\,\mathrm{e}^x$.

b. $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$.

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Réponses

a. f est le produit de deux fonctions et on a :

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

En présence d'une forme indéterminée en $-\infty$, on peut penser à utiliser la limite de référence : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$ pour tout entier naturel n.

• en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$: on est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour utiliser la limite de référence $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$, avec $n = 1$, il suffit de développer le produit, d'où $f(x) = x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3\mathrm{e}^x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b. f est la somme de deux fonctions et on a :

• en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$,

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

En présence d'une forme indéterminée en $+\infty$, on peut penser à utiliser la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour tout réel α positif. Pour ce faire, on cherche à factoriser x^α.

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$;

on est en présence d'une forme indéterminée.

Pour utiliser la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$, avec $\alpha = 2$, on factorise par x^2 : $f(x) = x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right)$ et :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriétés algébriques

1

C Écrire plus simplement les expressions suivantes.

a. $e^{3\ln x}$, où $x \in]0, +\infty[$.

b. $\ln \frac{1}{e^x}$, où $x \in \mathbb{R}$.

c. $\ln(3e^x)$, où $x \in \mathbb{R}$.

d. $e^{\frac{1}{2}\ln x}$, où $x \in]0, +\infty[$.

2

Même exercice que le précédent avec :

a. $e^{-2\ln x}$, où $x \in]0, +\infty[$.

b. $\ln\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right)$, où $x \in \mathbb{R}$.

c. $\ln\sqrt{e^x}$, où $x \in \mathbb{R}$.

d. $\ln\left(\frac{1}{5}e^x\right)$, où $x \in \mathbb{R}$.

3

C Écrire sous la forme $e^{A(x)}$ les expressions suivantes (x appartient à $\mathbb{R}$).

a. $e^{3x} \times e^5$.

b. $(e^{3x})^2$.

c. $(e^{-x})^4$.

d. $\frac{e^{5x}}{e^{2x}}$.

4

Même exercice que le précédent avec :

a. $\frac{1}{e^{4x}}$.

b. $e^{2x} \times e^{-5x}$.

c. $\frac{e^x}{e^{-2x}}$.

d. $(e^{-2x})^4$.

Dans les exercices **5** à **10**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations proposées.

5

C a. $e^x = 3$.

b. $e^x = -2$.

c. $e^{-3x}e^{x^2} = 1$.

d. $\frac{e^x}{e^{-3x}} = 7$.

6

a. $e^x = -1$.

b. $e^{-4x} = 2$.

c. $e^{-3x} = 0$.

d. $\frac{1}{e^{2x}} = 4$.

7

a. $e^{x-1} = 3$.

b. $2 - e^{2x} = 0$.

c. $e^{x^2} = \frac{e^{6x}}{e^5}$.

8

C a. $e^{2x-1} > 5$.

b. $4 - e^{-3x} < 0$.

c. $3e^x - 1 > 0$.

9

a. $e^{-3x+1} > 2$.

b. $7 - e^{5x} \leqslant 0$.

c. $-2e^x + 1 > 0$.

10

a. $3e^x + 1 > 0$.

b. $e^{x^2-3} > e^{2x}$.

c. $e^{2x-1} \leqslant -\frac{1}{2}$.

Dérivée, sens de variation de la fonction exponentielle

Dans les exercices **11** à **15**, calculer les fonctions dérivées des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes.

11

C a. $g(x) = 3e^x + x$.

b. $f(x) = xe^x$.

12

a. $f(t) = \frac{t}{e^t}$.

b. $h(t) = (e^t + 1)(e^t + 2)$.

13

a. $f(x) = (2x^2 + x)e^x$.

b. $g(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

14

a. $h(x) = \frac{2}{e^x + 1}$.

b. $g(t) = \ln(e^t + 2)$.

15

a. $f(x) = (e^x + 3)^2$.

b. $g(x) = e^x \cos 2x$.

16

C Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations proposées.

a. $\ln 3x > 1$.

b. $\ln(2x - 2) \leqslant 3$.

c. $2\ln(1 - x) < \ln 4$.

17

Même exercice que le précédent avec :

a. $\ln(-2x) \geqslant -3$.

b. $\ln(-x + 4) > 3$.

c. $\frac{1}{2}\ln(1 + x) > 5$.

Limites de la fonction exponentielle

Dans les exercices **18** à **21**, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition I.

18

C a. $f(x) = -3e^x + 2$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = e^{-x} + x^2$ et $I = \mathbb{R}$.

19

a. $f(x) = (e^x + 1)(e^x + 2)$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $I =]0, +\infty[$.

20

C $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 2}$ et $I = \mathbb{R}$.

(Pour le calcul de la limite en $+\infty$, on pourra commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur par e^x.)

21

$f(x) = \dfrac{e^{-x} - 2}{3e^{-x} + 1}$ et $I = \mathbb{R}$.

(Pour le calcul de la limite en $-\infty$, on pourra commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur par e^{-x}.)

22

C Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5 - x + e^{-x}.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5 - x$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en $+\infty$.

c. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x + e^{-2x}.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - x$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en $+\infty$.

c. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

Dérivée d'une fonction composée avec la fonction exponentielle

Dans les exercices **24** à **27**, calculer les fonctions dérivées des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes.

24

C a. $f(x) = e^{3x}$. b. $g(x) = e^{x^2 - 2x}$.

25

a. $h(t) = e^{-t}$. b. $f(t) = e^{\cos t}$.

26

a. $g(x) = -e^{2x} + e^{3x}$. b. $h(x) = xe^{-2x}$.

27

a. $f(x) = xe^{-x+1}$. b. $g(t) = \dfrac{e^{3t} - e^t}{e^{3t} + e^t}$.

28

Calculer les fonctions dérivées des fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ suivantes.

a. $h(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$. b. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

c. $g(t) = \dfrac{e^{-t}}{t^2}$.

Calculs de primitives

Dans les exercices **29** à **35**, déterminer les fonctions primitives sur I de la fonction dérivable sur I qui est donnée.

29

C a. $f(x) = e^x + 3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = 2e^x$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = e^{5x}$; $I = \mathbb{R}$.

30

a. $f(x) = e^{-3x}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(\theta) = e^{-\theta}$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = 4e^x + 3$; $I = \mathbb{R}$.

31

a. $f(x) = 3e^{-2x} + e^x$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = e^x + 1 - e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

32

a. $f(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = xe^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}$; $I =]0, +\infty[$.

33

a. $f(t) = \dfrac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$; $I =]0, +\infty[$.

b. $g(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$; $I =]-\infty, 0[$.

34

a. $f(x) = e^{2x}(e^{2x} + 3)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b. $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

35

a. $g(t) = \dfrac{e^{3t}}{e^{3t} + 2}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $I = \mathbb{R}$.

36

C Soit les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = (3x+4)e^x \quad \text{et} \quad F(x) = (ax+b)e^x.$$

a. Calculer la fonction dérivée de F en fonction de a et b.

b. Montrer alors qu'il existe deux réels a et b que l'on précisera tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

37

Soit la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x^2+4x+3)e^x.$$

a. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on précisera tels que la fonction dérivable F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f.

b. Déterminer toutes les primitives de f, puis la fonction primitive de f qui s'annule pour $x = 0$.

38

C **a.** Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Montrer que la fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire les primitives de la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4xe^{-x} + 3x^2 - 5$.

39

a. Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2+5x+4)e^x.$$

Montrer que la fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = (x^2+3x+1)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire les primitives de la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2+5x+4)e^x - 7x.$$

40

a. Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^x - e^{3x}.$$

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire les primitives de la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3e^x - e^{3x} + 2x - 1.$$

Fonctions puissances

41

C **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3 = 0$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$?

c. En déduire le signe de $f(x) = x^3 - 3$ selon les valeurs de x.

42

Résoudre l'inéquation $-x^5 + 4 < 0$.

43

C En utilisant la notation $x^{\frac{1}{2}}$:

a. retrouver la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (dérivable sur $]0, +\infty[$) ;

b. déterminer les fonctions primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

44

Soit la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

a. Déterminer la fonction dérivée de f. Préciser le sens de variation de f.

b. Déterminer les fonctions primitives de f.

Croissance comparée et exponentielle

45

C Calculer les limites des fonctions proposées aux bornes de leur ensemble de définition I.

a. $f(x) = x^3e^x - 3$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ et $I =]0, +\infty[$.

46

a. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

b. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de :

$$g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Dans les exercices **47** à **51**, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition I.

47

a. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et $I =]-\infty, 0[$.

b. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^3}$ et $I =]-\infty, 0[$.

48

$f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ et $I = \mathbb{R}$.

49

a. $f(x) = e^x - 4x$ et $I = \mathbb{R}$.

(Pour la limite en $+\infty$, on pourra factoriser e^x.)

b. $f(x) = e^{-x} - x^2$ et $I = \mathbb{R}$.

(Pour la limite en $-\infty$, on pourra factoriser e^{-x}.)

50

a. $f(x) = e^{-x} + x$ et $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = xe^{-x} - x^2$ et $I = \mathbb{R}$.

51

a. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$ et $I =]0, +\infty[$.

(Pour la limite en $+\infty$, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme.)

b. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.

52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x + x - 3.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en $-\infty$.

c. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Résolution d'équations ou d'inéquations

53

C Après avoir résolu si nécessaire une inéquation, établir le tableau de signe des expressions suivantes (où x appartient à $\mathbb{R}$).

a. $a(x) = e^{3x} - 1$.

b. $b(x) = -e^x - 5$.

54

Même exercice que le précédent avec :

a. $a(x) = 4e^{-3x} + 3e^x + 7$.

b. $b(x) = -2e^x + 3$.

55

C **a.** Résoudre l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$.

b. On souhaite résoudre l'équation **(1)** :

$$2e^{2x} - e^x - 1 = 0.$$

Pour cela, on pose $X = e^x$.

• Vérifier que l'équation **(1)** s'écrit sous la forme **(2)** : $aX^2 + bX + c = 0$ où a, b et c sont trois réels que l'on précisera.

• Résoudre alors l'équation **(2)** puis l'équation **(1)**.

56

a. Résoudre l'équation $X^2 - 4X - 21 = 0$.

b. En suivant la même démarche qu'à l'exercice précédent, résoudre alors l'équation :

$$e^{2x} - 4e^x - 21 = 0.$$

57

a. Résoudre l'équation $3X^2 - 9X - 30 = 0$.

b. En posant $X = e^x$, résoudre alors l'équation :

$$3e^x - 9 = 30e^{-x}.$$

58

a. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on précisera tels que pour tout réel x :

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2e^{3x} - 3e^{2x} - 8e^x + 12 = 0.$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 8(\ln x) + 12 = 0.$$

59

a. Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$. Calculer $P(3)$. En déduire une factorisation de $P(x)$ puis la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{3x} - e^{2x} - 14e^x + 24 = 0.$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 14(\ln x) + 24 = 0.$$

60

On souhaite résoudre l'équation (E) :

$$2e^x - 6 = -4e^{-x}.$$

a. En posant $X = e^x$, écrire l'équation (E) proposée sous la forme $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.

b. Résoudre l'équation $Q(X) = 0$.

c. À l'aide de ce qui précède, résoudre l'équation (E).

Représentation graphique

61

C Soit une fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b$, où a et b sont deux réels. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. On suppose que :

• la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$;

• la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(\ln 2, 1)$.

a. Traduire les deux conditions précédentes en utilisant la fonction f.

b. En déduire les valeurs de a et b.

62

Soit une fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{-2x} + b$, où a et b sont deux réels. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. On suppose que :

• la droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$;

• la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(\ln 3, -2)$.

a. Traduire les deux conditions précédentes en utilisant la fonction f.

b. En déduire les valeurs de a et b.

63

Soit une fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$, où a, b et c sont trois réels. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. On suppose que :

• la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(0, -2)$;

• la courbe $\mathscr{C}$ admet en A une tangente $\mathscr{T}$ de pente égale à -3 ;

• le point B d'abscisse -1 est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

1. a. Traduire les trois conditions précédentes en utilisant la fonction f.

b. En déduire les valeurs de a, b et c.

On admet que $f(x) = (x^2 - x - 2)\mathrm{e}^x$.

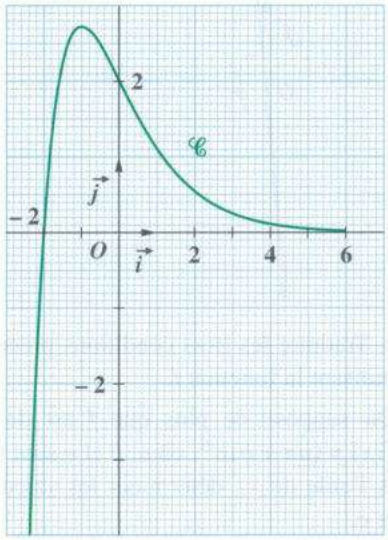
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{C}$.

b. Existe-t-il d'autre(s) point(s) d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses ? Justifier.

64

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. On a tracé ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes sans justifier votre réponse :

a. Que vaut $f(0)$?

b. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

c. Déterminer $f'(-1)$.

d. Résoudre l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

e. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$? $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

Partie B

La fonction f précédente est définie par :

$$f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

En utilisant l'expression précédente de f, répondre à chacune des questions de la partie **A** en justifiant votre réponse. Comparer avec les résultats obtenus par lecture graphique.

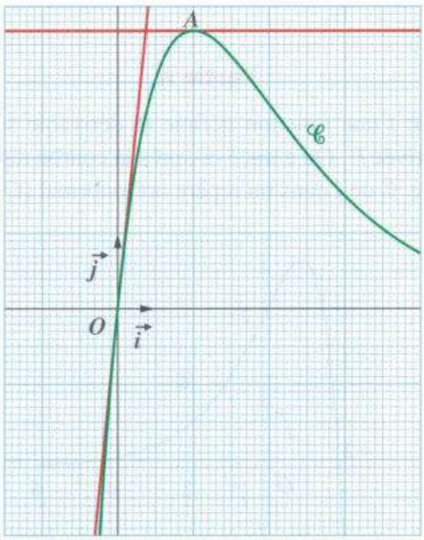
65

On a représenté ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On précise aussi que :

• la courbe $\mathscr{C}$ passe par O ;

• la tangente en O à $\mathscr{C}$ a une pente égale à 5 ;

• la fonction f admet un maximum au point A d'abscisse 2.



1. a. Traduire les trois conditions précédentes en utilisant la fonction f.

b. On suppose de plus que f est de la forme $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b et c sont trois réels. À l'aide de **a.**, déterminer les valeurs de a, b et c.

2. On admet que $f(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$.

a. La courbe $\mathscr{C}$ laisse supposer l'existence d'une asymptote. Est-ce le cas ? Justifier par un calcul.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. Préciser le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Étude de fonctions

66

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4xe^x$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

b. Déterminer la fonction dérivée de f, étudier son signe et en déduire le sens de variation de f.

c. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une seule tangente horizontale $\mathscr{T}$ dont on précisera une équation.

d. Construire $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

67

Soit la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)e^x.$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. • Préciser les limites quand x tend vers $-\infty$ de $(x-1)$ et de e^x. Peut-on en conclure la limite de $f(x)$ grâce au théorème sur la limite d'un produit ? Pourquoi ?

• Écrire $f(x)$ sous forme de somme et en déduire sa limite quand x tend vers $-\infty$.

• Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c. Déterminer la fonction dérivée de f. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de x.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée, tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse 1, puis la courbe $\mathscr{C}$.

68

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

a. Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

b. Déterminer la limite de $\dfrac{2e^x}{e^x - 1}$ quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) - (x-2) = \frac{-2}{e^x - 1}.$$

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 2$ pour asymptote en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

d. Déterminer la fonction dérivée de f. Justifier que $f'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]0, +\infty[$. Dresser alors le tableau de variation de f.

e. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ à la calculatrice. Est-ce que l'étude précédente et le tracé sont cohérents (limites et variation) ?

f. Construire alors la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.

69

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

a. Déterminer la limite en $-\infty$ de f. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?

b. • Donner les limites en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto -2e^{x}$. Peut-on en déduire la limite de f grâce au théorème sur la limite d'une somme ?

• Factoriser e^{2x} dans l'expression de $f(x)$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f'(x)$ est du signe de $(e^{x} - 1)$. En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Montrer que $\mathscr{C}$ coupe une seule fois l'axe des abscisses. Préciser les coordonnées du point d'intersection.

f. Construire l'asymptote à $\mathscr{C}$, puis $\mathscr{C}$.

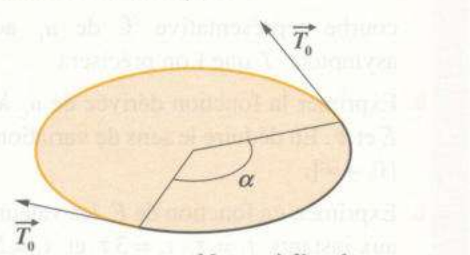
Pour aller plus loin…

70 Transmission par courroie

Le système poulies-courroie représenté ci-dessous permet d'entraîner un organe récepteur à l'aide d'un moteur électrique lorsqu'ils sont relativement éloignés.

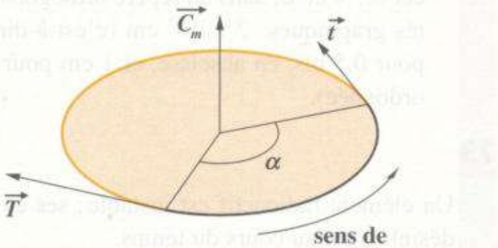
Pour un bon fonctionnement, la courroie doit être montée avec une tension suffisante.

À l'arrêt, les deux brins de la courroie ont une tension de même norme T_0.



Moteur à l'arrêt

Pendant le fonctionnement du moteur, les tensions dans les deux brins ne sont pas identiques. Conformément au schéma ci-après, le brin opposé au sens de rotation supporte une tension dont la norme T est supérieure à la norme t de la tension que supporte l'autre brin.



Moteur en rotation

L'étude mécanique de l'entraînement par poulies-courroie montre que :

• $T + t = 2T_0$ **relation (1)** ;

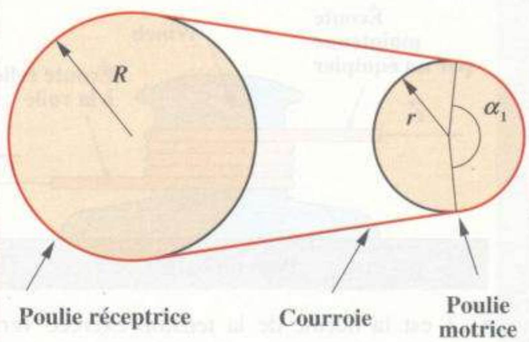
• $\dfrac{T}{t} = e^{f\alpha}$ **relation (2)**, où f représente le coefficient de frottement et α l'angle d'enroulement, exprimé en radians, de la courroie sur la poulie ;

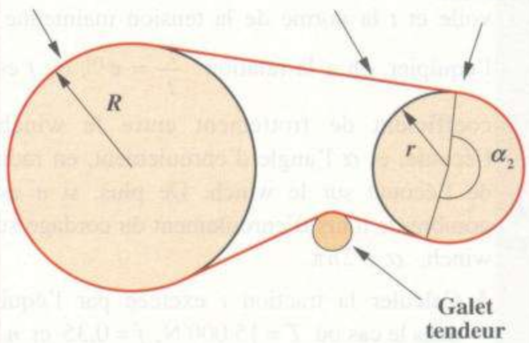
• $C_m = r(T - t)$ **relation (3)**, où C_m est la norme du couple moteur transmis et r est le rayon de la poulie motrice.

1. a. À l'aide des **relations (1)** et **(2)**, exprimer T et t en fonction de T_0, f et α.

b. À l'aide de la **relation (3)**, en déduire que :

$$C_m = \frac{2T_0 r(e^{f\alpha} - 1)}{e^{f\alpha} + 1}.$$





2. Le schéma ci-dessus montre qu'en faisant varier la longueur de la courroie et en utilisant un galet tendeur de courroie, on fait varier α.

Pour la suite, on donne : $T_0 = 200$ N, $f = 0{,}3$ et $r = 0{,}1$ m. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui, à α, fait correspondre C_m. On a alors :

$$h(\alpha) = \frac{40(e^{0{,}3\alpha} - 1)}{e^{0{,}3\alpha} + 1}.$$

Calculer la fonction dérivée de h. En déduire comment varie C_m lorsque α augmente.

3. a. En utilisant que $C_m = \dfrac{40(e^{0{,}3\alpha} - 1)}{e^{0{,}3\alpha} + 1}$,

montrer que $\alpha = \dfrac{1}{0{,}3} \ln\left(\dfrac{40 + C_m}{40 - C_m}\right)$.

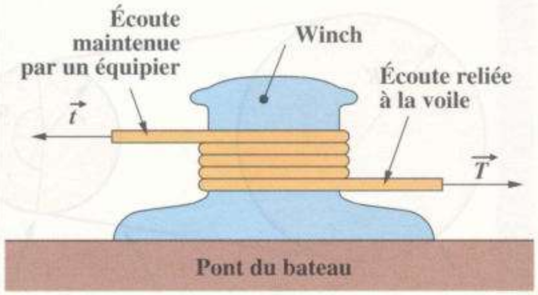
b. Calculer l'angle d'enroulement en degrés de la courroie dans les deux cas relatifs à la figure ci-avant :

• le couple moteur transmissible C_{m_1} est de $16\ \text{N}\cdot\text{m}$ (la courroie est de longueur minimale sans utilisation du galet tendeur) ;

• le couple moteur transmissible C_{m_2} est de $20\ \text{N}\cdot\text{m}$ (la courroie est de longueur maximale avec utilisation du galet tendeur).

71 Une exponentielle à la mer !

Le winch est un mécanisme utilisé par les marins sur les voiliers pour régler les voiles à l'aide d'un cordage, appelé écoute. La particularité du winch est de permettre à l'utilisateur d'exercer une traction importante sur la voile en exerçant lui-même un effort modéré sur l'écoute.



Si T est la norme de la tension exercée vers la voile et t la norme de la tension maintenue par l'équipier, on a la relation $\dfrac{T}{t} = \mathrm{e}^{f\alpha}$, où f est le coefficient de frottement entre le winch et l'écoute, et α l'angle d'enroulement, en radians, de l'écoute sur le winch. De plus, si n est le nombre de tours d'enroulement du cordage sur le winch, $\alpha = 2n\pi$.

1. Calculer la traction t exercée par l'équipier dans le cas où $T = 15\,000$ N, $f = 0{,}35$ et $n = 2$.

2. Suite à l'action d'une vague, le cordage et le winch sont mouillés. Le coefficient de frottement f diminue.

Pour éviter que le cordage ne glisse et que la voile ne soit déréglée, on peut :

• soit augmenter la tension exercée par l'équipier (cas envisagé au **a.**) ;

• soit enrouler davantage le cordage sur le winch, et donc augmenter α (cas envisagé au **b.**).

a. • Exprimer t en fonction de T, f et α, puis en fonction de f en prenant $T = 15\,000$ N et $n = 2$.

• On note h la fonction dérivable définie sur $[0{,}05\,;\,1]$ définie par $h(f) = 15\,000\mathrm{e}^{-4\pi f}$.

Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

• Si f diminue, que peut-on dire de t ? Quelle tension doit exercer l'équipier si $f = 0{,}23$?

b. Si l'on ne veut pas modifier la tension exercée par l'équipier, on doit modifier α, c'est-à-dire le nombre de tours d'enroulement n.

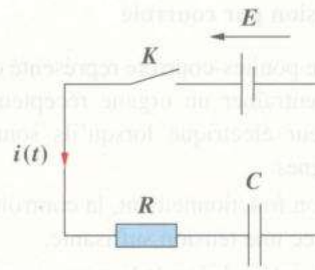
Exprimer n en fonction de T, t et f, puis en fonction de f en prenant $T = 15\,000$ N et $t = 184{,}5$ N. Calculer alors n pour $f = 0{,}23$.

72 Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit *RC* série soumis à un échelon de tension

Dans tout l'exercice, le temps est exprimé en ms. Après la fermeture de l'interrupteur K, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur de capacité C est donnée en fonction du temps t par :

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ \text{où } E, R, C \text{ et } \tau = RC$$

sont des constantes positives caractéristiques du circuit. On considère la fonction u_C définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto u_C(t)$.



a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} u_C(t)$. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de u_C admet une asymptote $\mathscr{D}$ que l'on précisera.

b. Exprimer la fonction dérivée de u_C à l'aide de E et τ. En déduire le sens de variation de u_C sur $[0, +\infty[$.

c. Exprimer, en fonction de E, les valeurs de $u_C(t)$ aux instants $t_1 = \tau$, $t_2 = 3\tau$ et $t_3 = 5\tau$.

d. Exprimer, en fonction de E et τ, le coefficient directeur, puis une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

e. Exprimer, en fonction de τ, l'instant t où cette tangente coupe l'asymptote $\mathscr{D}$.

f. En prenant $E = 10$ V et $\tau = 1\ \text{ms} = 10^{-3}$ s, tracer $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$, dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2×10^3 cm (c'est-à-dire 1 cm pour 0,5 ms, en abscisse, et 1 cm pour 1 V en ordonnée).

73

Un élément radioactif est instable ; ses atomes se désintègrent au cours du temps.

On appelle $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs dans un échantillon à l'instant t. On montre que, si

N_0 est le nombre de noyaux radioactifs dans l'échantillon à l'instant $t = 0$, on a :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T}}$$

où T est une constante liée à l'élément radioactif considéré.

a. Exprimer en fonction de N_0 le nombre $N(T)$.

b. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$N(t+T) = \frac{1}{2} N(t).$$

c. Expliquer alors pourquoi T est appelée période radioactive ou demi-vie de l'élément.

Dans la suite, on considère du césium 37 dont la période radioactive est $T = 30$ ans.

d. Si un échantillon de césium 37 contient $5{,}5 \cdot 10^{14}$ noyaux à un instant donné, combien en contiendra-t-il 30 ans plus tard ? 120 ans plus tard ?

e. Combien de temps faudra-t-il environ pour que la quantité d'atomes de césium présent dans un échantillon soit divisée par 1 000 ? On répondra à cette question de deux façons différentes :

- en résolvant l'équation $N(t) = \dfrac{N_0}{1\,000}$;
- en utilisant l'approximation $2^{10} \approx 1\,000$ et la notion de demi-vie.

Comparer les deux résultats obtenus.

74

On rappelle que la fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

a. Résoudre l'équation $\log a = 3$, puis $\log a = 2{,}7$.

b. Exprimer a en fonction de b si $\log a = b$.

75

La magnitude M d'un séisme est liée à l'énergie E libérée au foyer du séisme par la formule approximative : $\log E = 11{,}4 + 1{,}5M$, où E est exprimée en ergs (1 erg $= 10^{-7}$ joules).

Calculer les énergies libérées au foyer dans les cas où $M = 3$ et $M = 8{,}5$. Comparer ces énergies en calculant leur quotient. Qu'en penser ?

Pour préparer le Bac

A *Extrait de Bac STI session 2003*

Partie A

Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2(e^x + 1)}.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_1$.

3. Pour tout réel x, M désigne le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et M' le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-x$.

a. Déterminer, en fonction de x, les coordonnées du point I milieu du segment $[MM']$.

b. Que constate-t-on ? Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?

4. a. Vérifier que, pour tout réel x,

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{2(e^x + 1)}.$$

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_2$.

5. Soit f' la dérivée de f.

- Vérifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{2(e^x + 1)^2}.$$

- Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

6. Tracer $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie B

Calcul d'une primitive

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2(e^x + 1)}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x,

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2(1 + e^{-x})}.$$

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

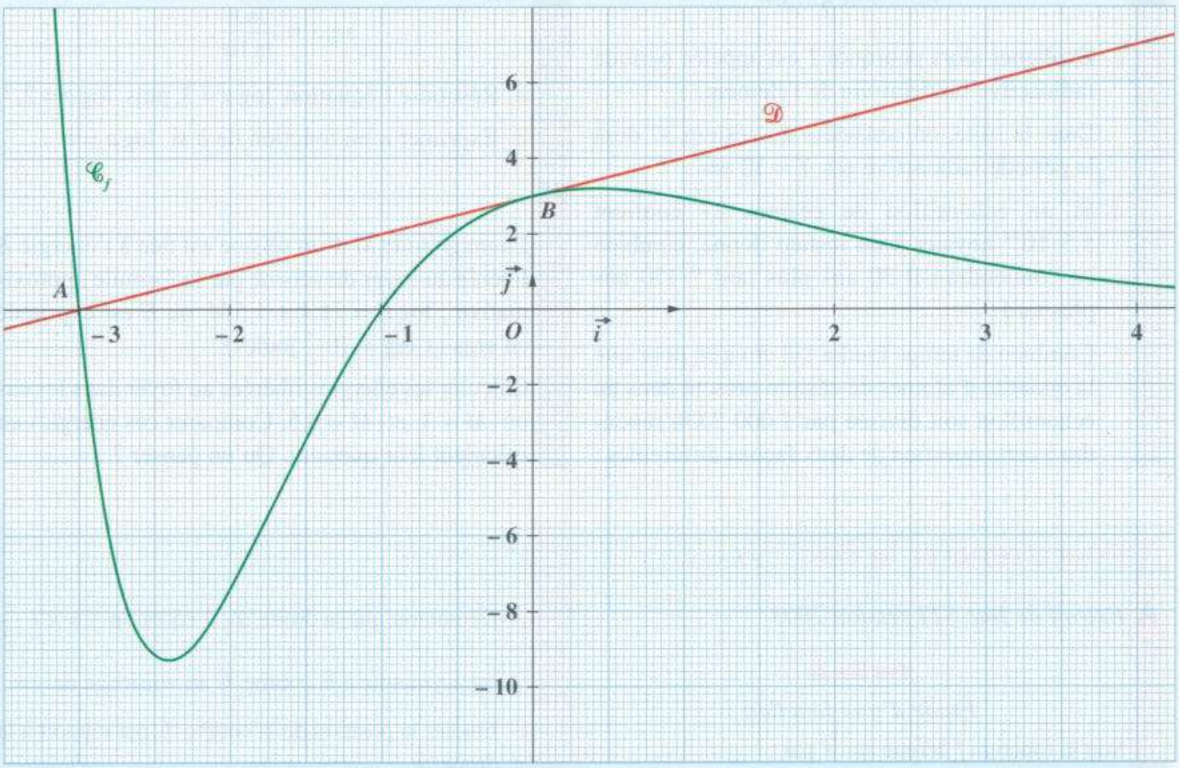
B *Extrait de Bac STI Session 2004*

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$, où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.



1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B. En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$:
$$f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire $f'(0)$ en fonction de b et c.

3. a. En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système
$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3. \end{cases}$$

b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a. Vérifier que, pour x différent de 0,
$$f(x) = \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$$f'(x) = [-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α pour x appartenant à l'intervalle $[-1, 0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

C *Extrait de bac STI session 2002*

Partie A

On considère la fonction numérique g définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2.$$

1. Déterminer sa fonction dérivée g' et montrer que, pour tout nombre réel x de $[0, +\infty[$,

$$g'(x) = e^{x}(4e^{x} - 5).$$

2. Prouver que la fonction g admet un minimum $\dfrac{-9}{8}$ en $\ln\dfrac{5}{4}$.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ en le justifiant avec précision.

4. Montrer que $x_0 = \ln 2$.

5. En déduire que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$, le nombre réel $g(x)$ est positif.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie pour tout réel x de $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{e^{x}}{e^{x} - 1}.$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a. Vérifier que, pour tout x de I,

$$f(x) = 2 + 2x + \frac{1}{e^{x} - 1}.$$

b. Utiliser ce résultat pour déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Prouver que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x + 2$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

d. Étudier le signe de $(e^{x} - 1)$ sur I. En déduire le signe de $\dfrac{1}{e^{x} - 1}$ sur I et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

3. a. f' étant la fonction dérivée de f sur I, montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^{x} - 1)^2},$$

g désignant la fonction étudiée dans la partie **A**.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs x de I.

c. Donner le tableau de variation de f sur I.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et la tangente au point d'abscisse $\ln 2$.

CHAPITRE 6

Calcul intégral

OBJECTIFS

- Définir l'intégrale entre deux nombres réels a et b d'une fonction dérivable sur un intervalle contenant a et b.
- Calculer des aires de domaines plans limités par deux courbes représentatives de fonctions et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées.
- Calculer la valeur moyenne de fonctions sur un intervalle.
- Calculer le volume de solides à l'aide d'intégrales.
- Étudier, sur des exemples simples, des méthodes de calcul approché d'intégrales **(TP)**.

ACTIVITÉ 1 Lien entre primitive et aire

Objectif : Faire une conjecture sur le lien entre l'aire de la partie de plan située sous une courbe et une primitive de la fonction définissant cette courbe.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 6$.

a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ du rectangle R_1 limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), la droite Δ_1 d'équation $x = 1$ et la droite Δ_2 d'équation $x = 2$.

c. Calculer l'aire $\mathscr{A}_2$ du rectangle R_2 défini comme R_1, en remplaçant Δ_2 par Δ_3 d'équation $x = 3$.

d. Calculer l'aire $\mathscr{A}(t)$ du rectangle R défini comme R_1 en remplaçant Δ_2 par la droite Δ d'équation $x = t$, avec $t \geqslant 1$.

e. Déterminer une primitive g de f sur $[0, +\infty[$.

f. Comparer $\mathscr{A}_1$ avec $g(2) - g(1)$, $\mathscr{A}_2$ avec $g(3) - g(1)$, puis $\mathscr{A}(t)$ avec $g(t) - g(1)$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ du trapèze T_1 limité par la courbe représentative de f, l'axe (Ox), la droite Δ_1 d'équation $x = 1$ et la droite Δ_2 d'équation $x = 2$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}_2$ du trapèze T_2 défini comme T_1 en remplaçant Δ_2 par Δ_3 d'équation $x = 3$.

c. Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ du trapèze T défini comme T_1 en remplaçant Δ_2 par la droite Δ d'équation $x = t$, avec $t \geqslant 1$.

d. Déterminer une primitive g de f sur $[0, +\infty[$.

e. Comparer $\mathcal{A}_1$ avec $g(2) - g(1)$, $\mathcal{A}_2$ avec $g(3) - g(1)$, puis $\mathcal{A}(t)$ avec $g(t) - g(1)$.

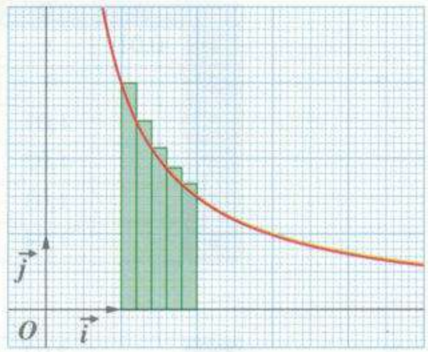
Les observations faites sur ces deux exemples semblent lier l'aire d'une partie de plan limitée par une courbe représentative de fonction, l'axe (Ox) et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, aux valeurs prises par une primitive de cette fonction.

3. Prolongement à l'aide d'un tableur

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

a. Déterminer une primitive g de f sur $[1, +\infty[$.

b. Soit Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$ (unité graphique 1 cm). Contrairement aux questions **1.** et **2.**, on ne peut pas calculer directement l'aire comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites Δ_1 d'équation $x = 1$ et Δ_t d'équation $x = t$. On va donc procéder à une approximation de cette aire à l'aide de rectangles.



On a tracé ci-contre la courbe Γ et les rectangles R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 dont les listes de sommets sont données ci-dessous.

R_1 : $(1, 0)$, $(1, f(1))$, $(1{,}2\ ; f(1))$ et $(1{,}2\ ; 0)$;
R_2 : $(1{,}2\ ; 0)$, $(1{,}2\ ; f(1{,}2))$, $(1{,}4\ ; f(1{,}2))$ et $(1{,}4\ ; 0)$;
R_3 : $(1{,}4\ ; 0)$, $(1{,}4\ ; f(1{,}4))$, $(1{,}6\ ; f(1{,}4))$ et $(1{,}6\ ; 0)$;
R_4 : $(1{,}6\ ; 0)$, $(1{,}6\ ; f(1{,}6))$, $(1{,}8\ ; f(1{,}6))$ et $(1{,}8\ ; 0)$;
R_5 : $(1{,}8\ ; 0)$, $(1{,}8\ ; f(1{,}8))$, $(2, f(1{,}8))$ et $(2, 0)$.

■ Calculer les aires de chacun de ces cinq rectangles, puis la somme de ces aires.
Cette somme donne une approximation (grossière) de l'aire de la partie de plan délimitée par la courbe Γ, l'axe (Ox), la droite Δ_1 d'équation $x = 1$ et la droite Δ_2 d'équation $x = 2$.

■ Sans introduire de nouveau rectangle, déterminer une approximation de l'aire de la partie de plan délimitée par la courbe Γ, l'axe (Ox), la droite Δ_1 d'équation $x = 1$ et la droite $\Delta_{1,8}$ d'équation $x = 1{,}8$. Comment passe-t-on de cette approximation à la précédente ?
Pour obtenir des approximations plus fines, il faut prendre en compte des rectangles plus fins et donc multiplier les calculs. On va donc se servir d'un tableur (la syntaxe utilisée est celle d'Excel).
Remplir les six premières cases du tableau comme suit :

	A	B	C	D
1	0,01	t	aire rectangle	somme
2		1	0	0

c. Dans la case A1 se trouve la largeur des rectangles considérés : c'est ce que l'on appelle le pas de l'approximation. Dans la colonne D, on lit l'approximation obtenue de l'aire de la partie de plan délimitée par la courbe Γ, l'axe (Ox), la droite Δ_1 d'équation $x = 1$ et la droite Δ_t d'équation $x = t$, la valeur de t étant indiquée dans la colonne B. La colonne C, quant à elle, contient les aires des rectangles nécessaires au calcul. Expliquer pourquoi C2 = 0 et D2 = 0.

■ • Remplir la case B3 par « =B2+$A$1 » (la référence $A$1 est une référence absolue : si l'on recopie la formule dans la ligne suivante, le B2 sera remplacé automatiquement par B3, alors que $A$1 ne sera pas modifié).

• Expliquer pourquoi le contenu de la case C3 doit être « =$A$1*(3/B2) » (faire un schéma du rectangle dont on est en train de calculer l'aire), puis remplir cette case.

• Remplir la case D3 par « =SOMME(D2;C3) ».

■ Faire un copier-coller des cases B3C3D3 jusqu'à la ligne 202 pour obtenir ainsi 200 valeurs (pour cela, sélectionner ces trois cases, placer la souris en bas à droite de D3 et, en maintenant le clic gauche, faire glisser la souris jusqu'à D202).

À quoi correspond le nombre de la case D202 ?

On s'est ici limité à $t = 3$ (compte tenu de la valeur du pas). Pour obtenir des approximations pour des valeurs de t supérieures à 3, il suffit de prolonger le copier-coller.

■ Pour différentes valeurs de t, calculer $g(t) - g(1)$ et comparer le résultat avec celui donné par le tableur.

On pourra aussi, après avoir remarqué que $g(t) - g(1) = 3\ln t$, ajouter une colonne au tableau précédent, dont la première case E2 contient « =3*LN(B2) », que l'on complète par copier-coller de E2 et faire ainsi directement la comparaison sur le tableau.

	A	B	C	D	E
1	0,01	t	aire rectangle	somme	3ln(t)
2		1	0	0	0
3		1,01	0,03	0,03	0,02985099
4		1,02	0,02970297	0,05970297	0,05940788
5		1,03	0,02941176	0,08911474	0,08867641
6		1,04	0,02912621	0,11824095	0,11766214
⋮					
199		2,97	0,01013514	3,27565752	3,26568586
200		2,98	0,01010101	3,28575853	3,2757699
201		2,99	0,01006711	3,29582564	3,28582016
202		3	0,01003344	3,30585909	3,29583687

■ Que se passe-t-il lorsque l'on modifie la valeur dans la case A1 ?

Dans ce chapitre, on va admettre le lien soupçonné ici entre primitive et aire, et définir un outil de calcul, l'intégrale, qui permet de déterminer des aires de parties de plan délimitées par des courbes représentatives de fonctions.

ACTIVITÉ 2 Calculs de moyennes

Objectif : Introduire la notion de valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, connaissant le lien entre intégrale et aire.

Dans toute la suite de l'activité, on s'intéresse à la variation de la température (exprimée en degrés celsius) en fonction du temps (exprimée en heures) pendant une réaction chimique.

1. On dispose des relevés de la température θ (en degrés celsius) en fonction du temps t (en heures) :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
θ	**2,6**	**5**	**7,1**	**8,7**	**9,7**	**10**	**9,7**	**8,7**	**7,1**	**5**	**2,6**	**0**

À partir de ces valeurs, calculer la température moyenne sur cette période de temps.

2. On dispose maintenant d'un enregistrement de températures. On considère que la loi de variation de θ en fonction de t peut être assimilée à la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [0, 6[,\ \theta(t) = \dfrac{10}{6}t \\ \text{pour } t \in [6, 12],\ \theta(t) = -\dfrac{10}{6}t + 20. \end{cases}$$

a. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm), tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction θ.

b. Calculer $\dfrac{\theta(0) + \theta(6)}{2}$ et $\dfrac{\theta(6) + \theta(12)}{2}$.

c. Soit $A(12, 0)$ et $I(6, 10)$.
Calculer l'aire du triangle AOI.

d. Quelle est la hauteur du rectangle de base $[OA]$ dont l'aire est égale à celle de AOI ?

e. Tracer ce rectangle sur la représentation graphique. Que représente la hauteur de ce rectangle par rapport à θ ?

3. La loi de variation de θ en fonction du temps est maintenant assimilée à la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [0, 5[,\ \theta(t) = 2t \\ \text{pour } t \in [5, 7[,\ \theta(t) = 10 \\ \text{pour } t \in [7, 12],\ \theta(t) = -2t + 24. \end{cases}$$

a. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction θ dans un repère orthonormal $(O'\,; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

b. Soit $A'(5, 10)$, $B'(7, 10)$ et $C'(12, 0)$. Calculer l'aire du trapèze $O'A'B'C'$.

c. Quelle est la hauteur du rectangle de base $[O'C']$ dont l'aire est égale à l'aire du trapèze $O'A'B'C'$? Tracer ce rectangle sur la représentation graphique.
La hauteur de ce rectangle est considérée comme la valeur moyenne de θ sur $[0, 12]$.

4. La loi de variation de θ en fonction du temps est maintenant assimilée à la fonction définie, pour $t \in [0, 12]$, par $\theta(t) = 10\sin\dfrac{\pi t}{12}$. On s'intéresse à sa valeur moyenne sur $[0, 12]$.

a. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}''$ de la fonction θ sur la calculatrice, en réglant la fenêtre pour x variant entre 0 et 12 et y entre 0 et 10.

b. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}''$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $t = 0$ et $t = 12$. Exprimer, en fonction de $\mathscr{A}$, la hauteur h du rectangle de base $[O''A'']$ (où A'' est le point de coordonnées $(12, 0)$) dont l'aire est égale à $\mathscr{A}$.

c. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide du calcul intégral puis calculer h.

d. Par analogie avec ce qui a été fait dans les questions précédentes, déterminer la valeur moyenne de θ sur $[0, 12]$.

e. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = h$ sur la calculatrice.

1 Intégrale d'une fonction dérivable sur un intervalle

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et si F est une de ses primitives, alors le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de F. En effet, si G est une autre primitive de f, alors il existe un réel c tel que pour tout x de $[a, b]$, $G(x) = F(x) + c$, et donc :

$$G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a).$$

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b deux réels appartenant à I. Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de F.

Définition On appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

Remarque : Une intégrale est un **nombre réel**. Son calcul, en appliquant la définition, comprend deux étapes : déterminer une primitive F de la fonction « à intégrer », puis calculer la différence des valeurs prises par cette primitive aux bornes de l'intégrale. On présente ces deux étapes de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple :

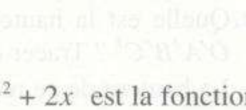
On calcule ici $I = \int_1^2 (5x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction $x \mapsto 5x^2 + 2x$ est la fonction $F : x \mapsto 5\frac{x^3}{3} + x^2$ (pour simplifier les calculs, on choisit pour F la primitive pour laquelle la constante est nulle). Alors : $\int_1^2 (5x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = \left[5\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \left(\frac{40}{3} + 4\right) - \left(\frac{5}{3} + 1\right) = \frac{44}{3}$.

▸Exercices n° 1 à 28

2 Calculs d'aires

1 Unité d'aire

Définition Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, soit $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ et $K(1, 1)$.
On appelle alors unité d'aire, et on note u.a., l'aire du rectangle $OIKJ$.

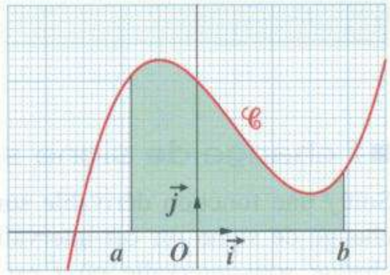


Exemple : Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée. L'unité d'aire est alors égale à $2 \times 3 = 6\ \text{cm}^2$. On écrit $1\ \text{u.a.} = 6\ \text{cm}^2$.

2 Aire d'une partie de plan limitée par la courbe représentative d'une fonction f, l'axe (Ox), et deux droites parallèles à l'axe (Oy)

f ne prend que des valeurs positives sur $[a, b]$

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs positives sur $[a, b]$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Dans l'activité 1, on a émis, à partir de quelques exemples, une conjecture sur le lien entre l'aire d'une certaine partie de plan (en vert dans la représentation ci-contre) et un calcul correspondant à l'intégrale de f entre a et b. On admet que cette conjecture est vraie, d'où le théorème qui suit.



Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, ne prenant que des valeurs positives sur $[a, b]$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

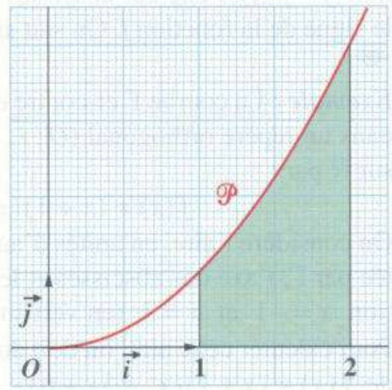
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, on considère la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{P}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (partie en vert).
L'aire de cette partie, exprimée en unités d'aire, est :

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Or, ici, 1 u.a. $= 2 \times 1\ \text{cm}^2$, donc l'aire exprimée en cm^2 est :

$$\mathscr{A} = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}.$$



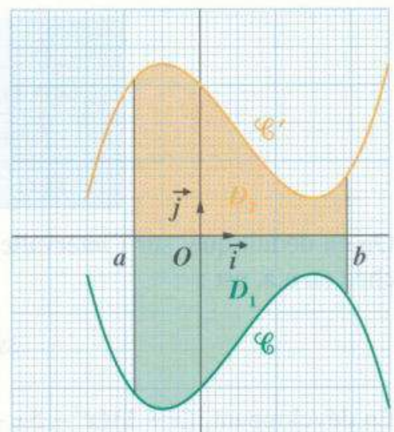
f ne prend que des valeurs négatives sur $[a, b]$

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs négatives sur $[a, b]$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction $(-f)$ ne prend que des valeurs positives sur $[a, b]$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}'$ est la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'aire de la partie de plan D_1 limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ (en vert sur la représentation) est alors égale à l'aire de la partie de plan D_2, symétrique de D_1 par rapport à l'axe des abscisses et limitée par la courbe $\mathscr{C}'$ (en jaune sur la représentation). Donc l'aire de D_1 en u.a. est égale à :

$$\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x.$$



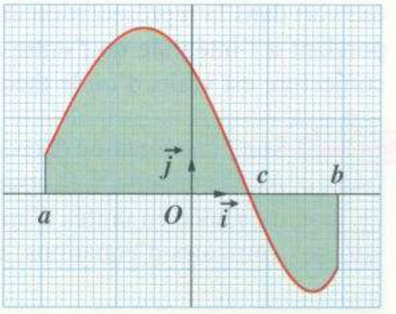
Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, et à valeurs négatives sur $[a, b]$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x.$$

▸ Exercices n° 29 à 35

■ f change de signe sur $[a, b]$

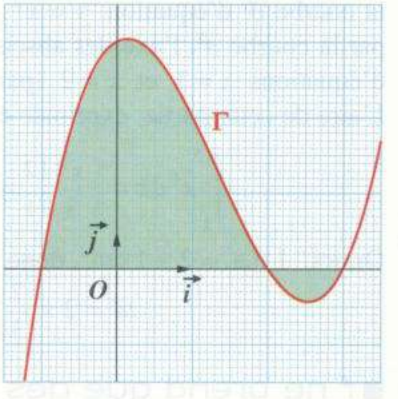
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Si f change de signe sur cet intervalle, on calcule les aires sur chaque sous-intervalle où f est de signe constant. L'aire totale est la somme des aires calculées.
Sur l'exemple ci-contre, où f change de signe une seule fois en c en étant positive sur $[a, c]$, on calcule l'aire de la partie en vert par :



$$\mathscr{A} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{(en u.a.)}.$$

Remarque : Quand on souhaite calculer l'aire d'une partie du plan limitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et deux droites verticales $x = a$ et $x = b$, on détermine d'abord le signe de la fonction f. On sait ainsi dans quel cas on se trouve et donc quel théorème appliquer.

Exemple : La courbe Γ ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :



$$f(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6).$$

On considère l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par Γ, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 3$ (en vert sur la représentation).
Pour calculer cette aire, on doit donc déjà déterminer le signe de $f(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$.
$x^2 - 5x + 6$ est un polynôme du second degré qui s'annule pour $x = 2$ et $x = 3$. On en déduit le tableau de signe de $f(x)$ ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
(x^2-5x+6)		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que, sur l'intervalle $[-1, 3]$, f change de signe uniquement en 2, donc l'aire cherchée en u.a. est :

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (-f(x))\,\mathrm{d}x.$$

En développant $(x + 1)(x^2 - 5x + 6)$, on a $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, donc
$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 4\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 6x.$

On obtient : $\mathcal{A} = \left[F(x)\right]_{-1}^{2} + \left[-F(x)\right]_{2}^{3} = [F(2) - F(-1)] + [-F(3) + F(2)]$

d'où $\mathcal{A} = 2F(2) - F(-1) - F(3) = \dfrac{71}{6}$ (u.a.).

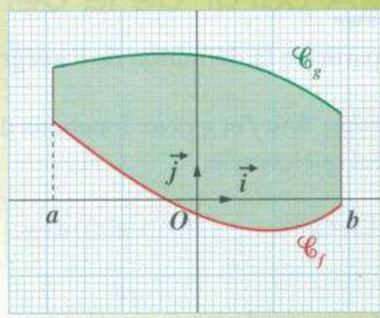
▸Exercices n° 36 à 40

3 Aire d'une partie de plan limitée par deux courbes représentatives de fonctions et deux droites verticales

On admet le théorème suivant.

Théorème Soit deux fonctions f et g dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. On appelle $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et de g dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à :

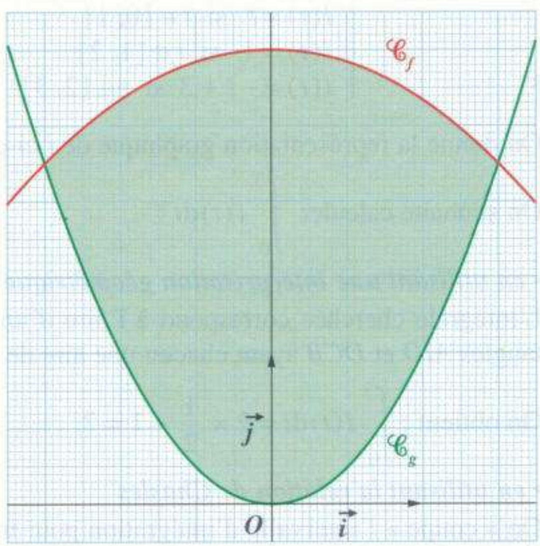
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Exemple : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3 \ \text{ et } \ g(x) = x^2.$$

On a représenté ci-contre les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement de f et g dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On souhaite déterminer l'aire de la partie de plan limitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \dfrac{3}{2}$.



Pour pouvoir appliquer le théorème précédent, on doit d'abord étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Pour ce faire, on introduit :

$h(x) = f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + 3 - x^2$

donc $h(x) = -\dfrac{4}{3}x^2 + 3$.

$h(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule pour $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

On en déduit que $h(x)$ est positif sur $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, c'est-à-dire que pour tout x de $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

COURS

On déduit alors du théorème précédent que l'aire cherchée en u.a. est :

$$\mathscr{A} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x, \text{ donc } \mathscr{A} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{9}x^3 + 3x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = 6.$$

De plus, 1 u.a. $= 2 \times 2$ cm², donc l'aire cherchée en cm² est $6 \times 2 \times 2 = 24$.

▸Exercices n° 41 à 45

3 Propriétés de l'intégrale

1 À partir de la définition

À partir de la définition de l'intégrale, on démontre simplement les propriétés suivantes.

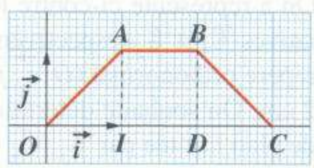
Théorème Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I et λ est un réel quelconque.

- Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$
- Ordre des bornes : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$

Exemple : On considère la fonction i définie sur [0, 3] par :

$$\begin{cases} i(t) = t & \text{si } t \in [0, 1] \\ i(t) = 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ i(t) = -t + 3 & \text{si } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

On donne la représentation graphique de i ci-contre.



On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^3 i(t)\,\mathrm{d}t$:

• en utilisant une interprétation géométrique de l'intégrale

L'intégrale cherchée correspond à l'aire d'une partie de plan qui est formée des triangles rectangles AIO et DCB ayant chacun une aire de 0,5 , et au carré $ABDI$ d'aire 1.

On obtient : $\displaystyle\int_0^3 i(t)\,\mathrm{d}t = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2.$

• en utilisant la relation de Chasles

On « coupe » l'intervalle d'intégration pour travailler sur des intervalles sur lesquels on connaît l'expression de i. On obtient :

$$\int_0^3 i(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 i(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 i(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 i(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 1\,\mathrm{d}t + \int_2^3 (-t+3)\,\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_0^3 i(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[t\right]_1^2 + \left[-\frac{t^2}{2} + 3t\right]_2^3 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + (2 - 1) + \left[\left(-\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-\frac{4}{2} + 6\right)\right] = 2.$

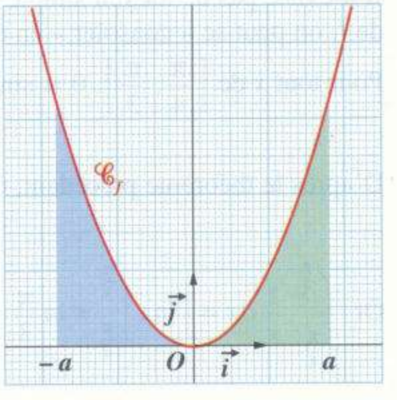
Remarque : Le lecteur scrupuleux aura noté que la fonction i de l'exemple précédent n'est pas dérivable en 1 et 2, donc n'est pas dérivable sur $[0, 3]$. Or, on a défini le concept d'intégrale pour une fonction dérivable… En réalité, la définition adoptée au début s'étend au cas d'une fonction dérivable par morceaux (admis). C'est le cas de la fonction i.

À partir de la définition de l'intégrale, on peut aussi démontrer les propriétés suivantes :

Propriété Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un réel.

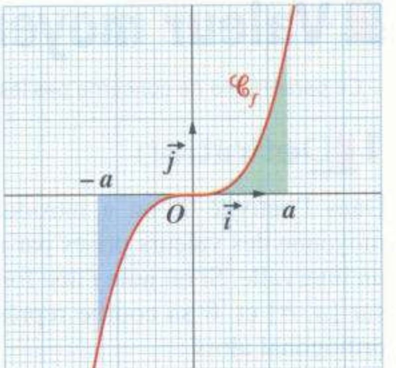
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Si f est périodique de période T, alors $\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : Il s'agit de bien faire le lien entre les propriétés précédentes et l'interprétation géométrique d'une intégrale. On explique ce propos en détail dans le cas où f est paire et positive.



L'intégrale $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors l'aire de la partie du plan qui est la somme :

- de la partie (en vert) délimitée par $\mathscr{C}_f$, les deux axes du repère et la droite verticale d'équation $x = a$ (cette aire est égale à $\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$) ;
- de la partie (en bleu) délimitée par $\mathscr{C}_f$, les deux axes du repère et la droite verticale d'équation $x = -a$. Or, par symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire de cette partie est la même que l'aire précédente $\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.



On a donc $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans le cas où f est impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport au centre du repère, et on obtient le résultat donné dans le théorème par le même type de considération sur les aires que précédemment.

Exemple : Sans aucun calcul d'intégrale, on peut affirmer que $\int_{-7}^{7} (4x^3 - 5x)\,\mathrm{d}x = 0$.

En effet, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4x^3 - 5x$ est impaire (pour tout réel x, $f(-x) = 4(-x)^3 - 5(-x) = -4x^3 + 5x = -f(x)$).

▸Exercices n° 46 à 52

2 Inégalités et intégrales

À partir de l'interprétation des intégrales de fonctions positives comme des aires de parties de plan, on peut établir la propriété qui suit.

Propriété Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$.

• Positivité : Si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x)$ est positif, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

• Ordre : Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exemple : On considère $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Il n'existe pas de moyen simple pour calculer l'intégrale I. À défaut d'avoir une valeur exacte de I, on peut se « consoler » en en cherchant un encadrement.

Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$.

D'après le théorème précédent, on a donc $0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Or $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{\pi}{3} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln\frac{4}{3}$. D'où $0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \ln\frac{4}{3}$.

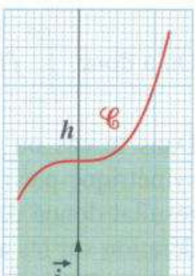
▸Exercices n° 53 et 54

4 Valeur moyenne

> Ce paragraphe ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

1 Définition

Dans l'activité 2, on a introduit l'idée d'un calcul de moyenne des valeurs prises par une fonction positive sur un intervalle. Si on note f une fonction à valeurs positives sur $[a, b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal alors :



• l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

• l'aire d'un rectangle de base $[AB]$ (où $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$) et de hauteur h est $h(b - a)$.

Ces deux aires sont alors égales si et seulement si $h = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. C'est ce réel qu'on définit comme la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$.

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre μ défini par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple : Soit f la fonction dérivable sur $[0, \pi]$ définie par $f(t) = \sin t$. La valeur moyenne de f sur $[0, \pi]$ est alors $\mu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\big[-\cos t\big]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

2 Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ qui prend une valeur minimale m et une valeur maximale M sur $[a, b]$. Alors, pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Par intégration, on a :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x, \text{ c'est-à-dire } m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

Propriété Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que, pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Alors on a : $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

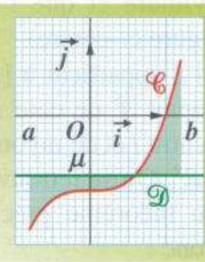
Exemple : On considère $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$. Pour tout x de $[0, \pi]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^5 x \leqslant 1$. On déduit de l'inégalité de la moyenne que $0(\pi - 0) \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x\,\mathrm{d}x \leqslant 1(\pi - 0)$ et donc $0 \leqslant I \leqslant \pi$.

3 Interprétation graphique de la valeur moyenne

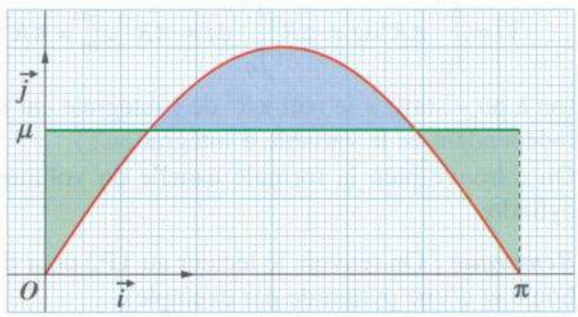
D'après l'inégalité de la moyenne, la valeur moyenne μ d'une fonction f dérivable sur $[a, b]$ vérifie $m(b-a) \leqslant \mu(b-a) \leqslant M(b-a)$ et donc, avec $b > a$, $b - a > 0$ et $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Dit autrement, la valeur moyenne est comprise entre la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[a, b]$. Comme f est dérivable sur $[a, b]$, l'équation $f(x) = \mu$ admet au moins une solution dans $[a, b]$. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \mu$ coupe donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en au moins un point. On peut alors aller plus loin avec le théorème suivant que l'on admet.

Théorème Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal. Si on considère les parties du plan comprises entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = \mu$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, alors l'aire de la partie située au-dessus de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire de la partie située en dessous de $\mathscr{D}$.



Exemple : On a précédemment vu que la valeur moyenne sur $[0, \pi]$ de $f(t) = \sin t$ est $\dfrac{2}{\pi}$. Sur le dessin, l'aire de la partie verte est égale à l'aire de la partie bleue.

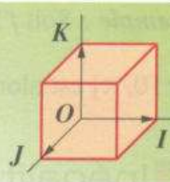


▸Exercices n° 55 à 57

5 Calculs de volumes

1 Unité de volume

Définition Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace. Soit les points $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$ et $K(0, 0, 1)$. On appelle unité de volume, et on note u.v., le volume du pavé droit dont les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$ sont trois arêtes.

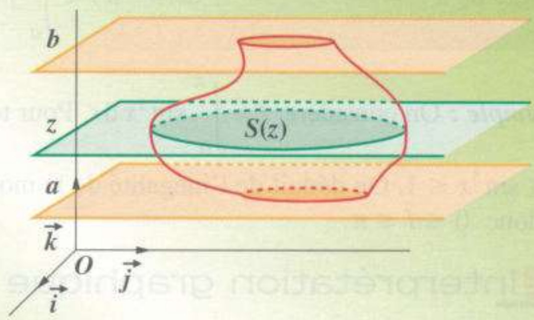


Exemple : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe $(O, \vec{i})$ et 3 cm sur les axes $(O, \vec{j})$ et $(O, \vec{k})$, alors $1 \text{ u.v.} = 2 \times 3 \times 3 \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3$.

