Recueil d'épreuves

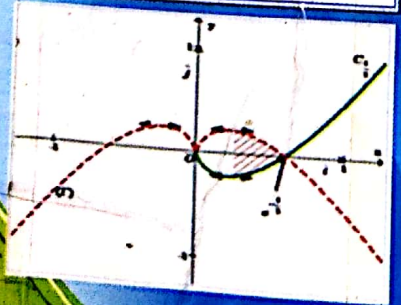
«LA PASSION DES MATHS»

Nouvelle Edition

Initiateur : M. Sylvain AHOUANGBO
Sous la supervision de : M. Charlemagne LOKONHOUNDE

Maths Term CD

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$



* Des rappels de cours
* Des activités d'approfondissements et leurs corrigés
* Des situations d'évaluations selon l'APC et leurs corrigés
* Des sujets de bac (PI et APC) de 2000 à 2018 du Bénin et de la sous-région et leurs corrigés

Contacts : (+229)97 47 15 27 / 94 26 28 54
www.facebook.com/ahouangbosylvain

Scanné avec CamScanner

SOMMAIRE

Préambule ii
Sommaire iii
Programme de la classe de tle D 01
PREMIERE PARTIE: Résumé de cours
S.A n°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE 02
S.A n°2 : ORGANISATION DES DONNEES 07
1.Nombres complexes 07
2.Limites et continuités 11
3.Dérivée– Etude de fonctions 14
4.Primitives 18
5.Fonction logarithme népérien : 19
6.Fonction exponentielle népérienne 20
7.Fonctions exponentielles et Fonctions puissances : 21
8.Calcul intégral 21
9.Equations différentielles linéaires à coefficients constants 24
10.Probabilités 25
11.Suites numériques : 28
12.Statistique 30
SA n°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN 33
DEUXIEME PARTIE : les activités de réinvestissements 34
Activités d'approfondissements sur la S.A n°1 : 35
Activités d'approfondissements sur la S.A n°2 : 42
1.Nombres complexes 42
2.Limites-continuité 50
3.Dérivabilité et Etude de fonctions 52
4.Primitives 60
5.Fonction logarithme népérien 62
6.Fonctions exponentielles népériennes 72
7.Fonctions exponentielles et Fonctions puissances 80
8.Calcul intégral 82
9.Equations différentielles linéaires à coefficients constants 99
10.Probabilités 104
11.Suites numériques 117
12.Statistique 128
ACTIITES D'APPROFONDISSEMENTS SUR LA S.A N°3 : 134
TROISIEME PARTIE: les situations d'évaluations des lycées 141

Scanné avec CamScanner

S.A N°2 : ORGANISATION DES DONNEES :

1. ACTIVITES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

ACTIVITE 1: cor. p :238

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes ci – dessous.

$z_1=(2-i)(3+i)$; $z_2=(2+i\sqrt{3})(1+i)$; $z_3=(2+i)^2$;

$z_4=(1-i)(5+8i)(1-i)$; $z_5=(i-2)^2+(3+4i)$;

$z_6=\dfrac{1+i}{1-i}$; $z_7=\dfrac{i^2}{3i-4}$; $z_8=\dfrac{2+3i}{5+3i}(2-3i)$;

$z_9=\dfrac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)}$; $z_{10}=(1+i)^6$; $z_{11}=(2+i)^4$;

$z_{12}=(1-2i)^4$;

$z_{13}=(2+i)(1-i)-(3-2i)^2+(5-i)(5+i)$;

$z_{14}=3i(2+8i)+-7(5-2i)+(7-8i)(1+5i)$

ACTIVITE 2 : cor. p :238

Donne les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_A=3-8i$; $z_B=-2-6i$; $z_C=\dfrac{1}{3-i}$; $z_D=\dfrac{3(2-4i)}{i}$

; $z_E=(2+4i)((1-i)(8+2i)$; $z_F=\dfrac{4(4-i)(3-i)}{(2+i)(3-4i)}$;

$z_I=i(1-\sqrt{3})$ et $z_J=2+\sqrt{2}$

ACTIVITE 3 : cor. p :238

Donne la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A=i^{25}+i^{26}+i^{27}+i^{28}$; $B=i^{2045}$; $C=i^{1984}$;

$D=i^{2003}$; $E=i^{34}$; $F=i^{45678}$;

ACTIVITE 4 : cor. p :238

Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants.

$z_1=\sqrt{3}+i$; $z_2=1+i\sqrt{3}$; $z_3=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$z_4=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_5=2+4i$; $z_6=1-5i$; $z_7=-7+i$

; $z_8=-1-3i$; $z_9=-6i$; $z_{10}=-8$; $z_{11}=\dfrac{2-3i}{5+4i}$;

$z_{12}=\dfrac{1-i}{1+i}$

ACTIVITE 5 : cor. p :238

1°) Mets sous forme algébrique les nombres complexes $z_1=\dfrac{2+6i}{3-i}$, $z_2=(1-i)(1+2i)$ et $z_3=\dfrac{4i}{i-1}$

2°) Place dans Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=2i$, $z_B=3+i$ et $z_C=2-2i$

ACTIVITE 6 : cor. p :238

I et II sont indépendants

I/ Soient trois nombres complexes: $z_1=-3+i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ et $z_3=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$

On pose $Z=\dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$

1°) Ecris les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

2°) Déduis-en une forme exponentielle du nombre complexe Z

3°) Calcule alors la forme algébrique de Z

II/ On donne les nombres complexes $u=2\sqrt{3}-2i$, $v=-1+i$ et $w=u.v$

1°) a- Ecris u, v et w sous forme exponentielle

b- Ecris w sous forme algébrique puis détermine les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2°) Ecris u^{2015} et v^{2015} sous forme algébrique.

ACTIVITE 7 :

Détermine les racines carrées des nombres complexes suivants :

$z_1=4+3i$

$z_2=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_3=-7-24i$

$z_4=i$

$z_5=-3$

ACTIVITE 8 :

On pose : $Z=\sqrt{3}+i$, $Z'=i-1$ et $T=\dfrac{Z}{Z'}$.

1°) Calcule le module et un arguments de chacun des nombres complexes Z et Z'.

2°) a- Détermine l'écriture algébrique de T.

b- Utilise 1°) pour déterminer l'écriture trigonométrique de T.

Scanné avec CamScanner

c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3°) a- Détermine les écritures trigonométrique et algébrique de T^3.

b- u étant un nombre complexe, résous : $u^3 = 1$.

c- Ecris sous forme algébrique les solutions de l'équation : $z^3 = 2 + 2i$ $(z \in \mathbb{C})$

ACTIVITE 9 :

On définit $Z = \frac{z+1}{z-2i}$

Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

1°) Z soit réel.

2°) Z soir imaginaire pur.

3°) Z ait un module égal à 1.

4°) Z ait un argument égal à $\frac{\pi}{2}$.

ACTIVITE 10 : cor. p :239

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-4+3i}{z-3+2i}$ avec $z \neq 3-2i$ et on pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ où x, y, X et Y sont des réels.

1°) a- Exprime X et Y en fonction de x et y.

b- Détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $Z \in$ iIR

c- Justifie que si $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$

d- Démontre que si $|Z-1| = 1$, alors l'ensemble des points M d'affixes z est le cercle de centre $\Omega(3;-2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2°) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectivesi, $-2+i$ et $2+i$. Détermine :

a- L'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M d'affixe z vérifiant : $|\bar{z}+i| = |z+2+i|$

b- L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tels que : $|(1+i)z - 5i| = \sqrt{10}$

c- L'ensemble $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C})$.

ACTIVITE 11 :

Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : z^2 - (3-2i)z + 5 - i = 0$

$(E_2) : iz^2 - (1-5i)z + 6i = 0$

$(E_3) : z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$

$(E_4) : iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$

$(E_5) : z^3 + (2-5i)z^2 - (5+3i)z - 6 + 2i = 0$ sachant que (E_3) admet une solution réelle

$(E_6) : iz^3 - 2(2\sqrt{3}+3i)z^2 - 4(i-4\sqrt{3})z - 8(2\sqrt{3}-3i) = 0$ sachant que (E_6) admet une solution imaginaire pure.

$(E_7) : z^3 - (2+2i)z^2 + 8iz + 8(2-2i) = 0$ sachant que (E_8) admet deux solutions symétriques par rapport à l'origine du repère complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$

$(E_9) : (z^2+3z)^2 + (3z+5)^2 = 0$

$(E_{10}) : (E_6) : z^4 - (5-14i)z^2 - (24+10i) = 0$.

ACTIVITE 12 :

1°) Détermine z_1 et z_2 les racines carrées du nombre complexe $8i$.

2°) a- Détermine les nombres complexes b et c tels que pour tout complexe z, on ait :

$z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z-3i)(z^2+bz+c)$.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = 0$.

c- Vérifie que la somme des solutions de (E) est imaginaire pure et que leur produit est réel.

ACTIVITE 13:

1°) Détermine les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 vérifiant les conditions suivantes :

a) $\begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases}$

b) $\begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i$

2°) Ecris sous forme algébrique $Z = \frac{z_3}{z_2}$ et Z^{2013}

3°) Détermine le plus petit entier naturel non nul n tel que $Z^n \in$ i$\mathbb{R}^*$

ACTIVITE 14 :

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0$ et

$(E_2) : z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2°) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et

Scanné avec CamScanner

D'affixes respectives : $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, et $z_D = 1-2i$.

a- Place les points A, B, C et D et précise la nature du quadrilatère $ABCD$.

b- Vérifie que : $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peux-tu en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

c- Prouve que les points A, B et C appartiennent à un même cercle Γ dont tu préciseras le centre et le rayon. Trace Γ.

ACTIVITE 15 : cor. p :240

On considère les nombres complexes $\alpha = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$

1°) Ecris α et β sous forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0;\pi[$.

a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

On désignera par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2 l'autre solution.

b- Ecris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Détermine θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

ACTIVITE 16: cor. p :240

Soit le nombre $z = -1+i$

1°) Calcule sous forme algébrique les racines carrées de z.

2°) Calcule sous forme trigonométrique les racines carrées de z.

3°) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

ACTIVITE 17 : cor. p :241

On considère le complexe $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1°) a- Calcule α^2.

b- Donne le module et un argument de α^2.

c- Déduis-en le module et un argument de α.

2°) Représente dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité 2 cm, les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives α, $-\alpha$ et α^2.

3°) a- Déduis de tout ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

b- Calcule α^{2014} sous forme algébrique.

ACTIVITE 18 : cor. p :242

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe $(O;\vec{i},\vec{j})$ et soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I passant par les points A, B et C dont les affixes sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

(E): $\left[z^2 - 4(1+i)z + 10i\right]\left[2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i\right] = 0$ avec $\mathrm{Re}(z_B) < \mathrm{Re}(z_A) < \mathrm{Re}(z_C)$. Soit D un point de $(\mathcal{C})$ tel que : $(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{ID}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1°) Résous l'équation (E)

2°) a-Détermine les nombres complexes z_A, z_B et z_C

b- Donne la nature du triangle ABC.

3°) Place les points A,B, C , I et D et construis $(\mathcal{C})$

4°) Démontre que le point M d'affixe z appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $|z-3(1+i)| = 2$

ACTIVITE 19 :

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1) : z^3 + i = 0$.

Tu donneras les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

2°) a- Résous dans $\mathbb{C}$ $(E_2) : [(1-i)z]^3 + i = 0$

Tu donneras les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b-Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\dfrac{17\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{17\pi}{12}$

ACTIVITE 20: cor. p :243

1°) Résous, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 - 2(1+i)z + \dfrac{1}{2} + i = 0$

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et (E_θ) l'équation : $2z^2 - (1+2\cos\theta+2i)z + \cos\theta + i = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

a- Démontre que l'équation (E_θ) admet une racine réelle que tu calculeras.

b- Calcule l'autre racine en fonction de θ.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}$ et $\cos\theta + i$.

Scanné avec CamScanner

a- Détermine l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b- Calcule AM en fonction de θ et déduis-en la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

ACTIVITE 21 : cor. p :244

z_1 et z_2 sont deux nombres complexes.

1°) Démontre que $|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1}.z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 1$ ou $|z_2| = 1$

2°) On suppose que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ et $1 + z_1 z_2 \neq 0$.

On pose $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ et $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$

Démontre que $u \in IR$ et $v \in iIR$

ACTIVITE 22 : cor. p :244

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives $a = -1 + i$; $b = \frac{1}{2}i$; $c = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$; d ; e et f.

1°) Mets sous forme trigonométrique les nombres complexes : $u = \frac{a-b}{b-c}$ et $v = \frac{a-b}{a-c}$.

2°) Déduis-en la nature du triangle ABC.

3°) Détermine le quotient $Z = \frac{e-d}{f-d}$ sachant que DEF est un triangle isocèle rectangle en F direct. Donne la forme algébrique de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306}$.

ACTIVITE 23: cor. p :245

On donne : $f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

1°)a- Prouve que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur z_0 que tu détermineras.

b- Résous alors l'équation $f(z) = 0$. Tu noteras z_1 et z_2 les deux autres racines ; z_1 est celle qui a une partie imaginaire négative.

2°) On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$

a- Donne la forme trigonométrique de ω.

b- le plan étant rapporté a un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ a tout nombre complexe z non nul on associe les ponts M ; M_1 ; M_2 d'affixes respective z ; $\omega.z$; $\omega^2.z$. Démontre que OMM_1M_2 est un losange.

ACTIVITE 24 : cor. p :245

1°) Prouve que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

2°) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$

a- Justifie que le quadrilatère OACB est un losange.

b- Place les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

c- Calcule l'aire du losange OACB

ACTIVITE 25 : cor. p :246

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes

Respectives 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1°) a- Donne la forme exponentielle de a .

b- Construire le point A.

2°) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\overline{a}}$

a- Vérifie que $b\overline{b} = 1$. Déduis-en que le point B appartient au cercle (C) .

b- Prouve que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel . Déduis-en que les points A, B et I sont alignés

c- Construire le point B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3°) Soit θ un argument du nombre complexe b .

Démontre que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

ACTIVITE 26 :

1°) Linéarise : $\cos^5 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3 x$

2°) a- Ecris $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$.

b- Ecris $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

c- Ecris $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

d- Ecris $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

3°) Déduis-en une linéarisation de :

$A = \cos(4x)\sin x$;

$B = 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x$

Scanné avec CamScanner

$C = \cos(3x)\sin^2 x$ et $D = \sin(3x)\sin^2 x$

ACTIVITE 27 :

1°) a- Calcule le module et un argument du nombre complexe $\omega = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b- Déduis-en ses racines carrées.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$z^2 + \left(\sqrt{3} - 7i\right)z - 4\left(3 + i\sqrt{3}\right) = 0$

3°) Soit z_1 la solution imaginaire pur et l'autre solution z_2. Prouve que $\omega = \dfrac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i}$.

4°) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, z_1 et z_2. Précise la nature du triangle ABC en utilisant 1°) a-

ACTIVITE 28 : cor. p :247

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. On considère l'équation (E) suivante dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (2+i)z^2 + (1-6i)z - 8 - i = 0$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant que le point image d'une des solutions appartient à la droite d'équation : $x = 0$.

2°) A, B et C sont les points images des solutions de l'équation (E), A est un point de la droite d'équation $x = 0$, B est le point d'abscisse négative.

a- Détermine que ABC est un triangle isocèle.

b- Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Prouve que A est l'orthocentre du triangle HBC.

3°) a- Détermine les triplets $(a\,;b\,;c)$ de nombre réels tels que O soit le barycentre du système de points pondérés $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

b- Pour tout réel k, on désigne par (C_k) l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2k^2$.

Démontre que (C_k) est l'ensemble des points M de (P) tels que : $8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$

c- En discutant suivant les valeurs du réel k, détermine l'ensemble (C_k).

ACTIVITE 29 :

Soit l'application :

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$

1°) Détermine les nombres complexes a, b et c pour que $f(z) = (z-1-i)(az^2 + bz + c)$

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

3°) Prouve que les points images dans le plan complexe des solutions de cette équation sont alignés.

ACTIVITE 30 :

Soit le polynôme complexe $P(z)$ de la variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (39i-14)z + 50$

1°) Prouve que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle que tu détermineras.

2°) Déduis-en une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

3°) Soient A ; B ; C les points images respectives des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

a- Place dans le plan muni d'un repère orthonormé ces points

b- Déduis-en la nature du triangle ABC.

c- Donne une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

ACTIVITE 31 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé on considère le polynôme complexe $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$:

$f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$.

1°) a-Démontre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur dont tu préciseras.

b- Déduis-en une résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

2°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, $3+i$ et $2-2i$.

a- Place les points A, B et C.

b- On pose : $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Donne la forme algébrique de Z et déduis le module et un argument de Z.

c- Interprète géométriquement le module et un argument de Z.

3°) Soit D le point d'affixe z_D tel que : $z_D - z_C = z_A - z_B$. Détermine les coordonnées de D puis le placer sur la figure précédente.

4°) Déduis-en la nature du quadrilatère ABCD.

ACTIVITE 32 :

Soit le polynôme complexe : $P(z) = z^3 - iz^2 - 11z + 51i$

1°) Calcule $P(3i)$.

2°) Détermine les complexes a et b tels que : $P(z)(z-3i)(z^2 + az + b)$.

3°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

Scanné avec CamScanner

4°) Place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité 1 cm), les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3i$, $z_B = -4 - i$ et $z_C = 4 - i$

a- Calcule $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_A|$ et $|z_C - z_B|$

b- Déduis-en la nature du triangle ABC.

c- Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 + 64$.

ACTIVITE 33 :

Le plan est rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(z + \frac{1}{2} + i\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2°) On donne les points $A(-1;-5)$ et $B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$. A tout point M d'affixe z, $(z \neq -1 - 5i)$

On associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = 3i \times \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i}\right)$$

a- Détermine l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que : $z' = z$.

b- Détermine l'ensemble (E) des points M tels que : $|z'| = 3$.

c- Détermine l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre , l'origine O du repère et de rayon 1.

d- Détermine et construis l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O;\vec{u})$ privé de $\{0\}$.

ACTIVITE 34 : cor. p :248

Soit le polynôme P à variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 - 16i$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1°) Détermine les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0$.

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm, on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I = 2i$, $z_J = 3 + i$, $z_K = 2 - 2i$ et $z_A = \sqrt{3} + i$.

a- Place les points I, J et K. A l'aide d'un compare et d'une règle non graduée, construis le point A.

b- Démontre que les droite (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

4°) Soit B le point du plan tel que $z_B = \bar{z}_A$.

a- Calcule les distance OA, OB et AB. Déduis-en la nature du triangle AOB.

b- Calcule l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange .

5°) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O.

Détermine l'expression complexe de S et précise ses éléments caractéristiques.

ACTIVITE 35 :

On pose : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1°) α désigne un complexe quelconque. Prouve que : $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

Déduis-en que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.

2°) Calcule $P(1-i)$, déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3°) Place les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

4°) Démontre que tous ces points appartiennent à un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon (points cocycliques).

ACTIVITE 36 :

Résous dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1 + 12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14 + 6i \\ (1-i)\bar{z} + (5-2i)\bar{z}' = 4 - 18i \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} (1+i)z_1 + 2i\bar{z}_2 = 3 - i \\ 2z_1 + 3\bar{z}_2 = 5 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} 2iz + 2z' = 4 - 4i \\ (1+i)z - 2z' = -5 + 7i \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$S_6 : \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

ACTIVITE 37 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexe $\mathbf{C}$ par : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b, c appartiennent à $\mathbb{C}$.

Scanné avec CamScanner

1°) Détermine a, b, c sachant que : $f(1)=-3+4i$;
$f(i)=-4-3i$; $f(-i)=10+5i$
2°) a, b, c ayant les valeurs trouvées à la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

ACTIVITE 38 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ ().
On considère le polynôme $P(z)$ défini par :
$P(z)=z^3+(3+3i)z^2+(3+14i)z-23+11i$ où $z\in\mathbb{C}$.
1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$ sachant qu'elle admet deux racines dont les points images sont symétriques par rapport au point $I(-1;0)$. (On notera z_1 , z_2 et z_3 les solutions telles que :
$\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)<\mathrm{Re}(z_3)$.
2°) On désigne par A, B et C les images respectives de z_1 , z_2 et z_3 .

a- Détermine l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
b- Détermine l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C
c- Faire une figure soignée comportant le parallélogramme, G et I .

ACTIVITE 39 : (Extrait BAC 2014 Burkina-Faso)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité 2 cm On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=-\dfrac{1}{z}$. F est l'application du plan P privé de O dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z'=f(z)$.
1°) On pose $z=re^{i\theta}$, $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
Exprime le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.
2°) On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ où Z est l'affixe du milieu de $[MM']$; x, y, X , Y sont des réels.

a- Exprime X et Y à l'aide de x et y.
b- Détermine et représente l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que I appartienne à l'axe $(O;\vec{u})$.
c- Détermine et représente l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M tels que I appartienne à l'axe $(O;\vec{v})$

3°) On suppose $|z|=1$. On pose donc $z=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$

a- Calcule Z en fonction de θ.
b- Caractériser géométriquement la restriction de $\mathcal{F}$ au cercle de centre O et de rayon 1.

ACTIVITE 40 :

1°) détermine les racines quatrièmes de: $16-16i$ et écrire les racines sous forme trigonométrique
2°) détermine les racines cinquièmes de i et écrire les racines sous forme trigonométrique
3°) détermine les racines quatrièmes de $(1-i)^3$ et écrire les racines sous forme trigonométrique
4°) détermine les racines cubiques de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et écris les racines sous forme trigonométrique

ACTIVITE 41 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},$ .On considère les points A et B d'affixes respectives
$a=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$
1°)a- donne l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe a et b

b- vérifie que $b^2=a$

2°) soit C le point d'affixe $c=a+b$

a- Place les points A,B et C
b- vérifier que $c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

3°) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^2+z-c=$

a- vérifie que b est une solution de l'équation
b- On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Prouve que $d=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{-11\pi}{12}}$

c- Place alors le point D d'affixe d.

ACTIVITE 42 :

1°) Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe tels que :

a- $|\bar{z}+1+i|=|z+2\sqrt{3}-2i|$
b- $|z+1+i|=|2z+2\sqrt{3}-2i|$

ACTIVITE 43 :

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère le polynôme :
$P(z)=z^3+(2i+1)z^2+(1+2i)z+2i$
1°) a- Démontre que $P(z)$ admet une racine imagina pure que tu détermineras.
b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Scanné avec CamScanner

2°) On considère les points A et B d'affixes respectives : $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a- Calcule IA ; IB et AB.

b- Déduis-en la nature du triangle IAB.

3°) a- Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points I, A et B.

b- Détermine l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle IAB.

c- Détermine l'affixe du point D du plan pour que le quadrilatère IABD soit un losange.

4°) a- Ecris $z_1=\frac{2.z_B}{-1+i}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

b- Déduis-en la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

c- z_0 est une racine carrée de z_1. Ecris sous forme algébrique z_0^{2010}.

ACTIVITE 44 : cor. p :249

On considère le nombre complexe $X=\frac{a+ib}{2-5i}$ avec $(a\,;b)\in\mathbb{R}^2$.

1°) Détermine a et b pour que X ait pour module $\sqrt{2}$ et pour un argument $\frac{3\pi}{4}$.

2°) k étant un nombre entier naturel, prouve que la somme : $S=\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{4k}+\left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{4k+4}$ est un réel et la calculer. Précise son signe.

3°) a- Calcule $[(2-5i)(-1+i)]^4$

b- Déduis-en la résolution de l'équation $(E):z^4+164+3360i=0$.

ACTIVITE 45 : cor. p :249

Soit α un élément de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et u le nombre complexe de module 1 et d'argument α.

On pose $z=u^7+\bar{u}^5$ où $\bar{u}$ désigne le conjugué de u.

1°) Justifie que $z=(2\cos 6\alpha)e^{i\alpha}$.

2°) a- Résous dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\cos 6\alpha>0$.

b-Détermine suivant les valeurs de α, le module et un argument de z.

3°) Dans cette question, on prend $\alpha=\frac{\pi}{24}$.

Représente dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, le point image de z

ACTIVITE 46 : cor. p :250

On considère l'équation du second degré en z :

$(E):z\in\mathbb{C},\quad z^2+2z\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=0$ où θ est un paramètre réel, tel que : $\theta\in[-\pi\,;\pi]$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°) Précise selon les valeurs de θ le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E).

ACTIVITE 47 : (extrait bac F6 2015 Sénégal)

1°) Prouve que $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

3°) Déduis-en des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(E):z^3=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

Tu donneras les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonometrique.

ACTIVITE 48 : (d'après concours APE)

Soit l'expression $E(z)=z^3-2-11i$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1°) Développe et écris $(2+i)^3$ sous forme algébrique.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(z)=0$, en désignant ses trois solutions par z_0, z_1 et z_2.

3°) Calcule les nombres $\alpha=z_0+z_1+z_2$ et $\beta=z_0z_1z_2$.

4°) Si M_0, M_1 et M_2 sont les points-images de z_0, z_1 et z_2 respectivement, détermine l'affixe z_3 du point M_3 tel que M_0, M_1, M_2 et M_3 soient les sommets d'un parallélogramme.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITES SUR LA SA N°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN.

ACTIVITE 1 :

Dans un plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$; on donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$ et $3+2i$.

Soit s la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.

1°) Détermine l'angle θ et le rapport k de s.

2°) Détermine l'écriture complexe de s.

ACTIVITE 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

Donne dans chacun des cas suivants, la nature de f et précise ses éléments caractéristiques.

a) $z'=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z+1+2i$.

b) $z'=-2z+1+2i$.

c) $z'=(1+i)z+1+2i$

ACTIVITE 3 :

Soit s la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0=1-i$.

1°) Détermine l'écriture complexe de s.

2°) Détermine l'équations cartésienne de la droite (D') image de la droite (D) par s d'équation : $x+y=\sqrt{2}$.

ACTIVITE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ .Soient s_1, s_2 et s_3 les trois similitude définies par :

- A tout point M d'affixe z, s_1 associe le point M' d'affixe : $z'=\dfrac{-1+i}{2}z+\dfrac{3-i}{2}$
- s_2 est la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle π.
- A tout point $M(x;y)$, s_3 associe le point M' de coordonnées : $\begin{cases}x'=-x+y-1\\y'=-x-y+2\end{cases}$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations : $f=s_1\circ s_2$ et $g=s_1\circ s_3$.

ACTIVITE 5 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+2i$, $z_B=2+i$ et $z_A=2+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

1°) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B et détermine une mesure des angles $B\hat{A}C$ et $A\hat{C}B$

2°) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

a- Donne l'écriture complexe de r.

b- Détermine les images A' et C' des points A et C par r respectivement.

c- Quelle est la nature du triangle $A'BC'$.

ACTIVITE 6 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme : $p(z)=z^3-(3+4i)z^2+(-3+7i)z+4$

1°) Calcule $p(i)$ et $p(1+i)$

2°) Résous alors l'équation $(E):p(z)=0$; $\forall z\in\mathbb{C}$

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives i, $1+i$, $2+2i$ et $1+i\sqrt{3}$

a- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

b- Détermine l'affixe du point D', image de D par S et écrire sous forme exponentielle le nombre $(1+i)z_D$.

c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

d- Donne une équation cartésienne de l'image de la droite (AB) par S.

4°) a- Détermine l'écriture complexe de la rotation r d'angle orienté $\dfrac{\pi}{12}$ qui transforme A en B.

b- Détermine $Sor(A)$.

c- Vérifie que B est le centre de Sor^{-1} où r^{-1} est la bijection réciproque de r.

ACTIVITE 7:

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1°) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(E_0):z^4-16=0$

2°) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme complexe $P(z)=z^4-8z^3+24z^2-32z$

a- Calcule $P(z)-(z-2)^4$ en fonction de z.

Scanné avec CamScanner

b- Déduis-en les solutions de l'équation $P(z)=0$

3°) on donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives 4 , $2-2i$ et $2+2i$.

a- Démontre que les points O, A, B et C sont sommets d'un carré.

b- Détermine une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit à ce carré.

c- Ecris z_B sous forme exponentielle puis $(z_B)^{2014}$ sous forme algébrique.

4°) Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

a- Donne l'écriture complexe de S.

b- Précise sa nature et ses éléments caractéristiques S.

ACTIVITE 8 :

On considère l'équation d'inconnue complexe z,

$(E): z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$:

1°) Démontre que (E) possède une solution imaginaire pure notée z_0 que tu détermineras.

2°) a- Démontre qu'il existe deux nombres complexe b et c tels que :

$z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=(z-z_0)(z^2+bz+c)$

b- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-2i$, $z_B=16-10i$ et $z_C=16+10i$

f est la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

On désigne respectivement par k et β le rapport et l'angle de f.

g est l'homothétie de centre B et de rapport -2.

a- Quelle est la nature exacte du triangle ABC ? Justifie la réponse.

b- Détermine les valeurs exactes de k et de $\cos\beta$.

c- Donne l'écriture complexe de g et détermine l'image de la droite (BC) par g.

ACTIVITE 9 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O;\vec{u},\vec{v})$.On considère les points A et B d'affixes respectives $2-i$ et $4+2i$.

1°) Justifie que le point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe $\frac{7-3\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

2°) On note I le milieu de $[AB]$ et D l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport 2. Détermine les affixes des points I et D.

3°) Calcule $\frac{z_C-z_I}{z_D-z_I}$ et conclus.

4°) On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$

a- Donne les écritures complexes de r et de h.

b- Donne la nature de hor.

ACTIVITE 10 : cor. p :385

Dans le plan s complexe P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on donne le point A d'affixe -2.

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z=\frac{iz+3}{z+2}$ avec $z\neq -2$ et $z\in\mathbb{C}$.

On pose $Z=X+iY$ et $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $(X;Y)\in\mathbb{R}^2$.

1°) Détermine X et Y en fonction de x et de y.

2°) Détermine et construis dans le plan les deux ensembles (C) et (D) définis par :

(C) $=\{M(x;y)/\ Z$ soit réel$\}$

(D) $\{M(x;y)/\ Z$ soit imagiaire pur$\}$

3°) Soient B, C et D les points d'affixes respectives i, $2+2i$ et $1-i$.

On note par S la similitude plane directe qui transforme B en C et C en D.

a- Donne l'expression complexe de S.

b- Précise ces éléments géométriques.

c- Construis l'image du cercle d'équation : $x^2+y^2+2x-3y=0$ par S dans le repère précédent.

ACTIVITE 11 :

On donne dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$(E): z^3+(13-6i)z^2+2(23-24i)z-44-108i=0$

et A, B et C les points images des solutions de l'équation (E).

1°) a- Calcule $(1-8i)^2$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

c- Précise l'affixe de chacune des points A, B et C sachant que A est un point de l'axe des imaginaires et que la partie imaginaire de l'affixe du point B est positive.

2°) Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point I milieu du segment [A C] et qui transforme A en B.

a- Détermine l'écriture complexe de S.

b- Donne la nature et les éléments caractéristiques de S.

Scanné avec CamScanner

3°) Détermine l'affixe du point D image du point C par S.

4°) a- Justifie que $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$ puis précise la nature du triangle ABD.

b- Donne la nature exacte du quadrilatère ABCD.

5°) Calcule, en unité d'aires, l'aire du quadrilatère ABCD

ACTIVITE 12 :

On donne les nombres complexes : $u = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $w = 4\sqrt{2}(-1+i)$

1°) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes u, v, w, uv.

2°) a- Détermine sous forme trigonométrique les racines cubiques de w.

b- Que représente v et uv pour w ?

3°) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe uv et déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

4°) On considère les points V et K d'affixes respectives v et uv l'application f du plan dans lui même qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M_0 d'affixe z_0 telle que : $z_0 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

a- Donne la nature de f et précise ses éléments caractéristiques.

b- Que représente le point K pour le point V ?

c-Place les points V et K dans le repère.

ACTIVITE 13 : cor. p :386 (d'après BAC Sénégal série D)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct.

I- Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Posons $z = x + iy$, x et y réels.

1°) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est la partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ?

2°) Quel est le module de z ?

3°) Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$. Détermine le cosinus et le sinus de α en fonction de z

4°) Soit M(z) un point du plan complexe et M'(z') l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Exprime z' en fonction de z et θ.

II- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit :

$(E) : \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$

1°) Résous l'équation (E).

2°) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$

Calcule OA, OB et AB.

Déduis-en la nature du triangle OAB.

3°) On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Détermine l'affixe du point D.

4°) On appelle G le barycentre des points pondérés $(O;1)$, $(D;-1)$ et $(B;-1)$.

a- Prouve que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.

b- Place les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1cm)

5°) Détermine une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GC}})$. Déduis-en la nature du triangle GAC.

