

BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE

*Fascicule de
Mathématiques
Premières C & E*

NKODIA-LOEMBA

Edition 2023-2024

Toute reproduction même partielle par quelques procédés que ce soit de ce document est strictement interdite sous peine des poursuites judiciaires.

Avant-propos

Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classe de Première des séries C & E.

Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de cette classe.

L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue des examens d'état. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez quelques exercices stimulants issus des sujets proposés par les inspections des lycées zones I et IV du Congo-Brazzaville qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux examens d'état. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.

L'auteur

PARTIE A

Algèbre

CALCULS SUR LES POLYNOMES

Exercice 1

On donne les polynômes suivants :

$$f(x) = 2x - 1; g(x) = -x^2 + 2x - 1; h(x) = 3x^3 - 1$$

On pose $P(x) = f(x) \cdot g(x)$; $Q(x) = f(x) - h(x)$; $R(x) = g(x) \cdot h(x) + f(x)$

1) Déterminer $d^\circ P$; $d^\circ Q$; $d^\circ R$

2) Quels sont les coefficients dominants de P , Q et R ?

Exercice 2

1) On considère la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$

a et b étant des réels.

a) Déterminer a et b tels que f soit divisible par $x + 1$ et $x + 2$

b) Factoriser $f(x)$ par la méthode d'Honer.

2) Déterminer les nombres réels a et b de façon que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx$ vérifie la relation $\forall x ; P(x + 1) - P(x) = x$

Justifier que $1 + 2 + 3 + \dots + n = P(n + 1) - P(1)$ et en déduire que :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 3

Soient a et b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P par : $P(x) = a^2(b - x) + b^2(x - a) + x^2(a - b)$.

1) Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x : $P(x) = (x - a)(x - b)P_1(x)$

2) Quel est le degré de $P_1(x)$?

3) Factoriser $P(x)$.

Exercice 4

Soit le polynôme :

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

On suppose que le polynôme P admet trois racines distinctes x_1, x_2 et x_3 .

1. Montrer qu'il est possible de calculer :

$$x_1 + x_2 + x_3 ; x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 ; x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3.$$

2. En déduire la valeur de : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Exercice 5

1) Soit le polynôme : $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$

a) Trouver le polynôme Q tel que $P(x) = [Q(x)]^2$

b) Résoudre $P(x) = 0$

2) Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ soit divisible par $x^2 + x + 1$.

3) Soit $f(x)$ le polynôme de troisième degré tel que :
$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 9 \\ f(4) = 22 \end{cases}$$

a) On pose $g(x) = f(x) - x^2$. Démontrer que :

$$g(x) = k(x-1)(x-2)(x-3), k \text{ étant une constante.}$$

b) Calculer $g(4)$ et en déduire la valeur de k .

c) Déterminer $f(x)$.

Exercice 6

1) Déterminer suivant les valeurs du paramètre m , le degré de la fonction f définie par :

$$f(x) = (m^2 - m)x^4 + (2m - 2)x^3 + mx^2 + (m - 3)x + 5$$

2) Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que :

$$f(x) - f(x - 1) = x^2.$$

(On peut poser $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

En déduire une expression de $1 + 4 + \dots + n^2$.

Exercice 7

1. Les restes respectifs des divisions d'un polynôme $p(x)$ par -1 , $x + 5$ et $x - 2$ sont 9; -39 et 3.

Déterminer $r(x)$ polynôme du second degré tel que :

$P(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 2)q(x) + r(x)$ où $q(x)$ est un polynôme qu'on ne demande pas à déterminer.

2. On suppose $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

a) Vérifier que 0 n'est pas une racine de f .

b) Montrer que si α est une racine de $f(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

c) Montrer que pour tout x non nul, on a :

$$\frac{f(x)}{x^2} = a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c - 2a$$

d) En déduire que α est solution de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ est solution de $aX^2 + bX + c - 2a = 0$.

e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$.

Exercice 8

On appelle **polynôme réciproque** de degré n tout polynôme $P(x)$

vérifiant : $\begin{cases} d^0 P = n \\ \forall x \in \mathbb{R}^* P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^n} \end{cases}$

1) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors α est non nul et $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de $P(x)$.

2) Montrer que tout polynôme réciproque de degré n (impair) admet -1 pour racine.

3) On suppose que le polynôme P est donnée par :

$$P(x) = (x + 1)Q(x).$$

Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.

4) Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque.

5) Déterminer le polynôme réciproque F de degré 3 admettant pour racine $x = 2$ et tel que $F(0) = 1$.

6) On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on pose :

$$P(x) = 2x^4 - (5 + 2\sqrt{5})x^3 + (4 + 5\sqrt{5})x^2 - (5 + 2\sqrt{5})x + 2$$

a) Vérifier que $P(x)$ est un polynôme réciproque.

b) Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$ puis en déduire ϕ^3, ϕ^4 en fonction de ϕ .

c) En déduire alors que ϕ est une racine de $P(x)$.

d) En utilisant les questions précédentes, résoudre simplement dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)$.

Exercice 9

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$

Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1) Degré 2 : Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + a, a \neq 0$

Résoudre $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.

2) Degré 3 : Soit $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + bx + a, a \neq 0$

a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est racine de f , alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f .

b) Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$.

c) Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d) Application :

$$f(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$

3) Degré 4 : Soit $f: x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$

a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est racine de f , alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f .

4) Soit $y = x + \frac{1}{x}$

a) Déterminer l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fonction de a, b, c, y et y^2 .

b) Montrer que $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré.

c) Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a)$, $f(x) = 0$ n'a pas de solutions.

d) Application :

$$\text{Résoudre l'équation } 12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$$

Exercice 10

Ce problème propose des calculs classiques sur les « différences finies » de polynômes. Pour toute fonction polynôme P , on pose, pour tout réel x ,

$$\Delta P(x) = P(x + 1) - P(x).$$

1°) Calculer $\Delta P(x)$ dans les cas suivants :

a) $P(x) = x^3$; b) $P(x) = x^2 - 4x + 6$; c) $P(x) = 2x + 1$.

2°) a) Vérifier que si P est un polynôme quelconque et λ un réel quelconque,

$$\Delta(\lambda P(x)) = \lambda \Delta P(x).$$

3°) a) Dans cette question, P est le polynôme de degré n , $n \geq 1$, défini par $P(x) = x^n$. Montrer que ΔP est un polynôme de degré $n - 1$, et que le terme de plus haut degré de ΔP est nx^{n-1} .

b) Dédurre des questions 2° et 3°.a) que si P est un polynôme quelconque de degré n , alors ΔP est un polynôme de degré $n - 1$.

4°) On note P_0 et P_1 les polynômes respectivement définis par :
 $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x - 1$

a) Vérifier que $\Delta P_1 = P_0$.

b) On se propose alors de trouver un polynôme P_2 tel que :

$$P_2(1) = 0 \text{ et } \Delta P_2 = P_1.$$

• En supposant qu'il existe une telle fonction polynôme, prouver alors que nécessairement P_2 est de degré 2.

• Calculer $\Delta P_2(1)$. Montrer alors que $P_2(2) = 0$, puis que pour tout réel x ,

$$P_2(x) = a(x - 1)(x - 2), \text{ avec } a \text{ réel.}$$

• Montrer que s'il existe un polynôme P_2 répondant à la question, alors

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (x-1)(x-2) .$$

• Réciproquement, pour le polynôme P_2 trouvé, calculer ΔP_2 , puis conclure.

5°) On veut trouver un polynôme P_3 de degré 3, tel que $P_3(1) = 0$ et $\Delta P_3 = P_2$.

En vous inspirant de la démarche suivie à la question 4, montrer qu'il existe un polynôme et un seul qui répond à la question, le polynôme :

$$P_3(x) = \frac{1}{6} (x-1)(x-2)(x-3) .$$

Note : Les polynômes $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ sont appelés **polynômes de NEWTON**.

6°) On pose $\Delta^2 P(x) = \Delta(\Delta P)(x)$.

a) Calculer $\Delta^2 P(x)$, lorsque $P(x) = x^2$.

b) P est le polynôme du second degré défini par :

$$P(x) = ax^2 + bx + c .$$

• Calculer $P(1), \Delta P(1), \Delta^2 P(1)$.

• Montrer alors que pour tout réel x ,

$$P(x) = P(1) + \Delta P(1)(x-1) + \frac{\Delta^2 P(1)}{2} (x-1)(x-2)$$

c) Utiliser ce qui précède pour trouver un polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(1) = -1, \quad P(2) = 9, \quad P(3) = 21.$$

Exercice 11

Partie A

Calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1)^2$

1) Déterminer tous les polynômes $P(x)$ de degré 3 vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(x + 1) - P(x) = (2x + 1)^2$$

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k + 1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n + 1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

3) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie pour tout nombre réel x :

$$P(x + 1) - P(x) = x^2$$

4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\text{En déduire que } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vérifier ce résultat sur quelques exemples $n = 5$ et pour $n = 7$.

Partie B

1.a) Former un polynôme $P(x)$ du second degré tel que pour tout x , on ait $P(x) - P(x - 1) = x$ (1)

b) En remplaçant x par 1; 2; 3; ...et n dans (1) déduire une expression simple de : $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n$.

2.a) Faire de même pour un polynôme de 3^{ème} degré tel que :

$$P(x) - P(x - 1) = x^2.$$

b) En déduire une expression simple de $S'_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

3) Trouver une expression simple de $S''_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

LE SECOND DEGRE

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$$

$$ax^2 - (2 + a)x + 2a = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$3x^2 + 6x - 9 \leq 0$$

2) Trouver deux nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha\beta = -35$ avec $\alpha < \beta$.

3) Comparer le réel -3 aux racines du trinôme $T(x) = 5x^2 + 3x - 2$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$(E_1) : x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \text{ et } (E_2) : x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}.$$

2. Soit p un polynôme défini par : $p(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

a) Montrer que 0 n'est pas racine du polynôme $p(x)$.

b) Exprimer $\frac{p(x)}{x^2}$ en fonction de t , avec $t = x + \frac{1}{x}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6t^2 + 35t + 50 = 0$.

d) En déduire les solutions de l'équation $p(x) = 0$.

Exercice 3

On considère l'équation (E): $3x^4 + x^3 - 10x^2 - x + 3 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. En mettant x^2 en facteur, montrer que l'équation (E) est

équivalente à l'équation (E'): $3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$.

3. Par changement de variable, résoudre l'équation (E').

4. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2$.

On se propose de résoudre l'équation

$$(E) : 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$$

1. a) Peut-on trouver un polynôme Q tel que : $P(x) = x^4 Q(x)$?

Justifier la réponse.

b) Démontrer que (E) équivaut à (E') : $2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

2. Pour tout réel x , non nul, on pose $t = x + \frac{1}{x}$

a) Calculer t^2 en fonction de x

b) Démontrer que (E') équivaut à (E'') : $t^2 - 9t + 4 = 0$

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 5

1) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré, Δ son discriminant, x' et x'' les zéros de $f(x)$ lorsque Δ est positif (on supposera $x' < x''$).

a) Soit α un réel. Préciser le signe de $f(\alpha)$ suivant le signe de Δ et, éventuellement, la position de α par rapport à x' et x'' .

b) Etudier le signe du produit $af(\alpha)$.

c) Déduisez de ce qui précède les deux conséquences suivantes, dont la réunion constitue la règle $af(\alpha)$:

$$\Delta > 0 \text{ et } \alpha \in]x'; x''[\Leftrightarrow af(\alpha) < 0$$

$$\Delta > 0 \text{ et } \alpha \notin]x'; x''[\Leftrightarrow af(\alpha) > 0$$

NB : Lorsque l'on a : $\Delta > 0$, étudie le signe de $\frac{x' + x''}{2} - 1$ pour savoir si l'on a : $1 < x' < x''$ ou $x' < x'' < 1$.