2 Cas général

Théorème Dans l'espace rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$: le plan de cote a (d'équation $z = a$) et le plan de cote b (d'équation $z = b$). Si l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de cote z, délimite une partie de plan d'aire $S(z)$, alors le volume du solide, exprimé en unités de volume, est :

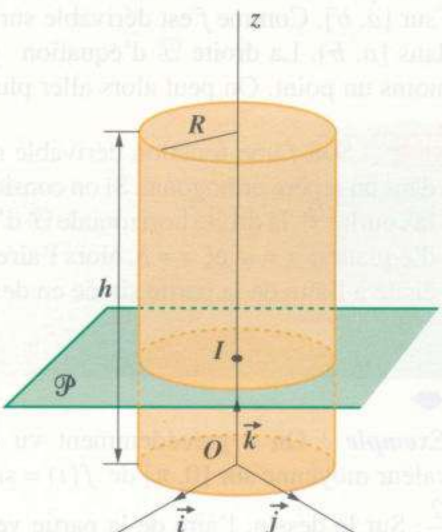
$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z.$$



Exemple : On considère un cylindre de rayon R et de hauteur h. On munit l'espace d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que O soit le centre de la base du cylindre et que l'axe du cylindre soit $(O; \vec{k})$ (voir figure ci-contre).

Si z appartient à $[0, h]$, on constate que le plan horizontal $\mathcal{P}$ de cote z coupe le cylindre en un cercle de centre I et de rayon R, et délimite donc un disque d'aire πR^2. On se retrouve dans les conditions d'applications du théorème précédent. Le volume du cylindre est donc :

$$\mathcal{V} = \int_0^h \pi R^2 \mathrm{d}z = \pi R^2 \int_0^h \mathrm{d}z = \pi R^2 [z]_0^h = \pi R^2 h$$



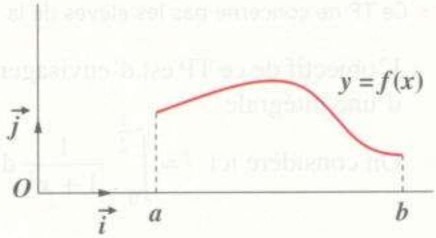
(on a pu « sortir » le réel πR^2 de l'intégrale car il était indépendant de la variable d'intégration z).

On retrouve bien la formule usuelle du volume d'un cylindre.

Remarque : On renvoie le lecteur au TP2 pour d'autres illustrations du théorème (volume d'une boule et d'une pyramide par exemple).

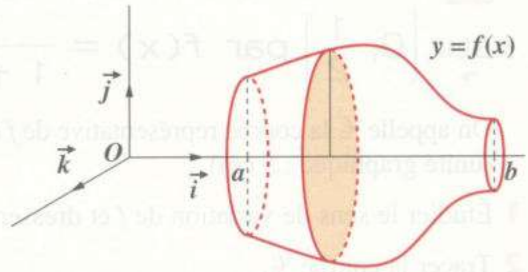
3 Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Par rotation autour de l'axe (Ox), l'axe $(O,\vec{j})$ engendre un plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{j},\vec{k})$ (l'unité sur (Oz) est la même que l'unité sur (Oy)).



Dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la partie de plan limitée par une courbe d'équation $y=f(x)$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie de plan engendre un solide de révolution limité par les plans parallèles à $(O;\vec{j},\vec{k})$ de cotes respectives a et b. L'intersection de ce solide avec un plan parallèle à $(O;\vec{j},\vec{k})$ de cote x est un disque de rayon $f(x)$, donc d'aire $S(x)=\pi f^2(x)$. En appliquant la formule précédente (l'axe (Ox) prenant le rôle de l'axe (Oz)), on obtient :



$$\mathcal{V}=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème Dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère une partie de plan limitée par une courbe d'équation $y=f(x)$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie de plan engendre un solide de révolution limité par les plans parallèles à $(O;\vec{j},\vec{k})$ de cotes respectives a et b. Le volume de ce solide, exprimé en unités de volume, est :

$$\mathcal{V}=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm sur (Ox) et 2 cm sur (Oy), on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $[0,\pi]$. En tournant autour de l'axe (Ox), la partie de plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x=0$ et $x=\pi$, engendre un solide.

En appliquant la formule précédente, on en déduit que ce solide a pour volume $\mathcal{V}=\pi\int_0^\pi \sin^2x\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette intégrale, on détermine une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^2x$. Pour cela, on utilise une linéarisation : $\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. On en déduit que :

$$\mathcal{V}=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\pi\times\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}\pi^2\text{ (u.v.)}.$$

Or, par rotation autour de l'axe (Ox), l'unité sur (Oz) est la même que l'unité sur (Oy), c'est-à-dire 2 cm. On a donc $1\text{ u.v.}=1\times2\times2=4\text{ cm}^3$. On en déduit que le solide engendré a un volume, en cm^3, de $\frac{1}{2}\pi^2\times4=2\pi^2$.

▸Exercices n° 58 à 61

COURS

TP1 Exemples de calculs approchés d'une intégrale

> Ce TP ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

L'objectif de ce TP est d'envisager plusieurs méthodes pour déterminer des valeurs approchées d'une intégrale.

On considère ici $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1 Étude et représentation graphique de la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

1 Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2 Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3 Donner une interprétation graphique du nombre I.

2 Première approximation à l'aide de l'aire d'un trapèze

Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 et $\frac{1}{2}$, et soit C le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

1 Tracer la droite (AB). Déterminer une équation de (AB) et en déduire l'expression de la fonction h dont cette droite est la représentation graphique.

2 Montrer que $f(x) - h(x) = \dfrac{x\left(\frac{2}{5}x^2 - x + \frac{2}{5}\right)}{1+x^2}$. Étudier le signe de cette expression et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (AB).

3 Calculer l'aire, en unités d'aire, du trapèze $OABC$.
En déduire une inégalité sur l'intégrale I.

3 Une valeur approchée à l'aide de tangentes

1 Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{C}_A$ en A à la courbe $\mathscr{C}$.
Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{C}_B$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B.
Tracer, sur la représentation graphique, ces deux tangentes.

2 Soit K le point d'intersection de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, et K' le projeté orthogonal de K sur l'axe (Ox).
Déterminer les coordonnées de K et K'.
Calculer les aires, en unités d'aire, du rectangle $OAKK'$ et du trapèze $BKK'C$.

3 On admet que $\mathscr{C}$ est située en dessous de la ligne polygonale AKB. Déduire de ce qui précède une inégalité concernant I.

4 Conclure des parties **2** et **3** un encadrement de I.

4 Une meilleure précision grâce à un encadrement de la fonction

1 Développer $(1+x^2)(1-x^2)$.
En déduire que, pour tout x réel, $(1+x^2)(1-x^2) \leqslant 1$ et donc que $1 - x^2 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.

2 Développer $(1+x^2)(1-x^2+x^4)$.
En déduire que, pour tout x réel, $(1+x^2)(1-x^2+x^4) \geqslant 1$ et donc que $1-x^2+x^4 \geqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.

3 Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2+x^4)\,\mathrm{d}x$ et $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide de la question précédente, que $L \leqslant I \leqslant J$. Déterminer les valeurs exactes de J et de L.

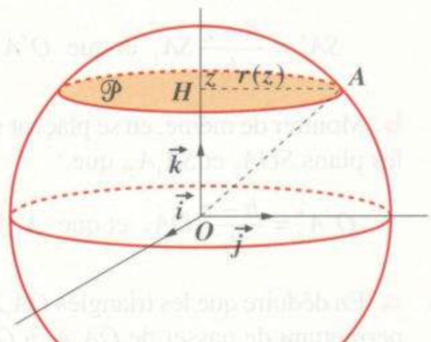
4 En déduire un nouvel encadrement de I. Vérifier que cet encadrement est plus précis que celui obtenu à la question **3** 4.

▸Exercices n° 62 et 63

TP2 Exemples de calculs de volumes usuels

1 Volume d'une boule

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit S la boule de centre O et de rayon $R > 0$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle à $(O;\vec{i},\vec{j})$ de cote z. $\mathscr{P}$ coupe la boule suivant un disque dont le rayon $r(z)$ dépend de z.



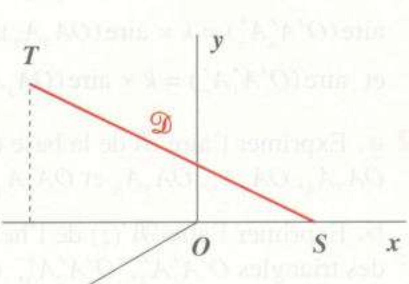
1 En considérant le triangle rectangle OAH, montrer que $(r(z))^2 = R^2 - z^2$.

2 Exprimer l'aire $S(z)$ du disque en fonction de z et de R.

3 Calculer $\displaystyle\int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$ et en déduire le volume de la boule en fonction de R.

2 Volume d'un cône de révolution

Dans un repère orthonormal $(Oxyz)$ de l'espace, on considère le cône C engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) d'une droite $\mathscr{D}$ passant par les points S et T de coordonnées respectives $(b, 0, 0)$ et $(a, r, 0)$, où a, b et r sont trois nombres réels tels que $a \neq b$ et $r > 0$.



1 a. Que représente r pour le cône C ?

b. Que représente $(b-a)$ pour le cône C ?

c. Dans quel plan se trouve la droite $\mathscr{D}$?
Déterminer une équation de cette droite dans le plan (Oxy).

2 Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème du paragraphe **5 3** du cours pour calculer le volume $\mathscr{V}$ du cône C.

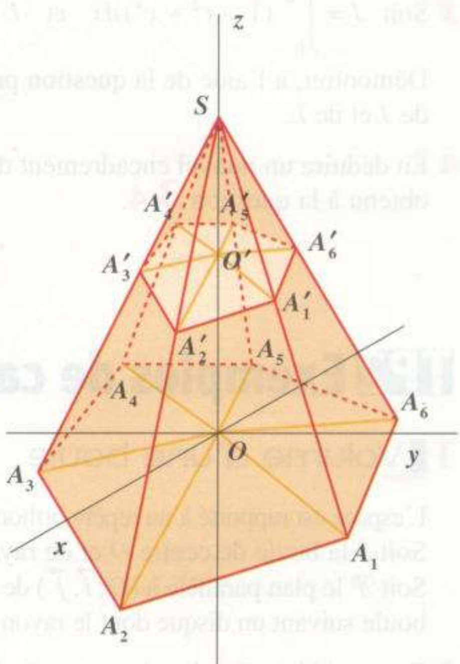
3 Vérifier que $\mathscr{V}$ est égal à $\pi\int_a^b \frac{r^2}{(b-a)^2}(x-b)^2\,dx$, puis calculer $\mathscr{V}$ en fonction de a, b et r.

4 Application numérique : calculer le volume du cône obtenu avec $a=-2$, $b=6$ et $r=4$.

5 On considère un cône de révolution de hauteur h et dont le rayon de la base vaut r. Utiliser le résultat obtenu à la question **3** pour retrouver la formule usuelle du volume du cône.

3 Volume d'une pyramide

On se place dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on considère une pyramide à base hexagonale dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ dont le sommet S se trouve sur la demi-droite $(O;\vec{k})$ (on note h sa cote). On suppose de plus que O est intérieur à la base et on note A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 les six sommets de la base.



1 Le plan $\mathscr{P}$ parallèle à $(O;\vec{i},\vec{j})$ de cote z $(0 \leqslant z \leqslant h)$ coupe la pyramide suivant un hexagone de sommets A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 et A'_6. On note O' le point d'intersection de la droite $(O;\vec{k})$ avec le plan $\mathscr{P}$.

a. En se plaçant dans le plan SOA_1 et en utilisant le théorème de Thalès, montrer que :

$$SA'_1 = \frac{h-z}{h}SA_1 \text{ et que } O'A'_1 = \frac{h-z}{h}OA_1.$$

b. Montrer de même, en se plaçant successivement dans les plans SOA_2 et SA_1A_2, que :

$$O'A'_2 = \frac{h-z}{h}OA_2 \text{ et que } A'_1A'_2 = \frac{h-z}{h}A_1A_2.$$

c. En déduire que les triangles OA_1A_2 et $O'A'_1A'_2$ sont semblables et donner le rapport de réduction permettant de passer de OA_1A_2 à $O'A'_1A'_2$.

d. Que vaut le rapport $k = \frac{\text{aire}(O'A'_1A'_2)}{\text{aire}(OA_1A_2)}$?

On admettra que $\text{aire}(O'A'_2A'_3) = k \times \text{aire}(OA_2A_3)$, $\text{aire}(O'A'_3A'_4) = k \times \text{aire}(OA_3A_4)$, $\text{aire}(O'A'_4A'_5) = k \times \text{aire}(OA_4A_5)$, $\text{aire}(O'A'_5A'_6) = k \times \text{aire}(OA_5A_6)$ et $\text{aire}(O'A'_1A'_6) = k \times \text{aire}(OA_1A_6)$ (la démonstration est toujours la même).

2 a. Exprimer l'aire $\mathscr{B}$ de la base de la pyramide à l'aide des aires des triangles OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6 et OA_6A_1.

b. Exprimer l'aire $\mathscr{B}'(z)$ de l'hexagone de sommets A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 et A'_6 à l'aide des aires des triangles $O'A'_1A'_2$, $O'A'_2A'_3$, $O'A'_3A'_4$, $O'A'_4A'_5$, $O'A'_5A'_6$ et $O'A'_6A'_1$.

c. En déduire que $\mathscr{B}'(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2\mathscr{B}$.

3 Calculer le volume de la pyramide en fonction de $\mathscr{B}$ et de h à l'aide du théorème du paragraphe **5 2** du cours.

TP3 Exemples de calculs de valeurs moyennes et efficaces

1 Introduction

1 En électricité, la puissance instantanée $p(t)$ d'un dipôle D soumis à une tension $u(t)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t)$ est définie par $p(t) = u(t) \times i(t)$.
On considère de plus que les fonctions u et i sont périodiques de période T. On note $\overline{P}$ la puissance moyenne sur une période : c'est la valeur moyenne de la fonction p sur l'intervalle $[0, T]$.
Exprimer $\overline{P}$ à l'aide de T, $u(t)$ et $i(t)$.

2 Application : calculs de puissances moyennes en régime sinusoïdal.

On admet que, pour tous réels a et b, on a : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

Exprimer $\overline{P}$ en fonction de U, I et φ dans les cas suivants (dans les deux cas, on a $T = \frac{2\pi}{\omega}$).

a. $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$;

b. $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(2\omega t - \varphi)$.

2 Cas où *i* est une fonction constante

1 On considère que $i(t) = I$, où I est une constante réelle. Exprimer $\overline{P}$ à l'aide de I et $\overline{U}$, où $\overline{U}$ est la tension moyenne, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction u sur l'intervalle $[0, T]$.

2 Application : signal redressé bialternance
On considère un dipôle traversé par un courant d'intensité constante $i(t) = I$, et soumis à une tension $u(t) = \left|\widehat{U}\sin\frac{2\pi t}{T}\right|$, avec $\widehat{U}$ et T constants.

a. Donner l'allure de la courbe représentative de u. Quelle est la période de u ?

b. Calculer, en fonction de $\widehat{U}$, la valeur moyenne $\overline{U}$ de u sur une période.

c. En déduire, en fonction de $\widehat{U}$ et I, la valeur moyenne $\overline{P}$ de p sur une période.

3 Cas d'un résistor

On suppose maintenant que le dipôle D est un résistor de résistance R.
De ce fait, $u(t) = R \times i(t)$.

1 a. Exprimer $\overline{P}$ à l'aide de T, R et $i(t)$.

b. On note I la valeur efficace de l'intensité, grandeur en relation avec l'échauffement du dipôle. Par définition, I^2 est la valeur moyenne du carré de l'intensité sur une période. Exprimer I^2 à l'aide de T et i.

c. En déduire l'expression de $\overline{P}$ en fonction de R et I^2.

2 Application : On considère un résistor de résistance R traversé par un courant d'intensité $i(t) = \widehat{I}\sin\frac{2\pi t}{T}$, avec $\widehat{I}$ et T constants.

a. Calculer, en fonction de $\widehat{I}$, la valeur efficace I de i sur une période.

b. En déduire, en fonction de R et $\widehat{I}$, la valeur moyenne $\overline{P}$ de p sur une période.

1> Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux réels appartenant à I. Alors :

• Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de F.

• On appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, **le nombre réel** défini par :

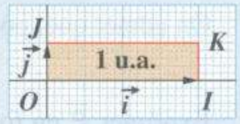
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

2> Calculs d'aires

Unité d'aire

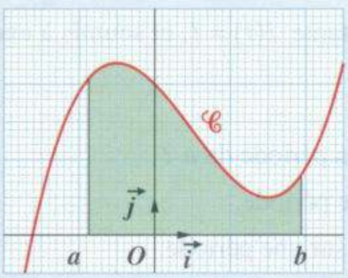
Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soit $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ et $K(1, 1)$.
On appelle alors **unité d'aire**, et on note u.a., l'aire du rectangle $OIKJ$.

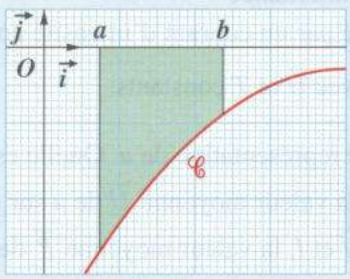


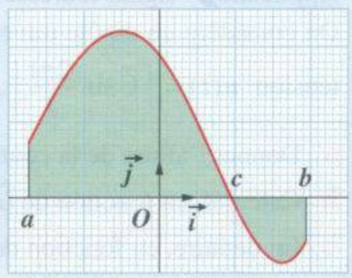
Théorèmes

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$	$\mathscr{A} = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x.$	$\mathscr{A} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$
si f ne prend que des valeurs positives sur $[a, b]$	si f ne prend que des valeurs négatives sur $[a, b]$	si f change de signe en c sur $[a, b]$ en étant positive sur $[a, c]$

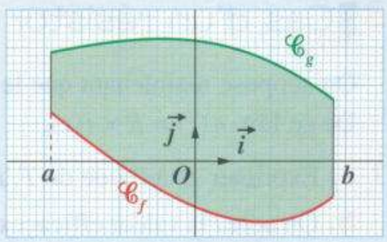






• Soit deux fonctions f et g dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Leurs courbes représentatives sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à :

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$



3> Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I et λ un réel quelconque.

• Linéarité : $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

• Ordre des bornes : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

• Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

■ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un réel. Alors :

• si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ • si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

• si f est périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$

■ Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$.

• Positivité : Si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x)$ est positif, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

• Ordre : Si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

4> Valeur moyenne

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

5> Inégalité de la moyenne

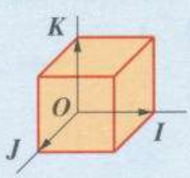
Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que, pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M.$

On a alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$

6> Calcul de volume

■ **Unité de volume**.

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace. Soit les points $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$ et $K(0, 0, 1)$. On appelle unité de volume, et on note u.v., le volume du pavé droit dont les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$ sont trois arêtes.



■ **Théorème**.

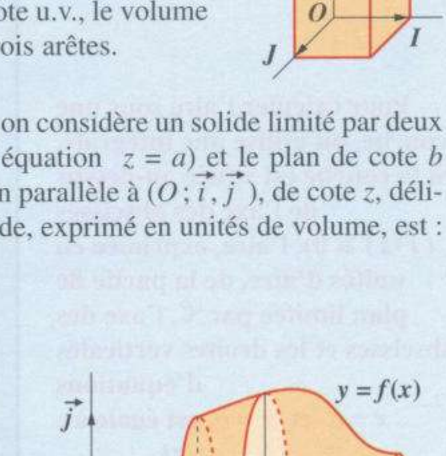
Dans l'espace rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$: le plan de cote a (d'équation $z = a$) et le plan de cote b (d'équation $z = b$). Si l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de cote z, délimite une partie de plan d'aire $S(z)$, alors le volume du solide, exprimé en unités de volume, est :

$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z.$$

■ **Théorème**.

Dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la partie de plan limitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie de plan engendre un solide de révolution dont le volume, exprimé en unités de volume, est :

$$\mathcal{V} = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Calculer une intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x+4}\,dx.$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx.$

c. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 4} (1-e^{2x})\,dx.$

Pour calculer une intégrale, on commence en général par chercher une primitive. Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Réponses

a. Pour tout x de $[1, 2]$, $x + 4 > 0$ et $\dfrac{3}{x+4} = 3 \times \dfrac{1}{x+4}$

d'où $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x+4}\,dx = \left[3\ln(x+4)\right]_1^2 = 3\ln 6 - 3\ln 5 = 3\ln\frac{6}{5}.$

b. On a $\dfrac{x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$, d'où

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2(x^2+3)}\right]_0^1 = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}.$$

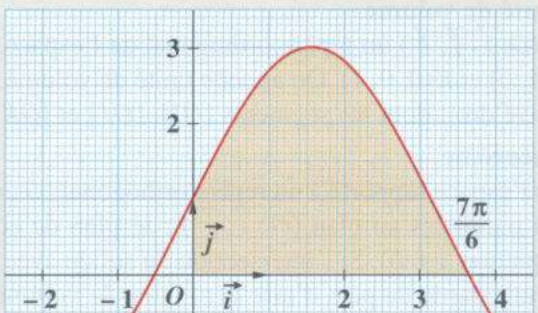
c. On a $1 - e^{2x} = 1 - \dfrac{1}{2} \times 2 \times e^{2x}$, d'où

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} (1-e^{2x})\,dx = \left[x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 4} = \ln\frac{4}{3} - \frac{7}{2}.$$

Calculer l'aire d'une partie de plan limitée par une courbe, l'axe des abscisses et deux droites verticales

2 La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin x + 1$ dans un repère orthonormal.

Calculer l'aire en unités d'aire de la partie colorée.



Pour calculer l'aire sous une courbe, on utilise une intégrale. Si la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses ($f(x) \geqslant 0$), l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale à : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Réponse

Sur $\left[0, \dfrac{7\pi}{6}\right]$, on a $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire demandée est, en unités d'aire, $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{7\pi}{6}} (2\sin x + 1)\,dx.$

$$\mathscr{A} = \Big[-2\cos x + x\Big]_0^{\frac{7\pi}{6}} = -2\cos\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} - (-2\cos 0), \text{ d'où}$$

$$\mathscr{A} = \sqrt{3} + 2 + \frac{7\pi}{6}.$$

Calculer l'aire d'une partie de plan limitée par deux courbes et deux droites verticales

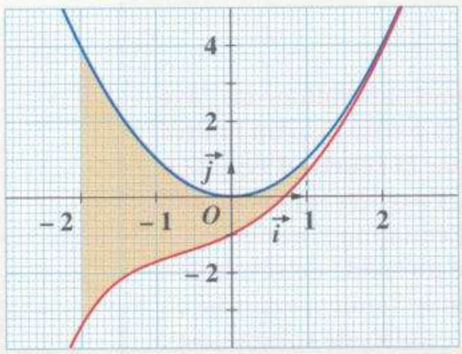
Si la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ ($f(x) \leqslant g(x)$), l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à :

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

L'aire est obtenue en unités d'aires. Ne pas oublier de la convertir en cm² en fonction des unités employées sur le graphique.

3 Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée. La courbe bleue est la courbe d'équation $y = x^2$ et la courbe rouge est la courbe d'équation $y = x^2 - \mathrm{e}^{-x}$.

Calculer l'aire en cm² de la partie colorée.



Réponse

Pour tout x de $[-2, 1]$, on a $x^2 > x^2 - \mathrm{e}^{-x}$, donc l'aire demandée est, en unités d'aire, $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2}^{1} [x^2 - (x^2 - \mathrm{e}^{-x})]\,\mathrm{d}x$,

soit $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; $\mathscr{A} = -\mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{2}) = \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-1}$.

Ici 1 u.a. = 1 × 0,5 cm², d'où l'aire demandée, en cm² :

$$\mathscr{A} = 0{,}5(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}).$$

Calculer une valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4 Calculer la valeur moyenne sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x$.

Réponse

On a $\mu = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Pour calculer une primitive de $\sin^2 x$, il est nécessaire de linéariser.

$$\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x \;;$$

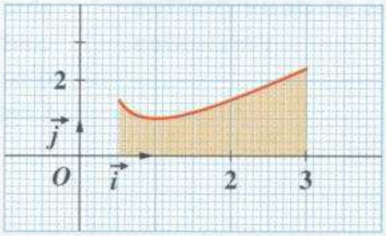
$$\mu = \frac{2}{\pi}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}, \text{ ainsi } \mu = 1.$$

Calculer un volume

5 Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm sur (Ox) et 0,5 cm sur (Oy). La courbe représentée ci-dessous est la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{x} + x - 1.$$

Calculer le volume en cm^3 du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la partie colorée.



En tournant autour de l'axe (Ox), la partie de plan limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ engendre un solide de révolution dont le volume, exprimé en unités de volume, est :

$$\mathcal{V} = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Réponse

Le volume demandé, exprimé en unités de volume, est :

$$\mathcal{V} = \pi\int_{0,5}^{3}\left(\frac{1}{x} + x - 1\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_{0,5}^{3}\left(\frac{1}{x^2} + x^2 + 3 - \frac{2}{x} - 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + 3x - 2\ln x - x^2\right]_{0,5}^{3}$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{3} + 9 + 9 - 2\ln 3 - 9 + 2 - \frac{1}{24} - \frac{3}{2} - 2\ln 2 + \frac{1}{4}\right).$$

$$\mathcal{V} = \pi\left(\frac{225}{24} - \ln 36\right).$$

Par rotation autour de l'axe (Ox), l'unité sur (Oz) est la même que celle sur (Oy).

Or 1 u.v. = $1 \times 0,5 \times 0,5 = 0,25$ cm^3 ; donc le volume demandé, exprimé en cm^3, est :

$$\mathcal{V} = 0,25\pi\left(\frac{225}{24} - \ln 36\right).$$

Calculs d'intégrales

Dans les exercices **1** à **19**, calculer les intégrales.

1

C **a.** $\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

2

a. $\int_{-4}^{-2} (x^3 + x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_1^2 x^n\,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3

a. $\int_0^2 (x^5 + x^3)\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

4

a. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

5

C **a.** $\int_{-1}^{1} x(x^2 - 2)^3\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ (penser à linéariser).

6

a. $\int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 4)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_0^{\pi} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

7

a. $\int_0^1 (1 + \sin \pi t)\,\mathrm{d}t$. **b.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

8

C **a.** $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$. **b.** $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

9

a. $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_2^3 \left(x^3 - 1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

10

a. $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$.

b. $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}\,\mathrm{d}x$.

11

a. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t$. **b.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$.

12

C **a.** $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. **b.** $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

13

a. $\int_1^2 \left(x + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

b. $\int_1^2 \frac{x^2 - x + 3}{x}\,\mathrm{d}x$.

14

a. $\int_2^3 \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$.

15

a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x$.

16

a. $\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_1^3 \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

17

C **a.** $\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

18

a. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_{-3}^{0} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 5}\,\mathrm{d}x$.

19

a. $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{3x} + 2)^2\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

20

C Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre réel x de $]-3, +\infty[$:

$$\frac{2x-1}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}.$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2x-1}{x+3}\,dx$.

21

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre réel x de $]-2, +\infty[$:

$$\frac{x^2-2x-1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}.$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2-2x-1}{x+2}\,dx$.

22

Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre réel x de $]3, +\infty[$:

$$\frac{-3x-5}{(2x+1)(x-3)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-3}.$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{-3x-5}{(2x+1)(x-3)}\,dx$.

23

C **a.** Calculer la fonction dérivée de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

b. En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$, puis la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

24

a. Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = 2x + 2\ln(1-x)$.

b. En déduire une primitive sur $]-\infty, 1[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$.

c. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{0} \left(e^{x+1} - \frac{2x}{x-1}\right) dx.$$

25

C Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x+1)e^{2x}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ soit une primitive de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{0} (3x+1)e^{2x}\,dx,$$

puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

26

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-2x+3)e^{-x}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

$$\int_{0}^{1} (-2x+3)e^{-x}\,dx,$$

puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

27

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2(e^x+1)}.$$

a. Vérifier que, pour tout réel x :

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}.$$

b. En déduire une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$, puis la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

28 ***D'après un exercice de baccalauréat***

Soit la fonction f définie pour tout réel x de $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

a. Quelle est, pour $x > 0$, la dérivée g' de la fonction g définie par $g(x) = 1 + \ln x$?
Vérifier alors que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = g'(x)\,g(x).$$

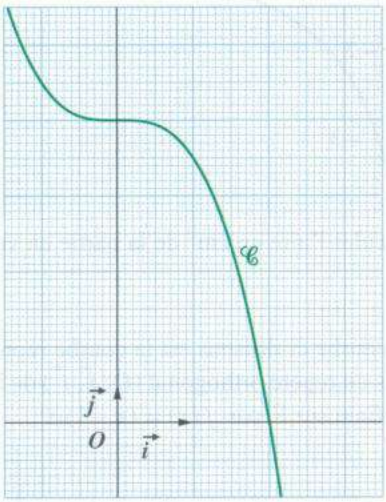
b. En déduire la valeur exacte de :

$$I = \int_{1}^{e} f(x)\,dx.$$

Calculs d'aires

29

C La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal, d'une fonction f. Cette fonction est décroissante sur $[-1, 2]$ et s'annule en $x = 2$.



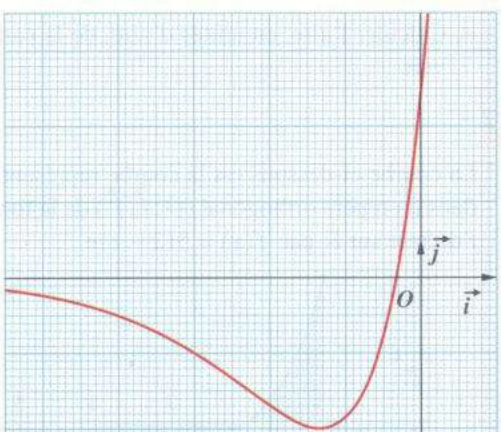
a. Interpréter graphiquement le nombre réel :

$$I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Comment calcule-t-on l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = -1$?

30

La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal, d'une fonction f. Cette fonction est négative sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$, nulle en $-\frac{1}{3}$ et positive sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.



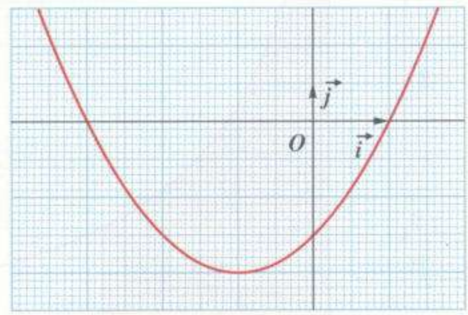
a. Interpréter graphiquement le nombre réel :

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Comment calcule-t-on l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -\frac{1}{3}$?

31

La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est décroissante sur $]-\infty, -1[$, croissante sur $]-1, +\infty[$ et s'annule pour $x = -3$ et $x = 1$.



a. Interpréter graphiquement le nombre réel :

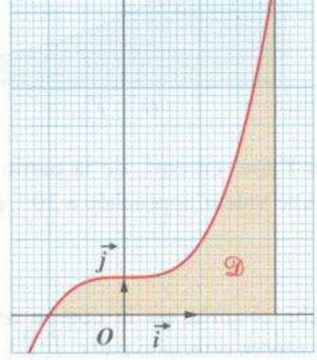
$$J = \int_{-3}^{1} [-f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

b. Comment calcule-t-on l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?

32

C La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$. La partie en jaune est l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que :

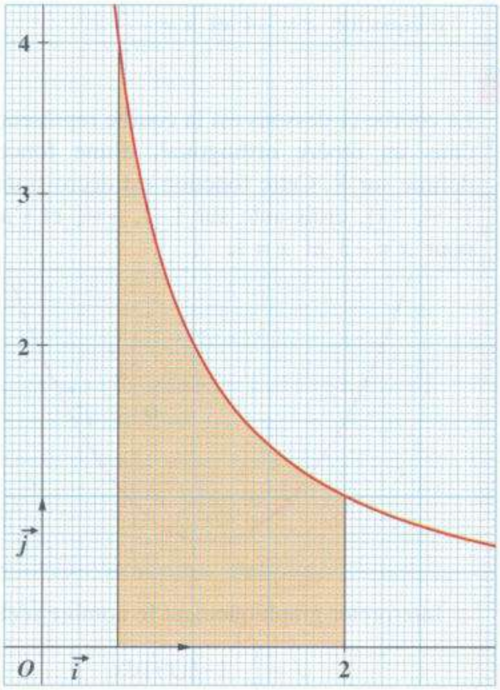
$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$



Calculer, en unités d'aire, l'aire de $\mathscr{D}$.

33

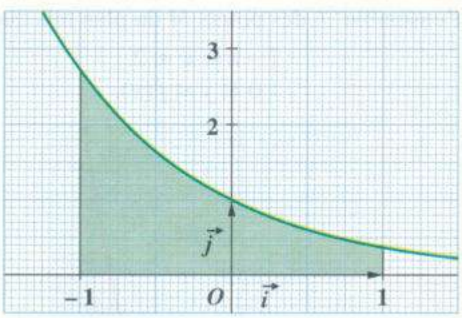
La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unité graphique 2 cm, de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x}$.



Calculer l'aire en cm^2 de la partie coloriée.

34

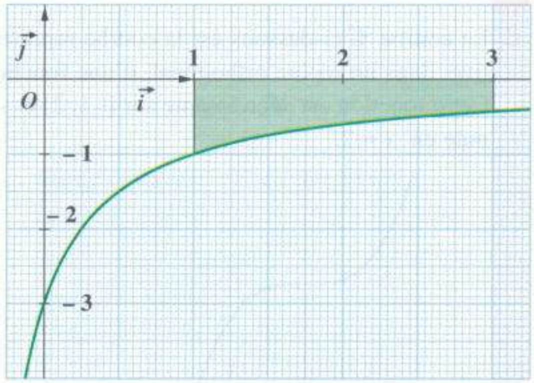
La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.



Calculer l'aire, en cm^2, de la partie en vert ; en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

35

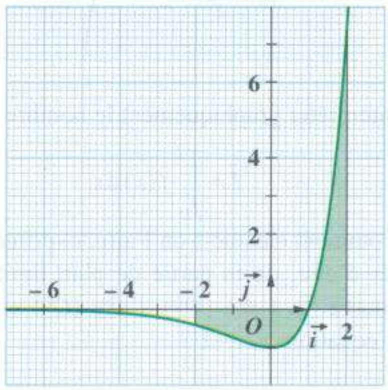
La courbe ci-après est la courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, de la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{-3}{1+2x}$.



Calculer l'aire en cm^2 de la partie en vert.

36

C La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x}$.



a. Établir le tableau de signe de f.

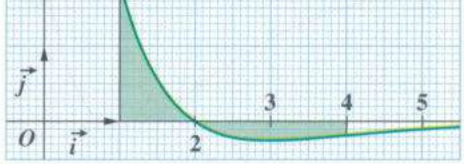
b. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a.**.

c. Vérifier qu'il existe deux nombres réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

d. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie en vert.

37

La courbe ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5(2-x)\mathrm{e}^{-x}$.



a. Établir le tableau de signe de f.

b. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a.**

c. Vérifier qu'il existe deux nombres réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie en vert.

38

a. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - 1.$$

Tracer la courbe représentative de f, à partir de la courbe représentative de $h : x \mapsto \ln x$, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

b. Résoudre $\ln x - 1 < 0$. En donner une interprétation graphique.

c. Montrer que $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de h sur $]0, +\infty[$. En déduire une primitive de f.

d. Calculer, en unités d'aire, puis en cm^2, l'aire de $\mathscr{D}$ qui est l'ensemble des points M du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation :

$$x = \frac{1}{2} \text{ et } x = e.$$

39

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 2{,}5}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unité 2 cm.

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

b. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.

2. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe (Ox).

3. Représenter $\mathscr{C}$. Hachurer la partie de plan $\mathscr{E}$ limitée par $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

4. Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire, exprimée en cm^2, de la partie de plan $\mathscr{E}$.

40

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} - 1$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) < 0$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe (Ox).

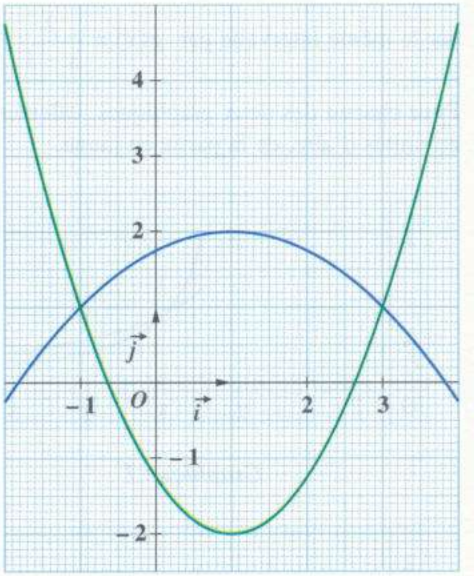
c. Construire la courbe $\mathscr{C}$. Hachurer, sur la représentation, la partie de plan $\mathscr{E}$ limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.

d. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, de la partie de plan $\mathscr{E}$.

41

C Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$. Sur le graphique ci-dessous, la courbe bleue est la courbe représentative d'une fonction f et la courbe verte est celle d'une fonction g, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. On admet que ces courbes se coupent aux points d'abscisses respectives -1 et 3. Interpréter graphiquement le nombre réel :

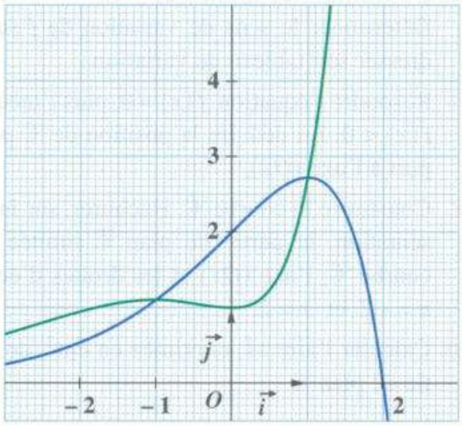
$$I = \int_{-1}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx.$$



42

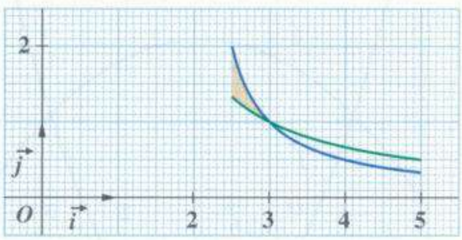
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$. Sur le graphique ci-après, la courbe bleue est la courbe représentative d'une fonction f et la courbe verte est celle d'une fonction g, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. On admet que ces courbes se coupent aux points d'abscisses respectives –1 et 1. Interpréter graphiquement le nombre réel :

$$I = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

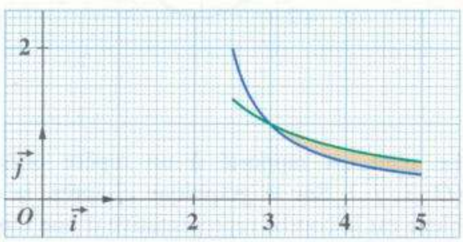


43 **C** Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. Sur chacun des graphiques ci-dessous, la courbe bleue est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[\frac{5}{2},\,5\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et la courbe verte est celle de la fonction g définie sur le même intervalle par $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Pour chacun des deux graphiques, calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie en jaune.



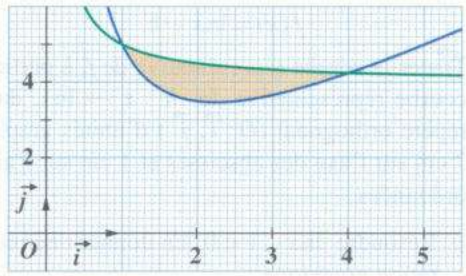
Graphique 1



Graphique 2

44 Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$. Sur le graphique ci-dessous, la courbe bleue est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{5}{x} - 1$ et la courbe verte est celle de la fonction g définie sur le même intervalle par $g(x) = 4 + \dfrac{1}{x}$.

Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par ces deux courbes (partie en jaune).



45 ***D'après un exercice du baccalauréat***

On considère la fonction f définie sur $[1, 9]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 9}{x}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + 10x - 9 = 0$.

2. a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1, 9]$, on a $f(x) = 10 - x - \dfrac{9}{x}$.

b. Calculer alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x$ (donner la valeur exacte).

c. Montrer que I peut s'écrire sous la forme $a + b\ln 3$, où a et b sont deux nombres réels qu'on précisera.

3. On a représenté sur chacun des graphiques (page suivante) les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1, 9]$ par :

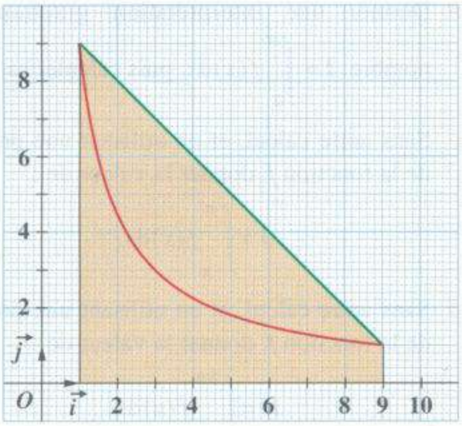
$$g(x) = 10 - x \text{ et } h(x) = \frac{9}{x}.$$

On a aussi coloré sur chacun des graphiques une partie de plan.

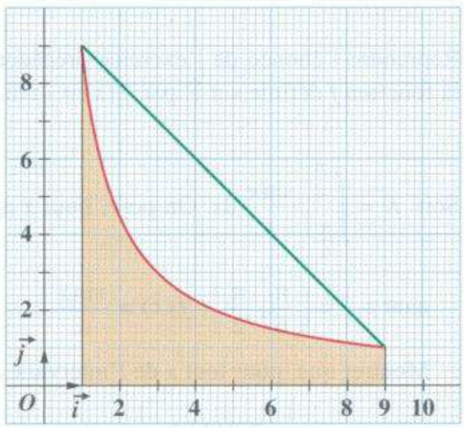
On pose $$I = \int_1^9 \left(10 - x - \frac{9}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$J = \int_1^9 (10 - x)\,\mathrm{d}x,$$

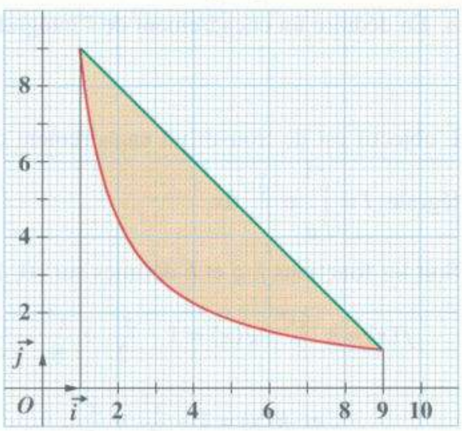
et $$K = \int_1^9 \frac{9}{x}\,\mathrm{d}x.$$



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Pour chacune des trois questions, indiquer la réponse exacte (il y a une seule réponse par ligne).

Q1 Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 1 ?

$\boxed{I}$ $\boxed{J}$ $\boxed{K}$

Q2 Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 2 ?

$\boxed{I}$ $\boxed{J}$ $\boxed{K}$

Q3 Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 3 ?

$\boxed{I}$ $\boxed{J}$ $\boxed{K}$

Propriétés de l'intégrale

46

C Soit la fonction f définie sur $[0, 3]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3(1 - e^{-x}) \text{ si } x \in [0, 1[\\ f(x) = -3e^{-x}(1 - e) \text{ si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

a. Vérifier que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1)$.

b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

d. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. Donner une interprétation graphique de ce nombre réel.

47

Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x+1} \text{ si } x \in [0, 1[\\ f(x) = 1 \dfrac{2}{x+3} \text{ si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

a. Vérifier que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1)$.

b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

d. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$. Donner une interprétation graphique de ce nombre réel.

48 ***D'après un exercice du baccalauréat***

Soit I et J les intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx.$$

1. Soit f et u les fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) \quad \text{et} \quad u(x) = e^{-x} \sin x.$$

a. Montrer que u est une primitive de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

2. a. Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

3. a. Déterminer une relation entre I, J et K.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

exercices

49

C Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^2$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Montrer que f est paire. En déduire une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

c. Donner une interprétation graphique des intégrales $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

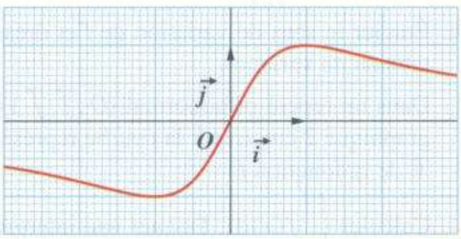
d. Calculer la valeur de I et en déduire (sans calcul) celle de J en justifiant.

e. Déduire de ce qui précède, sans calcul, la valeur de $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

50

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

La courbe ci-dessous est la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



a. Montrer que f est impaire. En déduire une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.

b. Donner une interprétation graphique des intégrales $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

c. Calculer J.

d. En justifiant votre réponse, en déduire, sans calcul, la valeur de I, puis de $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

51

C Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + 1.$$

a. À partir de la courbe représentative de la fonction cosinus, tracer, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 1 cm sur (Ox), 2 cm sur (Oy)), la courbe représentative de la fonction f sur $[-\pi, 3\pi]$.

b. Donner une interprétation graphique du nombre $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$, puis calculer sa valeur.

c. Sans autre calcul, et en utilisant une propriété de la fonction f, donner la valeur de :

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

d. Sans autre calcul, et en utilisant une propriété de la fonction f, donner la valeur de :

$$K = \int_{-\pi}^{3\pi} f(x)\,dx.$$

52

Reprendre l'énoncé de l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\sin x$.

53

Soit $K = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$. On pose, pour x appartenant à $I = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I,

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

b. En déduire un encadrement de l'intégrale K.

54

L'objectif est de trouver un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

Soit les fonctions f, g et h définies sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2},\ g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48}$$

$$\text{et } h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.$$

On admettra dans la suite que, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

a. Soit $J = \displaystyle\int_{0}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48}\right)dx$ et

$$K = \int_{0}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right)dx.$$

Déterminer la valeur exacte de J et K.

b. Démontrer que $J \leqslant I \leqslant K$.

c. En déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près par défaut.

Valeur moyenne

55

Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = e^{-x}$.

a. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

b. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0, 2]$.

c. Sur la représentation, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \mu$.

d. En utilisant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, hachurer sur la représentation et définir par une phrase deux parties de plan ayant la même aire.

56

Soit la fonction numérique f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin 2x$.

a. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, \pi]$.

c. Calculer la valeur moyenne de f^2 sur $[0, \pi]$. (On pensera à linéariser l'expression de $f^2(x)$.)

57 ***D'après un exercice du baccalauréat***

a. Calculer m_1, valeur moyenne sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \sin x$.

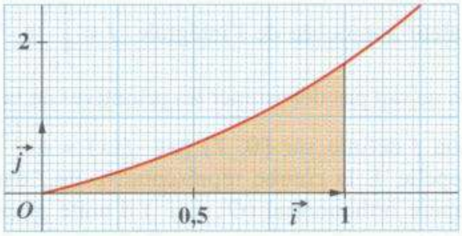
b. Calculer m_2, valeur moyenne sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos^2 x$.

c. Calculer m_3, valeur moyenne sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \cos^2 x \sin x$.

Calcul de volumes

58

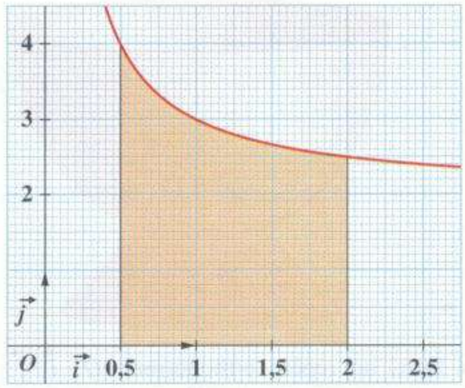
C Le plan est rapporté à un repère orthogonal. La courbe en rouge sur la représentation ci-dessous est la courbe d'équation $y = e^x - 1$.



Calculer le volume, en unités de volume, du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de plan représentée en jaune.

59

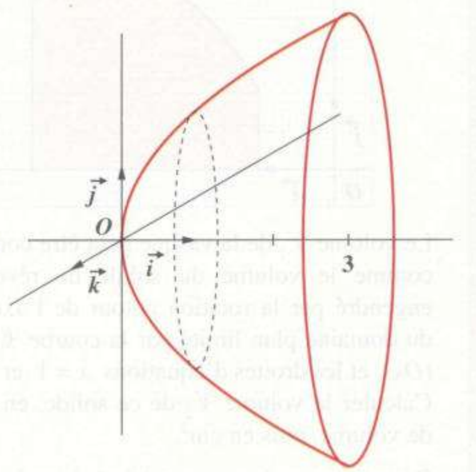
Le plan est rapporté à un repère orthogonal. La courbe en rouge sur la représentation ci-dessous est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x} + 2$.



Calculer le volume, en unités de volume, du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de plan représentée en jaune.

60

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 10 cm.



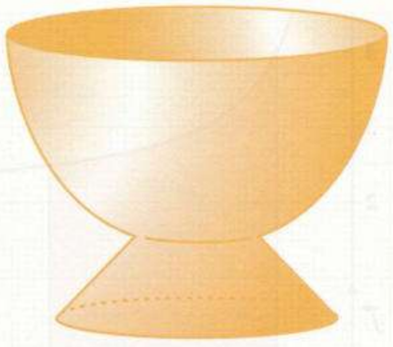
On a représenté ci-dessus l'optique d'un projecteur destiné à l'éclairage d'une scène de spectacle. L'espace dans lequel se situe l'ampoule a la forme d'un solide obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = \sqrt{3x}$. Déterminer le volume, en cm^3, disponible pour l'ampoule.

61

La poterie représentée ci-après est destinée à être remplie de terre pour servir de jardinière. Elle est constituée de deux parties : le pied et la vasque.

a. Le pied, de volume $\mathscr{V}_1$, est un tronc de cône dont le rayon de la grande base est $R = 20$ cm, le rayon de la petite base $r = 10$ cm et la hauteur $h = 10$ cm. Calculer $\mathcal{V}_1$ en cm³. (On rappelle la formule du volume d'un tronc de cône :

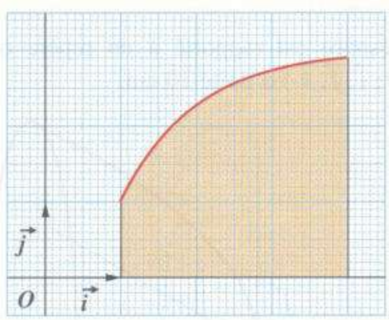
$$\mathcal{V} = \pi \frac{h}{3}(R^2 + rR + r^2).)$$



b. Dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\,)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[1, 4]$ par :

$$f(x) = -2\mathrm{e}^{-x+1} + 3$$

(une unité graphique représente 10 cm dans la réalité).



Le volume $\mathcal{V}_2$ de la vasque peut être considéré comme le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ de ce solide, en unités de volume, puis en cm³.

c. Donner une valeur approchée à 1 cm³ près du volume total $\mathcal{V}$ de terre nécessaire au remplissage de cette jardinière.

Calculs approchés d'intégrales

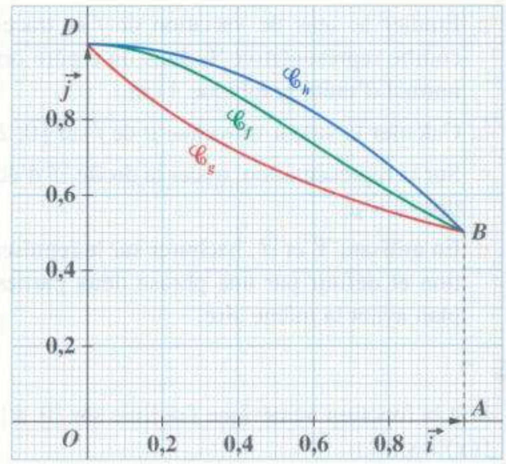
62 *D'après un exercice du baccalauréat*

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\; g(x) = \frac{1}{1+x} \;\text{ et }\; h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives des fonctions f, g et h.

Ces courbes ($\mathscr{C}_f$ en vert, $\mathscr{C}_g$ en rouge et $\mathscr{C}_h$ en bleu) sont données ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 5 cm.



1. Par lecture graphique, comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ pour x appartenant à $[0, 1]$.

2. a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$K = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Utiliser les résultats de la question **1.** pour trouver un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (on ne cherchera pas à calculer I).

4. a. Calculer l'approximation à 10^{-3} près par défaut de la moyenne arithmétique I_1 des deux intégrales J et K.

b. Calculer l'aire $\mathcal{T}$ du trapèze $OABD$ en u.a.

c. Sachant que la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4}$, quelle est, de I_1 et $\mathcal{T}$, la meilleure approximation de I ?

63

L'objectif de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$; on ne sait pas déterminer les primitives de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 5 cm.

1. a. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $-x$; en déduire le tableau de variation de f.

b. Tracer $\mathscr{C}$.

c. Que représente I par rapport au graphique ?

2. On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0, B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et L le point de coordonnées (1, 0). Placer ces points sur la représentation graphique. Calculer l'aire, en unités d'aire, du trapèze $OABL$.

3. Soit K le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point K.

a. Placer K et tracer $\mathscr{T}$ sur la représentation.

b. Déterminer une équation de $\mathscr{T}$.

c. Placer sur la représentation les points A' et B', points d'intersection de $\mathscr{T}$ respectivement avec les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer leurs coordonnées.

d. Calculer l'aire, en unités d'aire, du trapèze $OA'B'L$.

4. On admet que $\mathscr{C}$ est située entre la droite (AB) et la tangente $\mathscr{T}$.
Déduire des questions précédentes un encadrement de I d'amplitude 10^{-1}.

Pour aller plus loin...

64

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

b. En déduire la résolution de l'équation :

$$e^{2x} - e^{x} - 2 = 0,$$

puis de l'équation $e^{x} - 2e^{-x} - 1 = 0$.

c. Pour tout réel a, on pose :

$$I(a) = \int_0^a (e^x + 2e^{-x})\,dx.$$

Calculer $I(a)$ en fonction de a.

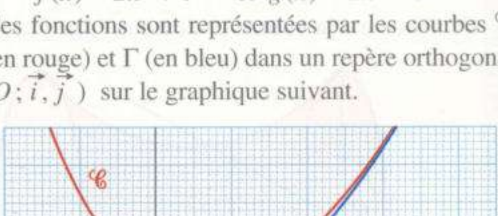
d. Montrer qu'il existe un unique réel a que l'on déterminera tel que $I(a) = 2$.

65 ***D'après un problème du baccalauréat***

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par :

$$f(x) = 2x^2 + e^{-2x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 - e^{-2x}.$$

Ces fonctions sont représentées par les courbes $\mathscr{C}$ (en rouge) et Γ (en bleu) dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sur le graphique suivant.



1. a. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

b. Associer alors à chaque fonction sa courbe représentative.

c. Justifier par le calcul que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe Γ.

2. a. Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Donner une interprétation graphique du résultat.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$f(x) - g(x) \leqslant \frac{1}{10}.$$

Donner une interprétation graphique du résultat.

3. a. Pour tout λ réel strictement positif, on pose :

$$I(\lambda) = \int_0^{\lambda} [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Montrer que $I(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda}$.

b. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

66 ***D'après un exercice du baccalauréat***

Un musée souhaite orner ses publications d'un motif en filigrane.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm. L'axe des ordonnées sera centré sur la feuille.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 1] par $f(x) = 2e^x - 4x$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

3. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente $\mathscr{T}$ en A.

4. Calculer l'intégrale $I_f = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(x) = \ln(x + 1)$.

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variation.

2. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ que précédemment.

3. Soit G la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

a. Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. Calculer l'intégrale $I_g = \int_0^1 g(x)\,dx$.

Partie C

Constitution du motif

On nomme P le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 et Q le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1.

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme les courbes respectivement en $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ (les points P et Q ayant pour images respectives P' et Q').

Tracer les courbes $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que les segments $[PQ]$ et $[P'Q']$.

Le domaine, limité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}'_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que par les segments $[PQ]$ et $[P'Q']$, constitue le motif que cherche à reproduire le musée.

Expliquer comment on peut calculer l'aire de ce motif et calculer cette aire en cm^2 (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

67 *D'après un exercice du baccalauréat*

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = e^x - 1$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unité graphique 10 cm.

1. Représenter la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b. En déduire que la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0, 1]$ est égale à $e - 2$.

Donner l'arrondi au centième de μ.

On désigne par $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$, et par $\mathcal{R}$ la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = \mu$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

3. a. Représenter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ en utilisant des hachures.

b. Justifier le fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ ont la même aire.

4. On désigne par $\mathcal{V}_1$ le volume, exprimé en unités de volume, du solide engendré par la rotation de $\mathcal{P}$ autour de l'axe des abscisses et par $\mathcal{V}_2$ celui du solide engendré par la rotation de la partie $\mathcal{R}$ autour du même axe.

On rappelle que $\mathcal{V}_1 = \pi \int_0^1 [f(x)]^2\,dx$.

On se propose de comparer $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.

a. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{V}_1$.

b. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{V}_2$.

c. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$, puis donner un arrondi au millième. Conclure.

68 *D'après un exercice du baccalauréat*

Partie A

Détermination d'une fonction f nécessaire à la conception d'une bobine

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 4]$, par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ d'unité graphique 1 cm.

On impose les conditions suivantes :

- $f(0) = 2$;
- $f(2) = 1$;
- la courbe $\mathcal{C}$ admet en son point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer a, b et c pour que les trois conditions précédentes soient remplies et en déduire que, pour tout x de l'intervalle $[0, 4]$:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2.$$

2. Montrer que la fonction f admet sur $[0, 4]$ un minimum que l'on précisera.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$.

Partie B

Conception et étude des caractéristiques de la bobine

Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$. La rotation de la partie Δ autour de l'axe des abscisses engendre un solide $\mathcal{B}$.

Ce solide est la bobine ci-dessous (*fig. 1*).

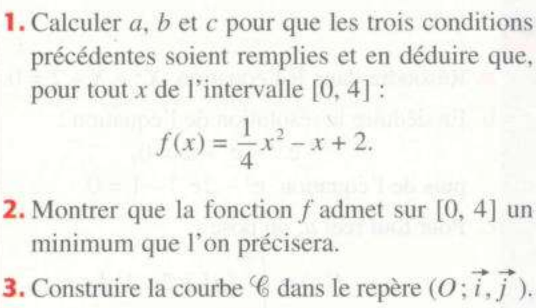


Figure 1 : bobine sans fil

1. a. Hachurer la partie Δ sur le graphique.

b. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

c. En déduire la valeur exacte en cm^3 du volume $\mathcal{V}_1$ de la bobine sans fil. On rappelle que :

$$\mathcal{V}_1 = \pi\int_0^4 [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

2. Lorsque le fil est placé sur la bobine, l'ensemble « bobine avec fil » est assimilé à un cylindre (*fig. 2*).

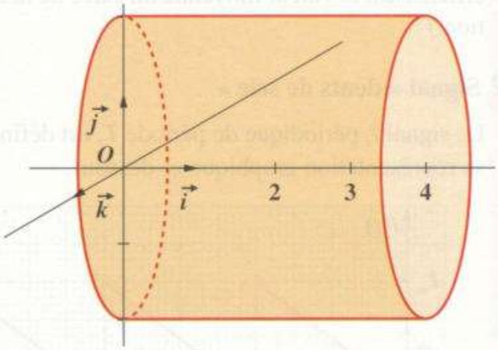


Figure 2 : bobine avec fil

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume $\mathcal{V}_2$ de ce cylindre.

b. En déduire la valeur exacte, en cm^3, du volume $\mathcal{V}$ occupé par le fil sur la bobine.

c. Le fabricant affirme que la bobine ainsi constituée contient 200 m de fil cylindrique de diamètre 0,4 mm.

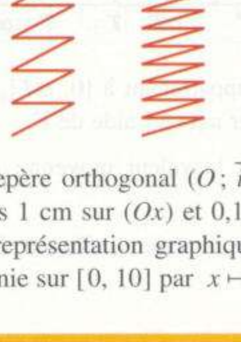
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

69 Travail d'un ressort

On considère un ressort de rigidité :

$$k = 20\ \mathrm{N \cdot mm^{-1}}.$$

Si x est la variation de longueur du ressort (en millimètres) et F l'effort nécessaire à cette variation (en newtons), on a $F = kx$.



a. Dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm sur (Ox) et 0,1 cm sur (Oy), tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0, 10]$ par $x \mapsto F$.

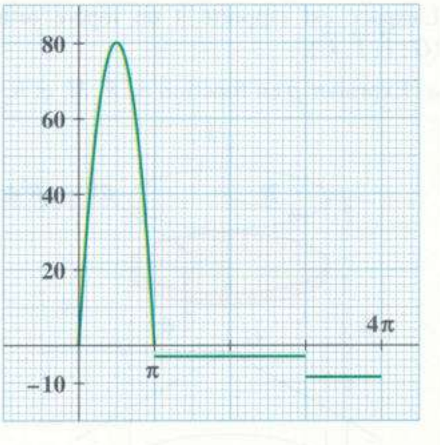
b. Le travail nécessaire à la compression du ressort d'une longueur ℓ est $W(\ell) = \displaystyle\int_0^{\ell} f(x)\mathrm{d}x$.

• Donner une interprétation graphique de $W(\ell)$ à partir de la représentation du **a.**.

• Calculer, par deux méthodes différentes (un calcul intégral et un calcul d'aire d'un triangle), le travail nécessaire pour $\ell = 10$.

70 Moteur à explosion

Le diagramme ci-dessous est la représentation modélisée de la variation du moment du couple obtenu sur l'arbre de sortie d'un moteur à explosion (moteur thermique monocylindre à 4 temps) en fonction de son angle de rotation θ. On appelle f la fonction définie sur $[0, 4\pi[$ qui, à θ, fait correspondre le moment du couple (le diagramme ci-dessous est donc la représentation graphique de f).



• $0 \leqslant \theta < \pi$: après l'explosion, le moment du couple est positif et admet une variation « parabolique » : l'expression de f est donc de la forme : $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$.

• $\pi \leqslant \theta < 2\pi$: pendant la phase refoulement et échappement des gaz brûlés, le moment du couple est supposé constant et égal à $-3\ \mathrm{N \cdot m}$.

• $2\pi \leqslant \theta < 3\pi$: pendant la phase aspiration de l'air et constitution du mélange air-carburant, le moment du couple est supposé constant et égal à $-3\ \mathrm{N \cdot m}$.

• $3\pi \leqslant \theta < 4\pi$: pendant la phase compression du mélange, le moment du couple est supposé constant et égal à $-10\ \mathrm{N \cdot m}$.

a. Sachant que le couple est nul pour $\theta = 0$ et que, pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, il admet un maximum de 80 N·m, montrer que, pour $0 \leqslant \theta < \pi$, on a :

$$f(\theta) = -\frac{320}{\pi^2}\theta^2 + \frac{320}{\pi}\theta.$$

b. Calculer le travail pendant la phase motrice :

$$W_1 = \int_0^{\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

c. Calculer le travail pendant la phase résistante :

$$W_2 = \int_{\pi}^{4\pi} (-f(\theta))\mathrm{d}\theta$$

(on pourra utiliser soit le calcul intégral, soit un calcul d'aires de rectangles).