ACTIVITE 14 :

Soit s la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$, du plan complexe associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$, du plan complexe, tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1°) Détermine l'expression de z' en fonction de z.

2°) Donne les éléments caractéristiques de s.

3°) Soit (C) le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 5 .Détermine (C') l'image de (C) par s.

ACTIVITE 15 : cor. p : 386

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $(E) : z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$ où α est un nombre complexe. Soit J et K deux points dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$ dont les affixes sont solutions de (E).

1°) a- Vérifie que $\alpha + 2i$ est solution de (E).

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

c- Détermine α pour que le triangle OJK soit isocèle et rectangle en O.

2°) Les points J et K sont d'affixes respectives $\frac{3}{2}(1-i)$ et $\frac{3}{2}(1+i)$.

a- Donne une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OJK.

b- Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe s qui transforme J en K et K en O.

c- Précise les éléments caractéristiques de s.

d- Donne l'image de (C) par s.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 16 : cor. p :387

On considère les points A ; B ; C et D dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et dont les affixes respectives z_A ; z_B ; z_C et z_D sont solutions de l'équation

$(E): z^4+(8-4i)z^2+12+16i=0$ dans $\mathbb{C}$. Les complexes z_A ; z_B ; z_C et z_D sont tels que : $\text{Im}(z_D)<\text{Im}(z_A)<\text{Im}(z_B)<\text{Im}(z_C)$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2°) a-Détermine les complexes z_A ; z_B ; z_C et z_D

b- Place les points A, B , C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ (prends 1 cm pour unité)

c- Donne le nom du quadrilatère ACBD

3°) a- Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui laissent invariant un point A et transforme le points C en B.

b- Détermine les éléments caractéristiques de S.

4°) a- Détermine l'image des points C et D par S.

b- Détermine une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ image de la droite passant par les points C et D par S.

ACTIVITE 17 :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) Détermine l'expression complexe et les éléments caractéristiques de la similitude qui transforme $A(1+2i)$ en $B(1+3i)$ B et qui laisse $C(2i)$ invariant.

2°) Quelle est l'image de $E(3i-1)$ par cette similitude ?

3°) a- Donne l'expression analytique de S.

b- Quelle est l'image de la droite $(D): x+2y+1=0$ par S ?

ACTIVITE 18 : cor. p :388 (d'après BAC D Niger)

1°) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $a+b=5-4i$, $ab=3(1-3i)$ et $|a|>|b|$.

Mets a sous forme trigonométrique.

2°) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives a ; $\frac{a^2}{18}$; b et b^2.

a- Détermine les coordonnées du barycentre G des points A, B, C et D affectés des coefficients respectifs 1 ; −1 ; 1 ; 1.

b- Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :

$MA^2-MB^2+MC^2+MD^2=k$ où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de k.

3°) Soit S la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z'=az+b$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S.

ACTIVITE 19 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère le polynôme complexe p défini par :

$p(z)=z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$

1°) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1+i$, $1-i$, $3+i$ et $1+3i$

a- Place les points A, B, C et D dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b- Prouve que les affixes respectives de ces points sont solutions de l'équation $p(z)=0$

c- Prouve que le quadrilatère ABCD est un carré.

2°) Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que :

$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$

a- Détermine l'affixe du point Ω tel que $h(\Omega)=\Omega$

b- Déduis en la nature exacte et les éléments caractéristiques de h.

c- r est la rotation de centre Ω et d'angle $15°$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de $s=hor$.

ACTIVITE 20:

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-3z+3-i=0$

2°) Soit $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+5i)z-2-6i$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): P(z)=0$.

a- Justifie que l'équation (E') admet une solution imaginaire pure.

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E')

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), on donne les points $A(0;2)$; $B(2;1)$ et $C(1;-1)$

a- Place les points A, B et C (unité graphique : 2 cm).

b- z_A, z_B et z_C désignent des affixes des points A, B et C.

Calcule le nombre complexe $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ et déduis-en que la nature du triangle ABC.

4°) Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Détermine l'écriture complexe de S.

Scanné avec CamScanner

5°) Soient D et E deux points du plan tels que $S(D)=A$ et $S(B)=E$.

a- Détermine les affixes des points D et E.

b- Construis les points D et E puis démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

ACTIVITE 21 : cor. p :389 (extrait Bac D 2004 Niger)

1°) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3 - m(1+i)z^2 + im^2 z = 0$ où m est un complexe donné non nul.

a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b- Soient O, A, B les points images des solutions de l'équation (E) tels que B soit l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Prouve que OAB est un triangle isocèle rectangle en O.

2°) a -Détermine m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1+i$.

b- Résous l'équation (E) dans chacun des cas trouvés.

3°) Soit M le point d'affixe m. On suppose que M décrit dans le plan complexe le cercle (C) d'équation : $x^2+y^2-x=0$.

a- Détermine le centre et le rayon du cercle (C).

b- Détermine l'image du cercle (C) par la rotation R.

ACTIVITE 22 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure (E) : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$.

2°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2i$ et i. Place A, B et C dans le repère. (unité graphique : 2cm).

3°) Pour tout nombre complexe z différent de $1+i$, on associe le nombre complexe z' définie par : $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$

a- Interprète graphiquement $|z'|$ et $\arg z'$

b- Détermine puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

c- Détermine puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'|=2$

4°) Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B.

a- Détermine la nature du triangle ABC.

b- Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de S.

c- Détermine les images par S de (E_1) et (E_2) pui les construire. (Utiliser des couleurs différentes).

ACTIVITE 23 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direc $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ .associe le point

1°) Soit S une transformation du plan, qui à chaque M d'affixe $z=x+iy$ M' d'affixe $z'=x'+iy'$ tels que $x'=-x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}$ et $y'=-x\sqrt{3}-y+2$ où x, y, x' e y' sont des réels.

a- Démontre que l'écriture complexe S est donnée par : $z'=(-1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+2i$

b- Détermine la nature de S et précise ses élément caractéristiques.

2°) On considère le polynôme complexes : $P(z)=z^3+(-5+i)z^2+(10-6i)z-8+16i$ où z est un nombre complexe.

a- Démontre que l'équation $P(z)=0$ admet une solution z_0 dont le point image appartient à la droite (Δ) d'équation $y=x$.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

3°) Soit les points A, B et C d'affixes respectives $3-i$; $-2i$ et $2+2i$.

a- Détermine l'angle de la rotation r de centre A qui transforme B en C.

b- Détermine l'affixe du centre F de l'homothétie d rapport -3 qui transforme B en C.

c- Détermine l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe de centre B qui transforme A en C.

ACTIVITE 24 :

1°) Soient $\rho \in IR_+^*$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$

On désigne par $z=\rho e^{i\theta}$ un nombre complexe.

a- Ecris sous forme exponentielle les nombres complexe $1+i$, z^2 et $(1+i)\bar{z}$

b- Déduis-en la valeur de ρ pour laquelle on a $z^2=(1+i)\bar{z}$

c- Déduis-en les valeurs de θ telle qu $z^2=(1+i)\bar{z}$

2°) Soient z_0, z_1, z_2 et z_3 les nombres complexes d module r et d'argument θ, déterminé précédemment.

Scanné avec CamScanner

Soient A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $z_1 - z_0$; $z_2 - z_0$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$

a- Mets sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$

b- Déduis-en la nature du triangle OA_1A_2

3°) On donne les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $-2+2i$, $1+3i$, $7i$, $-5-4i$ et $-1+4i$. Soit S la similitude plane directe qui transforme D en C et A en B.

a- Donne une écriture complexe de S

b- Donne les éléments caractéristiques de S

c- Détermine l'affixe du point F tel que S(F) = 0

ACTIVITE 25:

θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$.

On considère l'équation

$(E_\theta) : z^2 - (2+2i)(1+e^{i\theta})z + e^{i\theta}(2+2i)^2 = 0$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1°) Démontre que le discriminant de l'équation (E_θ) est : $(2+2i)^2(1-e^{i\theta})^2$, puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2°) On note z_1 la solution de (E_θ) indépendant de θ et z_2 l'autre solution. On désigne par M_1 et M_2 les points images respectifs de z_1 et z_2.

a- Exprime z_2 en fonction de z_1.

b- Déduis-en que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

c- Pour quelle valeur de θ les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs.

3°) Pour cette question, on donne $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

A et B sont les points d'affixes respectives $2+2i$ et $-2+2i$.

a- Place les points O, A et B dans le plan complexe.

b- Détermine les affixes respectives des points O' et A' pour que le quadrilatère OO'A'A soit un carré direct.

4°) Soit I le point du plan tel que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}$ et S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

a- Donne l'écriture complexe de S et précise ses éléments caractéristiques.

b- Calcule l'aire du triangle AOB.

c- Déduis-en l'aire du triangle $O_1A_1B_1$ images de OAB par S.

ACTIVITE 26 :

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$(E) : z^4 + (-10+7i)z^3 + (26-30i)z^2 + (-80+22i)z + 40 + 40i = 0$ 1°)

Résous (E) sachant que (E) admet deux solutions dont les points images appartiennent à la droite d'équation $y = -x$.

2°) On considère les points : A(0;1), B(4;−4), C(1;1) et D(5;−5).

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = az + b$ et F l'application du plan complexe P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

a- Détermine a et b sachant que F transforme A en B et C en D.

b- Démontre que l'application F possède un point fixe I c'est-à dire F(I) = I dont tu détermineras l'affixe ω.

3°) Lorsque $z \neq \omega$, démontre que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 - i$

4°) Déduis-en la valeur du rapport $\dfrac{IM'}{IM}$ et la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right)$. Définie géométriquement F.

ACTIVITE 27 : cor. p :390 (extrait Bac D 2014 Togo)

Soit l'équation $(E) : z \in \mathbb{C},\ z^n = \dfrac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Détermine les solutions z_k de (E).

2°) On pose $n = 5$.

Représente dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points images des solutions z_k de (E).

3°) On pose : $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

a- Soit $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, exprime α en fonction de j

b- Prouve que α est une solution de l'équation : $z^5 = \dfrac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$

4°) Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' tels que : $z' = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)z + \dfrac{5+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$

a- Ecris la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$.

b- Donne la nature de T et précise ses éléments caractéristiques.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 28 :

m est un paramètre réel non nul. On considère l'application g_m du plan complexe dans lui-même d'écriture complexe $z' = m(1+i)z + \frac{i}{3}$.

1°) a- Démontre que g_m est une similitude plane directe dont tu préciseras l'affixe du centre, le rapport et l'angle suivant les valeurs de m.

b- Détermine les valeurs de m pour lesquelles g_m est une rotation.

c- Exprime en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de l'image M' de M par g_m.

2°) On considère le point $A\left(\frac{3-e^m}{6}\,;\,\frac{-3-e^m}{6}\right)$

a- Détermine les coordonnées du point A', image de A par g_m.

b- Démontre que lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des points A' est la courbe (Γ) d'équation

$$y = \frac{1}{3}(1 - xe^x)$$

3°) soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}(1-xe^x)$

a- Etudie les variations de f et trace la courbe (Γ) dans un repère orthonormé unité 2 cm.

b- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*_-$. Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par la courbe (Γ) et les droites d'équation

$$y = \frac{1}{3}\ ;\ x = \alpha \text{ et } x = 0\ \ x = 0$$

c- Calcule $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

ACTIVITE 29 : cor. p :391

θ est un nombre réel appartenant à $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$. On considère l'équation :

$(E) : z^2 - [1 + i(\sin\theta + \tan\theta)]z + (-\tan\theta + i)\sin\theta = 0$

1°) Prouve que : $b = i\sin\theta$ est une solution de (E), puis calcule l'autre racine noté a.

2°) Détermine le module et un argument de a.

3°) Soit F l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$ (a et b étant les solutions de (E))

a- Reconnais F et détermine ses éléments géométriques.

b- Comment faut-il choisir θ dans $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$ pour que F soit une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$? Calcule alors l'affixe de son centre A_0 et le rapport r de cette similitude.

LES SITUATIONS D'EVALUATIONS DES LY

Scanné avec CamScanner

10. ACTIVITES SUR LES PROBABILITES

ACTIVITE 1 : cor. p : 335

1°) Soient A et B deux évènements indépendants. Si $p(A)=0,4$ et $p(B)=0,3$ calcule

a- $p(A\cap B)$

b- $p(A\cup B)$

2°) si $p(A\cap B)=0,1$ et $p(B)=0,5$

Calcule :

a- $p(A)$

b) $p(A\cup B)$

ACTIVITE 2 : cor. p : 335

Dans une classe de 40 élèves 28 apprennent l'anglais, 16 l'allemand et 8 les deux langues. On choisit au hasard un élève dans cette classe et on considère les évènements

A « l'élève choisit apprend l'anglais».

B « l'élève choisit apprend l'allemand»

Calcule les probabilités des évènements suivants : A; B; $A\cap B$; $A\cup B$; $\overline{A}\cup B$

ACTIVITE 3 : cor. p : 335

Deux personnes A et B font feu simultanément sur une cible .La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$, la probabilité pour B est de $\frac{3}{4}$

Quelle est la probabilité pour :

1°)Que les deux tireurs touchent tous deux la cible.

2°) Que tous deux manquent la cible.

3°) Que la cible soit atteinte par A seulement.

4°) Que la cible soit atteinte par B seulement.

5°) Que la cible soit touchée par un tireur seulement.

6°) Que la cible soit atteinte.

7°) Que la cible soit manquée.

8°) Que la cible soit touchée par un tireur au moins.

ACTIVITE 4 :

Trois élèves A, B, C passent le même jour un examen. Les trois examens sont différents et se déroulent en des lieux différents.

Les parents de ces candidats leurs attribuent les probabilités de succès suivantes :

$p(A)=0,7$; $p(B)=0,4$ et $p(C)=0,6$

Calcule la probabilité que:

Les élèves soient reçus.

Les trois élèves échouent.

A seulement soit reçu.

Un élève exactement soit reçu.

B soit le seul à échouer.

Deux élèves exactement soient reçus.

Au moins un élève soit reçu.

ACTIVITE 5 : cor. p : 335

Un sac contient neufs boules numérotées 1,2,...,9 On tire successivement trois boules du sac sans remise et on les range dans l'ordre ou elles sont sorties.

Calcule la probabilité que :

1°)Les numéros de trois boules forment le chiffre 123.

2°) Ces numéros forment un nombre divisible par 125

ACTIVITE 6 : cor. p : 336

Une urne contient trois boules marquées 1, 2,3. On en tire deux successivement en remettant à chaque fois la boule tirée.

Quelle est la probabilité pour que le plus grand nombre tiré soit 3 ?

ACTIVITE 7 : cor. p : 336

Deux sacs désignés par A et B contiennent chacun 9 boules numérotés de 1 à 9. On tire simultanément 2 boules du sac A et une boule du sac B.

1°) Calcule la probabilité pour que 3 numéros soient impairs.

2°) Calcule la probabilité pour que 2 numéros soient pairs et un numéro soit impair.

ACTIVITE 8 : cor. p : 336

Le prénom Caroline est constitué de 8 lettres différentes.

On prépare 8 morceaux de papier portant chacun l'une de ces lettres .on tire 5 de ces papiers sans considération de l'ordre de sortie.

1 °) Quelle est la probabilité d'avoir tirer la lettre a ?

2 °) Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 voyelles et 2 seulement ?

3 °) Quelle est la probabilité d'avoir tirer au moins une voyelle ?

ACTIVITE 9 : cor. p : 337

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

Calcule les probabilités des évènements suivants

« La somme des numéros obtenus est égal à 6 »

« La somme des numéros obtenus est impair »

Scanné avec CamScanner

« La somme des numéros obtenus est pair »
« La somme des numéros obtenus est supérieure à 8 »
«La somme des numéros obtenus est inférieur à 4 »

ACTIVITE 10 :

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1à 6
et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer. On considère
alors l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$
Calcule la probabilité pour que cette équation admette :
- Deux solutions distinctes.
- Une solution double.
- Aucune solution

ACTIVITE 11 :

Une urne contient 3 boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.
L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule deux fois deux de suite lors du tirage
avec remise.
a) Quels sont les évènements élémentaires de cette expérience ? Combien y a – t – il ?
b) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
R_1 « Tirer une boule rouge au premier tirage »

ACTIVITE 12:

Dans un lot de 10 pièces, 3 sont défectueuses. On tire au hasard simultanément 2 pièces du lot.
1°) Détermine le nombre de tirages possibles.
2°) Calcule la probabilité de tirer :
- a- deux pièces défectueuses ;
- b- deux pièces dont une seule est défectueuse ;
- c- au plus une pièce défectueuse.

ACTIVITE 13: cor p: 337 (extrait bac D 1987 Niger)

1°) Soient deux personnes prises au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?
2°) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour que toutes soient nées des jours différents de la semaine ?
3°) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi ? Combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation : « au moins l'un d'entre vous est né un lundi» soit un pari gagnant ?
On donne les approximations suivantes :
$\ln 2 \simeq 0{,}693$; $\ln 6 \simeq 1{,}791$; $\ln 7 \simeq 1{,}945$.

NB : « faire un pari gagnant» signifie que l'événement choisi a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. ln désigne le logarithme népérien.

ACTIVITE 14 : cor. p : 338

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 Contient 3 boules banches et 5 boules noires
U_2 Contient 2 boules banches et 3 boules noires
On tire une boule de l'urne U_1 puis une boule de l'urne U_2.
1°) Quelle est probabilité pour que les 2 boules tirées soient noires ?
2°) Soit l'évènement A " les deux boules tirées sont de couleur différentes "
Quelle est la probabilité pour que l'évènement A soit réalisé ?
3°) sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes quelle est la probabilité
pour que la boule noire provienne de l'urne U_1.
(NB : tous les résultats seront donnes sous forme de fractions irréductibles)

ACTIVITE 15 : cor. p : 338

On considère deux dés cubiques D_1 et D_2
D_1 a une face rouge et 5 faces blanches
D_2 a 2 faces rouges, 1 face blanche et 3 faces bleues.
On jette simultanément les deux dés et on observe la couleur des faces supérieures.
1°) Quelle est la probabilité d'obtenir les mêmes couleurs ?
2°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux couleurs différentes ?
3°) On est déclare gagnant si l'on obtient blanc sur la face supérieure d'un des dés et rouge sur l'autre.
Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

ACTIVITE 16:

Dans une associative sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette associative adhèrent à la section tennis.
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
- F l'évènement : « le membre choisit est une femme ».

Scanné avec CamScanner

- T l'évènement : « le membre choisi adhère à la section tennis »

1°) Démontre que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2°) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

ACTIVITE 17:

Dans une population, 55% des familles (groupe A) ont une voiture, 80% des familles (groupe B) ont un téléviseur et 15% des familles (groupe C) n'ont ni voiture, ni téléviseur.

1°) On choisit au hasard une famille de cette population. Détermine la probabilité des évènements suivants :

E « Cette famille ait une voiture et un téléviseur ».

F « Cette famille ait un téléviseur sachant qu'elle a une voiture ».

2°) On suppose que 5% des familles du groupe A (groupe B non compris) abandonnent leurs voitures, 5% des familles du groupe B (groupe A non compris) abandonnent leurs téléviseurs et 10% des familles du groupe C achètent chacune un téléviseur et une voiture. Reprends les calculs des probabilités ci-dessus.

ACTIVITE 18 :

On dispose d'une urne U contenant trois jetons blancs B_1, B_1 et B_2, deux jetons rouges R_1 et R_2, deux jaunes J_1 et J_2 indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément trois jetons de cette urne U. Quelle est la probabilité de chacun des évènements ci-dessous :

A « obtenir des jeton de même couleur » ?

B « obtenir exactement 2 jetons blancs et un jeton de numéro 2 »

2°) On suppose maintenant que le tirage des trois jetons de U est successif sans remise.

a- Calcule la probabilité des évènements suivants :

C « obtenir des jetons de couleurs différente »

D « obtenir des jetons de numéro 1 »

b- Définir clairement par une phrase simple l'évènement $C \cap D$ et calcule $P(C \cap D)$

c- Déduis-en $P(C/D)$ et $P(D/C)$. Les évènements C et D sont-ils incompatibles ? Indépendants ?

ACTIVITE 19 : cor. p : 338

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention parmi ses dossiers d'accidents.

85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.

20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.

12% des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entrainent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :

R « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle » .

D « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels».

1°) Donne $P(R)$ et $P(D)$

2°) Calcule la probabilité pour qu'un dossier :

a- Entraine des frais de réparation matérielle ou des frais de dommages corporels.

b- Entraine des frais de réparation matérielle sans dommages corporels.

c- Entraine des frais de dommages corporels sans réparation matérielle.

ACTIVITE 20 : cor. p :338 (extrait Bac D 2014 Togo)

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.
Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.
On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance»
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production »
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur »
- F l'événement : «le personnel interrogé est une femme ».

1°) Construis un arbre pondéré correspondant aux données.

2°) Calcule la probabilité d'interroger :

a- Un agent de maintenance

b- Une femme agent de maintenance.

c- Une femme.

3°) Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de

Scanné avec CamScanner

panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études on montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :
A l'événement : « l'alarme se déclenche »
B l'événement : «une panne se produise »

a- Démontre que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
b- Calcule la probabilité que l'alarme se déclenche.
c- Calcule la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

ACTIVITE 21 :

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne ; on estime que 99% des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce on effectue un test de qualité :
Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de 0,995 et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0,005.
Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,990 et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,010.
On note :
B : l'événement « la pièce est bonne »,
$\overline{B}$:l'événement « la pièce est mauvaise »
T : l'événement « le test indique que la pièce est bonne »
$\overline{T}$:l'événement « le test indique que la pièce est mauvaise »

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

1°) a- Détermine la probabilité : $p(\overline{B} \cap \overline{T})$.

b- Détermine la probabilité $p(B \cap \overline{T})$.

2°) Déduis-en $p(\overline{T})$, puis $p(T)$.

3°) On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

a- Détermine la probabilité qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.
b- On tire au hasard et successivement avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente.
Calcule la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

ACTIVITE 22 : cor. p : 339

Les deux partie A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A :
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

Un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).
On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement : « la personne est contaminée par le virus», et T l'événement : « le test est positif»
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1°) a- Précise les valeurs des probabilités $p(V)$, $p_V(T)$ et $p_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduis la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
b- Déduis-en la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2°) Démontre que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3°) a- Justifie par un calcul la phrase :
« si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de ''chances'' que la personne soit contaminée »
b- Détermine la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B :
On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1°) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres.

2°) Calcule la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

ACTIVITE 23: cor. p : 339

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1°) Calculer la probabilité de l'évènement A :"tirer trois pièces de 500 F".

2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3°) L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 24: cor. p :340

Au Bénin, une conférence réunit 12 commerçants. Tous parlent le fon, 5 parlent le dendi, 6 parlent goun et 3 le dendi et le goun.

On choisi au hasard et simultanément 3 personnes. Chaque groupe de 3 personnes a la même probabilité d'être choisi.

1°) a- Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent au moins une autre langue que le fon ?

b- Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent que le fon.

2°) Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 personnes associe le nombre de personnes parlant dendi et goun.

a- Détermine la loi de probabilité de X.

b- Calcule la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant dendi et goun.

NB : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

ACTIVITE 25 : cor. p : 340

Une urne A contient 6 jetons marqués respectivement 1, 1, 2, 3,3 et 3

Une urne B contient 4 jetons marqués respectivement 0, 0,0 et 5.

On tire un jeton de l'urne A, puis un jeton de l'urne B .On suppose que chaque tirage est équiprobable .le résultats de ce double tirage détermine une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines du chiffre porté par le jetons extrait de l'urne A et pour chiffre des unités, celui porté par le jeton extrait de l'urne B.

1°) Détermine la loi de probabilité de X.

2°) Représente graphiquement la fonction de répartition de X

3°) Calcule l'espérances mathématique de la variable X.

ACTIVITE 26 : cor. p : 341

On lance simultanément deux dés cubiques équilibres dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On dit que l'on obtient un "double" si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.

A chaque lancer, si le joueur fait un double il gagne 500 F sinon il perd 100 F

1°) On lance les dés une fois .calcule la probabilité de gagner.

2°) On lance les dés trois fois soit X la variable aléatoire associée a la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.

a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X.

b- Etablie la loi de probabilité de X

3°) on lance les dés n fois.

a- Calcule en fonction de n, la probabilité noté q_n de ne jamais faire un double.

b- Calcule en fonction de n la probabilité note p_n de faire au moins un double.

c- Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait $p_n \geq 0{,}8$

ACTIVITE 27 :

Un ranch possède 20 chevaux (6 blancs, 5 noires et 9 gris) et une calèche prévue pour être tirée par 2 chevaux. Le cacher de la calèche choisit au hasard pour une journée de travail les 2 chevaux de l'attelage parmi les 20 chevaux des ranches.

1°) a- Calcule la probabilité des évènements suivants :

A : « les 2 chevaux sont blancs »

B : « l'un des chevaux au moins est blanc »

C : « les deux chevaux sont de la même couleur »

b- sachant que les deux chevaux de l'attelage sont de couleurs différentes quelle est la probabilité pour que l'un soit blanc ?

2°) Pour des raisons climatiques, la durée de travail quotidien d'un cheval est 3 heures s'il est noir, 2 heures s'il est blanc et 4 heures s'il est gris, et le cocher arrête le travail lorsque l'un au moins des 2 chevaux atteint sa durée de travail quotidien.

On désigne par X la durée du travail d'une journée des 2 chevaux choisis.

a- détermine la loi de probabilité de X

b- calculer l'espérance mathématique de X

ACTIVITE 28 : cor. p : 342

Un jeu de loterie est constitué de trois roues comportant chacune cinq secteurs identiques numérotes de 1 à 5 et d'une table de mise .les roues sont lancées après que les joueurs aient mises sur l'un des cinq numéros.

1 °) un joueur ayant choisi un numéro, quelle est la probabilité pour que ce numéro apparaisse :

a- " aucune fois " ?

b- " une fois " ?

c- " deux fois " ?

Scanné avec CamScanner

d- " trois fois " ?

2°) la mise est fixée à 200F . Si aucune roue en donne son numéro il perdra sa mise.
Si une roue donne son numéro, il récupéra sa mise.
Si deux roues donnent son numéro, il recevra cinq fois sa mise.
Si trois roues donnent son numéro, il recevra dix fois sa mise.

Soit X la variable aléatoire indiquant le gain du joueur

a- Quelles sont les valeurs prises par X ?
b- Détermine la loi de probabilité de X ?
c- Calcule l'espérance mathématique de X ?

ACTIVITE 29 : cor. p : 342

Une crique possède douze fauves, dont cinq mâles. Pour chaque représentation le dompteur choisit, au hasard, cinq fauves. On admet que tous les choix de cinq fauves ont la même probabilité .Soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de mâles présentés au cours d'une représentation.

a. Définie la loi de probabilité de X.
b. Calcule l'espérance mathématique de X.
c. Quelle est la probabilité p pour qu'au cours de trois représentations successives, l'événement « il n'y a pas de mâles » se produise une fois seulement ?

ACTIVITE 30 : cor. p : 343

Une cible circulaire est composée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2, 3,4 en partant de l'extérieur (zone 4 = zone centrale).
La zone 1 permet de gagner 1 point.
La zone 2 permet de gagner 3 points.
La zone 3 permet de gagner 5 points.
La zone 4 permet de gagner 10 points.
On admet qu'un tireur atteint toujours la cible. Les probabilités d'atteindre les zones 1, 2,3 sont respectivement de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$

1°) Calcule la probabilité d'atteindre la zone 4
2°) un tireur tire deux fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus au cours des deux tires.

a- Etablie la loi de probabilité de X
b- Calcule l'espérance mathématique de $E(X)$ de la variable aléatoire X et sa variance $V(X)$.

3°) Quelle est la probabilité pour un tireur qui effectue trois tirs successifs d'obtenir au moins quatre points ?

ACTIVITE 31 : cor. p : 343

Un jeu est organisé de la façon suivante :
On répond a deux questions A et B
- pour la question A, les réponses possibles sont 1, 2, ou 3
- pour la question B, les réponses possibles sont 1, 2, 3, 4 ou 5

Les seules réponses exactes sont 2 pour la question A et 4 pour la question B.

- Si la réponse à la question A est différente de 2 joueurs ne gagne rien.
- Si la réponse à la question A est 2 le joueur gagne 3000F et 3000F de plus si la réponse à la question B est 4.

Moussa répond au hasard à chacune des deux questions. On est dans une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble des couples de réponses possibles.

1°) Indique dans un tableau le gain correspondant à chaque couple de réponse.
X la variable aléatoire qui à chaque couple de réponse associe le gain correspondant.
2°) Donne la loi de probabilité de X ?
3°) Calcule l'espérance mathématique de X?
4°) Moussa a – t – il intérêt de jouer souvent si la mise est de 1500F?

ACTIVITE 32 : cor. p : 344

Une urne contient 10 boules.
- cinq sont blanches et portent les numéros 1 ; 1 ;1 ; 2 ; 4
- trois sont noires et portent les numéros 1 ; 3 ; 5
- deux sont rouges et portent les numéros 6 ; 6

On suppose les tirages équiprobables.
1°) Soit l'expérience E qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a- calcule les probabilités des évènements suivants :
E_1 " Les deux boules ont la même couleur "
E_2 " Les deux boules sont de couleurs différentes "
E_3 " Les deux boules portent le même numéro "
b- sachant que les deux boules ont la même couleur, calcule la probabilité qu'elles portent le même numéro.
c- les évènements E_1 et E_3 sont – ils indépendants ?

2°) On suppose maintenant que chaque boule tirée, portant un numéro impair fait gagner

Scanné avec CamScanner

5F et chaque boule tirée, portant un numéro pair fait gagner 10F

Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules la somme des gains.

a- Détermine la loi de probabilité de X.

b- Calcule l'écart type de X

c- Définie et représente la fonction de répartition de X.

ACTIVITE 33: cor. p : 344

Le rechargement d'un camion remorque est compose de 60 sacs identiques dont 10 contiennent des produits non déclarés aux survies de la douane et produit déclare. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane. A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

1°) Le camionneur arrive à un barrage donné. (On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

a- Calcule la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

b- Démontre que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6 .

2 °) Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de $10000F$, à ce barrage pour être autorise à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi. On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut dépenser sur l'ensemble de son trajet.

a- Détermine la loi de probabilité de X

b- Démontre que l'espérance mathématique de X est égale a $18000F$

On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.

Calcule la probabilité pour que son chargement soit saisi.

ACTIVITE 34: cor. p:345 (extrait bac D 1991 Niger)

Au cours d'une kermesse, un stand propose le jeu suivant : le joueur doit tirer successivement sur quatre boîtes de dimensions de plus en plus réduites : B_1 ; B_2; B_3 ;B_4, dans cet ordre.

Pour chaque cible visée, le joueur ne dispose que d'un essai ; en cas de succès (la boîte est atteinte) le joueur tire sur la boîte suivante, ainsi de suite jusqu'à la quatrième boîte ; en cas d'échec, le jeu s'arrête immédiatement.

Un joueur **A** se présente avec les probabilités $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$ de toucher respectivement les boîtes B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4.

1°) Décris toutes les éventualités du jeu de A (par exemple : A atteint B_1, puis B_2 mais rate B_3). On notera w_1 , w_2 ,... ces éventualités et on calculera la probabilité de chacune d'elles.

2°) Lorsque le joueur tire sur une boîte et l'atteint, il gagne 1000 F ; lorsqu'il tire sur une boîte et la rate, il perd 1000 F.

A chacune des éventualités décrites au 1°) on associe le gain en fin de partie. On définit ainsi une variable aléatoire X.

- Quelle est la loi de probabilité de X.
- Quelle est son espérance mathématique.

3°) Le joueur **A** s'engage en cas de succès à verser la moitié de son gain total à un fonds de solidarité. Calcule la probabilité pour que **A** verse au moins 500F au dit fonds.

ACTIVITE 35: cor. p : 345

Une urne contient n boules $(n \geq 5)$ dont trois blanches. Toutes les autres sont noires. Une personne A tire simultanément deux boules de l'urne. On suppose que tous les tirages de deux boules sont équiprobables.

1°) Prouve que la probabilité d'obtenir deux boules blanches est $\frac{6}{n(n-1)}$

2°) On considère le jeu suivant :

Si les deux boules tirées sont noires A gagne $300F$

Si les deux boules tirées sont blanches A pert$100F$

Si les deux tirées sont de couleurs différentes, A ne gagne rien et ne perd rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de A.

a- Détermine la loi de probabilité de X en fonction de n.

b- Calcule l'espérance mathématique de X

c- Détermine le nombre de boules que doit contenir l'urne pour que $E(X)=0$.