2) Soit le polynôme $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 3)x + m + 4$ où m désigne un réel donné.

a) Précisez l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles $f(x)$ a deux zéros distincts, x' et x'' (on suppose que $x' < x''$).

b) Positionnez 1 par rapport aux racines x' et x'' .

3) Soit $P(x) = (2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2$.

Comparer $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ aux racines de $P(x)$.

Exercice 6

Partie A

1. Représenter graphiquement dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la fonction : $h(x) = -x^2 + 2x + 3$

2. Soit m un réel. Discuter graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation : $-x^2 + 2x + 3 = m$

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$

1. Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

2. Faire l'étude et représenter graphiquement la courbe (C)

3. Pour tout m réel, on considère la droite (D_m) , d'équation

$y = 2x + m$. Pour quelles valeurs de m , (D_m) coupe-t-elle (C) :

a) En un seul point ? Donner les coordonnées de ce point.

b) En deux points distincts A_m et B_m

Quelle est l'ensemble des milieux de $[A_mB_m]$ pour $m \in \mathbb{R}$

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Construire la courbe (C) de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2$.

2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

On désigne par (C') sa courbe représentative dans le plan.

- Utiliser la forme canonique du trinôme du second degré pour déterminer les réels a , b et c tels que : $g(x) = a(x - b)^2 + c$.
- En posant $y = g(x)$, montrer que le changement de variables $X = x - b$, $Y = y - c$, entraîne $Y = aX^2$.
- Par quelle transformation simple la courbe (C') se déduit-elle de (C) ?
- Construire la courbe (C') sur la même figure que (C) .

Exercice 8

1) Etudier suivant les valeurs du paramètre m l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$(E_m) : (m - 5)x^2 - 2(m - 1)x + m + 2 = 0.$$

2) On considère l'équation d'inconnue x :

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 4)x + (m - 4)(m + 2) = 0$$

1) Etudier l'existence et le signe des racines de cette équation.

2) a) Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x' et x'' de cette équation.

b) En déduire les valeurs des racines doubles

3) Calculer en fonction de m l'expression : $y = \frac{1}{1+x'} + \frac{x}{1+x''}$

Exercice 9

Une équation du second degré a ses racines x' et x'' telles que :

$$\begin{cases} mx' + mx'' - m = 4 - 2x' - 2x'' \\ mx'x'' + m = 2 - 2x'x'' \end{cases}$$

1. Former cette équation dont les coefficients dépendent du paramètre m .
2. Montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de m .
3. Utiliser cette relation pour déterminer les racines doubles de l'équation obtenue.
4. Comment faut-il choisir m pour que les deux racines soient positives ?

Exercice 10

Soit (E_m) l'équation $(m + 3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

1. Déterminer m pour que (E_m) admette deux solutions distinctes x' et x'' .
2. Dans le cas où (E_m) admet deux solutions x' et x'' , déterminer m tel que :

a) $(2x' - 1)(2x'' - 1) = 6$

b) $x'^2 + x''^2 = 2$

Trouver une relation indépendante de m entre x' et x'' .

3. Former une équation paramétrique du second degré ayant pour solutions : $(3x' - 2)$ et $(3x'' - 2)$.
4. Déterminer m pour que l'équation (E_m) admette :
 - a) Deux solutions de signes contraires.
 - b) Deux solutions positives
 - c) Deux solutions négatives

Exercice 11

1) Soit l'équation (E): $(m + 1)x^2 + 2(m - 3)x + m + 3 = 0$ ($m \neq -1$)

- Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E).
- Dans le cas où (E) admet deux solutions distinctes, déterminer leurs signes selon les valeurs de m .
- Dans les cas où les racines distinctes existent et sont notées x_1 et x_2 , trouver une relation indépendante de m qui les lie. Déduire de cette relation les solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 = 2x_2$.
- Déterminer m pour que si on suppose $x_1 < x_2$, on ait $x_1 < 1 < x_2$

2) Résoudre suivant les valeurs de m ($m \neq -1$)

$$(E): (m + 1)x^2 + 2(m - 3)x + m + 3 > 0$$

3) Former l'équation du second degré dont les solutions sont

$$X = 2x_1 - 1 \text{ et } Y = 2x_2 - 1.$$

Exercice 12

A) Les racines x_1 et x_2 d'une équation du second degré vérifiant les relations suivantes

- $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0$
- $mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1$ où m est un paramètre réel.

1) Former cette équation.

2) Déterminer m pour que l'équation admet deux racines positives.

3) On considère un triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives x_1 et x_2 .

Déterminer m pour que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

B) Soit l'équation (E): $x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 = 0$

- 1) Etudier l'existence et le signe des solutions de l'équation (E).
- 2) a) Former une équation du second degré d'inconnue étant les solutions $X_1 = 4x_1 - 3m$ et $X_2 = 4x_2 - 3m$.
- b) Déterminer m pour que x_1 et x_2 étant les solutions des racines qui vérifient $4X - 3 > 0$.

Exercice 13

Soit (E_m) : $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ une équation paramétrique du second ordre de paramètre réel m .

1. Déterminer la valeur du paramètre m pour que cette équation soit du premier degré.

2. On suppose que $m \neq 1$ et on pose :

$$T_m(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + m + 3$$

- a) Calculer le discriminant Δ_m puis étudier son signe.
 - b) Déterminer en fonction de m la somme S et le produit P des racines x_1 et x_2 de T_m puis étudier leurs signes.
 - c) Déterminer une relation indépendante du paramètre réel m entre les solutions x_1 et x_2 de (E_m) . En déduire les racines doubles de cette relation.
 - d) Donner le nombre de solutions et leurs signes suivant les valeurs de m .
3. Montrer que toutes les paraboles (P_m) passent par un point fixe I dont on donnera les coordonnées.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $4 + \sqrt{x^2 + 4} = x$; b) $\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} = 3$; c) $\sqrt{x^2 + 1} + 1 = 0$;
- d) $\sqrt{(x + 1)(3 - x)} = 3x - 1$; e) $\sqrt{x + 2} = 3x - 4$; f) $\sqrt{x + 5} = \sqrt{1 - x}$;

$$g) \sqrt{x-3} = 2 ; h) \sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x-1} ; i) \sqrt{|1-x^2|} = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

$$j) \sqrt{x^2+x} = 2x-1 ; k) \sqrt{3x^2-11x+21} = 2x-3$$

$$l) 2x+1+\sqrt{-7x-5}=0 ; m) \sqrt{6x+2}-\sqrt{3x}=\sqrt{9x-2}$$

$$n) \sqrt{x^2-x-2}=|3x-4| ; o) \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1$$

$$p) x+\sqrt{-x+3}-2=0 ; q) 1+\sqrt{3x^2-2x-1}=x$$

$$r) \sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{-x^2-3x+4} ; s) \sqrt{1-2x^2}=\sqrt{x-4}$$

$$t) \sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5} ; u) \sqrt{5x+9}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1} ; v) x+a^3=\sqrt[3]{a-x}$$

$$w) \frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=4$$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \sqrt{3-x} \geq x-1 ; b) \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2} \geq 3 ; c) \sqrt{2x^2+2} \leq 3-x$$

$$d) 2x+1-\sqrt{7-6x} > 0 ; e) \sqrt{2x+3} < 3 ; f) \sqrt{4x+1} < 2x+1$$

$$g) \sqrt{5x^2+19x-4} > \sqrt{x(x+1)} ; h) \sqrt{x^2-x-1} < x+5$$

$$i) \sqrt{2x^2-x} < 2x-3 ; j) \sqrt{3(x^2-1)} > 2x-1$$

$$k) \sqrt{x^2+5} \geq \sqrt{-2x+1} ; l) \sqrt{x^2+5x+4} < \sqrt{2x+9}$$

$$m) \sqrt{2x+3}+\sqrt{5+x} < \sqrt{x-1} ; n) \sqrt{x+4}+\sqrt{x-1} > \sqrt{5+4x}$$

$$o) \sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1| ; p) \sqrt{-5x^2+x+6} \geq m$$

$$r) \sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1} < \sqrt{6x+7} ; s) \sqrt{x}+\sqrt{x-1} < \sqrt{6x-1}$$

$$u) \sqrt{2x-3} \leq \sqrt{|x|-|2x-1|}$$

Exercice 16

1) Soit l'équation $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x - 9} = 18$ (1)

- a) Définir l'équation puis montrer qu'en posant $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 9}$ l'équation (1) devient $y^2 + y - 12 = 0$ (2)
b) Résoudre alors l'équation (2) puis déduire les solutions de l'équation (1).

2) Résoudre de même les équations suivantes :

- a) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 3} = 9$
b) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1$

Exercice 17

Le but du problème est la résolution de l'équation

$$(E): x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = 0$$

1. On se ramène à la résolution d'une équation de la forme :
 $X^2 + pX + q = 0$

- a) Trouver trois réels a , p et q tels que :
 $x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = (x + a)^3 + p(x + a) + q$
b) En posant $x + a = X$, vérifier que : $X^3 + 12X - 112 = 0$

2. On résout l'équation $X^3 + 12X - 112 = 0$ (E_1)

Pour cela on pose $X = u + v$

- a) Vérifier que $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$
En déduire que :
• Lorsque $X = u + v$, alors :
 $X^3 + 12X - 112 = u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) - 112$
• $X = u + v$ est une solution de l'équation (E_1) lorsque
 $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3 \cdot v^3 = -64$
b) Trouver deux nombres u et v tels que $u^3 + v^3 = 112$ et
 $u^3 \cdot v^3 = -64$
c) Résoudre l'équation (E_1) (Vérifier que $(2 + \sqrt{2})^3 = 56 + 40\sqrt{2}$)
d) Résoudre l'équation (E).

SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , chacun des systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - my = \sqrt{2} - 1 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = m \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer le nombre réel m pour que le système suivant ait un couple unique de solution :

$$\begin{cases} (m - 1)x - 2y = m \\ 4x - (m + 1)y = m + 1 \end{cases}$$

Résoudre alors ce système.