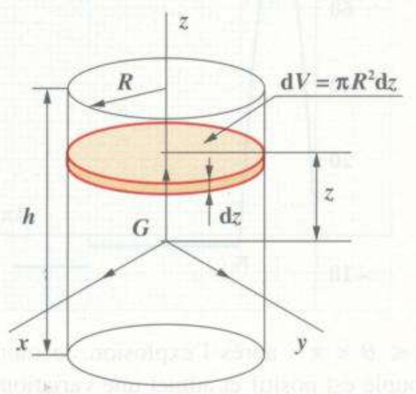
d. Soit W le travail au cours du cycle complet : $W = W_1 + W_2$. Le moment du couple récepteur C_r est tel que $C_r = \dfrac{W}{4\pi}$. Calculer C_r. À quoi correspond ce moment pour la fonction f ?

71 Moment d'inertie d'un cylindre

On considère un cylindre homogène de hauteur h, de rayon R, de masse M et de masse volumique ρ. Soit G son centre (centre géométrique et centre d'inertie).

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(G ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

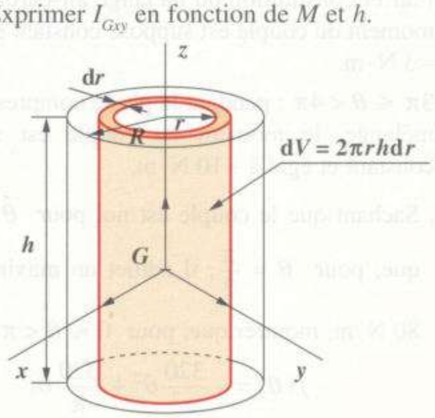
a. Exprimer ρ en fonction de R, M, et h.



b. Le moment d'inertie de ce cylindre par rapport au plan (Gxy) est : $I_{Gxy} = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \rho \pi R^2 \,\mathrm{d}z.$

(z est la cote par rapport au plan (Gxy) d'un cylindre élémentaire de rayon R).

Exprimer I_{Gxy} en fonction de M et h.



c. Le moment d'inertie de ce cylindre par rapport à l'axe (Gz) est $I_{Gz} = \displaystyle\int_0^R r^2 \rho \, 2\pi r h \,\mathrm{d}r$

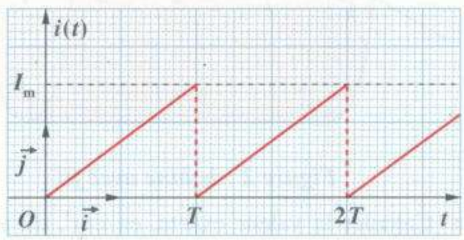
(r est la distance à l'axe (Gz) d'un cylindre élémentaire de hauteur h).

Exprimer I_{Gz} en fonction de M et R.

Dans les exercices **72** à **75**, on définit la valeur efficace F d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ par $F^2 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$. (Le carré de la valeur efficace est la valeur moyenne du carré de la fonction.)

72 Signal « dents de scie »

Le signal i, périodique de période T, est défini par sa représentation graphique ci-dessous.



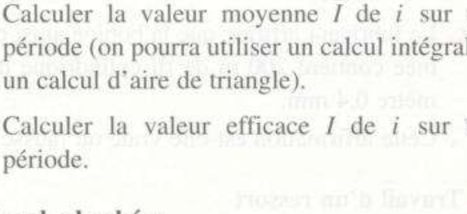
a. Pour t appartenant à $[0, T]$, exprimer $i(t)$ à l'aide des constantes I_m et T.

b. Calculer la valeur moyenne $\overline{I}$ de i sur une période (on pourra utiliser un calcul intégral ou un calcul d'aire de triangle).

c. Calculer la valeur efficace I de i sur une période.

73 Signal « haché »

Le signal u, périodique de période T, est défini par sa représentation graphique ci-dessous (α est un nombre réel compris entre 0 et 1).



a. Pour t appartenant à $[0, \alpha T[$, puis à $[\alpha T, T[$, exprimer $u(t)$ à l'aide de E.

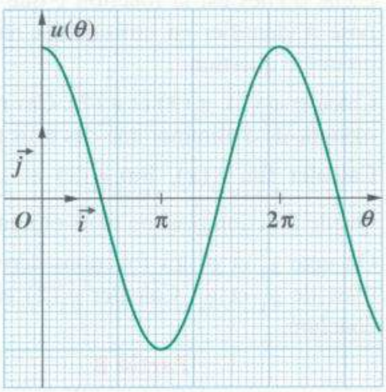
b. Calculer la valeur moyenne $\overline{U}$ de u sur une période.

c. Calculer la valeur efficace U de u sur une période.

74 Signaux sinusoïdaux

Pour les signaux suivants, $\widehat{I}$ et $\widehat{U}$ sont les valeurs maximales (constantes), φ une éventuelle phase à l'origine (constante). La variable est l'angle θ (en radians, $\theta = \omega t$, où ω est la pulsation). Les résultats seront exprimés en fonction des constantes précédentes.

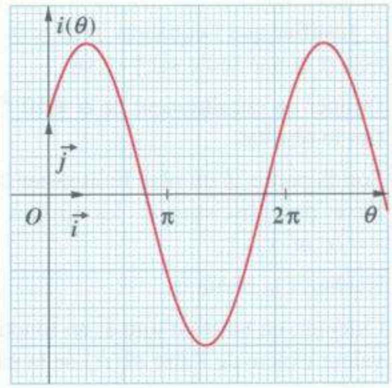
a. Signal cosinus : $u(\theta) = \widehat{U}\cos\theta$.



Quelle est la période de u ?

Calculer sur une période sa valeur moyenne $\overline{U}$ et sa valeur efficace U.

b. Signal sinus déphasé : $i(\theta) = \widehat{I}\sin(\theta + \varphi)$.



Quelle est la période de i ?

Calculer sur une période sa valeur moyenne $\overline{I}$ et sa valeur efficace I.

75 Un signal redressé

Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice précédent. u est de période 2π et :

$$\begin{cases} \text{si} \quad \theta \in [0, \pi] \quad u(\theta) = \widehat{U}\sin\theta \\ \text{si} \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \quad u(\theta) = 0. \end{cases}$$

(Il s'agit d'un signal redressé monoalternance.)

a. Donner l'allure de la courbe représentative de u.

b. Calculer sur une période sa valeur moyenne $\overline{U}$ et sa valeur efficace U.

Pour préparer le Bac

A ***Exercice de bac STI GM 2000***

Le but de l'exercice est de calculer les valeurs des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)\cos 2x \, dx$$

et $$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)\cos 2x \, dx.$$

1. Montrer que $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$

et $I - J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x)\, dx.$

2. a. Calculer la valeur de $I + J$.

b. Justifier l'égalité $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$, puis :

• déterminer une fonction primitive de la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, par :

$$f(x) = \cos^2 2x\,;$$

• calculer la valeur de $I - J$.

3. En utilisant les résultats obtenus à la question **2.**, calculer les valeurs des intégrales I et J.

B ***Problème de bac STI Génie des matériaux, Génie mécanique 2003***

Soit la fonction f définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = e^{2x} + x$.

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en $-\infty$

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Étudier les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}$.

2. Étude du comportement en $+\infty$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Étude des variations de f

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. Établir le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Vérifier que le point $A(1, e^2 + 1)$ appartient à $\mathscr{T}$.

5. Dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, tracer Δ, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

6. a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule sur $[-1, 0]$.

b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

7. Soit la partie $\mathcal{D}$ du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 1$.

a. Hachurer la partie $\mathcal{D}$.

b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie $\mathcal{D}$.

c. Vérifier, en utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, que :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2 + \alpha + 1).$$

d. Déterminer, au mm² près, une valeur approchée de $\mathcal{A}(\alpha)$ en prenant $-0{,}43$ comme valeur approchée de α.

C ***Problème du bac STI Génie optique, Génie électronique, Génie électrotechnique, session 2003***

Partie A

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ ainsi que deux droites $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(0, -3)$. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 1$.

1. a. Déterminer graphiquement $g(2)$.

b. Sachant que la droite $\mathcal{C}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.

c. On admet que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$,

$$g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x} \text{ et } g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$. Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$.

Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

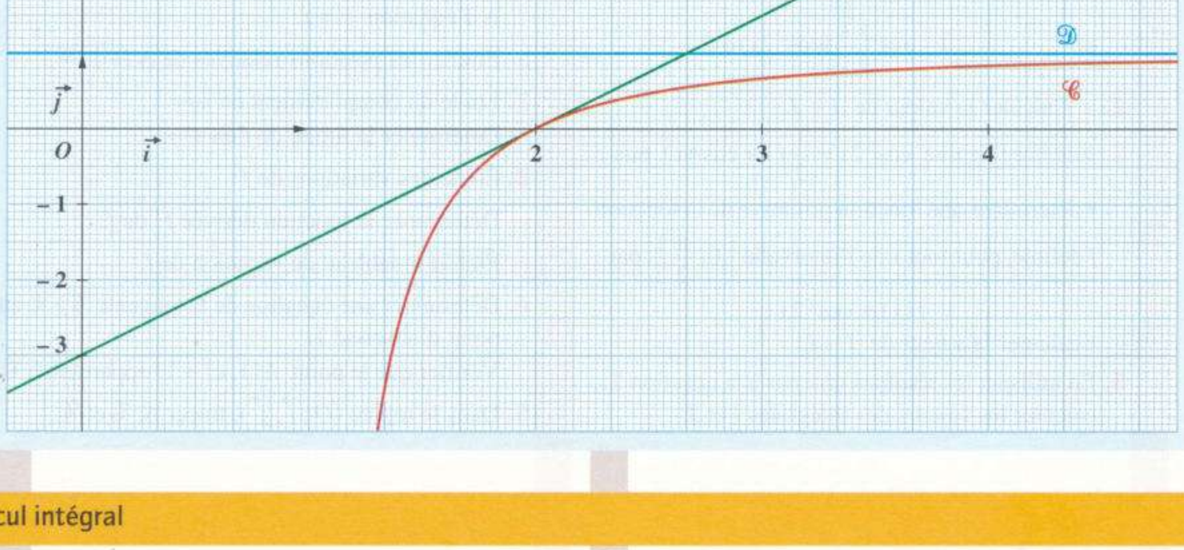
1. a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$:

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) ?$$

b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.



c. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]1, +\infty[$,

$$\frac{x}{x-1} > 1.$$

Quel est alors le signe de $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1, +\infty[$?

d. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

3. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$, où g est la fonction trouvée dans la partie **A**.

b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la partie **A**, dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie C

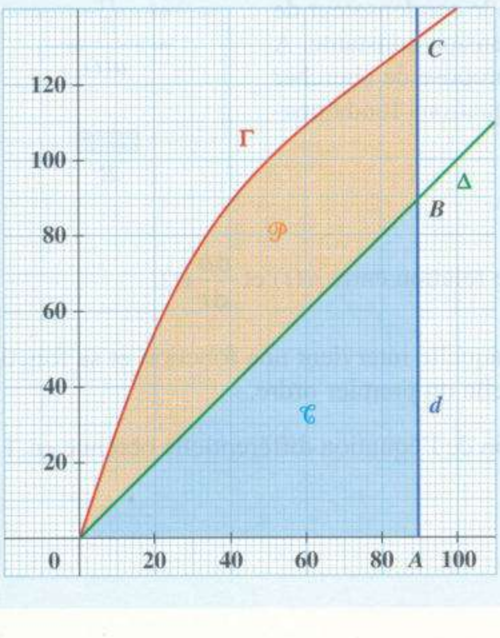
1. Montrer que, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction H définie par $H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$ est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. a. Dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\ )$, représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et hachurer la partie du plan comprise entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

b. On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} par excès.

D *Problème du bac STI Génie électronique, Génie électrotechnique, session 1999*

La figure ci-dessous représente la voile d'un bateau constituée par la réunion des parties $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$. Les distances sont exprimées en dm et le repère est orthonormal.



La courbe Γ représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + \dfrac{5\,000x}{x^2 + 2\,500}$.

La droite Δ a pour équation $y = x$. Le nombre a appartient à l'intervalle $[50, 100]$.

• $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $x \leqslant y \leqslant g(x)$.

• $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant x$.

La droite d d'équation $x = a$ coupe l'axe des abscisses, la droite Δ et la courbe Γ respectivement aux points A, B et C. Le but du problème est de déterminer, si elle existe, la valeur de a pour laquelle les aires de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{C}$ sont égales.

Partie A

Soit la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - x.$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

2. En utilisant le signe de $h(x)$, étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite Δ.

Partie B

On rappelle que la fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{5\,000x}{x^2 + 2\,500}.$$

1. Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie $\mathscr{P}$ est :

$$\mathscr{A}(a) = 2\,500[\ln(a^2 + 2\,500) - \ln 2\,500].$$

3. Calculer, en fonction de a, l'aire $\mathscr{B}(a)$ de la partie $\mathscr{C}$.

Partie C

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\,500\ln(x^2 + 2\,500) - 2\,500\ln 2\,500 - \frac{1}{2}x^2.$$

1. a. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (On admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$.)

c. Dans le repère orthogonal $(O;\vec{i}, \vec{j}\ )$ (unités graphiques : 1 cm pour 10 dm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 dm^2 sur l'axe des ordonnées), construire la représentation graphique de la fonction f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[50, 100]$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, notée α. Déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-1} contenant le réel α.

b. Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre α ?

c. Déterminer alors une valeur décimale approchée de l'aire de chacune des parties $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ en prenant 79,3 comme valeur décimale approchée de α.

CHAPITRE 7

Équations différentielles

OBJECTIFS

- Savoir ce qu'est une équation différentielle et ce que signifie être solution d'une équation différentielle donnée.
- Connaître la forme de la solution générale de deux types d'équations différentielles.
- Savoir déterminer, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, une solution particulière vérifiant des conditions initiales données **(TP)**.

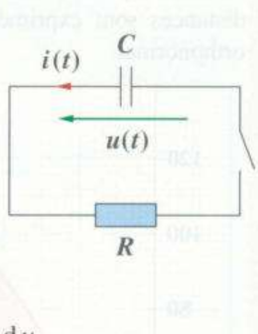
> Ce chapitre ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

ACTIVITÉ 1 Exemples de situations menant à des équations différentielles

Objectifs : À travers deux exemples concrets, introduire la notion d'équation différentielle et l'étude de deux types d'équations différentielles.

A. En électricité

On considère le circuit ci-contre. On suppose que le condensateur de capacité C a été préalablement chargé sous une tension constante. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on se propose de chercher l'évolution de la tension $u(t)$. On rappelle les équations fondamentales de l'électricité dans ce type de circuit :



$$u(t) = Ri(t) \text{ et } i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t).$$

1. À partir des deux égalités précédentes, écrire une relation entre $u(t)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$.

Une telle relation, c'est-à-dire une égalité dans laquelle intervient une fonction et sa fonction dérivée première, est appelée équation différentielle du premier ordre.

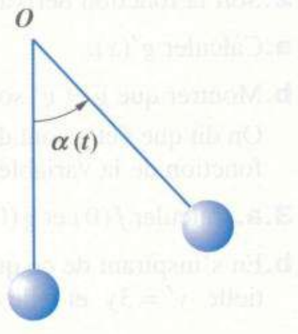
2. Chacune des fonctions suivantes u est-elle solution de l'équation différentielle obtenue en **1.** ?

a. $u(t) = \cos\left(\frac{1}{RC}t\right)$.

b. $u(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$.

B. En mécanique

Un solide de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur l fixé en un point O. On l'écarte de sa position d'équilibre et on le lâche : le solide se met à osciller autour de sa position d'équilibre. On note $\alpha(t)$ l'angle formé par le fil à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre.



1.a. On admet que l'expression de l'énergie cinétique du solide est :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} ml^2\alpha'^2(t).$$

Déterminer la fonction dérivée de E_c en fonction de m, l, α' et α''.

b. L'énergie potentielle du solide est :

$$E_p(t) = mgl[1 - \cos\alpha(t)],$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Déterminer la fonction dérivée de E_p en fonction de m, g, l, α et α'.

c. On rappelle que l'énergie mécanique E_m, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, est constante.

• Que vaut la fonction dérivée de E_m ?

• Déduire de ce qui précède que l'angle $\alpha(t)$ vérifie $\alpha''(t) + \frac{g}{l}\sin\alpha(t) = 0$.

d. On considère que $\alpha(t)$ est petit et que l'on peut faire l'approximation suivante : $\sin\alpha(t) \approx \alpha(t)$.
En déduire que l'égalité obtenue en **c.** s'écrit sous la forme $\alpha''(t) + \omega^2\alpha(t) = 0$, où ω est un réel que l'on précisera en fonction de g et l.
Une telle relation, c'est-à-dire une égalité dans laquelle intervient une fonction et sa fonction dérivée seconde, est appelée équation différentielle du deuxième ordre.

2. Chacune des fonctions suivantes α est-elle solution de l'équation différentielle obtenue en **1.d.** ?

a. $\alpha(t) = \cos\omega t$.

b. $\alpha(t) = e^{\omega t}$.

Dans ce chapitre, on apprend à déterminer toutes les fonctions f vérifiant une égalité du type $f' = af$ (où a est une constante réelle) ou $f'' + \omega^2 f = 0$ (où ω est une constante réelle). On cherchera ensuite, parmi ces solutions, celle qui vérifie les conditions fixées par l'expérience (état connu du système étudié à un instant donné, par exemple à l'instant $t = 0$).

ACTIVITÉ 2 « Qui se ressemble s'assemble »

Objectif : Présenter des solutions particulières d'équations différentielles étudiées dans le chapitre.

A. Avec la fonction dérivée

1. Soit la fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. En déduire une relation entre f et f'.

2. Soit la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5\,\mathrm{e}^{3x}$.

a. Calculer $g'(x)$.

b. Montrer que g et g' sont liées par la même relation que celle liant f et f' établie au **1.**.
On dit que f et g sont des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$, où l'inconnue y est une fonction de la variable x dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.a. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

b. En s'inspirant de ce qui précède, préciser alors une fonction h qui vérifie l'équation différentielle $y' = 3y$ et telle que $h(0) = 2$.

B. Avec la fonction dérivée seconde

1. Soit la fonction deux fois dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$.

a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b. En déduire une relation entre f et f''.

2. Soit la fonction deux fois dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\sin 2x$.

a. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Montrer que g et g'' sont liées par la même relation que celle liant f et f'' établie au **1.**.
On dit que f et g sont des solutions de l'équation différentielle $y'' = -4y$, où l'inconnue y est une fonction de la variable x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Soit la fonction $h = f + g$. Montrer que h vérifie également l'équation différentielle précédente.

Dans ce chapitre, on apprend à trouver toutes les solutions d'une équation différentielle du type de celles écrites dans cette activité. On s'intéresse ensuite à déterminer une solution particulière en fixant des conditions, comme au **A. 3.**).

1 Généralités

Dans l'activité 1, on a étudié des situations dans lesquelles une fonction que l'on cherche à déterminer n'est connue que par le fait qu'elle vérifie une certaine relation où interviennent également ses fonctions dérivées (première ou deuxième dans les exemples proposés).

Définition Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation dans laquelle l'**inconnue est une fonction**, et dans laquelle apparaît la dérivée n-ième de cette fonction et éventuellement la fonction elle-même et ses fonctions dérivées d'ordre inférieur à n.

Si une fonction vérifie une équation différentielle, la fonction est dite **solution** de l'équation différentielle.

Exemple : On considère les équations établies dans l'activité 2 :

- $y' = 3y$ est une équation différentielle du premier ordre ;
- $y'' = -4y$ est une équation différentielle du second ordre.

Comme on l'a vu dans l'activité 2, la fonction $g : x \mapsto -5\mathrm{e}^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$. En effet, $g'(x) = -5 \times 3\mathrm{e}^{3x} = 3g(x)$.

Remarque : On s'autorise, dans l'écriture d'une équation différentielle, à noter l'inconnue et ses dérivées successives sous forme de fonctions, c'est-à-dire y, y', … Quand l'équation nécessite d'écrire la variable, cette écriture, bien qu'incorrecte, constitue un « abus » autorisé et usuel. Par exemple, si l'on cherche toutes les fonctions dont la fonction dérivée est la fonction $x \mapsto \cos x$, on devrait écrire : pour tout x de $\mathbb{R}$, $y'(x) = \cos x$. On écrira : $y' = \cos x$.

▸Exercices n° 1 à 9

Définition **Résoudre** une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' = \cos x$, où y est une fonction inconnue de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que les fonctions qui vérifient cette égalité sont les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \cos x$.

On peut donc donner la forme de toutes les fonctions solutions de cette équation : $y(x) = \sin x + c$, où c est une constante réelle quelconque.

On dit alors que « la solution générale de cette équation est $y(x) = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$. »

Remarques :

- Par le calcul des primitives, on sait résoudre les équations du type $y' = a(x)$ et $y'' = a(x)$, à condition de savoir déterminer les primitives de la fonction a, pour la première équation, et les primitives des primitives de a pour la seconde.
- Lorsque toutes les solutions d'une équation différentielle ont la même forme, et que l'on peut déterminer cette forme, on dit que l'on écrit la **solution générale** de l'équation différentielle.

▸Exercices n° 10 et 11

2 Équations du type $y' = ay$, où a est un nombre réel quelconque

1 Résolution

Ce sont les équations dont on a vu des exemples dans l'activité 1 (**A.1.**) et dans l'activité 2, première question.

Dans cette deuxième activité, on a vu que plusieurs fonctions du type $x \mapsto Ce^{3x}$ étaient solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$.

De même, on vérifie facilement que toute fonction du type $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque, est solution de l'équation $y' = ay$.

Pour montrer que ces fonctions sont les seules solutions de cette équation, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax}$; on multiplie les deux membres de l'équation $y' = ay$ par la fonction f (fonction ne prenant que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$).

On a alors $fy' = fay$, soit $fy' - afy = 0$.

Or, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = -a\,e^{-ax}$; donc l'équation s'écrit $fy' + f'y = 0$.

On sait que $(fy)' = fy' + f'y$, donc on a $(fy)' = 0$.

La fonction fy ayant pour dérivée la fonction nulle, il s'agit d'une fonction constante.

On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)\,y(x) = C$, où C est une constante réelle.

D'où les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(x) = \dfrac{C}{f(x)} = \dfrac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

Théorème Soit l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel quelconque et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions dont l'expression est de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

On dit alors que la solution générale de l'équation $y' = ay$ est $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Exemple : Soit l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

L'équation proposée est une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit $y' = -\dfrac{2}{3}y$.

D'après le théorème précédent, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x}$, où C appartient à $\mathbb{R}$.

▸Exercices n° 12 à 15

2 Solution vérifiant une condition initiale donnée

La question s'est posée dans les activités préparatoires : parmi les fonctions solutions d'une équation différentielle donnée, en existe-t-il une, ou plusieurs, qui vérifient une condition donnée (par exemple imposée, comme dans l'activité 1, par l'état connu du système étudié à l'instant $t = 0$, ou comme dans l'activité 2 **A.** par la valeur donnée à la fonction h en 0) ?

On considère l'équation $y' = ay$. Toutes ses solutions sont des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$. On cherche une fonction f, solution de cette équation et telle que $f(\alpha) = \beta$. On a $f(x) = Ce^{ax}$, donc $f(\alpha) = \beta = Ce^{a\alpha}$. De cette dernière égalité, on détermine C : $C = \beta e^{-a\alpha}$. Il existe donc bien une et une seule solution de l'équation qui vérifie la condition imposée.

Théorème L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution vérifiant la condition $y(\alpha) = \beta$, où α et β sont deux réels donnés.

Exemple : On cherche la solution de l'équation $2 \cdot 10^{-3}\dfrac{du}{dt} + u = 0$ qui vérifie $u(0) = 10$.

L'équation proposée est du premier ordre et s'écrit $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{2 \cdot 10^{-3}}u$, ou encore $\dfrac{du}{dt} = -500u$.

Sa solution générale (ou la forme générale de ses solutions) est $u(t) = Ce^{-500t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

La solution cherchée vérifie $u(0) = 10$. On a donc $u(0) = Ce^{-500 \times 0} = C = 10$ et la solution particulière cherchée est la fonction définie par $u(t) = 10e^{-500t}$.

▸Exercices n° 16 à 18

3 Équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel quelconque

1 Solution générale

On a établi de telles équations dans l'activité 1 (partie **B.**) et observé sur un exemple la forme de quelques solutions dans la deuxième partie de l'activité 2. On admet le résultat suivant :

Théorème Soit l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel quelconque, et où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.
On dit alors que la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

Exemple : Soit l'équation différentielle $16y'' = -y$, où y est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Cette équation est une équation différentielle du second ordre qui peut s'écrire $y'' + \dfrac{1}{16}y = 0$.

D'après le théorème précédent, ses solutions sont les fonctions de la forme :
$y(t) = C_1 \cos \dfrac{1}{4}t + C_2 \sin \dfrac{1}{4}t$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

▸Exercices n° 19 à 22

2 Solution vérifiant des conditions initiales

La solution générale d'une équation du type $y'' + \omega^2 y = 0$ dépend de deux constantes. Pour déterminer une solution particulière, il faut donc imposer deux conditions. On admet le résultat suivant :

Théorème L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution vérifiant les conditions $y(a) = b$ et $y'(a) = c$, où a, b et c sont trois réels donnés.

COURS

Remarque : Dans les problèmes liés à une expérience physique (comme dans l'activité 1) les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant 0 (position et vitesse à l'instant 0 par exemple).

Exemple : Soit l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. On cherche la solution f de cette équation vérifiant les conditions $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$.

La solution générale de cette équation s'écrit $y(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

La fonction f cherchée, étant solution de l'équation, s'écrit $f(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$, et sa dérivée est $f'(t) = -2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t$.

La condition $f(0) = \sqrt{3}$ se traduit par $f(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = \sqrt{3}$. On en déduit que $C_1 = \sqrt{3}$.

La condition $f'(0) = 2$ se traduit par $f'(0) = -2C_1\sin 0 + 2C_2\cos 0 = 2$. On en déduit que $C_2 = 1$.

La solution cherchée est donc $f(t) = \sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t$.

▸Exercices n° 23 à 25

3 Autre écriture des solutions

Pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$, on est amené à l'écrire en n'utilisant que des fonctions cosinus ou que des fonctions sinus. La méthode utilisée est la suivante :

■ Calcul général

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

a et b étant deux constantes non nulles.

On factorise a :

$$f(x) = a\left(\cos\omega x + \frac{b}{a}\sin\omega x\right).$$

Il existe un unique réel φ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\frac{b}{a} = \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

On a alors :

$f(x) = a\left(\cos\omega x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\omega x\right)$, et, en factorisant $\frac{1}{\cos\varphi}$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{\cos\varphi}\left(\cos\varphi\cos\omega x + \sin\varphi\sin\omega x\right).$$

On a vu en Première que, pour tout réel x et y, on a : $\cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x - y)$.

On peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(\omega x - \varphi).$$

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$.

$$f(x) = \sqrt{3}\left(\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x\right).$$

Or $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

On a donc :

$$f(x) = \sqrt{3}\left(\cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\sin 2x\right),$$

soit :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right).$$

Soit,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Remarque 1 : Dans l'expression $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, en mettant b en facteur au lieu de a et en utilisant la formule $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$, on pourrait écrire la solution en utilisant uniquement une fonction sinus.

Remarque 2 : Dans certains cas (en particulier en physique), on cherche directement la solution générale d'une équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sous la forme $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Les éventuelles conditions initiales permettent de déterminer les deux constantes A et φ.

Exemple : On reprend l'exemple du paragraphe **2**.

Soit l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. On cherche la solution f de cette équation vérifiant les conditions $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$. On souhaite que l'écriture de cette solution n'utilise que la fonction cosinus.

Cette équation étant de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, sa solution générale peut s'écrire sous la forme $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, soit, dans cet exemple, $y(t) = A\cos(2t + \varphi)$, où A et φ sont deux constantes réelles et $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On cherche ensuite la solution vérifiant les conditions données :

• Première condition : $f(0) = A\cos(2\times 0 + \varphi) = A\cos\varphi = \sqrt{3}$.

• Pour appliquer la deuxième condition, on calcule la dérivée de f : $f'(t) = -2A\sin(2t + \varphi)$. On a donc $f'(0) = -2A\sin(2\times 0 + \varphi) = -2A\sin\varphi = 2$.

Il faut donc trouver A et φ, solutions du système $\begin{cases} A\cos\varphi = \sqrt{3} \\ -2A\sin\varphi = 2. \end{cases}$

D'après la première équation, $\cos\varphi$ étant non nul, on a $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}$ et $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En reportant dans la deuxième équation, on obtient $-2\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\sin\varphi = 2$, soit $\tan\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

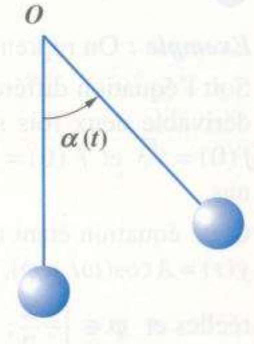
On a alors $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ et, en reprenant la première équation : $A\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, soit $A = 2$.

La solution cherchée est donc la fonction f définie par $f(t) = 2\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

▸Exercices n° 26 à 30

TP Exemples d'études de phénomènes régis par une équation différentielle

1 En mécanique : le pendule



Un solide est suspendu à un fil inextensible de longueur l fixé en un point O. À l'instant $t = 0$, on l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle α_0 et on le lâche sans vitesse initiale : le solide se met à osciller autour de sa position d'équilibre. Son mouvement est alors défini par l'angle $\alpha(t)$ entre la verticale et l'axe du pendule à l'instant t. Dans l'activité 1 (partie **B.**), on a montré que l'angle $\alpha(t)$ dans le cas de petites oscillations vérifie l'équation différentielle (E) :

$\alpha'' + \omega^2\alpha = 0$, où $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (g est l'accélération de la pesanteur).

1 Les résultats de cette question seront donnés en fonction de ω et α_0.

a. Déterminer la solution générale de (E).

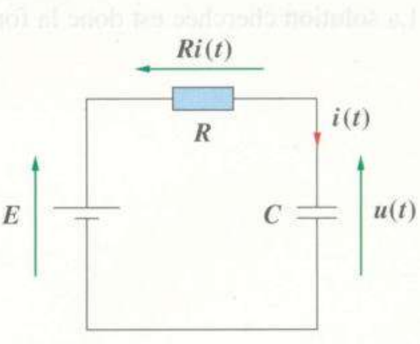
b. D'après les conditions initiales de l'expérience, que vaut $\alpha(0)$? $\alpha'(0)$? (On rappelle que $\alpha'(0)$ est proportionnel à la vitesse initiale.)

c. Déterminer alors la solution de l'équation (E) satisfaisant aux conditions initiales de l'expérience.

2 a. Sachant que la période de la fonction $t \mapsto \cos \omega t$ est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, exprimer la période d'oscillation du pendule en fonction de l et g.

b. Application numérique : on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et on mesure expérimentalement $T = 1{,}8$ s. Calculer l.

2 En électricité : circuit RC soumis à un « échelon de tension »



On considère un circuit RC soumis à un « échelon de tension » E (circuit représenté ci-contre). À l'instant $t = 0$, on a $u(t) = 0$. De plus, pour tout t de $[0, +\infty[$,

$E = Ri(t) + u(t)$ et $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$.

1 a. À partir des deux relations précédentes, écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction u.

b. Écrire cette équation différentielle sous la forme (1) :

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = K$, où τ et K sont deux constantes que l'on exprimera en fonction de R, C et E.

2 On admet que la solution générale de l'équation (1) est la somme de deux fonctions : $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, où :

- u_1 est la solution générale de l'équation différentielle (2) : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = 0$, appelée équation sans second membre associée à (1) ;
- u_2 est une solution quelconque de l'équation (1).

a. Déterminer la solution générale u_1 de (2).

b. Montrer que la fonction constante $u_2(t) = E$ est une solution de l'équation (1).

c. En déduire la solution générale u de l'équation (1).

d. Déterminer, en fonction de τ et E, l'expression de la solution u vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$.

3 a. Étudier le sens de variation de la fonction u.

b. Calculer la limite quand t tend vers $+\infty$ de $u_1(t)$, puis celle de $u(t)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat. (Physiquement, la partie $u_1(t)$ de la solution est appelée « régime transitoire », la partie $u_2(t)$ est appelée « régime forcé ».)

c. Exprimer, en fonction de τ, le temps t_1 à partir duquel $u(t) > 0{,}95E$.

d. Application numérique : on prend $R = 105\ \Omega$ et $C = 10^{-6}$ F. Calculer τ et t_1.

3 En électrotechnique : ralentissement d'un moteur à courant continu

On considère un moteur à courant continu qui connaît un ralentissement : sa vitesse de rotation $\Omega(t)$ est telle que :

• pour $t \leqslant 0$, $\Omega(t) = \Omega_0$ (constante strictement positive) ;

• pour $t \geqslant 0$, $\Omega(t)$ est solution de l'équation différentielle $J\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + k\Omega = 0$, où J et k sont deux constantes réelles strictement positives.

1 a. Écrire l'équation différentielle précédente sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\Omega = 0$, où τ est une constante à exprimer en fonction de J et k.

b. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

c. Sachant qu'il y a continuité de la vitesse à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire que $\Omega(0) = \Omega_0$), déterminer l'expression de $\Omega(t)$ en fonction de τ et Ω_0.

2 On considère la fonction Ω définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \Omega(t) = \Omega_0 & \text{pour } t \leqslant 0, \\ \Omega(t) = \Omega_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t \geqslant 0. \end{cases}$

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de Ω. Interpréter ce résultat.

b. Étudier le sens de variation de Ω sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

c. On admet que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction Ω dans un repère orthogonal a, au point d'abscisse 0, une demi-tangente à droite $\mathscr{T}$ de coefficient directeur $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \Omega'(t)$. Écrire une équation de $\mathscr{T}$ puis déterminer l'instant t_1 pour lequel $\mathscr{T}$ coupe l'axe des abscisses.

d. Exprimer, en fonction de Ω_0, les valeurs de $\Omega(\tau)$, $\Omega(2\tau)$ et $\Omega(3\tau)$.

e. Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer un point sur l'axe des ordonnées représentant la valeur Ω_0 et un point sur l'axe des abscisses représentant la valeur τ. À partir des résultats précédents, tracer $\mathscr{T}$ puis l'allure de la courbe représentative de Ω.

f. Application numérique : on prend $J = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ et $k = 0{,}2\ \mathrm{Nm \cdot s \cdot rad^{-1}}$. Calculer τ.

TRAVAUX PRATIQUES

1> Définition

Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation dans laquelle **l'inconnue est une fonction**, et dans laquelle apparaît la dérivée n-ième de cette fonction et éventuellement la fonction elle-même et ses fonctions dérivées d'ordre inférieur à n.

2> Résolution d'une équation différentielle

- **Résoudre** une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.
- Lorsque toutes les solutions d'une équation différentielle ont la même forme, et que l'on peut donner cette forme générale des solutions, on dit que l'on écrit la **solution générale** de l'équation.

3> Résolution d'une équation différentielle du type $y' = ay$

- **Théorème :** Soit l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel quelconque et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

On dit alors que **la solution générale** de l'équation $y' = ay$ est $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

4> Solution d'une équation différentielle du type $y' = ay$ vérifiant une condition initiale donnée

- **Théorème :** L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution vérifiant la condition $y(\alpha) = \beta$, où α et β sont deux réels donnés.

5> Résolution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

- **Théorème :** Soit l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel quelconque, et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

On dit alors que **la solution générale** de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est :

$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

6> Solution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ vérifiant deux conditions initiales données

- **Théorème :** L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution vérifiant les conditions $y(a) = b$ et $y'(a) = c$, où a, b et c sont trois réels donnés.

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

On remplace la fonction inconnue et sa dérivée par la fonction proposée et sa dérivée. On vérifie alors que l'on obtient le second membre de l'égalité.

1 Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E).

a. (E) $y' + 2y = x$; $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

b. (E) $x + 16x'' = 0$; $f(t) = 2\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Réponses

a. Si $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, alors $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$.

On calcule $f' + 2f$:

$$f'(x) + 2f(x) = \left(-2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2} + 2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{2}x - \frac{2}{4}$$

$$= x$$

donc la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle (E).

b. Si $f(t) = 2\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ alors :

$$f'(t) = \frac{-2}{4}\sin\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}\sin\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

et $f''(t) = \frac{-1}{8}\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$. On calcule $f + 16f''$:

$$f(t) + 16f''(t) = 2\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + 16\left[\frac{-1}{8}\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0$$

donc la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle (E).

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

2 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

a. (E) : $y' + 5y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. (E) : $RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + u(t) = 0$, où u est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ avec R et C deux constantes réelles strictement positives.

On écrit l'équation sous la forme $y' = ay$; la solution générale est $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Réponses

a. (E) s'écrit $y' = -5y$, donc la solution générale de l'équation (E) est $y(x) = Ce^{-5x}$, où C est une constante réelle quelconque.

b. (E) s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{RC}u$, donc la solution générale de l'équation (E) est $u(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$, où K est une constante réelle quelconque.

Déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay$ vérifiant une condition initiale

3 Déterminer la solution u de (E) :

$RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + u(t) = 0$ qui vérifie $u(0) = 1$.

La fonction cherchée est de la forme de la solution générale.

Réponse

La solution générale de l'équation (E) est $u(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$, où K est une constante réelle quelconque (voir **2b.**).

On lui applique la condition indiquée.

On a $u(0) = 1$ soit $Ke^{-\frac{0}{RC}} = 1$, donc $K = 1$.

La solution u demandée est alors $u(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$.

Résoudre une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

4 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

a. (E) : $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. (E) : $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -K\alpha$, où α est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et K une constante réelle positive.

La solution générale de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

Réponses

a. La solution générale de l'équation (E) est :

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

On écrit l'équation sous la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$.

b. L'équation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + K\alpha = 0$.

La solution générale de l'équation (E) est :

$$\alpha(t) = C_1\cos(t\sqrt{K}) + C_2\sin(t\sqrt{K}),$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

Déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ vérifiant deux conditions initiales

5 Déterminer la solution α de (E) : $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -K\alpha$ vérifiant $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\alpha'(0) = 0$.

Réponse

La solution cherchée a la forme de la solution générale.

La solution générale de l'équation (E) est :

$$\alpha(t) = C_1\cos(t\sqrt{K}) + C_2\sin(t\sqrt{K}),$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques (voir **4b.**).

On applique la condition donnée sur la fonction.

• Si $\alpha(0) = \alpha_0$, alors $C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = \alpha_0$, donc :

$$C_1 = \alpha_0.$$

On écrit la forme de la dérivée de la solution générale.

• On a $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1\sqrt{K}\sin(t\sqrt{K}) + C_2\sqrt{K}\cos(t\sqrt{K})$.

Et on applique la condition donnée sur la dérivée.

Si $\alpha'(0) = 0$, alors $C_2\sqrt{K} = 0$ et $C_2 = 0$;

On a ainsi deux équations qui permettent de déterminer les deux constantes.

$C_1 = \alpha_0$ et $C_2 = 0$, d'où la solution α demandée est :

$$\alpha(t) = \alpha_0\cos(t\sqrt{K}).$$

Généralités sur les équations différentielles

Dans les exercices **1** à **9**, dire si la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle (E), dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1

C $f : x \mapsto \sqrt{3}\,e^{-2x}$ et $(E) :\ y' + 2y = 0$.

2

$f : x \mapsto e^{-3x}$ et $(E) :\ y' - 3y = 0$.

3

$f : x \mapsto e^{x} + \cos x$ et $(E) :\ y'' + y = 2e^{x} + 1$.

4

$f : x \mapsto 170 - 150\,e^{-0{,}514x}$

et $(E) : \dfrac{1}{0{,}514}\,y' + y = 170$.

5

$f : x \mapsto \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x$ et $(E) :\ y'' + 9y = 0$.

6

$f : t \mapsto 3\sqrt{2}\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $(E) :\ y'' + 25y = 0$.

7

$f : x \mapsto \cos 2x$ et $(E) :\ 4y^2 + 2y' = 4$.

8

$f : x \mapsto -x\cos x$ et $(E) :\ y'' + y = 2\sin x$.

9

$f : x \mapsto x^2\cos x$ et $(E) :\ 2y - xy' = x^3\sin x$.

10

C Résoudre les équations différentielles proposées à l'aide du calcul de primitives.

a. $y' = \cos 2x$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $y'' = \dfrac{1}{t^2}$, où y est une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

11

Résoudre les équations différentielles proposées à l'aide du calcul de primitives.

a. $y' = e^{-3x}$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $y'' = 2t^2 - 3t + 1$, où y est une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Équations du type $y' = ay$

Dans les exercices **12** à **14**, résoudre les équations différentielles proposées, dans lesquelles y est une fonction de la variable réelle x et θ une fonction de la variable réelle t, toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

12

C a. $y' = y$. b. $2y' + y = 0$.

c. $3\theta' - 2\theta = 0$. d. $y = 5y'$.

13

a. $\theta' + (\ln 100)\,\theta = 0$. b. $3y' - y = 0$.

c. $\tau y' + y = 0\ (\tau \in \mathbb{R})$.

14

a. $\theta' = -3\theta$. b. $2y' - 3y = y$.

c. $\sqrt{3}y' = \dfrac{1}{2}y$.

15

Résoudre les trois équations différentielles suivantes dans lesquelles x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $2x' - x = 0$. b. $x' - x = 3x' + x$.

c. $ax' + bx = 0$, où a et b sont deux constantes réelles non nulles.

16

C Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E) :\ y' = 3y$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer ensuite la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$.

17

Résoudre l'équation différentielle $(E) :\ 2y' = y$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer ensuite la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(\ln 9) = 2$.

18

Résoudre l'équation différentielle $(E) :\ x' = \sqrt{2}x$, où x est une fonction de la variable réelle t dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que le point $A(1, 1)$ est un point de la courbe représentative de f, solution particulière de (E). Déterminer alors l'expression de f en fonction de t.

Équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans les exercices **19** à **21**, résoudre les équations différentielles proposées, dans lesquelles y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

19

C **a.** $y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 0$. **b.** $4y'' + 9y = 0$.

c. $y'' = -2y$.

20

a. $y'' + \frac{1}{25}y = 0$. **b.** $3y'' + 2y = 0$.

c. $4y'' = -16y$.

21

a. $y'' + \frac{1}{3}y = 0$. **b.** $4y'' = -y$.

c. $\frac{1}{3}y'' = -3y$.

22

Résoudre les équations différentielles proposées, dans lesquelles x est une fonction de la variable réelle t deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $x'' + x = 0$. **b.** $9x'' + 25x = 0$.

c. $2x'' + x = 0$. **d.** $x'' = -\frac{1}{9}x$.

23

C **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle t deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la solution particulière f de cette équation vérifiant $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = 2$.

24

a. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $4y'' + 49y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $g(0) = -\sqrt{2}$.

25

Déterminer la solution de l'équation différentielle $9f'' + f = 0$, où f est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

26

C **a.** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

c. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

d. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = -1$.

27

Soit l'équation différentielle $9y'' + 16y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer la solution générale de cette équation.

b. Déterminer la solution particulière f vérifiant :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{3}.$$

c. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

d. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

28

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 9y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{2}$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. a. Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

b. Représenter les solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique.

29

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres par $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

1. a. Montrer que $f(x) = 2\sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3}$.

b. Résoudre l'équation différentielle $9y'' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que f est solution de cette équation différentielle.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 4$.

30

a. Soit la fonction g définie sur $]-\infty, +\infty[$ par :

$$g(x) = \cos\frac{1}{6}x + \sin\frac{1}{6}x.$$

Calculer les fonctions dérivées première et seconde g' et g'' de la fonction g.

b. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : $36y'' + y = 0$, et donner la solution générale de (E).

c. Déterminer la solution h de (E) qui vérifie :

$$h(0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad h'(0) = -\frac{1}{36}.$$

Montrer qu'il existe un angle φ tel que :

$$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\left(\frac{1}{6}x + \varphi\right).$$

Pour aller plus loin

31

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + \pi^2 y = 0.$$

2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par le point P de coordonnées $(1, -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a. En utilisant les données ci-dessus, préciser $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Déterminer f.

c. Vérifier que, pour tout x réel,

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right).$$

3. a. Montrer que f est périodique de période 6.

b. Calculer la valeur efficace de f, c'est-à-dire le réel I positif défini par :

$$I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

32

On considère les équations différentielles E_0 et E_1, où y est une fonction de la variable t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$E_0 : y'' + 9y = 0 \; ; \; E_1 : y'' + 9y = 8\sin t.$$

a. Quelles sont les fonctions f solutions de E_0 ?

b. Vérifier que la fonction sinus est solution de E_1.

c. f étant solution de E_0, vérifier que toute fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t) + \sin t$ est solution de E_1.

d. Parmi les fonctions g définies au **c.**, déterminer celle qui vérifie de plus :

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

33

On considère les équations différentielles E_0 et E_1, où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$E_0 : y' + 3y = 0 \; ; \; E_1 : y' + 3y = 3x^2 + 2x + 3.$$

a. Quelles sont les fonctions f solutions de E_0 ?

b. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$ est solution de E_1.

c. f étant solution de E_0, vérifier que toute fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + x^2 + 1$ est solution de E_1.

d. Parmi les fonctions h définies au **c.**, déterminer celle qui vérifie de plus $h(0) = 2$.

34 Radioactivité

Un élément radioactif est instable. Les atomes se désintègrent au cours du temps. Si on appelle $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs dans un échantillon à l'instant t, exprimé en secondes, la fonction N est une solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda N = 0$, où λ est une constante caractéristique de l'élément radioactif considéré.

1. Donner la solution générale de cette équation différentielle.

On pose $N(0) = N_0$. Exprimer, à l'aide de λ et de N_0, la solution vérifiant cette condition.

2. On appelle période radioactive T de l'échantillon (ou demi-vie) le temps au bout duquel un échantillon, contenant initialement N_0 atomes, n'en contient plus que la moitié : $\frac{N_0}{2}$. Exprimer T en fonction de λ.

3. On appelle activité d'un échantillon à l'instant t, et on note $A(t)$, le nombre moyen de désintégrations par seconde : $A(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t)$. Cette grandeur est mesurable expérimentalement et s'exprime en becquerels (1 Bq = 1 désintégration par seconde).

Exprimer $A(t)$ à l'aide de λ et N_0.

Exprimer $f(t) = \ln A(t)$ à l'aide de λ et N_0. De quel type de fonction s'agit-il ? Comment peut-on lire la valeur de λ à partir de la courbe d'équation $y = \ln A(t)$?

4. Application : on relève expérimentalement l'activité d'un échantillon radioactif :

- à l'instant $t = 0$:
$A(0) = 2{,}2 \cdot 10^5$ Bq ;
- après un jour, $t = 86\,400$:
$A(86\,400) = 2{,}02 \cdot 10^5$ Bq.

Calculer la pente de la droite passant par les points $A_0(0, \ln(2{,}2 \cdot 10^5))$ et $A_1(86\,400, \ln(2{,}02 \cdot 10^5))$. En déduire la période radioactive de l'échantillon en secondes, puis en jours.

35 Changements de température

On chauffe dans une grosse cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$.

On admet que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = g(t) - 100$ est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2 \cdot 10^{-4} y = 0$ vérifiant $f(0) = -80$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Exprimer $f(t)$ en fonction de t.

2. Montrer que $g(t) = 100 - 80\mathrm{e}^{-2 \cdot 10^{-4} t}$.

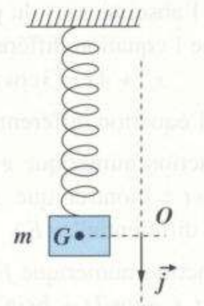
3. a. Calculer $g(0)$, la température du liquide à l'instant $t = 0$.

b. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85 °C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

36 Ressorts

Le schéma ci-après représente un ressort de constante de raideur k auquel est suspendu un mobile de masse m. La position du centre de gravité de ce mobile est donnée par la fonction f qui, à l'instant t, associe son ordonnée repérée sur l'axe $(O, \vec{j})$. On écarte le mobile de sa position d'équilibre (en O), en le plaçant au point d'ordonnée y_0, et on le lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

Le théorème fondamental de la dynamique permet d'établir que f est solution de l'équation différentielle (E) : $m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = mg$.



1. On admet que la solution générale de l'équation différentielle est la somme de deux fonctions y_1 et y_2 que l'on va déterminer.

a. y_1 est la solution générale de l'équation (E') : $m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0$ (appelée équation sans second membre associée à l'équation (E)). Donner l'expression de y_1 à l'aide de k et m.

b. y_2 est une solution quelconque de l'équation (E) : vérifier que la fonction constante définie par $y_2(t) = \dfrac{mg}{k}$ est solution de l'équation (E).

c. Déduire des deux questions précédentes la solution générale $y = y_1 + y_2$ de l'équation (E). (On remarquera que la partie y_2 de la solution correspond à la variation de la longueur du ressort entre la position d'équilibre à vide et la position d'équilibre sous la charge mg, et que la partie y_1 correspond à l'oscillation du ressort autour de cette dernière position.)

d. Déterminer la solution particulière f vérifiant les conditions initiales :

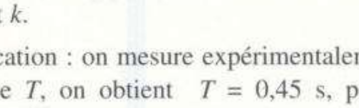
$$f(0) = y_0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

2. a. Sachant que la période de la fonction $t \mapsto \cos \omega t$ est $\dfrac{2\pi}{\omega}$, déduire de ce qui précède une relation entre la période T d'oscillation du mobile, la masse m et la constante de raideur du ressort k.

b. Application : on mesure expérimentalement la période T, on obtient $T = 0{,}45$ s, pour un mobile de masse $m = 5$ kg. En déduire la constante de raideur du ressort.

37 Encore un ressort

Un ressort à spires non jointives a une extrémité fixe A. Un dispositif permet d'exercer en son autre extrémité M une force variable.



À l'instant t, l'abscisse $x(t)$ du point M, sur l'axe $(O, \vec{i})$, vérifie l'équation différentielle (E) :

$$x'' + 4x = 3\cos t.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $x'' + 4x = 0$.

2. Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \cos t$; montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).

3. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos t + a\cos 2t + b\sin 2t$, où a et b sont deux réels ; vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer les réels a et b tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. (À l'instant $t = 0$, le point M est situé en O et sa vitesse est nulle.)

5. On suppose dans cette question que l'abscisse du point M est donnée, en fonction du temps, par la fonction h définie par :

$$h(t) = \cos t - \cos 2t.$$

a. Montrer que, pour tout réel t, on a :

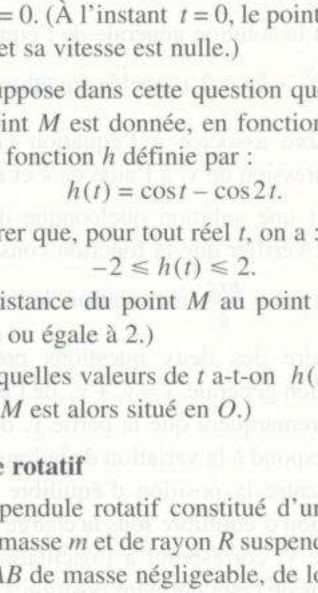
$$-2 \leqslant h(t) \leqslant 2.$$

(La distance du point M au point O est inférieure ou égale à 2.)

b. Pour quelles valeurs de t a-t-on $h(t) = 0$? (Le point M est alors situé en O.)

38 Pendule rotatif

Soit un pendule rotatif constitué d'un disque en acier de masse m et de rayon R suspendu par un fil d'acier AB de masse négligeable, de longueur l et de diamètre d encastré en B dans un support.



À partir de la position d'équilibre de l'ensemble, on fait tourner le disque d'un angle α_0 de faible amplitude autour de l'axe (Oz) (le point C se déplace en C_0) et on le lâche au temps $t = 0$ sans vitesse initiale. Il est alors animé d'un mouvement de rotation alternatif autour de cet axe et sa position est repérée par l'angle α qui est une fonction du temps.

L'application du théorème du moment cinétique à cet ensemble et l'étude de résistance des matériaux conduit à l'équation différentielle :

$$J_{Oz}\alpha'' = -\frac{GI_O}{l}\alpha \text{ dans laquelle :}$$

• α'' est l'accélération angulaire, en rad·s^{-2}, du pendule (dérivée seconde de la fonction α) ;

• J_{Oz} est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe (Oz) exprimé en kg·m^2, avec $J_{Oz} = \dfrac{mR^2}{2}$;

• G représente le module de Coulomb, exprimé en pascals (Pa), qui caractérise le matériau ;

• I_O est le moment quadratique polaire de la section du fil, exprimé en m^4, qui a pour expression $I_O = \dfrac{\pi d^4}{32}$.

a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

b. En tenant compte des conditions particulières (pour $t = 0$, $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\alpha'(0) = 0$), montrer que la loi du mouvement est :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{GI_O}{J_{Oz}\,l}}\,t\right)$$

c. Sachant que la période de la fonction $t \mapsto \cos \omega t$ est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, donner l'expression de la période d'oscillation T du pendule en fonction de J_{Oz}, l, G et I_O.

d. À partir des données numériques suivantes, calculer T : $m = 1$ kg ; $R = 0{,}2$ m ; $l = 1$ m ; $d = 0{,}0025$ m ; $G = 8 \cdot 10^{10}$ Pa.

39 Flambage

On considère deux pièces représentées ci-après :

■ la pièce 1 est peu « élancée » : faible rapport entre la longueur et la section ;

■ la pièce 2 est « élancée » : rapport important entre la longueur et la section.

■ Lorsque l'on comprime la pièce 1 (*figure 1*), sous l'action de deux efforts $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ exercés suivant son axe, on constate :

• que l'axe de la pièce reste toujours rectiligne ;

• une variation de longueur ΔL.

■ Lorsque l'on comprime la pièce 2 (*figure 2*), sous l'action de deux efforts $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ exercés suivant son axe, on constate :

• en début d'expérience, lorsque la norme de $\vec{F}$ est faible, que l'axe reste rectiligne et que la longueur varie de ΔL ;

• lorsque la norme de $\vec{F}$ atteint une valeur critique F_c, que la pièce fléchit spontanément : ce phénomène est appelé flambage. La pièce est alors sollicitée en flexion-compression.

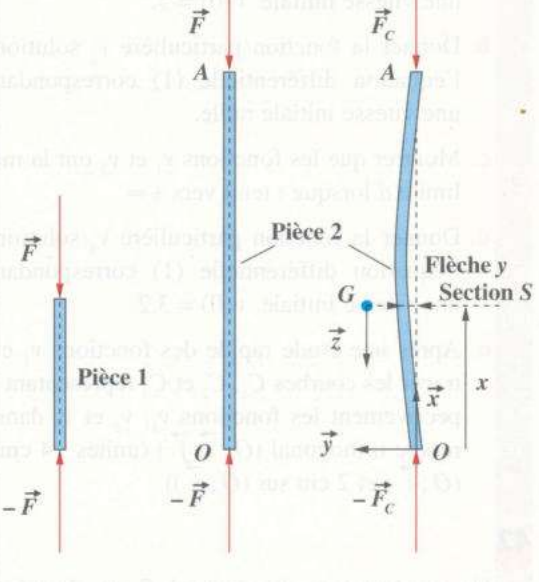


Figure 1 *Figure 2*

L'étude de cette sollicitation en résistance des matériaux permet de déterminer la charge critique F_c au-delà de laquelle le flambage apparaît lorsque l'élancement de la pièce est suffisant. Cette étude conduit à l'équation différentielle du second ordre suivante : $y'' + \dfrac{F_c}{EI_{Gz}}y = 0$, où y, fonction de la variable x, est la flèche dans la section S d'abscisse x, E le module de Young qui caractérise le matériau et I_{Gz} le moment quadratique de la section de la pièce par rapport à l'axe (Gz).

a. Sachant que $y(0) = 0$, montrer que la solution cherchée s'écrit $y(x) = B\sin \omega x$, où ω est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de F_c, E et I_{Gz}.

b. Sachant que, pour tout x de $]0, L[$, $y(x) \neq 0$, en déduire que $B \neq 0$. En utilisant le fait que L est le plus petit réel non nul tel que $y(L) = 0$ (et donc que ωL est le plus petit réel non nul dont le sinus est nul), montrer que $\omega = \dfrac{\pi}{L}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la charge critique F_c en fonction de E, I_{Gz} et L.

Dans les conditions suivantes, calculer la charge critique F_c qui entraîne le flambage d'une tige poussoir cylindrique.

Application numérique :

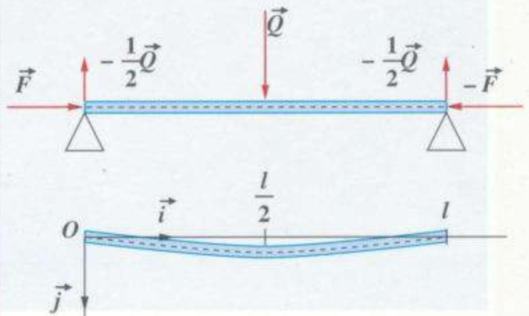
longueur $OA = L = 500$ mm ; module de Young $E = 210\,000$ MPa ; moment quadratique $I_{Gz} = 30{,}7$ mm^4. (On gardera les données dans les unités indiquées qui sont cohérentes : 1 MPa correspond à 1 N·mm^{-2}.)

40 Flambage et flexion

(D'après un problème de BTS)

On se propose de calculer la flèche y au milieu d'une poutre élancée, non encastrée, soumise en son milieu à une charge $\vec{Q}$ provoquant une flexion, et éventuellement soumise à une charge axiale $\vec{F}$ provoquant un flambage. Cette poutre a un moment quadratique I_{Gz} et un module d'élasticité longitudinale E.

Un point M de la poutre est repéré par ses coordonnées (x, y) dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Son abscisse x appartient à $[0, l]$, où l est la longueur de la poutre.



Pour $x \in \left[0, \dfrac{l}{2}\right]$, l'ordonnée y varie en fonction de x suivant une loi f, dont l'étude mécanique permet d'écrire qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + k^2y = -\lambda x, \text{ où } k^2 = \frac{\|\vec{F}\|}{EI_{Gz}} \text{ et } \lambda = \frac{\|\vec{Q}\|}{2EI_{Gz}}.$$

On admet que la solution générale de l'équation est la somme de deux fonctions f_1 et f_2 que l'on va déterminer (on exprimera toutes les réponses en fonction de k, λ et l).

a. Déterminer f_1, solution générale de l'équation (E') : $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + k^2y = 0$.

b. La fonction f_2 est une solution quelconque de (E) : montrer que la fonction f_2 définie sur $\left[0, \dfrac{l}{2}\right]$ par $f_2(x) = -\dfrac{\lambda}{k^2}x$ est solution de (E).

c. Donner l'expression de la solution générale de (E).

Déterminer la solution f qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ (la flèche est nulle sur un point d'appui) et $f'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ (par symétrie, la flèche maximale est au milieu).

d. Exprimer la flèche maximale (flèche au milieu de la poutre) en fonction de λ, k et l.
Application numérique : $I_{Gz} = 100 \text{ mm}^4$;
$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$; $l = 400$ mm ;
$\|\overrightarrow{Q}\| = 50$ N ; $\|\overrightarrow{F}\| = 400$ N.

41 Parachute

(D'après un problème de BTS)

©Gamma/CNES-ESA/Corvaja

La trajectoire suivie par un objet relié à un parachute est un axe vertical $(O ; \vec{k})$.
À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V} = v(t)\vec{k}$, où v est une fonction de la variable réelle positive t.
On admet que, dans les conditions de l'expérience, la fonction v vérifie l'équation différentielle :

$$(1) \qquad mv' + qv = mg,$$

où m est la masse totale de l'objet et du parachute, g le coefficient de l'accélération de la pesanteur et q une constante positive liée au parachute.

1. On admet que la solution générale de l'équation (1) est de la forme $v = u + w$, où u est la solution générale de l'équation (2) $mv' + qv = 0$ et où w est une solution quelconque de l'équation (1).

a. Résoudre l'équation (2).

b. Montrer qu'il existe un nombre réel a, que l'on déterminera, tel que la fonction constante définie par $w(t) = a$ soit solution de l'équation (1).

c. Déduire de ce qui précède la solution générale v de l'équation (1).

2. Dans la suite du problème, on prendra $m = 8$ kg, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $q = 25$ unités S.I. (les vitesses sont exprimées alors en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

a. Donner la fonction particulière v_1 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = 5$.

b. Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.

c. Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite d lorsque t tend vers $+\infty$.

d. Donner la fonction particulière v_3 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v(0) = 3{,}2$.

e. Après une étude rapide des fonctions v_1 et v_2, tracer les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 4 cm sur $(O ; \vec{i})$ et 2 cm sur $(O ; \vec{j})$).

42

Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge dans un résistor de résistance R. La tension aux bornes du condensateur est une fonction V (du temps) définie sur $[0, +\infty[$. Cette fonction V est solution, sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E) :

$$V' + \frac{1}{RC} V = 0.$$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

2. On rappelle que $V(0) = 20$. Déterminer la fonction V.

Dans la suite, $R = 1\,000\ \Omega$ et $C = 10^{-4}$ F.

3. a. Montrer que, pour tout t appartenant à $[0, +\infty[$, $V(t) = 20\,\mathrm{e}^{-10t}$.

b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles on a $V(t) \geqslant 0{,}02$.

4. L'intensité traversant le circuit est une fonction i (du temps), définie sur $[0, +\infty[$, par $i(t) = CV'(t)$.

a. Déterminer $i(t)$.

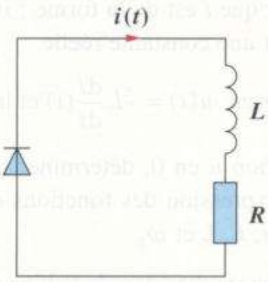
b. L'énergie, exprimée en joules, dissipée dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = 0{,}69$ est $W = \displaystyle\int_0^{0{,}69} R[i(t)]^2 \, \mathrm{d}t$.

Calculer W. En donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par excès.

43 Annulation du courant dans un circuit inductif

Pour $t \leqslant 0$, $i(t) = I_0$ (constante).

Pour $t \geqslant 0$, le schéma électrique équivalent du circuit est représenté ci-dessous.