Scanné avec CamScanner

Quelle est dans ce cas la variance de X ?
On prend $n = 6$. La personne A effectue dix fois le même tirage en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne .
Quelle est la probabilité pour qu'elle tire au moins une fois deux boules de même couleur ?

ACTIVITE 36 : cor. p : 346

Une urne contient 100 jetons :
40 jetons portent le numéro : 1
30 jetons portent le numéro : 2
18 jetons portent le numéro : 3
12 jetons portent le numéro : 4
On suppose que chaque jeton a la même probabilité d'être tire.
On tire simultanément deux jetons ;
1°) calcule la probabilité pour que ces deux jetons :
- a- Portent le numéro 2
- b- Portent le même numéro

2°) On organise un jeu de la manière suivante :
On tire un jeton:
Si le jeton tire porte le numéro 1, on ne gagne rien.
Si le jeton tire porte le numéro 2, on ne gagne 200 f.
Si le jeton tire porte le numéro 3, on ne gagne 500 f.
Si le jeton tire porte le numéro 1, on ne gagne 1000 f
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le gain du joueur
- a- Etablie le tableau de distribution de la probabilité de X .
- b- Calcule l'espérance mathématique de X .
- c- Combien l'organisateur doit-il faire payer pour que le jeu soit équitable ?

ACTIVITE 37: cor. p : 346

Le centre National de la Transfusion sanguine a diffusé le tableau ci-contre donnant la répartition des groupes sanguins de la ville de Parakou.

Groupe	A	B	AB	O
Pourcentage	31 %	18%	5%	46%

I) 1°) Quelle est la probabilité qu'un parakois ait un sang du groupe O ?
2°) Quatre donneurs se présentent dans un centre de transfusion sanguine.
- a- Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O?
- b- Quelle est la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs?

II) Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).
Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.
A Parakou, 9% des individus du groupe O sont de Rhésus négatif.
1°) démontre que la probabilité qu'un parakois soit un donneur universel est 0,0414 .
2°) Dans un centre de transfusion sanguine, n donneurs se présentent.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi les n donneurs.
- a- Détermine la loi de probabilité de X.
- b- Détermine l'espérance de X en fonction de n.
- c- Détermine le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 donneurs.

ACTIVITE 38: cor. p : 346

on dispose de deux dés en apparence identiques dont l' un est parfait et l'autre truqué.
Les faces de chacun sont numérotées de 1à 6.
Avec le dé truqué la probabilité d' obtenir la face portant le chiffre 4 est égale à $\frac{1}{3}$.
1°) a- on lance le dé parfait 3 fois de suite on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparait. Quelle est la loi de X.
b- On lance le dé truque 3 fois de suite ; quelle est la probabilité d' obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4
2°) On choisi au hasard l' un des deux dés ; les choix étant équiprobables et on le lance trois fois de suites.
on considère les événements suivants :
A « obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »
B « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »
C « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »
- a- Calcule p(B)
- b- Calcule p(C)
- c- Déduis-en p(A)

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 39: cor. p : 346

Une urne contient deux jetons blancs numérotes 1; -1 et trois jetons noirs numérotes 1 ; 1 et -1 tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément deux jetons de l'urne

a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir deux jetons de même couleur »

B « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro »

b- On désigne par X la variable aléatoire numérique qui prend pour valeurs la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés

Détermine la loi de probabilité de X et calcule son espérance mathématique

2°) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré

On considère dans l'espace un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les plans $(P): x+ay+b=0$ et $(P'): x+by-a=0$.

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

C « $(P)//(P')$ »

D « $(P)\perp(P')$ »

ACTIVITE 40 :

Un dé cubique pipé est tel que : deux face sont marquées 2 ; trois face marquées 4 et une face marquée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i

1°) Calcule p_2, p_4 et p_6

2°) on suppose dans la suite que $p_2=\frac{1}{6}$; $p_4=\frac{1}{3}$ et $p_6=\frac{1}{2}$.

On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer e t j le résultat du 2ème lancer.

On définit la variable aléatoire X qui au couple $(i;j)$ associe le nombre $i-j$.

a- Détermine l'univers image de X.

b- Détermine la loi de probabilité

ACTIVITE 41 :

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a- Calcule la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b- Calcule la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ».

c- Prouve que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est : $\frac{1}{19}$

2°) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a- Justifie que X prend les valeurs 2, 3, 4.

b- Prouve que la loi de probabilité de X est : $P(X=2)=\frac{1}{6}$, $P(X=3)=\frac{1}{3}$ et $p(X=4)=\frac{1}{2}$

c- Calcule son espérance mathématique et son écart-type.

ACTIVITE 42:

La production en ciment d'un pays est assurée par deux usines A et B. L'usine A fournit les 70% de la production et l'usine B le reste. Les sacs produits sont soumis à un essai.

Sur 100 sacs fournis par l'usine A, 83 satisfont aux normes et sur 100 sacs fournis par l'usine B, 63 satisfont aux normes.

1°) Quelle est la probabilité pour qu'un sac quelconque satisfasse aux normes.

2°) Soit un sac satisfaisant aux normes. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'usine B ?

ACTIVITE 43 :

Une urne contient 5 pièces de 5F, 3 pièces de 10F et 2 pièces de 20F toutes indiscernables au toucher. Une épreuve consiste à tirer au hasard 2 pièces de l'urne et à parier sur les pièces tirées. On gagne le montant marqué

Scanné avec CamScanner

sur toute pièce de 5F ou de 20F mais on perd le montant marqué sur toute pièce de 10F.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique réalisé.
1°) a- Détermine la loi de probabilité de X.
b- Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
c- Définis et interprète graphiquement la fonction de répartition de X.
2°) Un joueur effectue 5 fois l'épreuve, en remettant les 2 pièces dans l'urne avant chaque tirage. Calcule la probabilité pour qu'il gagne :
a- 10F exactement 2 fois.
b- 10F au moins une fois.

ACTIVITE 44 :

Une urne contient trois jetons marqués 1, deux jetons marqués 2 et un jeton marqué 3. Une expérience consiste à tirer de cette urne simultanément 3 jetons. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons marqués 1 obtenus.
1°) a- Détermine la loi de probabilité de X.
b- Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
2°) On dit qu'on a réussi l'expérience si le nombre de jetons marqué 1 obtenu est supérieur ou égal à deux.
a- Calcule la probabilité de réussir cette expérience.
b- On répète 5 fois cette expérience dans des conditions identiques. Calcule la probabilité de réussir cette expérience :
i) deux fois exactement
ii) au moins une fois
iii) pour la 3eme fois à la 5eme répétition.

ACTIVITE 45 : cor. p :347 (extrait Bac D 2001 niger)

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala, Kadri.
Chaque électeur vote pour un seul candidat.
A la fin du vote, on a constaté que 60% des habitants de ZATA ont effectivement voté.
On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse Ado est égal à $\frac{3}{8}$, celle de Bala est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de Kadri est égale à $\frac{1}{8}$, et ceci indépendammment des autres électeurs.
1°) On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA. Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté ?
2°) Calcule la probabibilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala.
3°) On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala. Détermine la loi de probabilité de X. Calcule son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).
4°) Calcule la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.
5°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisissent Kadri. Calcule P_n.
6°) Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{15}{16}$

ACTIVITE 46: cor. p : 347

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.
1°) Quelle est la probabilité des événements :
A : « les nombres inscrits sont strictement inférieur à 5 ».
B : « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second »
2°) Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour que à l'issue de la 7ème partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? ; au moins une fois ?

ACTIVITE 47:

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note : p_i avec $i \in \{1;2;3;4;6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.

1°) a- Prouve que : $p_1 = \frac{1}{12}$.
b- Déduis-en p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.
2°) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.
a- Détermine la loi de probabilité de X.
b- Détermine l'espérance mathématique de X puis son écart-type.
3°) Un joueur tire simultanément 2 jetons et on note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.
a- Détermine la loi de probabilité de S.
b- On gagne à ce jeu lorsque : $S \geq 0$. Détermine la probabilité de gagner.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 48: cor p : 348 (extrait bac D 1989 Niger)

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère qu'à chaque naissance il ne vient qu'un enfant(garçon noté G, ou fille notée F). La probabilité d'avoir une fille est le double de celle d'avoir un garçon. Les naissances sont indépendantes les unes des autres. Soit X_j la variable aléatoire associée à la j-ème naissance et prenant la valeurs 0 pour G et 1 pour F et $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1°) Dans cette partie $n = 4$.
- a- Donne la loi de probabilité de X.
- b- Construis la fonction de répartition de X.
- c- Calcule l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X).

2°) Détermine n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inferieure à $\frac{1}{100}$.

ACTIVITE 49: cor p: 348 (extrait bac D 1999 Niger)

A/ Le tiercé est une forme de pari où l'on parie sur trois chevaux engagés dans une même course, en précisant l'ordre d'arrivée.

Le PMU-Niger annonce une course de 18 chevaux numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux ont la même chance de gagner la course.

Amadou choisit dans l'ordre les chevaux portant les numéros 15 ; 13 et 8. Tous les chevaux ayant pris part à la course, on demande de calculer la probabilité pour que Amadou gagne le tiercé :
- a- dans l'ordre
- b- dans le désordre.

B/ On considère un club de parieurs comprenant des hommes et des femmes ; le nombre des hommes étant le double de celui des femmes.

On suppose que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans l'ordre. On note respectivement O, H et F les événemnt suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre»

H : « le parieur est un homme»

F : « le parieur est une femme»

1°) Quelle est la probabilité pour que :
- a- un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ?
- b- un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme ?

2°) On choisit au hasard 6 parieurs parmi les gangnants ; le nombre de gagnants est suffisamment grand pour que le choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.

Détermine la probabilité pour qu'il y ait exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs.

ACTIVITE 50 : cor p : 349 (extrait bac D 1995 Niger)

Les quatre faces d'un dé tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est pipé de telle sorte que la probabilité $p(i)$ pour que la face i soit cachée est proportionnelle au carré de i.

On pourra écrire $p(i) = ci^2$, où c est une constante réelle.

1°) Détermine la constante c.

2°) On lance le dé une fois et on appelle X la variable aléatoire : « somme des numéros visibles »

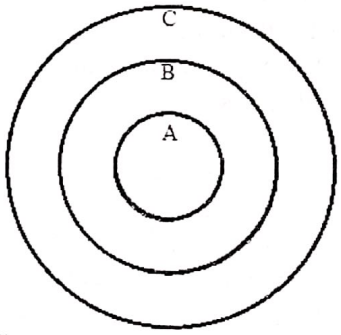
Donne la loi de probabilité de X.

3°) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

3°) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de cinq lancers, X soit paire au moins deux fois ?

ACTIVITE 51 : cor p :349 (extrait bac D 1986 Niger)

La cible d'un jeu de fléchettes est constituée par trois cercles concentriques de rayons respectifs R, 2R, 3R. On note A la partie centrale de la cible et B, C les anneaaux entourant A.



1°) Calcule, en fonction de R, les aires des parties , B et C.

2°) Un joueur lance une fléchette vers la cible précédente. On admettra que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est proportionelle à l'aire de cette partie. Soit p la probabilité d'atteindre la partie A de la cible.
- a- Calcule, en fonction de p, les probabilités respectives d'atteindre les parties B et C.
- b- On suppose que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est 0,75. Déduis-en la valeur de p.

3°) On suppose que les parties A, B et C sont affectées respectivement des points : 100 ; 50 ; 25 points, un joueur n'atteignant pas la cible marquant 0 point.

Soit X la variable aléatoire qui exprime le nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.
- a- Quelle est la loi de probabilité de X ?
- b- Calcule l'espérance mathématique de X.

ACTIVITE 52: cor p :350 (extrait bac D 2005 GABON)

Sur les quatres faces d'un dé pipé tétraédique sont inscrits les nombres complexes suivants : $z_0 = -2i$; $z_1 = -2 - 2i$; $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$.

On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est : $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0;1;2;3\}$ et $k \in \mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

1°) a- Prouve que : $c=\frac{1}{18}$

b- Détermine p_k pour $k\in\{0;1;2;3\}$

2°) On désigne par X la variable aléatoire qui,au complexe inscrit sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0;2\pi[$.

a- Détermine les valeurs prises par X.

b- Donne la loi de probabilité de X.

c- Calcule l'espérance mathématique de X.

3°) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$f(z)=z^3+(1+5i)z^2+2(-5+i)z-8i$

a- Vérifie que z_0 est une racine de $f(z)$

b- Déduis-en deux nombres complexes α et β tels que $f(z)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$

c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

ACTIVITE 53: cor. p : 350

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleur » : pique, trèfle, carreau et cœur ;
Chaque « couleur » comprend huit cartes dont une carte as.

1°) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « Les trois cartes sont des as »

B: « Il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes ».

C: « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ».

2°) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tirés définit une variable aléatoire X.

Détermine :

a- l'ensemble des valeurs prises par X ;

b- la loi de probabilité de X.

c- son espérance mathématique.

ACTIVITE 54: cor. p :351 (d'après BAC Sénégal)

I- On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappelle les probabilités des événements suivants :

A, A sachant B, et $(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$.

II- Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour la ville est délesté.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement : « la ville est délestée le $n^{ième}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement D_n, $p_n=p(D_n)$.

1°) Prouve les égalités suivantes :

$p(D_1)=1$; $p(D_{n+1}/D_n)=\frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D}_n)=\frac{5}{6}$

2°) Exprime p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1}\cap D_n)$ et $p(D_{n+1}\cap\overline{D}_n)$.

3°) Déduis-en que, quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$p_{n+1}=-\frac{11}{18}p_n+\frac{5}{6}$

4°) On pose : $U_n=6p_n-\frac{90}{29}$,pour $n\in\mathbb{N}^*$

a- Démontre que la suite (U_n) est géométrique. Tu préciseras sa raison et son premier terme.

b- Exprime U_n puis p_n en fonction de n.

c- Un match de football doit se jouer le 20ème jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

ACTIVITE 55: cor. p :351

Soit D_1 un dé cubique truqué numéroté de 1 à 6.
On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i lors d'un lancer du dé D_1 ;
$i\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

On suppose que p_1, p_3, p_5 forment dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; puis p_2, p_4, p_6 forment dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et que $p_2=4p_1$.

Soit D_2 un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6. Chaque face de D_2 a donc la même probabilité d'apparition lors d'un lancer de ce dé.

1°) a- Démontre que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 vérifient le système :

$p_2=4p_1$; $p_4=p_1$; $p_3=\frac{1}{2}p_1$; $p_5=p_6=\frac{i}{4}p_1$ et

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.

b- Calcule p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.

2°) On lance les deux dés D_1 et D_2 simultanément. On note par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus de D_1 et D_2 après lancement.

Scanné avec CamScanner

a- Donne l'univers image de X. (l'ensemble des valeurs prise par X)

b- Calcule la probabilité des événements suivants : $\{(X=2)\}$, $\{(X=3)\}$, $\{(X=4)\}$, $\{(X=5)\}$

On donneras les résultats sous forme de fractions irréductibles.

ACTIVITE 56: cor. p :352 (d'après Bac C 2014 Togo)

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3, et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4.

On lance simultanément les deux dés, on désigne par «a » le numéro apparu sur la face supérieure du dé cubique et « b » celui sur la face cachée du dé tétraédrique.

On considère l'équation différentielle (E) : $y''+ay'+by=0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur a^2-4b.

1°) a- Détermine la loi de probabilité de X.

b- Déduis-en la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

2°) On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E) admet une solution générale, une fonction non sinusoïdale.

Détermine le plus petit entier n pour que la probabilité de l'événement $\{(Y\geq 1)\}$ soit supérieure ou égale à 0,999.

3°) On pose $(a\,;b)=(3\,;2)$ et on considère l'équation différentielle $(E'): y''+3y'+2y=\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$.

a- Vérifie que la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, par : $e^{-x}\ln(x)$ est solution de (E').

b- Résous l'équation : $(E_{(3;2)}): y''+3y'+2y=0$.

c- Soit g une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, prouve que g est solution (E') si et seulement si $g-f$ est solution de $(E_{(3;2)})$.

d- Déduis-en toutes les solutions de l'équation (E').

Scanné avec CamScanner

2. LIMITES ET CONTINUITES

ACTIVITE 1 : cor. p :251

Trouve l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{\left|x^2+x+1\right|+2}$; $g(x)=\dfrac{|3x+4|}{|2x+1|+|-x+1|}$;

$h(x)=\sqrt{|x+1|-1}$; $i(x)=\sqrt{(-x-3)^2+2}$;

$j(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{\left|2x^2+x+1\right|-2}$; $k(x)=\dfrac{|3x+4|}{|2x+1|-|-x+1|}$;

$l(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-3}}$; $m(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$; $n(x)=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-5}}$;

$p(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+x+1}-3}$;

$q(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+5}{x+1} & si\ x\in\left]-\infty;0\right]\\ x+3+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}} & si\ x\left]0;+\infty\right[\end{cases}$;

$r(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x^2} & si\ x<0\\ 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si\ x\geq 0\end{cases}$; $v(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

ACTIVITE 2 : cor. p :251

Calcule les limites suivantes :

$l_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $l_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(1+\sqrt{x}\right)$;

$l_3=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{5x+4}$; $l_4=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}$;

$l_5=\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^3+x^2-1)$; $l_6=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x+3}{8x+2}$;

$l_7=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\sqrt{x})$; $l_8=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2-\sqrt{x})$;

$l_9=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}$; $l_{10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}$;

$l_{11}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+2x$; $l_{12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x-1}{2x}\right)$;

$l_{13}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3+2\cos x}$; $l_{14}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)+x}{\sin(3x)-x^2}$;

$l_{15}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; $l_{16}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$l_{17}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{(x-1)(x+2)}$; $l_{18}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$;

$l_{19}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; $l_{20}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

$l_{21}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-4}{\sqrt{x+4}-3}$; $l_{22}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-12}{x^3-8}$;

$l_{23}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(x-2)^2-4}$;

$l_{24}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+7}-5}{x^2-1}$; $l_{25}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-2}$;

$l_{26}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ $l_{27}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-2x-1$;

$l_{28}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-2x}$

ACTIVITE 3 : cor. p :251

Soit h la fonction numérique définie par $h:x\mapsto\dfrac{\sqrt{3x+10}-x}{\sqrt{2x^2-2x-4}-x-1}$

1°) Détermine le domaine de définition D de h.

2°) Calcule $\lim\limits_{5} h$

3°) Peut-on prolonger h par continuité en 5 ? si oui définie ce prolongement.

ACTIVITE 4 :

Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.

1°) Précise le domaine de définition de f, puis écris f sans le symbole de valeur absolue.

2°) Trouve les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est continue.

3°) Etudie la limite éventuelle de f au point $x_0=0$.

4°) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0=0$? Si oui donne le prolongement par continuité de f en $x_0=0$.

ACTIVITE 5 : cor. p :252

Soit la fonction f définie par

$\begin{cases}f(x)=x+1-\sqrt{x^2-1} & ,si\ x>1\\ f(x)=x^3+3x-2 & ,si\ x\leq 1\end{cases}$

1°)Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) Justifie que f est continue sur IR

3°) a- démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\left]-1;1\right[$.

b- vérifie que $0,5<\alpha<0,75$.

c- détermine le signe de $f(x)$ sur $\left]-1;1\right[$.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 6 : cor p :252

I/

Soit une fonction numérique g définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction g.

2°) Calcule les limites de g aux bornes de D.

3°) On donne une fonction h définie par : $\begin{cases} h(x)=g(x) \ ; si\ x\in D \\ h(3)=m \end{cases}$

Détermine m pour que la fonction h soit le prolongement par continuité de g en 3

II/

On donne f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{|x|}}$

1°) Justifie que f est continue sur son ensemble de définition.

2°) Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

3°) Soit a et b deux réels positifs.

a- Démontre que $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

b- Déduis-en le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

c- Détermine les limites de f à $+\infty$ et à $-\infty$

4°) On pose : $I=[0;+\infty[$

a- Détermine $f(I)$.

b- Soit k l'application de I vers $f(I)$ telle que $k(x)=f(x)$, $\forall x\in I$.

Démontre que k est une bijection.

5°) On pose : $l(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$

a- Démontre que l'équation $l(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0,8;1,1]$.

b- Déduis-en que α est solution de l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$

ACTIVITE 7 :

I- Soit g la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par: $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.

1°) a- Justifie que g est continue sur $[-1;+\infty[$.

b-Calcule alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

2/ Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

a- Détermine le domaine de définition D_f de f.

b- Démontre que $\forall x\in D_f$, $f(x)=g(x)$.

c- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f.

II- soit h la fonction définie sur IR par :

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ,si\ x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\\ \dfrac{1}{2} & ,si\ x=0 \\ \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}+m & ,si\ x<-1 \end{cases}$$

3°) Justifie la continuité de h sur $IR-\{-1\}$.

4°) Prouve que $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)=m-5$.

5°) Pour quelle valeur de m ; h est continue en -1.

ACTIVITE 8 : cor. p :254

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x-1}$

1°) Soit la fonction u définie par : $u(x)=2x^3-3x^2+2$

a- Etudie les variations de u

b- Démontre que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-\dfrac{3}{4}<\alpha<-\dfrac{2}{3}$.

c- Déduis le signe de $u(x)$.

2°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f et les limites de f aux bornes de D.

b- Justifie que $\forall x\in D$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$.

c- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3°) a- Justifie que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}\left(3\alpha+1-\dfrac{3}{\alpha-1}\right)$

b- Encadre $f(\alpha)$, puis déduis le signe de $f(\alpha)$.

c- Justifie que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0 puis déduis le signe de $f(x)$.

4°) Soit l'application $g:]1;+\infty[\to IR$, $x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Démontre que g admet une application réciproque g^{-1}.

b- Détermine $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$

c- Démontre que la droite $(\Delta): y=m$ $(m\in\mathbb{R})$ coupe une seule fois la courbe $(\mathcal{C})$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

3. ACTIVITES SUR LA DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

ACTIVITE 1:

Calcule les limites suivantes en utilisant les nombres dérivés :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}.$$

ACTIVITE 2:

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudie leur dérivabilité en x_0 indiqué puis interprète tes résultats.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}, si\ x\in x<1 \\ f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}, si\ x\geq 1 \end{cases} ; x_0=1$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, si\ x<0 \\ f(x)=x+1+\sqrt{x^2-x}, si\ x\leq 0 \end{cases} ; x_0=0$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-mx}{x-1}+\sqrt{1-x}, si\ x\in\ ]-\infty;0[\\ f(x)=(1-mx)\cos x, si\ x\in[0;\pi] \end{cases} ; x_0=0 \text{ et } m\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, si\ x\in\ ]-\infty;1] \\ f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x+1}, si\ x\in\ ]1;+\infty[\end{cases} ; x_0=1$$

ACTIVITE 3: cor. p :256

Soit $I=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1+\sin 3x+2\cos 2x}{x\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

Calcule I (ne justifie pas l'existence de I apriori)

Tu pourras posé $X=x-\frac{\pi}{3}$ et utilisé le développement limité d'ordre 3 des fonctions : $x\mapsto\sin 3x$; $x\mapsto\cos 2x$ et $x\mapsto\tan x$

ACTIVITE 4 :

On considère la fonction $f: x\mapsto\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

1°) a- Détermine le domaine de définition E de f et calcule les limites de f aux bornes de E.

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) représentative de la f.

2°) Soit $I=\left[\frac{1}{4};1\right]$

a- Démontre que $\forall x\in I,\ f(x)\in I$

b- Démontre qu'il existe un réel $k\in\ ]0;1[$ tel que : $\forall x\in I, \left|f'(x)\right|\leq k$

c- Démontre que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans I.

d- Démontre que $\forall x\in I, |f(x)-\alpha|\leq k|x-\alpha|$

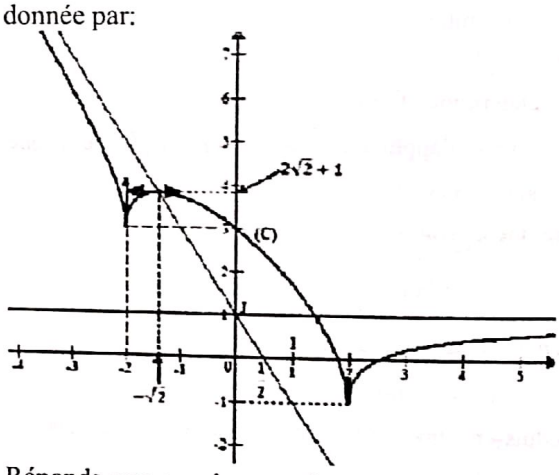
3°) Soit l'application $g: IR\to IR_+^*$, $x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Démontre que g est une bijection et sa bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur IR_+^*

b- Calcule $\left(g^{-1}\right)'(\alpha)$ sans le symbole $\sqrt{\ }$

ACTIVITE 5: cor. p :256

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) du plan, la courbe (C) d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est donnée par:



Réponds aux consignes suivantes en observant la courbe représentative (C) de la fonction f.

1°) a- Quel est l'ensemble de définition D de la fonction f.

b- Quel est l'ensemble de dérivabilité E de f ?

2°) Ecris les systèmes définissant les demi-tangentes à la courbe (C) en ses points d'abscisses respectives -2 et 2.

3°) a- Donne les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b- Précise les branches infinies de la courbe (C).

4°) Dresse le tableau de variations de f.

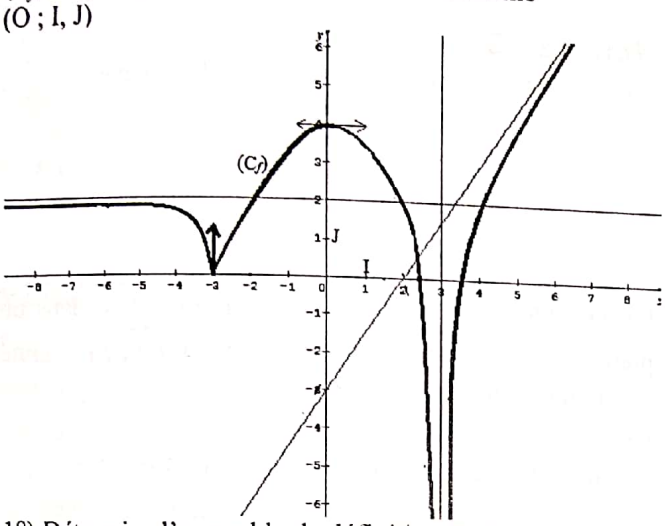
5°) Donne $f([0;2])$.

Scanné avec CamScanner

6°) Démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que $0 < \alpha < 2$.

ACTIVITE 6:

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique (C_f) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$



1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de f

2°) Détermine les limites aux bornes de D_f.

3°) a-la fonction f est-elle continue ; dérivable en -3 .Justifie ta réponse

b-Dresse le tableau de variation de f.

4°) Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à à (C_f) en $x = 0$.

5°) Prouve que la restriction g de la fonction f à $[0 ; 3[$ est une bijection de $[0 ; 3[$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que tu présideras.

6°) Détermine les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f.

7°) Détermine graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

ACTIVITE 7:

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$, $f(x) = \cos^2\left(5x - \dfrac{1}{x}\right)$;

$f(x) = \cos(\cos x)$; $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2\left(x\sqrt{x}\right)}$

ACTIVITE 8:

Etudie les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I, J)

$f(x) = (x+2)^2(x-1)$; $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-2}$;

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + x}$;

$f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $f(x) = x\sqrt{x}$;

$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$; $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 2}$;

$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$; $f(x) = x|x|$; $f(x) = |x+1| + \dfrac{1}{x-1}$;

$f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x+1|}{x-1}}$;

$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$.

ACTIVITE 9 :

On considère la fonction $f : \mapsto \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x} & , si\ x \geq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}} & , si\ x < 0 \end{cases}$

1°) Justifie que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Prouve que f est continue en 0.

3°) Etudie la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

4°) a- Démontre que la droite $(D) : y = 2x + 1$ est une asymptote de (C_f).

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à D.

5°) Calcule la limite de f en $-\infty$. Interprète ce résultat.

6°) Trace (C_f) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

Activité 10 :

1°) Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$f(x) = -1 + \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x}}$

a- Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

b- Vérifie que pour tout réel x on a :

$f'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2 - x)\sqrt{x^2 - x}}$

c- Etudie les variations de f et déduis-en que pour tout x : $f(x) > 0$

2°) Soit g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a- Etudie la dérivabilité de g à droite en 1. Interprète graphiquement ce résultat.

Scanné avec CamScanner

b- Détermine $g'(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$. (Tu exprimeras $g'(x)$ fonction $f(x)$)

c- Dresse le tableau de variation de g.

d- Justifie que la droite $(D): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote de (C_g).

3°) a- Vérifie que g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que tu préciseras.

b- Calcule $\left(g^{-1}\right)'(1)$. (g^{-1} étant la fonction réciproque de g)

4°) Trace (D), (C_g) et $(C_{g^{-1}})$: la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ACTIVITE 11 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1cm)

Soit f la fonction numérique définie par :

$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative

1°) Détermine l'ensemble de définition D de g.

2°) Calcule les limites de g aux bornes de D.

3°) Etudie les branches infinies.

4°) Etudie les variations puis dresse le tableau de variation de g.

5°) Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

ACTIVITE 12 :

On considère la fonction h définie par:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2}, si\ x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad , si\ x < 1 \end{cases}$$

1 et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

1°) Détermine le domaine de définition D de la fonction h, puis étudie les limites aux bornes de D.

2°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1. Interpréter les résultats.

3°) Détermine une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ de la courbe $(\mathcal{C})$ puis étudier sa position par rapport à $(\mathcal{C})$.

4°) a-Détermine l'ensemble de dérivabilité de h puis calcule $h'(x)$.

b-Dresse le tableau de variation de h.

5) Soit g l'application définie par :

$g:]1;+\infty[\to]0;+\infty[$

$x \mapsto g(x) = f(x)$

a- Démontre que g est une bijection ..

b- Donne le sens de variation de g.

c- Etudie la dérivabilité de g en 2 ,puis calcule $\left(g^{-1}\right)'(2)$

d- Explicite $g^{-}(x)$

e- Trace les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ courbe de g^{-1}.

Activité 13:

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x^3} \quad , si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x} + 2 \quad , si\ x > 0 \end{cases}$$

On considère par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 1 cm.

Partie A

Soit le polynôme g définie par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1°) Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.

2°) a- Détermine $g(]-\infty;0])$

b- Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout $x \leq 0$

Partie B

3°) a- Justifie que f est définie sur le domaine $D =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

b-Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

c- Interprète géométriquement les résultats de l'étude de dérivabilité.

4°) a- Calcule les limites de f aux bornes de D.

b- Démontre que pour tout $x \leq 0$; on a: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

c- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

5°) a- Démontre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives α et β et que $0 < \alpha < 0{,}5$; $5 < \beta < 5{,}5$.

b- Déduis-en le tableau de signe de f pour tout $x \in D$.

6°) a- Etudie les branches infinies de (C).

b- Trace (C).

Partie C :

Soit l'application $h:]-1;1[\to f(]-1;1[)$

$x \mapsto h(x) = f(x)$

7°) a- Détermine $J = f(]-1;1[)$.

Scanné avec CamScanner

b- Démontre que h^{-1} est une bijection de J sur $I=]-1;1[$.

c- Justifie que h^{-1} est dérivable sur $J-\{1\}$ puis démontre que : $\left(h^{-1}\right)'(0)=-\dfrac{(4\alpha-2)(\alpha-1)^2}{4\alpha-2+(\alpha-1)^3}$.

d- Justifie que le point $A\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{-1}{2}\right)$. appartient à la courbe (C ') de h^{-1}.

8°) Trace (C ')

ACTIVITE 14: cor p :257

La fonction définie par $f(x)=\sqrt{|x^2-2x|}+x$; (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) a- Justifie que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ puis écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 2. Interprète les résultats obtenus.

2°) Etudie les branches infinies à la courbe (C_f)

3°) a- Détermine l'ensemble de dérivabilité D' de f puis calcule la fonction dérivée $f'(x)$.

b- Démontre les équivalences suivantes :

i) $\sqrt{x^2-2x}-1+x<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right]$

ii) $\sqrt{-x^2+2x}+1-x<0 \Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};2\right]$

c- Déduis-en le tableau de signe de $f'(x)$.

d-Etablie le tableau de variation de f .