Exercice 3

Résoudre, en utilisant un changement d'inconnues, chacun des systèmes d'équations suivants :

$$a) \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = -3 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} 5(x + y) - 3(x - y) = 9\sqrt{2} \\ 3(x + y) + (x - y) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = -1 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2 \end{cases} ; \quad d) \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre chacun des systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} x + y + 4xy = -1 \\ 3(x + y) - xy = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases} ; \quad d) \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x^2 - 7y^2 = 12 \end{cases}$$

Exercice 5

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points $A(1; 0)$; $B(2; -5)$; $C(3; -12)$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases} ; 2. \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} ; 3. \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} ; 5. \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases} ; 6. \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ z - 2x = \sqrt{2} \end{cases} ; 4. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 1 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 0 \end{cases} ; 5. \begin{cases} -a^2 + 2\sqrt{b} + \frac{1}{c-1} = 1 \\ -2a^2 + 3\sqrt{b} + \frac{1}{c-1} = 1 \\ 4a^2 + \sqrt{b} + \frac{2}{c-1} = 8 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 9x + my - z = 4 \\ 4mx - 2y + (m-1)z = m \\ 5x + (2m-1)y - 3z = 3(m+2) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2mx + (m + 1)y + z = 2 \\ (m + 2)x + (2m + 1)y + mz = m + 2 \\ 5x + (2m - 1)y - 3z = 3(m + 2) \end{cases}$$

Exercice 7

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25 F, 60 F et 80 F. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640 F. Déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

Exercice 8

Un artisan fabrique des objets (A) et des objets (B). La réalisation d'un objet (A) demande 30F de matière première et 125F de main d'œuvre. Celle d'un objet (B) demande 70F de matière première et 75F de main d'œuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560F et 1250F. Les profits réalisés sont 54F par objet (A) et 45F par objet (B). On désigne par x le nombre d'objets (A) et y le nombre d'objet (B) fabriqué par jour.

1. Calculer en fonction de x et de d_1 la dépense journalière en matière première et d_2 la dépense journalière en main d'œuvre.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble de points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.
3. Calculer en fonction de x et y le profit journalier P réalisé.
4. On donne $D_1: 3x + 7y = 56$ et $D_2: 5x + 3y = 50$
 - a) Montrer que D_1 et D_2 passent par le point $C(7; 5)$
 - b) En déduire la valeur du profit lorsque l'entreprise fabrique 7 objets (A) et 5 objets (B).

PARTIE B

Analyse

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^4 + 2x + 6; \quad g(x) = \sqrt{x+1}; \quad h(x) = \sqrt{|x+2| - 2}$$

$$k(x) = \frac{x}{(x+3)(x-1)}; \quad l(x) = x + 5 + \sqrt{2x+4}; \quad m(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$n(x) = \frac{\sqrt{x}}{x(x+3)}; \quad o(x) = \sqrt{|1+x^2|}; \quad p(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}{|x| - 1}$$

$$q(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - x}; \quad r(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases};$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)}, & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{4-x}, & \text{si } x > 2 \end{cases}; \quad u_m(x) = \frac{1}{x^2 - 2mx + 1}$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{3+x^2}{2-x^2}}; \quad w(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}; \quad h(x) = \sqrt{|x^2 + 2x|}; \quad i(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$j(x) = \sin(-2x - \pi)$$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ et $g(x) = \sqrt{x - 2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g .
2. Montrer que g est la restriction de f à E_g . Que peut-on dire de f ?

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les images des nombres $-3; -2; 0; 2$ et 3 par f .
3. En déduire les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec les axes des coordonnées.
4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $I = [-3; 3]$

Exercice 4

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq 1$
3. Que peut-on déduire de f ?

Exercice 5

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Vérifier que : $2x = x^2 + 1 - (x - 1)^2$, puis déduire que f est majorée.
3. Vérifier que : $2x = (x + 1)^2 - (x^2 + 1)$, puis déduire que f est minorée.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x(x - 2) \text{ et } g(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g
2. Démontrer que $f(x) = (x - 1)^2 - 1$. En déduire que f est minorée par 1
3. Calculer $g^2(x) - (2)^2$.
4. En posons $X = x^2$, démontre que $g^2(x) - (2)^2 = -(X - 2)^2$.
5. En déduire que $-2 \leq g(x) \leq 2$. Que peut-on dire de g ?

Exercice 7

A) On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$

1. Montrer que f admet un minimum au point -1
2. Montrer que f admet un maximum au point -3

B) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. a) Donner les images des réels 0 ; $\sqrt{5}$; -1 et $2\sqrt{3}$ par f .
b) Trouver le nombre d'antécédent(s) de 1 par f .
3. Montrer que f est minorée par 0 et majorée par 1 .
4. Montrer que f admet un maximum absolu en que l'on précisera.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$E(x) = 4 ; E(-x) = -7 ; E\left(\frac{3x-2}{4}\right) = -5 ; E(1-2x) = -6 ; E(x) = \frac{13}{4}$$

$$(E(x))^2 + 7E(x) + 10 = 0 ; E(x) < \frac{13}{4} ; E(x) > -8 ; E(x) \geq 3$$

$$E(x) > -\frac{11}{3} ; E(-x) < -\frac{9}{2} ; (E(x) + 3)(E(x) - 5) < 0$$

Exercice 9

On appelle fonction partie décimale de x , notée $D(x)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $D(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière de x .

1. Démontrer que :

- a) Pour tout réel x et pour tout entier p , $E(x + p) = E(x) + p$
- b) Pour tout réel x , $0 \leq D(x) < 1$ et que $D(x + 1) = D(x)$

2. En déduire que la fonction D est périodique et préciser sa période.

3. Représenter graphiquement la fonction D sur l'intervalle $[-3; 3]$

Exercice 10

On appelle fonction partie entière de x , notée $E(x)$, la fonction définie par : $E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x \leq n + 1$

1. Déterminer $E(\sqrt{3})$; $E(1 - \sqrt{2})$; $E\left(\frac{\pi^2}{10}\right)$

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x - E(x)}$$

3. Représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $E(x) = 2$; $E(x) = -1$

$$E(x) = n$$

Exercice 11

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+4x+3}{x^2+1}$;

$g(x) = -2x^2 + 6x + 1$. On désigne par (C) la courbe de f et (C') celle de g dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g .

2. Déterminer trois réels α, β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2 + 1}$$

3. Montrer que le point $B(0; 3)$ est un centre de symétrie à la courbe (C) de f .

5. Montrer que la droite (D) d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe (C') de g .

Exercice 12

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^2 - 1$

b) En déduire que (C) est l'image de la parabole (P) d'équation

$y = x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera.

c) Construire la courbe (C)

2. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies par :

$$f_1(x) = f(-x); f_2(x) = -f(-x); f_3(x) = |f(x)|; f_4(x) = f(x+1) - 1 \\ \text{et } f_5(x) = f(|x|).$$

Construire la courbe représentative de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 .

Exercice 13

Soit f, g et h trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que les fonctions $(f + g) \circ h$ et $(f \circ h) + (g \circ h)$ sont égales.

2. On suppose que f, g et h sont définies par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$,
 $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$ et $h(x) = x^2$

- a) Déterminer les fonctions $h \circ (f + g)$ et $(h \circ f) + (h \circ g)$
- b) Les fonctions $h \circ (f + g)$ et $(h \circ f) + (h \circ g)$ sont-elles égales ?

Exercice 14

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application de $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}.$$

- 1. a) Démontrer que f est bijective.
- b) Déterminer la bijection réciproque de f notée f^{-1}
- 2. a) Construire la courbe représentative de f^{-1}
- b) En déduire la courbe représentative de f

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2x + 1$ et

$$\begin{cases} g(x) = -\frac{1}{2}x; \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = -3x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que les fonctions f et g sont bijectives de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Déterminer leurs bijections réciproques notées f^{-1} et g^{-1}

c) Tracer les courbes représentatives de f , g , f^{-1} et g^{-1}

2. a) Déterminer l'application $g \circ f$ et sa bijection réciproque notée

$$(g \circ f)^{-1}$$

b) Tracer les courbes représentatives de $g \circ f$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

LIMITES ET ASYMPTOTES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 5x - 4}; b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{1 - x}; c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}; d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}; f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x^2-4}; g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x - 6}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + 1}); i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 3x); j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}; l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}; m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}; n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x + 5} - 3x); \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$$

Exercice 2

1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 2\sin x$

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$.

a) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $|g(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$

b) En déduire la limite de g en $+\infty$

3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

a) Montrer que pour tout x réelle, $\frac{1}{3} \leq h(x) \leq 1$

b) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 - \cos x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{2 - \cos x}$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ; b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} ; c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} ; d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin \pi x} ; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} ; g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{12 \sin x - 6}{4x - \pi} ; h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{4 \sin^2 x - 3} ; i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} ; k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} ; l) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x} ; m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan^2 x}$$

Exercice 4

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 + 5x + 4}{x^2 + 1}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

3. Déterminer trois réels α, β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2 + 1}$$

4. Montrer que la droite $(D) : y = 3x + 4$ est une asymptote à la courbe (C) de f

5. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .

6. Montrer que le point $B(0; 4)$ est un centre de symétrie à la courbe (C) de f .

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f
3. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f
5. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.
6. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f
3. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ de f .
4. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x - 1$.
 - a) Etudier le signe de $f(x) - y$.
 - b) En déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$

CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Exercice 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2x - x^2; & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - x}{1 - x}; & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice 2

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier les branches infinies à la courbe (C) de f
4. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$
5. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f .

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2; & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \frac{x+a}{x-2}; & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1
2. a) Trouver le domaine de définition de la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x - 9}$$

- b) Déterminer un prolongement par continuité en 3 de h .

Exercice 4

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

1. Justifier que f est bien continue sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f(2)$; $f(3)$ et $f(2) \times f(3)$
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [2; 3]$
4. Comment doit être la fonction f sur $[2; 3]$ pour que cette solution soit unique ?
5. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près, puis en déduire une valeur approchée de α .

DERIVATION

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 ; & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} & ; \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité de f en $x_0 = -1$
3. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

Exercice 2

Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h
2. Démontrer qu'il est possible de prolonger h par continuité en $x = 0$
3. Soit g le prolongement par continuité de h en $x = 0$
 - a) Définir g .
 - b) Préciser le domaine de définition D_g de g .
 - c) Etudier la dérivabilité de g en $x = 0$.
 - d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 ; & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} ; & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 1
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.

3. Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - 2x ; & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x} ; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.
3. Déterminer une équation de chacune de ces demi-tangentes.

Exercice 5

1. Déterminer la dérivée de la fonction f :

- a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2$; b) $f(x) = (x^3 + 3x)(x^4 - 3)$;
c) $f(x) = (2x^2 + 3)^2$; d) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x^2 - 1}$; e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$;
g) $f(x) = (x^3 + 2)\sqrt{2 - x}$; h) $f(x) = \cos^2 x$; i) $f(x) = \sin 2x$;
j) $f(x) = x + \sin x$; k) $f(x) = x \cos x$; l) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; m) $f(x) = \tan^2 x$;
o) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; p) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Déterminer les fonctions dérivées de $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

- a) $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = 4x^2 + x + 1$
b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sin 3x$

Exercice 6

1. Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que :

$$f(0) = 4 ; f'(0) = 3 \text{ et } f(1) = 3.$$

2. Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction g définie par : $g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$

a) Calculer les valeurs de a et b sachant que : $g(2) = 2$ et $g'(2) = 0$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de g

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

a) Démontrer que (C) est un demi-cercle de centre O , dont on déterminera le rayon. Tracer (C) .

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h , puis déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 7

1. Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

Déterminer a et b pour que la représentation graphique de f :

- Passe par le point $A(0; 3)$
- Admette en A une tangente d'équation $y = 4x + 3$

2. Déterminer le réel a pour que la représentation graphique de la fonction $g(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$ admette au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3. Soit h la fonction définie par : $h(x) = x|x - 3|$

a) Etudier la continuité de f en 3

- b) Calculer le nombre dérivée de f à droite et à gauche en 3. f est-elle dérivable en 3 ?