En supposant la diode D idéale, l'équation différentielle à laquelle satisfait i s'écrit :

pour $t \geqslant 0$, $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$, où L et R sont deux constantes réelles strictement positives.

a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

Sachant qu'il y a continuité de i en $t = 0$ (c'est-à-dire que sa limite à gauche en 0 est égale à sa limite à droite en 0), déterminer l'expression de $i(t)$.

b. On pose $\tau = \dfrac{L}{R}$, constante de temps du circuit.

On considère la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} i(t) = I_0 & \text{pour } t \leqslant 0 \\ i(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Calculer la limite de la fonction i en $+\infty$.

Étudier le sens de variation de i sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

c. On admet que la courbe représentative de la fonction i a, au point d'abscisse 0, une demi-tangente $\mathscr{C}$ de coefficient directeur $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} i'(t)$.

Écrire une équation de $\mathscr{C}$.

Déterminer l'instant t pour lequel $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses.

d. Exprimer en fonction de I_0 les valeurs de $i(\tau)$, $i(2\tau)$ et $i(3\tau)$.

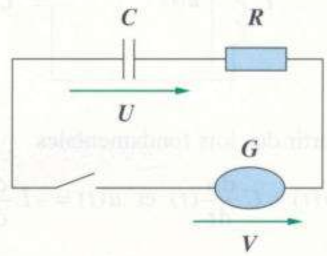
e. Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, placer un point sur l'axe des ordonnées représentant la valeur I_0 et un point sur l'axe des abscisses représentant la valeur τ. À partir des résultats des questions **b.**, **c.** et **d.**, tracer $\mathscr{C}$ puis l'allure de la courbe représentative de i.

44 *D'après un exercice du baccalauréat*

Le circuit ci-dessous est constitué d'un condensateur de capacité C, d'un résistor de résistance R, d'un générateur G et d'un interrupteur.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur G délivre alors une tension V.

La tension U aux bornes du condensateur est alors solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle $U + RCU' = V$ (1).



Dans toute la suite, on prend $C = 75 \cdot 10^{-6}$ farad, $R = 2 \cdot 10^4$ ohms, $V(t) = 6\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$ volts, où t est exprimé en secondes.

De plus, la charge initiale du condensateur impose la condition (2) : $U(0) = \dfrac{1}{3}V(0)$.

L'objet de l'exercice est de montrer que la fonction U, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $U(t) = (4t + 2)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$, vérifie les conditions (1) et (2) et d'utiliser ce résultat.

1. Calculer $U(0)$ et vérifier que U satisfait la condition (2).

2. On désigne par U' la fonction dérivée de U.

a. Démontrer que $U'(t) = \dfrac{8}{3}(1 - t)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$.

b. Prouver que la fonction U est une solution de l'équation différentielle (1).

3. On donne le tableau de variation de U.

t	0		1		$+\infty$
$U'(t)$		+	0	−	
$U(t)$	2	↗	$6\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$	↘	0

a. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0, 20[$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude une seconde.

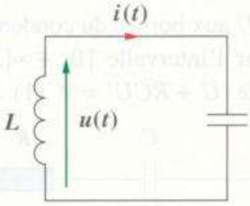
b. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts.

Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

45 Oscillation d'un circuit LC

Pour $t \leqslant 0$, $u(t) = E$ (constante) et $i(t) = 0$.

Pour $t \geqslant 0$, le schéma électrique équivalent du circuit est représenté ci-dessous. L et C sont deux constantes réelles strictement positives.



a. À partir des lois fondamentales

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \text{ et } u(t) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t),$$

écrire les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions i et u.

b. Écrire cette équation sous la forme générale $y'' + \omega_0^2 y = 0$, en précisant l'expression de ω_0 en fonction de L et C.

c. Donner la solution générale de l'équation différentielle.

Sachant qu'il y a continuité de la fonction i à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire que sa limite à gauche en 0 est égale à sa limite à droite en 0), montrer que i est de la forme : $i(t) = A\sin\omega_0 t$, où A est une constante réelle.

En utilisant $u(t) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$ et la continuité de la fonction u en 0, déterminer la constante A, puis l'expression des fonctions i et u en fonction de t, E, L et ω_0.

d. L'énergie stockée dans la bobine d'inductance L s'écrit $W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$. Celle stockée dans le condensateur s'écrit $W_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$.

Exprimer, en fonction de E et C, l'énergie totale $W_T(t) = W_L(t) + W_C(t)$ stockée dans ce circuit. Que peut-on dire de cette dernière fonction ?

Pour préparer le Bac

A *Bac STI génie mécanique 2003*

On considère l'équation différentielle :

$$4y'' + \pi^2 y = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$. Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :

• la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

• la tangente à cette courbe en ce point N est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Résoudre, sur l'intervalle $[-2, 2]$, l'équation :

$$g(x) = -\frac{1}{2}.$$

B *Bac STI génies électronique, électrotechnique et optique 2003*

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.

Le temps t est exprimé en secondes. À l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.

On définit ainsi une fonction q, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{LC}y = 0$, où y est définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et de dérivée seconde y''.

Dans tout l'exercice, on prend $C = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ et $L = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

1. a. Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 1{,}6 \cdot 10^5 y = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E).

c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant $q(0) = 6 \cdot 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, $i(t) = 2{,}4 \sin 400t$.

b. Calculer $\dfrac{400}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos 800t \, \mathrm{d}t$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

$$I_e^2 = \frac{400}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t) \mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$), puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

C *Bac STI génies mécanique, énergétique et civil 2003*

1. Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, 10]$.

b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur $[n, n + 1]$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{-2n}$ pour tout entier n positif ou nul.

a. Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Déterminer la valeur exacte de la somme :
$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$.

CHAPITRE 8
Nombres complexes

OBJECTIFS

- **Consolider les connaissances acquises en Première sur les nombres complexes.**
- **Savoir utiliser la forme exponentielle d'un nombre complexe.**
- **Savoir utiliser la formule de Moivre et les formules d'Euler.**
- **Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$ (TP1)**
- **Linéariser une expression trigonométrique (TP2)**
- **Pour les sections STI spécialités génie électronique, génie électrotechnique et génie optique : connaître l'interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$ et de $z \mapsto e^{i\theta}z$.**

> Ce chapitre ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

ACTIVITÉ 1 « Souvenirs, souvenirs »

Objectif : Vérifier les acquis de Première sur les nombres complexes.

1. Représentation d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, représenter le point A d'affixe $z_1 = 1 - 2i$, le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_2 = -3 + 5i$, le point B d'affixe $z_3 = 4i$, le point C d'affixe $z_4 = -2$, le point D d'affixe $z_5 = \left[1,\, \dfrac{\pi}{6}\right]$, le point E d'affixe $z_6 = \left[2,\, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et le point F d'affixe $z_7 = \left[3,\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Calculs sous forme algébrique

Soit les nombres complexes $z = -2 + i$ et $z' = 3 + 2i$. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique $(a + bi)$.

a. $z + z'$. **b.** $3z - 2z'$. **c.** zz'. **d.** z^2. **e.** $z\bar{z}$. **f.** $\dfrac{z}{z'}$.

3. Passage d'une forme à l'autre

a. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3} + i$. $z_2 = 1 - i$. $z_3 = -3$. $z_4 = 5i$.

b. Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_5 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right], \qquad z_6 = \left[3, \frac{\pi}{4}\right], \qquad z_7 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}\right], \qquad z_8 = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right], \qquad z_9 = [3, 0].$$

4. Interprétation géométrique du module de la différence de deux nombres complexes
Soit les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_B = 4i$.

a. Représenter ces points dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. (Pour représenter le point A avec précision, on pourra utiliser la forme trigonométrique de z_A.)
Calculer $z_B - z_A$.

b. Calculer $|z_B - z_A|$. Que représente ce nombre pour les points A et B ?

c. Déterminer un argument de $z_B - z_A$. Donner une interprétation géométrique de ce nombre.

ACTIVITÉ 2 Nombres complexes en électricité

Objectif : Montrer, dans le contexte de l'électricité, l'intérêt de savoir effectuer le produit et le quotient de deux nombres complexes sous forme trigonométrique.

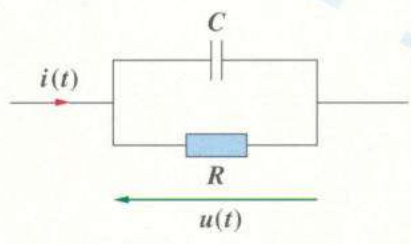
1. Pour tout dipôle soumis à une tension sinusoïdale et traversé par un courant sinusoïdal, on définit l'impédance complexe, notée $\underline{Z}$, comme le quotient de l'expression complexe de la tension par l'expression complexe de l'intensité : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et l'admittance complexe notée $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance complexe.

On rappelle que j est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Impédance		Admittance	
	Forme algébrique	**Forme trigonométrique**	**Forme algébrique**	**Forme trigonométrique**
R	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = [R, 0]$		
L	$\underline{Z} = jL\omega$			$\underline{Y} = \left[\dfrac{1}{L\omega}, -\dfrac{\pi}{2}\right]$
C	$\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$			

2. Dans chacun des deux circuits suivants, la tension est $u(t) = U\sqrt{2}\,\sin\omega t$, représentée par la grandeur complexe $\underline{U} = [U, 0]$.
On admet que, dans toute la suite, les nombres complexes cherchés ont un argument compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, donc que la connaissance de la tangente de l'argument est suffisante.

a. Circuit RC en parallèle
On rappelle que, pour un circuit en parallèle, l'admittance complexe équivalente est la somme des admittances complexes.
Exprimer, en fonction de R, C et ω, l'admittance complexe $\underline{Y}$ équivalente.



Exprimer, en fonction de R, C et ω, le module de $\underline{Y}$.

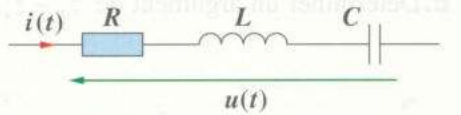
On appelle θ un argument de $\underline{Y}$. Exprimer $\tan\theta$ en fonction de R, C et ω.

On obtient $\underline{Y} = \left[\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + C^2\omega^2},\ \theta\right]$. Exprimer $\underline{I}$ en fonction de $\underline{Y}$ et de $\underline{U}$.

Pour déterminer $i(t)$, il est nécessaire d'effectuer le produit de deux nombres complexes. On va voir dans ce chapitre qu'un produit peut se faire très simplement à partir de la forme trigonométrique des nombres complexes.

b. Circuit *RLC* « série »

On rappelle que pour un circuit « série », l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances complexes.



Exprimer, en fonction de R, L, C et ω, l'impédance complexe $\underline{Z}$ équivalente.

Exprimer, en fonction de R, L, C et ω, le module de $\underline{Z}$.

On appelle θ un argument de $\underline{Z}$. Exprimer $\tan\theta$ en fonction de R, L, C et ω.

On obtient $\underline{Z} = \left[\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2},\ \theta\right]$. Exprimer $\underline{I}$ en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{U}$.

Pour déterminer le courant $i(t)$, il faut effectuer un quotient de deux nombres complexes. On va voir dans ce chapitre qu'un quotient peut se faire très simplement à partir des formes trigonométriques des nombres complexes.

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

1 Définitions

Définitions • Un nombre complexe s'écrit sous la forme $a + bi$, où a et b sont deux nombres réels et i est un nombre tel que $i^2 = -1$. Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe. Le réel a est la **partie réelle** du nombre complexe et le réel b est sa **partie imaginaire**.
• L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Cas particuliers :
• Si $z = bi$, on dit que z est un **imaginaire pur**.
• Un nombre **réel** est considéré comme un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

Exemple 1 : $z = 2 - i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est 2 et la partie imaginaire est -1.
Exemple 2 : • Le nombre $z = -2i$ est un nombre imaginaire pur. Sa partie réelle est 0 et sa partie imaginaire est -2.
• Le nombre -3 est le nombre complexe de partie réelle -3 et de partie imaginaire 0.

Remarques :
• Le nombre i dont le carré est -1 est noté j par les physiciens afin de ne pas confondre avec l'intensité du courant notée i.
• Par convention, dans toute la suite de ce chapitre, on considérera que les nombres a, a', b et b' sont des nombres réels.

Définition On dit que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont respectivement égales, c'est-à-dire que :

$$a + ib = a' + ib' \text{ si et seulement si } a = a' \text{ et } b = b'.$$

2 Opérations

Addition et produit de deux nombres complexes

Définition • $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.
• $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarque : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ s'effectuent en utilisant les règles de calcul usuelles dans $\mathbb{R}$ et le fait que $i^2 = -1$.

Exemple : Soit $z = -1 + 4i$ et $z' = 3 + 2i$.

Alors
$$\begin{aligned} z + z' &= (-1 + 4i) + (3 + 2i) \\ &= -1 + 3 + 4i + 2i \\ &= 2 + 6i. \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} zz' &= (-1 + 4i)(3 + 2i) \\ &= -1 \times 3 + (-1) \times 2i + 4i \times 3 + 4i \times 2i \\ &= -3 - 2i + 12i + 8i^2 \\ &= -3 - 2i + 12i - 8 \\ &= -11 + 10i. \end{aligned}$$

▸Exercices n° 1 à 4

Conjugué d'un nombre complexe

Définition Soit le nombre complexe $z = a + bi$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le nombre $\overline{z} = a - bi$.

Exemple : Le nombre complexe conjugué de $z = -4 + i$ est :

$$\overline{z} = -4 - i.$$

Propriété Soit le nombre complexe $z = a + bi$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Exemple : On reprend les données de l'exemple précédent :

$$z\overline{z} = (-4)^2 + 1^2 = 17.$$

Remarque : Attention à ne pas confondre la notation mathématique $\overline{z}$, qui signifie nombre complexe conjugué de z, et la notation utilisée en physique $\underline{U}$ qui signifie grandeur complexe associée à la grandeur U.

Quotient de deux nombres complexes

Pour effectuer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où $z' \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{a + ib}{a' + ib'}\\ &= \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')}\\ &= \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2}.\end{aligned}$$

Exemple : Si $z = -1 + 4i$ et $z' = 3 + 2i$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{-1 + 4i}{3 + 2i}\\ &= \frac{(-1 + 4i)(3 - 2i)}{3^2 + 2^2}\\ &= \frac{-1 \times 3 + (-1) \times (-2i) + 4i \times 3 + 4i \times (-2i)}{13}\\ &= \frac{-3 + 2i + 12i + 8}{13}\end{aligned}$$

donc $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{14}{13}i.$

▸Exercices n° 5 et 6

3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Point image, vecteur image

Définition Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\,)$, tout nombre complexe $z = a + bi$ est associé :

- soit au point M de coordonnées (a, b),
- soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a, b).

On dit alors que :

- $z = a + bi$ est **l'affixe** du point $M(a, b)$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$.
- Le point $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + bi$.
- Le vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$ est le **vecteur image** du nombre complexe $z = a + bi$.

Exemple : Soit $z = 8 + 4i$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\,)$, le point M d'affixe $z = 8 + 4i$ est le point de coordonnées $(8, 4)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.

Remarque : Un nombre réel est l'affixe d'un point de l'axe des abscisses, un nombre imaginaire pur est l'affixe d'un point de l'axe des ordonnées ; dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels et l'axe des ordonnées, l'axe des imaginaires.

Image d'une différence

Propriété Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\,)$, z a pour image le vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$ et z' le vecteur $\overrightarrow{OM'}(a', b')$.

Alors $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$ a pour image le vecteur de coordonnées $(a' - a,\ b' - b)$, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

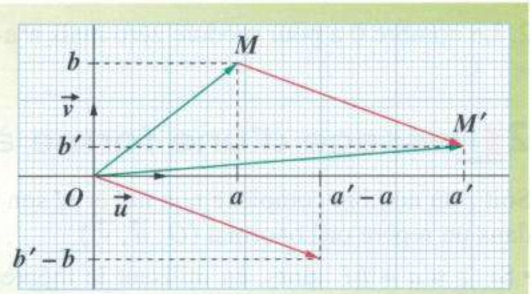
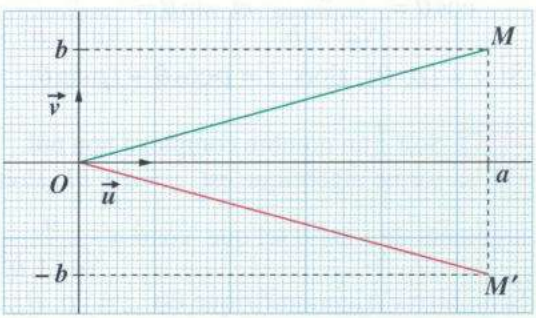


Image du conjugué

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v}\,)$, soit M le point d'affixe z.

Le point M' d'affixe $\overline{z}$ a la même abscisse que le point M et son ordonnée est opposée à celle de M.

M' est alors le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



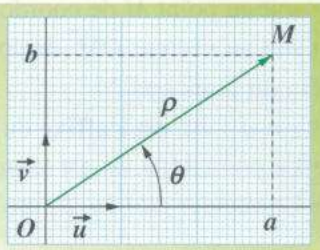
▸Exercice n° 7

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans toute la suite de ce chapitre, k est un nombre entier relatif.

1 Module et argument d'un nombre complexe

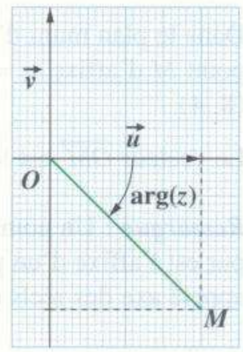
Définition Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit z un nombre complexe non nul. M est le point d'affixe $z = a + bi$.
Le point M est entièrement défini par la donnée de sa distance ρ à l'origine O du repère, appelée **module** de z (noté $|z|$), et d'une mesure quelconque θ de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ appelée **argument** du nombre complexe z (noté $\arg(z)$).



Si z a pour module ρ et pour argument θ, on écrit $z = [\rho, \theta]$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Exemple : Soit $z = -1 - i$.
Le point M d'affixe z a pour coordonnées $(-1, -1)$.
En utilisant la diagonale $[OM]$ d'un carré de côté 1, on a :
$OM = \sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

On peut donc écrire : $z = \left[\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]$.



Remarques :

1. **Le module d'un nombre complexe** étant une distance est nécessairement **un nombre réel positif**.
2. Le nombre 0 a pour module zéro mais n'a pas d'argument.

▸Exercices n° 8 et 9

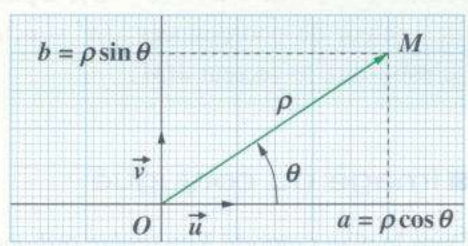
2 Passage d'une forme à l'autre

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

• Si $z = a + bi$ alors, en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient $OM = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Par conséquent :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



• Si $z = [\rho, \theta]$ alors $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$.

Théorème Soit z un nombre complexe non nul.
• Si sa forme algébrique est $z = a + bi$, alors le module de z est $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ et un argument de z est θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Si sa forme trigonométrique est $z = [\rho, \theta]$, sa partie réelle est $\rho\cos\theta$ et sa partie imaginaire est $\rho\sin\theta$: $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$.

Exemple : Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ (donné sous sa forme algébrique) et $z_2 = \left[2, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ donné sous sa forme trigonométrique. On détermine le module et un argument de z_1 et la forme algébrique de z_2.

• Module de z_1 : $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Soit θ un argument de z_1 : $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en conclut que $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, par conséquent $-\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de z_1.

On peut donc écrire $z_1 = \left[2, -\dfrac{\pi}{3}\right]$.

• Forme algébrique de z_2 : puisque $z_2 = \left[2, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ on obtient :

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \text{ et donc } z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

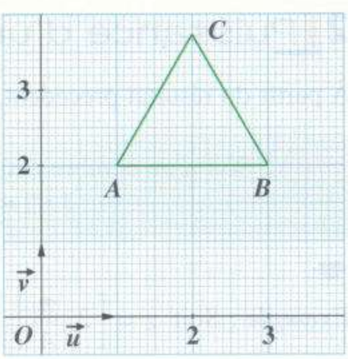
▸Exercices n° 10 à 13

3 Module et argument d'une différence de deux nombres complexes

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.
On a vu précédemment que $z_2 - z_1$ est l'affixe de $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. On en déduit les deux résultats suivants (que l'on peut aisément retrouver par le calcul) :

Théorème Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. On note M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
• Le module du nombre complexe $z_2 - z_1$ est la distance M_1M_2 : $|z_2 - z_1| = M_1M_2$.
• Si, de plus, $z_1 \neq z_2$, c'est-à-dire que $M_1 \neq M_2$, l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2})$ a pour mesure tout argument de $z_2 - z_1$.

Exemple : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 2 + (\sqrt{3} + 2)i$. On étudie la nature du triangle ABC.



$AB = |(3 + 2i) - (1 + 2i)| = |2| = 2$, et puisque $z_B - z_A = 2$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, 0)$. De ce fait, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens.
$AC = |[2 + (\sqrt{3} + 2)i] - (1 + 2i)| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$
$AC = 2 = AB$.
Donc ABC est un triangle isocèle en A. On va montrer qu'il est équilatéral : pour changer, on ne calcule pas la longueur du dernier côté, mais on utilise un calcul d'angle.
Soit θ un argument de $z_C - z_A$, d'après le calcul précédent, on obtient :
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. De ce fait, $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de $z_C - z_A$. Par conséquent, $\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$, donc, puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens, $\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ce qui prouve bien que ABC est un triangle équilatéral.

▸Exercices n° 14 à 21

COURS

3 Calculs sous forme trigonométrique

1 Produit de deux nombres complexes

On a vu dans l'activité 2 l'intérêt qu'il y a à pouvoir effectuer une multiplication de deux nombres complexes connus sous leurs formes trigonométriques sans avoir à revenir à la forme algébrique. C'est ce que l'on va chercher à faire dans ce paragraphe.

On considère deux nombres complexes z et z' non nuls :

$$z = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } z' = [\rho', \theta'] = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') \\ &= \rho\rho'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]. \end{aligned}$$

Or, on a établi en Première les formules suivantes (formules d'addition) : pour tous réels a et b,

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a.$$

En utilisant ces formules dans l'expression de zz', on peut écrire :

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] \text{ donc } zz' = [\rho\rho', \theta + \theta'].$$

Théorème Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ;
- le module du produit zz' est égal au produit des modules de z et de z' : $|zz'| = |z| \times |z'|$;
- un argument du produit zz' est la somme d'un argument de z et d'un argument de z' :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Soit les nombres complexes $z_1 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$, $z_2 = \left[3, \frac{\pi}{4}\right]$. Alors :

$$|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2| = 6 \text{ et } \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi.$$

▸Exercices n° 22 et 23

2 Puissance d'un nombre complexe

À partir du résultat précédent, on peut démontrer que :

Théorème Soit n un nombre entier naturel et z un nombre complexe non nul. Alors :

$$|z^n| = |z|^n \text{ et } \arg(z^n) = n\arg(z) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Soit $z = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$.

La forme trigonométrique de z^3 est $z^3 = \left[2^3, 3 \times \frac{\pi}{4}\right] = \left[8, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Par conséquent, la forme algébrique de z^3 est : .

$$z^3 = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}.$$

▸Exercices n° 24 et 25

3 Inverse d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul : $z = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$; en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos\theta - i\sin\theta$, on obtient

$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$, or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, on peut

écrire $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$ donc $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$.

Théorème Soit z un nombre complexe non nul, alors :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Soit le nombre complexe $z = \left[6, -\frac{\pi}{4}\right]$. La forme trigonométrique de $\frac{1}{z}$ est alors :

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{6}, \frac{\pi}{4}\right].$$

▸Exercices n° 26 et 27

4 Quotient de deux nombres complexes

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :
$z = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = [\rho', \theta'] = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

On a $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. En utilisant les théorèmes précédents, on obtient :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = [\rho, \theta] \times \left[\frac{1}{\rho'}, -\theta'\right] = \left[\frac{\rho}{\rho'}, \theta - \theta'\right].$$

Théorème Soit z et z' deux nombres complexes non nuls,

- le module du quotient $\frac{z}{z'}$ est égal au quotient des deux modules : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- un argument du quotient $\frac{z}{z'}$ est la différence entre un argument de z et un argument de z' :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : Soit les nombres complexes $z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z_2 = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.

Par conséquent : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$.

▸Exercices n° 28 à 34

COURS

4 Forme exponentielle

On observe ces deux colonnes de propriétés :

z et z' sont deux nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs θ et θ'	a est un nombre réel non nul m et n sont deux entiers relatifs
$z \cdot z' = [1, \theta] \cdot [1, \theta'] = [1, \theta + \theta']$	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
$z^n = [1, \theta]^n = [1, n\theta]$	$(a^m)^n = a^{nm}$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{[1, \theta]} = [1, -\theta]$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\frac{z}{z'} = \frac{[1, \theta]}{[1, \theta']} = [1, \theta - \theta']$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Pour chaque opération sur les nombres complexes ou les puissances de a, on compare l'opération à faire d'un côté sur les arguments, de l'autre sur les exposants. On est ainsi amené à adopter, pour un nombre complexe de module 1, une notation utilisant un exposant pour l'argument. On notera à la place de $z = [1, \theta]$: $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ d'où $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Notation

Pour tout nombre complexe z non nul de module ρ et d'argument θ, on écrira : $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.

Remarque : Pour déterminer une forme exponentielle d'un nombre complexe z, on cherche le module et un argument de z.

Exemple : Soit les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{3} + i$ (donné sous sa forme algébrique) et $z_2 = 4\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ (donné sous sa forme exponentielle). On cherche la forme exponentielle de z_1 :

• $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

• Soit θ un argument de z_1 : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. On en conclut que $\frac{5\pi}{6}$ est un argument de z_1, et donc $z_1 = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$.

On cherche la forme algébrique de z_2. L'écriture $z_2 = 4\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ signifie :

$$z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right), \text{ donc } z_2 = 2\sqrt{2}(1-i).$$

▸Exercices n° 35 à 38

Remarque : En utilisant l'écriture exponentielle, on peut réécrire les résultats du paragraphe **2** :

Calculs sous forme trigonométrique avec $z = [\rho, \theta]$ et $z' = [\rho', \theta']$	Calculs sous forme exponentielle avec $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = \rho'\mathrm{e}^{i\theta'}$
$[\rho, \theta] \cdot [\rho', \theta'] = [\rho \cdot \rho', \theta + \theta']$	$(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}) \cdot (\rho'\mathrm{e}^{i\theta'}) = \rho\rho'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$
$[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$	$(\rho \cdot \mathrm{e}^{i\theta})^n = \rho^n\mathrm{e}^{in\theta}$
$\frac{1}{[\rho, \theta]} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$	$\frac{1}{\rho\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-i\theta}$
$\frac{[\rho, \theta]}{[\rho', \theta']} = \left[\frac{\rho}{\rho'}, \theta - \theta'\right]$	$\frac{\rho\mathrm{e}^{i\theta}}{\rho'\mathrm{e}^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$

▸Exercices n° 39 et 40

5 Formule de Moivre. Formules d'Euler

Dans ce paragraphe, on va utiliser les facilités offertes par la notation exponentielle pour établir des formules de calcul qui s'utilisent surtout pour transformer des expressions trigonométriques.

1 Formule de Moivre

Soit z un nombre complexe de module 1. On a : $z = [1, \theta] = e^{i\theta}$.
Pour tout entier naturel n : $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
On en déduit :

Théorème Soit θ un nombre réel et n un entier naturel. Alors : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exemple : À l'aide de la formule de Moivre, on veut exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
On a : $\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3$.
En développant le membre de droite de l'égalité on obtient :

$$\begin{aligned}\cos 3x + i\sin 3x &= (\cos x)^3 + 3 \times (\cos x)^2 \times (i\sin x) + 3 \times \cos x \times (i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\end{aligned}$$

soit, en rassemblant partie réelle et partie imaginaire :

$$\cos 3x + i\sin 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

L'égalité de deux nombres complexes entraîne l'égalité :
- des parties réelles : $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$,
- des parties imaginaires : $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$.

▸ Exercices n° 41 et 42

2 Formules d'Euler

À partir de la notation exponentielle, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, on peut écrire :
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$.

On a $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta. \end{cases}$

En additionnant, puis en soustrayant les deux égalités membres à membres, on obtient :

Théorème Soit θ un nombre réel. Alors : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exemple 1 : $\cos 3\theta = \dfrac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2}$ et $\sin 2x = \dfrac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}$.

Exemple 2 : Soit $P(x) = \dfrac{e^{i7x} - 4e^{i5x} + 4e^{-i5x} - e^{-i7x}}{-8i}$. En rassemblant les termes du numérateur ayant des exposants opposés, on obtient : $P(x) = \dfrac{e^{i7x} - e^{-i7x} - 4(e^{i5x} - e^{-i5x})}{-8i}$. En factorisant ensuite $-\dfrac{1}{4}$, on trouve $P(x) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i7x} - e^{-i7x} - 4(e^{i5x} - e^{-i5x})}{2i}\right)$ et on peut alors reconnaître une somme de deux sinus : $P(x) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i} - 4\dfrac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i}\right) = -\dfrac{1}{4}(\sin 7x - 4\sin 5x)$.

Remarque : Les formules d'Euler servent particulièrement lors de la linéarisation de polynômes trigonométriques (voir le TP2 pour les détails).

▸Exercices n° 43 à 48

6 Transformations géométriques associées

> Ce paragraphe concerne uniquement les sections STI spécialités : **Génie électronique, Génie électrotechnique** et **Génie optique**.

Chaque nombre complexe étant associé à un point du plan, une fonction f qui transforme un nombre complexe z en un nombre complexe z' peut être associée à la transformation géométrique qui fait correspondre au point M d'affixe z le point M' d'affixe z'.

Pour certaines fonctions, la transformation géométrique associée est une transformation connue. On va étudier ici deux de ces cas.

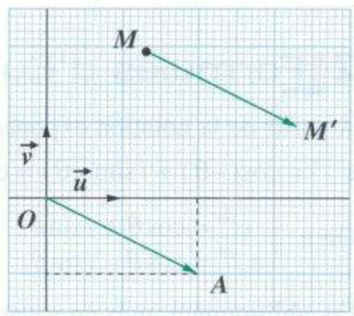
1 Transformation géométrique associée à la fonction $f : z \mapsto z + a$

Soit a un nombre complexe donné.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère A le point d'affixe a et on appelle M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$. On remarque que, quel que soit z, $f(z) - z = a$.

On sait que $f(z) - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et que a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$. On en déduit que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$. On peut donc dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

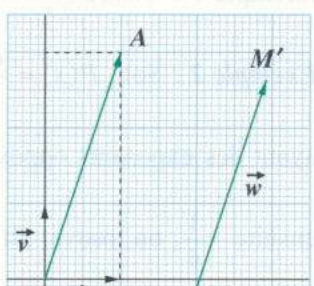


Théorème Soit a un nombre complexe. La transformation géométrique associée à l'application $f : z \mapsto z + a$ est la translation dont le vecteur a pour affixe a.

Exemple : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z + 1 + 3i$.

La transformation géométrique associée à f est la translation de vecteur $\vec{w}(1, 3)$.

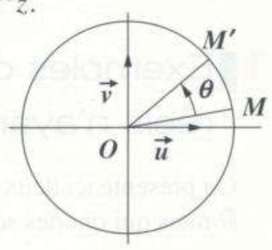
Si M est un point d'affixe z, son image M' par cette translation est le point d'affixe $z' = z + 1 + 3i$.



▸Exercices n° 53 à 55

2 Transformation géométrique associée à la fonction $f : z \mapsto e^{i\theta}z$

Soit θ un nombre réel, soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^{i\theta}z$.



Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$. On a :

• $|f(z)| = |ze^{i\theta}| = |z|\cdot|e^{i\theta}| = |z|$ d'où l'on déduit que $OM' = OM$:

• $\arg(f(z)) = \arg(z) + \theta + k2\pi$ (k est un nombre entier relatif) d'où l'on déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \theta + k2\pi$.

Conclusion : M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.

Théorème Soit θ un nombre réel. La transformation géométrique associée à l'application $f :\ z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

Exemple : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit la fonction f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z$.

La transformation géométrique associée à f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

▸Exercices n° 56 à 60

TP1 Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels

1 Exemples d'équations du second degré à coefficients réels n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}$

On présente ici deux équations du second degré à coefficients réels qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais qui ont des solutions dans $\mathbb{C}$.

1 a. Justifier que l'équation $z^2 = -9$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. Calculer $(3i)^2$. En écrivant -9 sous la forme du carré d'un nombre complexe, résoudre l'équation $z^2 = -9$ dans $\mathbb{C}$.

2 On considère l'équation (E) : $z^2 + 4z + 8 = 0$.

a. Calculer le discriminant Δ de l'équation (E). Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? Justifier.

b. Montrer que, pour tout complexe z, $z^2 + 4z + 8 = (z+2)^2 + 4$.

c. En écrivant -4 sous la forme du carré d'un nombre complexe, résoudre l'équation $(z+2)^2 = -4$ dans $\mathbb{C}$.

d. En utilisant les questions précédentes, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2 Résultat général

De façon plus générale, on établit le troisième point du résultat suivant (les deux premiers points ont été vus en classe de Première) :

Théorème On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont trois réels avec a non nul. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E).

- Si $\Delta > 0$, (E) admet exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ;$$

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une seule solution réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, (E) admet exactement deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

1 Applications du théorème

a. On considère l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ étudiée dans la partie **1**, question **2**.

- Calculer le discriminant Δ de l'équation.
- En appliquant le théorème précédent, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$. Retrouve-t-on ce qui a été obtenu à la partie **1**, question **2d.** ?

b. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

- $z^2 - 4z + 5 = 0$.
- $3z^2 + 3z - 6 = 0$.
- $z^2 + z + 1 = 0$.

2 Démonstration du troisième point du théorème

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont trois réels avec a non nul. On se place dans le cas où le discriminant Δ de cette équation est strictement négatif.

a. Montrer que, pour tout complexe z, $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

b. En déduire que l'équation (E) équivaut à l'équation (E') : $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$.

c. Résoudre l'équation (E') et obtenir le troisième point du théorème.

▸Exercices n° 61 à 66

TP2 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Linéariser, c'est transformer un produit de fonctions trigonométriques (avec ou sans exposant) en une somme de fonctions trigonométriques du premier degré qui lui soit égale. La linéarisation est surtout utilisée pour le calcul de primitives (et donc d'intégrales). Il existe essentiellement trois types de formules qui permettent de linéariser.

1 Formules de duplication

Ces formules ont été établies en Première :

> Pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ et $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

1 Soit x un réel.

- En utilisant la première formule de duplication, exprimer $\cos^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.
- En écrivant $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$, exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos 2x$.

En déduire la linéarisation suivante de $\cos^4 x$: $\cos^4 x = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

2 En utilisant la deuxième formule de duplication, établir une linéarisation de $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et $\cos 2x$.

2 Formules d'Euler

On rappelle ces deux formules vues dans le cours :

$$\text{Pour tout réel } \theta,\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1 Le but de la question est de retrouver la formule de duplication de la partie **1** :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

a. En utilisant la seconde formule d'Euler et en développant le carré, montrer que :

$$\sin^2 x = -\frac{1}{4}(2 - e^{2ix} - e^{-2ix}).$$

b. En utilisant la première formule d'Euler, exprimer $-\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-2ix}$ en fonction de $\cos 2x$.

c. En déduire la formule de duplication de la partie **1** : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

2 Le but de la question est de linéariser $\cos^3 2x$.

a. En utilisant la première formule d'Euler et en développant le cube, montrer que :

$$\cos^3 2x = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{6ix}+\mathrm{e}^{-6ix}+3\mathrm{e}^{2ix}+3\mathrm{e}^{-2ix}).$$

b. En utilisant à nouveau la première formule d'Euler, exprimer $\mathrm{e}^{6ix}+\mathrm{e}^{-6ix}$ en fonction de $\cos 6x$ puis $\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix}$ en fonction de $\cos 2x$.

c. Déduire de ce qui précède une linéarisation de $\cos^3 2x$, puis la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 2x\,\mathrm{d}x$.

3 Formules de transformation de produit en somme

1 Le but de la question est de linéariser $\sin 5x \sin 3x$. Pour ce faire, on cherche à établir une formule de transformation de produit en somme sur $\sin a \sin b$.

a. On rappelle les formules d'addition vues en Première :

$$(1): \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b\,;$$
$$(2): \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b\,;$$
$$(3): \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b \cos a\,;$$
$$(4): \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b \cos a.$$

En écrivant l'égalité obtenue en soustrayant l'égalité (1) de l'égalité (2) membre à membre, montrer que $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$.

b. En utilisant cette dernière expression, linéariser $\sin 5x \sin 3x$.

2 Le but de la question est de déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x \cos 3x$. Pour ce faire, on cherche à linéariser $\cos 2x \cos 3x$, donc à établir une formule de transformation de produit en somme sur $\cos a \cos b$.

a. On reprend les formules d'addition de la question précédente. En écrivant l'égalité obtenue en ajoutant les égalités (1) et (2) membre à membre, établir que :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

b. En utilisant cette dernière expression, linéariser $\cos 2x \cos 3x$ et préciser les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3 Le but de la question est de linéariser $\sin^3 2x$.

a. En utilisant une formule de duplication, linéariser $\sin^2 2x$.

b. En utilisant $\sin^3 2x = \sin^2 2x \sin 2x$, en déduire que $\sin^3 2x = \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 4x \sin 2x)$.

c. En s'inspirant des démarches suivies aux questions **1** et **2**, montrer que :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)].$$

Linéariser alors $\cos 4x \sin 2x$.

d. Déduire de ce qui précède une linéarisation de $\sin^3 2x$.

▸Exercices n° 49 à 52

Par convention, dans tout ce qui suit, les nombres a, a', b et b' sont des nombres réels.

1> Forme algébrique d'un nombre complexe

Définitions

• Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $a + bi$, où a et b sont deux réels et i est un nombre dont le carré est égal à -1 : $i^2 = -1$. Cette écriture est dite **forme algébrique** du nombre complexe. Le réel a est la **partie réelle** du nombre complexe et le réel b est sa **partie imaginaire**.

• L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

• Deux nombres complexes sont **égaux** si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales : $a + bi = a' + b'i$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

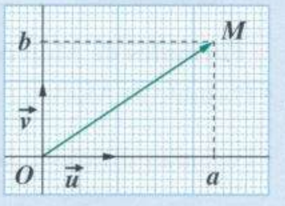
Calculs sous forme algébrique

• **Addition et multiplication de deux complexes** : l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ s'effectuent en utilisant les règles de calcul usuelles et le fait que $i^2 = -1$.

• **Conjugué d'un complexe** : soit le nombre complexe $z = a + bi$. On appelle conjugué de z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$. En particulier $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

• **Quotient de deux complexes** : pour obtenir le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Représentation géométrique d'un nombre complexe



Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, tout nombre complexe $z = a + bi$ est associé :

• soit au point M de coordonnées (a, b) ;

• soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a, b).

On dit alors que :

• $z = a + bi$ est **l'affixe** du point $M(a, b)$ ou que le point $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + bi$;

• $z = a + bi$ est **l'affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$ ou que le vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$ est le **vecteur image** du nombre complexe $z = a + bi$.

2> Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un nombre complexe

Définitions

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul. On note M le point d'affixe z dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

• On appelle **module** de z, et on note $|z|$, le réel égal à la distance OM : $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$.

• On appelle **argument** de z non nul, et on note $\arg(z)$, tout nombre de la forme $\theta + k2\pi$, où θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et k un entier relatif.

• Si z a pour module ρ et pour argument θ, on note $z = [\rho, \theta]$. Cette écriture est appelée **écriture trigonométrique** de z.

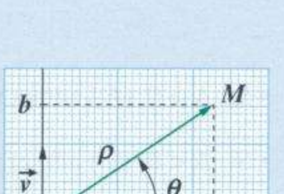
• Pour tout nombre complexe z non nul de module ρ et d'argument θ, on écrira $z = \rho e^{i\theta}$. Cette écriture est appelée **forme exponentielle** de z.

Passage d'une forme à une autre

Soit z un nombre complexe non nul.

• Si la forme algébrique de z est $z = a + bi$, alors le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et un argument de z est θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



• Si la forme trigonométrique de z est $z = [\rho, \theta]$ ou si la forme exponentielle de z est $z = \rho e^{i\theta}$, alors la partie réelle de z est $\rho\cos\theta$ et la partie imaginaire de z est $\rho\sin\theta$, c'est-à-dire $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$.

Module et argument de la différence de deux complexes

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan muni d'un repère orthonormal.

• **Affixe d'un vecteur** : l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

• **Distance et mesure d'angle** : $AB = |z_B - z_A|$ et $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

Calculs sous forme trigonométrique et exponentielle

	Calculs sous forme trigonométrique avec $z = [\rho, \theta]$ et $z' = [\rho', \theta']$	**Calculs sous forme exponentielle avec $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$**
Produit	$[\rho, \theta]\cdot[\rho', \theta'] = [\rho\cdot\rho', \theta + \theta']$	$(\rho e^{i\theta})\cdot(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	$[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$	$(\rho\cdot e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
Inverse	$\dfrac{1}{[\rho, \theta]} = \left[\dfrac{1}{\rho}, -\theta\right]$	$\dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
Quotient	$\dfrac{[\rho, \theta]}{[\rho', \theta']} = \left[\dfrac{\rho}{\rho'}, \theta - \theta'\right]$	$\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

Formules de Moivre et d'Euler

• Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout entier naturel n.

• Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

3> Transformations géométriques associées

Translation

Soit a un nombre complexe. La transformation géométrique associée à l'application $f : z \mapsto z + a$ est la translation dont le vecteur a pour affixe a.

Rotation

Soit θ un nombre réel. La transformation géométrique associée à l'application $f : z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

4> Équations du second degré à coefficients réels

Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont trois réels avec a non nul. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E).

• Si $\Delta > 0$, (E) admet exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ ;$$

• Si $\Delta = 0$, (E) admet une seule solution réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;

• Si $\Delta < 0$, (E) admet exactement deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Associer un nombre complexe et un point du plan

Le point M d'affixe $z = a + ib$ a pour coordonnées (a, b).
Pour construire le point M d'affixe $z = [\rho, \theta]$, on construit la demi-droite issue de O qui forme un angle de mesure θ avec le demi-axe $(O, \vec{u})$ et le cercle de centre O et de rayon ρ.
Le nombre $\rho e^{i\theta}$ est le nombre de module ρ et d'argument θ.

1 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Représenter avec précision les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \left[3, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Réponse

Écrire un nombre complexe sous forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle

Les différentes formes d'un nombre complexe sont :
$z = a + ib$ (forme algébrique) ;
$z = [\rho, \theta]$ (forme trigonométrique) ;
$z = \rho e^{i\theta}$ (forme exponentielle).
Pour passer de la forme algébrique aux deux autres, on commence par déterminer le module $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et on cherche un argument θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho}$.

2 Écrire les nombres z_1, z_2 et z_3 de l'exercice précédent sous leurs deux autres formes.

Réponse

Calcul du module de z_1 : $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;
Soit θ, un argument de z_1 :

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où une forme trigonométrique de z_1 est $z_1 = \left[\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

et une forme exponentielle de z_1 est $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
Une forme exponentielle de z_2 est $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

La forme algébrique de $z = [\rho, \theta]$ est $z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$.

On a $z_2 = 3\cos\frac{\pi}{3} + i\,3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$, donc la forme algébrique de z_2 est $z_2 = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Une forme trigonométrique de z_3 est $z_3 = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$; on a $z_3 = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et une forme algébrique de z_3 est $z_3 = \sqrt{3} - i$.

Calculer sous forme algébrique

La somme ou le produit de deux nombres complexes écrits sous forme algébrique s'effectue en utilisant les mêmes méthodes de calcul que dans $\mathbb{R}$, et le fait que $i^2 = -1$.

Pour effectuer un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. On utilise ensuite : $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

3 Soit les nombres $z_1 = 1 - 4i$ et $z_2 = 2 - 3i$.
Calculer :

a. $z_1 + z_2$. **b.** z_1z_2. **c.** $\frac{z_1}{z_2}$.

Réponses

a. $z_1 + z_2 = 1 - 4i + 2 - 3i = 3 - 7i.$

b. $z_1z_2 = (1 - 4i)(2 - 3i) = 2 - 3i - 8i + 12i^2$
$z_1z_2 = 2 - 12 - 3i - 8i = -10 - 11i.$

c. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - 4i}{2 - 3i} = \frac{(1 - 4i)(2 + 3i)}{2^2 + (-3)^2} = \frac{14 - 5i}{13}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{14}{13} - \frac{5}{13}i.$

Calculer avec la forme trigonométrique

Pour effectuer un produit sous forme trigonométrique, on multiplie les modules et on ajoute les arguments.

Pour effectuer un quotient sous forme trigonométrique, on divise les modules et on soustrait les arguments.

4 Soit $z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$. Calculer :

a. z_1z_2. **b.** z_1^5. **c.** $\frac{z_1}{z_2}$.

Réponses

a. $z_1z_2 = \left[2 \times \sqrt{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right].$

b. $z_1^5 = \left[2^5, 5 \times \frac{\pi}{3}\right] = \left[32, \frac{5\pi}{3}\right].$

c. $\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right].$

Calculer avec la forme exponentielle

5 Soit $z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Calculer :

a. $z_3 z_4$. **b.** z_3^3. **c.** $\dfrac{z_3}{z_4}$.

Réponses

Sous forme exponentielle, on utilise les propriétés des puissances : $e^{ia} \times e^{ib} = e^{ia+ib} = e^{i(a+b)}$.

a. $z_3 z_4 = \sqrt{3} \times 3 \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = 3\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$(e^{ia})^n = e^{ina}$.

b. $z_3^3 = \left(\sqrt{3} \times e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = (\sqrt{3})^3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 3\sqrt{3}\,e^{i\frac{2\pi}{3} \times 3}$

$z_3^3 = 3\sqrt{3}\,e^{i2\pi} = 3\sqrt{3}$.

$\dfrac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

c. $\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{2\pi}{3} - \left(-i\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Linéariser une expression à l'aide des formules d'Euler

6 Linéariser l'expression $\sin^2 x \cos 3x$ à l'aide des formules d'Euler.

Réponse

On remplace le sinus et le cosinus par leur expression à l'aide des formules d'Euler.

$$\sin^2 x \cos 3x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$$

On développe l'expression obtenue en utilisant les propriétés de la forme exponentielle.

$$= \frac{e^{i2x} - 2e^{ix} \times e^{-ix} + e^{-i2x}}{-4} \times \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$$

$$= \frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{-4} \times \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$$

$$= \frac{e^{i2x} \times e^{i3x} + e^{i2x} \times e^{-i3x} - 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i2x} \times e^{i3x} + e^{-i2x} \times e^{-i3x}}{-8}$$

$$= \frac{e^{i5x} + e^{-ix} - 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{ix} + e^{-i5x}}{-8}.$$

On rassemble les termes comportant des puissances opposées pour retrouver les formules d'Euler.

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} - 2\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 5x - 2\cos 3x + \cos x).$$

Reconnaître une transformation géométrique associée à une transformation complexe

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a. On appelle T la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z - 2 + i\sqrt{3}.$$

Caractériser la transformation T.

b. On appelle R la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z.$$

Caractériser la transformation R.

Réponses

La transformation géométrique associée à la transformation complexe $z \mapsto z + a$ est la translation de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe a.

a. On pose $a = -2 + i\sqrt{3}$ et soit A le point d'affixe a. La transformation T est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

La transformation géométrique associée à la transformation complexe $z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

b. R est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$

Réponse

Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, on calcule son discriminant.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36.$

Si le discriminant est strictement négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i.$$

Forme algébrique

1

C Calculer :

a. $(2-i)+(1-i\sqrt{3})$. b. $(-2+i)-(11-3i)$.

c. $(-\sqrt{2}+i)-(\sqrt{2}+3i)$.

2

Soit les nombres complexes :

$$z=-2+i \text{ et } z'=3+2i.$$

Calculer :

a. $z+z'$. b. $z-z'$. c. $3z-2z'$.

3

C On considère les nombres complexes $z=-3+2i$ et $z'=2-i$. Calculer zz', z^2 et z'^3.

4

Soit les nombres complexes :

$$z=-2+i \text{ et } z'=3+2i.$$

Calculer :

a. zz'. b. z^2. c. $z\bar{z}$.

5

C Calculer : $\dfrac{1}{5-i}$; $\dfrac{2-i}{3-i}$; $\dfrac{2-i}{3-i}-\dfrac{3-i}{2-i}$;

$\dfrac{(2-i)(1+i)}{3+i}$.

6

Soit les nombres complexes :

$$z=-2+i \text{ et } z'=3+2i.$$

Calculer :

a. $\dfrac{z}{z'}$. b. $\dfrac{2+z}{2-z'}$. c. $\dfrac{1+iz}{2-iz'}$.

7

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, placer A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A=2+i$, $z_B=2-5i$, $z_C=-3i$ et $z_D=\overline{z_C}$.

Forme trigonométrique

8

C Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, placer E, F, G et H les points d'affixes respectives $z_E=\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$, $z_F=\left[3,-\dfrac{\pi}{6}\right]$,

$$z_G=\left[\frac{5}{2},-\frac{\pi}{2}\right],\quad z_H=\left[\frac{1}{2},\frac{3\pi}{4}\right].$$

9

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, en laissant les traits de construction, placer A, B, C et D les points d'affixes respectives

$$z_A=\left[3,-\frac{\pi}{4}\right],\qquad z_B=\left[\frac{1}{2},\frac{5\pi}{6}\right],$$

$$z_C=\left[3,\frac{3\pi}{2}\right],\qquad z_D=[3,0].$$

Forme algébrique - Forme trigonométrique

10

C Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1=-5$; $z_2=3i$; $z_3=-1+\sqrt{3}i$ et $z_4=-1-i$.

11

Même exercice que le précédent avec :

$z_5=3\sqrt{3}-3i$; $z_6=\sqrt{3}+i$; $z_7=1-i$; $z_8=3$ et $z_9=-5i$.

12

C Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$; $z_2=\left[1,-\dfrac{\pi}{2}\right]$; $z_3=\left[4,-\dfrac{5\pi}{6}\right]$;

$z_4=\left[3,-\dfrac{3\pi}{4}\right]$; $z_5=[5,\pi]$.

13

Même exercice que le précédent avec :

$z_1=\left[2,\dfrac{2\pi}{3}\right]$; $z_2=\left[3,\dfrac{\pi}{4}\right]$; $z_3=\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right]$;

$z_4=\left[3,\dfrac{3\pi}{2}\right]$; $z_5=[3,0]$.

Module et argument de la différence de deux nombres complexes

14

C Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=2+2i\sqrt{3},\ z_B=2-2i\sqrt{3},\ z_C=-4.$$

a. Placer ces points.

b. Calculer les distances OA, OB et OC. Que peut-on en déduire ?

c. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

15

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 4,\ z_B = 1 + i\sqrt{3},\ z_C = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_D = 2.$$

a. Placer ces points.

b. Montrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle de centre D.

c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

16

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -1 + 2i$ et $z_3 = 2 - i$.

On appelle A le point d'affixe $a = 1 + i$.

a. Représenter A, M_1, M_2 et M_3 dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Calculer $|z_1 - a|$, $|z_2 - a|$ et $|z_3 - a|$.

c. En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

17

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère A, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_D = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

a. Calculer $|z_A - z_C|$, $|z_A - z_D|$ et $|z_C - z_D|$. En déduire la nature du triangle ACD.

b. Déduire de la question précédente que ces trois points appartiennent à un cercle dont on précisera le centre I et le rayon.

18

C Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = -1 - 2i$ et $z_D = 2i$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a. $|z - 4| = 3$. **b.** $|z - 4| = |z - 2i|$.

c. $|z + 1 + 2i| = 5$.

19

Même exercice que le précédent en reprenant les mêmes données.

a. $|z - 1 - 2i| = 2$.

b. $|z - (1 + 2i)| = |z + 1 + 2i|$.

c. $|z + 1 + 2i| = 3$.

20

C Le plan est rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthonormal direct. On considère le point A d'affixe $z_A = 2i$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

21

Le plan est rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthonormal direct. On considère le point A d'affixe $z_A = 2$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - 2) = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Calculs sous forme trigonométrique

22

C Soit les nombres complexes

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right],\ z_2 = \left[3, \frac{3\pi}{4}\right],\ z_3 = \left[2, \frac{\pi}{2}\right].$$

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a. $z_1 z_2$. **b.** $z_2 z_3$. **c.** $z_1 z_3$.

23

Même exercice que le précédent avec :

$$z_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right],\ z_2 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right],\ z_3 = [6, 0].$$

24

C En reprenant les nombres de l'exercice **22**, déterminer la forme trigonométrique, puis algébrique des nombres complexes suivants :

a. z_1^2. **b.** z_1^3. **c.** z_2^2. **d.** z_3^5.

25

Même exercice que le précédent avec les nombres de l'exercice **23**.

26

C En reprenant les nombres de l'exercice **22**, donner les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a. $\dfrac{1}{z_1}$. **b.** $\dfrac{1}{z_2}$. **c.** $\dfrac{1}{z_3}$.

27

Même exercice que le précédent avec les nombres de l'exercice **23**.

28

C En reprenant les nombres de l'exercice **22**, donner les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a. $\frac{z_2}{z_3}$. **b.** $\frac{z_1}{z_3}$. **c.** $\frac{z_2}{z_1}$.

29

Même exercice que le précédent avec les nombres de l'exercice **23**.

30

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

1. Calculer la forme algébrique de z_1z_2.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b. Calculer le module et un argument de z_1z_2.

c. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et celle de $\sin\frac{13\pi}{12}$.

31

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \ z_2 = -\sqrt{3} + 3i \ \text{ et } \ z_3 = \frac{4\sqrt{3}z_2}{9z_1}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1, z_2 et z_3. En déduire la forme algébrique de z_3.

b. Déterminer la forme trigonométrique, puis la forme algébrique de z_2^3.

c. n étant un nombre entier strictement positif, exprimer en fonction de n la forme trigonométrique de z_1^n. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle z_1^n est un imaginaire pur ?

32

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \ \text{ et } \ z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

b. Déterminer le module et un argument de z_1^3 et de z_2^2.

c. En déduire le module et un argument de

$$Z = \frac{z_1^3}{z_2^2}.$$

33

On considère les nombres complexes :

$$z_0 = -2, \ z_1 = 2(1 + i) \ \text{ et } \ z_2 = 2(1 - i).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.

2. Déterminer le module et un argument de :

$$Z = \frac{z_0 z_1^2}{z_2^3}.$$

3. On appelle M_0, M_1 et M_2 les images respectives de z_0, z_1 et z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.

a. Placer ces points.

b. Calculer les distances M_1M_2, M_2M_0 et M_0M_1. En déduire la nature du triangle $M_0M_1M_2$.

34

On considère le nombre complexe :

$$z = (\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)i.$$

a. Calculer sous forme algébrique z^2.

b. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.

Forme exponentielle

35

C Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants et les écrire sous forme exponentielle.

a. $2i$. **b.** $-\sqrt{3} + i$. **c.** $-i\sqrt{3}$.

36

Même exercice que le précédent avec :

a. $2 - 2i\sqrt{3}$. **b.** -3. **c.** $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$.

37

C Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a. $2e^{i\frac{\pi}{2}}$. **b.** $6e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **c.** $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

38

Même exercice que le précédent avec :

a. $8e^{i\frac{5\pi}{6}}$. **b.** $\frac{1}{2}e^{i\pi}$. **c.** $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

39

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3} - i.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c. En déduire la forme exponentielle de :

$$z_1 z_2, \ \frac{1}{z_1}, \ \frac{1}{z_2}, \ \frac{z_1}{z_2}, \ \frac{z_2}{z_1}, z_1^3 \text{ et } z_2^4.$$

40

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \ \text{ et } \ z_2 = 3 - 3i\sqrt{3}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c. En déduire la forme exponentielle de :

$$z_1 z_2, \ \frac{1}{z_1}, \ \frac{1}{z_2}, \ \frac{z_1}{z_2}, \ \frac{z_2}{z_1}, z_1^2 \text{ et } z_2^3.$$

Formules de Moivre et d'Euler

41

À l'aide de la formule de Moivre, montrer que :

a. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$

b. $\sin 2x = 2\sin x \cos x.$

42

Exprimer en fonction de $\cos 3x$ et $\sin 3x$.

a. $\cos 6x.$ **b.** $\sin 6x.$

43

C Écrire en utilisant les formules d'Euler :

a. $\sin 3x.$ **b.** $\cos 2\theta.$

44

Même exercice que le précédent avec :

a. $-\sin 4t.$ **b.** $-3\cos 5x.$

45

C Retrouver, à l'aide des formules d'Euler, une expression en sinus ou en cosinus :

a. $\dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}.$ **b.** $\dfrac{-e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{4}.$

46

Même exercice que le précédent avec :

a. $\dfrac{3e^{-i6x} + 3e^{i6x}}{2}.$ **b.** $\dfrac{-e^{4it} + e^{-4it}}{4i}.$

47

Écrire l'expression suivante en utilisant la fonction cosinus :

$$P(x) = \frac{e^{i3x} + 7e^{i4x} + 7e^{-i4x} + e^{-i3x}}{8}.$$

48

Écrire l'expression suivante en utilisant la fonction sinus :

$$P(x) = \frac{e^{i4x} - 5e^{i6x} + 5e^{-i6x} - e^{-i4x}}{-4i}.$$

49

C Linéariser en utilisant les formules d'Euler ou une autre méthode.

a. $\sin 2\theta \sin 4\theta.$ **b.** $\cos 3\theta \sin 2\theta \sin 4\theta.$

50

Même exercice que le précédent avec :

a. $\cos^3 2t.$ **b.** $\cos^2 2t \sin 3t.$

51

Montrer que $\sin^4\theta = \dfrac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3).$

En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta.$

52

Montrer que $(\sin x \cos x)^2 = \dfrac{1}{8}(1 - \cos 4x).$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x \cos x.$$

Déterminer la valeur efficace de f sur $[0, \pi]$, c'est-à-dire le nombre positif f_e tel que $f_e^2 = \displaystyle\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx.$

Transformations géométriques

> Les exercices **53** à **63** concernent uniquement les élèves des sections STI spécialités : **Génie électronique, Génie électrotechnique et Génie optique**.

53

C Déterminer la nature de la transformation géométrique associée à l'application f donnée, puis, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, placer un point M d'affixe z et le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

a. $f : z \mapsto z + i.$ **b.** $f : z \mapsto z + 1 + i.$

54

Même exercice que le précédent avec :

a. $f: z \mapsto z - 1$. b. $f: z \mapsto z - 1 + 2i$.

55

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit A le point d'affixe $z_A = -2 + 3i$.

a. Quelle est l'affixe du point B, image de A par la translation de vecteur $\vec{w}(1, 2)$?

b. Quelle est l'affixe du point C, antécédent de A par la translation de vecteur $\vec{w}(1, 2)$?

56

C Déterminer la nature de la transformation géométrique associée à l'application f donnée, puis, dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, placer un point M d'affixe z et le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

a. $f: z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}z$. b. $f: z \mapsto e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$.

57

Même exercice que le précédent avec :

a. $f: z \mapsto e^{-i\frac{3\pi}{4}}z$. b. $f: z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

58

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit A le point d'affixe $z_A = -2 + 3i$.

a. Construire le point B, image de A par la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer graphiquement z_B et vérifier par le calcul.

b. Construire le point C, antécédent de A par la rotation $\mathcal{R}$. Déterminer graphiquement puis par le calcul z_C.

59

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}z_A$.

a. Par quelle transformation géométrique le point B est-il l'image de A ?

b. Déterminer les coordonnées du point B.

c. Soit le point C d'affixe $z_C = z_B + i$. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image de B ? Calculer les coordonnées de C.

60

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

a. Soit le nombre complexe $a = \sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de a. Construire le point A d'affixe a.

b. f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exprimer $f(z)$ en fonction de z.

c. On désigne par B l'image de A par $\mathcal{R}$. Déterminer l'affixe b de B sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

d. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Second degré

61

C Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $4z^2 - 12z + 13 = 0$. b. $2z^2 + 3z - 5 = 0$.

c. $z^2 - 4z + 13 = 0$.

62

Même exercice que le précédent avec :

a. $z^2 - (2 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$.

b. $\frac{1}{4}z^2 - \frac{4}{5}z + \frac{16}{25} = 0$.

c. $z^2 + 4 = 0$.

63

Déterminer une équation du second degré ayant pour solutions $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$.

64

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes puis déterminer le module et un argument de chaque solution et son écriture exponentielle.

a. $z^2 - 4z + 8 = 0$. b. $z^2 - 2z + 4 = 0$.

65

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

2. Soit $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ où z est un nombre complexe.

a. Vérifier que $P(6) = 0$.

b. Déterminer a, b, et c tels que, pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z - 6)(az^2 + bz + c).$$

c. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

66

Soit $P(z) = z^3 - 7z^2 + 18z - 18$.

a. Calculer $P(3)$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Pour aller plus loin...

67

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère les nombres complexes :

$$Z_A = 1 + i\sqrt{3},\ Z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ et } Z_C = \frac{Z_A^2}{Z_B}.$$

a. Écrire Z_C sous forme algébrique.

b. Écrire Z_A, Z_B et Z_C sous forme trigonométrique.

c. En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{5\pi}{12} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{12}.$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x.$$

a. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = 4\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right).$$

b. Résoudre l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

68

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 4z + 16 = 0.$$

On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 désigne la solution dont la partie imaginaire est positive.

b. Déterminer le module et un argument de chacune de ces solutions.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives z_1 et iz_2.

a. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de iz_2.

b. Sans utiliser de valeurs approchées, placer, dans le plan complexe, les points A et B (laisser les traces de construction).

c. Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe z.

• Interpréter géométriquement le module $|z - z_1|$ du nombre complexe $z - z_1$.

• Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que :

$$|z - z_1| = |z - iz_2|.$$

• Construire l'ensemble (Δ) sur la figure réalisée à la question **2.b.**.

69

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z + 8.$$

1. a. Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_0 = -2,\ z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} + i.$$

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_1^9 \text{ et } \frac{z_2^{2005}}{z_0 z_1}.$$

(On donnera pour chaque nombre son argument principal, c'est-à-dire l'argument appartenant à $]-\pi, \pi]$ et pour les deux derniers le module sous la forme a^n, où a est un nombre réel positif et n un entier naturel).

Toujours en utilisant la notation a^n, donner la forme algébrique de z_1^9 et de $\dfrac{z_2^{2005}}{z_0 z_1}$.