4°) Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi:\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};2\right]\to f\left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};2\right]\right)$$
$$x\mapsto \varphi(x)=f(x)$$

a- Démontre que φ admet une bijection réciproque φ^{-1}.

b- Démontre que le point A (2 ; 1) appartient à la courbe (Γ) de φ^{-1}.

c- Déduis-en l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

d- Détermine l'ensemble de dérivabilité K de la fonction φ^{-1}

5°) Représente la courbe (C_f) et la courbe (Γ) dans le même repère

ACTIVITE 15 :

Partie A :

Soit $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto -x^3+x^2+x+1$$

1. Etudie les variations de U
2. Démontre que l'équation $U(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2}<x_0<2$.
3. Donne le signe de $U(x)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} & si\ x\le 1 \\ f(x)=x-1-\sqrt{x-1} & si\ x>1 \end{cases}$$

4. Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $a=1$.
5. Achève l'étude des variations de f.
6. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   a) Ecris les équations des demi tangentes éventuelles à (C) au point $a=1$.
   b) Etudie les branches infinies de (C).
   c) Etudie la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y=x-1$ dans le demi-plan d'équation $x\ge 1$.
   d) Détermine les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
   e) Construis (C).
7. On pose : $I=]-\infty;-1[$

   Soit l'application $g:I\to f(I)$

   $$x\mapsto g(x)=f(x)$$

   a) Démontre que g admet une application réciproque g^{-1}.

   b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.

   c) Construis la courbe (C') de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

   d) Démontre que le point $A\left(\dfrac{3}{5};2\right)$ appartient à (C') puis détermine le coefficient directeur à (C') au point A.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 16 : cor. p :259

Soit f la fonction numérique la variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2} & ,si\ x\le 1 \\ f(x)=x^2-2x+\dfrac{1}{x} & ,si\ x>1 \end{cases}$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

1°) a- étudie les variation de la fonction numérique g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=2x^3-2x^2-1$

b- Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]1;+\infty[$ et vérifie que $1{,}28<\alpha<1{,}3$.

c- Détermine le signe de g sur $]1;+\infty[$.

2°) a-Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1;+\infty[$.

b- Etudie la continuité de f en 1.

3°) a- Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 1 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b- Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.

4°) a- Démontre que :

- Pour tout x élément de $]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
- Pour tout x élément de $]-1;1[$, $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b- Etudie le signe de f' sur $]-1;1[$

5°) Justifie que : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha}-\alpha^2$ et $-0{,}07<f(\alpha)<0{,}16$.

6°) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1;+\infty[$

7°) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de (Γ) dans le repère orthonormé (O ; I, J)

ACTIVITE 17 : cor. p :261

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2+1} & ,si\ x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{5}\left(4x+13-\dfrac{8}{\sqrt{|x-1|}}\right) & ,si\ x>0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ i,\ J)$

1°)a- Détermine l'ensemble de définition E de f.

b- Etudie les limites de f aux bornes de E.

c- Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

d- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interprète les résultats obtenus.

2°) a- Définis la fonction dérivée f' de f.

b- Etudie le sens de variation de f et donne son tableau.

c- Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions réelles x_1, x_2 et x_3.

d- Vérifie que $-0{,}5<x_1<0$, $x_2=\dfrac{3}{4}$ et $1<x_3<1{,}5$.

e- Déduis-en le signe de $f(x)$ pour tout $x\in E$.

3°) a- Etudie les branches infinies de (C)

b- Trace (C) avec soin.

4°) Soit $I=]1;+\infty[$ et g l'application définie de I dans $f(I)$ par : $g(x)=f(x)$

a- Démontre que g admet une application réciproque g^{-1} dont tu détermineras l'ensemble de définition J.

b- Calcule $\left(g^{-1}\right)'(0)$ en fonction de x_3 sans le symbole $\sqrt{\ }$.

c- Vérifie que le point $A\left(\dfrac{13}{5};2\right)$ est un point de la courbe (C') de g^{-1} puis donne une équation cartésienne de la tangente (T) à (C') au point A.

d- Construis (C')

ACTIVITE 18 :

Partie A :

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x)=4x^3+x^2+1$

1. Etudie les variations de g.
2. a) Déduis-en que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

   b) Démontre que $-\dfrac{3}{4}<\alpha<-\dfrac{1}{2}$.
3. Détermine, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{4x^3+x^2+1} & ,si\ x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\\ f(x)=\dfrac{2x+1}{4x^2-4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} & ,si\ x\in\left]-\infty;\dfrac{-1}{2}\right] \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. Soit D l'ensemble de définition de f.
Démontre que $D=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

5. a) Etudie la continuité de f en $-\frac{1}{2}$.

b) Etudie la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$, puis donne une interprétation géométrique du résultat.

6. Etudie les variations de f.

7. a) Etudie les branches infinies de la courbes (C).
b) construis (C).

8. On pose $K=\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ et $h:K\to f(K)$
$x\mapsto h(x)=f(x)$

a) Détermine $f(K)$ et démontre que h est bijective.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa courbe représentative.

Justifie que le point $A\left(\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{4}\right)$ appartient à (Γ).

Ecris l'équation de la tangente à (Γ) en A.

c) Construis (Γ) dans le même repère que (C).

ACTIVITE 19 :

On donne la fonction f définie par :

$f(x)=\frac{1}{5}\left(3x+4\sqrt{|x^2-4|}\right)$, et on désigne (Γ) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f et calcule les limites de f aux bornes de D.

b- Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.

c- Détermine la dérivée de f sur chaque intervalle où f est dérivable.

d- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

2°) a- Justifie que les droites $(\Delta_1):y=-\frac{1}{5}x$ et $(\Delta_2):y=\frac{7}{5}x$ sont asymptotes à (Γ) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Détermine les points de concours de (Γ) avec les axes du repère.

c- Détermine les points de concours de (Γ) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2) dans $[-2;2]$

3°) Soit l'application $g:]-\infty;-2[\to\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$
$x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Justifie que g admet une bijection. réciproque g^{-1}. Soit (Γ') est la courbe de g^{-1}

b- Etudie la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition.

c- Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ') en son point d'abscisse 0.

4°) Construis avec soin (Γ) et (Γ')

ACTIVITE 20: cor. p :263

On considère la fonction $t:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to[0;1]$
$x\mapsto \sin^2 x$

1°) Démontre que t est une bijection

2°) a- détermine l'ensemble de dérivabilités D de la bijection réciproque t^{-1} de t

b- Calcule $\left(t^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$

c- Démontre que : $\forall x\in D,\ \left(t^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

puis retrouve la valeur de $\left(t^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$

ACTIVITE 21 :

On considère la fonction g définie par :

$g:\left[-\frac{\pi}{4};0\right]\to\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{\sin 2x}{\sin(2x)-2}$

1°) Etudie les variations de g

2°) Démontre que g détermine une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ sur un intervalle I à préciser

3°) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g.

a- Détermine l'ensemble de dérivabilité J de g^{-1} et calcule $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{5}\right)$

b- Calcule $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$

ACTIVITE 22 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

4. ACTIVITES SUR LES PRIMITIVES

ACTIVITE 1 :

Détermine les primitives de chacune des fonctions suivante sur I.

1°) $f:x\mapsto\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I=\mathbb{R}$

2°) $f:x\mapsto(2x+1)(x^2+x+1)$; $I=\mathbb{R}$

3°) $f:x\mapsto\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I=\mathbb{R}$

4°) $f:x\mapsto(2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I=\mathbb{R}$

5°) $f:x\mapsto\sin x+x\cos x$; $I=\mathbb{R}$

6°) $f:x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I=]-1;1[$

7°) $f:x\mapsto\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

8°) $f:x\mapsto\cos x\cos 2x$; $I=\mathbb{R}$

9°) $f:x\mapsto\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I=]-2;0[$;

10°) $f:\mapsto\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$

ACTIVITE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cos x$.

1°) Détermine la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x\sin x$

2°) Déduis-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$

ACTIVITE 3 :

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

Par : $h(x)=\dfrac{-2x^4+3x^3-4x^2-2}{(x^3+x)^2}$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction h

2°) Trouve les nombres réels a et b tels que : $\forall x\in D$,

$h(x)=\dfrac{ax}{(x^2+1)^2}+\dfrac{b}{x^2}$

3°)Déduis-en la primitive sur $]-\infty;-1[$ de la fonction h qui prend la valeur 1 en -2

ACTIVITE 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=]-\infty;2[$, par : $f(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Détermine les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle $I=]-\infty;2[$, on ait : $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$

2°) déduis-en la primitive de f sur l'intervalle $I=]-\infty;2[$, qui s'annule en $x=1$.

ACTIVITE 5 :

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=(x^2-x+1)\sqrt{2x-1}$ et la fonction u définie par : $u(x)=2x-1$ et le polynôme $P(x)=x^2-x+1$.

1°) a- Exprime x en fonction de $u(x)$.

b- Exprime $P(x)$ suivant les puissances de $u(x)$.

c- Déduis-en $f(x)$ en fonction de $u(x)$

2°) Détermine la primitive F de f sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ telle que $F(1)=-1$

ACTIVITE 6:

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ par :

$f(x)=(x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$

1°) Démontre que : $x^2=\dfrac{(3-2x)^2}{4}-\dfrac{3(3-2x)}{2}+\dfrac{9}{4}$

2°) Détermine alors la primitive de f sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1.

ACTIVITE 7 : cor p :264

Soit $f:\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto(1-3x)^5+2\cos\pi x+\left|(2x-1)x^2\right|$

1°) Justifie que f admet des primitives sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$.

2°) Détermine la primitive G de f sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 8:

Soit $f(x)=\sin(3x)\cos^2 x$

Linéarise $f(x)$ puis déduis-en une primitive de f.

ACTIVITE 9 :

1°) On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, par :

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

a- Justifie que f admet des primitives sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

b- Développe $\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$ pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et déduis-en que :

$$f(x)=2\left[\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right]-1$$

c- Détermine la primitive F de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $F(0)=2$

2°) Soit $g:IR\to IR$

$$x\mapsto\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$$

et D_g son ensemble de définition.

a- Démontre qu'il existe deux réels A et B tels que l'on ait $\forall x\in D_g$,

$$g(x)=A+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\times B$$

b- Déduis-en les primitives de g sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$

Scanné avec CamScanner

5. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

ACTIVITE 1 : cor. p :265

Trouve l'ensemble de définition, puis calcule la dérivée des fonctions suivante :

$f_1(x)=\ln(3x-1)$; $f_2(x)=\ln\left|x^2-3x+2\right|$;

$f_3(x)=\ln(x^2-x+1)$; $f_4(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$f_5(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$; $f_6(x)=\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$;

$f_7(x)=(2x+3)\ln x$; $f_8(x)=\dfrac{\ln x}{2-3x}$; $f_9(x)=(\ln(x))^2$

; $f_{10}(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)$; $f_{11}(x)=\sqrt{\ln x}$; $f_{12}(x)=\ln\sqrt{x}$

; $f_{13}(x)=\ln(\ln x)$; $f_{14}(x)=2\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{x}$;

$f_{15}(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x^2-x+1)$; $f_{16}(x)=x\left(x-(\ln x)^2\right)$;

$f_{17}(x)=\dfrac{x\ln(-x)}{x+1}$; $f_{18}(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$;

ACTIVITE 2 : cor. p :266

Calcule les limites suivantes :

$1-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$; $2-\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)}$;

$3-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3x^2+x-1)$; $4-\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$;

$5-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\ln|x|\right)$; $6-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{3x+2}$; $7-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$8-\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+3-4\ln x)$; $9-\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1-\ln x)$;

$10-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1+3\ln x}{x-\ln x}$

$11-\lim\limits_{x\to0^+}x^3\ln x$; $12-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $13-\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$;

$14-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$; $15-\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$;

$16-\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$; $17-\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$;

$18-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$; $19-\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x}{x-2}\ln(x-1)\right]$;

$20-\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $21-\lim\limits_{x\to0}x(1-\ln x)^2$;

$22-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\ln x}{x^2}$; $23-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\ln x-1}{x-1}$

$24-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{1+3x}\right)$; $25-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{4}{1-7x}\right)$;

$26-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left|\ln\dfrac{1}{x}\right|\right)$; $27-\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}\ln(x^2-9)$;

$28-\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-3}{\ln(|x-5|)}$; $29-\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$;

$30-\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}(x-2)\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$.

ACTIVITE 3 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$(E_1):\ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+2}\right)=0$

$(E_2):\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$

$(E_3):\ln\left(3(x^2+x+3)\right)=3\ln(x+1)$

$(I_1):2\ln(-x)\le1$

$(I_2):\ln|2x-1|<0$

$(I_2):\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)\le0$

$(I_3):\ln(x^2-x+1)\ge\ln(2-x)$

ACTIVITÉ 4:

1°) Ecris le plus simplement possible :

$A=\ln21+2\ln14-3\ln0{,}25$

$B=\ln e^3-\ln e^2+\ln(2\sqrt{e})$

2°) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a- $\ln(x^2-4)=1$

b- $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(4+2x)$

c- $\ln(1+x)=\ln(x^2-4)$

d- $\ln|x-1|=\ln|2x-1|$

e- $\ln(x+1)+\ln(x-2)<2\ln(3-x)$

f- $\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$

g- $\ln|x-2|+\ln|x+4|\le3\ln2$.

3°) Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$S_1:\begin{cases}x+y=-2\\\ln x+\ln y=\ln15\end{cases}$; $S_2:\begin{cases}3\ln(1-x)+2\ln(x+1)=5\\\ln(1-x)+\ln(x+1)=3\end{cases}$

$S_3:\begin{cases}x^2+y^2=29\\\ln x+\ln y=\ln10\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 5:

f est une fonction définie sur $]-3;3[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

Etudie la parité de f.

ACTIVITE 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur

$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+2+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Démontre que le point $A(0;2)$ est un centre de symétrie de la courbe f.

ACTIVITE 7 :

Pour chacune des fonctions f données :

- Détermine le domaine de définition
- Etudie la continuité de f en x_0.
- Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriques les résultats :

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x} & ,si\ x\le 0 \\ f(x)=1+x\ln(1+x), si\ x>0 \end{cases}$; $x_0=0$

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=-2x+1+x\ln x\ , si\ x>0 \end{cases}$; $x_0=0$

$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}+x-2x\ln x\ , si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{x^2-1-2\ln\lvert x\rvert}, si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

ACTIVITE 8 :

Pour chacune des fonctions f suivantes , détermine :

- le domaine de dérivabilité
- La fonction dérivé f'.
- l'écriture de f' en fonction de la fonction u.

1°) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}+\ln x$; $u(x)=-2+\frac{3}{x+2}+\ln x$

2°) $f(x)=x\ln(-x-1)$; $u(x)=\ln(-x-1)+\frac{x}{x+1}$.

3°) $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$; $u(x)=x^2+2-2\ln x$

4°) $f(x)=\frac{x}{2}+2+\frac{\ln x}{x}$; $u(x)=x^2+2-2\ln x$

ACTIVITE 9:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité 2 cm

On considère la fonction U_m de la variable réelle x définie par : $U_m(x)=\frac{mx}{x+1}+\ln(1+x)$ où m est un paramètre réel, (C_m) la courbe représentative de U_m.

1°) Démontre que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont tu déterminera les coordonnées.

2°) Etudie les variations de U_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

ACTIVITE 10:

1°) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x+1$.

a- Etudie le sens de variation de g

b- Déduis-en le signe de g

2°) On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$, par : $f(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}$

a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et en 1

b- Dresse le tableau de variation de f.

c- Trace la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

ACTIVITE 11 :

1°) a- Soit v la fonction définie par : $v(x)=x^2-2x+3\ln(x-1)$

a- Etudie le sens de variation de v

b- Calcule $v(2)$ et déduis-en le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x

2°) On considère la fonction g définie par : $g(x)=x-3-\frac{2}{x-1}-\frac{3\ln(x-1)}{x-1}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$

a- Etudie les variations de g

b- Détermine que l'équation $g(x)=0$ admet deux solution α et β avec $\alpha<\beta$

c- Justifie que $\beta\in]4;5[$

3°) a- Justifions que les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $x=1$ et $y=x-3$ sont des asymptotes à la courbe de g.

b- Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ_2)

c- Trace la courbe $(\mathcal{C})$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 12 : cor. p :266

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-x+1-2\ln x$.

1°) a- Démontre que $\forall x\in]0;+\infty[, g'(x)=\dfrac{P(x)}{x}$ où P est un polynôme de degré 3 à déterminer.

b- Vérifie que $P(1)=0$ puis factorise P et détermine le signe de $P(x)$ suivant les valeur de x.

c- Etudie le sens de variation de g.

2°) Déduis-en de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

3°) a-Détermine la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b- Démontre que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x^2}=0$ puis déduis-en la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c- Justifie que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe (C).

4°) On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x+\ln x$.

a- Déterminons l'image de $]0;+\infty[$ par h.

b- Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet une solution α dans $]0;+\infty[$ puis démontre que $0{,}56<\alpha<0{,}57$.

c- Détermine la position de (C) par rapport à (Δ).

5°) Etudie le sens de variation de f.

6°) Déduis-en de la question 5°) l'existence d'une valeur unique β telle que : $f(\beta)=0$.

7°) Construis (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Prends $\beta\simeq 0{,}5$

8°) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} puis construis la courbe (C') de f^{-1} dans le repère que (C).

ACTIVITE 13 :

A) On considère la fonction g définie par :

$g(x)=1-x^2-\ln x$

1°) Calcule $g(1)$.

2°) Etudie les variations de g.

3°) Déduis-en de cette étude le signe de $g(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de D_g de la fonction g.

B) On considère la fonction f définie par :

$f(x)=2-x+\dfrac{\ln x}{x}$

1°) Précise l'ensemble de définition D_f de f 2°) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

3°) a- Justifie que la courbe représentative (C_f) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y=-x+2$.

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à (Δ) suivant les valeurs de x.

4°) Détermine les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (D).

5°) Représente dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la courbe (C_f) et les droites asymptotes.

ACTIVITE 14:

1°) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-1+x+2\ln x$

a- Etudie le sens de variation de g.

b- Calcule $g(1)$ puis détermine le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

c- Déduis-en que : si $0<x<1$, alors $g\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ et si $x>1$, alors, $g\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases}f(x)=x-x^2\ln x\ ;si\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ [unité graphique : 2 cm].

a- Démontre que f est dérivable à droite en zéro.

b- Calcule $f'(x)$ et vérifie que pour tout x strictement positif on a : $f'(x)=x\,g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Scanné avec CamScanner

c- Dresser le tableau de variation de f .

d- Prouve que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ exactement une solution α telle que : $\frac{7}{4}<\alpha<2$

3°) a - Vérifie que la tangente (Δ) à la courbe (C) au point O a pour équation $y=x$.

b- Etudie la position de (C) par rapport à (Δ)

c - Trace (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

ACTIVITE 15: cor. p :267

Partie A :

Soit h la fonction définie de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x-\ln(1+x)$

1°) Etudie les variations de h

2°) Démontre que $\forall x\in]-1;+\infty[,\ h(x)\geq 0$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases}\forall x\in]-\infty;-1] & , g(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x}\\ \forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[& , g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)\end{cases}$$

3°) Démontre que g admet en 0 un prolongement p par continuité que tu préciseras

4°) a- Etudie la continuité de g en -1.

b- Etudie la dérivabilité de g en -1. Interprète graphiquement ce résultat

Partie C :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases}f(x)=g(x), si\ x\in IR^*\\ f(0)=1\end{cases}$ et on désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J) avec $OI=1cm$ et $OJ=2cm$

5°) a- Démontre que $\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ puis déduis-en le sens de variation de f sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$

b- Calcule $f'(x)$ pour x élément de $]-\infty;-1[$ et déduis-en le signe de f' sur $]-\infty;-1[$.

c- Calcule les limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

d- Dresse le tableau de variation de f .

6°) a- Démontre que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique en $+\infty$.

b- Démontre que la droite (D) d'équation $y=x+5$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

7°) a- Précise les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe (OI).

b- Construis soigneusement $(\mathscr{C})$.

ACTIVITE 16: cor. p :270

On donne la fonction numérique définie par : $f(x)=-2x+\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de f .

2°) Prouve que f est impaire.

3°) Etudie les variations de f (limites aux bornes de D, dérivée, sens de variation et tableau de variation de f)

4°) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y=-2x$ est asymptote à la courbe (C) de f

5°) Trace (Δ) et (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

ACTIVITE 17:

Soit f une fonction définie par : $f(x)=(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1°) Détermine le domaine de définition de f et étudie la parité de f

2°) Justifie que f est prolongeable par continuité en -1 et en 1 puis définie le prolongement par continuité h de f en -1 et en 1

ACTIVITE 18:

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+e$

On note (C_g) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormée.

1°) Détermine les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour (C_g) ?

2°) Détermine, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3°) Résous dans (C_g) l'équation : $g(x)=e$:

4°) a- Calcule $g(1)$

b- Déduis-en, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, le signe de $g(x)$:

5°) Trace (C_g) en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

Scanné avec CamScanner

6/ Prouve que pour tout x de $J=[1;2]$, $|g'(x)|\leq 1$.

Déduis-en que : $\forall x\in J$, $|g(x)-e|\leq|x-1|$.

PARTIE B : Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+e(x-1)$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; I, J). (Unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

7°)Soit x appartenant à $]0;+\infty[$: Vérifie que : $f'(x)=g(x)$:

8°) Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$:

9°) Dresse le tableau de variations de f :

10°) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point I d'abscisse 1.

Précise la position de (C_f) par rapport à (T).

11°) Trace (T) et (C_f)

ACTIVITE 19 :

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x^2-x+1)$. (C) est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)(*unité graphique est le centimètre*).

On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

1°) Détermine l'ensemble de définition de f

2°) Détermine :

a- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis interprète graphique les résultats.

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3°) a-Démontre que pour tout réel non nul, $f'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+1)}{x^2(x^2-x+1)}$

b- Etudie le signe de $f'(x)$.

c- Dresse le tableau de variation de f.

4°) a- Démontre que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α.

b- Démontre que $-0,96<\alpha<-0,95$.

5°) a-Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b- Interprète graphiquement ces résultats.

6°) Soit g la restriction de f à $]-\infty;0[$.

a- Démontre que g est une bijection de $]-\infty;0[$ sur un intervalle K que tu préciseras.

b- Trace la courbe (C).

c- g^{-1} étant la bijection réciproque de g, Trace sa courbe représentative (C') dans le même repère que (C).

ACTIVITE 20: cor p :271

On donne la fonction numérique f e définie par : $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$ où ln désigne la fonction logarithme népérien et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité 1cm.

1°) Détermine le domaine de définition de D de f

2°) Vérifie que si x appartient à D alors :

$f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|$

3°)a- Pour x appartenant à D, calcule $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f

b-Déduis-en le sens de variation de f'

c- Calcule les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.

4°)a- Prouve que f' s'annule sur $]-\infty;3[$ pour une seule valeur α

b-Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1

5°) Etudie le signe de f' sur $]-\infty;3[$ et $]3;+\infty[$

6°) Dresse le tableau de variation de f

7°) Etudie les branches infinie à $(\mathcal{C})$

8°) Calcule les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de l'axe des abscisses.

9°) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ avec soin.

ACTIVITE 21 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d 'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1°)a- Démontre que l'ensemble de définition de f est $D=]1;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

b- Démontre que pour tout x élément de D :
$f(x)=\ln(x-1)-2\ln x$

2°) Calcule les limites de f aux bornes de D.

3°) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur D.
Démontre que, pour tout x élément de D :
$$f'(x)=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

4°)a- Dresse le tableau des variations de f.

b- Prouve que f admet un maximum que tu préciseras.

c- Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5°) a- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

b- Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

6°) Démontre que l'équation : $f(x)=-4$ admet dans D deux solutions.

7°) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) en son point d'abscisse 3.

8°) Trace (C_f).

ACTIVITE 22 :

I. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$g(x)=1+x+\ln x$.

1°) Dresse le tableau de variation de g.

2°) Prouve qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x)=0$. Vérifie que α appartient à $]0{,}2:0{,}3[$.

3°) Déduis-en le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4°) Etablie la relation $\ln(\alpha)=-1-\alpha$

II. On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1+x}, si\ x>0\\ 0 \quad , si\ x=0\end{cases}$$

5°) Justifie que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$

6°) Étudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement ce résultat.

7°) Détermine la limite de f en $+\infty$.

8°) Démontre que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$,
$$f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$

9°) Prouve que $f(\alpha)=-\alpha$

10°) Dresse le tableau de variations de la fonction f.

11°) Représente la courbe (C_f) de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 2cm. Prendre $\alpha=0{,}3$.

ACTIVITE 23 : cor. p :272

On considère les fonctions f et g définies par :
$f(x)=x\ln|x-1|$ et $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\ln|x-1|$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité 2 cm).

1°) a- Etudie les variations de g.

b- Calcule $g(0)$ et déduis-en le signe de $g(x)$.

2°) a- Etudie les variations de f.

b- Etudie les branches infinies de $(\mathscr{C})$

c- Démontre que $(\mathscr{C})$ admet un point d'inflexion A dont tu préciseras les coordonnées

d- Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en A.

e- Trace (T) et $(\mathscr{C})$

3°) Soit h l'application définie par : $h:]1;+\infty[\to\mathbb{R}$
$x\mapsto h(x)=f(x)$

a- Justifie que h est bijective

b- Calcule $h(1+e)$ puis déduis-en $\left(h^{-1}\right)'(1+e)$.

c- Trace dans le même repère que $(\mathscr{C})$, la courbe (C') de h^{-1}.

ACTIVITE 24 :

Soit f_m la fonction de variable réelle telle que :
$$\begin{cases}f_m(x)=x\left(-1+\ln|x|\right)^2+mx \quad , si\ x\neq 0\\ f_m(0)=0\end{cases}$$
m étant un paramètre réel.

1°) a- Calcule $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f_m sur $\mathbb{R}$

2°) Prouve que f_m est une fonction impaire et étudie les variations de f_m sur $\mathbb{R}_+$

3°) On suppose pour la suite $m=1$ et on pose $f=f_1$.
(C) est la courbe représentative de f.

a- Discute le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite $y=tx$ $(t\in\mathbb{R})$ suivant les valeurs de t.

b- Forme les équations des tangentes à (C) passant par 0 et précise les coordonnées des points de contacts.

4°) Construis (C).

Scanné avec CamScanner

5°) Justifions que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble I que tu préciseras.

Etudie la dérivabilité de f^{-1}.

6°) Construis $(C_{f^{-1}})$.

ACTIVITE 25 : cor. p :273

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2} & ,si\ x>0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$

I-

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$

1°) a- Etudie le sens de variation de g.

b- Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

c-Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

2°) Démontre que pour tout $x\in[2;3]$ on a : $g(x)<\frac{1}{2}$.

3°) a- Détermine $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ tu pourras poser $x=\frac{1}{t}$.

b- Démontre que f est continue en 0.

4°) Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

5°) Etudie le sens de variation de f. (Tu vérifieras que $f'(x)=g(x)$)

6°) a- Démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$

(Tu pourras utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$)

b- Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c-Démontre que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

7°) Trace dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, la droite (Δ), la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y=x$.

8°) a- Démontre que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b- Trace dans le même repère précédent la courbe (C') de f^{-1}.

c-Démontre que le point $A'(1+\ln 4;2)$ appartient (C').

d-Calcule $\left(f^{-1}\right)'(1+\ln 4)$.

II-

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2;3]$

9°) Soit h la fonction définie sur I par : $h(x)=f(x)-x$

a- Démontre que pour tout x élément de I, $h'(x)<0$

b- Déduis-en le sens de variation de h.

c- Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans I que l'on note α.

10°) a- Démontre que pour tout x de I, $0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

b- En déduis que pour tout x de I, $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

11°) Démontre que $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2-\alpha-2}$

ACTIVITE 26 : cor. p :276

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1+\ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm)

1°) a- Justifie que le domaine de définition de f est : $D=]-2;0[\cup]0;+\infty[$

b- Etudie les limites de f aux bornes de D.

2°) a- Justifie que f est dérivable en tout nombre réel x de D et que l'on a : $f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{x(x+2)}$

b- Déduis-en le sens de variation de f.

c- Dresse le tableau de variation de f.

d- Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre notée α. Vérifie ensuite que $0,5<\alpha<0,6$.

e- Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse -1.

3°) On considère la fonction g définie sur $]-2;0[$ par : $g(x)=2x+\ln\left(\frac{-x}{x+2}\right)+2$

a- Etudie le sens de variation de g.

Scanné avec CamScanner

b- Calcule $g(-1)$. Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $]-2\,;0[$.

c- Précise la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur l'intervalle $]-2\,;0[$.

4°) a- Etudie les branches infinies de (C)

b- Etudie sur $]0\,;+\infty[$, la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y=x+1$.

c- Trace (C), (Δ) et (T) sur la même figure.

5°) On pose $J=f(]-2\,;0[)$ et on considère la fonction h définie par :

$$h:]-2\,;0[\to J$$
$$x\mapsto f(x)$$

a- Détermine J

b- Démontre que h est une bijection. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa courbe représentative.

c- Démontre que h^{-1} est dérivable sur J.

d- Dresse le tableau de variation de h^{-1}. Déduis-en que la courbe (C') admet deux asymptotes dont tu préciseras les équations. Trace (C') dans la figure précédente.

ACTIVITE 27 : cor. p :278

On donne la fonction numérique f suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\ln x} & ,si\ x\in\ ]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\\ 0 & ,si\ x=0\\ 1 & ,si\ x=1\end{cases}$$

et on désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Partie A :

On considère la fonction g définie par : $g(x)=-x+1+x\ln x$ pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1°) Etudie les variation de g

2°) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Partie B :

3°) Détermine l'ensemble de définition de f.

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) a- En posant $X=x-1$, démontre que : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{X-\ln(X+1)}{X\ln(X+1)}$

b- Détermine le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $X\mapsto\ln(X+1)$

c- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1.

6°) a- Démontre que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$, $\forall x\in\ ]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

b- Etudie les variations de f.

7°) a- Etudie les branches infinies de (C_f).

b- Trace la courbe représentative de f puis déduis-en celle de $-f$

ACTIVITE 28 : cor. p :280

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases}f(x)=(x-2)^2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) & ,si\ x\neq 2\\ f(2)=0\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\vec{j})$ unité 1 cm

1°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f.

b- Calcule les limites de f aux bornes de D

c- Justifie que f est continue sur chaque intervalles de D.

d- Etudie la dérivabilité de f à droite en 2, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

2°) On considère la fonction g définie par : $g(x)=2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)-\dfrac{1}{x-1}$

a- Etudie les variations de g.

b- Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $0{,}6<\alpha<0{,}61$.

c- Déduis-en le signe de $g(x)$.

3°) a- Justifie que f est dérivable sur chaque intervalle de D et que $\forall x\in D-\{2\},\ f'(x)=(x-2)g(x)$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Démontre que $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$ puis déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$ avec deux nombres décimaux d'ordre deux.

4°) a- Donne le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h\mapsto\ln(1+h)$.

b- Démontre que la droite (D) : $y=x-\dfrac{5}{2}$ est asymptote à (C) (tu pourra poser $h=\dfrac{1}{x-2}$)

Scanné avec CamScanner

c- Construis (C). (Prends $\alpha = 0{,}6$)

5°) Soit l'application $k : [2;+\infty[\to IR_+$

$x \mapsto k(x) = f(x)$

a- Justifie que k est bijective

b- Etudie la dérivabilité de k^{-1}, réciproque de k.

On note (C') la courbe représentative de k^{-1}.

c- Justifie que le point $A(\ln 2;3)$ appartient à (C') puis donne une équation de la tangente à (C') puis donne une équation cartésienne de la tangente à (C') au point A.

d- Construis (C') dans le même que (C)

ACTIVITE 29 :

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)\ln x$.

1°) Etudie les variations de g.

2°) Déduis-en que $\forall x \in]0;+\infty[$, on a : $g(x) \geq 1$

II- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

3°) a- Vérifie que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ et étudie les variations de f.

b- Déduis-en que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que tu préciseras.

4°) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité : 2 cm).

a- Ecris une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b- Etudie le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$

Déduis-en le signe de $h(x)$.

c- Prouve que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) - x = (-1 + \ln x)h(x)$ Déduis-en la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T).

5°) a- Trace la courbe (C).

b- Trace, dans le même repère, la courbe (C') représentative de la fonction f^{-1}

ACTIVITE 30 :

Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{\ln|x|} \text{ , si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1°) a- Justifie que h est bien définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

b- Pourquoi suffira-t-il d'étudier h sur $D_E = [0;1[\cup]1;+\infty[$

2°) Etudie la continuité et la dérivabilité de h en 0.

3°) a- Détermine la fonction dérivée de h.

b- Justifie que le tableau de signe de $h'(x)$ sur D_E se présente comme suit :

x	0		1		e		$+\infty$
$h'(x)$	0	−	‖	−	0	+	

4°) a- Calcule les limites aux bornes du domaine d'étude D_E.

5°) Présente le tableau de variation de h.