Exercice 8

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f
3. Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f
4. Calculer la dérivée f' de la fonction f
5. Donner le sens de variations de la fonction f
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 9

Soit f_m une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2+mx+3}{x^2+1}$ avec m un réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni du repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Préciser la branche infinie à la courbe (C_m) de f_m
3. Calculer la dérivée f'_m de la fonction f_m
4. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 10

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x\sqrt{1-x} ; \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \frac{4x+4}{x^2-6x+9} ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction f est définie et continues sur $\mathbb{R} - \{3\}$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
2. Déterminer, suivant les valeurs de x , la dérivée f' de f
3. Dresser le tableau de signe de f'
4. Dresser le tableau de variation de f .

On donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 1 ; & \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} ; & \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
b) En déduire l'ensemble de dérivabilité E_D de f
2. a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 ; & \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} ; & \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- b) Déterminer le signe de $f'(x)$
3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Dresser le tableau des variations de f
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1-4x^2}{2-x}$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique : 2 cm.

1. Préciser l'ensemble de définition E_f de f
2. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in E_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
4. Montrer que la droite d'équation (Δ) est asymptote à la courbe (C) puis étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ) . En déduire l'autre asymptote.
5. Tracer (C) et les deux asymptotes.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
4. Etudier les branches infinies de la courbe (C)
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (D)
6. Construire (C) et (D)

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+3}$ et $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C})$.
4. Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$
6. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation.
7. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

Exercice 4

Soit g une fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{x+1}; & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = x^3 + 3x; & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g
2. Calculer les limites aux bornes de E_g .
3. Etudier la continuité de g en $x_0 = 0$
4. Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$
5. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
6. a) Déterminer les équations de demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ de g en $x_0 = 0$
b) Donner la nature du point $O(0; 0)$
7. Etudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$

8. Construire la courbe (C) de g .

Exercice 5

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer a et b , pour que la courbe (C) de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation $y = 4x + 3$
2. Pour les valeurs de a et b trouvées à la 1^{ère} question, démontrer que pour tout réel x , $f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$.
3. Etudier les variations de f
4. Démontrer que le point $I(0; 3)$ est un centre de symétrie de (C).
5. Etudier les branches infinies de la courbe (C) de f .
6. a) Tracer (C) et sa tangente au point I .
b) En déduire la courbe (C') de la fonction g définie par
 $g(x) = -f(x)$

Exercice 6

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-6}{x+2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
3. Calculer le réel a tel que : $f(x) = 2x + a - \frac{4}{x+2}$
4. Démontrer que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe de f

5. Donner la nature et l'équation de l'autre asymptote de la courbe de f
6. Calculer la dérivée de f puis donner son signe sur D_f
7. Dresser le tableau de variations de f sur D_f
8. Tracer la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$
9. Montrer que $I(-2; -5)$ est centre de symétrie à la courbe de f .

Exercice 7

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$
5. Etudier la position de la courbe par rapport à la droite (D)
6. Donner la nature et l'équation de l'autre asymptote à f
7. Calculer la dérivée de f puis donner son signe sur D_f
8. Dresser le tableau de variations de f sur D_f
9. Tracer la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$
- 10 Démontrer que la courbe de f admet un centre de symétrie $I(a; b)$ que l'on précisera.

Exercice 8

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
2. Dresser le tableau de variation de g
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
Justifier que $\alpha \in]-1,6; -1,5[$ puis déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 4}{1 + x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$. Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(1+x^2)^2}$
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations.
 - a) Déterminer deux réels a et b tels que : pour tout réel x ,
$$f(x) = x + \frac{ax + b}{1 + x^2}$$
 - b) Etudier la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$
 - c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C)
 - d) Déterminer les abscisses des points de (C) en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$
3. Tracer (C) , (D) et les tangentes obtenues à la question précédente. On prendra $f(\alpha) \approx -2,2692$.

Exercice 9

Soit la fonction numérique h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{2x + 2} & ; x \leq 1 \\ h(x) = -x - 9 + 6\sqrt{x + 3} & ; x > 1 \end{cases}$$

(C_h) désigne sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h .
2. Calculer les limites de h aux bornes du domaine de définition D_h de h .
3. a) On admet que h est continue au point $x = 1$, étudier la
Dérivabilité de h en $x = 1$.
b) En déduire les équations cartésiennes des demi-tangentes à la courbe de h en $x = 1$.
4. Suivant les intervalles de x , calculer la dérivée h' de h
5. Dresser le tableau des variations de h .
6. Etudier les branches infinies à la courbe de h
7. Construire la courbe de h dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

FONCTIONS CIRCULAIRES

Exercice 1

Le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4\sin^2 x \cdot \cos 2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1a) Démontrer que f est périodique, de période π .

b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C) .

2a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4\sin 2x(1 - 4\sin^2 x).$$

b) Dresser le table de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Tracer (C) sur $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1) Démontrer que f est impaire et périodique, de période 2π .

2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4) Tracer (C) sur $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 3

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

- 1) Démontrer que f est paire et périodique, de période 2π .
- 2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x(1 + \cos x)$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- 4) Tracer (C) sur $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin^3 x - 3\sin x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Etudier la parité de f .
b) Montrer que f est périodique de période 2π .
- 2) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe (C) .
- 3) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et expliquer comment l'on obtient alors la courbe (C) complète.
- 4) a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = -3\cos x \cos 2x$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle I .
- 5) Tracer la courbe (C) sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que f est périodique de période π .
2. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C) .
3. En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ et expliquer comment l'on obtient alors la courbe (C) complète.
4. a) Vérifier que $f'(x) = -4\cos 2x(2\sin 2x - 1)$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation sur I .
- 5) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- 6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ dans $[-\pi; \pi]$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (\cos 2x + 2)\sin x$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Etudier la parité de f .
b) Démontrer que f est périodique de période 2π .
- 2) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C) .
- 3) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et expliquer comment l'on obtient alors la courbe (C) complète.

- 4)a) Démontrer que $f'(x) = (3 - 6\sin^2 x)\cos x$.
- b) Etudier le signe de $f'(x)$ dresser son tableau de variation sur I .
- 5) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Etudier la parité de f .
- b) Démontrer que f est périodique de période 2π .
- 2) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = [0; \pi]$ et expliquer comment l'on obtient alors la courbe (C) complète.
- 3)a) Vérifier que $f'(x) = \cos 2x + \cos x$.
- b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle I .
- 4) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

- 1) a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x)$. Que peut-on en déduire concernant (C_f) ?
- b) Montrer que la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{8}$ comme axe de symétrie.

- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x(\cos x + \sin x)$.
- b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.
- c) Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$.
- 3) a) Tracer la courbe (C_I) représentant la restriction de f à l'intervalle I .
- b) Comment obtient-on la courbe (C_f) à partir de la courbe (C_I) ?

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2 x$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Démontrer que pour tout réel x , $x \leq f(x) \leq x + 1$.
- b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
- 2) On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec la droite (d_1) , puis avec la droite (d_2) .
- 3) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f . Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 1 - \sin 2x$.
- b) En déduire le sens de variations de la fonction f .
- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
- 4) a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
- b) Tracer (d_1) , (d_2) et la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.
- 5) a) Démontrer que pour tout réel x , $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
- b) Comment déduit-on la courbe (C) de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n + 2} \end{cases}$$

1) a) Démontrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n}$ est une suite arithmétique.

b) Préciser sa raison et son premier terme.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

2) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .

3) Etudier la convergence de la suite (U_n) .

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}$; $n \geq 1$ et $U_1 = 3$.

1) Calculer U_2 et U_3 .

2) a) Montrer que la suite (U_n) est majorée par 1.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.

3) On pose $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de la suite (V_n) .

Exercice 3

Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = \frac{n}{n+1} \text{ et } V_n = \frac{n+2}{n+1}$$

- 1) Etudier la monotonie des suites (U_n) et (V_n) .
- 2) Vérifier que $V_n - U_n > 0$
- 3) Calculer la limite des suites (U_n) et (V_n) .
- 4) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 4

On donne la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite réelle définie par : $V_n = U_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer le réel a pour que (V_n) soit une suite géométrique.
- 2) On pose $a = -6$, déterminer le premier terme et la raison de la suite (V_n) .
- 3) Ecrire V_n et U_n en fonction de n .
- 4) Calculer $S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{50}$.

Exercice 5

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}.$$

- 1) Prouver que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $V_n = \frac{1}{U_n}$ est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 2) Exprimer V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .
- 3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } U_n = \frac{3U_{n-1}}{2U_{n-1}+1}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 1) Calculer U_1 et U_2 .
- 2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
 - b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .
- 3) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k}$. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n .

Exercice 7

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$$

(V_n) est une suite numérique définie par : $V_n = U_n - 3\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la valeur de α pour laquelle (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. On donne $\alpha = 1$.
 - a) Montrer que $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
 - b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite (U_n) .

3. Soit les sommes $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n+1}$ et $Y_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n+1}$.

a) Calculer la somme S_n en fonction de n .

b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n , puis calculer $\lim Y_n$.

Exercice 8

On définit la suite numérique $(U_n), n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3.$$

1. Calculer U_1 .

2. a) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par -6

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Justifier alors qu'il existe un réel unique α tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

3. Soit la suite numérique (V_n) définie par $V_n = U_n - U_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n - U_{n-1} = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

4. Déterminer ainsi la valeur numérique de α .

Exercice 9

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 6 \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. Calculer le deuxième terme de la suite (u_n)

3. On pose la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 2$. Pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

5. Etudier la convergence des suites (v_n) et (u_n)

6. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Calculer la limite de S_n

Exercice 10

La suite de terme U_n est définie par :

$$U_1 = 2 ; U_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\} : U_n = \frac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3}.$$

La suite de terme général W_n est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\} : W_n = U_n - U_{n-1}.$$

1) Calculer W_n en fonction de W_{n-1} .

2) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on calculera le premier terme W_2 . Exprimer W_n en fonction de n .

3) Calculer $S_n = W_2 + W_3 + \dots + W_n$

4) Calculer S_n en fonction de $U_n - U_1$.

5) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

6) Quelle est la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 11

1- Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$.

2- Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer (v_n) et (u_n) en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite u_n .

3- On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = 1 - v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = (n + 1) + \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$

c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 12

Sur une droite D munie d'un repère $(0; \vec{i})$, A_0 et B_0 sont des points d'abscisses respectives -4 et 3 . Pour tout entier naturel n , on note : A_{n+1} le barycentre de $(A_n; 1)$ et $(B_n; 4)$; B_{n+1} le barycentre de $(A_n; 3)$ et $(B_n; 2)$.

1) Placer les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 .

2) Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n . Ainsi $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.

Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$$

3) a) Démontrer, par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$3a_n + 4b_n = 0$$

b) En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

b) Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

PRIMITIVES ET INTEGRALES

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

1. Montrer que la fonction F définie, pour tout réel x , par

$F(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$

3. Déterminer la primitive F_1 de f telle que $F_1(0) = 1$

Exercice 2

Soit f et F deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et } F(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f .

2. Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$

Exercice 3

1. Comment vérifier que F est une primitive de f sur un intervalle I ?

2. Soit f et g deux fonctions continues sur $I = [-1; 0]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^3} \text{ et } g(x) = -\frac{1}{2(x^2+x-2)^2}$$

Montrer que g est la primitive de f sur I

3. Qu'est-ce-que l'intégrale d'une fonction continue ?

4. Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et F une primitive de f .

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Calculer $J = \int_{-1}^0 \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^3} dx$

Exercice 4

On pose les fonctions numériques F et f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + bx - 5 ; f(x) = x^2 - x + 2.$$

a et b sont deux réels.

1. Déterminer la dérivée F' de F en fonction des réels a et b
2. En déduire les valeurs de a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. On donne $a = \frac{1}{3}$; $b = 2$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (x^2 - x + 2)dx$

On rappelle que : $\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a)$ avec H primitive de h .

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^4 dx ; B = \int_0^4 |x - 2| dx ; C = \int_0^4 (x - |x - 1|) dx ;$$

$$D = \int_{-4}^5 |x^2 - 9| dx ; E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx ; F = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx ; G = \int_0^{\pi} \tan^2 x dx$$

Exercice 6

On donne :

$$E = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \text{ et } F = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

1. Calculer $E + F$ et $E - F$

2. En déduire E et F .

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction $\cos 2x$.

2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.

3. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$

Exercice 8

1. Calculer I et J tels que $I = \int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 7} dx$ et $J = \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos \pi x dx$

2. Soit h la fonction définie, continue sur $\mathbb{R}$, par :

$$h(x) = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$$

a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{x^3 - 4}{1 + x^2}$ est une primitive de h

b) Calculer $I = \int_0^1 h(x) dx$

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x^2 + 5)(x^3 + 5x - 2)$$

a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 f(x) dx$

b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $I = [0; 2]$.

STATISTIQUES

Exercice 1

On considère la série statistique suivante, donnant les notes de Mathématiques d'une classe de Première C :

Notes (x_i)	1	2	4	7	8	10	12
Effectif (n_i)	8	15	19	31	11	10	6

1. Quel est l'effectif total de cette série ?
2. Déterminer la médiane puis le mode de cette série
3. Calculer les 1^{er} et 3^e quartiles
4. Déterminer l'écart interquartile puis l'intervalle interquartile
5. En déduire le coefficient inter quartile relatif à cette série
6. Calculer les 1^{er} et 9^e déciles
7. Déterminer l'écart inter décile puis l'intervalle inter décile
8. Calculer la moyenne pondérée de la série.
9. Construire le diagramme en boîte de cette série statistique.

Exercice 2

On a interrogé les 250 élèves de premières C & E du Bureau du Centre Académique sur leur nombre de frères et sœurs. Voici les résultats :

Nombre (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif (n_i)	80	90	46	20	8	3	1	1	1
Fréquence (en %)									
FCC									
ECC									

1. Recopier et compléter le tableau avec les fréquences en % ; les fréquences cumulées croissantes et les effectifs cumulés croissants.
2. Calculer la moyenne puis l'écart moyen de cette série.
3. Calculer la médiane M_e de cette série.
4. a) Déterminer Q_1 et Q_3 relatifs aux premier et troisième quartiles.
b) Déterminer l'intervalle inter quartile I_0 ainsi que l'écart interquartile E_0
5. a) Déterminer le premier et le neuvième décile de cette série, notés respectivement D_1 et D_9 .
b) En déduire l'intervalle inter déciles.

Exercice 3

Partie A

On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant.

Classe C_i	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 16[$	$[16; 20[$
Effectif n_i	3	7	13	5	2

1. Déterminer la classe modale ainsi que le mode de cette série.
2. Déterminer l'amplitude et le centre d'une classe de cette série.

Partie B

On considère la série statistique suivante, donnant les notes de Mathématiques d'une classe de Première E :

Notes x_i	2	6	10	14	18
Effectif n_i	3	7	13	5	2

1. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?
2. Calcule la moyenne de la série.

3. Déterminer :

- a) La variance
- b) L'écart-type
- c) Le coefficient de dispersion ainsi que l'étendue de cette série.

Exercice 4

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire d'une entreprise en milliers de francs, pendant huit années consécutives.

Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires (y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

1. Représenter le nuage de points $(M_i)_{1 \leq i \leq 8}$ associé à cette série statistique.
2. a) Calculer les coordonnées de G , point moyen du nuage.
 b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x puis représenter cette droite.
3. On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux : $(M_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(M_i)_{5 \leq i \leq 8}$.
 a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2 , points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.
 b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) puis représenter cette droite.
 c) Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2) .
4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaires pour la 9^e année :
 a) A l'aide de la droite de régression de y en x
 b) A l'aide de la droite (G_1G_2) .

DENOMBREMENT

Exercice 1

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages comprenant :
 - a) 3 boules de même couleur ?
 - b) 3 boules de couleurs différentes ?

Exercice 2

Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de ce sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages d'avoir deux boules rouges.
3. Calculer le nombre de tirages d'avoir deux boules blanches
4. Calculer le nombre de tirage d'avoir deux boules de couleurs différentes.
5. Calculer le nombre de tirage d'avoir deux boules de même couleur.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules rouges, 2 boules blanches et 4 boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Combien y-a-t-il des tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il des tirages comprenant :

- a) 3 boules de même couleur ?
- b) 3 boules de couleurs différentes ?
- c) Exactement 2 boules rouges ?
- d) Au plus 2 boules blanches ?

Exercice 4

Une urne contient deux boules rouges marquées R_1 et R_2 et deux jaunes marquées J_1 et J_2 . On tire au hasard une première boule dans l'urne sans remettre puis une deuxième boule.

On note à chaque tirage la couleur et le numéro tirés.

1. Construire un arbre pour représenter la situation

2. a) Quel est le nombre des issues possibles ?

b) Donner l'ensemble des issues possibles.

3. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants :

A « Obtenir deux boules de même couleur ou de même numéro »

B « Obtenir deux boules portant des numéros ayant un écart de 1 »

4. Déterminer l'événement « A et B »

PARTIE C

Géométrie

OUTIL VECTORIEL DU PLAN

Exercice 1

Soit ABC un triangle, et les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

1. Placer les points E et F .
2. Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (EF) et (BC) ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [AC]$ et $[AB]$. L le point du plan tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BJ}$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (CL) et (AI) sont parallèles.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

1. Placer les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

2. Montrer que A, D, E sont alignés.
3. Soit F le point défini par $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que E est milieu de $[AF]$.

Exercice 4

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on déduire ?

3. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$. En déduire la nature du quadrilatère ABNI.

Exercice 5

Dans un triangle ABC, on considère par M le milieu de [AB], par I celui de [MC] et K le point tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que les points A, I, K sont alignés.

Exercice 6

Soit un triangle ABC. M, N et P sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

b) En écrivant $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, exprimer $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ dans la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

b) Montrer les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.

Exercice 7

Soit ABC un triangle vérifiant : $AB = 3\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$. M, N, P les points définis vectoriellement par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}.$$

1. Faire une figure et exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que M, N et P sont alignés.
3. Soit I le milieu de [AC] et J le symétrique de C par rapport à B. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.
4. Quelle est la position des droites (IJ) et (MN) ?

Exercice 8

Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1. Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.
2. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Démontrer que les points M et N appartiennent respectivement aux droites (ID) et (JB)

3. Démontrer que MINJ est un parallélogramme.
4. Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC).

Démontrer que B est le milieu du segment [CE]

Exercice 9

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].
2. Exprimer, en le justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.
- 3.a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 - b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$.
 - c) Que peut-on alors conclure ?
- 4.a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 - b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C. Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
 - c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 10

Soit ABC un triangle et un nombre x. A chaque valeur de x, on associe le point E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure pour $x = -\frac{1}{2}$
2. Démontrer que, quel que soit x, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on :
 - E et F confondus ?
 - BCFE est un parallélogramme ?

Exercice 11

Soit ABC un triangle. Soit M, N et P les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BP} = -2\overrightarrow{BC}.$$

1. Placer les points M, N et P sur une figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que les points M, N et P sont alignés.
4. Soit I, J et K les milieux des cotés [BC], [AC] et [AB]. On appelle M' le symétrique de M par rapport à J, N' le symétrique de N par rapport à K et P' le symétrique de P par rapport à I.

- a) Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{M'P'}$ en fonction de $\overrightarrow{M'P'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b) Démontrer que les points M', N' et P' sont alignés.

Exercice 12

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire les points D et E tels que ABCD soit un parallélogramme et E soit le symétrique de A par rapport à D.
2. On désigne par O le centre de ABCD et par I le milieu de [DC] ; (AI) coupe (BD) en J et la parallèle à (BC) passant par J coupe (AB) en K. On note H le milieu de [JK].
 - a) Que représente J pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
 - b) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 - c) Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (on pourra, en le justifiant, utiliser l'égalité : $3\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MC}$, où M désigne le milieu de [AD])
 - d) Des questions précédentes, déduire l'expression de $\overrightarrow{AH}$. Que peut-on conclure ?

Exercice 13

Soit ABCD un parallélogramme.

1. a) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$.
b) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
c) En déduire que les points B, M et F sont alignés.
3. a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.
b) Montrer que A est le milieu de [IB].
4. a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
c) Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

Exercice 14

Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1. Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.
2. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que M appartient à la droite (ID).
4. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que N appartient à la droite (JB).
5. Démontrer que MINJ est un parallélogramme.

6. Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC) . Démontrer que B est le milieu du segment $[CE]$.

Exercice 15

Soit IJK un triangle. On note A le symétrique de K par rapport à J , B le symétrique de I par rapport à K et en fin C le symétrique de J par rapport à I .

1.a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AK}$.

c) En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2. Soit P le point défini par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Placer le point P et exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire des questions 1. et 2. Que les points A , K , J et P sont alignés.

3. Soit Q le point défini par : $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BI}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c) En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

En déduire que les points B , K , I et Q sont alignés.

Exercice 16

Soit un triangle quelconque ABC . P , Q et R sont les points définis par : $a\overrightarrow{RA} + (1-a)\overrightarrow{RB} = \vec{0}$; $b\overrightarrow{QA} + (1-b)\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

$b(1-a)\overrightarrow{PB} - a(1-b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ où a et b sont des réels distincts de 1 et 0.

1.a) Construire les points P, Q, R dans le cas où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$.

b) Sur une autre figure, construire P, Q, R dans le cas où $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$.

c) Qu'observe-t-on dans les deux cas ?

2. Dans le cas 1. a) exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$. En déduire que $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont colinéaires.

Que peut-on en conclure sur les points P, Q et R ?

3.a) Dans le cas du 1.a), construire les points A', B' et C' tels que $ARA'Q, ACPC'$ et $RBPB'$ soient des parallélogrammes.

b) Montrer que $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{BP}$

c) En déduire que : $4\overrightarrow{A'C'} = 3\overrightarrow{Q'B'}$.

Exercice 17

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, -3)$ et $(C, -2)$ et E le point défini par : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Ecrire $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis faire la figure.

2.a) Montrer que E est le barycentre des points pondérés $(B, -3)$ et $(C, -2)$.

b) En déduire que les points A, E et G sont alignés.

3. Soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -3)$. Montrer que G est le milieu du segment $[CI]$.

Exercice 18

A, B, C et D sont quatre points du plan tel que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 2); (D, 1)\}$. On désigne par K le milieu de $[AD]$ et L celui de $[BC]$. Soit I et J les barycentres respectifs des systèmes $\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $\{(C, 2); (D, 1)\}$.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que G est milieu de $[IJ]$.
3. Démontrer que les points G, K et L sont alignés.

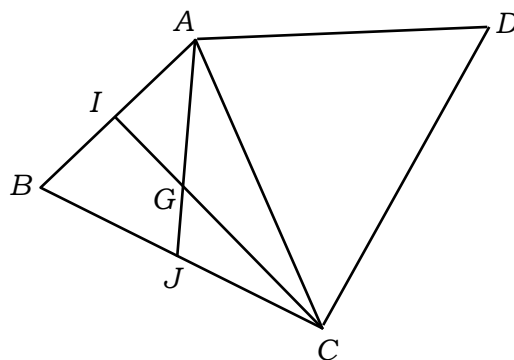
Exercice 19

On considère le parallélogramme $ABCD$.

Démontrer que le barycentre du système $\{(A, 5); (B, 2); (C, 3); (D, 3)\}$ est un point de la droite (AC) .

Construire un quadrilatère $ABCD$ tel que le support de chacun de ses côtés soit sécant aux trois autres et tel que le barycentre des points pondérés $(A, 5); (B, 4); (C, 3)$ et $(D, 4)$ soit un point de la droite (AC) .

Exercice 20



Sur la figure ci-dessus, $ABCD$ est quadrilatère, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC . On considère les points L et K tels que :

$$L = \text{bar}\{(A, 1); (D, 3)\} \text{ et } K = \text{bar}\{(C, 1); (D, 3)\}.$$

1. Reproduire la figure puis placer les points L et K .
2. Soit H tel que : $H = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 3)\}$.
 - a) Montrer que H est le barycentre de G et D affectés de coefficients à préciser.
 - b) Montrer que H est le barycentre de J et L affectés de coefficients à préciser.
 - c) Montrer que H est le barycentre de I et K affectés de coefficients à préciser.
3. Dédire de la question 2 que les droites (GD) , (JL) et (IK) sont concourantes en un point que l'on précisera.

Exercice 21

$ABCDE$ est un pentagone.

G_1 et G_2 sont les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ADE . On considère le barycentre G des points pondérés $(A, 1); (B, -1); (C, -1); (D, 2)$ et $(E, 2)$.

1. Construire G_1 et G_2 .
2. Montrer que les points G_1, G_2 et G sont alignés. En déduire une construction de G .
3. On définit les points H et K par :

H est le barycentre du système $\{(A, -1); (B, 2); (C, 3); (D, -1)\}$

K est le barycentre du système $\{(A, -1); (C, -1); (D, -3); (E, -4)\}$

 - a) Montrer que G appartient à la droite (HK) .
 - b) En déduire la position relative des droites (G_1G_2) et (HK) .

Exercice 22

Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A , I le milieu du segment $[AB]$ et J est le centre de gravité de ABC .

Pour tout réel m différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S = \{(A; 1), (B; m), (C; 2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que G_1 est le milieu du segment $[CI]$
2. Montrer que les points G_1, J et C sont alignés.
3. Montrer que pour tout point M , $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$
4. Montrer que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$
5. Montrer que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

Exercice 23

On considère le triangle ABC .

Partie A. Des barycentres particuliers

- 1) Placer $I = \{(B, 1); (C, 2)\}$; $J = \{(A, 2); (C, 1)\}$ et $K = \{(A, 4); (B, -1)\}$
- 2) a. Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 b. Montrer que $\overrightarrow{KI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
 c. Qu'en déduit-on pour les points I, J et K ?

Partie B. Généralisation

- 3) Pour tout réel m , on note : $G_m = \{(A, 2m); (B, 1 - m); (C, 2 - m)\}$
 - a. Justifier que G_m existe pour tout m réel.
 - b. Reconnaitre les points G_0, G_1 et G_2 .

4) a. Montrer que $\overrightarrow{AG_m} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2-m}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1-m}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

5) Placer les points G_4, G_{-2} et G_7 . Quel est l'ensemble des points G_m quand m décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 24

$ABCD$ est un rectangle et I et J respectivement les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

1.a) Construire le point F barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(C, 3)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| = AC$.

2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ et soit E barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(D, 3)$.

a) Montrer que G est le milieu de $[EF]$.

b) Construire les points E et G . Montrer que les points I, J et G sont alignés.

Exercice 25

$ABCD$ est un carré de centre O .

1. Montrer que $C = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$.

2. On pose $S = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1); (D, -2)\}$.

a) Montrer que $S = \text{bar}\{(B, 3); (D, -1)\}$.

b) En déduire que S est le symétrique du point O par rapport au point B . Construire le point S .

3. a) Démontrer que, pour tout point M du plan, le vecteur

$\vec{u} = -\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}$ est un vecteur constant qu'on exprimera en fonction du vecteur $\vec{AB}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tel que : $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}\| = \|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\|$.

Exercice 26

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

1. Construire le point G barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

2. Soit H le point défini par : $3\vec{HA} + 2\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$.

a) Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(G, 5)$ et $(C, 1)$.

b) Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(I, 2)$ et $(J, 1)$.

c) En déduire une construction simple de H .

3. La droite (AH) coupe la droite (BC) au point K . Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(H, -2)$.

4. a) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = 6\vec{MH}.$$

b) Déterminer les ensembles suivants :

$$E_1 = \{M \in P / \|3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = 6\|\vec{MA} - 2\vec{MH}\|\}$$

$$E_2 = \{M \in P / \|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|\vec{MI} - \vec{MJ}\|\}$$

Exercice 27

Soit ABCD un parallélogramme et H le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 4) et K barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1).

1. a) Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
b) Exprimer $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$.
c) Construire les points H et K.
2. Soit G le point défini par : $-\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
 - a) Montrer que G est milieu de [HK].
 - b) Montrer que BHCK est un parallélogramme.
3. Déterminer et représenter les ensembles suivants :

$$E_1 = \{M \in P / \|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{2MC} + \overrightarrow{MD}\|\}.$$

$$E_2 = \{M \in P / \|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{6MC} - \overrightarrow{6MD}\|\}.$$

Exercice 28

Soit ABC un triangle, I et J désignent les milieux respectifs de [AB] et [BC].

1. Construire le point G barycentre des points pondérés (A, 3) et (C, -1) .
2. Soit K le point défini par : $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.
 - a) Montrer que K est le milieu du segment [BC].
 - b) Montrer que K est barycentre des points pondérés (I, 3) et (J, -1).
 - c) Déduire une construction du point K (avec justification).
3. Soit F le symétrique de C par rapport à B.
 - a) Exprimer F comme barycentre des points B et C.

b) Dédurre que les droites (AF) , (IJ) et (BC) sont concourantes.

4. Déterminer chacun des ensembles suivants :

$$E_1 = \{M \in P / \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MI}\|\}.$$

$$E_2 = \{M \in P / \|\overrightarrow{3MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{3MI} - \overrightarrow{MJ}\|\}.$$

Exercice 29

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire les points :

- I barycentre de $(A, 2)$; $(B, 1)$; $(C, 2)$ et $(D, -1)$.
- J barycentre de $(A, -2)$; $(B, 3)$; $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

2. Soit G le milieu du segment $[IJ]$. Montrer que G est aussi milieu de $[BC]$.

3. Le plan est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Déterminer les coordonnées des points I et J dans ce repère puis montrer que la droite (IJ) coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

4. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM}\| = 2AC$

5. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points N du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{-2AN} + 3\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}\| = \|\overrightarrow{4AN} - \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}\|$.

Exercice 30

Soit A , B et C trois points non alignés tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$.

I le milieu de $[BC]$ et le point J défini par : $\overrightarrow{BJ} = -2\overrightarrow{BC}$. G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, 3)$ et $(C, -2)$.

1. Exprimer le point J comme barycentre des points B et C .

2. a) Montrer que G est le barycentre des points A et J .

b) En déduire la position du point G sur le segment $[AJ]$.

3. a) Exprimer, pour tout point M du plan, le vecteur

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MC}$.

b) Exprimer en fonction d'une seule distance la norme

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

c) Déterminer l'ensemble E des points M tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

d) Tracer l'ensemble E .

4. a) Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que :

$$(3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \perp \overrightarrow{MA}$$

b) Justifier que le point $I \in \Delta$ puis tracer l'ensemble Δ .

Exercice 31

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

- E est le barycentre de $(A, -1); (B, 2)$ et $(C, -3)$.
- F est milieu du segment $[ED]$.
- G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 2)$.
- H est le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

1. Faire la figure.

2. Montrer que F est le barycentre de $(A, -1); (B, 2); (C, -3)$ et $(D, -2)$.

3. Prouver que les points G, F et H sont alignés.

4. Prouver que le point F est le barycentre des points G, B et C munis de coefficients à préciser.

5. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}\|$$

b) Exprimer $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$$

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que :

$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

Exercice 32

On considère un triangle non aplati ABC de centre de gravité G .

1) Ecrire la relation vectorielle vérifiée par G .

2) Soit f l'application du plan P dans V (ensemble des vecteurs du plan), définie pour tout $M \in P$ par : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Montrer que $\forall M \in P, \overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Montrer que si M_1 et M_2 sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{f(M_1)} = \overrightarrow{f(M_2)}$ alors ils sont confondus. En déduire que G est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

3) Soit A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

a) Montrer que :

$$\forall M \in P, \overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}.$$

b) En déduire que $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$.

c) En déduire que les médianes de ABC sont concourantes.

OUTIL VECTORIEL DE L'ESPACE

Exercice 1

Soit $A(-1; 2; -3)$; $B(0; 2; -1)$ et $C(-1; 1; 0)$ trois points de l'espace (E) muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1. Placer les points A , B et C dans ce repère.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.
4. Les points A , B , C et D sont-ils coplanaires ?
5. Calculer les coordonnées du point G , centre de gravité du triangle ABC .

Exercice 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 8 cm.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont-ils colinéaires ?
5. Déterminer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[FH]$.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(2; 4; 1); B(0; 4; -3); C(3; 1; -3); D(1; 0; -2); E(3; 2; -1)$ et le vecteur $\vec{n}(12; 12; -6)$.

Pour chacune des sept affirmations suivantes, dire en justifiant si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation suivante :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Le point A est sur la droite (CD) .
6. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}$
7. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .

Exercice 4

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points $A(3; 2; 6); B(1; 2; 4)$ et $C(4; -2; 5)$.

1. Placer les points A , B et C dans le repère.
2. a) Vérifier que les points A , B et C définissent un plan.
b) Vérifier que ce plan est le plan $(\mathcal{P})$.
3. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Ecrire un système d'équation paramétrique de la droite (Δ)

passant par l'origine O et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$. Déterminer les coordonnées de K , puis calculer la distance OK .

Exercice 5

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points suivants : $A(1; 0; 0)$; $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Justifier alors que les points A , B et C déterminent un plan $(\mathcal{P})$

c) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

2. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.

a) Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites Δ et Δ' .

b) Soit Ω le point d'intersection de Δ et Δ' . Déterminer les coordonnées de Ω .

c) Calculer la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; 3)$; $B(0; 1; 4)$; $C(-1; -3; 2)$; $D(4; -2; 5)$ et le vecteur $\vec{n}(-2; 1; -1)$.