70

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.

b. Construire les points A et B d'affixes respectives $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -2 - 2i$.

c. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et de z_2.

d. Déterminer la forme exponentielle du produit $z_1 z_3$ avec $z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

e. Déterminer la forme algébrique de z_3 et celle du produit $z_1 z_3$.

f. En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{17\pi}{12} \text{ et } \sin\frac{17\pi}{12}.$$

71

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_0 = 2i,\ z_1 = \sqrt{2}(1 - i) \text{ et } z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

2. Écrire z_0 et z_1 sous forme exponentielle et z_2 sous forme algébrique.

3. a. Soit $\mathcal{R}$ la transformation géométrique du plan $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe : $z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}z$. Préciser la nature de cette transformation.

b. Montrer que $z_0 = e^{i\frac{3\pi}{4}}z_1$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

c. Déterminer l'affixe du point D image du point A par $\mathcal{R}$. Représenter ce point dans le plan $\mathcal{P}$.

d. Quelle est l'image de la droite (AB) par la transformation $\mathcal{R}$?

72

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points B, C, D, E et F, images respectives des nombres complexes $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + i\sqrt{3}$, $z_D = 4$, $z_E = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Écrire les nombres complexes z_B, z_C, z_D, z_E et z_F sous forme trigonométrique.

2. Construire à la règle et au compas les points B, C, D, E et F dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Calculer les distances OB, BC et CD. En déduire les distances DE, EF et OF. Que constate-t-on ?

4. Calculer les mesures (en radians) des angles $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO})$.

5. Quelle est la nature du triangle OCD ? Justifier la réponse.

6. Calculer, en cm^2, l'aire du polygone $OBCDEF$.

73

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 + 8z + 17 = 0$.

2. Soit $P(z) = z^3 + 2z^2 - 31z - 102$. Vérifier que $P(z) = (z-6)(z^2 + 8z + 17)$.

3. Utiliser les questions **1.** et **2.** pour résoudre l'équation $z^3 + 2z^2 - 31z - 102 = 0$.

Partie B

1. a. Placer les points A, B et B' d'affixes respectives : 6, $-4+i$ et $-4-i$.

b. Justifier que $OB = OB'$.

c. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{-4+i}{-4-i}$.

d. Quel est le module de $\dfrac{-4+i}{-4-i}$?

Déterminer à la calculatrice, un argument de $\dfrac{-4+i}{-4-i}$ (on en donnera l'arrondi à 10^{-2} près).

e. Déduire des questions **b.** et **d.** les mesures en degrés des angles du triangle OBB' (on en donnera les arrondis à l'unité).

2. Soit Ω le point d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

a. Construire les points C et D symétriques des points A et B par rapport à Ω.

b. Sans faire de calcul, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

c. Calculer les affixes de C et D et retrouver le résultat ci-dessus à l'aide des affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

74

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On note M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\ ;\ z_2 = 1 - i\ ;\ z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. a. Écrire z_1 puis z_3 sous forme algébrique.

b. Déterminer le module et un argument de z_2 puis de z_3.

2. En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{\pi}{12} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12}.$$

3. On note A le point d'affixe 1. Représenter les points O, A, M_1, M_2 et M_3 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Préciser la nature du triangle OAM_2.

4. On considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

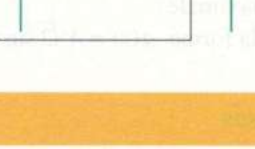
a. Quelle est l'image du point A ?

b. Quelle est l'image du point M_2 ?

c. En déduire la nature du triangle OM_1M_3.

75

Le quadripôle représenté ci-dessous est constitué d'un résistor de résistance R exprimé en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en F.



On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s.

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par $Z = \frac{z_e}{z_s}$.

On admet que $Z = \frac{1}{1 + iRC\omega}$, où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Dans tout l'exercice, on suppose que :

$$R = 50\ \Omega,\ C = 2\ \text{F} \text{ et } \omega = \frac{1}{100}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

1. Vérifier que $Z = \frac{1}{1+i}$.

Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z.

2. Le module de z_s peut-il être le double de celui de z_e ? Justifier la réponse.

3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\frac{\pi}{2}$; déterminer alors un argument de z_e.

4. On suppose dans cette question que :

$$z_e = 150(-\sqrt{3} + i).$$

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_e sous forme exponentielle $re^{i\alpha}$.

b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe z_s correspondant.

c. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités. Placer les points M_e et M_s images respectives des nombres complexes z_e et z_s.

Pour les exercices **76** à **79**, on utilisera les notions rappelées dans l'activité 2.

On admettra que tous les nombres complexes cherchés ont un argument dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et qu'en conséquence on peut déterminer celui-ci à partir de sa tangente.

On rappelle que, lorsqu'on étudie un circuit en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, les grandeurs (intensités ou tensions) peuvent être exprimées :

• soit sous la forme $a(t) = A\sin(\omega t + \theta)$, où A est la valeur maximale ;

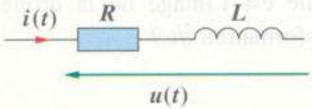
• soit sous la forme $a(t) = A\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta)$, où A est la valeur efficace.

On associe alors à cette grandeur $a(t)$ le nombre complexe, noté $\underline{A}$, de module A (valeur maximale ou valeur efficace) et d'argument θ (phase à l'origine des temps).

76

Le circuit RL « série » ci-dessous est soumis à une tension $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$.

On donne $U = 220$ V, $\omega = 314\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 100\ \Omega$ et $L = 1{,}1$ H.



1. Donner la forme trigonométrique de $\underline{U}$.

2. a. Exprimer, sous forme algébrique, en fonction de R, L et ω, l'impédance équivalente $\underline{Z}$ du circuit.

b. Exprimer $|\underline{Z}|$ en fonction de R, L et ω.

c. Soit θ un argument de $\underline{Z}$. Exprimer $\tan\theta$ en fonction de L, R et ω.

3. Exprimer le module et un argument de $\underline{I}$ en fonction de U, R, L, ω et θ.

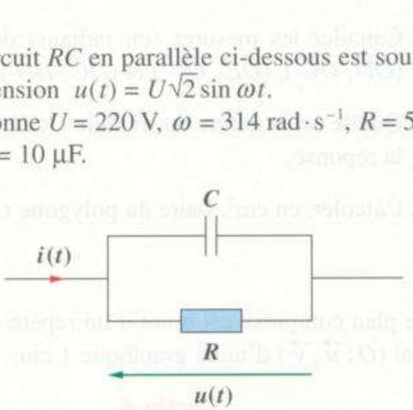
Donner une valeur approchée de ces nombres à 10^{-2} près.

En déduire l'expression de $i(t)$.

77

Le circuit RC en parallèle ci-dessous est soumis à une tension $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$.

On donne $U = 220$ V, $\omega = 314\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 500\ \Omega$ et $C = 10\ \mu$F.



1. Donner la forme trigonométrique de $\underline{U}$.

2. a. Exprimer, sous forme algébrique, en fonction de R, C et ω, l'admittance équivalente $\underline{Y}$ du circuit.

b. Exprimer $|\underline{Y}|$ en fonction de R, C et ω.

c. Soit θ un argument de $\underline{Y}$. Exprimer $\tan\theta$ en fonction de C, R et ω.

3. Exprimer le module et un argument de $\underline{I}$ en fonction de U, R, C, ω et θ.

Donner une valeur approchée de ces nombres à 10^{-2} près.

En déduire l'expression de $i(t)$.

78

Soit $u(t) = U\sqrt{2}\sin \omega t$.

a. Donner la forme trigonométrique de $\underline{U}$ et celle de $j\omega$. Calculer, sous forme trigonométrique, le nombre $j\omega \underline{U}$.

b. Soit u' la fonction dérivée de u. Montrer que $u'(t) = U\sqrt{2}\,\omega \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Déterminer la grandeur complexe $\underline{U}'$ associée à la fonction u'.

c. Que peut-on déduire des résultats des deux questions précédentes ?

79

Soit $u(t) = U\sqrt{2}\sin \omega t$.

a. Donner la forme trigonométrique de $\underline{U}$ et celle de $j\omega$. Calculer, sous forme trigonométrique, le nombre $\dfrac{\underline{U}}{j\omega}$.

b. Soit u_0 la primitive de u prenant la valeur $-\dfrac{U\sqrt{2}}{\omega}$ en 0. Déterminer $u_0(t)$.

c. Soit $\underline{U}_0$ la grandeur complexe associée à la fonction u_0. Montrer que $\underline{U}_0 = \dfrac{\underline{U}}{j\omega}$.

Pour préparer le Bac

A

1. i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants :

$$a = \sqrt{3} + i \text{ et } b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Déterminer le module et un argument de a, b et $\dfrac{a}{b}$.

2. Soit $z = \cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ avec 4 cm comme unité graphique. On considère les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'affixes respectives z, z^2, z^3 et z^4.

a. Déterminer le module et un argument de z, z^2, z^3 et z^4.

b. En laissant vos traits de construction sur la copie, placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.

B

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère le point A d'affixe $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ et le point B d'affixe $z_B = \overline{z}_A$, où $\overline{z}_A$ désigne le nombre complexe conjugué de z_A.

a. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r désigne leur module.

b. Placer avec précision les points A et B dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

3. On appelle A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on note $z_{A'}$ l'affixe du point A'.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z_{A'}$.

b. Écrire le nombre complexe $z_{A'}$ sous forme algébrique.

c. Placer le point A' dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

C

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique sera égale à 4 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2. Placer A et B et montrer que le triangle AOB est équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et F son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe du point F et montrer que F est le milieu du segment $[OB]$.

4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$. Déterminer l'affixe de D et montrer que $OD = DB$.

En déduire que la droite (AD) est la médiatrice de $[OB]$.

CHAPITRE 9

Suites

OBJECTIFS

- **Consolider les acquis de Première concernant les suites arithmétiques et les suites géométriques.**
- **Pour les sections STI Génie électronique, Génie électrotechnique et Optique : étudier le comportement global des suites définies sous la forme $u_n = f(n)$ (sens de variation, convergence) et la convergence des suites géométriques.**

> Ce chapitre ne concerne pas les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

ACTIVITÉ 1 « Souvenirs, souvenirs »

Objectif : Vérifier les acquis de Première sur les suites arithmétiques et géométriques.

1. Suite arithmétique

Un objet lâché d'une hauteur h sans vitesse initiale tombe en chute libre. On montre que les distances (exprimées en mètres) qu'il parcourt pendant des intervalles de temps successifs d'une seconde forment la suite arithmétique de premier terme $d_1 = \frac{1}{2}g$ et de raison $r = g$, où g est l'accélération de la pesanteur (pour les calculs, on prendra $g = 10$).

a. Calculer d_1, d_2 (distance parcourue pendant la deuxième seconde de chute), d_3 et d_4.

b. Sur un axe $(O; \vec{i})$ d'unité graphique 0,4 cm, représenter les positions successives de l'objet après 1 seconde, 2 secondes et 3 secondes.

c. Exprimer d_n en fonction de n. Calculer d_{22}.

d. Calculer la distance parcourue en 22 secondes, c'est-à-dire la somme $d_1 + d_2 + \ldots + d_{22}$.

2. Suite géométrique

Un objet lancé avec une certaine vitesse sur un axe horizontal parcourt, pendant des intervalles de temps d'une seconde, des distances (exprimées en mètres) qui forment la suite géométrique de premier terme $d_1 = 5$ et de raison $\rho = \frac{4}{5}$.

a. Calculer d_2 (distance parcourue pendant la deuxième seconde), d_3 et d_4.

b. Sur un axe $(O;\vec{i})$ d'unité graphique 0,4 cm, représenter les positions successives de l'objet après 1 seconde, 2 secondes et 3 secondes.

c. Exprimer d_n en fonction de n. Calculer d_{10}.

d. On considère que l'on ne peut pas représenter correctement sur l'axe du **b.**, des points distants de moins de 0,1 cm. Compte tenu de l'unité graphique, montrer que l'on ne représente pas distinctement les distances inférieures à 0,25 m.

Pour quelles valeurs de n a-t-on $d_n < 0{,}25$? (Indication : si $a^n < b$, où a et b sont deux nombres strictement positifs, on peut déterminer n en utilisant la fonction logarithme.)

e. Calculer la distance parcourue durant les 14 premières secondes : $d_1 + d_2 + \ldots + d_{14}$.

ACTIVITÉ 2 Refroidissement

> Pour les élèves des sections STI **Génie électronique, Génie électrotechnique** et **Optique**.

Objectif : Étudier une situation dans laquelle on est amené à définir une suite sous la forme $u_n = f(n)$.

Lors d'une expérience, on relève la température d'une solution toutes les secondes et on obtient la suite des valeurs ci-dessous :

t (en s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
θ (en °C)	100	90,5	82,9	74,1	67	60,6	54,9	49,7	44,9	40,7	36,8	33,3

1. On note θ_n la température relevée à la n-ième seconde.
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm en abscisse, 0,1 cm en ordonnée), représenter les points A_n de coordonnées respectives (n, θ_n), pour n entier compris entre 0 et 11.

2. On fait l'hypothèse que la loi d'évolution de la température en fonction du temps est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\theta(t) = 100\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction $t \mapsto \theta(t)$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

b. Dans le même repère que précédemment, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de θ.
Les températures relevées confirment-elles l'hypothèse ?

3. On suppose que l'évolution de la température continue, après les relevés, suivant la même loi et on considère alors $\theta_n = \theta(n)$.

a. Calculer θ_{12}, θ_{20} et θ_{30}.

b. Que peut-on dire de θ_{n+1} par rapport à θ_n ? Pourquoi ?

c. Que peut-on dire des valeurs prises par θ_n lorsque n devient très grand ? Pourquoi ?

Dans ce chapitre, on va étudier des suites de nombres définies à partir d'une fonction f par une relation du type $u_n = f(n)$. On utilisera alors les connaissances sur les fonctions pour étudier le comportement de la suite : sens de variation et limite lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Suites arithmétiques

Définition On appelle suite arithmétique toute suite dont chaque terme est obtenu en additionnant au précédent une constante réelle appelée raison.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple : La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

En effet, tout nombre impair s'obtient en additionnant 2 au précédent et le plus petit des nombres entiers impairs est 1.

Théorème • Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si, pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante ; cette constante est la raison de la suite.

• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

(On a aussi $u_n = u_1 + (n-1)r$, ou, pour tout entier positif p, $u_n = u_p + (n-p)r$.)

• La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

– si l'on commence par le terme u_0 : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$;

– si l'on commence par le terme u_1 : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\dfrac{u_1 + u_n}{2}$.

Remarque : On peut retenir ce dernier résultat sous la forme :

$$S = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}.$$

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 12$. Par définition, (u_n) est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = -2$ et sa raison 12.

D'après la deuxième propriété du théorème précédent, on a $u_n = -2 + 12n$. Par exemple, $u_{10} = -2 + 12 \times 10 = 118$.

D'après la troisième propriété du théorème précédent, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{-2 + u_n}{2}.$$

Par exemple, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 11 \times \dfrac{-2 + 118}{2} = 638$.

▸Exercices n° 1 à 13

2 Suites géométriques

Définition On appelle suite géométrique toute suite de nombres réels dont chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par une constante réelle appelée raison.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Exemple : La suite des puissances de 2 est une suite géométrique. Si l'on appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite, on a $u_n = 2^n$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
Il s'agit donc de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2^0 = 1$ et de raison $q = 2$.

Remarque : Si le premier terme ou la raison d'une suite géométrique est nul, alors tous les termes de rang supérieur ou égal à 1 sont nuls. Si ni le premier terme ni la raison d'une suite géométrique ne sont nuls, alors aucun terme de la suite n'est nul. On ne s'intéresse dans la suite de ce paragraphe qu'à des suites géométriques non nulles.

Théorème • Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si, pour tout entier naturel n, u_n est non nul et le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant ; cette constante est alors la raison de la suite.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
(On a aussi : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, ou, pour tout entier p strictement positif, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.)

• La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison q est différente de 1 est :

– si l'on commence par le terme u_0 : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$;

– si l'on commence par le terme u_1 : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Remarque 1 : On peut retenir ce dernier résultat sous la forme :

$$S = \text{Premier terme} \times \frac{1 - \text{Raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{Raison}}.$$

Remarque 2 : Si $q = 1$, pour tout entier n, $u_n = u_0$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (-3)u_n$. Par définition, (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3.
D'après la deuxième propriété du théorème précédent, on a $u_n = 2 \times (-3)^n$. Par exemple, $u_{10} = 2 \times (-3)^{10} = 118\,098$.
D'après la troisième propriété du théorème précédent, on obtient :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 2 \times \frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)} = 2 \times \frac{1-(-3)^{n+1}}{4}.$$

Par exemple, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 2 \times \dfrac{1-(-3)^{11}}{4} = \dfrac{1-(-177\,147)}{2} = 88\,574.$

▸ Exercices n° 14 à 26

3 Comportement global d'une suite définie par $u_n = f(n)$

> Ce paragraphe ne concerne que les élèves des sections STI **Génie électronique**, **Génie électrotechnique** et **Optique**.

1 Représentation

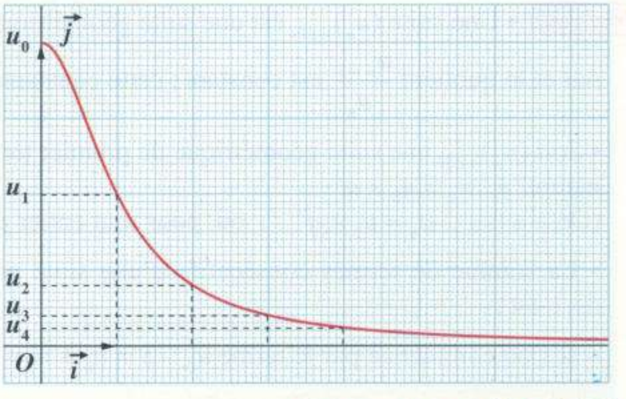
On a vu dans l'activité 2 une situation dans laquelle on s'intéressait aux valeurs prises par une fonction pour chaque valeur entière de la variable. On peut alors représenter les termes de la suite.

Propriété Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n)$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les termes de la suite sont les ordonnées des points de la courbe dont les abscisses sont les entiers naturels.

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. On peut écrire, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.



▸Exercices n° 27 à 33

2 Sens de variation

Définition On dit que la suite (u_n) est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$

On dit que la suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Exemple : On considère la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 0{,}2$. Puisqu'il s'agit d'une suite arithmétique, chaque terme est obtenu en ajoutant la raison au terme précédent : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 0{,}2$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite est donc croissante.

Pour les suites de la forme $u_n = f(n)$, on a le résultat suivant (très « lisible » sur la représentation graphique).

Propriété Si une suite (u_n) est définie par une relation du type $u_n = f(n)$, et si f est monotone sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f.

Remarque : Attention, la réciproque de cette propriété n'est pas vraie. Une suite peut être strictement croissante, ou strictement décroissante, alors que la fonction f n'est pas monotone. On peut se reporter à l'exercice 41 où l'on étudie un contre-exemple.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 1$.
La fonction f est une fonction affine décroissante (le coefficient de x est strictement négatif), par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

▸Exercices n° 34 à 41

3 Limite

Définition Soit une suite (u_n) définie par une relation du type $u_n = f(n)$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, on dit que u_n a pour limite L lorsque n tend vers $+\infty$ et on note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ (L peut être une limite finie ou infinie).
Lorsque L est une limite finie, on dit que la suite (u_n) est convergente.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$.

Si l'on considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$, on peut écrire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = f(n)$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle). D'après la définition ci-dessus, on peut donc dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

À l'aide de cette définition, on obtient aisément les résultats suivants.

Propriété
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- Pour tout nombre entier p strictement positif, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- Pour tout nombre entier p strictement positif, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

▸Exercices n° 42 à 49

4 Convergence des suites géométriques

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q > 0$. On s'intéresse aux valeurs de u_n lorsque n devient très grand. On admet le résultat suivant.

Théorème Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique définie pour tout nombre entier naturel n par $u_n = q^n$, avec $q > 0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est une suite constante égale à 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^n = 0$.
Remarque : La démonstration de ce théorème utilise la fonction f définie par $f(x) = q^x = e^{x \ln q}$.

▸Exercices n° 50 à 54

1> Suites arithmétiques, suites géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	Une suite (u_n) est dite arithmétique si et seulement si il existe un réel r, appelé raison, tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.	Une suite (u_n) est dite géométrique si et seulement si il existe un réel q, appelé raison, tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.
Caractérisation	Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison r de la suite.	Une suite (u_n), dont tous les termes sont non nuls, est géométrique si et seulement si, pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante est alors la raison q de la suite.
Expression de u_n en fonction de n	Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.	Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.
Somme de termes consécutifs	Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier naturel n, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.	Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q différente de 1, alors, pour tout entier naturel n, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$.

2> Sens de variation, limites des suites de la forme $u_n = f(n)$

■ **Sens de variation**

Définition : Une suite (u_n) est dite croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Une suite (u_n) est dite décroissante si et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Cas des suites de la forme $u_n = f(n)$: si f est une fonction monotone sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f.

■ **Limite**

Définition : Soit la suite (u_n) définie par une relation du type $u_n = f(n)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. ($L$ peut être une limite finie ou infinie.)

Lorsque L est une limite finie, on dit que la suite (u_n) est convergente.

3> Convergence des suites géométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique définie, pour tout nombre entier naturel, par $u_n = q^n$:

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est une suite constante égale à 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

Déterminer la nature d'une suite et utiliser ses propriétés

1 Soit les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2 - 5n$ et $v_n = \frac{3}{5^n}$.

Déterminer, pour chacune des deux suites, s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique.

Réponse

Pour se faire une idée de la nature d'une suite, on peut en calculer les premiers termes.

$u_0 = 2$, $u_1 = -3$, $u_2 = -8$. Il semble que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant (-5). On peut faire la conjecture que cette suite est arithmétique.

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = [2 - 5(n+1)] - [2 - 5n] = -5$. Cette différence ne dépend pas de n, donc la suite (u_n) est arithmétique et a pour raison (-5).

$v_0 = 3$, $v_1 = \frac{3}{5}$, $v_2 = \frac{3}{25}$. Il semble que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par $\frac{1}{5}$. On peut faire la conjecture que cette suite est géométrique.

Pour démontrer qu'une suite de réels non nuls est géométrique, on calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Pour tout entier n, $v_n \neq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \frac{3}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3}$

d'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$. Ce quotient ne dépend pas de n, donc la suite (v_n) est géométrique et a pour raison $\frac{1}{5}$.

Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

2 Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 0,8.

Réponse

La somme des premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme u_0 est : $u_0 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

La somme des 15 premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{14} = \frac{15(u_0 + u_{14})}{2}.$$

Il faut donc calculer la valeur du dernier terme de la somme : on utilise alors la relation $u_k = u_0 + kr$.

$u_{14} = 3 + 14 \times 0{,}8 = 14{,}2$.

La somme cherchée est donc $S = \frac{15 \times (3 + 14{,}2)}{2} = 129$.

Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

3 Calculer la somme :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}.$$

On reconnaît que les termes de cette somme sont de la forme q^p, p variant entre 0 et 8 ; il s'agit donc des termes d'une suite géométrique de raison q.

Si $q \neq 1$, une telle somme est égale à $\dfrac{1-q^n}{1-q}$, où n est le nombre de termes de la somme.

Réponse

Il s'agit de la somme des 9 premières puissances de $\frac{1}{2}$:

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^8.$$

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{512} \times 2 = \frac{511}{256}.$$

Étudier le sens de variation et la limite d'une suite de la forme $u_n = f(n)$

4 Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.

Étudier son sens de variation et sa limite.

Réponse

On reconnaît une suite de la forme $u_n = f(n)$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n = f(n)$, avec la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

Pour étudier le sens de variation de (u_n), on étudie le sens de variation de f.

La fonction f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. On a $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Sur $[0, +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Si f est monotone sur $[0, +\infty[$, la suite a le même sens de variation que f.

La suite (v_n) est donc une suite croissante.

Si f admet une limite en $+\infty$, alors la suite admet la même limite.

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Étudier la convergence d'une suite géométrique

5 Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = -\dfrac{2}{3^n}$. Après avoir reconnu la nature de cette suite, montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Réponse

On reconnaît une suite géométrique, que l'on écrit sous la forme aq^n.

On a $u_n = -2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

On applique le théorème du cours sur la limite d'une suite géométrique.

Comme $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Suites arithmétiques

Dans les exercices **1** à **6**, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1

C Si $u_0 = 2$ et $r = -3$,
calculer u_{17}, puis $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{17}$.

2

Si $u_1 = -3$ et $r = 0{,}3$,
calculer u_{17}, puis $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$.

3

Si $u_0 = 4$ et $u_6 = 1$, calculer r.

4

Si $u_3 = -1$ et $u_{20} = 19{,}4$,
calculer r, puis $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{20}$.

5

Si $u_0 = 0{,}5$ et $r = 0{,}2$,
calculer u_{21}, puis $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{21}$.

6

Si $u_1 = 3$ et $u_{21} = 1$,
calculer r, puis $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{21}$.

7

Que représente la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2 ?

8

La suite des entiers multiples de 3 est-elle une suite arithmétique ? Si oui, préciser son premier terme et sa raison.

9

Quel est le 400^e nombre impair ?

10

Calculer la somme des 250 premiers nombres impairs.

11

Calculer la somme des 25 premiers multiples non nuls de 5.

12

Dans un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$, a étant un réel quelconque, on considère les points $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ et les points $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ d'abscisse 0 et d'ordonnées respectives $1, 2, \dots, n, \dots$
Soit (a_n), la suite des aires des triangles ABC_n.

a. Exprimer a_1, a_2 et a_3 en fonction de a.

b. Exprimer a_n, puis a_{n+1} en fonction de n et de a.

c. Calculer, pour tout entier n, $a_{n+1} - a_n$. En déduire la nature de la suite (a_n).

d. Que peut-on alors en déduire pour l'aire de la partie de plan comprise entre deux triangles consécutifs ?

13

Sur un axe $(O\,; \vec{i})$ sont placés les points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ d'abscisses respectives $1, 2, \dots, n, \dots$
On considère les cercles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots, \mathscr{C}_n, \dots$ de diamètres respectifs $[OA_1], [OA_2], \dots, [OA_n], \dots$
On note a_0 l'aire du disque de diamètre $[OA_1]$, pour tout entier n strictement positif, a_n est l'aire de la partie de plan comprise entre le cercle $\mathscr{C}_n$ et le cercle $\mathscr{C}_{n+1}$.

a. Calculer a_0, a_1 et a_2.

b. Exprimer a_n, puis a_{n+1}, en fonction de n.

c. Calculer, pour tout entier n, $a_{n+1} - a_n$. En déduire la nature de la suite (a_n).

d. Calculer a_{20}, puis la somme :
$$S = a_0 + a_1 + \dots + a_{20}.$$
Que représente cette somme ? Pouvait-on prévoir le résultat ? Si oui, comment ?

Suites géométriques

Dans les exercices **14** à **21**, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

14

C Si $u_0 = 3$ et $q = 2$,
calculer u_{18} et $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{18}$.

15

Si $u_1 = -2$ et $q = \frac{1}{2}$,
calculer u_{18} et $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{18}$.

16

Si $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_4 = \frac{81}{2}$, déterminer les deux valeurs possibles de q. Dans chaque cas, calculer la somme des termes de u_0 à u_4.

17

Si $u_1 = 9$ et $u_4 = -\frac{1}{3}$, calculer la raison q.

18

Si $v_0 = 2$ et $q = \frac{3}{2}$,
calculer v_{19} et $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{19}$.

19

Si $v_1 = 12$, $v_5 = \frac{1}{108}$ et $q > 0$, calculer q et $S = v_1 + v_2 + \ldots + v_5$.

20

Que représente la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 4 ?

21

Calculer la somme des onze premières puissances de 3.

22

Calculer $S = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \ldots + 2^9 - 2^{10}$.

23

Dans une suite géométrique, le premier terme est 2, le sixième terme est -64. On sait que la raison est -2, $-\frac{1}{2}$ ou 2. Quelle est cette raison ? Justifier sans aucun calcul.

24

Sur un axe $(O\,;\vec{i}\,)$, on note A_1 le point d'abscisse 1. À partir de ce point, on construit la suite des points A_n de la façon suivante : pour tout entier n strictement positif, A_{n+1} est le symétrique par rapport à O du milieu de $[OA_n]$.

a. Construire les points A_1, A_2 et A_3 et préciser les abscisses x_2 et x_3 des deux derniers points.
On appelle x_n l'abscisse de A_n.

b. Montrer que la suite (x_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Que peut-on en déduire sur le signe de x_n dans le cas où n est pair ? Dans le cas où n est impair ?

25

Un enfant fait des ricochets : la pierre, lancée du bord de la rivière, parcourt 2 mètres avant de rebondir une première fois sur l'eau. Après chaque rebond, elle parcourt les trois cinquièmes de son trajet précédent avant de toucher de nouveau l'eau.
On appelle u_n la distance parcourue par la pierre entre le n-ième rebond et le suivant.

a. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

b. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

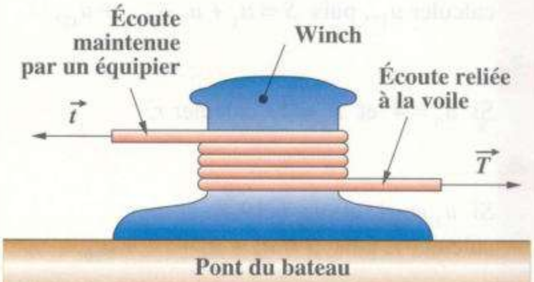
c. Exprimer u_n en fonction de n.

d. Calculer en fonction de n la longueur totale du trajet effectué par la pierre jusqu'à son n-ième contact avec l'eau.

e. Combien de rebonds faut-il pour que la pierre traverse une rivière de quatre mètres de largeur ?

26

Le winch est un mécanisme utilisé par les marins sur les voiliers pour régler les voiles à l'aide d'un cordage appelé écoute. La particularité du winch est de permettre à l'utilisateur d'exercer une traction importante sur la voile en exerçant lui-même un effort modéré sur l'écoute.



Si T est la norme de la tension exercée vers la voile et t la norme de la tension maintenue par l'équipier, on a la relation : $\frac{T}{t} = e^{\alpha f}$, où f est le coefficient de frottement entre le winch et l'écoute, et α l'angle d'enroulement en radians de l'écoute sur le winch. De plus, si n est le nombre de tours d'enroulement du cordage sur le winch, $\alpha = 2n\pi$.
On appelle t_n la tension que doit exercer l'équipier pour n tours d'enroulement du cordage.

a. Exprimer t_n en fonction de n, T et f.

b. Calculer $\frac{t_{n+1}}{t_n}$. En déduire la nature de la suite (t_n) dont on précisera le premier terme t_1 et la raison.

c. Quelle tension doit exercer un équipier sur l'écoute s'il effectue 4 tours d'enroulement du cordage sur le winch, pour maintenir sur la voile une tension de 15 000 newtons (on prendra $f = 0{,}2$) ?

Suites définies par une relation du type $u_n = f(n)$

27

C Pour chacune des suites suivantes, calculer les quatre premiers termes, puis donner une expression plus simple du terme général.

a. $u_n = \cos n\pi$. **b.** $v_n = \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

28

Même exercice que le précédent avec :

a. $x_n = \sin n\pi$. **b.** $y_n = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

29

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \ln\sqrt{n}$, avec $n \geqslant 1$.

b. $u_n = 5\ln\frac{1}{n^2}$, avec $n \geqslant 1$.

30

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par la relation $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + (-1)^n$.

a. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

b. Calculer $u_{n+4} - u_n$.

Représentation et sens de variation des suites définies par une relation du type $u_n = f(n)$

31

C Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = -5 + 3n$.

a. Préciser le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -5 + 3x$.
Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

b. Sur la représentation du **a.**, placer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

32

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = -2n + 3$.

a. Préciser le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -2x + 3$.
Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

b. Sur la représentation du **a.**, placer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

33

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-1}$.

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1 cm sur (Ox), 10 cm sur (Oy)).

b. Sur la représentation du **a.**, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

34

Définir une fonction f telle que la suite donnée soit la suite des nombres réels $f(n)$. Utiliser alors le sens de variation de f pour en déduire le sens de variation de la suite.

a. $u_n = e^{n^2}$. **b.** $v_n = \frac{2n}{n^2+1}$, avec $n \geqslant 1$.

35

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \sin\frac{1}{n}$. **b.** $v_n = \ln(n^2+1)$.

36

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par la relation $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.

a. Calculer u_0, u_1, le cinquième terme de la suite, et le terme d'indice 7 de la suite. Quel est le rang de u_9 ?

b. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? (On pourra utiliser le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.)

c. À partir de la courbe représentative de la fonction f, représenter les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthogonal d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

37

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

b. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur (Ox), 5 cm sur (Oy)).

c. En utilisant la représentation précédente, placer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

d. Déduire de l'étude de la fonction f le sens de variation de la suite (u_n).

38 C

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\ln 2}$.

a. Étudier le sens de variation de f et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^n$. Quelle est la nature de cette suite ?

39

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = e^{n\ln 3}$.

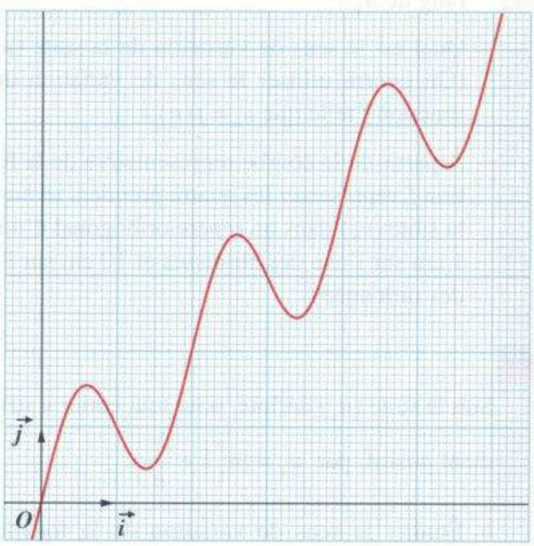
b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\ln 3}$. Étudier son sens de variation.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

40

Reprendre l'exercice précédent avec une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q strictement supérieure à 1 ; puis avec une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q comprise strictement entre 0 et 1.

41 Pas de réciproque hâtive !

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin \pi x$.



a. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout intervalle de la forme $[n, n+1]$, $f'(x)$ s'annule et change de signe une seule fois. Que peut-on en déduire pour le sens de variation de f ?

b. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$. Sur la représentation, placer les cinq premiers termes de la suite.
Exprimer u_n en fonction de n. Que peut-on dire du sens de variation de la suite (u_n) ?

c. Que peut-on en conclure ?

Limite d'une suite de la forme $u_n = f(n)$

42 C

Définir la fonction f telle que la suite donnée soit la suite des nombres $f(n)$. Étudier alors la limite de f en $+\infty$ et en déduire la limite de la suite.

a. $u_n = \dfrac{5}{n+3}$. b. $v_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$.

43

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2+1}$. b. $v_n = \cos\dfrac{1}{n}$.

44

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. b. $v_n = e^{2n+1}$.

45

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \dfrac{1}{n^2+3}$. b. $u_n = \dfrac{2n+1}{n^4+n+1}$.

c. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3n+1}$.

46

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n).

a. $u_n = \dfrac{2n^2-6n+8}{n^2+n+1}$. b. $u_n = \dfrac{3n^2-n+3}{n+2}$.

c. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$.

47

Tracer, dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 10 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On considère, pour tout nombre entier n strictement positif, la droite $\mathscr{D}_n$ d'équation $y = nx$ et le point A_n, point d'intersection de $\mathscr{D}_n$ avec $\mathscr{C}$.

a. Tracer sur la représentation précédente les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ et placer les points A_1, A_2 et A_3.

b. On appelle x_n l'abscisse de A_n. Exprimer x_n en fonction de n.

c. Quelle est la limite de la suite (x_n) ?

48

Soit la suite (I_n) de terme général :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. a. Établir le tableau de variation de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ sur } [0, 1].$$

b. En déduire que, pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$0,5 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

2. a. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx.$$

b. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx$ et $K_n = \int_0^1 x^n\,dx$ en fonction de n.

c. Déterminer alors les limites en $+\infty$ de K_n et de J_n. Que peut-on conjecturer sur celle de I_n ?

49

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{6}{1+5e^{-n}}$.

a. Définir la fonction f sur $[0, +\infty[$ telle que, pour tout entier n, $u_n = f(n)$.

b. Étudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.

c. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm. Représenter à l'aide de cette courbe les cinq premiers termes de la suite (u_n).

d. Utiliser l'étude précédente pour déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Convergence d'une suite géométrique

50

C Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

a. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **b.** $u_n = \frac{1}{3^n}$.

51

Même exercice que le précédent avec :

a. $v_n = 3^n$. **b.** $v_n = \frac{2}{5^{2n}}$.

52

Même exercice que le précédent avec :

a. $u_n = \frac{3e^{2n}}{5^n}$. **b.** $v_n = \frac{e^{-2n}}{2^n}$.

53

Sur un axe $(O ; \vec{i})$, on considère le point A_1 d'abscisse 1. On construit une suite de points de la façon suivante : A_{n+1} est le milieu de $[OA_n]$. Soit x_n l'abscisse de A_n.

a. Faire une figure et placer A_1, A_2, A_3 et A_4.

b. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

c. En déduire la nature de la suite (x_n), puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

54

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On construit sur l'axe des abscisses une suite de points de la façon suivante : A_1 a pour abscisse 1 et, pour tout entier n strictement positif, A_{n+1} est le symétrique de O par rapport à A_n. On appelle x_n l'abscisse de A_n.

a. Construire A_2 et A_3 et calculer x_2 et x_3.

b. Exprimer, pour tout entier n strictement positif, x_{n+1} en fonction de x_n. En déduire la nature de la suite (x_n) puis l'expression de x_n en fonction de n.

c. Quelle est la limite de la suite (x_n) ?

2. Sur l'axe des ordonnées, on construit une suite de points de la façon suivante : B_1 a pour ordonnée 1 et, pour tout entier n, l'aire du triangle OA_nB_n est constante. On appelle y_n l'ordonnée de B_n.

a. Calculer l'aire du triangle OA_1B_1, puis déterminer y_n en fonction de n.

b. Montrer que la suite (y_n) des ordonnées des points B_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Quelle est la limite de la suite (y_n) ?

Pour aller plus loin...

55

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = e^{-2n}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_0 et la raison q.

b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

c. Calculer, en fonction de n, la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

d. Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

56

On a relevé, durant dix semestres consécutifs, le prix moyen d'un même article (prix moyen relevé chez plusieurs vendeurs). On obtient une suite de dix nombres : $u_0 = 6{,}41$; $u_1 = 6{,}51$; $u_2 = 6{,}6$; $u_3 = 6{,}71$; $u_4 = 6{,}79$; $u_5 = 6{,}89$; $u_6 = 6{,}98$; $u_7 = 7{,}06$; $u_8 = 7{,}17$; $u_9 = 7{,}25$.

1. Augmentation moyenne

a. On considère la suite (v_n) des augmentations successives : pour n entier compris entre 1 et 9, $v_n = u_n - u_{n-1}$. Calculer v_1, …, v_9, puis la moyenne arithmétique m de ces nombres. (La moyenne arithmétique de n nombres est égale à la somme de ces n nombres divisée par n.)

b. Soit (w_n) la suite arithmétique de premier terme $w_0 = u_0$ et de raison m. Calculer w_9.

2. Taux d'accroissement moyen

a. On considère la suite (x_n) des taux d'accroissement successifs : pour n entier compris entre 1 et 9, $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. Calculer x_1, …, x_9 (on donnera des valeurs approchées à 10^{-4} près), puis la moyenne géométrique μ de ces nombres (la moyenne géométrique de n nombres est la racine n-ième du produit de ces n nombres).

b. Soit (y_n) la suite géométrique de premier terme $y_0 = u_0$ et de raison μ. Calculer y_9.

57

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n l'aire de la partie de plan P_n limitée par $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$.

a. Tracer $\mathscr{C}$. Hachurer P_1 et P_4.

b. Calculer u_0. Exprimer u_n en fonction de n.

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En déduire l'expression, en fonction de n, de la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

d. Donner une interprétation graphique de S_n et retrouver son expression en fonction de n par un calcul d'aire.

58

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 10 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n l'aire de la partie de plan P_n limitée par $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$.

a. Après une rapide étude de la fonction g, tracer $\mathscr{C}$, puis hachurer P_1 et P_4.

b. Calculer u_0. Exprimer u_n en fonction de n.

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En déduire l'expression, en fonction de n, de la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

d. Donner une interprétation graphique de S_n et retrouver son expression en fonction de n par un calcul d'aire.

e. Quelle est la limite de S_n ?

59

On définit la suite (u_n) par son terme initial $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par :

$$h(x) = \frac{x+8}{2x+1}.$$

a. Étudier rapidement la fonction h, puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{H}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

b. Construire, à l'aide de $\mathscr{H}$ et de $\mathscr{D}$, les points de l'axe $(O ; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

3. (v_n) est la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis de u_n, et enfin de v_n ; montrer que (v_n) est la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $-\dfrac{3}{5}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

4. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

60

1. Pour tout entier n strictement positif, on définit :

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x}\,dx.$$

a. Exprimer u_n en fonction de n.

b. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c. En déduire l'expression, en fonction de n, de la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

d. Quelle est la limite de S_n ?

2. Pour tout entier n strictement positif, on définit $v_n = e^{u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire l'expression, en fonction de n, de la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

61

a. On considère la suite (u_n), définie pour tout nombre entier naturel, par $u_n = 3^{2n+1}$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Soit la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n$.

Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, dont on précisera le premier terme et la raison.

Exprimer, en fonction de n, la somme :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

c. Soit $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$. Exprimer $\ln P_n$ à l'aide des termes de la suite (v_n). En déduire l'expression, en fonction de n, de $\ln P_n$, puis de P_n.

62

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier strictement positif n, par $u_n = e^{-n} - e^{-2n}$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} - e^{-2x}.$$

a. Étudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.

b. Tracer la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}\,)$ (unités graphiques : 1 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée).

Placer sur l'axe des ordonnées, à l'aide de la représentation ci-dessus, les quatre premiers termes de la suite (u_n).

c. Déduire de l'étude de f le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies respectivement, pour tout entier strictement positif, par $v_n = e^{-n}$ et $w_n = e^{-2n}$.

a. Montrer que ces deux suites sont des suites géométriques, dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer, en fonction de n, les sommes :

$s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ et $\sigma_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

En déduire, en fonction de n, la somme :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

63

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.

b. Calculer, en fonction de n, la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

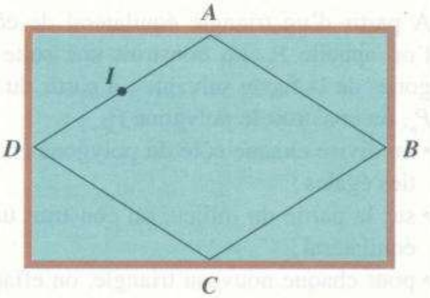
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par $v_n = e^{u_n}$.

a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison q.

b. Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.

64

Le rectangle ci-dessous représente un billard. Une boule, lancée à partir du point I avec une vitesse initiale de $4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, rebondit sur les bandes en suivant la trajectoire $IABCDABC\ldots$ (A, B, C et D sont les milieux des quatre côtés du billard et I est le milieu de $[AD]$).



À cause des frottements, et d'une perte d'énergie cinétique à chaque rebond sur la bande, on considère que sa vitesse après un rebond est réduite en moyenne de 25 % par rapport à sa vitesse après le rebond précédent (cette estimation étant valable également pour la vitesse après le premier rebond par rapport à la vitesse initiale).

1. a. On appelle v_0 sa vitesse initiale et v_n sa vitesse après le n-ième rebond.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

b. On estime que, si la vitesse après un rebond est inférieure à $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la boule s'arrêtera avant d'atteindre la bande suivante. Déterminer le nombre N de rebonds après lesquels la boule s'arrêtera.

2. a. Les dimensions du billard sont 2,40 m sur 1,20 m. Calculer la longueur d du côté du losange $ABCD$.

On appelle l_n la longueur du parcours de la boule entre le point de départ I et le n-ième rebond.

b. Calculer l_1 et, pour tout entier naturel n, exprimer l_{n+1} en fonction de l_n. Quelle est la nature de la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

c. En déduire l'expression de l_n en fonction de n, puis la longueur l_N. Que représente l_N ?

3. a. Calculer le temps t_0 mis par la boule, à la vitesse v_0, pour effectuer le parcours $[IA]$.

b. Pour $n \geqslant 1$, on appelle t_n le temps mis par la boule entre le n-ième et le $(n+1)$-ième rebond (parcours effectué à la vitesse v_n). Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{0{,}75}$.

c. Calculer $t_1 + t_2 + \ldots + t_N$, puis le temps total du parcours : $T = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_N$.

65

À partir d'un triangle équilatéral de côté 1 que l'on appelle P_0, on construit une suite de polygones de la façon suivante : à partir du polygone P_n, on construit le polygone P_{n+1} :

- on divise chaque côté du polygone en trois parties égales ;
- sur la partie du milieu, on construit un triangle équilatéral ;
- pour chaque nouveau triangle, on efface le côté qui faisait partie du polygone précédent.

1. a. On appelle l_n la longueur des côtés du polygone P_n. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n. En déduire la nature de la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis l'expression de l_n en fonction de n.

b. On appelle c_n le nombre de côtés du polygone P_n. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire la nature de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis l'expression de c_n en fonction de n.

c. On appelle p_n le périmètre du polygone P_n. Exprimer p_n à l'aide de l_n et c_n, puis en fonction de n. Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

2. On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral de côté l est $t = \dfrac{\sqrt{3}}{4} l^2$.

a. Exprimer, à l'aide de l_n, puis en fonction de n, l'aire t_n de chacun des triangles ajoutés au polygone P_{n-1} pour obtenir le polygone P_n.

b. Exprimer, à l'aide de c_{n-1} et de t_n, puis en fonction de n, l'aire a_n ajoutée à la partie de plan limitée par P_{n-1} pour obtenir la partie de plan limitée par P_n.

Montrer que (a_n) est la suite géométrique de premier terme $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$ et de raison $\rho = \dfrac{4}{9}$.

c. En déduire l'expression, en fonction de n, de l'aire $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ajoutée à l'aire de la partie de plan limitée par P_0.
En déduire l'expression, en fonction de n, de l'aire A_n de la partie de plan limitée par le polygone P_n.

d. Quelle est la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?

66

1. a. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $r_0 = 8$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Exprimer r_n en fonction de n.

b. Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$ et de raison $\dfrac{2\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de n.

2. Soit z_n le nombre complexe de module r_n et d'argument θ_n. On appelle M_n le point d'affixe z_n.

a. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm), représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b. Calculer, pour tout entier n, le nombre $\theta_{n+3} - \theta_n$. Que peut-on en déduire pour les points O, M_n et M_{n+3} ?

c. Exprimer, en fonction de n, la distance OM_n.

d. Deux points sont considérés comme distinguables s'ils sont distants, sur la représentation graphique, d'au moins 0,5 mm. Déterminer le plus grand entier N tel que les points O et M_N soient distinguables.

67

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 8 cm), on considère le point M_0 d'affixe $z_0 = 1$.

Soit M_1 le point d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} z_0$,

M_2 le point d'affixe $z_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} z_1$,

M_3 le point d'affixe $z_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} z_2$, et, de façon générale, M_{n+1} le point d'affixe $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} z_n$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer le module et un argument de z_1, z_2 et z_3 et placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan complexe.

2. Pour tout entier naturel n, on note ρ_n le module de z_n.

a. Déterminer la nature de la suite (ρ_n).

b. Exprimer la somme
$$S_n = OM_0 + OM_1 + \ldots + OM_n$$
en fonction de n.

c. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Prouver que, pour tout entier naturel n,
$$z_{n+1} - z_n = i\sqrt{3}\, z_{n+1}.$$
En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1}.

68

En électricité, on utilise des valeurs « normalisées » de résistances. Ces valeurs sont organisées en « séries », notées E_m. La série E_m est donnée par les valeurs arrondies des nombres $R_{m,n} = \sqrt[m]{10^n}$, où n et m sont deux entiers naturels. (On rappelle que $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$.)

Par exemple, dans la série E_6, la première valeur est $\sqrt[6]{10^1} \approx 1{,}47\ \Omega$.

Dans chaque série, on regroupe les valeurs par décade : une décade comprend toutes les valeurs entre une puissance de 10 et la suivante. Par exemple : la première décade de la série E_6 contient toutes les valeurs entre 1 et 10, la deuxième décade de la série E_6 contient les valeurs entre 10 et 10^2, etc.

On s'intéresse donc à la série E_6, pour les valeurs de résistances comprises entre 100 et 1 000 Ω (c'est-à-dire la troisième décade), donc données par la formule $R_n = \sqrt[6]{10^n}$, n variant entre 12 et 18.

1. Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de ces valeurs.

2. Ces valeurs constituent-elles une suite arithmétique ? Une suite géométrique ? Justifier.

3. Affiner le résultat précédent en utilisant la forme générale de ces valeurs à la place de leurs valeurs approchées.

69

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés, en valeur absolue, pour n entier strictement positif, par :
$$E_n = \frac{E_0}{n^2}, \text{ avec } E_0 = 13{,}6 \text{ eV (électronvolts).}$$

a. Définir une fonction f sur $]0, +\infty[$, telle que, pour tout entier n strictement positif, $E_n = f(n)$.

b. Étudier les variations de f (sens de variation, limite en $+\infty$).

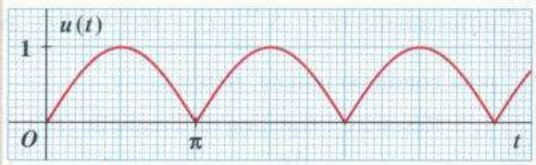
c. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ et placer sur ce graphique les quatre premiers termes de la suite (E_n).

d. Déduire de l'étude de f le sens de variation de la suite (E_n) et sa limite en $+\infty$.

70

Pour étudier un signal périodique, on le décompose en une somme de fonctions : une fonction constante, égale à la valeur moyenne sur une période de la fonction étudiée, et des fonctions sinusoïdales appelées harmoniques.

Pour le signal représenté ci-dessous, la valeur moyenne est $u_0(t) = \dfrac{2}{\pi}$ et les harmoniques sont les fonctions u_n définies sur $\mathbb{R}$, pour n strictement positif, par $u_n(t) = -\dfrac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos 2nt$.



La fonction u_n est appelée harmonique de rang n. On s'intéresse ici à la valeur maximale de chaque harmonique.

1. Quelle est la valeur maximale de la fonction $t \mapsto -\cos 2nt$?

En déduire l'expression, en fonction de n, de la valeur maximale a_n de l'harmonique de rang n, pour tout entier n strictement positif.

2. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{4}{(4x^2-1)\pi}.$$

a. Étudier les variations de f (sens de variation, limite en $+\infty$).

b. Tracer, dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$ (unités graphiques : 1 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée), la courbe représentative de la fonction f.

3. a. Déduire de l'étude de f le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. On appelle spectre du signal le « diagramme en bâton » formé des segments verticaux $[A_nB_n]$ (n entier strictement positif), où A_n est le point de coordonnées $(n, 0)$ et B_n le point de coordonnées (n, a_n).

Sur le graphique précédent, représenter le début du spectre du signal.

71

On se propose d'étudier un système schématisé ci-dessous.

Dans le partie **A**, le signal d'entrée sera la fonction U, fonction échelon unité, définie par :

si $t \in]-\infty, 0[$, $U(t) = 0$, si $t \in [0, +\infty[$, $U(t) = 1$.

Dans la partie **B**, le signal d'entrée sera modélisé par la suite numérique constante égale à 1.

On souhaite comparer les valeurs prises par le signal de sortie obtenu dans la partie **A** avec les valeurs prises par la suite correspondant à la « réponse échantillonnée » dans la partie **B**.

Partie A

Le signal d'entrée est la fonction U. Le signal de sortie est la fonction s, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0[$, et solution sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E) : $5\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + s(t) = U(t)$, avec, pour condition initiale, $s(0) = 2$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E') :

$$5\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + s(t) = 0.$$

b. Vérifier que la fonction constante définie sur $\mathbb{R}^+$ par $s_2(t) = 1$ est solution de l'équation (E).

c. On admet que la solution générale de l'équation (E) est la fonction s définie par :

$$s(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 1.$$

Déterminer la solution particulière vérifiant la condition initiale imposée.

2. On désigne par k un nombre entier. Calculer $s(k)$ pour les valeurs de l'entier k comprises entre 0 et 10. (On donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.)

Partie B

Le signal d'entrée est maintenant un « échelon unité échantillonné ». Il est modélisé par la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $u_k = U(k) = 1$.

1. Le signal de sortie est alors connu par la suite des valeurs de $s(k)$. Pour les déterminer, on remplace dans l'équation (E), t par k, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)$ par $\dfrac{s(k+1) - s(k)}{(k+1) - k}$ et $U(t)$ par u_k (la condition initiale est toujours $s(0) = 2$).

Montrer qu'on obtient alors :

$$s(k+1) = 0{,}8\,s(k) + 0{,}2.$$

2. On définit ainsi la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $a_k = s(k)$. On a alors $a_0 = 2$ et, pour tout entier strictement positif k, on a $a_{k+1} = 0{,}8\,a_k + 0{,}2$.

Pour déterminer les valeurs de cette suite, on utilise la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel k, par $b_k = a_k - 1$.

a. À partir des deux égalités : $b_{k+1} = a_{k+1} - 1$ et $a_{k+1} = 0{,}8\,a_k + 0{,}2$, montrer que $b_{k+1} = 0{,}8\,b_k$.

b. En déduire la nature de la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, puis l'expression de b_k en fonction de k.

Sachant que $a_k = b_k + 1$, en déduire l'expression de a_k en fonction de k.

b. Calculer $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ (on donnera des valeurs arrondies à 10^{-2}) et comparer avec les valeurs de $s(k)$ trouvées dans la partie **A**.

72

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à la date $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier naturel). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a. Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis l'expression de N_{k+1} en fonction de N_k.

b. En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et de k.

c. Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

73

Partie A

Soit f la fonction définie, sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Déterminer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{C}$ à Γ en son point d'abscisse 0.

2. Soit d la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$d(x) = f(x) - (-2x + 4).$$

a. Démontrer que, pour tout x de I, $d'(x) \geqslant 0$.

b. En déduire le signe de $d(x)$, puis la position relative de $\mathscr{C}$ et de Γ.

c. Tracer $\mathscr{C}$ et Γ. (On prend 2 cm pour unité de longueur.)

3. Pour tout nombre positif α, on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm² de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α et déterminer la limite L de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie B
Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n) = 4e^{-\frac{1}{2}n}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on donnera le premier terme u_0 et la raison.

2. Soit n un nombre entier naturel. On pose :

$$S_n = 4(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)$$
$$\text{et } T_n = 4(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}).$$

Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

3. a. Déterminer les limites respectives S et T de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Vérifier que $T \leqslant L \leqslant S$ (L a été définie à la question **3.** de la partie **A**).

Pour préparer le Bac

A

Pour chaque cas, la suite (u_n) est définie par son terme général. Dire s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique, si elle est convergente ou divergente, préciser sa limite si elle existe et calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$:

a. $u_n = 3 \times \dfrac{1}{2^n}$. **b.** $u_n = 5 + 12n$.

c. $u_n = -4 \times 5^n$. **d.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

B *D'après un exercice de Bac STT, session 1999*

M. Untel a acheté un lave-linge d'une valeur de 525 € et consulte son assureur. Celui-ci applique une réduction pour vétusté de 15 % par an : on obtient alors ainsi la valeur « remboursable » de l'année.

a. Calculer les valeurs « remboursables » par l'assurance de l'appareil les trois années suivantes.

b. Justifier que : appliquer une réduction de 15 % est équivalent à utiliser un coefficient multiplicateur de 0,85.

c. Quelle est la valeur « remboursable » par l'assureur au bout de 10 ans ?

C *Bac STI Génie électronique, Génie électrotechnique 1997*

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 égal à 2 et de raison -1.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Déterminer u_n en fonction de n et en déduire u_{15}.

c. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer que $S_n = \dfrac{(n+1)(4-n)}{2}$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q.

b. Déterminer v_n en fonction de n.

3. a. En utilisant le résultat de la question **1.c.**, calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.

b. Déterminer la valeur de n pour laquelle :

$$P_n = e^{-88}.$$

CHAPITRE 10

Probabilités

OBJECTIFS

- Consolider les connaissances de la classe de Première sur l'étude des phénomènes aléatoires.
- Définir la notion de variable aléatoire et les caractéristiques qui s'y rattachent (loi, fonction de répartition, espérance, variance, écart type).
- Organiser des données relatives à des expériences aléatoires à l'aide de représentations **(TP)**.

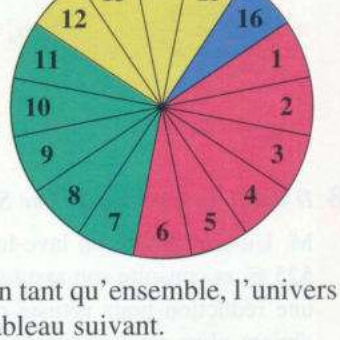
> Pour les élèves de la section STI **Arts appliqués**, le programme ne comporte qu'un approfondissement des acquis de Première (Activité 1 et partie I du cours).

ACTIVITÉ 1 « Souvenirs, souvenirs »

Objectif : Permettre de vérifier les acquis de Première.

Dans une fête foraine, une loterie est organisée à l'aide d'une roue divisée en seize secteurs colorés : six secteurs rouges, numérotés de 1 à 6, cinq secteurs verts numérotés de 7 à 11, quatre secteurs jaunes, numérotés de 12 à 15, et un secteur bleu numéroté 16.

On fait tourner la roue et l'on regarde quel secteur se trouve devant une flèche fixe, lorsque la roue s'arrête.



1. Langage et notation

Chaque case de la roue est symbolisée par son numéro. Décrire, en tant qu'ensemble, l'univers correspondant à cette expérience, puis recopier et compléter le tableau suivant.

Événement	Description textuelle	Description à l'aide de la liste des éléments
A	**« Le secteur tiré au sort porte un numéro pair. »**	
V		$\{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$
	« Le secteur tiré au sort est vert et porte un numéro pair. »	
$A \cup V$		
		$\{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15\}$

2. Définition et propriétés d'une probabilité

On suppose maintenant que la roue est déséquilibrée de telle façon que :

- les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ d'obtenir une des cases rouges ou vertes (cases 1 à 11) sont égales ;
- les probabilités $p_{12}, \ldots, p_{15}$ d'obtenir une des cases jaunes (cases 12 à 15) sont égales et $p_{12} = \frac{2}{3}p_1$;
- la probabilité p_{16} d'obtenir la case bleue (case 16) est telle que $p_{16} = \frac{1}{2}p_{12}$.

a. D'après la définition d'une probabilité, que vaut la somme : $p_1 + p_2 + \ldots + p_{16}$?

b. En déduire les probabilités de chacun des événements élémentaires, puis la probabilité de chacun des événements suivants : A, V, $A \cap V$, $A \cup V$ et $\overline{A}$.

3. Cas de l'équiprobabilité

On suppose maintenant que chaque secteur a la même probabilité de se trouver devant la flèche.

Déterminer les probabilités de chacun des événements élémentaires, puis la probabilité de chacun des événements suivants : A, V, $A \cap V$, $A \cup V$ et $\overline{A}$.

ACTIVITÉ 2 Simulation et probabilités

Objectifs : Introduire la notion de variable aléatoire et faire le lien entre espérance mathématique et moyenne sur un grand nombre d'expériences.

A. Simulation

À l'aide d'un tableur (on utilise ici la syntaxe d'Excel), on veut simuler 1 000 parties du jeu suivant : le joueur lance un dé et selon le résultat obtenu il marque ou perd des points.

Résultat du lancer de dé	1	2	3	4	5	6
Points	2	2	– 1	– 1	– 1	– 1

1. Remplir la case A2 du tableau par « =ENT(6*ALEA())+1 ». La fonction ALEA() renvoie au hasard un nombre réel de l'intervalle]0, 1[et ENT est la fonction partie entière. Par conséquent, A2 contient un nombre entier pris au hasard entre 1 et 6.

Que simule la case A2 ? Mettre dans la cellule A1 un titre indiquant ce que représente la valeur de la cellule A2.

2. Remplir la case B2 du tableau par « =SI(A2<3 ;2 ;-1) ».

La fonction SI(*condition* ;*valeur1* ;*valeur2*) renvoie *valeur1* si *condition* est vérifiée et *valeur2* sinon.

Que représente la case B2 ? Mettre un titre dans la cellule B1.

3.a. Sélectionner les cases A2 et B2, cliquer sur le coin inférieur droit de B2 et déplacer la souris vers le bas jusqu'à la case B1001. Qu'obtient-on ?

b. Remplir la cellule C1 par « moyenne des gains ».

Pour obtenir la moyenne des gains sur ces 1000 parties, compléter D1 par « =MOYENNE(B2:B1001) ». Quel est le résultat obtenu ?

c. Relever les différents résultats obtenus dans la classe. Faire la moyenne de ces résultats (on obtient alors une simulation sur un nombre bien plus important de parties). Qu'est-ce que l'on constate ?

4.a. On veut maintenant compter le nombre de parties se soldant par un gain de 2 points. Pour cela, on peut se servir de la fonction NB.SI(B2 :B1001 ;N) qui renvoie le nombre de cellules contenant un résultat égal à N.

Remplir la cellule D2 avec « =NB.SI(B2 :B1001 ;2)/1000 ». Que représente la cellule D2 ? Mettre le titre correspondant dans la cellule C2.

b. Remplir la cellule D3 avec « =NB.SI(B2 :B1001 ;-1)/1000 » et la cellule C3 avec le titre correspondant.

c. Expliquer comment ces résultats permettent de retrouver celui de la question **3.**.

5. Que pensez-vous de chacune des deux affirmations suivantes :

• « À ce jeu, on a deux fois plus de chance de perdre que de gagner, donc on n'a pas intérêt à y jouer » ;

• « Quand on gagne, on gagne deux fois plus que quand on perd, donc on a tout intérêt à jouer ».

Si on joue un grand nombre de parties, quel gain total peut-on espérer obtenir ?

B. Probabilités

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré (cas d'équiprobabilité). Pour tout entier i entre 1 et 6, l'événement élémentaire « on obtient la face i » est noté $\{i\}$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir chacune des faces du dé lors d'un tirage ?

2. On note X le nombre de points obtenus (même règle que dans la partie **A.**).

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

b. Décrire l'événement $\{X = 2\}$ (X prend pour valeur 2) à l'aide des événements élémentaires, puis calculer sa probabilité.