6°) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de h dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

a- Etudie les branches infinies à $(\mathcal{C})$

b- Détermine l'équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

c- Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) (Tu pourras utiliser le tableau de variation)

d- Construis $(\mathcal{C})$ sur le domaine de définition de h soigneusement.

ACTIVITE 31 : cor. p :283

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1°) a-Justifie que g est continue à droite en 0.

b- Calcule les limites en $+\infty$ de g et de $\dfrac{g(x)}{x}$. Interprète graphiquement ces résultats.

2°) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

3°) a- Justifie que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$.

b- Etudie avec soin le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variation g.

4°) a- Démontre que sur $[0;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2{,}1$.

b- Déduis-en le signe de $g(x)$.

c- Prouve que $\ln(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Partie B :

Scanné avec CamScanner

Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x\ln x}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 4cm.

5°) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis précise les éventuelles asymptotes à (C_f).

6°) a-Justifie que $\forall x\in\ ]0;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x\ln x)^2}$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation

c- Vérifie que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.

7°) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.

8°) Construis (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha)=0{,}29$

Partie C :

Soit h la restriction de f à $]0;\alpha]$

9°) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu donneras l'ensemble de définition

10°) a- Prouve que h^{-1} n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$

b-Démontre que la tangente (D) à la courbe (Γ) de h^{-1} au point J est parallèle à la droite (T).

11°) a- Précise l'asymptote à la courbe (Γ) de h^{-1}

b- Trace dans le plan, la droite (D), la demi-tangente à (Γ) au point d'abscisse $\dfrac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et la courbe (Γ).

ACTIVITE 32: cor p : 285 (extrait bac série D Sénégal)

I/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$.

1°) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Détermine la dérivée de f, étudie son signe et dresse le tableau de variation de f.

3°) Prouve que l'équation $f(x)=1$ admet une solution et une seule $\alpha\in\mathbb{R}$ puis déduis que $3<\alpha<4$.

II/ Soit la fonction g est définie par : $g(x)=\dfrac{3(\ln|x|-1)^2}{3\ln^2|x|+1}$.

4°) a- Prouve que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b- Démontre que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.

c- Etudie la parité de g.

d- On note $D_E=]0;+\infty[$.

Soit k la restriction de g à D_E.

Calcule les limites de k aux bornes de D_E. Etudie les branches infinies.

5°) a- En utilisant les questions I/ et II/ 4°) b- Calcule $k'(x)$ et étudie le sens de variations de k sur D_E et dresse son tableau de variation sur D_E.

b- Détermine le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et précise le signe de k.

6°) a- Démontre que k réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Construis les courbes $(\mathcal{C}_k)$ et $(\mathcal{C}_k^{-1})$; $(\mathcal{C}_k^{-1})$ es la courbe représentative de la bijection réciproque k^{-1} de k dans un repère orthonormé ; unité graphique : 1 cm. Trace la courbe de g dans le repère précédent.

ACTIVITE 33 :

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$ où a, b et c sont trois réels. Détermine a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ passe par les points $A(1;2)$; $B(e;0)$ et $C(e^3;2)$.

ACTIVITE 34 :

On donne la fonction numérique suivante :

$$f(x)=\begin{cases}(\ln x)^2-2\ln x+3, & si\ x>0\\ 0, & si\ x=0\end{cases}$$

1°) a-Détermine le domaine de définition de f.

b- Etudie la continuité de f en 0.

2°) Etudie les variations de f et trace sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

6. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES

ACTIVITE 1 : cor. p : 287

Détermine le domaine de définition et la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$1-f_1(x)=\ln(e^x-1)$; $2-f_2(x)=\dfrac{e^{2x}-3e^x+3}{e^{2x}-3e^x+2}$;

$3-f_3(x)=\ln(e^{2x}-e^x+3)$

$4-f_4(x)=e^{x^2+2x-1}$

$5-f_5(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

$6-f_6(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$7-f_7(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$8-f_8(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$

$9-f_9(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

$9-f_{10}(x)=(1+\ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}$.

ACTIVITE 2:

Détermine l'ensemble de définition de f

a-) $f(x)=e^{x^2-1}$; b-) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; c-) $f(x)=\dfrac{3x}{e^x+1}$; d-) $f(x)=\dfrac{5}{e^x-1}$; e-) $f(x)=\ln(e^x-2)$; f-) $f(x=\sqrt{e^x-3}$; g-) $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-2}$; h-) $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; i-)

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(e^x-2)}$

ACTIVITE 3:

Calcule les limites suivantes :

$K_1=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $K_2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;

$K_3=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$; $K_4=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$;

$K_5=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}$; $K_6=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1+\ln x)}-1}{x-1}$;

$K_7=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right)-x\right]$; $K_8=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-2x}$;

$K_9=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}}{x-1}\right]$; $K_{10}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^{\sin x}-\cos x}{x}\right]$;

$K_{11}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-\ln(3x)+x\right)$

$K_{12}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+(x+1)e^{-x}\right]$

$K_{13}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x+\dfrac{x+1}{e^{2x}}\right)$

$K_{14}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{2x}-2xe^{2x}\right)$; $K_{15}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}\right]}{x}$;

$K_{16}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(1-e^{-x}\right)\ln x$; $K_{17}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} xe^{\frac{1}{x}-1}$;

$K_{18}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x+x^2}$; $K_{19}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} xe^{\frac{1}{x}-1}$

ACTIVITE 4: Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=xe^x-e^{-x}$; $f(x)=\left(e^x\right)^2$; $f(x)=\sqrt{e^x-1}$;

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ $f(x)=e^x+e^{-x}$.

ACTIVITE 5 :

A°) Détermine une primitive de la fonction f. Tu préciseras l'ensemble de définition de la fonction f et de la primitive F trouvée.

$1-f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $2-f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$; $3-f(x)=\dfrac{e^{\ln x^2}}{x}$;

$4-f(x)=\dfrac{6}{(x+1)^2}e^{\frac{x+3}{x+1}}$

Scanné avec CamScanner

$5-f(x)=\dfrac{2e^{5x}-4}{e^{3x}}$; $6-f(x)=\dfrac{e^{2x}+3e^{x}-5}{e^{x}}$;

$7-f(x)=\dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$

B°) Dans chacun des cas suivants détermine les réels a et b de façon que la fonction F soit une primitive de la fonction f.

1) $F(x)=(ax+b)e^{2x}$; $f(x)=\left(\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{7}\right)e^{2x}$

2) $F(x)=(ax^2+b)e^{x^2}$; $f(x)=(2x^2+6x+1)e^{x^2}$

ACTIVITE 6:

Pour chacune des fonctions f données :

- Détermine le domaine de définition
- Etudie la continuité de f en x_0.
- Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriques les résultats :

$$f(x)=\begin{cases}-x+2\ln(x+1), si\ x\in\left]-1;0\right[\\ x-1+e^{-x} \quad , si\ x\in[0;+\infty[\end{cases}, x_0=0;$$

$$\begin{cases}f(x)=xe^{\frac{1}{x}} \quad , si\ x>0\\ f(0)=0 \quad , x_0=0;\\ f(x)=-x\ln|x|, si\ x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x)=2x\ln(-x) \quad , si\ x<0\\ f(x)=x+\sqrt{x^2+x}, si\ x\geq 0\end{cases}, x_0=0;$$

$$\begin{cases}f(x)=-x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x}{x^2+1}, si\ x\in\left]-\infty;1\right]\\ f(x)=(x-1)e^{-x+1} \quad , si\ x\in\left]1;+\infty\right[\end{cases}, x_0=1.$$

$$\begin{cases}f(x)=e^x-x-2 \quad , si\ x\leq 0\\ f(x)=x-1-x^2\ln x, si\ x>0\end{cases}, x_0=0;$$

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{e^x-e^{2x}} \quad , si\ x\leq 0\\ f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), si\ x>0\end{cases}; x_0=0.$$

$$\begin{cases}f(x)=-x+e^{\frac{x}{2}}+3, si\ x<0\\ f(x)=2x^2e^{\frac{x}{2}}-2, si\ x\geq 0\end{cases}; x_0=0$$

$$\begin{cases}f(x)=x\ln(-x)+1, si\ x<0\\ f(x)=x+1+xe^x \quad , si\ x\geq 0\end{cases}; x_0=0$$

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x\ln(-x)}{x-1} \quad , si\ x<0\\ f(x)=e^{-x}-x-1, si\ x\geq 0\end{cases}; x_0=0$$

$$\begin{cases}f(x)=(x-2)e^{x-1}-x+2, si\ x\leq 1\\ f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2} \quad , si\ x>1\end{cases}, x_0=1$$

$$\begin{cases}f(x)=-\dfrac{\ln(-x)}{x+1}-3+e^{-1}, si\ x<-1\\ f(x)=3x+1-xe^x \quad , si\ x\geq -1\end{cases}; x_0=-1$$

$$\begin{cases}f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}; si\ x\neq 0\ et\ si\ x\neq 1\\ f(0)=1\\ f(1)=0\end{cases}; x_0=0 \text{ et } x_0=1$$

$$\begin{cases}f(x)=\ln\left(-x^3+3x+3\right), si\ x\leq 0\\ f(x)=xe^x-x+\ln 3 \quad , si\ x>0\end{cases}; x_0=0$$

$$\begin{cases}f(x)=(1+\ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}; si\ x\in\left]0;\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[\\ f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0\end{cases}; x_0=\frac{1}{e}$$

ACTIVITE 7 :

Pour chaçune des fonction f suivantes, détermine la dérivée f' de f puis écris $f'(x)$ en fonction de $u(x)$:

1°) $f(x)=x^2(1-\ln x)+1+h(x)$; $u(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x$

2°) $f(x)=\dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$; $u(x)=-x^3-x^2-2x+2$

3°) $f(x)=x^2+x+1+\ln(x+1)$; $u(x)=\dfrac{2x^3+3x+2}{x+1}$

4°) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$; $u(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$

5°) $f(x)=\dfrac{2\ln(x-1)}{x^2-x}$; $u(x)=\dfrac{x}{2x-1}-\ln(x-1)$

6°) $f(x)=x+(x+1)e^{-x}$; $u(x)=e^x-x$

7°) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$; $u(x)=(-x+2)e^x-1$

8°) $f(x)=e^x+x(-1+\ln x)$; $u(x)=e^x+\ln x$

ACTIVITE 8:

Etudie les Variations et trace la courbe des fonctions suivantes:

Scanné avec CamScanner

$f(x)=x-e^x$; $f(x)=e^{x^2-x}$; $f(x)=e^x+e^{-x}$;

$f(x)=x+\ln(2-e^x)$; $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-2}}-1$; $f(x)=e^{-x^2}$;

$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$;

$f(x)=e^{-x}+x-1$; $f(x)=\sqrt{x+1}e^{-x}$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$;

$f(x)=e^{|x|}$; $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$; $f(x)=xe^{x-1}+1$.

ACTIVITE 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2e^{-x}+x-2$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 4 cm)

1°) a- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et vérifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2°) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2e^{-x}+1>0$

b- Etudie les variations de f.

c- Prouve que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont l'une est nulle . On notera α l'autre solution et tu vérifieras que $1,5<\alpha<1,6$.

3°)a- Prouve que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) d'équation : $y=x-2$ au voisinage de $+\infty$.

b- Précise la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

4°) a- Donne une équation cartésienne de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ à l'origine O.

b- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=2e^{-x}+2x-2$. Etudie le sens de variation de g et déduis-en le signe de $g(x)$.

c- Déduis-en la position de $(\mathscr{C})$ par rapport T.

5°) Trace (Δ), T et $(\mathscr{C})$

ACTIVITE 10 :

Etudie et représente graphiquement la fonction g dans chacun des cas.

1°) $g(x)=\dfrac{1}{x}e^x$; 2°) $g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

3°) $g(x)=\ln(e^{2x}-e^x+3)$; 4°) $g(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$;

5°) $g(x)=\dfrac{e^x}{|x-1|}$

ACTIVITE 11 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

(E_1) : $\ln(5x-3)=2$

(E_2) : $2(\ln x)^2+3(\ln x)-2=0$

(I_1) : $\ln^2 x+\ln x-6>0$

(E_1) : $e^x=-2$

(E_3) : $e^{2-7x}=12$

(E_4) : $e^{2x}=5e^x+24$

(E_5) : $5e^{4x}-13e^{2x}-6=0$

(I_2) : $e^{2x-3}-2\geq 0$

(I_3) : $e^{2x}+2e^{-x}\leq 0$

(I_4) : $e^{2x}+e^x-2<0$

ACTIVITE 12:

1°) Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$ telle que

$g(x)=\dfrac{x+1-e^x}{x(e^x-1)}$

2°) Etablie le développement limité de la fonction $x\mapsto e^x$ à l'ordre 3 en 0.

3°) Démontre que g admet un prolongement par continuité en 0, le définie et le noté h. Démontre que h est dérivable en 0.

ACTIVITE 13 :

A. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=-1+xe^x$.

1°) Etudie les variations de g.

2°) a- Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $]0,5;0,6[$.

b- Déduis-en le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0;\alpha[$ puis $]\alpha;+\infty[$.

B. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x-\ln x-2$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ où l'unité est 4 cm.

3°) Calcule la limite de f en 0.

4°) En remarquant que $f(x)=x\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}\right)$, calcule la limite de f en $+\infty$, précise la branche infinie de $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

5°) a- Calculer $f'(x)$ et vérifie que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ (f' est la dérivée de f) (où

Scanné avec CamScanner

b- En utilisant A 2°)b- dresse le tableau de variation de f.

6°) a- Démontre que : $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

7°) Trace $(\mathscr{C})$,tu prendras $\alpha=0{,}55$.

8°) a- Démontre que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=e^x-x\ln x-x$ est une primitive de f.

ACTIVITE 14 : cor. p : 287

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-1+\dfrac{x-1}{x+1}e^x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) a- Détermine le domaine de définition D de f.

b- Calcule les limites de f aux bornes de D.

2°) a- Prouve que pour tout $x\in$ D, $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$.

b- Donne le tableau de variation de f.

3°) a- Prouve que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-1;+\infty[$ une unique solution α et que $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

b- Vérifie que : $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha)=0$.

4°) a- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat.

b- Trace la courbe (C).

ACTIVITE 15 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ l'unité graphique étant 2 cm.

1°) a- Soit $X=\dfrac{2}{x-1}$. Prouve l'égalité : $\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\dfrac{e}{2}X^2e^X$.

Déduis-en la limite de f quand x tend vers 1.

b- Détermine la limite de f en $-\infty$.

c- déduis-en une asymptote à la courbe (Γ).

2°) a- Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty;1[$ par : $v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Calcule $v'(x)$.

b-Démontre que $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-2)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

3°) Étudie les variations de f.

4°) Trace la courbe (Γ).

ACTIVITE 16 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ où ln désigne le logarithme népérien.

Partie A :

1°) Précise le domaine de définition E de f et Calcule les limites de f aux bornes de E.

2°) Prouve que pour tout x de E, $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ et déduis-en les variations de f.

3°) Etudie la parité de f et donne une interprétation géométrique.

4°) Justifie que l'équation $f(x)=0$ admet en plus de la solution nulle, deux autres solutions a et b telles que $a<0<b$.

5°) a- Prouve que $1<b<2$ et donne une valeur approchée de b à 10^{-1} près.

b- Déduis-en une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|e^x$ et soit sa $(\mathscr{C})$ courbe

6°) Etudie la dérivabilité de g en $x=1$.

7°) a- Démontre que pour tout x de E : $g(x)=e^{f(x)}$.

b- Résous l'équation $g(x)=1$.

8°) Etudie les variations de g.

9°) Etudie les branches infinies de $(\mathscr{C})$.

10°) Démontre que g réalise une bijection h de $]-\infty;-1[$ sur un intervalle J à préciser et dresse le tableau de variation de h^{-1} réciproque de h.

11°) Construis dans le même repère, la courbe $(\mathscr{C})$ de g et la courbe $(\mathscr{C}')$ de h^{-1}

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 17 : cor p : 288

On considère la fonction g à variable réelle définie par :

$\begin{cases} g(x) = -x + x\ln x & , si\ x > 0 \\ g(x) = xe^{1-x^2} & , si\ x \le 0 \end{cases}$ et on désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1°) a- Justifie que g est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0. Puis précise les équations des tangentes ou demi-tangentes éventuelles au point O (origine du repère)

2°) a- Calcule $g'(x)$ pour tout nombre x de son ensemble de dérivabilité E.

b- Etudie suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$. Déduis-en le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

c- Calcule les limites de g au borne de $\mathbb{R}$.

3°) a- Etudie les branche infinie à (C_g)

b- Construis la courbe (C_g), de même que ses demis-tangentes à l'origine.

ACTIVITE 18 : cor. p : 289

Partie A :

On considère l'application g de [0 ; +∞[dans $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1°) a- Détermine la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b- Calcule la dérivée de g et donne son tableau de variations.

2°) Prouve que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β et que $1,9 < \beta < 2$.

3°) Précise le signe de g sur $[0;+\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & , si\ x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & , si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, avec $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$;

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) Justifie que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

6°) Calcule la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.

7°) Calcule $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable et donne une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$.

8°) Etablie que $f(\beta) = \dfrac{2\beta}{\beta^2+1}$ et déduis-en un encadrement de $f(\beta)$.

9°) Donne le tableau de variations de f et tracer la courbe (Γ). (On prendra $\beta \simeq 1,95$ et $f(\beta) \simeq 0,85$).

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

10°) Justifie que h est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J à préciser.

11°) Représente (Γ'), la courbe représentative de h^{-1}, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ACTIVITE 19 : cor. p : 291

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

PARTIE A :

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x+1-x\ln(-x)$ et $v(x) = -x+1-\ln x$.

1°) a- Détermine l'ensemble de définition E de u.

b- Calcule $u'(x)$ pour $x \in E$.

c-Etudie le signe de $u'(x)$.

2°) a- Achève l'étude des variations de u.

b- Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

3°) a-Calcule $v'(x)$ pour x élément de $]0;+\infty[$.

b- Déduis-en le sens de variation de v.

c- Calcule $v(1)$ et déduis-en le signe de $v(x)$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2\ln(-x) + \dfrac{3}{4}x^2 + x & , si\ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{\ln x}{x}} & , si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan

4°) a- Etudie la continuité de f en 0

Scanné avec CamScanner

b- Etudie la dérivabilité de f en 0.

c- Interprète géométriquement les résultats de l'étude de la dérivabilité. (Tu préciseras les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en $x=0$).

d-Que représente l'origine O du repère pour la courbe (C) ?

5°) a- Précise le domaine de dérivabilité de f et calcule $f'(x)$.

b- Utilise les résultats des questions 2°)b- et 3°)c- pour étudier le signe de $f'(x)$

c- Achève l'étudie des variations de f.

6°) a- Etudie les branches infinies de la courbe (C)

b- Démontre que le point I de (C) d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C).

c- Construis (C)

ACTIVITE 20 : cor. p : 292

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)e^{x} & ,si\ x<1\\ x-1+\ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right) & ,si\ x\geq 1\end{cases}$$; on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1°) Prouve que f est continue en $x_0=1$.

2°) a-Vérifie que pour tout $x>1$;

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1+\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x-1}$$

b- Démontre que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$.

c- Etudie la dérivabilité de f en $x_0=1$ puis interprète géométriquement le résultat.

3°) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4°) a- Etablie le sens de variation de f sur son domaine de définition.

b- Dresse le tableau de variations de f.

5°) On pose $\varphi(x)=f(x)-x+1-\ln 2$

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Que signifie ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$?

6°) Trace les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0=1$, l'asymptote et la courbe $(\mathcal{C})$.

ACTIVITE 21 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & ,si\ x>0\\ (x+2)e^{\frac{1}{x}} & ,si\ x<0\\ 0 & ,si\ x=0\end{cases}$$; et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

I -

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{-2}{1+x^2}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

1°) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations.

2°) Prouve que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $0,5<\alpha<0,6$

3°) Déduis-en le signe de g sur $]0;+\infty[$.

II -

4°) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites aux bornes de celui -ci.

5°) a- Etudie la continuité de f en 0,

b- Etudie la dérivabilité de f en 0, puis Interprète graphiquement les résultats.

6°) Etudie les branches infinies de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

7°) a- Démontre que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=g(x)$.

b- Etudie le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f.

c- Etablie que $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$

8°) Soit $I=]-\infty;-1[$.

Justifie que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

9°) Construis dans le repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, la courbe $(\mathcal{C})$. (Tu prendras $\alpha=0,5$; unité = 2cm)

ACTIVITE 22 : cor. p : 293

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x-3}{\ln(-x+2)}+1 & ,si\ x<2\\ f(x)=x-1+(x-2)e^{-x+2} & ,si\ x\geq 2\end{cases}$$ et la fonction numérique v définie $]-\infty;2[$ par :

Scanné avec CamScanner

$v(x)=\ln(-x+2)-\dfrac{x-3}{x-2}$. (C) = courbe de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1°) a- Etudie les variations de v sur $]-\infty;2[$.

b- Démontre que l'équation $v(x)=0$ admet une solution unique α telle que : $-1,6<\alpha<-1,5$

c- Déduis-en le signe de v sur $]-\infty;2[$.

2°) a- Justifie que l'ensemble de définition D de f est : $D=\mathbb{R}-\{1\}$.

b- Etudie la continuité et dérivabilité de f en 2 puis interprète géométriquement les résultats de la dérivabilité.

3°) a- Calcule les limites de f aux bornes de D

b- Achève l'étude de la variation de f.

4°) a- Démontre que : $f(\alpha)=\alpha-1$ puis calcule la valeur approchée de $f(\alpha)$.

b- Démontre que la droite (Δ) d'équation : $y=x-1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c- Construis avec soin la courbe (C).

5°) Soit la fonction $g:[2;+\infty[\to f([2;+\infty[)$
$x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Démontre que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1}.

b- Construis dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}.

ACTIVITE 23 : cor. p :295

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{-x-1} & ;si\ x\le -1 \\ f(x)=-1+\sin(\pi x) & ;si\ -1<x<1 \\ f(x)=\ln x-\exp(1-x) & ;si\ x\ge 1 \end{cases}$$; et on désigne par

$(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité 2 cm.

1°) Détermine le domaine de définition de la fonction f

2°) Etudie la continuité de f en -1 et en 1.

3°) a- Etudie la dérivabilité de f en -1 puis interprète les résultats obtenus.

b- Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète les résultats obtenus

4°) Calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.

5°) Dresse le tableau de variation de f.

6°) Soit l'intervalle $J=\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ et l'application :

$h:J\to f(J)$
$x\mapsto h(x)=f(x)$

a- Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1}.

b- Détermine le domaine V de dérivabilité de la bijection réciproque h^{-1}.

c- Calcule $\left(h^{-1}\right)'(x)$, pour tout x élément de V.

7°) On considère la fonction k définie sur $[1;+\infty[$ par $k(x)=x\ln x$.

a- Calcule $k'(x)$

b- Déduis-en la primitive K, sur $[1;+\infty[$, de la fonction f qui s'annule en 1.

8°) Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

9°) Construis la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

ACTIVITE 24 : cor. p : 298

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-\ln x} & ,si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$ et on désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni à un repère orthogonal (O ; I, J) unité : OI=2cm et OJ = 4cm.

1°) Soient u et v deux fonctions définies par :

$u(x)=e^x-x-1$ et $v(x)=-x+1+\ln x$

a- Etudie les variations des fonctions u et v

b- Déduis-en que : $\forall x\in]0;+\infty[$, $e^x\ge x+1$ et $\ln x\le x-1$, puis $e^x-\ln x\ge 2$.

2°) a- Démonte que le domaine de définition D de f est $D=[0;+\infty[$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3°) Détermine la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

4°) On désigne par g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-\ln x-xe^x+1$

a- Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

b- Démontre que l'équation : $g(x)=0$ admet une unique solution α et justifie que $1,23\le\alpha\le 1,24$

c- Etudie le signe de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4°) a- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5°) a- Démontre que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha e^{\alpha}-1}$

Scanné avec CamScanner

b- Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ puis déduis que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,01 près.

c- Construis dans le carré de coté 10, la courbe (Γ).

ACTIVITE 25 :

On donne la fonction numérique g de variable réelle x définie par : $\begin{cases} g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right), si\ x<0 \\ g(x)=xe^{1-x} \quad , si\ x\geq 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) a- Prouve que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0.

c- Etudie le sens de variations de la fonction.

2°) a- Achève l'étude des variations de la fonction g.

b- Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$

c- Construis $(\mathcal{C})$

ACTIVITE 26 :

Partie A : soit la fonction h définie par :

$h(x)=\dfrac{1}{e}-e^{-x}+\ln x$

1°) a- Donne l'ensemble de définition D de h.

b- Calcule $h(1)$.

2°) Etudie les variations de h.

3°) a- Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet dans D une solution unique dont tu préciseras.

b- Déduis-en le signe de $h(x)$.

Partie B : Soit la fonction g définie par :

$\begin{cases} g(x)=1-x+\dfrac{1}{e}x+e^{-x}+x\ln x\ , si\ x>0 \\ g(0)=2 \end{cases}$

4°) a- Démontre que g est continue à droite au point $x_0=0$

b- Etudie la dérivabilité de g à droite au point $x_0=0$.

5°) a- Etudie les variations de g.

b- Etudie les branches infinies de la courbe (C) de g.

c- Construis la courbe (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=2\,cm$.

ACTIVITE 27 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie, par : $f(x)=xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

1°) Détermine le domaine de définition D de f et prouve que $\forall x\in D\setminus\{0\},\ f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

2°) Déduis-en une relation entre $f(x)$ et $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et démontre que si α est un zéro de $f'(x)$ alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi un zéro de $f'(x)$.

3°) a-Démontre que l'on a : $\forall x\in D$,

$f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}}g(x)$; g étant une fonction polynôme que tu détermineras.

b- Démontre que :

$x^4-2x^3-2x^2-2x+1=x^2\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4\right]$ et résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$. Déduis-en le signe de $f'(x)$.

4°) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} h(x)=f(x)\ \ si\ x\in D \\ h(-1)=h(1)=0 \end{cases}$

a- Démontre que h est continue à gauche en 1 et en -1.

b- Etablie que : $\forall x\in D$,

$\dfrac{h(x)}{x-1}=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)e^{\frac{2x}{x^2-1}}$ et calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{h(x)}{x-1}$

.Déduis-en que h est dérivable à gauche en 1. h est-elle dérivable à gauche en -1 ?

5°) a- On définit la fonction F sur $D\setminus\{0\}$ par :

$F(x)=\dfrac{e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}-1}{\dfrac{2x}{x^2-1}}$.

Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

b- Exprime $f(x)-x$ en fonction de $F(x)$ et calcule $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$.

6°) Etudie les variations de la fonction h définie à la question 4°). Trace sa courbe représentative (C) relativement à un repère orthonormé. On précisera la tangente à (C) à l'origine. (On ne demande pas de déterminer le point d'inflexion de (C), et on prendra pour l'un des zéros de $f'(x)$ la valeur approchée 2,9)

Scanné avec CamScanner

7. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

ACTIVITE 1 : cor. p : 301

1°) Démontre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = n+\sqrt{2}$.

2°) Calcule $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

ACTIVITE 2:

1°) Résous dans IR les équations et inéquations suivantes :

$(E_1): 2^{3x} = 5$; $(E_2): 3^x = 3^{1-6x}$; $(I_1): 5^x \leq 25^{2x}$;

$(I_2): 7^x < 2$; $(I_3): \left(\frac{2}{5}\right)^5 \geq 2^{x-1}$; $(E_3): 3^{2x} + 3^x - 6 = 0$

; $(I_4): 3^{2x} + 3^x - 6 < 0$

$(E_4): 3^x + 1 - 6.3^{-x} = 0$

2°) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnues $(x;y)$ tel que : $\begin{cases} 4^x.(\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 8^y.2^x = 4^{y-1} \end{cases}$

ACTIVITE 3:

Calcule les limites suivantes :

$1- \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^x$; $2- \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$;

$3- \lim\limits_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

$4- \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

ACTIVITE 4 :

Etudie et représente graphiquement les fonctions suivantes :

$f(x) = 2^{x-3}$; $g(x) = \frac{5^x}{5^{2x}-1}$

ACTIVITE 5 :

Soit la fonction f tel que : $f(x) = x^x + 1$

1°) Indique le domaine de définition de f et transforme l'écriture du réel $f(x)$.

2°) Donne le prolongement par continuité de f au point 0.

3°) Etudie la dérivabilité de f au point 0. Puis décris comment la courbe de f se présente au point d'abscisse 0.

4°) Calcule la dérivée de f et étudie son signe. Etablie le tableau de variation de f.

5°) Construis ma courbe de f.

ACTIVITE 6 :

On considère la fonction f de variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Partie A :

On considère les fonctions g et h définies sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x+1-\ln x$ et $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$, (ε) la courbe représentative de h.

1°) Etudie les variations de g.

2°) Déduis-en le signe de $g(x)$.

3°) a-Etudie les variations de h.

b-Détermine une équation de la tangente à (ε) en son point d'abscisse 1.

c-Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ et donne une interprétation pour (ε).

Partie B :

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) a- Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)-x}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{1}{x}-\ln x}$.

b- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{\ln x}$ et déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

6°) Etudie les variations de f.

7°) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont tu dresseras le tableau de variation.

8°) Etudie les branches infinies de la courbe (C_f), courbe de f puis construire dans le même repère

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+299) 97 47 15 27/ 94 26 28 54

Scanné avec CamScanner

orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2\,cm$ les courbes (ε) et (C_f).

ACTIVITE 7:

On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x)=1-x+e^{-2x} & ,si\ x>0 \\ h(x)=2^{x+1} & ,si\ x\le 0 \end{cases}$$

1°) Etudie la continuité de h en 0.

2°) Etudie la dérivabilité de h en 0. puis interprète graphiquement les résultats.

3°) a- Etudie les variations de h.

b- Démontre qu'il existe un unique point de la courbe de h où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-3x+2$. Détermine une équation de cette tangente.

c- Démontre que la courbe de h coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α appartient à $\left]1;\frac{3}{2}\right[$.

4°) Soit $k:]0;+\infty[\to h(]0;+\infty[)$

$$x\mapsto k(x)=h(x)$$

Démontre que k est une bijection.

5°) Construis la courbe (C_h) de h et (C_k) de k dans le même repère.

ACTIVITE 8 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2^{-\left|\frac{x-1}{x-2}\right|} & ,si\ x\neq 2 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (tu prendras pour unité 2 cm).

1°) Exprime $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue »

2°) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 2.

4°) Etudie la dérivabilité de f en 1.

Précise les demi-tangentes éventuelles à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

5°) Précise l'ensemble de dérivabilité de f et détermine la fonction dérivée de f.

6°) a- Etudie le sens de variation de f.

b- Dresse le tableau de variation de f

7°) Trace $(\mathcal{C})$ ainsi que ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8°) Soit A l'aire en centimètre carrés de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y=0$; $x=0$ et $x=1$.

Par la méthode des trapèzes, donne une valeur approchée de A.

9°) Soit l'application $g:[2;+\infty[\to\left[0;\frac{1}{2}\right[$

$$x\mapsto g(x)=f(x)$$

a- Démontre que g admet une bijection réciproque g^{-1}.

b- Précise l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.

c- Calcule $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $\left[0;\frac{1}{2}\right[$.

d- On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.Construis (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$

Scanné avec CamScanner

8. ACTIVITES SUR LES CALCULS INTEGRALES

ACTIVITE 1 :

Calcule les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^1 (2x^3 + 5x)\,dx$;

$I_2 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt$; $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{(3x+2)^4} dx$;

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; $I_5 = \int_{-1}^2 \left(x - |x-1|\right) dx$;

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt$; $I_7 = \int_0^{\pi} (\cos t)\,dt$;

$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt$; $I_9 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$;

$I_{10} = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$

ACTIVITE 2 :

Calcule les intégrales suivantes :

$K_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$; $K_2 = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1 - 2e^t)\,dt$; $K_3 = \int_0^2 e^{2x}\,dx$; $K_4 = \int_0^1 \left(-e^{2x+1}\right) dx$

$K_5 = \int_1^2 e^x (e^x + 1)^3\,dx$;

$K_6 = \int_0^1 (x^e - e^x)\,dx$; ;

$K_7 = \int_4^5 \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x+3}\right) dx$;

$K_8 = \int_0^2 \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) dx$;

$K_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos^5 x\,dx$;

$K_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx$;

$K_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x\,dx$; $K_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{e^{-\cos x}} dx$

ACTIVITE 3:

Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$A = \int_0^{\pi} (x \sin x)\,dx$; $B = \int_0^e (\ln x)\,dx$;

$C = \int_0^{\pi} (2u+1)e^{-u}\,du$; $D = \int_{-1}^1 x^3 \sin^2 x\,dx$;

$E = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$; $F = \int_0^1 (x^2 + x + 1)e^x dx$

ACTIVITE 4:

1°) Linéarise l'expression $4 \sin 3x \cos^2 x$

2°) A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale I suivante : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x \sin 3x \cos^2 x)\,dx$

ACTIVITE 5 :

On pose $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$. En utilisant le changement de variable $x + 1 = 2\tan t$ avec $t \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Calcule l'intégrale J

ACTIVITE 6 :

On se propose de calcule les intégrales : $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x\,dx$ et $I = \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x\,dx$

1°) Calcule $I + J$

2°) Justifie que $I - J = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x\,dx$ et déduis-en à l'aide de deux intégrations par parties la valeur de $I - J$

3°) Déduis-en les valeurs de I et J

ACTIVITE 7 :

1°) Détermine les nombres réels a et b, tels que pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

2°) Calcule $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

3°) En utilisant une intégration par parties calcule $J = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

ACTIVITE 8 :

On se propose de calcule l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^4} dx$.