1. Démontrer que les points A , B et C déterminent un plan.

2. a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

passant par O et orthogonale au plan (ABC) .

3. a) Justifier que les points A , B , C et D sont les sommets d'un tétraèdre.

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC) .

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

4. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + k, \\ z = 4 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC) .

5. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) . Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC .

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, d'unité graphique 1 cm.

On considère les points $E(1; -2; 0)$; $F(-2; -3; 5)$; $G(2; 1; 1)$ et $H(1; 1; 3)$.

1. Démontrer que les points E , F , G et H sont coplanaires. On note (P) le plan passant par les points E , F , G et H .

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal à (P) .

3. Déterminer une équation cartésienne de (P) .

4. Déterminer un système d'équation paramétriques de la droite (D) passant par $A(1; 2; 5)$ et perpendiculaire à (P) .

5. Montrer que le point A n'appartient pas à (P) .

6. a) Calculer l'aire du triangle AFG .

b) Calculer le volume du tétraèdre AEFG.

Exercice 8

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(2; 1; 0); B(0; 1; 1); C(0; 3; 2)$ et $K(0; 0; 1)$.

1. Soit G l'isobarycentre de A, B et C. Déterminer les coordonnées du point G.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Déterminer alors l'équation du plan (ABC).
4. Les points A, B, C, G et K sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (OK).
6. La droite (OK) perce le plan (ABC) en un point I. Déterminer les coordonnées du point I.
- 7) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 9

ABCDEFGH est un cube.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Soit I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
 - a) Donner les coordonnées des points I, J et K puis montrer qu'ils définissent un plan.
 - b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 4; 0)$ est normal au plan (IJK).
 - c) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).

d) Justifier que les points A, I, J et K sont les sommets d'un tétraèdre et calculer le volume de ce tétraèdre.

2. Soit M un point de la droite (IJ).

- a) Montrer que M a pour coordonnées $(0; \frac{3}{4}; \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du triangle AKM en fonction de α .
- c) Déterminer le point M_0 en lequel $\mathcal{A}(\alpha)$ atteint son minimum.

Exercice 10

ABCDEFGH est un cube. On se propose de démontrer que le point de [AG] qui est tel que sa distance à A est égale à $\frac{1}{3}AG$ est le centre de gravité du triangle BDE.

1. On pose l'arête du cube égale à 4 cm.

- a) Faire la figure de ce cube et montrer que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (ACG).
- b) Montrer que la droite (BE) est perpendiculaire au plan (AFG).
- c) En déduire les positions relatives de (AG) et (BD) ; (AG) et (BE) ; (AG) et (BDE).
- d) Quelle est la nature exacte du triangle BDE ? Justifier la réponse.
- e) Quelle est la nature exacte de EACG ? Justifier la réponse.

2. Soit T le centre de gravité du triangle BDE et I le point d'intersection des droites (ET) et (BD).

- a) Montrer que I est le milieu du segment [AC] et que les droites (ET) et (AG) sont coplanaires.
- b) On pose T_1 le point d'intersection de (EI) et (AG). Montrer que $AT_1 = \frac{1}{3}AG$.
- c) En déduire que $T = T_1$.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous ensemble de E défini par : $F = \{(x, y, z) \in E / x - 2y + 3z = 0\}$

- 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
- 2) Déterminer la base et la dimension de F
- 3) Soit $\vec{u}(0; 1; 2)$, $\vec{v}(1; 2; 1)$ et $\vec{w}(2; 1; m)$ trois vecteurs de E .
Déterminer le réel m pour que la famille $(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w})$ soit liée.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{e}_1(2; -1; 0)$, $\vec{e}_2(-3; 2; 1)$ et $\vec{e}_3(5; 0; -2)$.

- 1) Montrer que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
- 2) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}(5; 8; -14)$ dans B'

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs

$\vec{v}_1(1; 0; 1)$; $\vec{v}_2(1; 1; 0)$ et $\vec{v}_3(a; 2; -a^2)$ où a est un réel.

- 1) Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille libre.
- 2) Déterminer les valeurs de a pour que le vecteurs $\vec{v}_3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Exercice 4

On considère les vecteurs $\vec{U}_1(1; 1; 0; 0)$; $\vec{U}_2(0; 1; 1; 0)$ et $\vec{U}_3(0; 0; 1; 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

- 1) Montrer que la famille $F = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$ des trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est libre.
- 2) Soit le vecteur $\vec{U}(1; 2; 3; 2)$ de l'espace $\mathbb{R}^4$, déterminer les réels a , b et c tels que l'on ait : $\vec{U} = a\vec{U}_1 + b\vec{U}_2 + c\vec{U}_3$, c'est-à-dire que $\vec{U}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs de la famille F .
- 3) Soit le vecteur $\vec{V}(x; y; z; t)$ du sous espace E de $\mathbb{R}^4$, trouver une relation entre les coordonnées x, y, z et t du vecteur $\vec{V}$ de E sachant que l'on a : $\vec{V} = \alpha\vec{U}_1 + \beta\vec{U}_2 + \gamma\vec{U}_3$, où α, β et γ sont des réels.
- 4) Vérifier que le vecteur $\vec{W}(20; 20; -15; -15)$ appartient à E .

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ et F un sous ensemble de E défini par : $F = \{(x, y, z) \in E / x\cos\theta - y\sin\theta + z = 0\}$

- 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
- 2) Déterminer la base et la dimension de F .
- 3) On considère les vecteurs $\vec{v}_1(\cos\theta ; \sin\theta)$ et $\vec{v}_2(-\sin\theta; \cos\theta)$
 - a) Pour quelle(s) valeur(s) de θ la famille $F = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est génératrice ?
 - b) Pour quelle(s) valeur(s) de θ la famille $F = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre ?
 - c) Pour quelle(s) valeur(s) de θ la famille $F = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est liée ?

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1

$ABCD$ est un trapèze rectangle en C et D , E un point de $[DC]$;
 $DE = 1$; $BC = 4$.

1. a) Calculer $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC}$.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$

c) En déduire que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 9$

2. a) Calculer EA et EB puis $\cos \widehat{AEB}$.

b) En déduire que $AB = \sqrt{17}$

c) Calculer $\cos \widehat{ACB}$.

3. a) Montrer que $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Calculer alors $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{EC}$

c) En déduire que les droites (CA) et (BE) sont orthogonales.

4. On muni le plan $\wp$ par le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DJ}; \overrightarrow{DE})$ avec J le point défini par : $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Soit l'ensemble $\{\Gamma = M \in \wp / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 6\}$.

Montrer que Γ est un cercle que l'on caractérisera.

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$

2. Soit I le milieu de $[BC]$ et G le barycentre de $\{(A; 2); (B; 3); (C; 3)\}$.

Montrer que G est le barycentre de $\{(A; 2); (I; 6)\}$ et construire G puis vérifier que la distance $AG = 3$.

3. Soit f l'application du plan qui à tout point M du plan associe $f(M)$ définie par : $f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

- Montrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$ et calculer $f(A)$ et $f(G)$.
- Déterminer et représenter l'ensemble (Q) des points M vérifiant : $f(M) = f(A)$.

Exercice 3 Formule des sinus

ABC est un triangle quelconque. On pose $AB = c, AC = b$ et $BC = a$.

1. Montrer les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B}$
- $c^2 = b^2 + a^2 - 2bacos\hat{C}$

2. Soit H le pied de la hauteur issue de $\hat{C}$.

- Démontrer que l'aire S du triangle ABC est donnée par :

$$S = \frac{1}{2}bcsin\hat{A}.$$

- En déduire que $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$.

3. Soit Ω le cercle circonscrit du triangle ABC , O son centre et D le point diamétralement opposé à B . On désigne par R le rayon de Ω .

Montrer que $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.

Exercice 4 Formule de Héron

Soit un triangle ABC d'aire S . On pose $BC = a, CA = b$ et $AB = c$ et $\widehat{BAC} = \hat{A}$.

- Exprimer $\cos^2\hat{A}$ en fonction de a, b et c puis $\sin^2\hat{A}$ en fonction de b, c et S .
- En déduire l'égalité $16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

3. On note p le demi-périmètre du triangle ABC . En utilisant la relation précédente, démontrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Démontrer que :

$$AH = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercice 5

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 10$, $\text{mes}(\widehat{BAC}) = 57^\circ$ et $\text{mes}(\widehat{ABC}) = 28^\circ$. Calculer $\text{mes}(\widehat{ACB})$ et les distances AC et BC .

2. Soit un triangle ABC tel que $BC = a = 8$; $AC = b = 7$ et

$AB = c = 10$.

a) Calculer la longueur IH , sachant que I est milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A .

b) Calculer l'aire S du triangle ABC .

3. a) A partir de la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$, montrer que :

$$1 + \cos\hat{A} = \frac{2p(p-a)}{bc} \text{ et } 1 - \cos\hat{A} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \text{ (avec } p = \frac{a+b+c}{2}\text{)}.$$

b) En déduire la valeur de $\sin\hat{A}$ en fonction de p , a , b et c .

c) Démontrer la formule de Héron Alexandra :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Où S est l'aire du triangle ABC de côtés a , b et c .

Exercice 6 Théorème de la médiane

1. Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

2. Les côtés d'un triangle ont pour mesures 5 cm, 7 cm et 8 cm.

Calculer la mesure de chacune des médianes.

3. Les médianes d'un triangle ont pour mesures 60 mm, 75 mm et 90 mm. Calculer la mesure de chaque côtés.

4. Calculer la somme des carrées des côtés d'un triangle en fonction de celle des médianes.

Exercice 7

On donne un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G et A' le milieu de [BC]. On pose $BC = a$.

1. Exprimer $4\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AA'}$ en fonction de a .

2. Exprimer $GB^2 + GC^2$ en fonction de a .

3. En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{3}{4}a^2$.

4. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Exercice 8

ABC est un triangle et on désigne par G son centre de gravité. Soit φ et f les applications définies par :

$$\varphi(M) = MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \text{ et } f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

1. Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G) \text{ et } \varphi(G) = -\frac{1}{2}f(G).$$

2. Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC et en déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, AC et BC.

3. Dans le cas particulier où le triangle est équilatéral de côté a , déterminer l'ensemble des points M tels que : $\frac{a^2}{4} \leq \varphi(M) \leq \frac{a^2}{2}$.

Exercice 9

Dans le plan P on considère un triangle rectangle ABC , d'hypoténuse $[BC]$ de longueur $2a$. Soit f l'application :

$$M \mapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}, \quad m \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$ et calculer $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. On pose $m = -1$. Démontrer que le barycentre G du système $(A, 4); (B, -1); (C, -1)$ est symétrique par rapport à A du milieu I de $[BC]$.

3. Déterminer l'ensemble :

$$C = \left\{ M \in P / 4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -4a^2 \right\} \text{ (on remarque que } A \in C \text{)}$$

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = 2a$ et $AB = AC = 3a$ où $a > 0$. Soit G le barycentre des points $(A; 2); (B; 3); (C; 3)$. Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AI]$.

1. Montrer que G est milieu de $[IJ]$.

2. M étant un point du plan, calculer en fonction de MG et a :

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$$

3. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2$$

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2$$

5. Montrer que les droites (BC) , (AB) et (AC) ont, chacune, un unique point commun avec (E) .

Que représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice 11

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 8$. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduire $\cos \widehat{BAC}$.