Décrire de même l'événement $\{X = -1\}$, puis calculer sa probabilité.

c. Comparer les résultats obtenus aux questions **b.** et **c.** avec ceux de **A. 4.**).

3.a. Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

« X peut prendre deux valeurs, -1 et 2, donc en moyenne on peut espérer gagner $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ point. »

b. Calculer la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives et comparer le résultat obtenu avec la moyenne des gains sur 1 000 parties obtenues par simulation. Expliquer pourquoi cette valeur est appelée *espérance mathématique de X*.

Dans ce chapitre, on va étudier des situations aléatoires dans lesquelles chaque événement peut être relié à une valeur numérique (on verra que l'espérance mathématique est un des outils pour l'étude de telles situations).

1 Probabilité sur un univers fini

1 Vocabulaire

Définition • On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont les résultats dépendent du hasard.

• L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (il est généralement noté Ω).

• Toute partie de l'univers est un **événement**.

• Un événement formé d'un seul résultat de l'expérience est un **événement élémentaire**.

Exemple : Un groupe d'amis hésitent entre deux destinations pour leurs vacances d'été : la Réunion (R) et l'Islande (I). Pour chacune de ces destinations, ils ont le choix entre trois modes d'hébergement : l'auberge de jeunesse (A), le camping (C) ou chez l'habitant (H).
• On prend une destination et un type d'hébergement au hasard : c'est une expérience aléatoire.
• Si on désigne par R_A le fait de choisir la Réunion en auberge de jeunesse, alors l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \{R_A, R_C, R_H, I_A, I_C, I_H\}$.
• L'événement R : « les amis choisissent la Réunion » peut alors s'écrire : $R = \{R_A, R_C, R_H\}$.
• L'événement $B = \{R_A\}$ est un événement élémentaire.

Définition • Si A est un événement, **l'événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement formé de tous les éléments de l'univers qui ne sont pas dans A.

• Si A et B sont deux événements, **l'événement A et B**, noté $A \cap B$, est l'événement comprenant tous les éléments appartenant à la fois à A et à B.

• Si A et B sont deux événements, **l'événement A ou B**, noté $A \cup B$, est l'événement formé des éléments appartenant au moins à A ou à B.

• Deux événements n'ayant aucun élément commun sont dits **incompatibles** ou **disjoints**.

Exemple : On reprend l'exemple précédent.
• L'événement contraire de R est « les amis ne choisissent pas la Réunion » donc $\overline{R} = \{I_A, I_C, I_H\}$.
• Si C est l'événement « les amis choisissent le camping », alors $C = \{R_C, I_C\}$ et $R \cap C = \{R_C\}$.
• L'événement $R \cup C$ est l'événement « les amis choisissent la Réunion ou choisissent le camping ». C'est-à-dire $R \cup C = \{R_A, R_C, R_H, I_C\}$.
• L'événement A : « les amis choisissent l'auberge de jeunesse » et l'événement C sont incompatibles.

▸Exercices n° 1 et 2

2 Probabilité

Dans toute la suite du chapitre, on ne considère que des expériences aléatoires ayant un nombre fini de résultats possibles, c'est-à-dire **des univers ayant un nombre fini d'éléments**.

Définition Une probabilité P sur un univers fini est une application qui, à chaque événement élémentaire A, associe un nombre réel $P(A)$ compris entre 0 et 1 tel que :

• la probabilité d'un événement soit la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ;

• la probabilité de l'univers soit égale à 1.

De la définition, on déduit le théorème qui suit.

Théorème Soit Ω un univers fini, A et B deux événements et P une probabilité définie sur Ω. Alors :

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
- la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 ;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : Un système est formé de deux amplificateurs A et B. On appelle A l'événement « A fonctionne » et B l'événement « B fonctionne ».

On suppose que :

- la probabilité de l'événement A est 0,85 ;
- la probabilité que les deux amplificateurs fonctionnent est 0,82 ;
- la probabilité qu'au moins l'un des deux amplificateurs A ou B fonctionne est 0,95.

On cherche la probabilité de l'événement B.

Les hypothèses précédentes se traduisent par $P(A) = 0{,}85$, $P(A \cap B) = 0{,}82$ et $P(A \cup B) = 0{,}95$.

D'après le théorème ci-dessus, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

On en déduit $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}95 - 0{,}85 + 0{,}82 = 0{,}92$.

▸Exercices n° 3 à 8

3 Équiprobabilité

Définition Soit Ω un univers fini. On dit qu'il y a **équiprobabilité**, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple : On reprend l'exemple sur les vacances du paragraphe I 1. Il y a équiprobabilité si l'on considère que la probabilité de choisir un lieu de vacances et un type d'hébergement est la même.

Cette probabilité est alors nécessairement égale à $\frac{1}{6}$, puisque la somme des probabilités doit être égale à 1 et qu'il y a 6 choix possibles de vacances, choix symbolisés par R_A, R_C, R_H, I_A, I_C et I_H.

De la définition de l'équiprobabilité et des propriétés d'une probabilité, on déduit le théorème suivant.

Théorème Soit Ω un univers fini. On suppose qu'il y a équiprobabilité.

- Si l'univers contient n éléments, alors la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$.
- Si A est un événement quelconque, alors la probabilité de A est égale au quotient du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de l'univers Ω.

Exemple : On reprend l'exemple sur les vacances du paragraphe I 1.

- L'univers est composé de 6 événements élémentaires et, puisque l'on est dans le cas de l'équiprobabilité, chacun de ces événements a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$.
- Si on considère l'événement R : « les amis choisissent la Réunion », alors $R = \{R_A, R_C, R_H\}$ et $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

▸Exercices n° 9 à 11 et TP

2 Variable aléatoire

> Ce paragraphe ne concerne pas les élèves de la section STI **Arts appliqués**.

1 Définition et notation

Comme vu dans l'activité 2, on fait correspondre, dans certains cas, chaque événement élémentaire de l'univers à une valeur numérique. La fonction qui établit ce lien s'appelle une variable aléatoire.

Définition • On appelle **variable aléatoire** sur un univers fini, une fonction qui, à tout événement élémentaire de l'univers, associe un nombre réel. Elle est généralement notée par une lettre majuscule (souvent X).

• Si une variable aléatoire X fait correspondre le réel a à un événement élémentaire A, on dit que a est une **valeur** prise par X. On peut alors considérer l'événement $\{X = a\}$, qui contient tous les résultats de l'expérience aléatoire associés à la valeur a.

Remarque : Par souci de simplicité, on se permet de désigner l'événement $\{X = a\}$ par $X = a$.

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note, pour chacun des deux lancers, P si la pièce retombe côté pile et F si la pièce retombe côté face. L'univers associé peut être alors symbolisé par $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. On décide que l'obtention du côté pile fait gagner 5 € au joueur, alors qu'il perd 2 € si la pièce retombe sur le côté face.

• La fonction X qui, à un résultat du jeu, associe le gain du joueur est une variable aléatoire (une perte est considérée comme un gain négatif).

• On associe à l'événement $A = \{PP\}$ la valeur 10, on associe à l'événement $B = \{PF\}$ la valeur 3, on associe à l'événement $C = \{FP\}$ la valeur 3 et on associe à l'événement $D = \{FF\}$ la valeur -4.

• La variable aléatoire X prend les valeurs 10, 3 et -4.

• L'événement $X = 3$ est l'événement $\{PF, FP\}$.

▸Exercices n° 19 et 20

2 Loi de probabilité

On considère un univers fini Ω sur lequel une probabilité P est définie. On note X une variable aléatoire sur cet univers. Si cette variable aléatoire prend la valeur a, on peut alors chercher la probabilité de l'événement $X = a$. Il est alors naturel de donner cette probabilité pour toutes les valeurs prises par X. On aboutit à la notion de loi de probabilité de X.

Définition Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. On appelle $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X. **La loi de probabilité** de X est la fonction qui, à chacune des valeurs x_i prises par X, fait correspondre la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

Remarque : En général, une loi de probabilité se présente à l'aide d'un tableau de la forme :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

La somme des valeurs figurant dans la seconde ligne du tableau est toujours égale à 1.

Exemple : On reprend l'exemple précédent sur le lancer de pièce de monnaie. La variable aléatoire X prend les valeurs 10, 3 ou -4. On cherche à établir la loi de probabilité de X, donc à établir la probabilité des événements $X = 10$, $X = 3$ et $X = -4$.

• La pièce utilisée étant équilibrée, on peut considérer qu'il y a équiprobabilité. L'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ comporte quatre événements élémentaires : chacun de ces événements a donc une probabilité égale à 0,25.

• Comme $X = -4$ est l'événement élémentaire $\{FF\}$, $P(X = -4) = 0{,}25$.

De même, $P(X = 10) = 0{,}25$. Comme $X = 3$ est la réunion $\{PF, FP\}$ de deux événements élémentaires, $P(X = 3) = 0{,}5$. On obtient alors la loi de probabilité de X suivante :

x_i	10	3	-4
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

▸Exercices n° 21 à 23

3 Fonction de répartition

Définition Soit X une variable aléatoire définie sur un univers muni d'une probabilité P. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$.

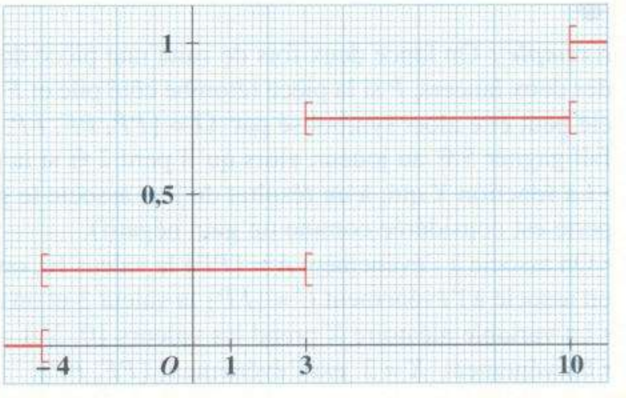
Exemple : On reprend l'exemple du paragraphe précédent (lancer de pièce de monnaie) :

• pour tout $x < -4$,
$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X < -4) = 0$;

• pour tout x de $[-4, 3[$,
$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = -4) = 0{,}25$;

• pour tout x de $[3, 10[$,
$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = -4) + P(X = 3)$
$= 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$;

• pour tout x de $[10, +\infty[$,
$F(x) = P(X \leqslant x)$
$= P(X = -4) + P(X = 3) + P(X = 10) = 1$.



On représente alors graphiquement la fonction F (une telle fonction est dite fonction en escalier).

Remarque : La fonction de répartition d'une variable aléatoire définie sur un univers fini est toujours une fonction en escalier. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (mais pas strictement croissante), elle prend 0 pour valeur minimum et 1 pour valeur maximum.

▸Exercices n° 24 à 26

4 Espérance mathématique

Dans l'activité 2, on a vu qu'on pouvait associer une moyenne à une série statistique, en donnant à chaque valeur prise par la série un « poids » qui dépend de sa fréquence d'apparition. De même, on peut, après avoir défini une variable aléatoire, c'est-à-dire avoir associé un réel à chaque événement élémentaire, chercher une « moyenne » de ces valeurs, en donnant à chacune un « poids » différent suivant sa probabilité. C'est la notion d'espérance mathématique.

Définition Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On appelle **espérance mathématique** de X, et on note $\mathrm{E}(X)$, le nombre réel défini par $\mathrm{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$.

Remarque : L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire pondérées par leur probabilité. Dans le cas d'un jeu, on parle de l'espérance de gain et on considère ce jeu comme équitable si l'espérance de gain est égale à 0.

Exemple : On reprend l'exemple précédent de lancer de pièce pour lequel la loi de probabilité était :

x_i	10	3	-4
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

Alors $E(X) = -4 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}5 + 10 \times 0{,}25 = 3$ (cela signifie que, sur un grand nombre de parties, un joueur peut espérer un gain moyen de 3 €).

▸Exercices n° 27 à 30

5 Variance et écart type

Définition Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On appelle :

• **variance** de X, et on note $V(X)$, le nombre réel :

$$V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + \ldots + p_n[x_n - E(X)]^2.$$

• **écart type** de X, et on note $\sigma(X)$, le nombre réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarques :

1. Sur la variance :

• La formule précédente sur $V(X)$ s'écrit encore $V(X) = E([X - E(X)]^2)$.

• Dans la pratique, le calcul de $V(X)$ se fait à partir de la propriété qui suit ces remarques.

• La variance (et donc l'écart type) mesure la « dispersion » d'une variable aléatoire autour de l'espérance mathématique $E(X)$. En effet, dans la variance, on mesure les écarts $x_1 - E(X)$, $x_2 - E(X), \ldots, x_n - E(X)$, écarts que l'on met au carré pour éviter que les différences positives ne compensent les différences négatives puis qu'on pondère suivant la probabilité correspondante. Pour une illustration, on renvoie à l'▸exercice 31 où on utilise la variance et l'écart type pour comparer deux variables aléatoires en terme de dispersion.

2. L'écart type a la même unité que les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Propriété Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Alors $V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 - [E(X)]^2$.

Exemple : On reprend l'exemple du paragraphe précédent sur le lancer de pièces dont la loi de probabilité est :

x_i	10	3	-4
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

Alors $V(X) = 0{,}25 \times (-4)^2 + 0{,}5 \times 3^2 + 0{,}25 \times 10^2 - 3^2 = 24{,}5$;

$\sigma(X) = \sqrt{24{,}5} \approx 4{,}95$. L'écart type est donc d'environ 4,95 €.

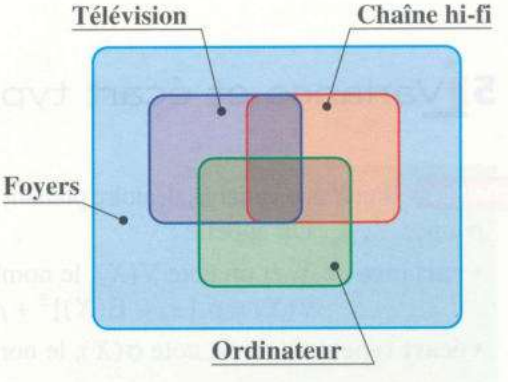
▸Exercices n° 32 à 35

TP Exemples d'expériences aléatoires conduisant à l'emploi de partitions ou de représentations pour organiser des données

On présente ici sur des exemples les trois types de représentations les plus classiques qui permettent d'organiser des données en probabilités : partition, tableau et arbre.

1 Partition

On interroge 150 foyers sur leur équipement : 126 ont la télévision, 72 ont une chaîne hi-fi, 50 ont un ordinateur, 42 la télévision et un ordinateur, 54 la télévision et une chaîne hi-fi, 36 un ordinateur et une chaîne hi-fi et 30 possèdent les trois types d'appareils.



1 Recopier et compléter le diagramme ci-contre.

2 On choisit un de ces foyers au hasard (on considère qu'il y a équiprobabilité).

a. Quelle est la probabilité qu'il ait exactement deux de ces types d'appareils ?

b. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas équipé de chaîne hi-fi ?

2 Tableau

Une entreprise achète et revend des pièces mécaniques. Ces pièces sont achetées à deux fournisseurs A et B. Parmi les pièces venant de A, 10 % ont un défaut. Parmi les pièces venant de B, 6 % ont un défaut. L'entreprise commercialise un lot de 1 000 pièces, dont 60 % viennent de A et 40 % de B.

1 Recopier et compléter le tableau suivant :

	Nombre de pièces venant de A	Nombre de pièces venant de B	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			1 000

2 a. On prend une pièce au hasard parmi ces 1000 pièces. Quelle est la probabilité qu'elle ait un défaut ?

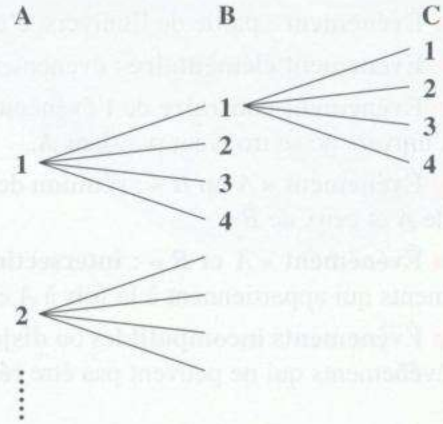
b. On prend une pièce au hasard parmi les pièces n'ayant pas de défaut. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du fournisseur B ?

3 Arbres

1 Premier exemple

Trois personnes (A, B et C) entrent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble de quatre étages.

a. Recopier et compléter l'arbre de choix commencé ci-contre (cet arbre permet de déterminer le nombre de répartitions possibles de ces trois personnes sur les quatre étages en supposant qu'aucune d'elles ne descende de l'ascenseur au rez-de-chaussée).



b. Quel est le nombre de répartitions possibles ?

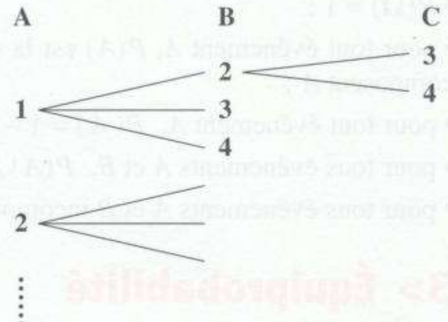
c. On suppose toutes les répartitions équiprobables.

Quelle est la probabilité que les trois personnes descendent au même étage ?

2 Deuxième exemple

On reprend l'exemple précédent mais on considère que deux personnes ne peuvent descendre de l'ascenseur au même étage.

a. Recopier et compléter l'arbre de choix ci-contre correspondant à cette nouvelle expérience.



b. Quel est le nombre de répartitions possibles ?

c. On considère toujours toutes les répartitions équiprobables. Quelle est la probabilité que A descende à un étage plus élevé que B ?

Remarque : **Il faut bien comprendre en quoi les deux exemples précédents diffèrent. Le premier exemple correspond à un « tirage » successif avec remise :**

- successif car chaque personne « tire » un étage au hasard ;
- avec remise car une ou plusieurs personnes peuvent « tirer » le même étage.

Le second exemple correspond lui à un « tirage » successif sans remise :

- sans remise car un étage ne peut « être tiré » que par une personne.

▸Exercices n° 12 à 18

1> Vocabulaire

■ **Univers** : noté en général Ω, ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

■ **Événement** : partie de l'univers, c'est-à-dire ensemble de résultats.

■ **Événement élémentaire** : événement qui ne contient qu'un des éléments de l'univers.

■ **Événement contraire** de l'événement A : noté $\overline{A}$, événement contenant tous les éléments de l'univers ne se trouvant pas dans A.

■ **Événement « A ou B » : réunion** de A et de B, notée $A \cup B$, événement contenant les éléments de A et ceux de B.

■ **Événement « A et B » : intersection** de A et B, notée $A \cap B$, événement contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

■ **Événements incompatibles** ou **disjoints** : événements dont l'intersection est vide, c'est-à-dire événements qui ne peuvent pas être réalisés simultanément.

2> Probabilité

■ **Probabilité sur un univers fini Ω** : application P qui associe à chaque événement de l'univers un nombre compris entre 0 et 1, telle que :

• $P(\Omega) = 1$;

• pour tout événement A, $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A ;

• pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

• pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

• pour tous événements A et B incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3> Équiprobabilité

■ **Équiprobabilité** : cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas :

• si l'univers Ω contient N éléments, la probabilité d'un événement élémentaire est $\dfrac{1}{N}$;

• si l'événement A contient n éléments, la probabilité de A est $\dfrac{n}{N}$.

4> Variable aléatoire

■ **Variable aléatoire** sur un univers fini : fonction qui, à tout événement de l'univers, associe un nombre réel (notée en général par une lettre majuscule).

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité P. On note x_1, x_2, …, x_n, les valeurs prises par X.

■ **La loi de probabilité** de X est la fonction qui, à chacune des valeurs x_i prises par X, fait correspondre la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

■ **La fonction de répartition** de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$.

■ **L'espérance mathématique** de X, notée $\mathrm{E}(X)$, est le nombre réel défini par :

$$\mathrm{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n .$$

■ **La variance** de X, notée $\mathrm{V}(X)$, est le nombre réel :

$$\mathrm{V}(X) = p_1[x_1 - \mathrm{E}(X)]^2 + p_2[x_2 - \mathrm{E}(X)]^2 + \ldots + p_n[x_n - \mathrm{E}(X)]^2 .$$

Propriété : $\mathrm{V}(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - [\mathrm{E}(X)]^2$.

■ **L'écart-type** de X, noté $\sigma(X)$, est le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Expliciter un univers

Pour représenter un univers, on peut faire :
- **un diagramme ;**
- **un tableau ;**
- **ou un arbre.**

1 On lance deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les probabilités d'obtenir une des six faces pour chacun des dés sont égales.
Dans un tableau, expliciter l'univers des résultats possibles.

Réponse

On va utiliser un tableau à double entrée pour expliciter cet univers :

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

L'univers contient 36 éléments.

Déterminer un tableau de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Pour établir la loi de probabilité de X, il faut calculer la probabilité de chacun des événements $X = k$.
$X = k$ désigne l'événement contenant tous les événements élémentaires associés au nombre k.

2 On appelle S la somme des chiffres marqués sur les faces supérieures des dés. Si $2 \leqslant S < 3$, on marque 20 points ; si $3 \leqslant S < 5$, on marque 10 points ; si $5 \leqslant S < 10$, on marque 5 points ; si $10 \leqslant S \leqslant 12$, on marque 1 point.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque somme, associe le nombre de points marqués.
Donner un tableau de la loi de probabilité de X.

Réponse

X peut prendre les valeurs 20, 10, 5 et 1. Il faut donc calculer la probabilité de chacun des événements $X = 20$, $X = 10$, $X = 5$ et $X = 1$.
L'événement $X = 20$ correspond à l'événement « obtenir une somme égale à 2 », soit à $\{(1, 1)\}$. L'univers contenant 36 éléments, la probabilité d'un événement élémentaire est égale à $\frac{1}{36}$, donc $P(X = 20) = \frac{1}{36}$.

L'événement $X = 10$ correspond à « obtenir une somme égale à 3 ou 4 », soit à l'événement :

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} ;$$

d'où $P(X = 10) = \frac{5}{36}$.

L'événement $X = 1$ correspond à « obtenir une somme égale à 10, 11 ou 12 », soit à l'événement :

$$\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\};$$

d'où $P(X = 1) = \dfrac{6}{36}$.

On peut calculer l'une des probabilités en utilisant le fait que la probabilité de l'univers est égale à 1.

Pour éviter d'expliciter l'événement $X = 5$, on utilise la somme des probabilités :

$$P(X = 1) + P(X = 5) + P(X = 10) + P(X = 20) = 1,$$

d'où $P(X = 5) = 1 - \dfrac{1}{36} - \dfrac{5}{36} - \dfrac{6}{36} = \dfrac{24}{36}$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	5	10	20
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition d'une variable aléatoire X

3 Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

La fonction de répartition de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$.
Si la loi de X est donnée par :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

on calcule la valeur de F sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $[x_1, x_2[$, ..., $[x_{n-1}, x_n[$ et $[x_n, +\infty[$.

Réponse

Il faut déterminer la valeur de F sur $]-\infty, 1[$, $[1, 5[$, $[5, 10[$, $[10, 20[$ et $[20, +\infty[$.

Si $x < 1$, $F(x) = 0$.

Si $1 \leqslant x < 5$, $F(x) = P(X = 1) = \dfrac{6}{36}$.

Si $5 \leqslant x < 10$, $F(x) = P(X = 1) + P(X = 5)$ et

$$F(x) = \frac{6}{36} + \frac{24}{36} = \frac{30}{36}.$$

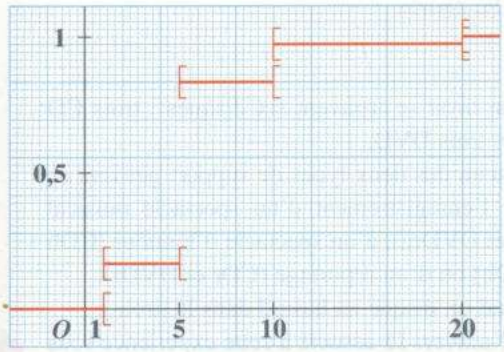
Si $10 \leqslant x < 20$, $F(x) = P(X = 1) + P(X = 5) + P(X = 10)$

et $F(x) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{24}{36} + \dfrac{5}{36} = \dfrac{35}{36}$.

Si $20 \leqslant x$,

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 5) + P(X = 10) + P(X = 20)$$

et $F(x) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{24}{36} + \dfrac{5}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{36}{36} = 1$.



Calculer l'espérance mathématique de X

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$.

4 Calculer l'espérance mathématique de X.

Réponse

En appliquant la formule, on obtient :

$$E(X) = P(X=1)\times 1 + P(X=5)\times 5 + P(X=10)\times 10 + P(X=20)\times 20$$

$$E(X) = \frac{6}{36}\times 1 + \frac{24}{36}\times 5 + \frac{5}{36}\times 10 + \frac{1}{36}\times 20 = \frac{196}{36}.$$

D'où $E(X) \approx 5{,}44$.

Calculer la variance et l'écart type de X

$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 - [E(X)]^2$ et l'écart type de X est le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

5 Calculer la variance et l'écart type de X.

Réponse

En appliquant les formules, on obtient :

$$V(X) = \frac{6}{36}\times 1 + \frac{24}{36}\times 25 + \frac{5}{36}\times 100 + \frac{1}{36}\times 400 - \left(\frac{196}{36}\right)^2.$$

$V(X) \approx 12{,}19$;

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $\sigma(X) \approx 3{,}49$.

Vocabulaire

1

C Dans un tiroir se trouvent six disques : trois CD audio et trois DVD.
Sur chacun des deux types de support peuvent se trouver l'enregistrement d'un spectacle musical (CDm et DVDm), d'un spectacle d'humour (CDh et DVDh) ou d'un reportage (CDr et DVDr).
On prend un disque au hasard dans le tiroir.
Écrire l'univers Ω associé à cette expérience sous forme d'un ensemble.
Écrire sous forme d'ensemble les événements suivants :
A : « le disque pris au hasard est un disque audio » ;
B : « le disque pris au hasard contient l'enregistrement d'un spectacle ».
Écrire sous forme d'ensemble et avec une phrase les événements $\overline{A}$, $A \cup B$ et $A \cap B$.
Décrire, par une phrase, un des événements élémentaires de cette expérience.
Décrire, par une phrase, deux événements incompatibles de cette expérience.

2

Lors d'un jeu télévisé, le candidat tire au hasard une question parmi douze questions : ces questions se répartissent sur quatre catégories (cinéma, littérature, sport et histoire) et, dans chaque catégorie, il existe une question de 10 points, une de 20 points et une de 50 points. Écrire l'univers Ω associé à cette expérience sous forme d'un ensemble.
Écrire sous forme d'ensemble les événements suivants :
A : « la question tirée est une question à au moins 20 points »
B : « la question tirée n'est pas une question de littérature »
Écrire sous forme d'ensemble et avec une phrase les événements suivants : $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cap B$; $A \cup B$.
Décrire, par une phrase, un des événements élémentaires de cette expérience.
Décrire, par une phrase, deux événements incompatibles de cette expérience.

Définition et propriétés d'une probabilité

3

C Une étude marketing a révélé les faits suivants : pour un produit quelconque disposé sur un rayon ayant trois niveaux, la probabilité qu'un client prenne ce produit s'il est disposé à hauteur de ses yeux est double de la probabilité qu'il le prenne s'il est placé sur l'étagère du haut ; cette dernière probabilité est double de celle qu'il prenne ce même produit placé sur l'étagère du bas.
Une personne a acheté ce produit. Déterminer la probabilité p_1 qu'il provienne de l'étagère du haut, la probabilité p_2 qu'il provienne de l'étagère du milieu et la probabilité p_3 qu'il provienne de l'étagère du bas.

4

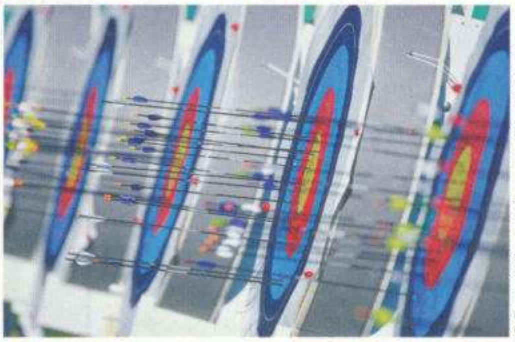
À la suite d'une étude statistique, une entreprise qui fabrique des appareils électroménagers évalue le temps de fonctionnement d'un de ses modèles de réfrigérateur de la façon suivante.
La probabilité p_1 qu'un réfrigérateur tombe en panne pendant les cinq premières années de fonctionnement est la moitié de la probabilité p_2 que ce même objet tombe en panne entre la sixième et la dixième année de fonctionnement ; la probabilité p_3 que ce réfrigérateur tombe en panne entre la onzième et la quinzième année est le quart de p_2 ; enfin, la probabilité qu'il fonctionne plus de quinze ans est 0,02.

a. Déterminer les probabilités p_1, p_2 et p_3.

b. Déterminer la probabilité qu'un réfrigérateur fonctionne au moins dix ans.

5

Un « blason » de tir à l'arc est un disque de papier partagé en zones de différentes couleurs : jaune, rouge, bleu, noir et blanc du centre vers l'extérieur (chaque couronne est elle-même divisée en deux couronnes correspondant à des scores différents).
Pour un blason de 40 cm de diamètre (tir en salle à 18 m), les cercles délimitant le disque central et les couronnes de différentes couleurs ont pour rayons respectifs 4, 8, 12, 16 et 20 cm.



©Getty/Allsport Concepts/David Madison

Un tireur, après un grand nombre d'essais, estime que la probabilité que sa flèche se plante dans le blason est de 0,9, et que la probabilité que sa flèche atteigne une zone de couleur donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

a. Que peut-on dire de la somme S des probabilités p_j, p_r, p_b, p_n et p_{bc} des événements « la flèche atteint la zone jaune (respectivement rouge, bleu, noir, blanche) du blason » ?

b. Calculer les aires a_j, a_r, a_b, a_n et a_{bc} des couronnes (du centre vers l'extérieur).

c. Si l'on appelle k le coefficient de proportionnalité entre chacune de ces probabilités et l'aire de la zone correspondante, exprimer chaque probabilité, puis S, en fonction de k.
En déduire k, puis chacune des probabilités.

d. Quelle est la probabilité de l'événement « la flèche se plante dans le blason, mais pas dans la zone jaune » ?

6

C Un système est formé de deux amplificateurs placés en parallèle. À partir d'un signal à l'entrée, on obtient un signal à la sortie si au moins l'un des deux amplificateurs A ou B fonctionne. On considère l'instant où est émis un signal d'entrée. On appelle A l'événement « A fonctionne » et B l'événement « B fonctionne ».

On considère que la probabilité de l'événement A est 0,85 , que la probabilité que les deux amplificateurs fonctionnent est 0,82 et que la probabilité qu'il n'y ait pas de signal de sortie est 0,05.

a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un signal de sortie ?

b. Exprimer les événements suivants à l'aide de A et de B :
S : « il y a un signal de sortie » ;
D : « les deux amplificateurs fonctionnent ».

c. Déterminer la probabilité de l'événement B.

7

Une usine fabrique des plaques isolantes. Ces plaques doivent vérifier des critères précis relatifs à leur épaisseur et à leur conductivité thermique. On estime à 0,02 la probabilité qu'une plaque ait un défaut d'épaisseur et à 0,05 la probabilité qu'elle ait un défaut de conductivité. Enfin, la probabilité qu'une plaque n'ait aucun défaut est de 0,94.

On appelle E l'événement « la plaque prise au hasard a un défaut d'épaisseur ».

On appelle C l'événement « la plaque prise au hasard a un défaut de conductivité ».

On appelle A l'événement « la plaque n'a aucun défaut ».

a. Soit D l'événement « la plaque a au moins un défaut ». Quelle est la probabilité de D ?
Écrire D à l'aide des événements E et C.

b. Soit D' l'événement « la plaque a les deux défauts ». Écrire D' à l'aide des événements E et C. En déduire la probabilité de D'.

8

Une entreprise produit des vis. On vérifie, sur les vis produites, leur longueur et le diamètre de la tête. On prend une vis au hasard. On considère que la probabilité qu'elle présente un défaut de longueur est de 0,1 et la probabilité qu'elle présente un défaut de diamètre est de 0,06. Une vis est bonne si elle ne présente aucun défaut : on considère que la probabilité qu'une vis soit bonne est 0,86. Une vis ne présentant qu'un défaut est vendue dans un lot de vis dépareillées, alors que les vis présentant les deux défauts sont jetées. Quelle est la probabilité qu'une vis prise au hasard soit jetée ? soit vendue dans un lot de vis dépareillées ?

Équiprobabilité

9

C Un clavier d'ordinateur comporte 59 touches sur la partie principale, dont 26 pour les lettres de l'alphabet et 4 pour les lettres accentuées (é, è, à, ù). Jonathan, ne sachant pas encore lire, frappe au hasard sur une de ces touches. On admet qu'il a la même probabilité de frapper n'importe laquelle des touches. Quelle est la probabilité des événements suivants :

A : « il frappe la lettre J » ;

B : « il frappe sur une touche ne donnant pas de lettre » ;

C : « il frappe une lettre de son prénom ».

10

Dans un dossier sont rangés des sujets de mathématiques du Baccalauréat : il y a les sujets de sections S.T.I. Génie électronique, Génie civil, Génie énergétique et Génie mécanique des années 2000, 2001 et 2002. On prend un sujet au hasard et on considère qu'ils ont tous la même probabilité d'être pris. Quelle est la probabilité des événements suivants :

A : « le sujet choisi est un sujet de la section Génie civil » ;

B : « le sujet choisi est un sujet posé en 2002 » ;

C : « le sujet posé n'est pas un sujet de la section Génie électronique » ;

puis des événements : $\overline{B}$; $B \cap C$; $A \cap \overline{B}$; $B \cup C$.

11 Dans le jeu « des chiffres et des lettres », on dispose de trois roulettes murales, alignées, identiques. Sur chacune d'elles sont inscrits les chiffres 0, 1, …, 9. On fait tourner ces trois roulettes et on observe le nombre de trois chiffres apparu (012, 003 ou 000, par exemple, sont considérés comme des nombres à trois chiffres).

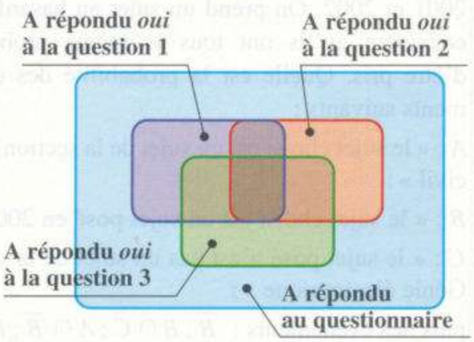
a. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
Dans la suite, on considère que tous les résultats ont la même probabilité d'apparaître.

b. Quelle est la probabilité des événements suivants :
A : « le résultat obtenu est un nombre dont les trois chiffres sont identiques » ;
B : « le résultat obtenu est un nombre commençant par un 0 » ;
C : « le résultat obtenu ne commence pas par un 0 ».

Équiprobabilité et représentation

12 **C** Une maison de disques fait une enquête auprès de 1 000 personnes. Ces personnes répondent par oui ou par non aux trois questions suivantes :
• question 1 : Avez-vous acheté des CD audio durant les six derniers mois ?
• question 2 : Avez-vous assisté à un concert durant les six derniers mois ?
• question 3 : Avez-vous gravé des CD audio durant les six derniers mois ?
130 personnes répondent *oui* aux trois questions. 200 répondent *oui* aux questions 1 et 2, 360 répondent *oui* aux questions 1 et 3 et 740 répondent *oui* à la question 1 ; 110 personnes ne répondent *oui* qu'à la question 3, 20 répondent *non* aux trois questions et 95 ne répondent *oui* qu'à la question 2.

a. Recopier et compléter le diagramme ci-dessous en indiquant dans chaque partie le nombre d'individus concernés.



b. On prend la fiche réponse d'une de ces personnes (on considère que toutes les fiches réponse ont la même probabilité d'être choisies). Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la fiche d'une personne n'ayant assisté à aucun concert dans les six derniers mois ?

13 Pendant la fête du cinéma, de nombreuses personnes « enchaînent » les séances. Dans un complexe de cinéma comportant trois salles, on projette les films A, B et C.
600 personnes sont entrées dans le cinéma dans la journée et ont vu au moins un film.
60 personnes ont vu les trois films, 165 n'ont vu que le film A, 75 que le film B, 330 n'ont pas vu le film C, 320 n'ont vu qu'un film et 55 n'ont vu que les films B et C.
Construire un diagramme permettant de classer les individus en fonction des films qu'ils ont vus.
On interroge une de ces personnes au hasard (on suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être interrogées). Quelle est la probabilité des événements suivants ?
• la personne interrogée a vu exactement deux films dans ce complexe ;
• la personne interrogée n'a pas vu le film A.

14 **C** Dans une enquête effectuée auprès de 1 000 personnes, on considère qu'une personne est auditrice d'une radio si elle dit avoir écouté cette radio au moins une fois par semaine pendant l'année écoulée.
850 des personnes interrogées se disent auditrice de la radio R_1, 700 se disent auditrice de la radio R_2 et 100 disent n'écouter aucune des deux radios.

1. a. Compléter le tableau suivant.

	Auditeurs de R_1	Non auditeurs de R_1	Total
Auditeurs de R_2			
Non auditeurs de R_2			
Total			

b. On interroge au hasard l'une de ces 1 000 personnes. Quelle est la probabilité qu'elle soit une auditrice des radios R_1 et R_2.

2. On demande à ces mêmes personnes si elles pensent être auditrices de la radio R_1 dans l'année à venir. 72 % des auditeurs de R_1 et 18 % des non auditeurs de R_1 répondent oui.

On interroge une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle réponde oui à cette question ?

15

Dans un établissement de 300 élèves, il y a 60 % de garçons. Parmi les filles, 15 % utilisent un « deux roues » pour se rendre au lycée. Le nombre de garçons utilisant un « deux roues » est le double du nombre de filles utilisant un « deux roues ».

a. À l'aide d'un tableau à double entrée, répartir les 300 élèves en quatre catégories dont on donnera les effectifs : garçons utilisant ou non un « deux roues », filles utilisant ou non un « deux roues ».

b. On interroge au hasard un élève (on considère que tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis). Quelle est la probabilité que ce soit une fille n'utilisant pas de « deux roues » ?

c. On voit un élève casqué qui part sur sa moto : quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

16

C L'ouverture d'un coffre est commandée par trois serrures S1, S2 et S3. On dispose des trois cartes magnétiques C1, C2 et C3, chacune adaptée à une serrure et une seule (chaque carte entre dans toutes les serrures, mais n'en ouvre qu'une). Pour ouvrir le coffre, il faut placer chacune des trois cartes dans la serrure qu'elle ouvre.

Construire un arbre représentant toutes les façons de placer les cartes dans les serrures.

Quelle est la probabilité d'ouvrir le coffre en agissant au hasard ?

17

Dans le jeu « Master Mind », un joueur (appelé « codeur ») choisit un « code » en plaçant, dans quatre emplacements, quatre pions choisis parmi des pions de six couleurs : bleu (B), vert (V), jaune (J), rouge (R), orange (O) et noir (N).

1. Pour des joueurs débutants, on ajoute pour règle que l'on ne peut pas utiliser deux pions de même couleur pour un code.

a. En imaginant un arbre de choix, déterminer le nombre de codes possibles.

Le joueur adverse (appelé le « décodeur »), par des essais successifs, doit deviner le code.

b. Son premier essai est fait au hasard (il y a équiprobabilité dans le choix de sa première proposition). Quelle est la probabilité qu'il obtienne le bon code au premier essai ?

2. On considère maintenant qu'un code peut comporter plusieurs fois la même couleur. Par exemple, (B, V, O, V) représente un code.

a. En imaginant un arbre de choix, déterminer le nombre de codes possibles.

b. Le premier essai du décodeur étant toujours le fruit du hasard, quelle est la probabilité qu'il obtienne le bon code au premier essai ?

18

La décomposition en facteurs premiers de 60 est $2^2 \times 3 \times 5$. Un diviseur de 60 s'écrit sous la forme $2^k \times 3^n \times 5^p$, où k peut être égal à 0, 1 ou 2, n à 0 ou 1 et p à 0 ou 1.

À l'aide d'un arbre, écrire la liste des triplets (k, n, p) possibles.

On choisit un diviseur de 60 au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un nombre pair ?

Définition d'une variable aléatoire

19

C On prend au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes (on suppose qu'il y a équiprobabilité). Les as rapportent 4 points, les rois et les dames 3 points, les valets 1 point, les 10 zéro point et les autres cartes (9, 8 et 7) font perdre 2 points. On appelle X la variable aléatoire qui, à un tirage, fait correspondre le nombre de points (une perte de points correspond à une valeur négative).

a. À quel(s) tirage(s) correspondent les événements suivants : $\{X = 3\}$; $\{X = -2\}$; $\{X > 1\}$; $\{X \leqslant 0\}$; $\{X \leqslant 2\}$?

b. Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X = 4) \,;\, P(X = -2) \,;\, P(X \leqslant 0).$$

20

Une boîte contient quatre cartons numérotés respectivement 1, 2, 4 et 8.

On tire un carton de la boîte, on note son numéro, on le remet dans la boîte et on tire un deuxième carton dont on note le numéro (tirage successif et avec remise). On suppose qu'il y a équiprobabilité.

a. Établir l'arbre des résultats possibles.

b. Soit X la variable aléatoire qui, à un tirage, associe le produit des numéros portés sur les deux cartons.

À quel(s) tirage(s) correspondent les événements suivants : $\{X = 16\}$; $\{X \leqslant 3\}$.

Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X = 16)$; $P(X \leqslant 3)$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

21 Au hasard des soldes

C Pour animer une campagne de soldes, un marchand de disques propose le « jeu » suivant. Sur un présentoir sont proposés 200 disques dont le prix initial est de 15 €.

Un acheteur, après avoir choisi son disque, tire au hasard dans une urne un papier sur lequel est inscrit le pourcentage de réduction.

Dans l'urne se trouvent 130 papiers permettant une remise de 20 %, 40 donnant droit à une réduction de 50 %, 20 à une réduction de 60 % et 10 à une réduction de 80 %.

Un client participe au jeu. Soit X la variable aléatoire qui, au choix d'un papier au hasard, associe le prix à payer.

Établir la loi de probabilité de X.

Quelle est la probabilité de payer un disque moins de 7,5 € ? de payer un disque au moins 6 € ?

22 ***D'après un exercice de bac***

Un moteur électrique possédant trois bornes B_1, B_2 et B_3 doit être alimenté en électricité par trois fils F_1, F_2 et F_3, chaque fil étant relié à une seule borne identifiée.

Lorsque les trois fils sont convenablement branchés (F_1 en B_1, F_2 en B_2 et F_3 en B_3) le moteur tourne à 1000 tours par minute.

Lorsqu'un seul des trois fils est branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés), le moteur tourne à 500 tours par minute.

Lorsque aucun fil n'est branché à la bonne borne, le moteur ne tourne pas.

On a perdu le schéma de montage et les fils sont indiscernables.

a. Déterminer la liste des montages différents possibles et en déduire leur nombre total (exemple : F_1 avec B_2, F_2 avec B_1, F_1 avec B_3 est l'un des montages possibles).

b. Calculer la probabilité que les trois fils soient convenablement branchés.

c. Calculer la probabilité qu'un seul des trois fils soit branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés).

d. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque montage, associe la vitesse de rotation du moteur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

23

Une pièce mécanique fabriquée par un atelier est susceptible de présenter trois défauts. On considère que 1 % des pièces présentent les trois défauts, que 95 % présentent au plus un défaut et que 12 % présentent au moins un défaut.

On prend une pièce au hasard dans la production. Soit X la variable aléatoire qui, à ce choix, fait correspondre le nombre de défauts de la pièce.

Traduire les données précédentes sous la forme de probabilité de valeurs prises par X. En déduire la loi de probabilité de X.

Fonction de répartition

24

C Dans une usine de fabrication d'ampoules électriques, on considère la variable aléatoire X qui, à une ampoule prise au hasard, associe sa durée de vie en jours. À partir de contrôles répétés de la fabrication, on a établi la loi de probabilité de X suivante :

x	123	124	125	126	127
$P(X = x)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Construire la courbe représentative de la fonction de répartition de X.

25

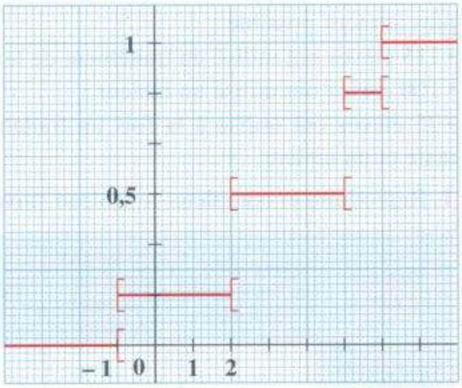
Une entreprise utilise des camions pour transporter sa production. Elle dispose de 100 camions. À partir d'une étude statistique, on établit la loi de la variable aléatoire X qui, à un jour pris au hasard, associe le nombre de camions en panne ce jour. La loi de X est la suivante :

x	$P(X = x)$
0	0,050
1	0,149
2	0,224
3	0,224
4	0,168
5	0,101
6	0,050
7	0,022
8	0,008
9	0,003
10	0,001

Construire la courbe représentative de la fonction de répartition de X.

26

La représentation ci-dessous est la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Déduire de la lecture de ce graphique les valeurs prises par X puis la loi de probabilité de X.



Espérance mathématique

27

C Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire définie à l'exercice **24**. Que représente cette espérance ?

28

Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire définie à l'exercice **25**. Que représente cette espérance ?

29 ***D'après un exercice de Bac***

Un organisme de voyages prépare en Logoland un circuit de découverte qui doit passer une et une seule fois dans chacune des quatre villes notées respectivement I, L, O et Z.

Le circuit ne peut partir que de I, L, ou Z, car la ville O ne possède pas d'aéroport international.

La fin du voyage devant être en bord de mer, le circuit doit se terminer par I ou Z.

Un circuit possible est I, L, O, Z. Il sera noté (I, L, O, Z).

1. Expliquer pourquoi le circuit (I, O, Z, L) est impossible.

2. Déterminer les huit circuits possibles.

3. L'agence de voyage s'intéresse au nombre de kilomètres parcourus en bus entre la ville de départ et la ville d'arrivée pour chaque circuit. Les distances exprimées en kilomètres entre les quatre villes sont indiquées dans le tableau suivant.

	I	L	Z	O
I	0	500	600	300
L	500	0	500	700
Z	600	500	0	600
O	300	700	600	0

On note X la variable aléatoire qui, à chaque circuit, associe le nombre de kilomètres parcourus.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

30

Pour une fête, les organisateurs souhaitent proposer une loterie. Les tickets sont vendus au prix de 1,5 €. Parmi ces tickets, 500 sont perdants, 100 permettent de gagner 1,5 € et n permettent de gagner 4,5 €. Soit X la variable aléatoire qui, à un ticket pris au hasard, fait correspondre le gain obtenu (ce gain est égal à la différence entre la somme gagnée et les 1,5 € d'achat et peut donc être négatif).

Établir la loi de probabilité de X en fonction de n.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

Comment doit-on choisir n pour que le jeu soit à l'avantage des organisateurs de la fête, c'est-à-dire que l'espérance de gain pour un joueur soit strictement négative ?

Variance et écart type

31

Dans une entreprise, deux machines A et B fabriquent des pièces métalliques de forme cylindrique. On appelle X la variable aléatoire qui, à une pièce prise au hasard dans la production de la machine A, fait correspondre le diamètre de la pièce ; on appelle Y la variable aléatoire qui, à une pièce prise dans la production de la machine B, associe le diamètre de la pièce.

Le tableau ci-dessous donne la loi de X et la loi de Y (établies à partir d'études statistiques).

Diamètre d en mm	$P(X=d)$	$P(Y=d)$
12	0,02	0,01
13	0,05	0,04
14	0,12	0,14
15	0,19	0,21
16	0,32	0,34
17	0,18	0,18
18	0,08	0,06
19	0,04	0,03
20	0,01	0,005

Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

En observant le tableau ci-avant, expliquer ce qui différencie les lois de ces deux variables aléatoires.

Calculer la variance de chacune des deux variables en utilisant la définition de la variance : $V(X) = E([X - E(X)]^2)$. Comment interpréter la différence entre ces deux variances ?

32

C Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire définie à l'exercice **24**.

33

Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire définie à l'exercice **25**.

34

Une entreprise fabrique des résistors pour des fours électriques. Soit R la variable aléatoire qui, à un résistor pris au hasard dans la production, fait correspondre sa résistance (on prendra la valeur entière la plus proche). À la suite de nombreux tests, on estime que la loi de R est donnée par le tableau suivant :

r	17	18	19	20
$P(R=r)$	0,0375	0,1075	0,21	0,2625

r	21	22	23	24
$P(R=r)$	0,2125	0,115	0,0425	0,0125

Calculer l'espérance $E(R)$, la variance $V(R)$ et l'écart type $\sigma(R)$.

Quelle est la probabilité que la résistance du résistor pris au hasard soit comprise entre $E(R) - \sigma(R)$ et $E(R) + \sigma(R)$?

35

Une entreprise fabrique des rouleaux de papier peint. À partir d'une étude statistique sur le nombre de défauts par rouleaux, on estime que la variable aléatoire X qui, à un rouleau choisi au hasard fait correspondre le nombre de défauts, suit la loi de probabilité suivante :

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,7409	0,2222	0,0334	0,0033	0,0002

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants : $X \leqslant 3$; $2 \leqslant X \leqslant 4$?

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X. Que représente ce nombre ?

Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable X.

Quelle est la probabilité $P(X \leqslant E(X) + 2\sigma(X))$?

Pour aller plus loin

36 *D'après un exercice de Bac*

Chacun des 150 élèves des classes de Terminales STI d'un lycée ayant effectué un stage en entreprise a rédigé un rapport de stage.

Pour rendre ce rapport de stage le plus lisible et le plus attractif possible :

- 115 élèves ont utilisé un traitement de textes ;
- 100 élèves ont utilisé un tableur ;
- 75 élèves ont utilisé à la fois un traitement de texte et un tableur.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'élèves	ayant utilisé un traitement de textes	n'ayant pas utilisé un traitement de textes	Total
ayant utilisé un tableur			
n'ayant pas utilisé un tableur			
Total			

2. Un professeur étudie un des 150 rapports de stage, choisi au hasard. On suppose que chaque rapport de stage a la même probabilité d'être ainsi choisi. Calculer la probabilité des événements suivants :

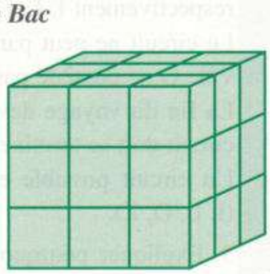
A : « l'élève ayant rédigé ce rapport n'a pas utilisé de tableur » ;

B : « l'élève ayant rédigé ce rapport a utilisé un traitement de textes mais pas de tableur ».

3. Un professeur prend un rapport de stage au hasard : il constate que l'élève a utilisé un tableur ; quelle est la probabilité qu'il ait utilisé un traitement de texte ?

37 *D'après un exercice de Bac*

Un cube de bois de 3 cm de côté est peint, puis découpé, parallèlement aux faces, en cubes de 1 cm d'arête. On place les petits cubes dans un sac.



1. a. Combien de petits cubes a-t-on placé dans le sac ?

b. Combien de petit(s) cube(s) ne présente(nt) aucune face peinte ?

Déterminer le nombre de cubes présentant respectivement une face peinte, deux faces peintes puis trois faces peintes.

2. On tire au hasard un cube du sac. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes obtenues.
Donner la loi de probabilité de X.

38 *D'après un exercice de Bac*

Une usine fabrique des moteurs électriques. Ces moteurs peuvent présenter deux types de défauts :
• défaut M de nature mécanique ;
• défaut E de nature électrique.
Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 moteurs sur la production et on constate que le défaut M est observé sur 16 moteurs, le défaut E est observé sur 12 moteurs, et que 180 moteurs sont déclarés en parfait état de marche.
Recopier et compléter le tableau :

Moteurs	avec le défaut E	sans le défaut E	Total
avec le défaut M			
sans le défaut M			
Total			

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le tableau, reflète celle de l'ensemble de la production.

2. Le coût de fabrication d'un moteur est 600 €.
La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant selon les tarifs suivants :
• 100 € pour réparer le seul défaut M ;
• 130 € pour réparer le seul défaut E ;
• 210 € pour réparer les deux défauts M et E.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque moteur choisi au hasard dans la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté des frais de réparation éventuels.

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Montrer que la probabilité que X prenne la valeur 600 est 0,9.

c. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra présenter les résultats dans un tableau.

d. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

e. On admet que tous les moteurs produits sont vendus. L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 85 € par moteur. Quel sera le prix de vente d'un moteur ?

39 *D'après un exercice de Bac*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules rouges portant respectivement les numéros 0, 1, 2 et 4 et l'urne U_2 contient 3 boules vertes portant respectivement les numéros 1, 3 et 5.
On tire au hasard et simultanément une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2.
• a désigne le numéro de la boule tirée de U_1 et b celui de la boule tirée de U_2.
• z est le nombre complexe dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.
On suppose que les écritures algébriques $z = a + ib$ possibles sont équiprobables.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Dresser une liste de toutes les écritures algébriques possibles de z.

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a. E_1 : « $z = 1 + 3i$ » ;

b. E_2 : « $z + \overline{z} = 2$ ».

3. On désigne par A l'événement « le module de z est 5 », et par B l'événement « z est un imaginaire pur ».

a. Calculer la probabilité de l'événement A puis de l'événement B.

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$. Calculer la probabilité de cet événement.

c. En déduire la probabilité de l'événement $A \cup B$.

4. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $a + b$.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

40

Une urne contient quatre cartons numérotés de 1 à 4.

1. On tire un carton de l'urne, on note son numéro, on le remet dans l'urne et on recommence l'opération deux autres fois. Un résultat est donc par exemple (2, 1, 1).

a. En imaginant un arbre de choix, déterminer le nombre de résultats possibles. On suppose que tous ces résultats ont la même probabilité.

b. On appelle p_1 la probabilité de l'événement « le carton numéro 1 sort au premier tirage ». Construire l'arbre de choix donnant les résultats favorables, et en déduire la probabilité p_1.

c. On appelle p_2 la probabilité de l'événement « le carton numéro 1 sort pour la première fois au deuxième tirage ». Construire l'arbre de choix donnant les résultats favorables, et en déduire la probabilité p_2.

d. On appelle p_3 la probabilité de l'événement « le carton numéro 1 sort pour la première fois au troisième tirage ». Construire l'arbre de choix donnant les résultats favorables, et en déduire la probabilité p_3.

e. Montrer que p_1, p_2 et p_3 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. On fait maintenant n tirages successifs de la même façon que précédemment (c'est-à-dire en remettant à chaque fois dans l'urne le carton tiré après avoir noté son numéro).

a. Reprendre les questions **a.**, **b.** et **c.** du **1.**.

b. On appelle p_k ($k \leqslant n$) la probabilité de l'événement « le carton numéro 1 sort pour la première fois au k-ième tirage ». On admet que la suite (p_k) est la suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{4}$ et de raison $\dfrac{3}{4}$.

Exprimer, en fonction de n, la probabilité S_n de l'événement « le 1 apparaît au moins une fois ». Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

41 *D'après un exercice de Bac*

Une roue de loterie est partagée en 20 secteurs identiques :

- 1 secteur porte la marque « 100 € » ;
- 2 secteurs portent la marque « 50 € » ;
- 3 secteurs portent la marque « 20 € » ;
- 6 secteurs portent la marque « 10 € » ;
- 8 secteurs portent la marque « 0 € ».

Après avoir misé 10 €, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le joueur touche la somme indiquée par le secteur se trouvant devant le repère.

1. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain effectif du joueur ; exemple : si un secteur « 50 € » est devant le repère, le gain effectif est de 40 € en tenant compte de la mise. Une perte est un gain négatif.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Donner la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. L'organisateur de la loterie souhaite que le jeu lui soit favorable. Il construit une nouvelle roue avec n secteurs identiques ($n > 12$). Cette roue comporte un secteur « 100 € », 2 secteurs « 50 € », 3 secteurs « 20 € », 6 secteurs « 10 € » et $n - 12$ secteurs « 0 € ».

Le jeu se déroule de la même manière que précédemment : le joueur mise 10 € et X désigne à nouveau le gain effectif.

a. Donner la nouvelle loi de probabilité de X en fonction de n.

b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit favorable à l'organisateur, c'est-à-dire tel que l'espérance mathématique de X soit inférieure ou égale à 0.

Pour préparer le Bac

A *Exercice STI Arts Appliqués session 2004*

Sophie et Luc jouent très mal aux échecs, c'est pourquoi ils ont inventé le jeu suivant :

Sophie possède un sac contenant cinq pièces blanches : une reine, une tour, deux cavaliers et un pion. Le sac de Luc contient cinq pièces noires : une reine, deux tours, deux pions.

Principe du jeu : chacun tire une pièce de son sac, celui qui a la pièce la plus forte gagne la partie.

Un reine bat toutes les autres pièces, une tour bat un cavalier ou un pion, un cavalier bat un pion ; deux pièces identiques font partie nulle.

Exemples : Sophie tire une reine et Luc une tour : Sophie gagne la partie. Sophie et Luc tirent tous les deux un pion : il y a partie nulle.

1. Dans le tableau ci-dessous, chaque case correspond à une issue possible du jeu.

Luc / Sophie	R	T_1	T_2	P_1	P_2
R					
T					
C_1					
C_2					
P					

Recopier ce tableau et compléter chaque case :

- par un S lorsque Sophie gagne ;
- par un L lorsque Luc gagne ;
- par un N lorsque la partie est nulle.

On suppose les tirages équiprobables.

2. Calculer les probabilités des événements suivants :

a. A : « la partie est nulle » ;

b. B : « Sophie gagne » ;

c. C : « Luc gagne ».

3. Y a-t-il, du point de vue du contenu des sacs, un joueur avantagé par rapport à l'autre ? Justifier la réponse.

B ***Bac STI Génie mécanique, Génie énergétique, Génie civil 2004***

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :
• le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 € ;
• le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 € ;
• dans les autres cas, le tarif est de 10 €.

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16 ans paiera 6,4 €.

Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

Participant	10 ans ou moins	Entre 11 et 16 ans	Plus de 16 ans	Total
Membre	50	40	110	200
Non-membre	110	100	190	400
Total	160	140	300	600

Partie A

On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?

2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 € ?

3. On considère la variable aléatoire X égale au prix du repas pour un participant choisi au hasard. Vérifier que la probabilité que X prenne la valeur 6,4 est égale à $\frac{1}{15}$.

4. Déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.

5. Déterminer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$ (calculer la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près).

Partie B

Calculer la recette totale perçue par l'association à l'occasion de ce repas.

C ***Bac STI Génie électronique, Génie électrotechnique, Génie optique 2002***

Un dé cubique est truqué. Une partie consiste à lancer le dé et à noter le numéro de la face supérieure.

Soit X la variable aléatoire égale à ce numéro. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 10 €. Il reçoit :
• 20 € si le numéro obtenu est 1 ou 6 ;
• 10 € si le numéro obtenu est 3 ou 4 ;
• 0 € si le numéro obtenu est 2 ou 5.

Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise (le gain peut donc être soit positif soit négatif). Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur au cours d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2. Déterminer la loi de Y.

3. Calculer l'espérance mathématique de Y.

4. On rappelle qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est nulle. Pour le jeu décrit ci-dessus, on se propose de modifier la mise. La nouvelle mise est notée m et est exprimée en euros.
Quelle valeur faut-il donner à m pour rendre le jeu équitable ?

CHAPITRE 11

Géométrie

OBJECTIFS

- Maîtriser les outils permettant d'exploiter des situations géométriques.
- Entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace.
- Connaître quelques aspects des ellipses et des hyperboles (*pour les élèves de STI spécialité Arts appliqués*).
- Approfondir l'étude des ellipses (**TP** *pour les élèves de STI spécialité Arts appliqués*).

Prérequis

- Théorèmes de Pythagore et de Thalès
- Notions de géométrie de Seconde et de Première

> Ce chapitre ne concerne que les élèves des sections STI spécialités **Génie mécanique, optique, civil, énergétique, des matériaux** et spécialité **Arts appliqués**. Il ne contient de nouvelles connaissances que pour les sections STI **Arts appliqués**.

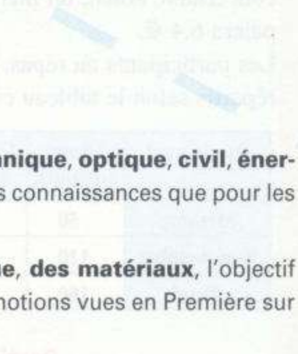
Pour les sections STI spécialités **Génie mécanique, optique, civil, énergétique, des matériaux**, l'objectif est l'entretien de la pratique des objets géométriques du plan et de l'espace. Les notions vues en Première sur ces sujets sont résumées dans l'essentiel.

ACTIVITÉ 1 « Souvenirs, souvenirs »

Objectif : « Réactiver », à travers une situation géométrique, les acquis des années antérieures concernant les calculs de distances, d'aires et de volumes

ABC est un triangle rectangle en A, tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.

M est un point du segment $[AB]$, N et P des points de $[BC]$ et Q un point de $[AC]$ tels que $MNPQ$ soit un rectangle.



1. Calculs de distances

On pose $AM = x$.

a. En utilisant le théorème de Thalès, exprimer AQ en fonction de x.

b. Calculer BC en utilisant le théorème de Pythagore.

Exprimer MQ en fonction de x.

c. En écrivant le sinus de l'angle en B dans le triangle MBN et dans le triangle ABC, exprimer MN en fonction de x.

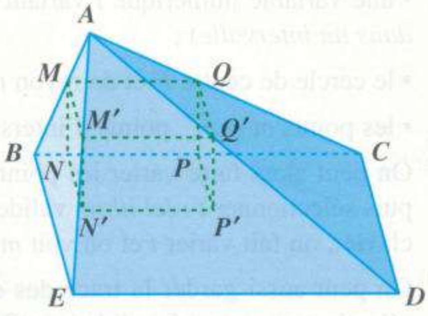
2. **Problème d'aire**

Exprimer l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de x.

Comment doit-on choisir x pour que l'aire de $MNPQ$ soit maximale ?