1°) Calcule les trois intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$; $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$; $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx$;

2°) a- Détermine quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout réel t positif, on ait : $\frac{1}{(1+t)^3} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} + \frac{dt}{(1+t)^3}$ (1)

b- En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calcule l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^3} dx$.

Scanné avec CamScanner

3°) A l'aide d'une intégration par parties, exprime J en fonction de I. Puis calcule J.

ACTIVITE 9 :

On considère l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$

1°) a-Prouve que pour tout entier n,

$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x (\cos x) dx$

b- Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x (\cos x) dx$ en fonction de n.

c- Calcule I_1 puis déduis-en des questions a- et b- les valeurs de I_3 et I_5.

2°) Soit U l'application qui à x élément de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ associe $U(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

a- Prouve que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, $U'(x) = \frac{1}{\cos x}$ et déduis-en le calcule de I_0.

b- Déduis des questions 1°) a- et 1°) b-, le calcul de I_2 et I_4

ACTIVITE 10 :

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$

Calcule $I+J$ et I. Déduis –en la valeur de J

ACTIVITE 11 :

On pose : $I = \int_{\frac{1}{3}}^{7-4\sqrt{3}} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$

1°) Justifie l'existence de I

2°) On considère la fonction f définie par :

$f : \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right] \to J$

$x \mapsto \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ et $J = f\left(\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]\right)$

a- Démontre que f est une bijection

b- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de la bijection réciproque f^{-1} et démontre que

$\forall x \in E, \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}}$

3°) a- Calcule $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b- Déduis-en la valeur de I

ACTIVITE 12 : cor. p : 302

On donne l'intégrale suivante : $I = \int_a^b h(x) dx$ où $a = -\ln(1+\sqrt{3})$, $b = -\ln(\sqrt{3}-1)$ et h la fonction définie par : $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

1°) Justifie l'existence du nombre réel I.

2°) Soit l'application u définie de $K = \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ Dans $\left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ par : $u(x) = \ln(\cos x + \sin x)$

a- Calcule $u\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

b- Justifie que : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

c- Démontre que u est bijective. Soit u^{-1} la réciproque de u.

d- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de u^{-1}.

3°) Justifie que $\forall x \in E$, $\left(u^{-1}\right)'(x) = -h(x)$ Calcule alors l'intégrale I

ACTIVITE 13 :

Soit la fonction $l(x) = e^{-x}\sin x$.

1°) Exprime $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2°) Etudie les variations de l sur $[0;2\pi]$.

3°) Détermine la valeur moyenne de la fonction l sur $[0;2\pi]$.

ACTIVITE 14 :

Soit la fonction v définie sur $]0;+\infty[$ par :

$v(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

1°) Prouve que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1,

$\frac{\ln x}{x^2} \le v(x) \le \frac{\ln x}{x}$

Scanné avec CamScanner

2°) Calcule $I=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x^2}dx$ et $J=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x}dx$. On remarquera que : $\frac{\ln x}{x^2}=(\ln x)\times\frac{1}{x^2}$.

3°) Déduis-en un encadrement de $K=\int_1^{\frac{3}{2}}v(x)dx$.

ACTIVITE 15 : cor. p :303

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité : 1 cm.

1°) Démontre qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$.

2°) a- Calcule les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

b- Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

c- Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

3°) Etudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4°) a- Détermine les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite $(\mathcal{D})$.

b- Détermine une équation de ces tangentes.

c- Démontre que le point $I\left(0;\frac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

5°) a-Démontre que -1 est la seule racine de $f(x)$.

b-Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et son asymptote $(\mathcal{D})$.

B/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{5}{2}x+2\ln(x^2+1)$.

6°) Démontre que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

7°) a- Déduis-en le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b- Calcule les limites de g lors que x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

8°) Soit un nombre réel α , $\alpha\geq 0$

a- Calcule en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $\begin{cases}0\leq x\leq\alpha\\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\leq y\leq f(x)\end{cases}$.

b- Pour quelles valeurs de α a-t-on : $A(\alpha)\leq 1$?

ACTIVITE 16 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=(x+1)\ln|x|$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f d dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1°) a - Détermine le domaine de définition D_f de f.

b - Calcule les limites aux bornes de D_f.

2°) Soit : $g(x)=\frac{x+1}{x}+\ln|x|$.

a- Etudie les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g).

b- Calcule $g(-1)$ et précise le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3°) a- Calcule $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(x)$.

b- Dresse le tableau de variation de f.

4°) a - Prouve que le point $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b- Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I.

c- Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

d- Construis (T) et $(\mathcal{C})$.

5°) Calcule, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe (x'O x) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (On pourra faire une intégration par parties).

ACTIVITE 17 : cor. p :305

I/. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(1+e^{2-x}\right)$.

On note (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 2 cm).

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=1+(1-x)e^{2-x}$.

a- Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b- En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2°) a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b- Précise la nature de la branche infinie de f en $-\infty$

Scanné avec CamScanner

c- Calcule $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, puis interprète le résultat obtenu.

d- Précise la position de (C) par rapport à la droite $(\Delta): y=x$.

3°) a- Dresse le tableau de variation de f .

b- Démontre que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

c- f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d- Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e- Construis (C) (On tracera la tangente à (C) au point d'abscisse 2.

f- Construis (C') courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II/. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y=f(x)$ et $y=x$.

Soit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2.

4°) Calcule $a(\lambda)$ en fonction de λ .

5°) Détermine $a=\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)$ .Interprète graphiquement le résultat obtenu.

ACTIVITE 18 : cor. p :306

A/ On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x)=(\ln x)^3+\ln x-2$.

1°) Etudie le sens de variation de g . Calcule $g(e)$.

2°) Déduis de l'étude de g le signe de $g(x)$

B/ On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{(\ln x)^3-\ln x+1}{(\ln x)^2}$$

3°) a- Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

b- Etudie les limites de f aux bornes de D_f .

4°) a- Etudie la dérivabilité de f sur D_f puis vérifie que pour tout x de D_f, $f'(x)=\frac{g(x)\ln x}{x(\ln x)^2}$

b- Etudie le sens de variations de f puis dresse son tableau de variation.

5°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère la courbe (C_f) représentative de f et la courbe (C_h) d'équation : $y=\ln x$.

Etudie la position relative de (C_f) et (C_h). Trace (C_f) (C_h).

C/ Soient les réels a et b tels que : $1<a<b$.

6°) a-Etablie une formule d'intégration par parties pour l'intégrale : $\int_a^b \frac{1}{\ln x}dx$.

b- Déduis-en que : $\int_a^b \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}dx=\frac{b}{\ln b}-\frac{a}{\ln a}$.

7°) Calcule l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations : $x=e$ et $x=\lambda$ avec $x>e$.

Trouve le limite de $A(\lambda)$ lors que λ tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 19 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$.

1°) Vérifie que la fonction h, définie par : $x\mapsto x\ln x-x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$.

2°) On pose $I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}\ln x\,dx$ et $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}(\ln x)^2\,dx$.

a- Calculer I_1.

b- En utilisant une intégration par parties, Prouve que : $I_2=\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{e}$

c- Calcule $\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x)\,dx$. En déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases}\frac{1}{e}\le x\le e^{\frac{3}{2}}\\ f(x)\le y\le 0\end{cases}$

ACTIVITE 20 : cor. p :308

A/ On considère la fonction :

$u:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}$$

1°) a- Détermine l'ensemble de définition de u.

b- Calcule $u(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$

2°) Etudie le sens de variation de u et dresse son tableau de variations..

(Il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1)

3°) Déduis des résultats précédents que :

$\begin{cases}\forall x\in[0;1[\ , u(x)\ge 0\\ \forall x\in]1;+\infty[, u(x)<0\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

B/ Soit g la fonction définie par :

$g:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$$

On désigne par (C_g) la courbe de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité 2 cm)

4°) Détermine D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudie la limite de g en 1.

5°) a-Vérifie que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$. Prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=1$

b- Déduis-en que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$. Interprète géométriquement ce résultat.

c- Dresse le tableau de variation de g.

d- Démontre qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$

Donne un encadrement d'ordre 1 de α.

6°) Trace la courbe (C_g).

C/ Soit f la fonction définie par :

$f:[0;1[\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

7°) Prouve que f est dérivable sur $[0;1[$ et que $f'(x)=g(x)$, $\forall x\in[0;1[$

8°) Détermine l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$.(Tu donneras le résultat sous forme rationnelle)

ACTIVITE 21 :

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{x}$$

1°) Détermine α et β pour que cette fonction ainsi que sa dérivée première s'annulent pour $x=2$.

2°) On considère la fonction g définie pour tout réel non nul x par : $g(x)=x-4+\frac{4}{x}$. On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unités sur les axes 0,5)

a- Etudie le sens de variation de la fonction g et dresse son tableau de variation.

b- Détermine les asymptotes à la courbe (C_g)

c- Trace la courbe représentative (C_g) de g.

3°) En utilisant la courbe (C_g), discute suivant les valeurs du réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2-(4+m)x+4=0$

4°) La droite (Δ) d'équation $y=x-4$ coupe l'axe des abscisses au point A ; B désigne le point de (C_g) d'abscisse 2 ; E le point de (Δ) d'abscisse λ , $(\lambda>4)$ puis $A(\lambda)$ est le domaine plan limité par la courbe (C_g) , le segment $[AB]$, la demi-droite $[AE)$ et la droite d'équation $x=\lambda$

a- Détermine l'aire $A(\lambda)$.

b- Détermine la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$

ACTIVITE 22 : cor. p : 310

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)e^x & ,si\ x\le 1 \\ f(x)=x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}}\right) & ,si\ x>1 \end{cases}$$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.(unité graphique 2cm)

Partie A :

On considère : $U:x\mapsto x^3+3x-2$

1°)Etudie les variations de la fonction U.

2°) Démontre que l'équation $U(x)=0$ admet une solution unique β telle que : $\frac{1}{2}<\beta<1$

3°) Déduis-en le signe de $U(x)$ suivant x.

Partie B :

4°) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

5°)a) Etudie la continuité de f en $x_0=1$

b) Etudie la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donne une interprétation géométrique.

6°) Soit h la fonction définie pour $x>1$ par : $h(x)=[f(x)]^2$

a- Exprime $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

b- Calcule $h(x)$ et $h'(x)$ et déduis-en que pour tout $x>1$, $f'(x)=\frac{xU(x)}{(x^3+1)^2}\times\frac{1}{2f(x)}$

7°) Etudie les variations de f.

Scanné avec CamScanner

8°) Etudie les branches infinies de (C_f).
9°) Construis la courbe (C_f)

Partie C :

10°) Soit $F : x \mapsto (ax+b)e^x$

a- Détermine a et b pour que F soit une primitive sur $]-\infty ; 1]$ de la fonction f.

b- Calcule l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$.

c- Calcule $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

11°) Soit $H(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)e^{2x}$ et soit (Γ) la représentation graphique de f sur $[0 ; 1]$.

a- Justifie que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

b- Calcule en cm^2 le volume V du solide engendré par la rotation de (Γ) autour de l'axe des abscisses.

ACTIVITE 23 : cor. p : 312

Partie A :

Soit u la fonction de la variable réelle x définie par :

$u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

1°) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $u(x) = 0$

2°) Détermine le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$

3°) a- Justifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b- Calcule la dérivée g' de la fonction g.

c- Déduis-en le signe de $g'(x)$.

4°) Détermine les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D puis dresse le tableau de variation de g.

5°) a- Détermine les équations des asymptotes à la courbe (C) de g.

b- Précise la position de la courbe (C) par rapport à ses asymptotes.

6°) Construis la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.(u. aphique 2 cm)

Partie C :

7°) Détermine la fonction numérique h telle que pour tout réel x, $h(-x) + g(x) = 0$

8°) Soit (Γ) la courbe représentative de h. Prouve que (C) $\cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$

9°) Déduis-en que le point O est un centre de symétrie de la courbe (C) $\cup (\Gamma)$

10°) Construis alors (Γ) dans le repère précédent.

Partie D :

Soit la fonction numérique f définie par :

$f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

11°) a- Démontre que pour tout réel x, $\sqrt{1+x^2} > |x|$

b- Déduis-en l'ensemble de définition de f

12°) Calcule la dérivée f' de f puis déduis-en une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

13°) Calcule en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan qui vérifie : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ g(x) \le y \le -x \end{cases}$

ACTIVITE 24:

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{\frac{x}{2}} & , si\ x \le 0 \\ x \ln x - x + 1 & , si\ x > 0 \end{cases}$$

et Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (C_f) la courbe représentative de f dans ce repère.

4°) Détermine le domaine de définition de f

5°) a- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b- Ecris les équations des demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0

6°) a- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f).

7°) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

8°) Trace les demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0 et trace (C_f)

9°) Détermine l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ (Tu pourras utiliser une intégration par partie)

10°) Démontre que la restriction g de f à l'intervalle $]-\infty ; 0[$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty ; 0[$ sur un intervalle que tu préciseras.

ACTIVITE 25 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle définie par : $\begin{cases} h(x) = (3-x)\sqrt{x} & , si\ x \ge 0 \\ h(x) = e^x - x - 1 & , si\ x < 0 \end{cases}$ et on désigne par ( ) sa courbe représentative de h dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

A/

Scanné avec CamScanner

1°) a- Etudie la continuité de h en 0.

b- Etudie la dérivabilité de h en 0. Quelle interprétation géométrique peut-on en tirer ?

c- Etudie les variations de h et dresse son tableau de variation.

2°) a- Prouve que la droite (Δ) d'équation $y=-x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

Précise la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) pour $x<0$

b- Ecris une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 3.

c-Construis la courbe $(\mathscr{C})$, la tangente (T) et la droite (Δ).

B/

3°)Soir g l'application définie par :

$g:]-\infty;0[\to]0;+\infty[$

$x\mapsto g(x)=h(x)$

a- Prouve que g est une bijection

b- Trace la courbe représentative (Γ) de la réciproque g^{-1} de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$. Tu justifieras la construction

4°) on donne la fonction f définir sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=-h(x)$ et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative

Construis (C') dans le même repère que (C) en justifiant ta construction

5°) On considère le domaine plan (E) délimité par les courbes $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

a- Calcule l'aire A de (E) en cm^2

b- Détermine en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation de (E) autour de l'axe des abscisses.

ACTIVITE 26 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|, si\ x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\\ f(x)=x^2e^{-x} \qquad , si\ x\in[0;+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2\,cm$

Partie A :

1°) Quel est le domaine de définition de f. Calcule $f(-2)$ et $f(3)$

2°) a- Prouve que la fonction f est continue en zéro.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0. Et interprète graphiquement tes résultats

3°) a- Etablie que la dérivée f' de f a pour expression :

$f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ si $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

$f'(x)=x(2-x)e^{-x}$ si $x\in[0;+\infty[$

b- Dresse le tableau de variation de la fonction f.

4°) Démontre que l'équation admet une racine unique comprise entre $-1,6$ et $1,5$.

5°) a- Justifie que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b- Etudie la position de (C) par rapport à (D) dans $]-\infty;0[\setminus\{-1\}$

6°) Trace la courbe (C) en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi tangentes en 0 et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

Partie B :

Soit g l'application définie par :

$g:[0;2]\to f([0;2])$

$x\mapsto g(x)=f(x)$

7°) Prouve que g définit une bijection de $[0;2]$ sur un intervalle J à préciser.

8°) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a- Résous l'équation $g^{-1}(x)=1$.

b- Démontre que $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$.

9°) On appelle (C') la courbe représentative de g^{-1}. Trace (C') en utilisant la courbe (C) et une transformation à préciser (on placera sur la courbe (C') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$).

Partie C :

λ étant un réel strictement positif, on pose

$I(\lambda)=\int_0^{\lambda}f(x)dx$

10°) a- Interprète graphiquement $I(\lambda)$.

b- En procédant à une intégration par parties, calcule $I(\lambda)$.

11°) Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

12°) On pose $\lambda=2$

a- Calcule $I(\lambda)$

b- Déduis-en la valeur en cm^2 de l'aire de la partie limitée par (C') et les droites d'équation $y=0$; $x=0$ et $x=\dfrac{4}{e^2}$.

ACTIVITE 27 : (extrait bac D 2014 Burkina -Faso)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} f(x)=(1-x)e^x & ,si\ x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+2x-3} & ,si\ x>1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 2cm.

Partie A :

1°) a- Etudie la continuité de f et $x_0=1$.

b- f est-elle dérivable en $x_0=1$? Interprète géométriquement le résultat obtenu.

2°) a- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Soit f' la dérivée de f. Calcule $f'(x)$ et étudie le signe de f'.

c- Dresse le tableau de variations de f.

3°) Prouve que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

4°) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1. (on donne : $\frac{1}{e}\simeq 0{,}36$)

5°) Trace (Δ), (T) et $(\mathcal{C})$.

6°) a- Démontre que la restriction de f à $]1;+\infty[$ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J que tu préciseras.

b- On note $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de cette bijection réciproque dans le repère $\mathcal{R}$.

Construis $(\mathcal{C}')$

Partie B :

7°) Soit α un réel strictement négatif.

a- A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} xe^x dx$.

b- On désigne par D_α le domaine plan délimité par $(\mathcal{C})$, (Ox) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$. Calcule, en cm², la valeur de l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine D_α.

c- Calcule $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathcal{A}(\alpha)$

8°) a- Détermine les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto(x^2-2x+1)e^{2x}$.

b- Calcule, en cm³, le volume $V(\alpha)$ du solide $S(\alpha)$ engendré par la rotation complète du domaine D_α autour de l'axe (Ox).

ACTIVITE 28 : cor. p : 314 (extrait BAC D 2004 Sénégal)

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f et trouve les trois réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f, on ait : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{e^x-1}$

2°) Détermine les limites de f aux bornes de D_f.

3°) a- Détermine la fonction dérivée de f.

b- Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2e^{2x}-5e^x+2=0$.

c- Déduis en le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f.

4°) On appelle (C) la représentation graphique de la courbe f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité est 2 cm.

Démontre que les droites d'équations respectives : $y=2x-1$ et $y=2x-2$ sont des asymptotes de (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Précise l'autre asymptote.

5°) Soit x un réel de D_f, on considère les deux points M et M' de (C) d'abscisses respectives x et $-x$, détermine les coordonnées du milieu Ω de segment [MM']

Que peux-tu déduire pour la courbe (C) ?

6°) Trace la courbe (C).

7°) a- Trouve les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble D_f on fait : $f(x)=2x+\alpha+\dfrac{\beta e^x}{e^x-1}$.

b- Soit k un réel supérieur ou égal à 2.

Détermine l'aire $A(k)$ en cm² de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$\begin{cases} \ln 2\le x\le \ln k \\ 2x-1\le y\le f(x) \end{cases}$.

c- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}A(k)$

ACTIVITE 29: cor. p : 316

A°) On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} g(x)=x-\sqrt{x^2-x} & ,si\le 0 \\ g(x)=x^2\ln x & ,si\ x>0 \end{cases}$

et on désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

1°) g est-elle continue en 0 ?

2°) g est-elle dérivable en 0 ? Donne une signification graphique de tes résultats

3°) Etudie les variations de g.

Scanné avec CamScanner

4°) a- Prouve que la droite (D) d'équation $y=2x-\frac{1}{2}$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$.

b-Etudie la position relative de (C_g) et (D).

5°) Trace (C_g).

B°) Soit φ l'application définie par :

$\varphi:]-\infty;0]\to IR$

$x\mapsto \varphi(x)=g(x)$

6°) Justifie que φ est une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle J que tu préciseras. On notera φ^{-1} la réciproque de φ.

7°) Prouve que $\forall x\in J$, $\varphi^{-1}(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

8°) On note $(C_{\varphi^{-1}})$ la courbe de φ^{-1}

Précise, son tableau de variation, l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ et les autres propriétés utiles de φ^{-1}. Trace $(C_{\varphi^{-1}})$ dans le même repère que (C_g)

9°) a- Démontre que , $\forall x\in J$, $\varphi^{-1}(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{2x-1}$ avec α , β et γ trois constantes réelles à déterminer.

b- Donne une primitive de $\varphi^{-1}(x)$

10°) a- Calcule en cm^2 , l'aire A_1 de l'ensemble E_1 des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases}-1-\sqrt{2}\le x\le -1\\ -1\le y\le \varphi^{-1}(x)\end{cases}$

b- Calcule, l'aire A_2 de l'ensemble E_2 des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases}-1\le x\le 0\\ x\le y\le \varphi^{-1}(x)\end{cases}$

c- Déduis-en l'aire $E_1\cup E_2$ et l'aire A

$\begin{cases}-1\le x\le 0\\ g(x)\le y\le 0\end{cases}$

ACTIVITE 30 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=ax^2+bx+c+2\ln(1-x)$ où a, b et c sont des nombres réels.

On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -1.

Partie A : Détermination de f

Détermine a, b, c de façon que les conditions suivant soient remplies :

- $\mathcal{C}$ passe par le point O et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1 ;
- la tangente à $\mathcal{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Dans la suite du problème tu prendras

$f(x)=x^2+3x+2\ln(1-x)$

Partie B : étude de la fonction f et tracé de $\mathcal{C}$.

1°) Détermine la limite de f en 1. Déduis-en l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$.

2°) Détermine la limite en $-\infty$ de la fonction f .

3°) On désigne par f' la dérivée de f . Démontre que $f'(x)=\frac{(1-2x)(x+1)}{1-x}$ pour tout réel nombre réel x strictement inférieur à 1.

4°) Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. Dresse le tableau de variations de f .

5°) a- En utilisant le tableau de variations, détermine le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$.

b- On note α la solution appartenant à $]-\infty;-1[$. Justifie que $\alpha\in]-2;-1{,}8[$.

6°) Construis $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C : Calcul d'aire

1°) a- Soit H et h les fonctions définies sur $]-\infty;1[$ par : $H(x)=(x-1)\ln(1-x)-x$ et $h(x)=\ln(1-x)$.

Démontre que H est une primitive de h sur $]-\infty;1[$.

b- Déduis-en une primitive F de f sur $]-\infty;1[$.

2°) Calcule l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisse et les droites d'équation : $x=\alpha$ et $x=0$.

Tu donneras la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2 en fonction de α.

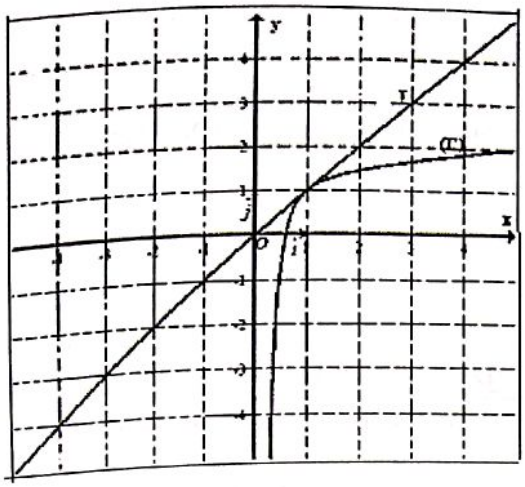
ACTIVITE 31 :

Partie A :

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique (Γ) d'une fonction g, définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La droite T passant par O et A(1 ; 1) est tangente en A à la courbe (Γ)

La courbe (Γ) admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées

Scanné avec CamScanner



1°) Détermine graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$; b) $g(1)$; c) $g'(1)$

2°) On admet que pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g(x)=\ln x+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$, où a et b sont deux nombres réels.

a- Exprime $g(1)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b.

b- Détermine a et b en utilisant les résultats précédents

3°) On suppose que g est définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$

a- Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0{,}2\,;\,0{,}8]$: Détermine un encadrement de α d'amplitude 0,01 et déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

b- En utilisant le sens de variation de g, déduis-en ,le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

4°) a- Détermine la limite de f en $+\infty$

b- Vérifie que l'on peut écrire, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$

$f(x)=\frac{e^x}{x}(x\ln x+1)$.

c- Déduis-en la limite de f en 0

5°) a- Détermine la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifie que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=g(x)e^x$

b- En utilisant le signe de g obtenu précédemment, étudie le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

6°) a- Détermine une équation de la tangente (Δ) à la courbe C au point d'abscisse 1.

b- Etudie les branches infinies de f

7°) Trace (Δ) et $\mathscr{C}$

Partie C :

8°) On note λ un nombre réel tel que : $0<\lambda<1$.

a- Démontre que la fonction h, définie sur intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=e^x\ln x$ est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

b- Déduis-en que $\int_\lambda^1 f(x)\,dx=-e^\lambda\ln\lambda$

9°) $\mathscr{D}$ désigne la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses. La courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.

a- Hachure le domaine $\mathscr{D}$.

b- Calcule la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{D}$.

ACTIVITE 32 :

On considère les fonctions g et f définies par :

$g(x)=x(\ln x)^2-e$ et $\begin{cases} f(x)=xe^x-2 & ,si\ x\le 0 \\ f(x)=x-2+\frac{e}{\ln x} & ,si\ x>0 \end{cases}$

Partie A :

1°) Etudie les variations de g.

2°) Calcule $g(e)$ et déduis-en le signe de $g(x)$.

Partie B :

3°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.

c- Etudie les limites de f aux bornes de D.

d- Etudie le sens de variation de f.

(Tu exprimeras $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ lorsque $x>0$)

e- Dresse le tableau de variation de f . f- Etudie les branches infinies de la courbe représentative (C) de f.

g- Construis la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 1 cm.

Scanné avec CamScanner

4°) Soit l'intégrale $I=\int_3^4 \frac{e}{\ln x}dx$.

a- Donne une interprétation géométrique de I.

b- Donne par la méthode des rectangles, un encadrement de I par deux décimaux d'ordre 3. (Tu partageras l'intervalle $[3;4]$ en 5 intervalles de même amplitude).

c- Déduis-en un encadrement de l'aire A du domaine limité par (C), la droite $(\Delta): y=x-2$ et les droites d'équations respectives $x=3$ et $x=4$.

ACTIVITE 33 :

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} h(x)=e^x-x & ,si\ x<0 \\ h(x)=\cos^2 \pi x & ,si\ x\in[0;1] \\ h(x)=1+\frac{\ln x}{x} & ,si\ x>1 \end{cases}$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique 2 cm

1°) a- Détermine l'ensemble de définition D de h.

b- Calcule les limites de h aux bornes de D

2°) a- Etudie la continuité de h en tout point de D et en particulier en 0 et en 1

b- Etudie la dérivabilité de h en tout point de D et en particulier en 0 et en 1

c- Interprète graphiquement les résultats obtenus lors de l'étude de la dérivabilité de h en 0 et en 1

3°) Etudie le sens de variation de h et dresse son tableau de variation

4°) a- Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$

b- Justifie que $(\mathscr{C})$ admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées.

c- Trace la courbe $(\mathscr{C})$ avec ses différentes tangentes et demi-tangentes éventuelles

5°) On désigne par E le domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=e$. Calcule en cm^2 l'aire du domaine E.

6°) On pose $I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$. Calcule $h(I)$

7°) Soit l'application $\begin{matrix} g:I\to h(I) \\ x\mapsto g(x)=h(x) \end{matrix}$

a- Justifie que g admet une application réciproque g^{-1}

b- Détermine le domaine de dérivabilité K de g^{-1}.

8°) Soit (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a- Justifie que le point $B\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$ appartient à (Γ).

b- Calcule $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{4}\right)$

c- Construis la courbe (Γ) dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ACTIVITE 34 : cor. p : 319

On considère la fonction f définie de IR vers IR par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & ,si\le 0 \\ f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}+1 & ,si\ x>0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie I

1°) a- Etudie les variations de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=x-\ln x$

b- Déduis-en que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $x-\ln x\neq 0$.

2°) Soit D l'ensemble de définition de f.

a- Démontre que $D=[-1;+\infty[$.

b- Démontre que f est continue sur D.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

d- Etudie la dérivabilité de f en -1

3°) a- Etudie les variations de f.

b- Construis la courbe (C)

Partie II :

4°) On pose $I=[-1;0]$ et $J=f(I)$

Soit la fonction $\begin{matrix} g:I\to J \\ x\mapsto g(x)=f(x) \end{matrix}$:

a- Démontre que g est bijective.

b- Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que (C).

c- Détermine $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

d- Calcule $\int_{-1}^{0}\left(g^{-1}(x)\right)dx$.

5°) Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite d'équations $y=x$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=0$.

a- Calcule A.

Scanné avec CamScanner

b- Déduis-en l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C) et (Γ).

ACTIVITE 35 :

On considère la fonction f définie sur $[-e;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x+(x+e)\left(\ln\left(\dfrac{x+e}{e}\right)\right)^2 \text{ ,si } x\neq -e \\ f(-e)=-e \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

A/ 1°) a- Démontre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x(\ln x)^2=0$

b- Calcule la limite de f en $-e$; f est –elle continue en $-e$?

c- Etudie la dérivabilité de f en $-e$.

2°) Détermine le sens de variation de f , puis dresse son tableau de variation.

3°) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4°) Trace (C) et (T)

5°) a- Démontre que f est une bijection de $[-e;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1}

b- Trace (C') dans le même repère que (C).

c- Détermine l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

B/ Soit α un nombre réel tel que $-e<\alpha<0$. On pose

$$J(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

6°) Pour tout entier naturel n , on désigne par :

$I_n(\alpha)$ l'intégrale $\int_{\alpha}^{0}(x+e)[\ln(x+e)]^n\,dx$

a- A l'aide d'une intégrale par parties, exprime $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$ pour n entier naturel non nul.

b- Calcule $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

7°) a- Vérifie que pour tout x de $]-e;+\infty[$,

$f(x)=(x+e)(-1+\ln(x+e))^2+x$

b- Exprime $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

8°) Calcule $\lim\limits_{\substack{\alpha\to -e\\ >}}(-J(\alpha))$

ACTIVITE 36 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x)=x+(1-x)e^{2x}$ et $g(x)=1+(1-2x)e^{2x}$

1°) a- Etudie les variations de g .

b- Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $0{,}63<\alpha<0{,}64$

c- Déduis-en le signe de $g(x)$

2°) a- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b- Calcule $f(1)$ et déduis-en que le signe de $f(\alpha)$ (Utilise le sens de variation de f)

c- Justifie que $f(\alpha)=\alpha-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(2\alpha-1)}$

3°) a- Démontre que la courbe représentative ($\mathscr{C}$) de f admet un point d'inflexion I qu tu préciseras.

b- Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) en I.

c- Etudie les branches infinies de la courbe ($\mathscr{C}$).

d- Construis (T) et ($\mathscr{C}$) (tu prendras $\alpha=0{,}64$)

4°) Soit γ un réel strictement négatif.

a- Calcule l'aire $S(\gamma)$ du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$) , la droite $(\Delta):y=x$ et les droites d'équations $x=\gamma$ et $x=1$

b- Calcule $\lim\limits_{\gamma\to-\infty} S(\gamma)$

5°) On pose $I=]-\infty;\alpha]$ et $J=f(I)$. Soit l'application $h:I\to J$

$x\mapsto h(x)=f(x)$

a- Justifie que h admet une application réciproque h^{-1} dont tu préciseras l'ensemble de définition.

b- Etudie la dérivabilité de h^{-1} et calcule $\left(h^{-1}\right)'(1)$

c- Trace dans le même repère que ($\mathscr{C}$) la courbe ($\mathscr{C}'$) de h^{-1}.

6°) Soit $v:x\mapsto(1-x)e^{2x}$ et (D) le domaine limité par la courbe de v , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=1$.

a- Détermine les réels a, b et c pour que la fonction $H:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{4x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto[v(x)]^2$

Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (D)

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 37 : cor. p : 322

Prouve que F, définie par : $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{e^{-t}}{t}dt$, est dérivable sur $I=[1;+\infty[$ et calcule sa dérivée.