3. **Problème de volume**

Pour le tétraèdre représenté ci-contre, la face ABC est celle étudiée dans les questions précédentes. $BCDE$ est un carré situé dans un plan orthogonal au plan (ABC). M' est le point de $[AE]$ tel que (MM') soit parallèle à (BE) et Q' le point de $[AD]$ tel que (QQ') soit parallèle à (DC). De plus, $MM'Q'QNN'P'P$ est un pavé droit.



a. Figure extraite

- Expliquer pourquoi le triangle ACD est rectangle en C.
- Représenter dans le plan de la feuille le triangle ACD et les points Q et Q'.
- En utilisant le théorème de Thalès, montrer que $QQ' = MQ$.

Quelle est la nature du quadrilatère $MM'Q'Q$?

b. Exprimer en fonction de x le volume du pavé droit $MM'Q'QNN'P'P$.

c. Étudier la fonction définie sur $[0, 3]$, qui à x fait correspondre le volume du pavé, et en déduire la valeur de x pour laquelle ce volume est maximum.

ACTIVITÉ 2 Une histoire de cercles

> Cette activité est destinée aux élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

Objectif : Tracer point par point des courbes, ensembles de points caractérisés par une propriété métrique, à l'aide de GéoplanW (on peut aussi faire cette activité sur feuille).

1. Créer les points $F(-3, 0)$ et $F'(3, 0)$ (*Créer → point → point repéré → dans le plan*). Créer les cercles $c_1, c_2, \ldots, c_9, c_{10}$ de centre F et de rayons respectifs 1, 2, …, 9, 10 (*Créer → ligne → cercle → défini par centre et rayon*), puis les cercles $c'_1, c'_2, \ldots, c'_9, c'_{10}$ de centre F' et de rayons respectifs 1, 2, …, 9, 10 (dans GéoplanW, c_1 se note c1 et c'_1 se note $c'1$, etc.

Remarque : Pour répéter la dernière commande (par exemple la création d'un cercle) il suffit de taper simultanément sur les touches « Ctrl » et « B » (bis), ce qui permet de gagner du temps.

2. Construction de l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 8$.

a. Si $MF = 1$, où se situe le point M ? Que peut-on dire de MF' ?

Créer m_1 et m'_1, points d'intersection de c_1 et de c'_7 (Créer → point → intersection de 2 cercles → deux points).

b. Si $MF = 2$, où se situe le point M ? Que peut-on dire de MF' ?

Créer m_2 et m'_2, points d'intersection de c_2 et c'_6.

c. Poursuivre la construction pour toutes les valeurs entières de MF jusqu'à $MF = 7$.

d. Pour rendre la figure plus lisible, effacer les cercles (Cliquer sur puis sur « non dessiné » ; cliquer ensuite sur chaque cercle, avant de fermer la palette).

e. Pour compléter l'ensemble des points M cherchés, créer :

- une variable numérique t variant dans $[0, 8]$ (*Créer → Numérique → variable réelle libre dans un intervalle*) ;
- le cercle de centre F et de rayon t et le cercle c' de centre F' et de rayon $8 - t$;
- les points m et m', points d'intersection de c et c'.

On peut alors faire varier les points m et m' en faisant varier t (*Piloter → piloter au clavier* puis sélectionner *t réel libre*, valider par OK). En utilisant les touches flèches (haut et bas) du clavier, on fait varier t et on voit m et m' se déplacer sur l'ensemble de points cherché.

On peut aussi garder la trace des différents points m et m' (*Afficher → sélection trace* puis sélectionner m et m', valider par OK). Puis en cliquant sur la touche et en faisant varier t au clavier, on voit se construire les points m et m' pour les différentes valeurs de t (on peut faire varier t avec un pas plus ou moins précis en utilisant *Piloter → modifier les paramètres de pilotage au clavier* et en changeant la valeur de « pas de pilotage »).

La courbe ainsi obtenue est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 8$. Une telle courbe s'appelle une ellipse ; l'étude des ellipses fait l'objet d'une partie de ce chapitre.

3. Construction de l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 4$

Cliquer sur , pour désactiver le mode « trace ».

Supprimer les points m_1 à m_7, m'_1 à m'_7, ainsi que les cercles c et c' et les points m et m' (*Divers. → Supprimer*).

a. Premier cas : $MF - MF' = 4$

Si $MF' = 1$, quelle est la valeur de MF ? Construire les points m_1 et m'_1, intersection de c_5 et c'_1.

Continuer la construction pour MF' entier variant de 1 à 6.

Pour compléter le tracé, créer le cercle c' de centre F' et de rayon t et le cercle c de centre F et de rayon $4 + t$, puis les points m et m', intersection de c et de c'.

b. Deuxième cas : $MF' - MF = 4$.

Si $MF = 1$, que vaut MF' ? Construire les points n_1 et n'_1, intersection de c_1 et c'_5.

Continuer la construction pour MF entier variant de 1 à 6.

Pour compléter le tracé, créer les points n et n', intersection du cercle C de centre F et de rayon t et du cercle C' de centre F' et de rayon $4 + t$.

c. En pilotant les points m, m', n et n' au clavier, en sélectionnant ces quatre points pour la « sélection trace » et en activant l'icône , on voit se construire la courbe cherchée, ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 4$.

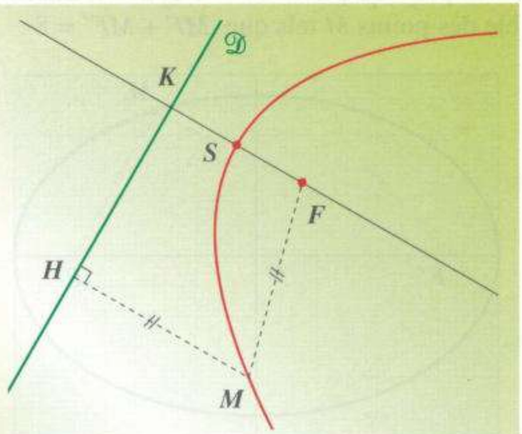
Cet ensemble est une hyperbole ; l'étude des hyperboles est l'objet d'une partie de ce chapitre.

1 Paraboles

>Ce cours ne concerne que les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués** : il traite des coniques, courbes qui étaient définies par les mathématiciens de la Grèce antique comme l'intersection d'un cône avec un plan. Certaines de ces courbes, les paraboles, ont été étudiées en Première. Par souci de cohérence, on reprend succinctement ici les résultats les concernant dans le premier paragraphe. L'étude des deux autres types de coniques, les ellipses et les hyperboles, fait l'objet du second paragraphe.

1 Définition et éléments remarquables d'une parabole

Définition Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. L'ensemble des points M du plan tel que $\frac{MF}{MH} = 1$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, est appelé **parabole**.
On dit que F est le **foyer** de cette parabole et que $\mathcal{D}$ est la **directrice** de cette parabole.
La droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer est appelée **axe focal** de la parabole.
Le point d'intersection de la parabole avec l'axe focal est appelé **sommet** de la parabole.



Propriété • Une parabole admet son axe focal comme axe de symétrie.
• Le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ est le milieu du segment $[KF]$, où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

2 Équation d'une parabole

Théorème • Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet S, de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. On considère le repère orthonormal $(S ; \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{SF}$ et F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ avec $p > 0$. Dans ce repère, $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{p}{2}$.
• Dans un repère orthonormal $(S ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ est la parabole de sommet S, de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{p}{2}$.

▸Exercices n° 17 et 18

2 Coniques à centre

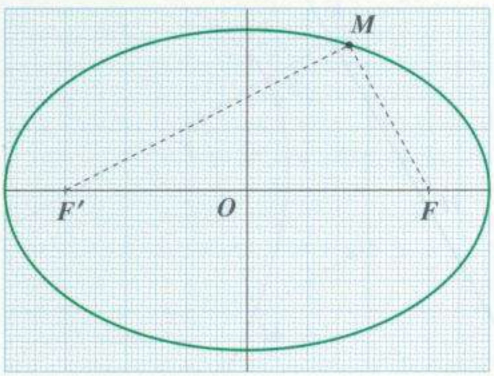
Dans l'activité 2, on a tracé point par point deux courbes qui étaient des exemples de coniques : une ellipse et une hyperbole. Sur les figures obtenues, on a constaté que ces courbes avaient chacune un centre de symétrie, d'où le nom générique de « coniques à centre » pour désigner ellipses et hyperboles.
On traite ces deux types de courbes en parallèle, étant donné leurs nombreux points communs, tant en ce qui concerne leurs définitions que leurs propriétés.

1 Définitions

Soit F et F' deux points et O le milieu de $[FF']$. On note $OF = OF' = c$.
Soit a un nombre réel strictement positif.

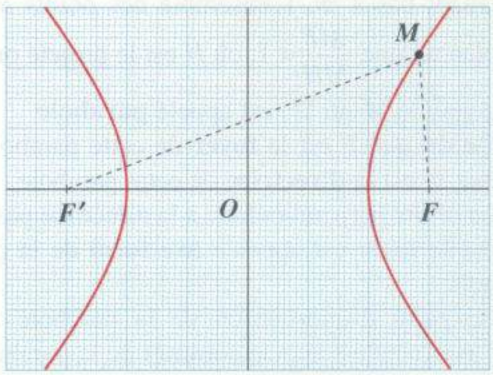
Définition Si $a > c$, l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est appelé ellipse de foyers F et F'.

Exemple : On prend $OF = 3$ et $a = 4$. Ensemble des points M tels que $MF + MF' = 8$:



Définition Si $a < c$, l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est appelé hyperbole de foyers F et F'.

Exemple : On prend $OF = 3$ et $a = 2$. Ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 4$:



Définitions • On appelle **grand axe** d'une ellipse, **ou axe focal**, la droite passant par ses deux foyers.
• On appelle **petit axe** d'une ellipse la médiatrice du segment formé par ses foyers.
• On appelle **sommets** d'une ellipse les points d'intersection de l'ellipse avec son axe focal et son petit axe.

Définitions • On appelle **axe focal** d'une hyperbole la droite passant par ses deux foyers.
• On appelle **sommets** de l'hyperbole les points d'intersection de l'hyperbole avec son axe focal.

Propriétés • Une ellipse de foyers F et F' admet deux axes de symétrie : l'axe focal (FF') et le petit axe, médiatrice de $[FF']$ et un centre de symétrie : le milieu de $[FF']$.
• L'ellipse définie par la relation
$$MF + MF' = 2a$$
admet quatre sommets, deux sur l'axe focal, deux sur le petit axe.
Les sommets situés sur l'axe focal sont à la distance a du centre O.

Propriétés • Une hyperbole de foyers F et F' admet deux axes de symétrie : l'axe focal (FF') et la médiatrice de $[FF']$ et un centre de symétrie : le milieu de $[FF']$.
• L'hyperbole définie par la relation
$$|MF - MF'| = 2a$$
admet deux sommets.
Ils sont situés sur l'axe focal, à la distance a du centre O.

Remarque : Si les deux foyers F et F' d'une ellipse $\mathscr{C}$ sont confondus (et ils le sont alors avec le centre), cette ellipse est en fait un cercle de centre $F = F' = O$ et de rayon a. En effet, si $F = F'$, la relation $MF + MF' = 2a$ s'écrit alors $2MF = 2a$, soit $MF = a$, donc M décrit le cercle de centre O et de rayon a. Réciproquement, un cercle de centre O et de rayon r est une ellipse de foyers $F = F' = O$, telle que $a = r$.

▸Exercices n° 19 et 20

2 Équations cartésiennes

Cas général

On considère une conique à centre (ellipse ou hyperbole) de foyers F et F', de centre O.

On a $OF = c$. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$.

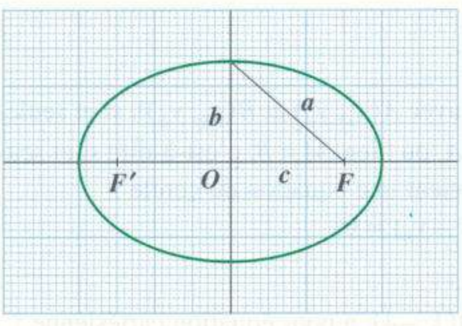
On admet alors le résultat suivant.

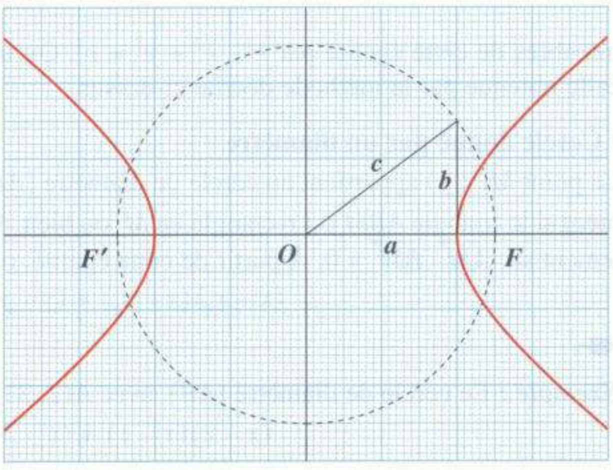
Théorème Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- L'ellipse de centre O, de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, définie par la relation $MF + MF' = 2a$, admet pour équation la relation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- L'hyperbole de centre O, de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, définie par la relation $|MF - MF'| = 2a$, admet pour équation la relation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Remarque : Dans le cas de l'ellipse, b est la distance du centre aux sommets du petit axe. Une ellipse est entièrement définie par :

- son centre ;
- la distance du centre aux sommets, a, appelée « demi-axe focal » ;
- la distance du centre aux sommets du petit axe, b, appelée « demi-axe non focal ».





Exemple 1 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer $F(5, 0)$, de centre O, définie par la relation $|MF - MF'| = 4$. On veut déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{H}$.

On applique le théorème précédent avec $c = 5$. La distance du centre au sommet vaut $a = \dfrac{4}{2} = 2$.

On obtient $b = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ et par conséquent, $\mathcal{H}$ admet alors pour équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{21} = 1$.

Exemple 2 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère Γ l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) du plan tels que $8x^2 + 9y^2 = 288$.

L'équation proposée s'écrit $\dfrac{8x^2}{288} + \dfrac{9y^2}{288} = 1$. On reconnaît là l'équation d'une ellipse. On a, par simplification, $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$.

COURS

En posant $a^2 = 36$ et $b^2 = 32$, on obtient alors $a = 6$ et $c^2 = a^2 - b^2 = 4$, donc $c = 2$. Par conséquent, Γ est l'ellipse de foyers $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$ définie par la relation $MF + MF' = 12$. Ses sommets sont les points $S(6, 0)$, $S'(-6, 0)$, $A(0, 4\sqrt{2})$ et $A'(0, -4\sqrt{2})$.

▸Exercices n° 21 à 24

■ Cas des équations de cercles

On a vu que les cercles sont des ellipses particulières et on va voir maintenant deux manières différentes d'obtenir leurs équations.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• Cercle donné par son centre et son rayon

Le point $M(x, y)$ appartient au cercle de centre $I(x_I, y_I)$ et de rayon r si et seulement si $IM = r$, soit encore $\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} = r$.
Une équation cartésienne du cercle est alors $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$.

Exemple : Le cercle de centre $I(-1, 2)$ et de rayon 3 a pour équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
Remarque : Si on considère le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon r comme une ellipse dont centre et foyers sont confondus (voir remarque du **2 1**), et que l'on applique le théorème vu au **2 2** « cas général », on obtient comme équation $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$, soit, en multipliant les deux membres de cette égalité par r^2, $x^2 + y^2 = r^2$. On trouve bien la même équation de cercle que celle obtenue par la méthode décrite ci-dessus.

• Cercle donné par un diamètre

Le point $M(x, y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, (avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$), si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M, ou bien $M = A$, ou bien $M = B$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. À partir de cette égalité, on obtient une équation du cercle :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Exemple : Le cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(2, 3)$ et $B(1, -4)$, a pour équation cartésienne :

$$(x - 2)(x - 1) + (y - 3)(y + 4) = 0\ .$$

▸Exercices n° 25 à 27

TP Ellipses et cercles

> Ce TP ne concerne que les élèves de section STI spécialité **Arts appliqués**.

1 Entre deux cercles

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O, d'axe focal $(O; \vec{i})$, de demi-axe focal a et de demi-axe non focal b.

1 Écrire l'équation de l'ellipse $\mathscr{E}$.

2 On appelle $\mathscr{C}_a$ le cercle de centre O et de rayon a, $\mathscr{C}_b$ le cercle de centre O et de rayon b. Représenter ces deux cercles en prenant $a = 3$ et $b = 2$.

3 Pour tout nombre θ appartenant à $]-\pi, \pi]$, on considère la demi-droite $[Ot)$ formant avec la demi-droite $[Ox)$ un angle de mesure θ en radians.
Cette demi-droite coupe $\mathscr{C}_a$ en A et $\mathscr{C}_b$ en B.
Sur la figure, tracer une demi-droite $[Ot)$, marquer θ et placer A et B.

4 Coordonnées de A : A appartient au cercle de centre O et de rayon a, on en déduit $x_A = a\cos\theta$; écrire de même y_A.
Coordonnées de B : B appartient au cercle de centre O et de rayon b ; en déduire x_B et y_B en fonction de b et θ.

5 La parallèle à (Ox) passant par B coupe la parallèle à (Oy) passant par A en M.
Construire le point M sur la figure.
L'abscisse de M est celle de A, l'ordonnée de M est celle de B : exprimer les coordonnées de M en fonction de a, b et θ.
Vérifier que les coordonnées de M satisfont à l'équation de $\mathscr{E}$. On en déduit que le point M ainsi construit est un point de l'ellipse $\mathscr{E}$.
Construire, par la même méthode, plusieurs points de l'ellipse $\mathscr{E}$.
On a ainsi une construction « point par point » de l'ellipse. Les deux cercles utilisés sont appelés cercle principal (pour $\mathscr{C}_a$) et cercle secondaire (pour $\mathscr{C}_b$).

Prolongement On peut compléter cette activité par une construction point par point de $\mathscr{E}$ sous GéoplanW :

- construire les cercles $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ de centre o et de rayons respectifs $a = 3$ et $b = 2$ (*Créer → ligne → cercle → défini par centre et rayon*) :
- créer un réel t libre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (*Créer → numérique → variable réelle libre dans un intervalle*) ;
- construire les points de coordonnées respectives (3, 0) et (2, 0) que l'on appellera abusivement a et b (*Créer → point → point repéré dans le plan*) ;
- construire les points A et B images respectives de a et de b par la rotation de centre o et d'angle t (*Créer → point → point image par → rotation (angle mesuré)*) ;
- construire la demi-droite $[oA)$ (*Créer → ligne → demi-droite*) ;
- construire la parallèle d_1 à (ox) passant par B et la parallèle d_2 à (oy) passant par A (*Créer → ligne → droite → parallèle*) ;
- construire le point M, point d'intersection de d_1 et d_2 (*Créer → point → intersection 2 droites*) ;
- faire varier t grâce aux touches du clavier (*Piloter → piloter au clavier*, puis sélectionner t).
- activer la fonction « trace » (*Afficher → sélection trace*, puis sélectionner M).
- cliquer sur l'icône puis faire varier t à l'aide des flèches (haut et bas) du clavier. On voit se déplacer le point M et se construire l'ensemble des points M, c'est-à-dire l'ellipse $\mathscr{E}$.

2 Représentation paramétrique

Dans la partie précédente, on a montré que tout point dont les coordonnées s'écrivent $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ est un point de l'ellipse d'axe focal $(O; \vec{i})$ de demi-axe focal a et de demi-axe non focal b. On admettra que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que les coordonnées de tout point de l'ellipse s'écrivent de cette façon.

On dit que le système $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$ où $t \in]-\pi, \pi]$ est une représentation paramétrique de l'ellipse (l'abscisse et l'ordonnée du point dépendent toutes les deux du même paramètre t).

1 Soit l'ellipse $\mathscr{E}_1$ d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Donner la représentation paramétrique de $\mathscr{E}_1$.

2 Soit la courbe Γ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Quelle est la nature de Γ_1 ?

Préciser les coordonnées de ses sommets et de ses foyers F et F'.

Soit M un point de Γ_1. Que peut-on dire de la distance $MF + MF'$?

3 Soit la courbe Γ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

Pour un point M quelconque de Γ_2, calculer la distance OM.

Quelle est la nature de Γ_2 ?

Bilan Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$ où $t \in]-\pi, \pi]$ est l'ellipse d'axe focal $(O\,;\vec{i})$, de demi-axe focal a, de demi-axe non focal b.

Le système $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$ où $t \in]-\pi, \pi]$ est une représentation paramétrique de l'ellipse.

Dans le cas où $a = b$, on a la représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon a.

3 Application : 2 méthodes pour tracer une ellipse sur l'écran de la calculatrice

Pour tracer une courbe sur une machine à calculer graphique, on peut soit utiliser les courbes représentatives de fonctions, soit utiliser la représentation paramétrique.

1 On souhaite tracer sur l'écran de la calculatrice l'ellipse $\mathscr{E}_1$ d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

a. Préciser les valeurs du demi-axe focal et du demi-axe non focal. En déduire le réglage de la fenêtre graphique de la calculatrice.

b. Utilisation des courbes représentatives de fonctions

Il est nécessaire que la courbe ait une équation de la forme $y = f(x)$.

Montrer que $\mathscr{E}_1$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, d'équations respectives $y = 5\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}}$ et $y = -5\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16}}$, courbes représentatives respectivement des fonctions f_1 et f_2 dont on précisera les expressions et l'ensemble de définition.

Tracer ces deux courbes sur l'écran d'une calculatrice.

c. Utilisation de la représentation paramétrique

Mettre la calculatrice en mode « paramétrique » (dans le menu *MODE*, choisir *paramétriques* comme type de représentations graphiques).

L'écran d'entrée des fonctions propose alors de donner les expressions de X_T et de Y_T en fonction de la variable T (en général touche $\boxed{\text{X, T, }\theta}$).

Utiliser la représentation paramétrique de $\mathscr{E}_1$ obtenue au **2.1** pour tracer l'ellipse sur l'écran de la calculatrice.

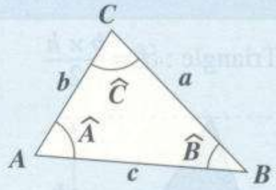
2 Proposer deux méthodes pour tracer sur l'écran de la calculatrice le cercle de centre O et de rayon 5.

▸Exercices n° 28 à 31

1> Relations entre distances et angles dans un triangle

Formules d'Al Kashi

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ une mesure de chacun des angles géométriques aux sommets du triangle.



On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

Formule des trois sinus

En gardant les mêmes notations et en notant S l'aire du triangle, on a :

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

2> Coordonnées

Tous les résultats donnés sont aussi valables dans le plan en ne tenant compte que des deux premières coordonnées.

Définition

• L'espace vectoriel étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) si et seulement si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

• L'espace étant rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point M a pour coordonnées (x, y, z) si et seulement si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Calculs sur les coordonnées

L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points. Alors :

• $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$;

• le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Colinéarité, parallélisme, alignement

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un des deux est nul, ou si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

• Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

• Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

• $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ sont colinéaires si et seulement si (x, y, z) et (x', y', z') sont des triplets proportionnels. En particulier dans le plan, $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Produit scalaire, orthogonalité, distance

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

• On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

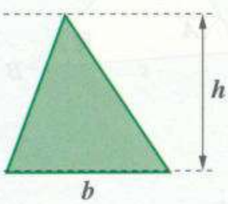
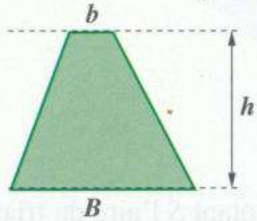
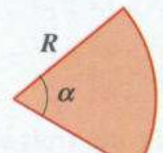
• Soit $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

De plus, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

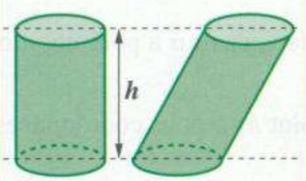
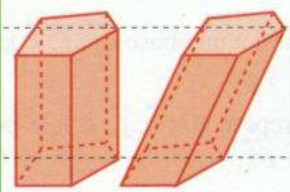
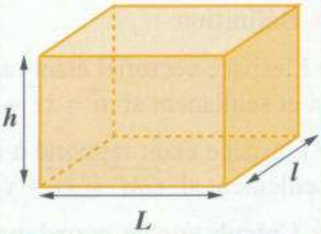
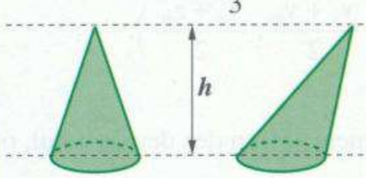
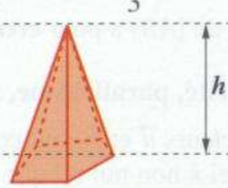
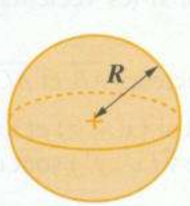
• Pour $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3> Aires et volumes

Aires des configurations du plan

Triangle : $\mathcal{S} = \dfrac{b \times h}{2}$ 	Trapèze : $\mathcal{S} = \dfrac{b + B}{2} \times h$  (Les parallélogrammes sont des cas particuliers)	Secteur angulaire : $\mathcal{S} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$ (α exprimé en radians)  En particulier, l'aire d'un disque de rayon R est $\mathcal{S} = \pi R^2$.

Volumes des solides usuels

$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur	Cylindre $\mathcal{V} = \pi R^2 h$ 	Prisme $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$ 	Parallélépipède rectangle $\mathcal{V} = L \times l \times h$ 
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur	Cône $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ 	Pyramide $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$ 	
Sphère  Aire de la sphère : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ Volume de la boule : $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$			

4> Coniques

Paraboles

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

• L'ensemble des points M du plan tel que $\dfrac{MF}{MH} = 1$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, est appelé **parabole**. F est le **foyer** de cette parabole, $\mathcal{D}$ est la **directrice** de cette parabole.

Axes et sommet

• La droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer est appelée **axe focal** de la parabole, c'est un axe de symétrie de la parabole.

• Le point d'intersection de la parabole avec l'axe focal est appelé **sommet** de la parabole. C'est le milieu du segment $[KF]$, où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

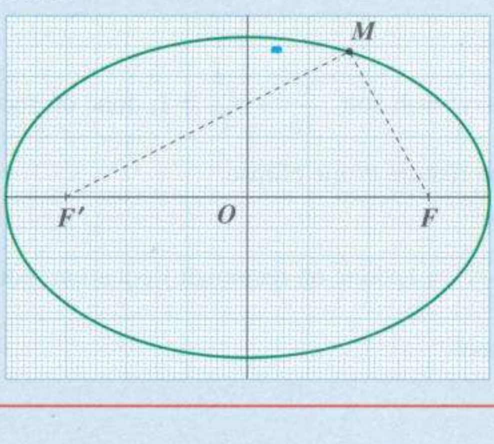
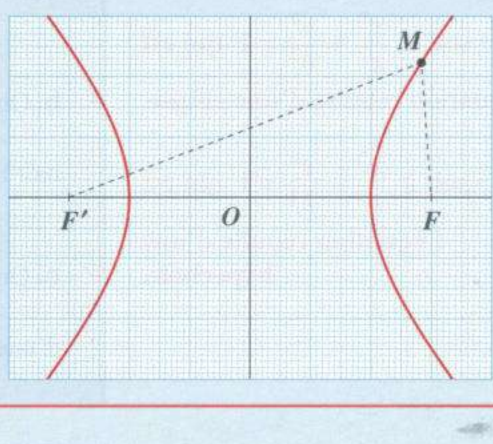
Équation cartésienne

• Dans le repère orthonormal $(S\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{SF}$ et F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, avec $p > 0$, $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{p}{2}$.

• Dans un repère orthornormal $(S\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ est la parabole de sommet S, de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{p}{2}$.

Ellipses et hyperboles

Soit F et F' deux points et O le milieu de $[FF']$. On note $OF = OF' = c$.
Soit a un nombre réel strictement positif. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.

Ellipses	Hyperboles
Définition	
Si $a > c$, l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est appelé ellipse de foyers F et F'.	Si $a < c$, l'ensemble des points M du plan tels que $\lvert MF - MF' \rvert = 2a$ est appelé hyperbole de foyers F et F'.
Axes	
• On appelle **grand axe** d'une ellipse, **ou axe focal**, la droite passant par ses deux foyers. • On appelle **petit axe** d'une ellipse la médiatrice du segment formé par ses foyers. • Ces deux axes sont des axes de symétrie et le point O est centre de symétrie de l'ellipse.	• On appelle **axe focal** d'une hyperbole la droite passant par ses deux foyers. • Cet axe et la médiatrice de $[FF']$ sont des axes de symétrie et le point O est centre de symétrie de l'hyperbole.
Sommets	
On appelle **sommets** d'une ellipse les points d'intersection de l'ellipse avec son axe focal et son petit axe.	On appelle **sommets** de l'hyperbole les points d'intersection de l'hyperbole avec son axe focal.
Équation cartésienne	
L'ellipse de centre O, de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, définie par la relation : $MF + MF' = 2a$ admet pour équation la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.	L'hyperbole de centre O, de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, définie par la relation : $\lvert MF - MF' \rvert = 2a$ admet pour équation la relation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
Courbe	
	

Établir une équation cartésienne d'une conique à partir de la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

1 Soit f_1 et f_2 les fonctions numériques de la variable réelle x définies sur $I = [0, +\infty[$ respectivement par :

$$f_1(x) = 2\sqrt{x} \text{ et } f_2(x) = -2\sqrt{x}.$$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm), on appelle $\mathscr{C}_1$ la courbe représentant la fonction f_1 et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentant la fonction f_2. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe formée par la réunion des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

Réponse

On explicite y^2 à partir des coordonnées de points quelconques de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.

Pour tout point M de $\mathscr{C}_1$, on a $y = 2\sqrt{x}$, soit $y^2 = 4x$.
Pour tout point M de $\mathscr{C}_2$, on a $y = -2\sqrt{x}$, soit $y^2 = 4x$.
Donc un point $M(x, y)$ de la réunion $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ a ses coordonnées qui vérifient $y^2 = 4x$.

On montre que tout point dont les coordonnées vérifient l'équation obtenue appartient à $\mathscr{C}_1$ ou à $\mathscr{C}_2$.

Réciproquement, si $y^2 = 4x$, alors $y = 2\sqrt{x}$ et M appartient à $\mathscr{C}_1$ ou $y = -2\sqrt{x}$ et M appartient à $\mathscr{C}_2$.
On en conclut que $\mathscr{C}$ est la parabole d'équation $y^2 = 4x$.

Reconnaître la nature d'une conique à partir d'une équation cartésienne

2 On considère l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient :

a. $y^2 = 4x$, **b.** $y^2 = 4 - \dfrac{x^2}{4}$, **c.** $y^2 = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$.

Déterminer la nature de la conique correspondante.

Réponses

On transforme éventuellement l'équation pour se ramener
• soit à $y^2 = 2px$ qui est l'équation réduite d'une parabole.

a. On a $y^2 = 4x$, donc on reconnaît l'équation réduite d'une parabole.

• soit à $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ qui est l'équation réduite d'une ellipse.

b. On a $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4$, soit $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, donc on reconnaît l'équation réduite d'une ellipse.

• soit à $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ qui est l'équation réduite d'une hyperbole.

c. On a $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$, donc on reconnaît l'équation réduite d'une hyperbole.

Déterminer les éléments caractéristiques d'une conique à partir de son équation cartésienne réduite

• Une parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ a pour foyer le point $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et pour directrice la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$.

• Une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour sommets les points $S_1(a, 0)$, $S_2(-a, 0)$, $A_1(0, b)$ et $A_2(0, -b)$, et pour foyers les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, avec $c^2 = a^2 - b^2$.

• Une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour sommets les points $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$, et pour foyers les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, avec $c^2 = a^2 + b^2$.

3 Dans chacun des cas précédents, préciser les éléments caractéristiques de la conique.

Réponses

a. On a $p = 2$. Le foyer de la parabole est donc le point de coordonnées $F(1, 0)$ et sa directrice la droite d'équation $x = -1$.

b. L'axe focal de l'ellipse est l'axe des abscisses (grand axe) et le petit axe est l'axe des ordonnées ; on a $a^2 = 16$ et $b^2 = 4$, les sommets sont donc les points $S_1(4, 0)$, $S_2(-4, 0)$, $A_1(0, 2)$ et $A_2(0, -2)$.

De plus, on a $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$; donc les foyers sont les points $F(2\sqrt{3}, 0)$ et $F'(-2\sqrt{3}, 0)$.

c. On a $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$, d'où $c^2 = 5$. Les sommets de l'hyperbole sont les points $S_1(2, 0)$ et $S_2(-2, 0)$, et les foyers sont les points $F(\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-\sqrt{5}, 0)$.

Reconnaître une conique à partir de sa définition métrique et préciser ses caractéristiques

• L'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation $MF + MF' = 2a$ est une ellipse.

4 M étant un point quelconque du plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Quel est l'ensemble des points M qui vérifient la relation suivante :

a. $MF + MF' = 8$, avec $F(2\sqrt{3}, 0)$ et $F'(-2\sqrt{3}, 0)$.

b. $|MF - MF'| = 4$, avec $F(\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-\sqrt{5}, 0)$.

Réponses

a. L'ensemble des points M est une ellipse de foyers F et F'. L'axe focal de l'ellipse est l'axe des abscisses (grand axe) et le petit axe est l'axe des ordonnées ; ici, $a = 4$ et $c = 2\sqrt{3}$, donc $b^2 = a^2 - c^2$ soit $b^2 = 4$, les sommets sont donc les points $S_1(4, 0)$, $S_2(-4, 0)$, $A_1(0, 2)$ et $A_2(0, -2)$.

• L'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole.

b. L'ensemble des points M est une hyperbole de foyers F et F'. Ici, $a = 2$, donc les sommets sont les points $S_1(2, 0)$ et $S_2(-2, 0)$.

Déterminer l'équation cartésienne réduite d'une conique à partir de sa définition métrique et de ses caractéristiques

Il suffit de remplacer a et b par leur valeur dans :

• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, qui est l'équation réduite d'une ellipse ;

• $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, qui est l'équation réduite d'une hyperbole.

5 Dans chacun des cas précédents, préciser l'équation cartésienne réduite de la conique.

Réponse

a. On a $a^2 = 16$ et $b^2 = 4$, donc l'équation cartésienne réduite de l'ellipse est :

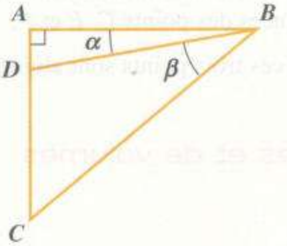
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

b. On a $a^2 = 4$, $c^2 = 5$ et $b^2 = c^2 - a^2$, soit $b^2 = 1$; donc l'équation cartésienne réduite de l' hyperbole est :

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

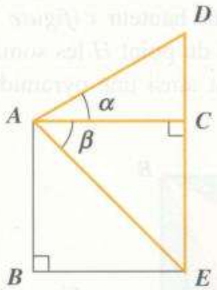
Calculs de distances et d'angles

1 C



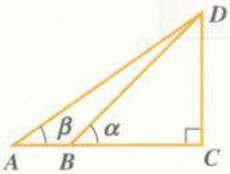
On donne : $AB = 3$, $\alpha = 10°$ et $\beta = 40°$. Déterminer la valeur exacte de CD. En déduire la valeur approchée à 10^{-1} près.

2



On donne : $AB = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ rad et $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ rad. $ABEC$ est un carré. Déterminer la valeur exacte de CD. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

3



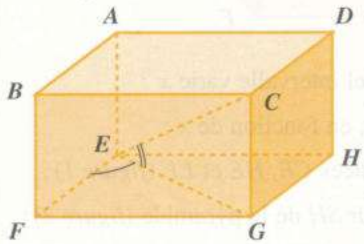
On donne : $AB = 5$, $\alpha = 45°$ et $\beta = 35°$.

a. Exprimer $\tan\beta$ en fonction de CD.

b. En déduire la valeur approchée de CD à 10^{-1} près.

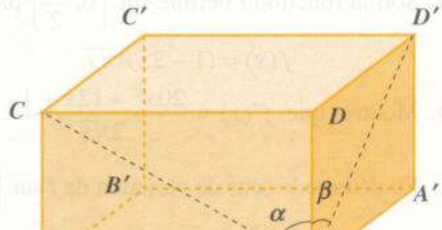
4

Dans le pavé droit $ABCDEFGH$,



on donne : $CG = 4$, $\widehat{CEG} = 30°$ et $\widehat{GEF} = 60°$. Calculer FG.

5



On appelle α une mesure de $\widehat{CAD}$, β une mesure de $\widehat{DAD'}$ et γ une mesure de $\widehat{CAD'}$ dans le pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ représenté ci-dessus.

a. Exprimer, en fonction de α, β et AD les distances AC, AD', CD, DD' et CD'.

b. En déduire l'expression de $\cos\gamma$ en fonction de α et β.

c. Déterminer γ si $\alpha = 60°$ et $\beta = 30°$.

6 C

Soit ABC un triangle tel que $BC = 3$, $AC = 2{,}5$ et $AB = 5$.

a. Calculer une mesure en degrés à 10^{-1} près de chacun des angles du triangle.

b. Calculer l'aire du triangle à 10^{-1} près.

7

Soit IJK un triangle tel que $\widehat{I} = 30°$, $IK = 4$ et $IJ = 2$.

a. Calculer la valeur exacte de JK, puis une mesure en degrés à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{K}$.

b. Calculer l'aire du triangle à 10^{-1} près.

8

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle $\widehat{A}$ mesure 30° et $BC = 4$.

a. Calculer AB.

b. Calculer alors le rayon du cercle circonscrit au triangle.

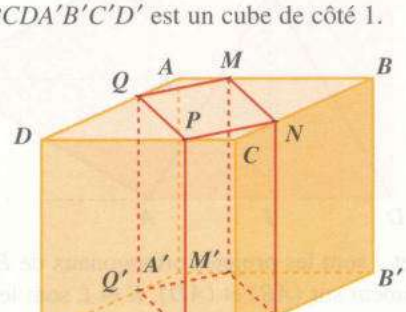
9

1. $ABCD$ est un carré de côté 1. On considère les points $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$ et $Q \in [DA]$ tels que $AM = AQ = CN = CP = k$.

a. Quelle est la nature de $MNPQ$? Justifier.

b. Calculer MN puis QN en fonction de k.

2. $ABCDA'B'C'D'$ est un cube de côté 1.



La face $ABCD$ est celle étudiée à la question précédente et M', N', P' et Q' sont les projetés orthogonaux respectivement de M, N, P et Q sur le plan $(A'B'C'D')$.

a. Quelle est la nature de $MNPQM'N'P'Q'$? de $MN'P'Q$?

b. Exprimer MN' en fonction de k.

c. Comment doit-on choisir k pour que $MN'P'Q$ soit un carré ?

Calculs sur les coordonnées

Dans les exercices **10** à **15**, on travaille dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

10

C On considère les points $A(1, 4)$, $B(2, 2)$, $C(2, 0)$, $D(0, 4)$ et $E\left(\frac{7}{2}, -1\right)$.

a. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

b. Montrer que A, B et E sont alignés.

11

On considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 6)$ et $D(4, 4)$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

12

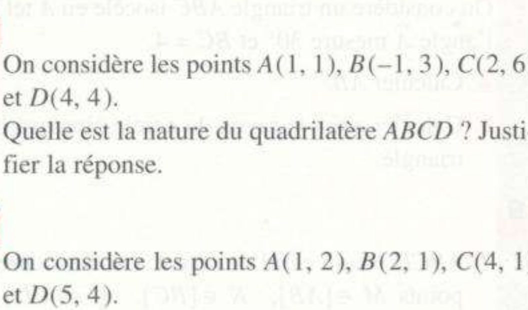
On considère les points $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(4, 1)$ et $D(5, 4)$.

a. Montrer que les triangles ABD et ACD sont deux triangles rectangles d'hypoténuse $[AD]$.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

13

$ABCD$ est un carré de côté 1. AED et ABF sont deux triangles équilatéraux.



I et J sont les projetés orthogonaux de E respectivement sur (AB) et (AD). K et L sont les projetés orthogonaux de F respectivement sur (AB) et (AD).

a. Calculer les valeurs exactes de AI, AK, AJ et AL.

b. Dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées des points C, E et F.

c. Démontrer que ces trois points sont alignés.

Calculs d'aires et de volumes

14

On veut construire une pyramide régulière à base carrée en découpant, dans un carré de côté $a = 1$, quatre triangles isocèles de hauteur x (*figure 1*) et en relevant à la verticale du point H les sommets A, B, C et D. On obtient ainsi une pyramide de sommet S (*figure 2*).

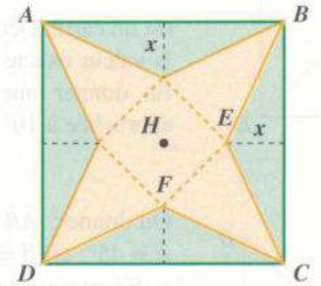


Figure 1

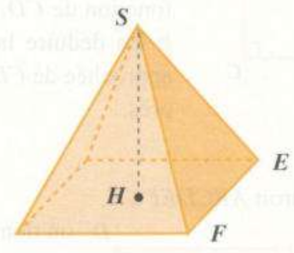


Figure 2

1. Dans quel intervalle varie x ?

2. Calculer, en fonction de x :

a. les distances CE, HE et EF (*figure 1*) ;

b. la hauteur SH de la pyramide (*figure 2*) ;

c. le volume $V(x)$ de la pyramide.

3. Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = (1 - 2x)^2 \sqrt{x}.$$

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{20x^2 - 12x + 1}{2\sqrt{x}}$.

En déduire le sens de variation de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

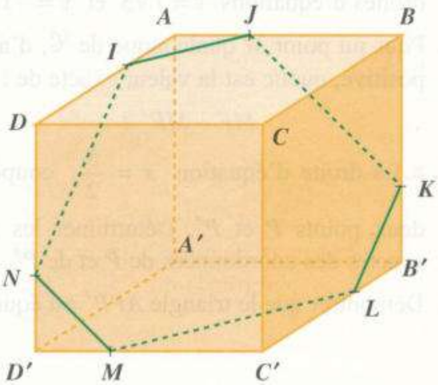
b. Exprimer le volume $V(x)$ de la pyramide en fonction de $f(x)$.

c. Pour quelle valeur de x ce volume est-il maximal ? Donner alors une valeur approchée de ce volume à 10^{-2} près.

15

$ABCDA'B'C'D'$ est un cube de côté 3.

Les points I, J, K, L, M et N appartiennent aux arêtes comme le montre la figure ci-dessous et on a $AI = AJ = B'K = B'L = D'M = D'N = 1$.

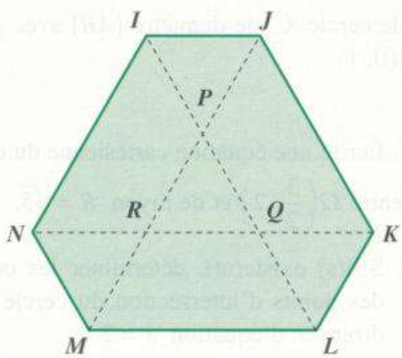


1. a. Montrer que (IJ), (ML) et (NK) sont parallèles, de même que (JK), (MN) et (IL), ainsi que (NI), (KL) et (JM).

b. Calculer les valeurs exactes de IJ, KL, MN ; JK, ML, IN et NK, IL, JM.

2. Sur la figure ci-dessous est représenté l'hexagone $IJKLMN$.

P est le point d'intersection de (IL) et (JM), Q est le point d'intersection de (IL) et (KN) et R est le point d'intersection de (KN) et (JM).



a. Quelle est la nature des quadrilatères $IJRN$ et $KLMR$?

b. En déduire les valeurs exactes de MR et NR, la nature du triangle MNR, la mesure de l'angle $\widehat{KNM}$ et enfin la hauteur du trapèze $MNKL$.

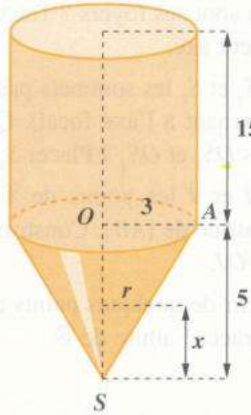
c. Calculer l'aire du trapèze $MNKL$ puis du trapèze $IJKN$.

d. En déduire l'aire de l'hexagone.

16

Un silo à grain est formé d'un cylindre et d'un cône comme représenté ci-après.

a. Calculer la valeur exacte du volume total du silo.



Si x est un réel compris entre 0 et 20, on appelle $V(x)$ le volume de grain nécessaire pour remplir le silo jusqu'à une hauteur x.

b. Pour x strictement supérieur à 5, déterminer l'expression de $V(x)$.

c. On considère maintenant $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Exprimer r en fonction de x. Déterminer alors l'expression de $V(x)$.

d. Étudier les variations de V sur $[0, 5]$.

e. Tracer la représentation graphique de V sur $[0, 20]$.

On verse 100 m^3 de grain dans le silo. Déterminer, par le calcul, la hauteur h de remplissage du silo à 10^{-2} près.

Coniques

> Les exercices **17** à **24** et **28** à **31** ne concernent que les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

17

C Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point F de coordonnées $(3, 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -3$.

a. Donner une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Préciser son sommet.

b. Tracer $\mathcal{P}$.

c. Soit M un point de $\mathcal{P}$, H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Que peut-on dire du triangle MHF ?

18

Même exercice que le précédent avec le point F de coordonnées $(-4, 0)$ et la droite d'équation $x = 4$.

19

C Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ et O le milieu de $[AB]$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan vérifiant $AM + BM = 6$?

b. Quels sont ses foyers ? Tracer son axe focal et son petit axe.

c. Soit S_1 et S_2 les sommets principaux (sommets appartenant à l'axe focal). Que valent les distances OS_1 et OS_2 ? Placer S_1 et S_2.

d. Soit I et J les points de $\mathscr{E}$ appartenant à la médiatrice de $[AB]$. Construire I et J. Calculer OI et OJ.

e. À partir de quelques points construits au compas, tracer l'allure de $\mathscr{E}$.

20

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$ et O le milieu de $[AB]$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M du plan vérifiant $|MA - MB| = 4$?

b. Quels sont ses foyers ? Tracer son axe focal et la médiatrice de $[AB]$.

c. Soit S_1 et S_2 ses sommets. Calculer les distances OS_1 et OS_2. Placer S_1 et S_2.

d. À partir de quelques points construits au compas, tracer l'allure de $\mathscr{H}$.

21

C Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation :

$$3x^2 + 4y^2 = 48.$$

Quelle est la nature de $\mathscr{C}$? Déterminer ses éléments caractéristiques (foyers, sommets, axes et centre de symétrie).

22

Même exercice que le précédent avec :

$$8x^2 - y^2 = 32.$$

23

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm), on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$? Préciser les coordonnées de ses sommets et de ses foyers.
2. Tracer la conique $\mathscr{C}$.
3. La droite d'équation $y = 1$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points P et Q (P est le point d'abscisse positive).

a. Déterminer les coordonnées exactes de P et Q.

b. Calculer l'aire en cm² du triangle OPQ.

24

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 12 cm), on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation $3x^2 - y^2 = 12$.

1. a. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$? Préciser les coordonnées de ses sommets A et A', de ses foyers F et F'. On notera A et F ceux des points trouvés d'abscisses positives.

b. Tracer sur la même figure la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$.

c. Pour un point M quelconque de $\mathscr{C}$, d'abscisse positive, quelle est la valeur exacte de :

$$MF - MF'\ ?$$

2. a. La droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points P et P'. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de P et de P'.

b. Démontrer que le triangle APP' est équilatéral.

25

C a. Écrire une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1, -2)$ et de rayon $R = 4$.

b. Même question avec le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ avec $A(-3, 2)$ et $B(4, 1)$.

c. S'il(s) existe(nt), déterminer les coordonnées des points d'intersection de chacun des cercles avec les axes du repère.

26

Même exercice que le précédent avec :

• le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-1, 3)$ et de diamètre 6 ;

• le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ avec $A(3, -2)$ et $B(0, 1)$.

27

a. Écrire une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b. S'il(s) existe(nt), déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 2$.

c. Même question avec la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = x + 2$.

28

C Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole ayant pour foyer $F(3, 0)$, de centre O, ayant pour sommet $S(1, 0)$.

a. Écrire une équation de $\mathscr{H}$.

b. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{8(x^2 - 1)}$.

• Montrer que la courbe représentative de f est une partie de $\mathscr{H}$.

• Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

• En déduire le tracé complet de $\mathscr{H}$.

29

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse ayant pour foyer $F(3, 0)$, pour centre O, pour sommet $S(6, 0)$.

a. Écrire une équation de $\mathscr{E}$. Donner les coordonnées de ses autres sommets.

b. On considère la fonction f, définie sur $[-6, 6]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{36 - x^2}$.

• Montrer que la courbe représentative de f est une partie de $\mathscr{E}$.

• Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

• En déduire le tracé complet de $\mathscr{E}$.

30 **C**

Soit la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t. \end{cases}$$

• Quelle est la nature de $\mathscr{C}$?

• Préciser les coordonnées de ses sommets, de ses foyers F et F'.

• Pour un point M de $\mathscr{C}$, quelle est la valeur exacte de $MF + MF'$?

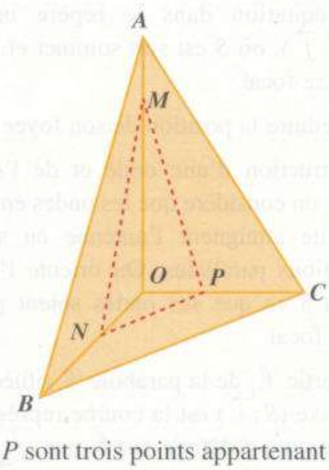
31

Même exercice que le précédent avec $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$

Pour aller plus loin

32

Soit $OABC$ un tétraèdre dont les faces OAB, OAC et OBC sont trois triangles rectangles en O. On donne $OA = 12$, $OB = OC = 10$.



M, N et P sont trois points appartenant respectivement aux segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ tels que $ON = OP = AM = x$.

1. a. Pour quelle valeur de x a-t-on (MN) parallèle à (AB) ?

b. Calculer, pour cette valeur de x, une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{OMN}$.

2. a. Exprimer, en fonction de x, le volume $V(x)$ du tétraèdre $MNOP$.

b. Étudier les variations de la fonction définie sur $[0, 10]$ qui à x associe le volume correspondant $V(x)$. En déduire la valeur de x pour laquelle ce volume est maximal.

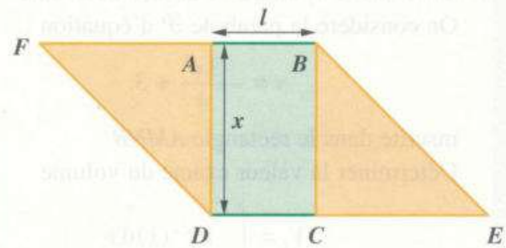
c. Pour cette question, on prend $x = 8$.

• Déterminer les valeurs exactes des côtés du triangle MNP, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-1} près en degrés de chacun de ses angles.

• Calculer l'aire du triangle MNP (on en donnera une valeur approchée à 10^{-1} près).

33

Dans une galerie marchande, un décorateur doit réaliser un logo publicitaire selon le schéma ci-dessous.



• $ABCD$ est un rectangle.

• Les triangles DAF et BCE sont isocèles et rectangles respectivement en A et C.

• x et l représentent les mesures en mètres des longueurs respectives AD et AB.

Le décorateur dispose d'une longueur de 16 mètres de profilé d'aluminium pour l'encadrement du quadrilatère $BEDF$ (on négligera les pertes dues aux chutes des coupes). Le but du problème est de déterminer les dimensions x et l pour que l'aire du quadrilatère $BEDF$ soit maximale, sachant que x doit être inférieur ou égal à 3 mètres pour des raisons d'encombrement.

1. a. Exprimer, en mètres, le périmètre P du quadrilatère $BEDF$ en fonction de x et l.

b. En déduire la valeur de l en fonction de x, sachant que le décorateur utilise entièrement les 16 mètres de profilé.

2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$, en m², du quadrilatère $BEDF$ en fonction de x.

3. Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par :

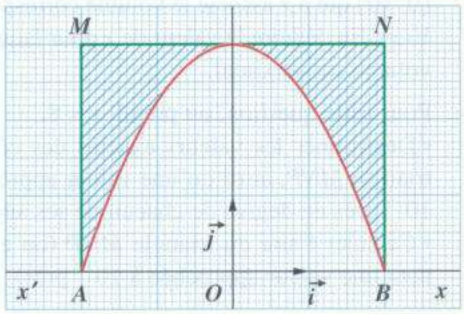
$$f(x) = 8x - \sqrt{2}x^2.$$

Étudier les variations de f.

4. En déduire les valeurs de x et de l, exprimées à 10^{-2} près par défaut, pour lesquelles l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère $BEDF$ est maximale.

34

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ où l'unité représente un mètre.
$[MN]$ est un segment de droite tel que M a pour coordonnées -2 et 3, et N, 2 et 3.



a. Par rotation autour de l'axe $(x'x)$, le rectangle $AMNB$ engendre un cylindre. Déterminer la valeur exacte de son volume V_1.

b. On évide le cylindre de la façon suivante :
On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation :

$$y = -\frac{3x^2}{4} + 3,$$

inscrite dans le rectangle $AMNB$.
Déterminer la valeur exacte du volume

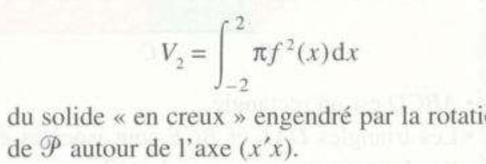
$$V_2 = \int_{-2}^{2} \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

du solide « en creux » engendré par la rotation de $\mathscr{P}$ autour de l'axe $(x'x)$.

c. En déduire la valeur exacte du volume de la partie restante du cylindre (obtenue à partir de la rotation de la zone hachurée, sur le schéma). Donner une valeur approchée de V à 10^{-2} près par défaut.

35

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, d'unité graphique 1 cm, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 6. $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(x'x)$ en A, d'abscisse positive, et en A'. La droite Δ d'équation $x = 3$ coupe l'axe $(x'x)$ en H.
On désigne par B le point d'ordonnée positive, intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.



1. a. Écrire une équation du cercle $\mathscr{C}$.

b. Déterminer la valeur exacte de HB.

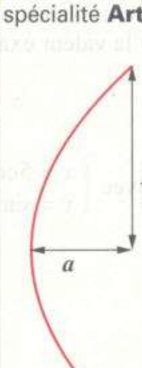
c. Déterminer une équation de la droite (OB).

2. On désigne par V_1 le volume, exprimé en cm^3, du cône engendré par la rotation du triangle OBH autour de l'axe $(x'x)$. Calculer V_1 ; on en donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 1 mm^3 près.

3. On désigne par V_2 le volume, exprimé en cm^3, du solide engendré par la rotation du « triangle mixtiligne » HBA (hachuré sur la figure) autour de l'axe $(x'x)$. Calculer V_2 ; on en donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 1 mm^3 près.

4. On considère le solide engendré par la rotation, autour de l'axe $(x'x)$, du secteur circulaire limité par l'arc de cercle et les segments $[OA]$ et $[OB]$.
Exprimer, en cm^3, le volume V de ce solide. (On donnera la valeur exacte de V.)

36 >Cet exercice ne concerne que les élèves de STI spécialité **Arts appliqués**.



En faisant tourner une parabole autour de son axe focal, on engendre une surface nommée paraboloïde de révolution. C'est le cas, par exemple, pour une antenne dite parabolique.
On considère la coupe $\mathscr{C}$ d'une telle antenne selon un plan contenant son axe de révolution.
Les longueurs sont données en centimètres. L'antenne a un diamètre $d = 56$ et une « profondeur » $a = 9{,}8$.

1. a. Sachant que $\mathscr{C}$ est une parabole, déterminer son équation dans le repère orthonormal $(S\,;\vec{i},\vec{j}\,)$, où S est son sommet et où $\vec{i}$ dirige son axe focal.

b. En déduire la position de son foyer.

2. Construction d'une onde et de l'onde réfléchie : on considère que les ondes émises par un satellite atteignent l'antenne en suivant des directions parallèles. On oriente l'antenne de façon à ce que ses ondes soient parallèles à l'axe focal.

a. La partie $\mathscr{C}_1$ de la parabole $\mathscr{C}$ située au-dessus de l'axe $(S\,;\vec{i}\,)$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{80x}$. Construire $\mathscr{C}_1$ dans le repère $(S\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ (unité graphique : 0,2 cm).

b. Placer le point A d'abscisse 5 de $\mathscr{C}_1$.
Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_1$ en A et construire $\mathscr{T}$.
Tracer la perpendiculaire Δ en A à $\mathscr{T}$.

c. Une onde, atteignant la parabole en A, est représentée par une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe focal $(S\,;\vec{i}\,)$. Elle se réfléchit suivant la droite $\mathscr{D}'$, symétrique de la droite $\mathscr{D}$ par rapport à Δ. Construire la droite $\mathscr{D}'$ et vérifier que $\mathscr{D}'$ passe par le foyer F de la parabole.

37 >Cet exercice ne concerne que les élèves de STI spécialité **Arts appliqués**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,)$ d'unité graphique 1 cm.

On considère un point F, une droite $\mathscr{D}$, un point M quelconque du plan et H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$. Dans chacun des cas suivants, on cherche à déterminer la courbe sur laquelle se déplace le point M. On appelle (x, y) les coordonnées de M.

1. 1[er] cas : $\dfrac{MF}{MH} = 1$. Sur quelle type de courbe se déplace le point M ?

2. 2[e] cas : $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{2}$.

On suppose que le point F a pour coordonnées $(2, 0)$ et la droite $\mathscr{D}$ pour équation $x = 8$.

a. Donner les coordonnées de H en fonction de y.

b. Exprimer les distances MH et MF en fonction de x et y.

c. Montrer qu'à partir de la relation $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{2}$, on obtient l'égalité $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

d. Quelle est la nature de la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$?

e. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathscr{E}$ (foyers, sommets, axes et centre de symétrie).

f. Que représente le point F pour cette courbe $\mathscr{E}$? Expliquer pourquoi, par analogie avec la parabole, la droite $\mathscr{D}$ est appelée directrice de $\mathscr{E}$.

3. 3[e] cas : $\dfrac{MF}{MH} = 2$.

Ici, le point F a pour coordonnées $(6, 0)$ et la droite $\mathscr{D}$ pour équation $x = \dfrac{3}{2}$.

a. Donner les coordonnées de H en fonction de y.

b. Exprimer les distances MH et MF en fonction de x et y.

c. Montrer qu'à partir de la relation $\dfrac{MF}{MH} = 2$, on obtient l'égalité $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{27} = 1$.

d. Quelle est la nature de la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{27} = 1$?

e. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathscr{H}$ (foyers, sommets, axes et centre de symétrie).

f. Que représente le point F pour cette courbe $\mathscr{H}$? Expliquer pourquoi, par analogie avec la parabole, la droite $\mathscr{D}$ est appelée directrice de $\mathscr{H}$.

Remarque : De façon plus générale, on peut montrer que le lieu des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ est :

- une parabole si $e = 1$ (on le sait d'après le cours de Première) ;
- une ellipse si $0 < e < 1$;
- une hyperbole si $e > 1$.

Le réel e est appelé excentricité de la conique.

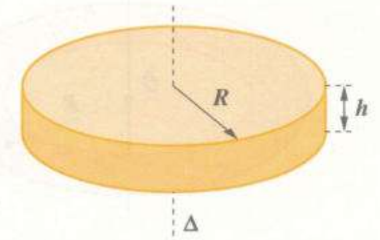
38

L'objectif de l'exercice est de déterminer le moment d'inertie d'une couronne par rapport à son axe Δ.

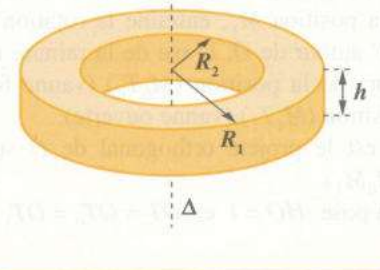
a. Pour un disque plein, constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ, de masse M, de rayon R et d'épaisseur h, le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ a pour expression :

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{2}.$$

Exprimer I_Δ en fonction de ρ, R et h.



b. On considère maintenant la couronne de masse M' représentée à la figure ci-dessous.



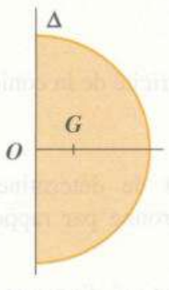
On appelle $I_{1\Delta}$ et $I_{2\Delta}$ les moments d'inertie respectifs des disques pleins, constitués du même matériau de masse volumique ρ, de rayons respectifs R_1 et R_2 et de hauteur h. On admet que $I_\Delta = I_{2\Delta} - I_{1\Delta}$.
Montrer, à partir des expressions de $I_{1\Delta}$ et $I_{2\Delta}$ en fonction de ρ, R_1, R_2 et h, que :

$$I_\Delta = \frac{M'(R_1^2 + R_2^2)}{2}.$$

39 Volume et centre d'inertie

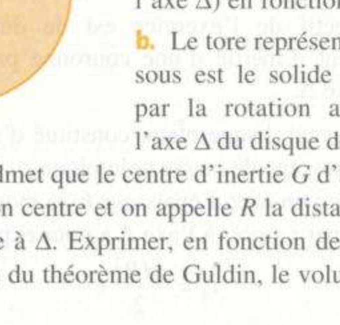
Un solide de révolution s'obtient par la rotation d'une surface S autour d'un axe Δ.
D'après le théorème de Guldin appliqué au calcul de volume, le volume d'un tel solide est égal au produit de l'aire de S par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de S dans sa rotation autour de Δ.

a. Une boule de rayon R est engendrée par la rotation d'un demi-disque de rayon R autour d'un diamètre Δ.



À partir du volume de la boule et de l'aire du demi-disque, déterminer la distance OG (distance du centre de gravité du demi-disque à l'axe Δ) en fonction de R.

b. Le tore représenté ci-dessous est le solide engendré par la rotation autour de l'axe Δ du disque de rayon r.
On admet que le centre d'inertie G d'un disque est son centre et on appelle R la distance de ce centre à Δ. Exprimer, en fonction de r et R, à l'aide du théorème de Guldin, le volume de ce tore.

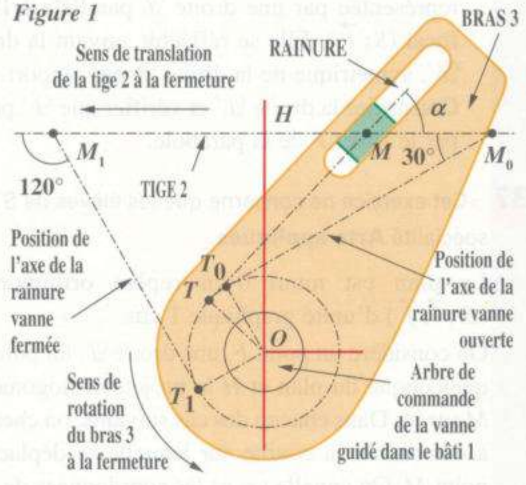


40

Une vanne est commandée par le mécanisme schématisé ci-après sur la *figure 1*. La translation de la tige 2 amenant le point M de la position M_0 à la position M_1, entraîne la rotation du bras de 90° autour de O. L'axe de la rainure (MT) passe alors de la position (M_0T_0) (vanne fermée) à la position (M_1T_1) (vanne ouverte).
H est le projeté orthogonal de O sur la droite (M_0M_1).
On pose $HO = l$ et $OT = OT_0 = OT_1 = r$.

On note α une mesure en degrés de l'angle $(\overrightarrow{M_1M_0}, \overrightarrow{TM})$.
Lorsque M est en M_0, $\alpha = \alpha_0 = 30°$ et lorsque M est en M_1, $\alpha = \alpha_1 = 120°$.
On a $l = 200$ mm et $r = 73{,}2$ mm.

Figure 1



La commande de vanne est représentée dans une position intermédiaire

a. Soit α_2, la valeur de α lorsque M est en H. Faire une figure correspondant à ce cas. Exprimer $\cos\alpha_2$ en fonction de l et r. Donner une valeur approchée de α_2 à 10^{-2} près.

b. Cas où $\alpha \in [30°, \alpha_2]$ (M est à droite de H). En vous aidant de la *figure 2*, exprimer :

- OK en fonction de r et de α ;
- HK en fonction de l, r et α.

En déduire que $HM = \dfrac{l\cos\alpha - r}{\sin\alpha}$.

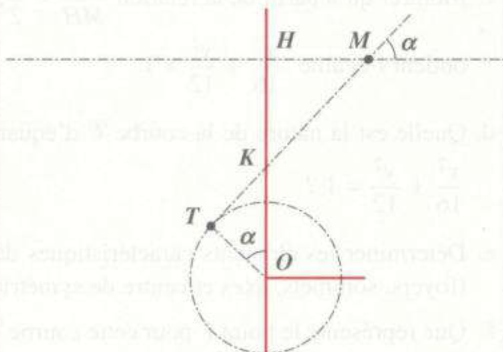


Figure 2

c. Cas où $\alpha \in [90°, 120°]$. En vous aidant de la *figure 3*, exprimer :

- la mesure en degrés de l'angle $\widehat{TKO}$ en fonction de α ;
- $\cos(\alpha - 90)$ et $\sin(\alpha - 90)$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$;
- OK en fonction de α et r.

En déduire que $HM = \dfrac{r - l\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

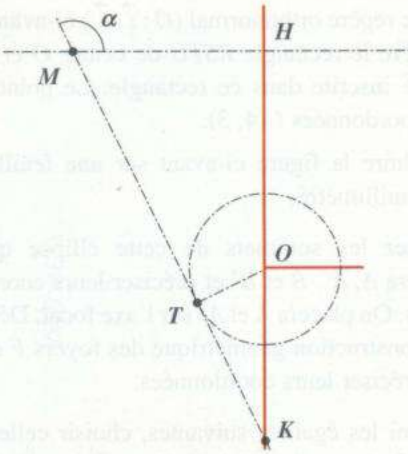


Figure 3

d. Déduire des résultats précédents la « course » du point M, c'est-à-dire la distance M_0M_1.

41 Robinet à fermeture rapide

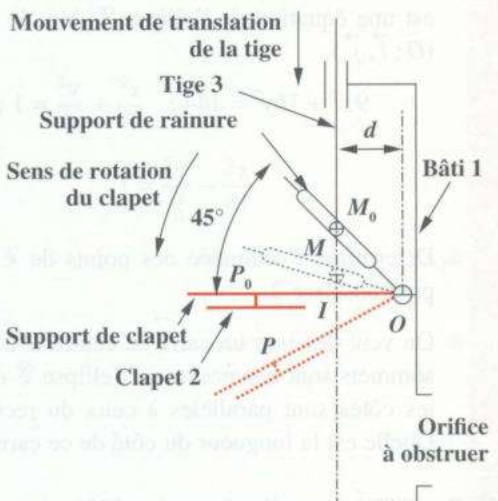


Figure 1

Le dispositif représenté *figure 1* est la commande d'un robinet à fermeture rapide s'effectuant à l'aide d'un clapet. Ce clapet est solidaire d'un support de clapet et d'un support de rainure formant un angle fixe de 45°.

La translation verticale de la tige 3 entraîne la rotation du clapet autour du point O.

La *figure 1* représente la position ouverte et une position intermédiaire.

On appelle M_0 et P_0 les positions respectives de M et de P quand le clapet est en position ouverte (OP horizontal). On appelle M_1 et P_1 les positions respectives de M et P quand la clapet est en position fermée (OP vertical).

a. Faire une figure sur laquelle sont représentés les points O, M_0, P_0, P_1, M_1 et I. Exprimer la course du point M (distance M_0M_1) en fonction de d.

b. Le clapet est entraîné en rotation par l'intermédiaire d'un cylindre de diamètre 5 mm solidaire de la tige et qui, au cours du mouvement, se déplace à l'intérieur de la rainure. Cette rainure a 5 mm de largeur et une longueur L que l'on cherche à déterminer.

Pour les positions extrêmes de M dans cette rainure (M_0 et I) représentées *figure 2*, un jeu de 1 mm doit subsister entre l'axe et l'extrémité de la rainure. On appelle m le point d'intersection de la demi-droite $[OI)$ avec le cercle de centre O et de rayon OM_0. Calculer Im et en déduire L.

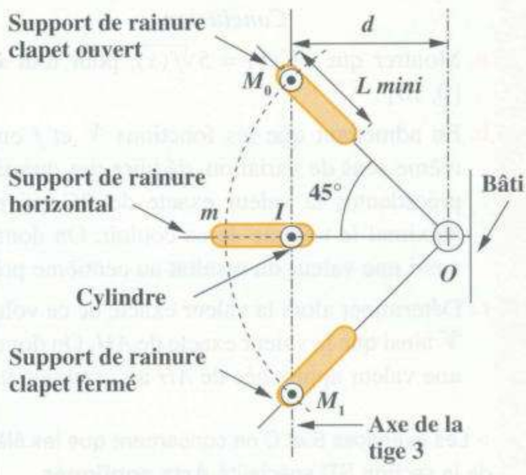


Figure 2

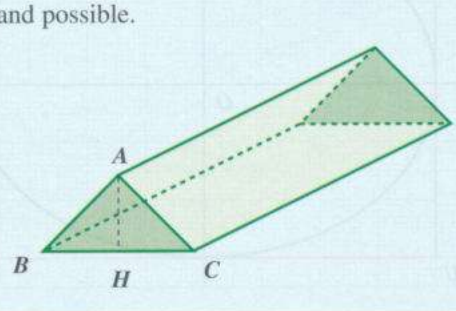
Pour préparer le Bac

A *Bac STI Arts appliqués session 1996*

Un couloir entre deux bâtiments a la forme d'un prisme droit dont deux des faces sont deux immenses baies vitrées rectangulaires de 20 mètres de long sur 5 mètres de large (voir figure ci-contre).

Une section de ce prisme par un plan perpendiculaire à sa base est le triangle isocèle ABC dont chacun des côtés de même longueur mesure 5 mètres. La longueur BC représente l'écartement à la base des deux baies vitrées, elle sera notée x.

Le but du problème est de déterminer x tel que le volume de ce couloir prismatique soit le plus grand possible.



Partie A

Modélisation

a. Entre quelles valeurs extrêmes l'inconnue x peut-elle varier ?

b. Si on appelle H le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$, calculer AH en fonction de x.

c. Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de x. En déduire le volume $\mathcal{V}$ de ce prisme en fonction de x.

Partie B

Étude de la fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 10]$ par $f(x) = x^2(100 - x^2)$.

a. Démontrer que la fonction dérivée est définie sur $[0, 10]$ par $f'(x) = 4x(50 - x^2)$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

c. Pour quelle valeur de x cette fonction admet-elle un maximum ?

d. Construire la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques convenablement choisies.

Partie C

Conclusion

a. Montrer que $\mathcal{V}(x) = 5\sqrt{f(x)}$, pour tout x de $[0, 10]$.

b. En admettant que les fonctions $\mathcal{V}$ et f ont le même sens de variation, déduire des questions précédentes la valeur exacte de BC qui rend maximal le volume de ce couloir. On donnera aussi une valeur du résultat au centième près.

c. Déterminer alors la valeur exacte de ce volume $\mathcal{V}$ ainsi que la valeur exacte de AH. On donnera une valeur approchée de AH au centième près.

> Les exercices B et C ne concernent que les élèves de la section STI spécialité **Arts appliqués**.

B *Bac STI Arts appliqués session 2002*

Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-avant, on considère le rectangle $RSTU$ de centre O et l'ellipse $\mathcal{E}$ inscrite dans ce rectangle. Le point R a pour coordonnées $(-4, 3)$.

Reproduire la figure ci-avant sur une feuille de papier millimétré.

a. Placer les sommets de cette ellipse qu'on notera A, A', B et B' et préciser leurs coordonnées. On placera A et A' sur l'axe focal. Décrire la construction géométrique des foyers F et F' et préciser leurs coordonnées.

b. Parmi les égalités suivantes, choisir celle que vérifie tout point M de l'ellipse $\mathcal{E}$.

$$MF - MF' = 8 \;;\; MF + MF' = 6 \;;$$
$$MF + MF' = 8.$$

c. Parmi les égalités suivantes, choisir celle qui est une équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \;;\; \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1 \;;$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

d. Déterminer l'ordonnée des points de $\mathcal{E}$ ayant pour abscisse 2.

e. On veut dessiner un carré de centre O dont les sommets sont des points de l'ellipse $\mathcal{E}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?

C *Bac STI Arts appliqués session 2003*

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, placer les points $A(5, 0)$, $B(0, 3)$, $A'(-5, 0)$ et $B'(0, -3)$.

1. Donner une équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre O et d'axes AA' et BB'.

2. Montrer que si le point $M(x, y)$ est sur $\mathcal{E}$, alors $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$ et $M_3(x, -y)$ sont aussi sur $\mathcal{E}$.

3. Tracer l'ellipse $\mathcal{E}$.

4. Calculer les coordonnées des deux foyers F et F'. Les placer.

5. On donne $M\left(3, \dfrac{12}{5}\right)$.

a. Calculer les longueurs MF, MF' puis $MF + MF'$.

b. Que remarque-t-on ?

CHAPITRE 1

4 a. $f'(x) = 2x + 7$. **b.** $u'(x) = -15x^2 + 12x - 2$.

6 a. $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 - \frac{1}{t^2}$.

b. $g'(t) = 16t^3 + 4t + \frac{3}{t^4}$.

9 a. $f'(x) = (2x + 3)(2x^2 + 1) + 4x(x^2 + 3x - 1)$.
$= 8x^3 + 18x^2 - 2x + 3$.

b. $h'(t) = 3\cos t - (3t + 1)\sin t$.

12 a. $f'(x) = \frac{-4x}{(2x^2 + 5)^2}$. **b.** $g'(x) = \frac{16x^3}{(x^4 - 1)^2}$.

14 a. $f'(x) = -\frac{14}{(x - 3)^2}$.

b. $j'(x) = \frac{(2x - 1)(2x + 1) - 2(x^2 - x + 3)}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 7}{(2x + 1)^2}$.

16 a. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$. **b.** $g'(t) = 15(5t + 3)^2$.

20 $f'(x) = 2x + 1$, donc $f'(-1) = -1$: la pente de la tangente est égale à -1. On trace cette tangente sachant qu'elle passe par le point de coordonnées $(-1, -3)$ et qu'elle a -1 pour pente.

24 $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f'(1) = 2$; $f(1) = -3$ donc la tangente a pour équation $y = 2(x - 1) - 3$; $y = 2x - 5$.

28 a. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

b. $f'(x) = 2(2x - 2)(x^2 - 2x + 3)$.

33 a. $f'(x) = \frac{-3(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 7)^4}$.

b. $f'(x) = -\frac{2(12x^3 + 5)}{(3x^4 + 5x + 3)^3}$.

37 $f'(x) = -3x^2 + 3$, polynôme du second degré qui s'annule pour $x = 1$ et $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	

Si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.
Si $x \in]-1, 1[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

44 a. $f(x) = 0$ si et seulement si $-x^2 + x + 2 = 0$ avec $x \in I$. D'où $x_1 = 2$ et $x_0 = -1$. On en déduit que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points $A(-1, 0)$ et $B(2, 0)$.

b. Pour tout réel x de $[-1,5 ; 4]$, $x + 2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $-x^2 + x + 2$. Or $-x^2 + x + 2$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 2 et -1 donc :
- si $x \in [-1,5 ; 1] \cup [2, 4]$, $-x^2 + x + 2 \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant 0$;
- si $x \in [-1, 2]$, $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des abscisses si $x \in [-1, 2]$ et en dessous sinon.

c. $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x}{(x + 2)^2}$ donc, pour tout x de I, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - 4x$ qui est un polynôme du second degré s'annulant pour $x = 0$ et $x = -4$.

x	$-1,5$		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$

d. Au point d'abscisse x_0, la tangente a pour coefficient directeur $f'(-1) = 3$. Au point d'abscisse x_1, la tangente a pour coefficient directeur $f'(2) = -\frac{3}{4}$.

47 a. $f'(x) = -3x^2 + 3$ donc f' est positive sur $[-1, 1]$ et négative sinon. La fonction f est donc croissante sur $[-1, 1]$ et décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$: f est représentée par le graphe 1.

b. $g'(x) = 3x + 5$ donc g' est positive sur $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ et négative sur $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$. La fonction g est donc croissante sur $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$: g est représentée par le graphe 4.

c. $h'(x) = x^2 + x + 1$ donc h' est un polynôme du second degré à discriminant égal à $-3 < 0$ donc h' est positive sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}$: h est représentée par le graphe 2.

d. $k'(x) = -2$ donc k' est négative sur $\mathbb{R}$. La fonction k est donc décroissante sur $\mathbb{R}$: k est représentée par le graphe 3.

49 a. • La courbe laisse supposer que f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
• $f'(x) = 100x^3 - 2x = 2x(50x^2 - 1)$. Le tableau suivant permet d'étudier le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{50}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{50}}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$50x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{50}}, 0\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{50}}, +\infty\right[$, décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{50}}\right]$ et sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$, ce qui infirme la conjecture graphique.

b. Comme $\frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0,14$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right) = -0,01$, on peut prendre comme fenêtre : $x_{min} = -0,5$; $x_{max} = 0,5$; $x_{scl} = 0,01$ et $y_{min} = -0,01$; $y_{max} = 0,2$; $y_{scl} = 0,01$.

52 a. $f'(x) = 9x^2 - 36$, polynôme du second degré qui s'annule pour $x = 2$ et $x = -2$.
$f'(x)$ est positif pour tout x de $[-5, -2] \cup [2, 3]$, donc f est strictement croissante sur $[-5, -2]$ et sur $[2, 3]$.

$f'(x)$ est négatif pour tout x de $[-2, 2]$, donc f est strictement décroissante sur $[-2, 2]$.

x	-5		-2		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-191	$\nearrow$	52	$\searrow$	-44	$\nearrow$	-23

b. On en déduit que pour tout réel x de $[-5, 3]$,

$$-191 \leqslant f(x) \leqslant 52.$$

55 a. $f'(x) = 12x^2 + 10x + 3$: f' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = -44$ donc f' est toujours du signe de 12. On en déduit que f' est positive sur $[-4, 4]$ donc que f est strictement croissante sur $[-4, 4]$.

x	-4		4
$f'(x)$		$+$	
f	-195	$\nearrow$	341

b. • f est dérivable sur $[-4, 4]$,

• f est strictement croissante sur $[-4, 4]$,

• 0 appartient à l'intervalle image $[-195, 341]$,

donc, d'après le cours, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[-4, 4]$. En procédant par balayage à la calculatrice, on obtient $x_0 \approx 0{,}8$.

c. La fonction f étant strictement croissante sur $[-4, 4]$ et s'annulant en x_0, on en déduit que f est négative sur $[-4, x_0]$ et positive sur $[x_0, 4]$.

63 Pour tout réel x, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$

donc $f(x) = f^{(4)}(x)$ et $f''(x) = -f(x)$.

66 a. $f'(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $f''(x) = 3x^2 - 4x + 2$.

b. f'' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = -8$ donc f'' est du signe de 3 sur $[0, 4]$: f'' est donc strictement positive sur $[0, 4]$ d'où f' est strictement croissante sur $[0, 4]$.

c. On en déduit le tableau de variation de f' ci-dessous.

x	0		1		4
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	39

d. Comme $f'(1) = 0$, on en déduit que f' est négative sur $[0, 1]$ et positive sur $[1, 4]$.

e. On déduit de **d.** que f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, 4]$, d'où le tableau de variation de f :

x	0		1		4
f	3	$\searrow$	$\dfrac{31}{12}$	$\nearrow$	$\dfrac{109}{3}$

68 a. $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2}$. Comme un carré est positif, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$, polynôme du second degré qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $f'(x)$ est donc négatif sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positif sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. Conclusion : f est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

b. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite $\mathcal{D}$ revient à étudier le signe de :

$$g(x) = f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Or g est clairement positive sur $]0, +\infty[$, donc la représentation graphique de f est toujours au-dessus de $\mathcal{D}$.

CHAPITRE 2

1 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0.$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty.$

4 $f(1 + h) = \dfrac{1}{(1 + h - 1)^2} = \dfrac{1}{h^2}$. Quand x tend vers 1, h tend vers 0 donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h^2} = +\infty.$

6 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3) = -\infty.$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^2) = +\infty.$

8 a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^4 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$ et par conséquent

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-3}{x^4} = -\infty.$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0.$

15 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 3) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (-x + 3) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty.$

21 $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 3) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$ or $(x - 1) > 0$ pour $x \in]1, +\infty[$ d'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty.$

25 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$, on a une forme indéterminée, on factorise donc le terme de plus haut degré : pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$. Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. En $+\infty$, on a une forme indéterminée, et pour $x \neq 0$, $g(x) = x^2\left(-3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$, donc puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = -3$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$

28 **a.** Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{4}{x^2}}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 3$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

b. Pour $x \neq 0$, $f(x) = -\dfrac{x\left(3 + \dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)} = -\dfrac{3 + \dfrac{1}{x}}{x\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)}$. De plus

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On montre de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^3\left(1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right)}{1 + \dfrac{5}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On montre de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

31 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$.

41 **a.** Par définition, la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

b. Par définition, la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

44 **a.** Par définition, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $+\infty$.

b. Par définition, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $-\infty$.

47 La courbe représentative de f admet deux asymptotes : une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $+\infty$.

53 **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 5} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 3) = +\infty$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. $f(x) - (x - 3) = \dfrac{1}{x + 5}$ et donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 5} = 0$. Par conséquent, la droite Δ d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

c. Pour tout $x \in]-5, +\infty[$, $x + 5 > 0$ donc $[f(x) - (x - 3)] > 0$ par conséquent $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

CHAPITRE 3

1 $F'(x) = f(x)$, donc les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque.

7 **a.** $F'(x) = a\sqrt{x} + (ax + b)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2a(\sqrt{x})^2 + ax + b}{2\sqrt{x}}$

$F'(x) = \dfrac{3ax + b}{2\sqrt{x}}$. F est une primitive de f si et seulement si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$. En identifiant les deux expressions, on obtient : $\begin{cases} \dfrac{3}{2}a = 9 \\ \dfrac{1}{2}b = 1, \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 6 \\ b = 2. \end{cases}$ Une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x) = (6x + 2)\sqrt{x}$.

b. Les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque.

Pour les exercices 10 à 34, k est une constante réelle quelconque.

10 **a.** $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + k$. **b.** $G(t) = 5t + k$.

c. $H(\theta) = -\cos\theta + k$. **d.** $J(t) = -\dfrac{1}{t} + k$.

12 **a.** $G(t) = \dfrac{1}{t^2} + k$. **b.** $H(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + k$.

c. $F(x) = 5\tan x + k$. **d.** $K(t) = -3\sin t + k$.

16 **a.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + k$. **b.** $H(x) = \dfrac{2}{5}\sqrt{5x - 10} + k$.

21 **a.** f est un produit de fonctions.

Si on pose $u(x) = x^2 - 2x - 1$, alors $u'(x) = 2x - 2$, donc f est de la forme $u'u$. Ses primitives sont les fonctions définies par $F(x) = \dfrac{(x^2 - 2x - 1)^2}{2} + k$.

b. f est un quotient. Si on pose $u(x) = x^2 - x + 1$, alors $u'(x) = 2x - 1$ et f est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$. Ses primitives sont les fonctions définies par $F(x) = -\dfrac{1}{x^2 - x + 1} + k$.

24 **a.** f est un produit. Si on pose $u(x) = 3x^2 + 1$, alors $u'(x) = 6x$. En écrivant $f(x) = \dfrac{1}{6} \times 6x(3x^2 + 1)^4$, on retrouve la forme $u'u^n$. Les primitives de f sont les fonctions définies par $F(x) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{(3x^2 + 1)^5}{5} + k = \dfrac{(3x^2 + 1)^5}{30} + k$.

b. h est un quotient. Si on pose $u(x) = 2x^3 + x^2 - 4$, alors $u'(x) = 6x^2 + 2x$. En écrivant $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{6x^2 + 2x}{(2x^3 + x^2 - 4)^3}$, on retrouve la forme $\frac{u'}{u^n}$. Les primitives de h sont les fonctions définies par $H(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2(2x^3 + x^2 - 4)^2} + k$

$H(x) = \frac{-1}{4(2x^3 + x^2 - 4)^2} + k.$

28 a. $F(t) = \frac{1}{3}\sin 3t + k.$

b. $H(x) = x^5 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{6} + x + k.$

c. $F(x) = -\frac{1}{2(x^4 + x^2 + 4)} + k.$

d. $G(x) = -\frac{1}{x - 2} + k.$ **e.** $H(x) = -\frac{3}{4(x^2 + 3)^2} + k.$

f. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{x + 5} + k.$

30 Pour tout x de $]-2, +\infty[$, $a + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2 + b}{(x+2)^2}$

$a + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{ax^2 + 4ax + 4 + b}{(x+2)^2}$. Par identification avec $f(x)$, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ 4a = 4 \\ 4 + b = 0, \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \end{cases}$

On peut donc écrire $f(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$.

b. De l'expression précédente, on déduit que les primitives de f sur $]-2, +\infty[$ sont les fonctions de la forme :

$$F(x) = x + \frac{4}{x + 2} + k.$$

34 a. $g(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 6t)$; d'où, les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $G(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{6}\sin 6t\right) + k.$

b. $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left[2x + \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$; d'où, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :
$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + k.$

37 Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \sin x + k$. La condition $F(0) = 1$ impose $\sin 0 + k = 1$, soit $k = 1$. La primitive cherchée est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sin x + 1$.

CHAPITRE 4

1 a. L'équation existe si $x + 2 > 0$ et $5 - x > 0$ donc si $x \in]-2, 5[$. L'équation équivaut alors à $x + 2 = 5 - x$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

b. $x \in]-3, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \{-2\}$.

c. $x \in]-1, 1[$ et $\mathcal{S} = \{0\}$.

3 a. L'inéquation existe si $x - 1 > 0$ donc si $x \in]1, +\infty[$ et $\mathcal{S} = [2, +\infty[$.

b. $x \in]-2, +\infty[$ et $\mathcal{S} =]-2, 3]$.

c. $\mathcal{S} = [-2, +\infty[$.

5 a. L'équation existe si $2x - 5 > 0$ et $x > 0$ donc si $x \in \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$ et $\mathcal{S} = \{3\}$.

b. $x \in]-2, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \{1\}$.

c. $x \in]1, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \varnothing$.

7 a. L'équation existe si $x > 0$ et $2x + 1 > 0$ donc si $x \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \varnothing$.

b. $x \in]1, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

c. $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et $\mathcal{S} = \{1\}$.

9 a. L'équation existe si $1 - x > 0$ et $x + 5 > 0$ donc si $x \in]-5, 1[$ et $\mathcal{S} = \{-1\}$.

b. $x \in \left]-\infty, \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$ et $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$.

c. $x \in]2, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \varnothing$.

11 a. $\ln 12 = \ln 3 + 2\ln 2$. **b.** $\ln 18 = 2\ln 3 + \ln 2$.

c. $\ln 96 = \ln 3 + 5\ln 2$. **d.** $\ln 432 = 3\ln 3 + 4\ln 2$.

e. $\ln\frac{128}{243} = 7\ln 2 - 5\ln 3$. **f.** $\ln\frac{192}{108} = 4\ln 2 - 2\ln 3$.

14 a. L'équation existe si $x + 1 > 0$ et $x - 1 > 0$ et $x > 0$ donc si $x \in]1, +\infty[$ et $\mathcal{S} =]1, +\infty[$.

b. $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et $\mathcal{S} = \left[-\frac{7}{5}, -\frac{1}{2}\right[$.

16 a. $f'(x) = \frac{3}{x} + 1.$ **b.** $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}.$

18 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.$

b. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2.$

21 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty.$

25 a. $\ln e^2 = 2.$ **b.** $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}.$ **c.** $\ln\frac{1}{e} = -1.$

28 a. L'équation existe si $x > 0$ donc si $x \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

b. $x \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{S} =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

c. $x \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{S} = \{e^{\frac{1}{4}}\}$.

30 a. $x = 4$, $x = -1$.

b. En posant $X = \ln x$, l'équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$ qui a pour solutions $X = 4$ et $X = -1$ d'où $\ln x = 4$ et $\ln x = -1$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{e^{-1}, e^4\}$.

37 a. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **b.** $f'(x) = 2x\ln x + (x^2+1)\dfrac{1}{x}$.

c. $f'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x}$.

43 a. $F'(x) = 6x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{6x^2+2}{x} = f(x)$ et F est une primitive de f sur I.

b. $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2x-1} + 1 = \dfrac{1}{2x-1} + 1 = \dfrac{2x}{2x-1} = f(x)$ et F est une primitive de f sur I.

46 a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

b. $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

48 a. $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$ donc $f(x) = 2 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x) = 2\ln(2x-1) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

b. $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

51 a. Une primitive de g sur I est G définie sur I par $G(x) = 2\ln(x-3)$.

b. $F(x) = x^2 - 5x - 2\ln(x-3) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

58 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

61 $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

64 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

71 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. $f(x) - (3-x) = -\dfrac{\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (3-x)] = 0$. La droite d'équation $y = 3 - x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Enfin, $\ln x < 0$ si $x \in]0, 1[$ et $\ln x > 0$ si $x \in]1, +\infty[$, donc :

- si $x \in]0, 1[$, $f(x) - (3-x) > 0$ et la courbe est située au-dessus de l'asymptote ;
- si $x \in]1, +\infty[$, $f(x) - (3-x) < 0$ et la courbe est située en dessous de l'asymptote ;
- au point de coordonnées $(1, 2)$, la courbe coupe l'asymptote.

CHAPITRE 5

1 a. $e^{3\ln x} = x^3$. **b.** $\ln \dfrac{1}{e^x} = -x$.

c. $\ln(3e^x) = x + \ln 3$. **d.** $e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$.

3 a. $e^{3x} \times e^5 = e^{3x+5}$. **b.** $(e^{3x})^2 = e^{6x}$.

c. $(e^{-x})^4 = e^{-4x}$. **d.** $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{3x}$.

5 a. $\mathcal{S} = \{\ln 3\}$. **b.** $\mathcal{S} = \varnothing$.

c. $\mathcal{S} = \{0, 3\}$. **d.** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{4}\ln 7\right\}$.

8 a. $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}(1 + \ln 5), +\infty\right[$.

b. $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\ln 4\right[$. **c.** $\mathcal{S} =]-\ln 3, +\infty[$.

11 a. $g'(x) = 3e^x + 1$. **b.** $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

16 a. L'équation existe si $x \in]0, +\infty[$ et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{3}e, +\infty\right[$.

b. L'équation existe si $x \in]1, +\infty[$ et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]1, \dfrac{1}{2}(2 + e^3)\right]$.

c. L'équation existe si $x \in]-\infty, 1[$ et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-1, 1[$.

18 a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

20 Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

22 a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (5-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (5-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (5-x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe quand x tend vers $+\infty$.

c. On a $f(x) - (5-x) = e^{-x}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, e^{-x} est strictement positif, donc la droite $\mathscr{D}$ est située en dessous de la courbe.

24 a. $f'(x) = 3e^{3x}$. **b.** $g'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$.

29 a. $F(x) = e^x + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

b. $F(x) = 2e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

c. $F(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

36 a. $F'(x) = (ax + a + b)e^x$.

b. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. En identifiant les facteurs polynômes des expressions de $F'(x)$ et de $f(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 4, \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Une primitive de f est la fonction $x \mapsto (3x + 1)e^x$.

c. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (3x + 1)e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

38 a. $F'(x) = -e^{-x} - x(-e^{-x}) + e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$ donc F est une primitive de f sur I.

b. $G(x) = 4(-xe^{-x} - e^{-x}) + x^3 - 5x + c$
$G(x) = -4e^{-x}(x + 1) + x^3 - 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

41 a. $x^3 - 3 = 0$ si et seulement si $x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

b. $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. On en déduit : si $x < \sqrt[3]{3}$ alors $f(x) < 0$ et si $x > \sqrt[3]{3}$ alors $f(x) > 0$.

43 a. Si $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

45 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

53 a. $a(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$a(x)$		$-$	0	$+$	

b. $b(x) = -e^x - 5 = -(e^x + 5)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, e^x est strictement positif, donc $e^x + 5$ aussi et :

x	$-\infty$		$+\infty$
$b(x)$		$-$	

55 a. $2X^2 - X - 1 = 0$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$.

b. $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$. L'équation (2) s'écrit $2X^2 - X - 1 = 0$ donc $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$. $e^x = 1$ si et seulement si $x = 0$ et $e^x = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $\mathcal{S} = \{0\}$.

61 a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $f(\ln 2) = 1$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} ae^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc $b = 2$.

$ae^{-\ln 2} + b = 1$, soit $ae^{\ln\frac{1}{2}} = -1$ donc $\frac{1}{2}a = -1$ et $a = -2$.

D'où $f(x) = -2e^{-x} + 2$.

CHAPITRE 6

1 a. $$\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + x\right]_1^2$$
$$= \frac{16}{4} + 8 - 4 + 2 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 1 + 1\right) = \frac{35}{4}.$$

b. $$\int_2^4 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

5 a. $\int_{-1}^1 x(x^2 - 2)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(x^2 - 2)^4\right]_{-1}^1 = 0$ (on pouvait trouver ce résultat sans calcul en utilisant que la fonction que l'on intègre est impaire).

b. $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t + \frac{1}{2}\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

8 a. $$\int_0^2 \frac{dx}{(x + 1)^2} = \left[\frac{-1}{x + 1}\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

b. $$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x^2 + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

12 a. $$\int_2^4 \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_2^4 = \ln 2.$$

b. $$\int_0^2 \frac{dx}{x + 1} = \left[\ln(x + 1)\right]_0^2 = \ln 3.$$

17 a. $$\int_{-2}^0 e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-2}^0 = 1 - e^{-2}.$$

b. $$\int_0^{\ln 3} e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\ln 3} = \frac{26}{3}.$$

20 En identifiant $a + \frac{b}{x + 3} = \frac{ax + (3a + b)}{x + 3}$ avec $\frac{2x - 1}{x + 3}$, on obtient $a = 2$ et $b = -7$ donc $\frac{2x - 1}{x + 3} = 2 + \frac{-7}{x + 3}$.

On a alors : $$\int_{-2}^1 \frac{2x - 1}{x + 3}\,dx = \int_{-2}^1 \left(2 - \frac{7}{x + 3}\right)dx$$
$$= \left[2x - 7\ln(x + 3)\right]_{-2}^1 = 6 - 7\ln 4.$$

23 a. $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

b. D'après **a.**, une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x}$ donc $$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x + 1}{x}\right]_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

25 a. $F'(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x}$ donc $F'(x) = f(x)$ pour $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. On a donc $F(x) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$.

b. $$\int_{-1}^0 (3x + 1)e^{2x}\,dx = \left[\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{-2}.$$

La valeur approchée à 0,01 près est alors $-0{,}01$.

29 **a.** Comme la fonction f est positive sur $[0, 2]$, I est l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 2$ et $x = 0$ (cette dernière droite est l'axe des ordonnées).

b. Comme la fonction f est positive sur $[-1, 0]$, l'aire cherchée en u.a. est $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

32 Comme la fonction f est positive sur $[-1, 2]$, l'aire cherchée en u.a. est $\displaystyle\mathscr{A} = \int_{-1}^{2} (x^3 + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$.

36 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, e^x est strictement positif, donc $(x - 1)e^x$ est du signe de $(x - 1)$. Conclusion : si $x > 1$, $f(x) > 0$ et si $x < 1$, $f(x) < 0$.

b. D'après **a.**, $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses si $x > 1$, et $\mathscr{C}$ est en dessous si $x < 1$.

c. $F'(x) = (ax + a + b)e^x$ donc $F'(x) = f(x)$ pour tout x si $a = 1$ et $b = -2$; donc $F(x) = (x - 2)e^x$.

d. Comme f est négative sur $[-2, 1]$ et positive sur $[1, 2]$, l'aire cherchée en u.a. est $\displaystyle\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} [-f(x)]\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

donc $\mathscr{A} = \left[-(x-2)e^x\right]_{-2}^{1} + \left[(x-2)e^x\right]_{1}^{2} = 2e - 4e^{-2}$.

41 Comme la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est au-dessus de celle $\mathscr{C}_g$ de g sur $[-1, 3]$, l'intégrale est l'aire en u.a de la partie comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

43 On constate déjà que sur $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ et que sur $[3, 5]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$. On en déduit que :

• L'aire jaune du premier graphique, en unités d'aire, est :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{5}{2}}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right)dx$$

donc $\mathscr{A} = \left[\ln(x-2) - 2\ln(x-1)\right]_{5/2}^{3} = 2\ln 3 - 3\ln 2$.

• L'aire jaune du second graphique, en unités d'aire, est :

$$\mathscr{A} = \int_{3}^{5} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{3}^{5} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

donc $\mathscr{A} = \left[2\ln(x-1) - \ln(x-2)\right]_{3}^{5} = 2\ln 2 - \ln 3$.

46 **a.** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 3(1 - e^{-x}) = 3(1 - e^{-1})$ et

$f(1) = -3e^{-1}(1 - e) = 3(-e^{-1} + 1)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1)$.

b. Si $x \in [0, 1[$ alors $f'(x) = 3e^{-x}$ donc $f'(x) > 0$, et si $x \in [1, 3]$ alors $f'(x) = 3e^{-x}(1 - e)$ donc $f'(x) < 0$. On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$3(1-e^{-1})$	$\searrow$	$-3e^{-3}(1-e)$

c.

d. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 3(1 - e^{-x})\,dx + \int_1^3 -3e^{-x}(1 - e)\,dx$

$\displaystyle = \left[3(x + e^{-x})\right]_0^1 + \left[3e^{-x}(1 - e)\right]_1^3 = 3 - 3e^{-2} + 3e^{-3}$.

Comme f est positive sur $[0, 3]$, $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

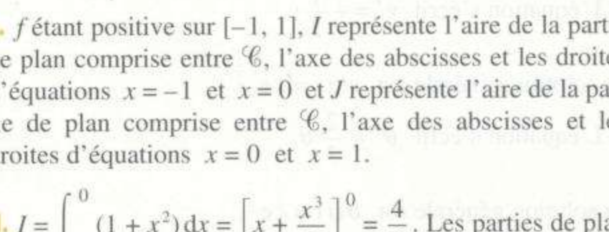
49 **a.** $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x, $f(-x) = 1 + (-x)^2 = f(x)$. Conclusion : f est paire et la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

c. f étant positive sur $[-1, 1]$, I représente l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ et J représente l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

d. $\displaystyle I = \int_{-1}^{0} (1 + x^2)\,dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$. Les parties de plan précédentes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et leurs aires (I et J) sont égales, d'où $J = \frac{4}{3}$.

e. $\displaystyle K = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = I + J = 2I = \frac{8}{3}$.

51 **a.** La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est obtenue en faisant une translation de vecteur $\vec{j}$ de celle de la fonction cosinus.



b. Comme f est positive sur $[0, \pi]$, I est l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \pi$. De plus, $I = \int_0^{\pi} (1 + \cos x)\mathrm{d}x = \left[x + \sin x\right]_0^{\pi} = \pi$.

c. Comme f est paire, $J = 2I = 2\pi$.

d. Comme f est périodique de période 2π, $K = 2J = 4\pi$.

58 Le volume en u.v. est :

$$\pi\int_0^1 (\mathrm{e}^x - 1)^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5).$$

CHAPITRE 7

1 Si $f(x) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-2x}$, alors $f'(x) = -2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-2x}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = -2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-2x} + 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle (E).

10 a. $y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + k$, où k est un réel quelconque.

b. $y'(t) = -\frac{1}{t} + k$, où k est un réel quelconque.

D'où $y(t) = -\ln t + kt + c$, où c est un réel quelconque.

12 Dans tout l'exercice, k est un réel quelconque

a. La solution générale est $y(x) = k\mathrm{e}^x$.

b. L'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{2}y$.

La solution générale est $y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

c. L'équation s'écrit $\theta' = \frac{2}{3}\theta$.

La solution générale est $\theta(t) = k\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t}$.

d. L'équation s'écrit $y' = \frac{1}{5}y$.

La solution générale est $y(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$.

16 La solution générale de l'équation (E) est $y(x) = k\mathrm{e}^{3x}$. La fonction f est solution de (E) et $f(0) = 2$; on a donc $f(0) = k\mathrm{e}^0 = 2$, d'où $k = 2$ et la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

19 Dans tout l'exercice, C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

a. La solution générale est :

$$y(x) = C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

b. L'équation s'écrit $y'' + \frac{9}{4}y = 0$. La solution générale est :

$$y(x) = C_1\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{3}{2}x\right).$$

c. L'équation s'écrit $y'' + 2y = 0$. La solution générale est :

$$y(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x).$$

23 a. La solution générale est $y(t) = C_1\cos 4t + C_2\sin 4t$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

b. f est une solution donc $f(t) = C_1\cos 4t + C_2\sin 4t$.

D'une part $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1$; d'autre part

$f'(t) = -4C_1\sin 4t + 4C_2\cos 4t$,

donc $f'(0) = 2 = -4C_1\sin 0 + 4C_2\cos 0 = 4C_2$.

On a donc $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $C_2 = \frac{1}{2}$. La fonction cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t$.

26 a. La solution générale de (E) est :

$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

b. f est solution de (E), donc $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$;

de plus $f(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 1 = C_1$;

enfin $f'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x$

et $f'(0) = -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 = 1 = C_2$.

On en conclut que la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \sin x$.

c. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \cos x + \sin x = f(x).$$

d. L'équation s'écrit $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$,

soit $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x \in]-\pi, \pi]$, alors $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left]-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Dans cet intervalle, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est le cosinus de deux nombres : $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

On a donc : $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ ou $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$,

soit $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$.

CHAPITRE 8

1 a. $(2 - i) + (1 - i\sqrt{3}) = 3 - i(1 + \sqrt{3})$.

b. $(-2 + i) - (11 - 3i) = -13 + 4i$.

c. $(-\sqrt{2} + i) - (\sqrt{2} + 3i) = -2\sqrt{2} - 2i$.

3 $zz' = -4 + 7i$; $z^2 = 5 - 12i$ et $z'^3 = 2 - 11i$.

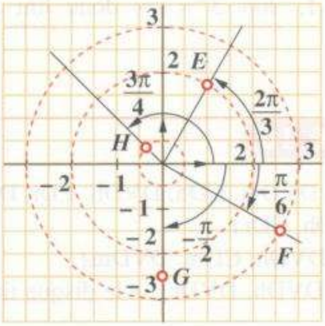
5 $\dfrac{1}{5-i} = \dfrac{5+i}{5^2+1^2} = \dfrac{5}{26} + \dfrac{1}{26}i.$

$\dfrac{2-i}{3-i} = \dfrac{(2-i)(3+i)}{3^2+1^2} = \dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{10}i.$

$\dfrac{2-i}{3-i} - \dfrac{3-i}{2-i} = \dfrac{7-i}{10} - \dfrac{7+i}{5} = \dfrac{-7}{10} + \dfrac{3}{10}i.$

$\dfrac{(2-i)(1+i)}{3+i} = \dfrac{3+i}{3+i} = 1.$

8



10 $z_1 = [5, \pi]$; $z_2 = \left[3, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $|z_3| = 2$, donc si θ est un argument de z_3, $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $z_3 = \left[2, \dfrac{2\pi}{3}\right]$; $|z_4| = \sqrt{2}$,

donc si θ est un argument de z_4, $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

d'où $z_4 = \left[\sqrt{2}, -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

12 $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$

$z_2 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -i.$

$z_3 = 4\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right] = -2\sqrt{3} - 2i.$

$z_4 = 3\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right] = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

$z_5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi) = -5.$

14 a. On construit les points A, B et C à l'aide de leurs coordonnées : $A(2, 2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$ et $C(-4, 0)$.

b. $OA = |z_A| = 4$; $OB = |z_B| = 4$; $OC = |z_C| = 4$. Les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 4.

c. $AB = |z_B - z_A| = 4\sqrt{3}$; $AC = |z_C - z_A| = 4\sqrt{3}$; $BC = |z_C - z_B| = 4\sqrt{3}$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

18 a. $|z-4| = 3$ si et seulement si $AM = 3$. L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 3.

b. $|z-4| = |z-2i|$ si et seulement si $AM = DM$. L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AD]$.

c. $|z-(-1-2i)| = 5$ si et seulement si $CM = 5$. L'ensemble des points M est le cercle de centre C et de rayon 5.

20 $\arg(z-2i) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

L'ensemble des points M est donc la demi-droite issue de A faisant un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec l'horizontale, privée de A.

22 a. $z_1z_2 = \left[2\times 3, \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{3\pi}{4}\right] = \left[6, \dfrac{13\pi}{12}\right]$.

b. $z_2z_3 = \left[2\times 3, \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right] = \left[6, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

c. $z_1z_3 = \left[2\times 2, \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right] = \left[4, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

24 a. $z_1^2 = \left[2^2, 2\times\dfrac{\pi}{3}\right] = \left[4, \dfrac{2\pi}{3}\right] = -2 + 2i\sqrt{3}$.

b. $z_1^3 = [8, \pi] = -8$.

c. $z_2^2 = \left[9, \dfrac{3\pi}{2}\right] = -9i$. **d.** $z_3^5 = \left[32, \dfrac{5\pi}{2}\right] = 32i$.

26 a. $\dfrac{1}{z_1} = \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$. **b.** $\dfrac{1}{z_2} = \left[\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

c. $\dfrac{1}{z_3} = \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

28 a. $\dfrac{z_2}{z_3} = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. **b.** $\dfrac{z_1}{z_3} = \left[1, -\dfrac{\pi}{6}\right]$.

c. $\dfrac{z_2}{z_1} = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5\pi}{12}\right]$.

35 a. $2i = \left[2, \dfrac{\pi}{2}\right] = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b. $-\sqrt{3} + i = \left[2, \dfrac{5\pi}{6}\right] = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

c. $-i\sqrt{3} = \left[\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{2}\right] = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

37 a. $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. **b.** $6e^{-i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$.

c. $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

43 a. $\sin 3x = \dfrac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$. **b.** $\cos 2\theta = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}$.

45 a. $\dfrac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} = \sin 2x$.

b. $\dfrac{-e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{4} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} = -\dfrac{1}{2}\cos 3\theta$.

49 a. $\sin 2\theta \sin 4\theta = \dfrac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \times \dfrac{e^{i4\theta} - e^{-i4\theta}}{2i}$

$= -\dfrac{1}{4}(e^{i6\theta} - e^{-i2\theta} - e^{i2\theta} + e^{i6\theta}) = \dfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 6\theta).$

b. $\cos 3\theta \sin 2\theta \sin 4\theta = \cos 3\theta \left(\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 6\theta)\right)$

d'après **a.**. Donc :

$\cos 3\theta \sin 2\theta \sin 4\theta = \dfrac{1}{4}(\cos 5\theta + \cos\theta - \cos 9\theta - \cos 3\theta).$

53 a. f est la translation de vecteur $\vec{v}$, vecteur d'affixe i (deuxième vecteur de la base).

b. f est la translation de vecteur $\vec{w}$, où $\vec{w}$ est le vecteur d'affixe $1 + i$, c'est-à-dire le vecteur de coordonnées $(1, 1)$.

56 a. f est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

b. f est la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

61 a. $\Delta = -64$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3+2i}{2}, \dfrac{3-2i}{2}\right\}$.

b. $\Delta = 49$ donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{2}, 1\right\}$.

c. $\Delta = -36$ donc $\mathcal{S} = \{2 + 3i, 2 - 3i\}$.

CHAPITRE 9

1 $u_{17} = u_0 + 17r = -49$ et $S = \dfrac{18}{2}(u_0 + u_{17}) = -423$.

14 $u_{18} = 3 \times 2^{18} = 786\,432$ et $S = \dfrac{3(1 - 2^{19})}{1 - 2} = 1\,572\,861$.

27 a. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$ et plus généralement $u_n = (-1)^n$.

b. $v_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ et plus généralement $v_n = 0$.

31 a. f est une fonction affine de coefficient directeur $a = 3$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. La courbe représentative de f est la droite passant par le point de coordonnées $(0, -5)$ et de coefficient directeur 3 ; les termes de la suite sont les ordonnées des points de cette droite d'abscisses entières.

38 a. $f'(x) = \ln 2 \times e^{x \ln 2}$, positif pour tout réel x, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) est croissante.

b. $u_n = e^{n \ln 2} = e^{\ln(2^n)} = 2^n$. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ donc la suite est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

42 a. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ et en factorisant par le terme de plus haut degré dans le numérateur et le dénominateur,
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

50 a. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ avec $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

CHAPITRE 10

1 $\Omega = \{\text{CDm, DVDm, CDh, DVDh, CDr, DVDr}\}$,
$A = \{\text{CDm, CDh, CDr}\}$
et $B = \{\text{CDh, DVDh, CDm, DVDm}\}$.
$\overline{A} = \{\text{DVDm, DVDh, DVDr}\}$, « le disque tiré n'est pas un CD audio ».
$A \cup B = \{\text{CDm, CDh, CDr, DVDh, DVDm}\}$, « le disque tiré est un CD audio ou l'enregistrement d'un spectacle ».
$A \cap B = \{\text{CDm, CDh}\}$, « le disque tiré est un CD audio et l'enregistrement d'un spectacle ».
« Le disque tiré est un CD audio contenant l'enregistrement d'un reportage » est un exemple d'événement élémentaire.
« Le disque tiré est un CD audio » et « le disque tiré est un DVD » sont deux événements incompatibles.

3 $p_2 = 2p_1$ et $p_1 = 2p_3$ d'où $p_1 + p_2 + p_3 = 7p_3$.
On a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ donc $p_3 = \dfrac{1}{7}$, $p_1 = \dfrac{2}{7}$ et $p_2 = \dfrac{4}{7}$.

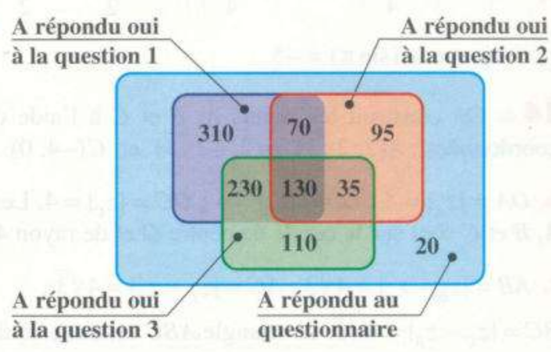
6 a. $P(S) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
b. $S = A \cup B$ et $D = A \cap B$.
c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
donc $0{,}95 = 0{,}85 + P(B) - 0{,}82$ d'où $P(B) = 0{,}92$.

9 Le nombre total de cas est de 59, donc $P(A) = \dfrac{1}{59}$,

$P(B) = \dfrac{29}{59}$ (29 touches du clavier ne donnent pas de lettre)

et $P(C) = \dfrac{6}{59}$ (il y a six lettres différentes dans le mot « Jonathan »).

12 a.



b. 330 personnes ont répondu oui à la question 2, donc 670 ont répondu non et la probabilité recherchée est par conséquent égale à $\frac{670}{1\,000} = \frac{67}{100}$.

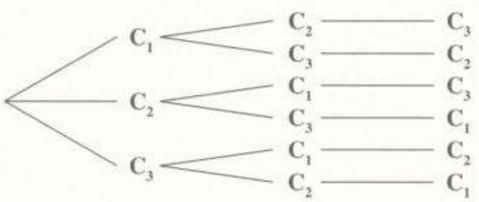
14 1. a.

	Auditeurs de R_1	Non auditeurs de R_1	Total
Auditeurs de R_2	650	50	700
Non auditeurs de R_2	200	100	300
Total	850	150	1 000

b. $p_1 = \frac{650}{1\,000} = \frac{13}{20} = 0{,}65.$

2. $p_2 = \frac{\frac{72}{100}\times 850 + \frac{18}{100}\times 150}{1\,000} = \frac{639}{1\,000} = 0{,}639.$

16 a.



b. Il y six possibilités différentes d'insérer les trois cartes et une seule est la bonne, la probabilité recherchée est donc $\frac{1}{6}$.

19 a. $\{X = 3\}$: la carte tirée est un roi ou une dame ; $\{X = -2\}$: la carte tirée est un 7, un 8 ou un 9 ; $\{X > 1\}$: la carte tirée est un as, un roi ou une dame ; $\{X \leqslant 0\}$: la carte tirée est un 7, un 8, un 9 ou un 10 ; $\{X \leqslant 2\}$: la carte tirée est un 7, un 8, un 9, un 10 ou un valet.

b. $P(X = 4) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(X = -2) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

et $P(X \leqslant 0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

21 X prend les valeurs 12 (réduction de 20 %), 7,5 (réduction de 50 %), 6 (réduction de 60 %) et 3 (réduction de 80 %). D'où :

x_i	12	7,5	6	3
$P(X = x_i)$	$\frac{130}{200}=\frac{13}{20}$	$\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$	$\frac{20}{200}=\frac{1}{10}$	$\frac{10}{200}=\frac{1}{20}$

$P(X < 7{,}5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$

et $P(X \geqslant 6) = \frac{13}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{19}{20}$.

24 Pour $x < 123$, $F(x) = 0$;
pour $123 \leqslant x < 124$, $F(x) = 0{,}03$;
pour $124 \leqslant x < 125$, $F(x) = 0{,}27$;
pour $125 \leqslant x < 126$, $F(x) = 0{,}73$;
pour $126 \leqslant x < 127$, $F(x) = 0{,}96$;
et pour $x \geqslant 127$, $F(x) = 1$.

27 $E(X) = 0{,}03 \times 123 + 0{,}24 \times 124 + 0{,}46 \times 125 + 0{,}23 \times 126 + 0{,}04 \times 127 = 125{,}01.$

Cette espérance représente, pour un échantillon de taille importante, la durée moyenne de vie des ampoules de la production.

32 $V(X) = 0{,}03 \times 123^2 + 0{,}24 \times 124^2 + 0{,}46 \times 125^2 + 0{,}23 \times 126^2 + 0{,}04 \times 127^2 - 125{,}01^2 = 0{,}7499$

donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0{,}866.$

CHAPITRE 11

1 Dans le triangle ABD rectangle en A, on a $AD = AB\tan\alpha$; dans le triangle ABC rectangle en A on a $AC = AB\tan(\alpha+\beta)$; $DC = AC - AD = 3(\tan 50 - \tan 10)$, soit $DC \approx 3{,}05$.

6 En utilisant le théorème d'Al Kashi et en posant $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, on a : $\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{22{,}25}{25}$,

d'où $\widehat{A} \approx 27{,}1°$; $\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{27{,}75}{30}$, d'où

$\widehat{B} \approx 22{,}3°$; $\cos\widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{9{,}75}{15}$ donc $\widehat{C} \approx 130{,}5°$.

En utilisant la formule des trois sinus, on a $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}}$,

d'où $S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$, soit $S \approx 2{,}8$.

10 On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires et de sens contraire, alors le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2{,}5\\-5\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et E sont alignés.

17 a. $p = 6$. La parabole a pour équation $y^2 = 12x$, son sommet est le point O, origine du repère.

c. $MH = MF$, donc le triangle MHF est isocèle de sommet H.

19 a. $\mathscr{E}$ est une ellipse.

b. Ses foyers sont les points A et B. Son axe focal est la droite (AB), son petit axe est la médiatrice de $[AB]$.

c. $OS_1 = 3 = OS_2$.

d. $OI = \sqrt{5} = OJ$.

21 $\mathscr{C}$ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$, d'axe focal (Ox), de sommets $S_1(4, 0)$ et $S_2(-4, 0)$, de foyers $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$. Les points d'intersection de l'ellipse avec l'axe non-focal sont $A(0, 2\sqrt{3})$ et $A'(0, -2\sqrt{3})$. Les axes de coordonnées sont axes de symétrie et O est centre de symétrie.

25 a. $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ soit $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

b. M appartient au cercle $\mathscr{C}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$; on obtient donc comme équation :

$$(x+3)(x-4) + (y-2)(y-1) = 0,$$

ou encore : $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$.

c. En remplaçant x par 0 dans l'équation de $\mathscr{C}$, on obtient $1^2 + (y+2)^2 = 16$ soit $(y+2)^2 = 15$ d'où $y = -2 - \sqrt{15}$ ou $y = -2 + \sqrt{15}$. En remplaçant y par 0 dans l'équation de $\mathscr{C}$, on obtient $(x-1)^2 + 2^2 = 16$ soit $(x-1)^2 = 12$ d'où $x = 1 - 2\sqrt{3}$ ou $x = 1 + 2\sqrt{3}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ coupe les axes aux points de coordonnées $(0, -2-\sqrt{15})$, $(0, -2+\sqrt{15})$, $(1 - 2\sqrt{3}, 0)$ et $(1 + 2\sqrt{3}, 0)$.

Par la même méthode, on obtient les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}'$ avec les axes de coordonnées : $(0, 5)$, $(0, -2)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}, 0\right)$.

28 a. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

b. $M \in \mathscr{C}_f$ équivaut à $y = \sqrt{8(x^2-1)}$, donc : $y^2 = 8(x^2 - 1)$ et $M \in \mathscr{H}$; ainsi $\mathscr{C}_f$ est une partie de $\mathscr{H}$. $f'(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{8(x^2-1)}}$.

$f'(x)$ est du signe de x et f est croissante sur $]1, +\infty[$. La courbe $\mathscr{H}$ complète s'obtient en utilisant les symétries par rapport aux deux axes du repère.

30 $\mathscr{C}$ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, d'axe focal (Ox), de sommets principaux $S_1(3, 0)$ et $S_2(-3, 0)$ et de sommets secondaires $A(0, 2)$ et $A'(0, -2)$. Les foyers sont les points $F(\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-\sqrt{5}, 0)$. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, $MF + MF' = 2 \times 3 = 6$.

PROGRAMME DE TERMINALE STI

(spécialités : génie mécanique, génie des matériaux, génie électronique, génie électrotechnique, génie civil, génie énergétique)

Extrait du B.O. spécial 8 du 7 juillet 1994 et du rectificatif au B.O. n° 18 du 15 décembre 1994

ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE, PROBABILITÉS

1. NOMBRES COMPLEXES

Module, module d'un produit, inégalité triangulaire. Argument d'un nombre complexe non nul, notation $re^{i\theta}$. Relation $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, lien avec les formules d'addition ; formule de Moivre.

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ ;\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$ et de $z \mapsto e^{i\alpha}z$. *Ceci n'est au programme que des spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique ».*

Travaux pratiques

Résolution des équations du second degré à coefficients réels.

Exemples de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler (linéarisation de polynômes trigonométriques…).

2. GÉOMÉTRIE

Cette partie est au programme des seules spécialités génie mécanique, génie civil, génie énergétique et génie des matériaux.

Les activités géométriques répondent à deux objectifs principaux :

– entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ;

– exploiter des situations géométriques comme source de problèmes, notamment en analyse, et, inversement, entretenir une vision géométrique grâce à la mise en œuvre systématique d'activités graphiques (tracé de courbes, schémas…) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme. Le programme de géométrie ne comporte que des travaux pratiques mettant en œuvre les connaissances de géométrie du plan et de l'espace figurant aux programmes des classes antérieures.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace (calculs de distances, d'angles, d'aires, de volumes...).

3. PROBABILITÉS

Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart type.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux...) pour organiser et dénombrer des données relatives à des situations aléatoires.

Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux...).

Exemples simples d'étude de situations menant à l'étude d'une variable aléatoire.

ANALYSE

1. FONCTIONS NUMÉRIQUES : ÉTUDE LOCALE ET GLOBALE

a) Langage des limites

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

α) Introduction de la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Notion d'asymptote verticale.

Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ signifie aussi que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = L.$$

β) Limite en $+\infty$ des fonctions :

$$x \mapsto x\ ;\ x \mapsto x^2\ ;\ x \mapsto x^3\ ;\ x \mapsto \sqrt{x}\ ;$$

limite en $+\infty$ des fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{x}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x^2}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x^3}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Introduction des notations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Notion d'asymptote horizontale.

γ) Dans le cas d'une limite finie L, dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ signifie aussi que $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - L| = 0$ ou encore que :

$$f(x) = L + \varphi(x),\ \text{où}\ \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

b) Énoncés usuels sur les limites

• *Opérations algébriques*

Limite de la somme de deux fonctions, du produit d'une fonction par une constante, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions.

• *Comparaison*

– Si, pour x assez grand, $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

énoncé analogue lorsque $f(x) \leqslant v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$.

– Si, pour x assez grand, $|f(x) - L| \leqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

– Si, pour x assez grand, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

• *Compatibilité avec l'ordre*

Si, pour x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L'$, alors $L \leqslant L'$.

• *Limite d'une fonction composée*

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \lambda$ (où a, b, λ sont finis ou non), alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lambda$.

c) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée.

Application à la dérivation de fonctions de la forme u^n, $n \in \mathbb{Z}$, $\exp u$, $\ln u$ et u^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dérivées successives ; notation notation f', f''…

• *Primitives d'une fonction dérivable sur un intervalle*

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

d) Fonctions usuelles

– Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle ; notation ln et exp. Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions $h \mapsto \exp h$ et $h \mapsto \ln(1+h)$.

Nombre e, notation e^x. Définition de a^b (a strictement positif, b réel).

– Fonctions puissances $x \mapsto x^n$ (x réel et n entier) et $x \mapsto x^\alpha$ (x strictement positif et α réel). Dérivation, comportement asymptotique.

Cas où $\alpha = \dfrac{1}{n}$ (n entier strictement positif) ; notation $\sqrt[n]{x}$ (x positif).

– Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente.

Croissance comparée des fonctions de référence $x \mapsto \exp x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \exp(-x) = 0 \;;$$

si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Travaux pratiques

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.

Étude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums.

Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemples de recherche d'asymptotes ; exemples d'étude du comportement local ou asymptotique d'une fonction.

Tracé de la courbe représentative d'une fonction.

Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique.

Étude d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leqslant \lambda$.

Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques, de la vie économique et sociale…).

Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point…).

Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.

2. SUITES

Pour toutes les spécialités de la série STI, le programme comporte une consolidation des acquis de Première sur les suites arithmétiques et géométriques sous forme de travaux pratiques.

Pour les seules spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique », il s'agit aussi d'aborder l'étude du comportement global et asymptotique de la suite des valeurs $f(n)$ d'une fonction ; on se place dans le cadre de suites définies pour tout entier naturel et on remarquera brièvement que les notions et résultats s'étendent sans changement au cas des suites définies à partir d'un certain rang.

a) Comportement global

Exemples de description d'une situation à l'aide d'une suite des valeurs $f(n)$ d'une fonction.

Suites croissantes, suites décroissantes.

b) Langage des limites

α) Limite des suites de terme général n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$.

Limite des suites de terme général $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Introduction du symbole $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Si une fonction f admet une limite L en $+\infty$, alors la suite $u_n = f(n)$ converge vers L.

β) Limite d'une suite géométrique (k^n), où k est strictement positif.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques. *(Programme de l'ensemble des spécialités.)*

Exemples d'étude du comportement asymptotique d'une suite $u_n = f(n)$. *(Programme des spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique ».)*

3. NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL

a) Intégrale d'une fonction sur un segment

Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle I et un couple (a, b) de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F ; on l'appelle intégrale de a à b de f et on le note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

b) Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Positivité

si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Intégration d'une inégalité.

Inégalité de la moyenne

Si $m \leqslant f \leqslant M$ et $a \leqslant b$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Valeur moyenne d'une fonction.

c) Techniques de calcul

Lecture inverse des formules de dérivation : primitives des fonctions de la forme $t \mapsto f'(at+b)$, $(\exp u)u'$, $u^\alpha u'$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, et $\dfrac{u'}{u}$ (u étant à valeurs strictement positives).

d) Équations différentielles

Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Travaux pratiques

Exemples de calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive.

Calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral.

Exemples de calcul de volumes de solides usuels (boules, prismes, cylindres, pyramides, cônes, volumes de révolution…).

Exemples d'étude de situations menant au calcul de la valeur moyenne d'une fonction ou de son carré.

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer.

Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales.

Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale se ramenant à une équation du type $y' = ay$ ou $y'' + \omega^2 y = 0$.

index

A

C

D

E

F

G

H

I

L

M

O

P

R

S

T

U

V

Imprimé en Italie par Vincenzo Bona - Dépot légal Juin 2008 - Collection n° 05 - Edition n° 04 - **18/0193/5**

Cet ouvrage, destiné aux élèves de Terminale STI, permet un entraînement intensif, grâce à une batterie d'exercices, pour préparer efficacement l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat.

Construit autour d'un **cours** concis, il favorise le travail en autonomie :

• une **synthèse** présente les principaux résultats à retenir ;

• des **méthodes**, préambules aux exercices, sont données au travers de la résolution d'exercices-type ;

• une batterie importante d'**exercices** et de **problèmes**, dont certains sont corrigés, permet un entraînement intensif pour l'obtention de l'examen.

Des **travaux pratiques** et des **activités**, utilisant dès que possible les outils ordinateur et calculatrice, permettent d'appliquer en classe et de mettre les mathématiques en contexte.

www.hachette-education.com

18/0193/5

ISBN : 978-2-01-116663-0

9 782011 166630

HACHETTE
Éducation