ACTIVITE 38 : cor. p : 323

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ et $g(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$.

1°) On note $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)\,dx$.

a. Calcule $I+J$.

b. Calcule $J-I$.

c. Déduis-en les valeurs de I et J.

2°) On note $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2\,dx$ et $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(g(x))^2\,dx$.

a- Calcule $f'(x)$. Déduis-en la somme $K+L$.

b- En t'inspirant de la première question, calcule les valeurs de K et L.

c- Déduis-en la valeur de $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

ACTIVITE 39 : cor. p : 324

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]-1;1[$ par : $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

1°) Justifie que la fonction $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ est définie sur I

2°) Etudie le sens de variation de F sur I.

3°) Démontre que F est impaire.

4°) Soit G la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\sin x)$.

a- Prouve que G est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et calcule G'.

b- Déduis-en une expression simple de G.

5°) Calcule l'intégrale $K=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

ACTIVITE 40 : cor. p : 324

Soit la fonction G la fonction définie par :

$G(x)=\int_0^x\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}dt$

1°) a- Justifie que G est définie sur $\mathbb{R}$ et que G est impaire.

b- Etudie le sens de variation de G et déduis-en le signe de $G(x)$.

2°) a- Prouve que pour tout réel strictement positif t, on a : $\frac{1}{2t+1}\leq\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

b- Calcule $\int_0^x\frac{dt}{2t+1}dt$ et déduis-en la limite de G à $+\infty$ puis dresse le tableau de variation de G.

3°) a- Démontre que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b- Soit F la réciproque de G. Démontre que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$F'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4[F(x)]^2}$

c- Déduis-en que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F''-F'=0$; Calcule $F(0)$ et $F'(0)$. Déduis-en F..

d- Détermine alors $G(x)$ pour tout réel x

ACTIVITE 41 : cor. p : 325

La fonction f est définie par :

$$\begin{cases}f(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} & ,si\ x>0\\ f(x)=\frac{x}{x+1}+\ln(x+1) & ,si\ -1<x\leq 0\end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A :

1°) Démontre que l'ensemble de définition de f est $D_f=]-1;+\infty[$.

2°) a- Démontre les égalités suivantes : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ $\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ et

b- Déduis-en de la question précédente les droites asymptotes de (C_f).

3°) a- Prouve que $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=0$

b- Etudie la continuité de f en 0

Scanné avec CamScanner

c- En posant $h=\frac{1}{x}$ étudie $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

d- Etudie $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

f est-elle dérivable en 0 ? Interprète graphiquement les résultats.

4°) Démontre que :

a- Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

b- Pour tout $x\in]-1;0[$, $f'(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$.

5°) Dresse le tableau de variation de f.

6°) Trace $(\mathcal{C}_f)$

Partie B :

Soit α un nombre réel tel que : $-1<\alpha<0$.

7°) a- Justifie que Pour tout x tel que $-1<x<0$, $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.

b- En utilisant une intégration par parties démontre que : $\int_{\alpha}^{0}\ln(x+1)\,dx=-\alpha\ln(\alpha+1)+\alpha-\ln(\alpha+1)$.

8°) a- Déduis-en l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.

b- Calcule $\lim\limits_{\alpha\to -1^+}A(\alpha)$

ACTIVITE 42 :

Partie A :

On considère les fonctions f_m définis par :

$f_m(x)=e^x+\ln\left(\frac{m+x}{m-x}\right)$ où m est un paramètre réel non nul et on désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) a- Donne l'ensemble de définition D_m de f_m.

b- Calcule les limites de f_m aux bornes de D_m.

c- Calcule $f_m(0)$. Déduis-en que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe A dont tu donneras les coordonnées.

2°) Etudie les variations de f_m et fais son tableau de variations lors que $m>0$.

3°) Détermine le réel m sachant que $(\mathcal{C}_m)$ admet au point A une tangente parallèle à la droite d'équation : $y=-x+3$.

Partie B :

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x)=e^x+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

4°) Donne l'ensemble de définition D de f et vérifie que f appartient à la famille des fonctions f_m.

5°) Soit g la fonction définie sur D par : $g(x)=-2+(1-x^2)e^x$.

Etudie les variations de g sur D et déduis-en le signe de $g(x)$ sur D.

6°) Déduis-en de l'étude précédente le tableau de variation de f, puis trace sa courbe $(\mathcal{C})$.

7°) Démontre que f est bijective de D sur un ensemble J que tu préciseras.

8°) On désigne par h la réciproque de f et par (T) sa courbe.

a- Démontre que le point B(1;0) appartient à (T).

b- Ecris l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (T) en B.

c- Trace (Δ) et (T)

9°) a- Calcule à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale : $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$.

b- Calcule l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=0$.

c- déduis-en l'aire du domaine limité par (T), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y=-\frac{1}{2}$ et $y=0$.

ACTIVITE 43 :

Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$

I/

1°)- Détermine le domaine de définition de la fonction f.

2°) a- Démontre que f est une fonction impaire et périodique de période 2π.

b- Démontre que le graphe de f admet la droite d'équation: $x=\frac{\pi}{2}$, comme axe de symétrie.

c-Dresse le tableau de variation de la fonction f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

d- Construis le graphe de f sur $[-\pi;\pi]$

II/

Scanné avec CamScanner

5°) Détermine les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$, $\frac{x^2}{x^2-1} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

6°) a- Calcule l'aire du domaine D, limité par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$

(On effectuera le changement de variable: $u = \cos t$, dans l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) dt$)

b- Calcule la valeur moyenne de f sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

7°) Calcule la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses (Tu prouveras que: $\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t$, puis tu effectueras le changement de variable: $u = \tan t$, dans l'intégrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} \right) dt$)

ACTIVITE 44 :

Partie A :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - k$ où k est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$

1°) Détermine les limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2°) Calcule $f'(x)$. Déduis-en le tableau de variation de f.

3°) a- Etablie que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty; 1]$ et l'autre notée $\beta_k \in]1; +\infty[$

b- Prouve que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$

On admettra que β_k vérifie la même relation c'est-à-dire $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$

4°) Précise le signe de $f(x)$ suivants les valeurs de x.

Partie B :

5°) Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$

a- Etudie le sens de variation de u.

b- On rappelle que $0 < k < e$. Justifie la propriété suivante : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - kx > 0$

6°) Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$

(C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a- Calcule $\lim_{x \to -\infty} g_k(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g_k(x)$

b- Prouve que $g_k'(x) = \frac{k.f(x)}{(e^x - kx)^2}$

c- Déduis-en le tableau de variation de g_k.

Calcule $g_k(1)$

7°) On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisses respectives α_k et β_k.

a- En utilisant la question 3°) b- de la partie A,

Démontre que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$

b- Trouve une expression analogue pour $g_k(\beta_k)$

c- Déduis-en de la question précédente que, lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont tu donneras une équation.

8°) a- Détermine la position relative des courbes (C_1) et (C_2)

b- Prouve que $\alpha_2 = 0$

c- En prenant comme unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construis les courbes (C_1) , (C_2) et (H) sur le même graphique. (tu prendras $\alpha_1 = -1{,}1$ $\beta_1 = 1{,}8$ et $\beta_2 = 1{,}6$)

9°) Calcule l'aire délimitée par la courbe (C_1) et les droites d'équations $x = -3$; $x = 0$ et $y = 0$

ACTIVITE 45 :

Partie I-

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)\ln x$.

1°) a- Prouve que $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x$

b- Etudie le signe de $g'(x)$.

2°) a- Etudie les variations de g.

b- Déduis-en que, pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x) \geq 1$.

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

3°) a- Etudie les variations de f (Tu exprimeras $f'(x)$ en fonction de $g(x)$)

b- Déduis-en que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que tu préciseras.

Scanné avec CamScanner

4°) Soit ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

a- Ecris une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1.

b- Etudie le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x-1-\ln x$. Déduis-en son signe

5°) Prouve que $f(x)-x=(-1+\ln x)h(x)$ et déduis-en la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T).

6°) a- Trace la courbe (C)

b- Trace, dans le même repère, la courbe (Γ) représentative de la fonction f^{-1}

4) a- Calcule les intégrales : $I_1=\int_1^e x\ln x\,dx$ et $I=\int_1^e(\ln x)^2\,dx$

b- On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes ($\mathscr{C}$) et (Γ). Calcule à 10^{-3} près la valeur de A.

ACTIVITE 46:

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=1+\ln[x(2-x)]$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ où l'unité de longueur est 4 cm.

I-

1°) a- Démontre que le domaine de définition de la fonction f est $]0;2[$.

b- Dresse le tableau de variation de la fonction f.

2) a- Prouve que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

b- Détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec la droite $(O;\vec{i})$. On notera x_0 la plus petite des abscisses.

3°) Soit φ la fonction définie sur $]0;2[$ [par : $\varphi(x)=f(x)-x$

a- Dresse le tableau de variation de la fonction φ.

b- Déduis-en que l'équation $j(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α .Vérifie que $x_0<\alpha<0{,}3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)]=\alpha-1$.

c- Précise le signe de $\varphi(x)$ et Déduis-en la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y=x$.

4°) Trace la courbe (C) et la droite (D). (On prendra 0,2 comme valeur approchée de x_0).

5°) Soit l'application g définie par : $g:]0;1]\to f(]0;1])$

$x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Justifie que g est une bijection dont tu préciseras l'ensemble de définition J.

b- Calcule $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J . g^{-1} étant la fonction réciproque de g).

c- Trace, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C') représentative de g^{-1}.

II- Soit $E=\int_\alpha^1\ln[x(2-x)]\,dx$ où α est le réel défini dans la question I, 3°) b-

6°) a- Démontre, en utilisant une intégration par partie, que : $E=-\alpha(\alpha-1)-2\int_\alpha^1\frac{1-x}{2-x}\,dx$

b- Prouve que : $E=-\alpha^2+5\alpha-4-2\ln\alpha$

(On pourra utiliser l'égalité $\frac{1-x}{2-x}=1-\frac{1}{2-x}$ pour $x\in[\alpha;1]$)

7°) a- Donne une interprétation géométrique de chacune des intégrales suivants : $\int_\alpha^1(f(x)-x)dx$; $\int_\alpha^1\left(x-f^{-1}(x)\right)dx$ et Prouve qu'elles sont égales.

b- Déduis-en, en fonction de α , la valeur de l'intégrale $\int_\alpha^1\sqrt{1-e^{x-1}}\,dx$

ACTIVITE 47 :

I- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x(x-1)+\ln x$

1°) Etudie le sens de variation de g.

11°) Calcule $g(1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ pour $x>0$

II- On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=(x-1)^2+(\ln x)^2$

2°) Prouve que f définie sur $]0;+\infty[$ puis Calcule $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3)° Justifie que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $f'(x)=2\frac{g(x)}{x}$ pour $x>0$.

4°) Dresse le tableau de variation de f.

15°) Soit l'application $h:]0;1]\to[0;+\infty[$

$x\mapsto h(x)=f(x)$

Démontre que h est une bijection. On désigne par (Γ) la courbe représentative de la bijection réciproque h^{-1} dans $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$

Scanné avec CamScanner

6°) Soit u la fonction définie sur $]0;1]$ par :
$u(x) = h(x) - x$

a- Dresse le tableau de variation de u sur $]0;1]$

b- Déduis-en qu'il existe un seul réel α de $]0;1]$ tel que $h(\alpha) = \alpha$

c- Vérifie que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

7°) a- Etudie les branche à (C)

b- Trace (C) et (Γ)

III- On désigne par A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. Soit

$I = \int_{\alpha}^{1} xf'(x)\,dx$

8°) Démontre à l'aide d'une intégrale par partie que,
$I = -\alpha^2 - A$

9°) a- Prouve que $I = 2\int_{\alpha}^{1} g(x)\,dx$

b- Déduis-en que

$I = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - \frac{7}{3} - 2\alpha\ln\alpha$

c- Donne la valeur de A en fonction de α

ACTIVITE 48: cor. p : 327

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-e^{2x}} & ,si\ x \le 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) & ,si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D son ensemble de définition et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique 2 cm)

1°) a- Démontre que : $D = \mathbb{R}$.

b- Détermine : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c- Démontre que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

2°) a- Démontre que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0. Déduis-en que la courbe $(\mathcal{C})$ admet à l'origine du repère une tangente dont tu donneras une équation.

3°) Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$.

4°) a- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

b- Détermine le sens de variation de f'. Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

5°) a- Dresse le tableau des variations de f.

b- Déduis-en sur $]0;+\infty[$, la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite (Δ) d'équation : $y = 2$.

6°) Construis $(\mathcal{C})$.

7°) Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < 1$. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 2$, $x = \alpha$ et $x = \frac{2}{e-1}$.

a- Calcule $A(\alpha)$.

b- Calcule $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peux-tu donner du résultat obtenu ?

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

12. ACTIVITES SUR LES STATISTIQUES

ACTIVITE 1 : cor. p :381 (d'après Bac D Sénégal)

1°) (X,Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

$(D_1) : y = ax + b$ et $(D_2) : x = a'y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Etablie que : $r^2 = a \times a'$.

2°) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donne les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x - y = 0$
- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5y - 9x + 24 = 0$.

a- Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.

b- Calcule la moyenne de chacun des caractères X et Y.

ACTIVITE 2:

Un opérateur économique présente le relevé statistique des six (06) premiers mois de son comptoir alimentaire. x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires exprimé en millions de francs CFA correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1°) Représente le nuage de points (Tu prendras : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnée pour unité).

2°) a- Détermine les coordonnées du point moyen G

b- Calcule $V(x)$, $V(y)$ et $cov(x,y)$ (tu donneras si possible les résultats sous forme de fractions irréductibles.

c- Calcule le coefficient de corrélation linéaire, puis donne-en une interprétation.

3°) a- Démontre que la droite (D) : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$ est la droite de régression de y en x de cette série.

b- Calcule une estimation du chiffre d'affaires de cet opérateur économique à la fin du septième mois.

ACTIVITE 3 :

Le tableau suivant donne les notes obtenues par un groupe d'élève à un devoir.

Note x_i	2	3	4	5	6	7
Nombres d'élèves y_j	27	24	16	15	12	6

1°) Représente graphiquement le nuage de points $M(x_i ; y_j)$ dans un repère orthogonal

(O,I, J) 1 cm sur (OI) 0,5 cm sur (OJ)

2°) a- la forme du nuage de points nous permet-elle de supposer qu'il y a une corrélation linéaire entre le caractère X «note» et le caractère Y «nombre d'élèves» ? Expliquer

b- A l'aide d'un tableau de calcul donner le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

3°) Le groupe étudié contient 100 élèves. On choisit simultanément et au hasard deux élèves de ce groupe et on leur demande leurs notes. On suppose que ce choix soit équiprobable.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux élèves ayant une même note impaire ?

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 4 :

On donne la série statistique double de quatre éléments.

X	A	1,3	b	1,6
Y	4	5	5	6

Trouve a et b sachant que la droite de régression de y en fonction de X a pour équation $y = 5x$.

ACTIVITE 5:

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1°) Représente graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I , J) 0,5 cm pour un an et 3 cm pour unité de tension artérielle.

2°) Calcule la moyenne et la variance des séries statistiques aux caractères X et Y.

3°)a- Trouve une équation de la droite de régression de y en fonction de x.

b- Trouve une équation de la droite de régression de x en fonction y.

c- représente les deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.

5°) une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il normal ?

ACTIVITE 6: cor. p:381 (extrait Bac D 2003 Niger)

Le tableau suivant donne la répartition de cent ménages selon les deux caractères x et y suivants : x désigne le nombre de pièces habitées et y le nombre d'enfants par ménage :

x \ y	0	1	2	3	4	Total $n_{i.}$
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total $n_{.j}$	13	22	32	26	7	100

On donne : $\sum_{j=1}^{4} n_{.j} x_j = 281$; $\sum_{j=1}^{4} n_{.j} x_j^2 = 875$

$\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i = 192$; $\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i^2 = 496$; $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{4} n_{ij} x_j y_i = 604$

1°) a- Calcule pour la série x(en tenant compte des effectifs n_j de chaque valeur de x) la moyenne arithmétique $\bar{x}$, et l'écart type σ_x.

b- Calcule pour chaque série y (en tenant compte des effectifs n_i de chaque valeur de y) la moyenne arithmétique $\bar{y}$, et l'écart type σ_y.

2°° Calcule le coefficient de corrélation linéaire. Existe-il une liaison linéaire entre les deux variable x et y ? Justifie la réponse.

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 7:

On fait une enquête sur 100 familles portant sur :

X : le caractère «nombre d'enfants dans une famille»

Y : le caractère «nombre de pièces d'habitation d'une famille»

X / Y	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1°) a- A partir de ce tableau reconstituer les séries statistiques doubles associées respectivement aux caractères X et Y (séries statistiques marginales).

b- Calcule les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de chacune des séries aux caractères X et Y.

c- Calcule les variances v(x) et v(y)

2°) a- Trouve une équation de la droite de régression de y en fonction de x.

b- Trouve une équation de la droite de régression de x en fonction de y.

c- représente chacune de ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

3°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.

4°) Peut-on prévoir le nombre d'enfants d'une famille vivant dans une villa de six pièces.

ACTIVITE 8 : cor. p :382

A l'Homel on étudie dans une soirée l'âge x des femmes qui ont accouché et le poids y de leurs bébé et on obtient le tableau ci-après :

Age x en année	22	18	20	16	22	26	22	18	22	20	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
Poids y en kg	3,2	2,8	3,2	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,6	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1°) a- Comment appelle-t-on le tableau ainsi obtenu ?

b- Dresse le tableau à double entrée de la série (x, y).

c- Dresse le tableau des effectifs des séries marginales de x et de y.

2°) a- Construis le nuage de point.

b- L'aspect des points du nuage permet-il de justifier un ajustement linéaire ?

c- Calcule le coefficient de corrélation linéaire puis interprète le résultat.

3°) a- Détermine une équation de la droite de régression de y en x.

b- Peut-on faire une bonne estimation du poids d'un bébé accouché par une femme de 27 ans ? si oui donne sa valeur.

4°) On choisit au hasard et simultanément parmi ces nouveau nés, deux enfants.

Calcule la probabilité pour que chacun d'eux pèse au moins 3 kg.

...HOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 9 :

Un laboratoire étudie la croissance d'une souche de bactéries Acétobacter ; il obtient les résultats suivants :

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombres N_i de bactéries par unité de volume (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

Les points de coordonnées $(x_i ; N_i)$ ne sont pas alignés, le laboratoire décide alors de poser $y_i = \ln(N_i)$

1°) Recopie et complète le tableau ci-dessous puis donner les valeurs arrondies au centième près

x_i	4	5	6	7	8	9
y_i	2,61			4,80		

2°) Représente le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

3°) Détermine puis placer les coordonnées du point moyen G.

4°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire et l'interprète.

5°) Donne l'équation de la droite d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrées.

ACTIVITE 10: cor. p: 383 (extrait Bac D 1998 Niger)

On considère la série statistique suivante où α et β sont deux nombres entiers naturels.

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

1°) a- Sachant que la moyenne de x_i est 100 et leur écart type $\frac{20\sqrt{46}}{3}$, calcule α et β.

b- Construis le nuage de points

2°) Détermine par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de x en y.

3°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

ACTIVITE 11 : cor. p : 383 (d'après Bac D Sénégal)

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1°) Détermine a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$

2°) Dans la suite, on suppose que $a = 40$ et $b = 20$. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : Y/X = x_i. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

x_i	2	6	10	14	18	22
m_i	80	113	170	189	199	185

a- Calcule le coefficient de corrélation du couple (X ; M) puis interprète le résultat.
b- Détermine l'équation de la droite de régression de M en X.
c- Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

ACTIVITE 12 :

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a crée une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2014, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2013.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Types de colliers	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier du type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_j de dizaines de colliers vendus au prix x_i.	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier »

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X »

1°) Représente graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère $(X ; Y)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Tu prendras 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2°) Calcule les coordonnées du point moyens G du nuage.

3°) a- Calcule la variance $V(X)$ de X.

b- Calcule la covariance $\text{cov}(X ; Y)$ de la série statistique double à caractère $(X ; Y)$.

c- On admet que $V(Y) = 14{,}50$. Démontre que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à $-0{,}99$.

4°) Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindre carrées.

a- Justifie que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à $-0{,}23$.

b- Démontre qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0{,}23x + 29{,}94$

5°) Pour l'année 2014, madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500francs CFA l'unité . Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

ACTIVITE 13 :

Un sac contient dix (10) boules dont sept (07) blanches numérotées de 1 à 7 et trois (0) noires numérotées de 1 à 3.
On tire successivement deux boules du sac sans remise.

1°) On considère les évènement A : « on obtient deux boules blanches » et B : »on obtient deux numéros impairs ».

a- Prouve que la probabilité de l'évènement A est $\frac{7}{15}$.

b- Calcule la probabilité de l'évènement B.

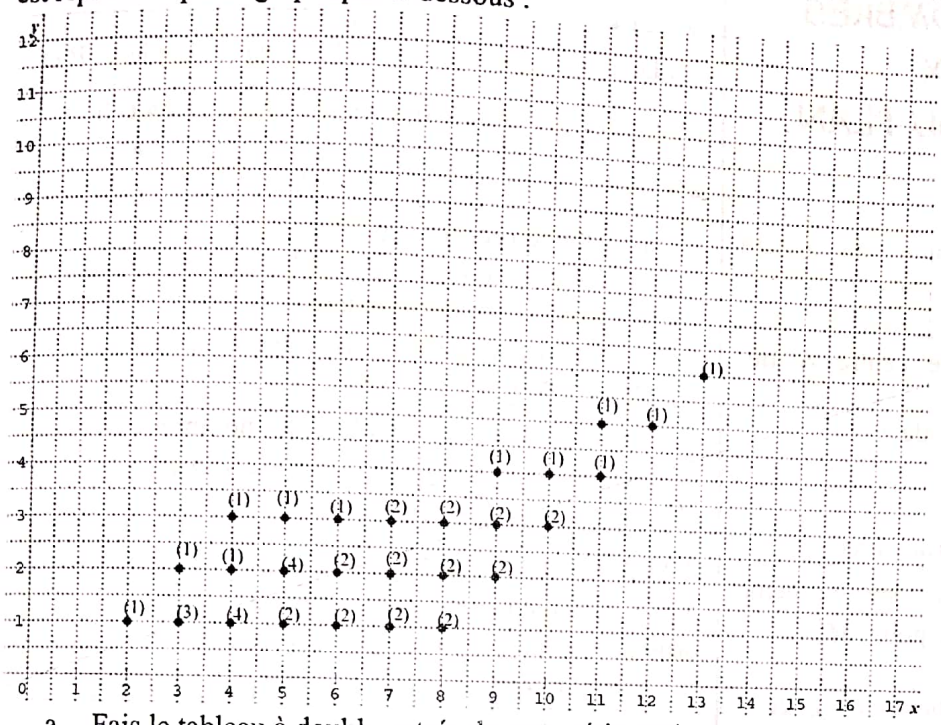
c- Calcule la probabilité de $(A \cap B)$ et déduis-en que A et B sont indépendants.

2°) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues.
Détermine la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527·94262854

Scanné avec CamScanner

3°) La somme x des numéros marqués sur les deux boules et le plus petit des numéros y obtenus sont des caractéristiques que l'on désire étudier. On obtient une série statistique à deux variables x et y dont le nuage de points est représenté par le graphique ci-dessous :



a- Fais le tableau à double entrée de cette série statistique.

b- Dresse le tableau des effectifs des séries marginales associées à cette série double.

c- Calcule le coefficient de corrélations linéaire et apprécie la corrélation entre les deux variables.

ACTIVITE 14 : cor. p : 384

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, et donnée en millions de francs par le tableau suivant :

Temps (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes (y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépense (z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

1°) a- Représente le nuage de points des recettes en fonction du temps.

b- Détermine, par la méthode des moindre carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps. Trace cette droite.

2°) On suppose que la moyenne des dépenses, notée $\bar{z}$, est égale à 7 et que la variance V(z) vaut 3. Détermine α et β.

Scanné avec CamScanner

11. ACTIVITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

ACTIVITE 1 : cor. p : 354

(Les questions 1°) ; 2°) et 3°) sont indépendants)

1°) Prouve par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{2n}+2$ est un entier divisible par 3

2°) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq 6n+7$

3°) Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases} ; \forall n \in IN$$

Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$

ACTIVITE 2 : cor. p : 354

On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}} \end{cases}$$

1°) Calcule U_1 et U_2.

2°) a- Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

b- Prouve que (U_n) est une suite croissante.

c-Déduis-en que (U_n) est convergente.

3°) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

a- Démontre que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer V_n en fonction de n. Déduis-en U_n en fonction de n.

4°) Soit la suite (W_n) tel que $W_0 = 3$ et $2W_{n+1} = W_n + 2V_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ .On pose : $T_n = W_n - 2n + 4$.

a- Démontre que (T_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b- Déduis-en W_n en fonction de n.

c- Calcule en fonction de n, la somme $S_1 = T_0 + T_1 + \cdots + T_n$ et $S_2 = W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1}$

ACTIVITE 3 :

On se propose d'étudier la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \end{cases}$$

Et on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

1°) a- Démontre que pour tout entier n, $U_n \geq 0$

b- Démontre que (U_n) est décroissante

c- Déduis-en que (U_n) est convergente et calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2°) a- Prouve que pour tout entier n de IN, $U_{n+1} = e^{-S_n}$

b- Déduis-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

ACTIVITE 4 :

1°) Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour 1^{cr} terme 7 et pour raison un réel r.

a- Détermine le réel r sachant que $u_3 = 22$.

b- Exprime u_n en fonction de n.

2°) On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par : $v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3v_{n+1} + 2v_n = -\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$

Calcule v_1, v_2 et v_3.

3°) Soit la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n + \frac{1}{n+1}$

a- Démontre que $(w_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

b- Exprime w_n en fonction de n.

4°) On pose $t_n = u_n + w_n$

Calcule en fonction de n la somme $S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}$

ACTIVITE 5 :

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

1°) Calcule U_1 et U_2

2°) Déduis-en que la suite (U_n) est ni arithmétique ni géométrique.

3°) Soit la suite (W_n) définie sur IN par : $W_n = U_n - 6$.

a- calcule W_0

b- Justifie que (W_n) que est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

c- Exprime W_n en fonction de n .

Scanné avec CamScanner

4°) Exprime U_n en fonction de n puis calcule $\lim_{n\to+\infty} U_n$

ACTIVITE 6 :

1°) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ trace la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

2°) Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

a- Représente sur l'axe des abscisses les termes: u_1, u_2 et u_3.

b- Démontre que la suite (u_n) est croissante.

c- Prouve que pour tout entier naturel n, $0\le u_n<2$

d- Déduis-en que la suite (u_n) est convergente.

3°) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{1+u_n}{2-2u_n}$

a- Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont tu détermineras la raison.

b- Exprime v_n, puis u_n en fonction de n.

c- Déduis-en la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$

4°) On pose : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

Exprime S_n en fonction de n et détermine $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ACTIVITE 7 : cor. p : 355

On considère la suite $(U_n)_{n\ge2}$ des nombres réels strictement positifs, définie par son premier terme $U_2=e^3$ et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, par la relation de récurrence : $(U_{n+1})^2\cdot e=U_n$. On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, $V_n=\dfrac{1+\ln U_n}{2}$.

1°) Pour tout entier naturel strictement positif, exprime V_{n+1} en fonction de $\ln U_n$ puis en fonction de V_n.

2°) Déduis-en la nature de la suite (V_n).

3°) Exprime V_n et U_n en fonction de n.

4°) a- Les suites (U_n)et (V_n) sont-elles convergentes ?

b- Calcule en fonction de n la somme $S=V_2+V_3+\cdots+V_n$.

5°) On définit la suite des nombres réels (P_n) par $P_n=U_2\times U_3\times\cdots\times U_n$ et $P_2=U_2$.

Calcule P_n en fonction de n.

ACTIVITE 8: cor. p : 356 (d'après bac D Niger)

On considère la suite réelle $(U_n)_{n\in IN^*}$ définie par :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n=\int_{n-1}^{n}(\ln 3)^{-x}\,dx$.

1°) Prouve que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

2°) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est convergente.

3°) On définit la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ par :

$S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$ pour $n\ge1$.

a- Exprime S_n en fonction de n.

b- La suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ est-elle convergente ?

ACTIVITE 9 :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n=\int_{n-1}^{n} e^{\frac{-1}{4}x}\,dx$

1°) Calcule U_n en fonction de n.

2°) a- Démontre que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est une suite géométrique dont tu donneras la raison et le premier terme.

b- Détermine la limite de la suite (U_n).

3°) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$: $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$

a- Calcule, par deux méthodes différentes, S_n.

b- Détermine la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) On pose $V_n=\ln(U_n)$, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

a- Démontre que la suite $(V_n)_{n\ge1}$ est une suite arithmétique.

b- Soit $T_n=V_1+V_2+\cdots+V_n$ et $P_n=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$

i) Calcule T_n en fonction de n.

ii) Déduis-en P_n en fonction de n.

ACTIVITE 10 :

Le 1er Janvier 1999, une personne X a placé une somme de 500 000F à intérêts composés au taux de 9% (un capital est placé à un intérêts composés lors que les intérêts produits à la fin de chaque année sont ajoutés au capital). On notera C_n le capital au premier janvier de l'année $(1999+n)$.

1°) a- Calcule C_1 et C_2

b- Etablie le lien entre C_n et C_{n+1}

c- Déduis-en C_n en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

2°) Au 1er janvier 2010, X aura besoin de 200 000F pour acheter une maison.
Le capital qu'il possèdera alors sera-t-il suffisant ? sinon combien devra-t-il emprunter ?
3°) A quel taux aurait-il dû placer son capital le 1er janvier 1999 pour disposer des 200 000F au 1er janvier 2010 ?

ACTIVITE 11 : cor. p : 356

On considère un entier naturel non nul P_0.
Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(1{,}032)^n + \ln P_0$

1°) Démontre que (u_n) est une suite arithmétique que tu caractériseras.
2°) On considère la suite (P_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = e^{u_n}$
Exprime P_n en fonction de n et de P_0, puis déduis-en que la suite (P_n) est géométrique. Tu préciseras la raison q et le premier terme.
3°) P_n représente la population béninoise au premier Août de l'année $1960+n$ avec : $n \in \mathbb{N}$ et $r = q - 1$ représente le taux d'accroissement naturel de la population du Bénin, c'est-à-dire que la population augmente chaque année de $100\,r\,\%$.

a- Détermine la période T au bout de laquelle la population double.
b- D'après le recensement général de Février 1992, la population béninoise s'élève au 1er Août 1992 à 4. 845.359
c- Détermine la population du Bénin d'abord au 1er Août de l'an 2014, puis au 1er Août de l'an 1960, c'est-à-dire P_0.

ACTIVITE 12 : cor. p : 357

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{\ln 2}x + (1-2x)\log_2(x)$

Partie A :
Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{x} - 2\ln x\right)$

1°) Etudie les variations de la fonction g.
2°) Démontre que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α. Donne-en la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α.
3°) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B :
4°) Calcule $f'(x)$, pour $x \in]0;+\infty[$
5°) a- Etudie les variations de f
b- Prouve que $f(\alpha) = \dfrac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$
6°) On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan d'unité graphique 2 cm.

a- Détermine l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
b- Etudie les branches infinies de (C) puis construis (C)

Partie C :
On considère la suite $(I_n)_{n\in IN}$ définie par : $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right)dx$, où $a_n = e^{\frac{n+1}{2}}$, pour $n \in \mathbb{N}$

7°) Justifie que la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 2\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et calcule I_0
8°) Démontre que (I_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
9°) Calcule la somme $S_n = I_0 + I_1 + \cdots + I_n$

ACTIVITE 13 : cor. p : 359

n est un entier naturel non nul.
On considère les équations différentielles
$(E) : u' + \dfrac{1}{n}u = e^{-\frac{x}{n}}$ et $(E') : u' + \dfrac{1}{n}u = 0$

1°) Résous l'équation différentielle (E').
2°) Détermine la constante réelle a pour que la fonction $h : x \mapsto axe^{-\frac{x}{n}}$ soit une solution de (E).
3°) Prouve qu'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $(u-h)$ est une solution de (E').
4°) a- Déduis-en toutes les solutions de (E).
b- Détermine la solution de (E) qui vérifie : $u(0) = 0$
5°) Soit la suite (u_n) défini par : $u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}}dx$.

a- Prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -(n^2+n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$
b- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \le u_n \le \dfrac{1}{2}$
c- Déduis-en la convergente de la suite (u_n)

ACTIVITE 14 : cor. p :360 (extrait Bac D 2004 Niger)

I/ On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} + \dfrac{3}{5}u_n$ (1).

Scanné avec CamScanner

1°) Prouve que la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont tu détermineras le premier terme et la raison.

2°) Détermine v_n en fonction de n. Déduis-en u_n en fonction de n.

3°) Détermine la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II/ On définit la suite (w_n) par ses premiers terme w_0 et w_1 ($w_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $w_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}$.

1°) Démontre que la suite (t_n) définie par : $t_n = \ln(w_n)$ (où ln désigne le logarithme népérien) vérifie la relation (1).

2°) Déduis-en la limite de la suite (t_n), puis de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 15: cor. p :361 (extrait concours APE 2015)

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Tu prendras pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_n = \frac{1+i}{2} z_n$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1°) a-Calcule z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifie que z_4 est un nombre réel.

b- Place les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

a- Justifie que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b- Donne l'expression de son terme général u_n en fonction de n.

3°) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4°) Détermine la nature exacte du triangle OA_nA_{n+1}.

5°) Pour tout entier naturel n, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $l_n = A_0A_1 + A_0A_1 + \ldots\ldots + A_{n-1}A_n$.

a- Exprime l_n en fonction de n.

b- Etudie la convergence de la suite (l_n).

ACTIVITE 16: cor. p:362 (extrait bac D 2002 Niger)

I/ Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

Détermine la solution g de (E) vérifiant les conditions suivantes : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$; e désignant la base du logarithme népérien.

II/ 1°) On pose $h(x) = (1+x)e^{-x}$

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{x+1}}, \text{ si } x \in]-1; +\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

a- Démontre que f est continue sur $[-1; +\infty[$.

b- Etudie la dérivabilité de f à droite en $x = -1$.

c- Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f$.

d- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variations.

2°) Trace la courbe de représentative Γ de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm).

3°) Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

a- Démontre que f_1 est une bijection de $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que tu préciseras. On noter f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1. Calcule $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$.

c- Trace la courbe représentative Γ^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ.

4°) a- Prouve que pour tout $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$, on a : $0 \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e$.

b- Déduis-en que : $0 \le \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx \le \frac{e\sqrt{2}}{4}$.

c- Soit S l'aire en cm² du domaine du plan limité par les droites d'équations : $x = 0$; $x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe Γ^{-1}.

Donne un encadrement de S à 10^{-2} près.

III/ Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

1°) Démontre que pour tout réel x de l'intervalle $[n; n+1]$, on a : $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$.

Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

2°) Démontre que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

NB : on prendra : $e = 2{,}72$; $\sqrt{e} = 1{,}65$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 17: cor. p :364

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par: $f(x)=|x-1|-2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On désign,e par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A :

1°) Prouve que f est définie sur $D_f=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2°) Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

3°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1. Donne une conclusion graphique.

4°) Etudie les variations de f.

5°) Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 appartenant à l'intervalle $]-2;-1[$

6°) Démontrer que les droites d'équations $y=x-1$ et $y=1-x$ sont asymptotes à la courbe (C_f).

7°) Construis (C_f). Tu traceras les demis-tangentes à droite et à gauche du point d'abscisse 1 de la courbe (C_f).

8°) On donne : $g:[1;+\infty[\to f([1;+\infty[)$
$x\mapsto g(x)=f(x)$

Démontre que g est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.

9°) Trace dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g

10°) Prouve que (C_f) et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y=x$. Calcule les coordonnées de A.

Partie B :

Soit α un réel appartenant à $]0;1]$

11°) Calcule l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M $(x;y)$ tels que : $\begin{cases}\alpha\le x\le 1\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

(Tu pourras utiliser une intégration par partie)

12°) Calcule la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

Partie C :

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par :

$u_n=n-1-2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=f(n)$

13°) Prouve que (u_n) est une suite monotone.

14°) Quelle est sa limite ?

15°) Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$

a- Démontre que : $S_n=\frac{n(n-1)}{2}+2\ln(n+1)$

b- Quelle est la limite de S_n.

ACTIVITE 18 : cor. p :366 (extrait Bac D 2006 Togo)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+3}-|x-1|$ et on note par($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

A/

1°) a-Démontre que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2+3}>|x|$

b- Déduis-en le signe de $\sqrt{x^2+3}+x$ et celui de $\sqrt{x^2+3}-x$ sur $\mathbb{R}$.

B/

2°) a- Prouve que f est continue en 1.

b- Etudie la dérivabilité de f en 1 et interprète les résultats obtenus.

c- Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (tu pourras utiliser les résultats de A/)

d- Complète l'étude des variations de f.

e- Etudie les branches infinies de ($\mathscr{C}$) et construis ($\mathscr{C}$)

3°) soit g l'application définie par :

$g:]-\infty;1]\to]-1;2]$
$x\mapsto g(x)=f(x)$

a- Démontre que g admet une application réciproque notée g^{-1}.

b- Définie explicitement g^{-1}.

c- Construis la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que ($\mathscr{C}$).

d- Détermine la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0)=0$.

e- Soit **A** l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=-1$ et $x=1$.Calcule **A** en utilisant la courbe (Γ).

C/ On désigne par I l'intervalle $[1;2]$et on donne la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$.

4°) a- Démontre que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans I.

b- Démontrons que pour tout x de I on a : $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

c- Déduis-en que pour tout x de I on a : $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{2}|x-\alpha|$

5°) a- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

b- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

c-Etablie que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \le \frac{1}{2^n}$.

d-Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et précise sa limite.

ACTIVITE 19 : cor. p : 369

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{2x} & \text{,si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} & \text{,si } x \ge 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $g(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$

1°) Etudie les variations de g.

2°) Déduis que pour tout élément x de $]-\infty;0[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B :

3°) Justifie que l'ensemble de définition de f est D = $\mathbb{R}$.

4°) Etudie la continuité de f en 0.

5°) a- Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0.

c- Donne les relations définissant les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

6°) a- Démontre que pour tout x élément de $]-\infty;0[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2(1-x)}$ puis déduis-en le signe de $f'(x)$.

b-Pour tout élément x de $]0;+\infty[$, Calcule $f'(x)$ puis donne son signe.

c- Donne le sens de variation de f.

7°) a- Calcule les limites de f en $+\infty$ en $-\infty$

b- Etudie les branches infinies de (C).

c- Trace (C).

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

8°) a- Etudie le sens de variation de h.

b- Calcule $h(0)$ et la limite en $+\infty$ de h

c- Déduis-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$ et que : $\frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{1}{2}$

9°) Posons : $I = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

a- Démontre que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

b- Calcule $f''(x)$ pour tout x élément de $[0;+\infty[$ puis déduis-en le sens de variation de f' sur I.

c- Déduis-en que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \le \frac{1}{4}$

d- Déduis-en que $\forall x \in I$, $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{4}|x-\alpha|$

10°) Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite de nombre réels définie par $U_0 = \frac{1}{4}$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(U_n) \in I$

b- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$

c- Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

d- Détermine la limite de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.

ACTIVITE 20 : cor. p : 372

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

On désigne de (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité graphique : 2 cm

Partie A :

1°) a) Démontre que pour tout nombre réel x, on a : $f(-x) + f(x) = 2$

Déduis-en que (Γ) possède un centre de symétrie A dont tu préciseras les coordonnées.

b) Etudie les variations de f puis précise les asymptotes de (Γ).

2°) a- Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.

b- On considère la fonction :

$\varphi : IR \to IR$

$x \mapsto f(x) - (x+1)$

i) Démontre que, pour tout nombre réel x ;

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2,$$

Scanné avec CamScanner

ii) Déduis-en le sens de variation de la fonction φ.

iii) Calcule $\varphi(0)$ puis déduis le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

c- Déduis-en, de ce qui précède, la position de la courbe (Γ) par rapport à la droite (T).

3°) Trace (T) et (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie B :

4°)a- Démontre que, pour tout x réel, $f(x)=x$ si et seulement si $\varphi(x)=-1$.

b- Déduis-en que la droite (D) d'équation $y=x$ coupe la courbe (Γ) en un seul point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]2;3[$.

5°) a- Démontre que pour tout nombre réel x, $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

Déduis une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b- Exprime, en fonction de α, l'aire du domaine plan limité par la courbe (Γ), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Partie C :

On désigne par I l'intervalle $[2;3]$

6°) a- Démontre que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=4\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{(e^x+1)^2}\right)$

b- Déduis-en que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

c- Déduis-en que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $|f(x)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

7°) On définis la suite (U_n) d'éléments de l'intervalle I par : $\begin{cases}U_0=3\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}, \forall n\in IN$

a- Démontre que pour $n\in IN$, $U_n\in I$ et $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$

b- Démontre que pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}|3-\alpha|$,

Détermine un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

ACTIVITE 21 :

A- On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie pour tout réel x par : $g(x)=e^x(1-x)-1$

1°) Etudie les variations de g.

2°) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$

B- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{2e^x+x-2}{e^x-1}, \text{ si } x\neq 0\\ f(0)=3\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

3°) a- Démontre que f est dérivable au point O et $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ (tu pourras utiliser le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x\mapsto e^x$)

b- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

4°) a- Démontre que la droite (D) d'équation $y=2-x$ est une asymptote à (C)

b- Etudie la position de (C) par rapport à (D)

5°) a- Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b- Trace avec soin la courbe (C)

6°) Soit la fonction h définie par : $h(x)=x-f(x)$

a- Etudie le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.

b- Déduis-en que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]2;\dfrac{5}{2}\right[$.

C- On pose : $I=\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$

7°) a- Démontre que pour tout réel x de I on a : $g(x)\ge -20$ et $(e^x-1)^2\ge 40$

b- Déduis-en que pour tout réel x élément de I, on a : $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

c- Démontre que pour tout x élément de I, on a : $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$ et $f(x)\in I$

8°) Soit U la suite numérique définie par : $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}; \forall n\in IN$

a- Démontre que pour tout entier naturel n, on a : $U_n\in I$

Scanné avec CamScanner

Déduis-en que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$, puis $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b- Déduis-en que la suite U converge vers une limite que tu préciseras.

9°) a- Démontre que pour tout entier naturel n, on a : $(U_{n+1}-\alpha)(U_n-\alpha) \le 0$ et déduis-en que α est compris entre U_n et U_{n+1}

b- Trouve un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, on ait : $|U_n-\alpha| \le 10^{-3}$

c- Déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-3} près sous la forme U_p où p est un entier naturel que tu préciseras.

ACTIVITE 22 : cor. p : 375

Soit f la fonction définie, sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$, par $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$ et l'on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; *(unité : 2 cm)*.

A-

1°) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2°) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f.

3°) a- Démontre que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e.

b- Ecris une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I.

4°) Etudie suivant les valeurs de x, la position relative de (C_f) et de la droite (D) d'équation $y=x$.

5°) Trace (T), (D) et (C_f).

B- Soit l'intervalle $K=[1;e]$.

6°) a- Démontre que $f(K)$ est inclus dans K.

b- Démontrons que, pour tout x de K, $0 \le f'(x) \le \frac{1}{4}$

c- Démontre que, pour tout x de K, on a : $|f(x)-1| \le \frac{1}{4}|x-1|$

7°) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$, $\forall n \in IN$

a- Démontre par récurrence que U_n appartient à K.

b- Démontre que $\forall n \in IN$, $|U_{n+1}-1| \le \frac{1}{4}|U_n-1|$

c- Démontre que $\forall n \in IN$, $|U_n-1| \le \frac{1}{4^n}$ et déduis la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 23 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $\begin{cases} f(x)=\ln(1-xe^{-x}) ; si\ x \le 0 \\ f(x)=x\sqrt{x} \quad ; si\ x>0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

I/ Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=1-xe^{-x}$

1°) Etudie les variations de u.

2°) Justifie que pour tout nombre réel x, $u(x)>0$.

3°) Déduis-en que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

II/

4°) Justifie que f est continue en 0.

5°) Etudie la dérivabilité de f en 0 (Tu pourra poser : $t=-xe^{-x}$)

Déduis-en que la courbe (C_f) de f admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes dont tu préciseras les équations.

6°) Etudie les variations de f.

7°) Justifie que $\forall x \in]-\infty;0[$:

a- $f(x)=\ln(e^x-x)-x$

b- $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(e^x-x)}{e^x-x}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)-1$

c- Trace la courbe (C_f) de f.

8°) La rotation de la portion du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$ engendre un solide (S). Calcule le volume de (S).

9°) Soit la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\int_x^0 f(t)\,dt$.

a- Justifie que F est dérivable sur $]-\infty;0]$

b- Etudie le sens de variation de F.

c- Calcule $F(-1)$ par la méthode des trapèzes en partageant l'intervalle $[-1;0]$ en 4 intervalles de même amplitude.

Scanné avec CamScanner

III/ Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0;+\infty[$. On définit la suite (U_n) par :

$\begin{cases} U_0 = a \ , a \in IR \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$, $\forall n \in IN$.

10°) Prouve que la suite (U_n) est constante si $a = 1$

11°) On donne $a = \frac{1}{2}$.

a- Démontre que la suite (U_n) est décroissante.

b- Prouve que : $\forall n \in IN$, $U_n \geq 0$.

c- Justifie que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite.

ACTIVITE 24:

Soif f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, où l'unité de longueur est 4 cm.

1°) Dresse le tableau de variation de f.

2°) Soit I le point de coordonnées $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$

a- Vérifie que I appartient à $(\mathcal{C})$

b- Démontre que I est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

c- Prouve que la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

3°) Dans cette question on se propose d'étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (T).

a- Justifie que pour tout réel x, on a : $f'(x) \leq \frac{1}{4}$

b- Soit x un réel strictement positif. Démontre que l'on a : $f(x) \leq \frac{1}{x}x + \frac{1}{2}$

c- Déduis-en les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (T).

4°) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T).

5°) Calcule, en cm^2, la mesure de l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 2$.

6°) Pour tout entier non nul n, on pose

$U_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln n)dx$ f (x log n)dx

a- Vérifie que $f(x+\ln n) = \frac{ne^x}{1+ne^x}$

b- Calcule un en fonction de n.

c - Calcule la limite de un quand n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 25: cor. p :376

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \text{ , si } x \in]0;1[\\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1} \quad \text{, si } x \in [1;+\infty[\end{cases}$

On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A :

1°) a- Démontre que f est continue en 0 et en 1.

b- Démontre que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$

Interprète graphiquement ces résultats.

c-Démontre que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale que tu préciseras.

2°) Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par : $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$.

a- Résous l'équation $g(x) = 0$.

b- Déduis-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

c- Prouve que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = g(x)$.

3°) Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 2$

a- Démontre que h est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2};2\right[$ c-

Déduis-en, suivant les valeurs de x, le signe de $h(x)$.

c- Prouve que pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$.

4°) a- Utilise l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour démontrer que : $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$ et dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

b-Trace $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0;3]$ en précisant les demi tangentes en 0 et en 1.

Scanné avec CamScanner

On donne pour la construction :

x	0,5	1	α=1,6	2	3
$f(x)$	-0,69	0	0,25	0,22	0,12

Partie B :

Soit $\alpha \in \left]\frac{3}{2};2\right[$, le réel déterminé dans la question 3°)b- de la partie A.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{(t-1)^n}{e^t-t-1}dt.$$

a- Utilise la monotonie de f sur $[1;\alpha]$ pour démontrer que :

$$0 \le I_1(\alpha) \le \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}.$$

b- Etudie le sens de variation de la fonction : $t \mapsto e^t-t-1$ sur $[1;+\infty[$ .Déduis-en que pour tout $t \ge 1$, $e^t-t-1 \ge e-2$.

c- Prouve alors que :

$$0 \le I_n(\alpha) \le \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}.$$

d- Démontre que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente. Précise sa limite.

6°) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que : $a+b=1$.

a- En remarquant que : $f(x) \ge -\ln 2$, pour tout $x \in]0;1[$, prouve que :

$$a\ln\frac{1}{a}+b\ln\frac{1}{b} \le \ln 2$$

b- Pour quelles valeurs de a et b, la dernière inégalité est–elle une égalité ?

ACTIVITE 26: cor. p :379

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2x^3-3x^2+1}{e^x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) a- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement.

b- Prouve que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontale dont l'une est au point d'abscisse 1.

2°) a- Dresse le tableau de variation de f.

b- Construis la courbe (C).

3°) Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

a- Justifie que l'écriture précédente définie bien une suite numérique (I_n).

b- Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peux-tu en conclure ?

c- Donne un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calcule cette limite.

4°) a- Calcule I_0.

b- Démontre en utilisant une intégration par parties, que pour tout n : $I_{n+1}=\frac{-1}{e}+(n+1)I_n$.

c- Calcule l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=1$.

ACTIVITE 27:

Partie A :

On considère la fonction numérique h définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x\ln x}, si\ x>1\\ 1 \quad , si\ x=1\end{cases}$

1°) a-Démontre que h est continue à droite en 1.

b- Prouve que $\forall x>1$, $\ln x<x-1$ puis déduis-en que h est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

2°)a-Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis établie le tableau de variation de h.

b- Déduis-en que pour tout $x \ge 1$, $0 \le h(x) \le 1$.

Partie B :

On considère la fonction numérique g définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}, si>1\\ \ln 2 \quad , si\ x=1\end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3°) a- Prouve que pour tout $x>1$, $\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

b- Vérifie que pour tout $x>1$, $g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

c- Prouve que pour tout $x>1$, $g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

4°) a- Démontre que pour tout $x>1$, $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x) \le g(x)-\ln 2 \le \left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527·94262854

Scanné avec CamScanner

b- Déduis-en que la fonction g est dérivable à droite en 1.

c- Démontre que $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

5°) a- Démontre que g est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et pour tout $x>1$, $g'(x) = \dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

b-Déduis-en que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$ et donne le tableau de variation de g.

c- Construis $(\mathcal{C})$

Partie C :

A/

6°) Démontre que la fonction $f : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une équation de l'intervalle $[1;+\infty[$ sur $]-\infty;\ln 2]$

7°) Déduis-en qu'il existe un unique réels α appartenant à $]1;+\infty[$ tel que $1 + g(\alpha) = \alpha$

B/ On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq U_0 \leq \alpha \\ \forall n \in IN, U_{n+1} = 1 + g(U_n) \end{cases}$$

8°) a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n < \alpha$

b- Prouve que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est strictement croissante.

c- Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

9°) a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b- Prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

c- Déduis-en une dernière fois que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

Scanné avec CamScanner

9. ACTIVITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

ACTIVITE 1 :

Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y' - \tan x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \ln 2$.

2) $y'' - 4e^{2x} + 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 5$ et $y'(0) = -3$

3) $y' - y\ln 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(2) = -8$

4) $y'' - 4y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$

5) $4y'' - 12y' + 9y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -2$

6) $y'' - 6y' + 10y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(\pi) = 3$ et $y'(\pi) = -2$

7) $y'' + y' = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = -3$ et $y'(0) = 2$

8) Donne les solution générale de l'équation : $y'' - 5y' + 4y = 0$

ACTIVITE 2 :

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' - 2y = 4x$

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x - 1$

a- Vérifie que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b- Démontre qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de $(E_2) : y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$

2°) a- Détermine les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$

b- Déduis-en les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$

c- Détermine la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$

ACTIVITE 3:

1°) Résous l'équation différentielle : $y'' - 2y' - 2y = 0$

2°) a- Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (1+\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3})y = 3 \end{cases}$$

b- Trouve la solution u de l'équation précédente vérifiant $u'(0) = 0$ et $u(0) = 3$

ACTIVITE 4 :

On donne les équations différentielles

$(E) : y'' + y = \dfrac{3}{2}\sin\dfrac{x}{2}$ et $(F) : y'' + 4y' + ay = 0$ avec a un nombre réel donné.

On considère les fonctions : $u : x \mapsto 2\sin\dfrac{x}{2}$ et $v : x \mapsto (x+1)e^{-2x}$

1°) Démontre que la fonction u est une solution de (E)

2°) Démontre qu'une fonction φ est une solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - u$ est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y = 0$.

3°) a- Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de (E).

b- Détermine la solution φ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 1$.

4°) a- Détermine le réel a pour que la fonction v soit une solution de (F)

b-Calcule la valeur moyenne de la fonction v sur $I = [-1\,;0]$

ACTIVITE 5 :

1°) Résous l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

2°) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E').

3°) a- Démontre que g est solution de (E') si et seulement $g - h$ est solution de (E).

b- Résous alors (E').

c- Détermine la solution f de (E) telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

ACTIVITE 6:

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^x}$

1°) Vérifie que la fonction $f : x \mapsto e^{-2x}\ln(1+2e^x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E)

Scanné avec CamScanner

2°) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y' + 2y = 0$.

3°) Résous (E') et déduis-en les solutions de (E)

ACTIVITE 7 : cor. p : 330

Soit l'équation différentielle $(E): y'' + 4y' + 4y = -4x$

Partie A :

1°) a- Détermine les nombre réels a et b pour que la fonction $v: x \mapsto ax + b$, soit solution de (E).

b- Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'' + 4y' + 4y = 0$

c- Résous l'équation (E') puis détermine la solution de (E) dont la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm passe par le point $J(0;2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -2x$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$

2°) a- Etudie les variations de la fonction dérivée f' de f.

b- Démontre que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$

c- Déduis-en le signe de $f'(x)$.

3°) a- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b- Démontre que : $f(\alpha) = \dfrac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$ et que $2{,}83 < f(\alpha) < 3{,}16$.

c- Justifie que la droite $(D): y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, puis précise la seconde branche infinie.

d- Trace (C) avec soin (prends $\alpha = -0{,}64$)

4°) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à -1

a- Calcule l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$.

b- Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

ACTIVITE 8 : cor. p : 332

Soit l'équation différentielle suivante : (E_1) :

$y'' + 3y' + 2y = \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$

1°) Démontre que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x}\ln x$ est une solution particulière de l'équation (E_1)

2°) Démontre qu'une fonction k, définie sur $]0;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si la fonction $k - g$ est une solution de l'équation différentielle (E_2) : $y'' + 3y' + 2y = 0$

3°) Détermine les solutions de l'équation différentielle (E_2)

4°) Déduis-en l'ensemble solution de l'équation (E_1)

ACTIVITE 9 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (1) :

$y' - 2y = xe^{\frac{x}{2}}$

1°) Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Soient a et b deux réels, u la fonction définie par $u(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{2}}$

Détermine a et b pour que u soit une solution de (1)

3°) a- Prouve que v est solution de (1) si et seulement si $v - u$ est solution de (2).

b- déduis les solutions de (1).

c- Détermine la solution de (1) qui s'annule en 0.

ACTIVITE 10 :

On donne l'équation différentielle (E) : $f'' + 2f' + f = 0$.

On pose pour tout réel x, $k(x) = e^{-x}h(x)$.

1°) Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $h''(x) = 0$

2°) Résoudre l'équation différentielle $h'' = 0$.

3°) Déduis-en la solution générale f de (E).

4°) Détermine toutes les primitives de f sur IR.

ACTIVITE 11 :

1°) Soit $f: x \mapsto f(x) = 1 - x^2e^{-x}$

2°) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = ae^{-x} + b$ où a et b sont deux réels à préciser.

3°) Déduis-en le calcule du réel $K = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

ACTIVITE 12 :

On considère l'équation différentielle $(F): y'' + 2y' + 5y = 0$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

par : $h(x)=e^{-x}\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ et H est la primitive de h qui s'annule en 0.

(T) est la droite d'équation $y=-x+1$.

1°) a- Vérifie que h est solution de (F).

b- Justifie l'existence de H et exprime H en fonction de h et h'.

2°) Calcule alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

3°) a- Résous (F).

b- Détermine la solution k de (F) telle que $k(0)=0$ et la tangente (T_0) à la courbe représentative de k au point d'abscisse $x_0=0$ soit perpendiculaire à la droite (T).

ACTIVITE 13 :

On donne l'équation différentielle $(E): y''+y=0$:

1°) Résous (E)

2°) Démontre que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $g(0)=-1$ et $g'(0)=\sqrt{3}$ est la fonction définie par : $g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

3°) Etudie les variations de g sur $[-\pi;\pi]$.

4°) Représente la courbe $(\mathcal{C})$ de g sur $[-\pi;\pi]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 2cm.

5°) Calcule le volume du solide (S) engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-\frac{5\pi}{6}$ et $x=\frac{\pi}{6}$

ACTIVITE 14 :

I/ Soit (E) l'équation différentielle $y'+y=\frac{1}{e^x-1}$ où y est une fonction, de la variable réelle x, dérivable sur $]0;+\infty[$.

1°) Résous l'équation différentielle sans second membre associée à (E)

2°) a- l'on s'intéresse aux solutions particulière φ de (E) de la forme $\varphi(x)=\frac{h(x)}{e^x}$, où h est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.

Sachant que φ est une solution de (E), détermine h.

b- Déduis-en la solution générale de (E)

c- Parmi les solutions de (E) détermine la solution qui vérifie la condition $f(\ln 2)=0$

II/ Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$

Soit α un nombre réel tel que $\alpha>2$. On pose $I(\alpha)=\int_{\ln 2}^{\ln\alpha} f(x)\,dx$

3°) a- Détermine une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\frac{e^x}{e^x-1}$

b- Déduis-en une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{e^x-1}$ (on remarquera que $\frac{e^x}{e^x-1}=1+\frac{1}{e^x-1}$)

4°) En utilisant le fait que f soit une solution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouve que : $I(\alpha)=-f(\ln\alpha)+\ln(\alpha-1)-\ln\alpha+\ln 2$

5°) Déduis-en que $I(\alpha)=-\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha}+\ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\ln 2$

6°) Calcule $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$

ACTIVITE 15 :

On considère les équations différentielles

$(E): y''+2y'+2y=0$ et $(F): y''+2y'+2y=-x^2$

1°) Résous l'équation différentielle (E) et déduis-en la solution f de (E) telle que la tangente à la courbe (C) de la fonction f à l'origine O soit la droite d'équation $y=x$

2°) a- En observant que si g est solution de (E) alors $g=-\frac{1}{2}\left(2g'+g''\right)$, donne alors une primitive de g en fonction de g et g'.

b- Déduis-en alors une primitive de la fonction $x\mapsto e^{-x}\sin x$ et puis détermine l'intégrale $f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$ en fonction de x.

3°) a- Détermine trois réels a, b et c tels que la fonction $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto ax^2+bx+c$ soit une solution de l'équation (F)

a- Justifie que si une fonction h est solution de (E), alors $h+u$ est solution de (F)

b- Résous l'équation (F)

c- construis la courbe (C') dans le même repère que (C)

ACTIVITE 16 :

On considère l'équation différentielle suivante

$(E): y'+2y=x+1$

Scanné avec CamScanner

et on pose : $F(x)=\int_{-1}^{x} e^{2t}(t+1)\,dt$

1°) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $F(x)$

2°) Pour tout nombre réel x, on pose $S(x)=g(x)e^{-2x}$ où g est une fonction dérivable de IR vers IR.

a- Prouve que si la fonction S est une solution de (E), alors pour tout réel x de IR, $g'(x)=e^{2x}(x+1)$

b- Réciproquement prouve que si g vérifie cette relation, alors S est une solution de (E)

c- En utilisant la question 1°), détermine toutes les fonctions g vérifiant pour tout $x\in IR$, $g'(x)=e^{2x}(x+1)$

3°) a- Déduis-en alors que les solutions de (E) sont les fonctions : $x\mapsto\frac{1}{4}(2x+1)+\frac{1}{4}e^{-2-2x}+ke^{-2x}$ où k est une constante réelle

b-Détermine la solution de (E) pour laquelle l'image de 0 est $\frac{1}{4}$

3°) Déduis-en alors les solutions de (E)

ACTIVITE 17 :

On donne l'équation différentielle suivante $(E_1): y'+y=2(x+2)e^{-x}$

Partie A :

1°) a- Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ soit solution de l'équation (E_1)

b- Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $(E_2): y'+y=0$.

c- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) puis déduis-en la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1)

2°) Détermine la fonction f solution (E_1) dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $K(0;4)$

Partie B :

3°) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x)=(x+2)^2e^{-x} & ,si\ x\in[0;+\infty[\\ h(x)=x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)+4 & ,si\ x\in\left]-\infty;0\right[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction h

a- Démontre que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

b- Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

c- Démontre que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=2$

4°) a- Etudie la continuité de h en 0.

b- Etudie la dérivabilité de h en 0 puis interprète les résultats obtenus.

5°) Etudie le sens de variation de h sur $[0;+\infty[$.

6°) a- Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0[$.

b- Etudie le sens de variation de h' sur $]-\infty;0[$.

c- Dresse le tableau de variation de h' sur $]-\infty;0[$.

d- Déduis-en le signe de $h'(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0[$.

7°) a- Dresse le tableau de variation de h.

b- Construis la courbe (C)

8°) a- Démontre que pour tout x élément de $[0;+\infty[$, $h(x)=(2x+4)e^{-x}-h'(x)$

b- A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $\int_0^3(2x+4)e^{-x}dx$.

9°) Déduis-en en unité d'aire, l'aire du plan délimitée par la courbe représentative (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=3$.

ACTIVITE18 :cor. p : 332

On considère l'équation $(E): y_1''+2y_1'+5y_1=10t-1$ avec $y_1(0)=\sqrt{2}-1$; $y_1'(0)=2+\sqrt{2}$ et on pose $u=y_1-2t+1$, t étant une variable réelle.

1°) A partir des dérivées première et seconde u' et u'', démontre que u est solution d'une équation différentielle (E_1) du second ordre sans second membre.

2°) Résous l'équation différentielle (E_1) puis déduis l'expression de y_1 en fonction de t.

3°) y_2 est une fonction numérique de la variable réelle t définie par : $y_2=e^t y_1-2te^t+e^t$.

Démontre y_2 peut s'écrire sous la forme $y_2=r\cos\theta$ où r est un réel strictement positif et θ une fonction de t à préciser.

4°) On considère l'équation différentielle : $y''+4y=8$ avec $y(0)=2-\sqrt{2}$; $y'(0)=2\sqrt{2}$ et on pose $v=y-2$

a- Démontre que v est solution d'une équation différentielle (E_2) du second ordre sans second membre.

b- Résous l'équation différentielle (E_2) puis déduis-en l'expression de y en fonction de t.

c- Démontre que : $y-2=r\sin\theta$ où r et θ sont les valeurs trouvées en 3°)

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 19 : co[illegible] p [illegible] (extrait [illegible] cours APE 2015)

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale. En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$(E): y' = -\dfrac{1}{20}y(3-\ln y)$.

Tâche : Tu vas aider le laboratoire en répondant aux consignes suivantes :

1°) Démontre l'équivalence suivante :

Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$.

2°) a- Détermine une fonction constante h_0 solution de l'équation différentielle $(H): y'=\dfrac{1}{20}y-\dfrac{3}{20}$.

b- Vérifie que si deux fonctions h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H) alors la fonction h_1-h_2 est solution de l'équation différentielle $(H'): y'=\dfrac{1}{20}y$. Déduis alors la solution générale de l'équation de l'équation différentielle (H).

c- Déduis des questions précédentes et des hypothèses, l'expression de la fonction f.

3°) a- Etudie la limite de la fonction h définie par :

$h(x)=\exp\left[3-3\exp\left(\dfrac{x}{20}\right)\right]$ en $+\infty$.

b- Détermine le sens de variation de la fonction h sur $[0\,;+\infty[$.

c- Au bout de combien d'années la taille de cet échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?.

ACTIVITE 20 : (extrait Bac F6 2015 Sénégal)

Soit l'équation différentielle

$(E): y''+2y'+2y=2\cos 2x+2\sin 2x$.

1°) Soit $f(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$

Détermine les réels a et b pour que f soit solution de (E).

2°) Prouve qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g-f$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y''+2y'+2y=0$.

3°) Résous $(E'): y''+2y'+2y=0$.

4°) Déduis-en la solution générale de (E).

5°) Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(0)=2$ et $g'(0)=2$.

ACTIVITE 20 : (extrait Bac D 2015 Burkina-Faso)

Soit l'équation différentielle $(E): y''+49y=0$.

1°) Résous (E).

2°) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=7$.

3°) Prouve que pour tout réel x,

$f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{7}{3}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4°) Résous dans $]0\,;2\pi[$, l'équation $f(x)=\sqrt{6}$.

5°) Calcule la valeur moyenne V de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{14}\,;\dfrac{3\pi}{7}\right]$.

Initiateur : Sylvain AHOUANGBO (+229) 97471527-94262854

Scanné avec CamScanner

NB : Ce fascicule n'est pas un document d'accompagnement du cours.
Il vous aidera dans vos révisions générales : évaluations, examens(BAC) et concours.

Scanné avec CamScanner