3. Soit H le projeté de B sur (AC) . Calculer AH .

4. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, en déduire $\overrightarrow{BJ}$.

5. a) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$$

b) Calculer CI .

c) Déterminer l'ensemble $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 100\}$

6. Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MJ^2 - 9$

7. Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$, déterminer l'ensemble $E' = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 7\}$

8. Soit O le milieu de $[IJ]$.

a) Montrer que $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM}$

b) Déterminer l'ensemble $E'' = \{M \in P / MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 6\}$

Exercice 12

On considère dans le plan $\wp$ deux points A et B tels que $AB = 5$ et I milieu de $[AB]$.

1. Soit C un point de $\wp$ vérifiant : $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$. Vérifier que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ puis construire C .

2. Placer les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

a) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$.

c) Que représente la droite (CD) pour le triangle BED ?

3. a) Vérifier que E est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(C, -3)$

b) Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$3\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = 2\overrightarrow{ME}^2 - 24$$

c) En déduire l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MC} = \sqrt{3}$

4. Le point E se projette orthogonalement sur (AB) en K .

a) Calculer la distance AK .

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tel que :

$$MA^2 - MB^2 = 5$$

Exercice 13

1. A et B sont deux points tels que $AB = 3$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $3MA^2 - 2MB^2 = 10$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -3$

c) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0$

2. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 3$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$

b) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

c) $MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

3. Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3a$ et $AC = 2a$ (où a désigne un nombre réel strictement positif).

a) Déterminer le point G barycentre de (A, 1); (B, 2) et (C, 3). Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 48a^2$$

b) Quel est l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 30a^2$$

(On vérifiera que C est un point de cet ensemble)

Exercice 14

Soient A et B deux points distincts du plan et un nombre $k(k > 0)$. On pose $AB = a$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 1$.

On suppose pour la suite que $k \neq 1$.

2. Démontrer que : $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$.

3. Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, $-k^2$).

a) Montrer que : $MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k^2 GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$

b) Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de k et de a.

c) En déduire que : $MG^2 = \frac{k^2}{(1 - k^2)^2} a^2$

d) Quel est alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k$$

4. Soit G_1 le barycentre de (A, 1) et (B, k) et G_2 le barycentre de (A, 1) et (B, $-k$).

a) Démontrer que : $MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$

b) Quel est alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k$$

Application : $AB = 4 \text{ cm}$. Construire $\mathcal{E}_1$.

Construire l'ensemble $\mathcal{E}_2$ en utilisant la question 3.

Construire l'ensemble $\mathcal{E}_1$ en utilisant la question 4.

Exercice 15 Point de Lemoine

Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus. On appelle **point de Lemoine** du triangle ABC le barycentre G du système

$\{(A, a^2); (B, b^2); (C, c^2)\}$. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On Donne :

H_A le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, H_B celui de B sur $[AC]$, H_C celui de C sur $[AB]$.

1. Montrer que H_A est le barycentre du système $\{(B, b \cos \hat{A}); (C, c \cos \hat{B})\}$.

2. En utilisant la relation d'Al Kashi dans le triangle ABC , montrer que H_A est le barycentre du système

$$\{(B, a^2 + b^2 - c^2); (C, a^2 + c^2 - b^2)\}.$$

3. Pour tout point M du plan, soit $\overrightarrow{V(M)}$ el vecteur défini par :

$$\overrightarrow{V(M)} = -2a^2 \overrightarrow{AH_A} + (a^2 + b^2 - c^2) \overrightarrow{MB} + (a^2 + c^2 - b^2) \overrightarrow{MC}.$$

a) Montrer que $\overrightarrow{V(M)}$ est un vecteur constant. En déterminant $\overrightarrow{V(H_A)}$, montrer que $\overrightarrow{V(M)}$ est non nul.

b) Ecrire la relation vectoriel traduisant l'égalité $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$, ainsi que la relation de définition du barycentre G .

c) Montrer alors l'égalité vectorielle :

$$-2a^2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GH_A}) + (a^2 + b^2 - c^2)(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

4. Soit A' le milieu de $[BC]$, I_A le milieu $[AH_A]$. Montrer que G appartient à la droite $(A'I_A)$. En introduisant de même le milieu B'

de $[AC]$ (respectivement le milieu C' de $[AB]$) et le milieu I_B de $[BH_B]$ (respectivement le milieu I_C de $[CH_C]$).

Montrer que les droites passent par G .

Exercice 16 Relation de Stewart

Partie A

Soit A, B, C trois points alignés. L'on se propose de démontrer la relation suivante dite de **Stewart** :

$$\overline{BC} \cdot MA^2 + \overline{CA} \cdot MB^2 + \overline{AB} \cdot MC^2 + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

1. Justifier que $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0$

2. On définit les fonctions scalaire et vectorielle d'ordre 3 de Leibniz suivantes (vous retrouverez la généralisation au niveau de la série thématique)

$$g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 ; \quad \overrightarrow{f(M)} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$$

Soient M et P deux points du plan, montrer que :

$$g(M) = g(P) + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{f(P)} + (\alpha + \beta + \gamma) MP^2$$

3. Montrer que pour tout point M du plan :

$$g(M) = g(A) + 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} \text{ avec } \vec{V} = \overline{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overline{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

4. Montrer que $\vec{V} = \vec{0}$ et en déduire que pour tout point M du plan :

$$g(M) = g(A) = \overline{CA} \cdot AB^2 + \overline{AB} \cdot AC^2$$

5. Justifier que $g(M) = \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CB}$ et en déduire la relation de Stewart.

Partie B

Soit un triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure issue de l'angle $\hat{A}$.

On pose $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$ et $AD = d$.

1) Faire une figure

2) La parallèle à la droite (AD) passant par C rencontre (AB) en E. Placer E.

a) Justifier que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$

b) Montrer que $AE = AC$, puis démontrer que : $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$

3. Appliquer la formule de Stewart sur les points alignés B, D et C en prenant $M = A$

4. Dédurre que $d^2 = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$.

Exercice 17 La droite d'Euler

Soit ABC un triangle de centre de gravité G. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit H un point du plan.

Partie A

1. Montrer que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

2. Dans la suite, le point H désigne l'orthocentre du triangle ABC.

a) Dédurre de la question précédente que $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonale à $\overrightarrow{BC}$.

b) Démontrer que $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonale à $\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire que les points O, G et H sont alignés.

Lorsque les points O, G et H ne sont pas confondus, la droite qu'ils définissent s'appelle la **droite d'Euler** du triangle ABC.

Partie B

On suppose que le triangle n'est pas équilatéral. On rappelle que O, G et H sont alignés et R le rayon du cercle circonscrit.

1. Soit M un point de (OH) défini par : $\overrightarrow{MO} = k\overrightarrow{MH}$ (k réel).

Montrer que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 - k(k+2)MH^2 = 3R^3$

2. Soit G' le symétrique de O par rapport à G .

Montrer que : $G'A^2 + G'B^2 + G'C^2 = 3R^3$

3. Montrer que : $HA^2 + HB^2 + HC^2 - HO^2 = 3R^2$.

Partie C

Dans cette partie, on désigne par I le milieu de $[AH]$.

1. Montrer que $[OH]$ et $[IA']$ ont même milieu et que $AH^2 = 4R^2 - a^2$

2. Soit $\Delta(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2)$.

Montrer que $\Delta(M)$ est indépendant du point M .

3. En prenant M en A , montrer que : $\Delta(M) = a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2$

Déduisez-en la relation $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

LE CERCLE

Exercice 1

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(Ox; Oy)$, on considère les trois points $A(2; 3)$, $B(-2; -1)$ et $C(1; -1)$.

Former l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC et déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

II) Formé l'équation du cercle (C) qui passe par les points $A(0; -2)$ et $B(4; 0)$ et a son centre sur la droite (D) d'équation $x + 2y = 0$.

Exercice 2

I) Soit $(D): 3x + 4y + 1 = 0$ et $(D'): 3x - 4y - 1 = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan équidistants aux droites (D) et (D') .

II) Discuter, suivant les valeurs du réel m , la nature de l'ensemble (E) dont on donne une équation :

1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - m^2 + 5m + 5 = 0$

3) $x^2 + y^2 + 2mx - 2y + 4 = 0$

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par :

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 6m^2 - 4 = 0, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1. Quelle est la nature de l'ensemble (E) dans chacun des cas suivants :

a) $m = 0$?

b) $m = 2$?

c) $m = 3$?

2. Peut-on déterminer le réel m pour que l'origine O du repère appartienne à l'ensemble (E) ?

3. Existe-t-il un ensemble (E) contenant le point $H(4; -2)$?

4. Pour quelles valeurs de m l'ensemble (E) est-il un cercle ?

5. Montrer que, lorsque m varie, l'ensemble des centres Ω de ces cercles est un segment de droite.

Exercice 4

Un cercle (C) de centre O et de rayon R est donné. Par un point M quelconque du plan on trace une droite qui coupe (C) en A et B .

1. I est le milieu de $[AB]$ et A' le point de (C) diamétralement opposé à A . Vérifier que : $P = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MA^2 - IA^2 = MO^2 - R^2$

Remarque : le réel P ne dépendant que de M et de (C) et non de (AB) ; par définition, la puissance d'un point M du plan par rapport à un cercle (C) de centre O et de rayon R est le réel $P = MO^2 - R^2$.

2. Quels sont les points M du plan qui ont une puissance :

a) Nulle ? b) Négative ? c) Positive ? d) Egale à R^2 ? e) Egale à $-R^2$?

3. On donne deux cercles (C) de centre O et de rayon 3 et (C') de centre O' et de rayon 4 tel que la distance $OO' = 5$. Quel est l'ensemble des points dont les puissances par rapport aux deux cercles sont égales ? opposées ?

Exercice 5 Puissance d'un point

Dans un plan, soit un cercle (Γ) de centre Ω et de rayon R , et M un point quelconque. On mène par M une droite sécante au cercle (Γ)

qui le coupe en deux points A et B . A' est le point de (Γ) diamétralement opposé à A .

1. a) Etablir que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$

b) En déduire que ce produit scalaire est indépendant de la sécante issue de M .

2. On pose $\rho(M) = \Omega M^2 - R^2$. ($\rho(M)$ est appelé la puissance du point M par rapport à (Γ) .)

Lorsque M est intérieur à (Γ) , on considère T le point de contact d'une tangente à (Γ) issue de M , montrer que $\rho(M) = MT^2$.

3. Etudier le signe de la puissance de M pour (Γ) suivant sa position par rapport à (Γ) .

4. On donne deux cercles $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 3 et $(\mathcal{C}')$ de centre O' et de rayon 4 tel que la distance $OO' = 5$. Quel est l'ensemble des points dont les puissances par rapport aux deux cercles sont égales ? (l'ensemble de ces points est une droite appelée axe radical).

Exercice 6 Cercles orthogonaux

I) Soit $(\mathcal{C}_1)$ un cercle de centre Ω_1 et de rayon R_1

Soit $(\mathcal{C}_2)$ un cercle de centre Ω_2 et de rayon R_2 .

Donner un encadrement de la distance $\Omega_1\Omega_2$ de façon à ce que les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ soient sécants.

II) Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On définit les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ par les équations cartésiennes suivantes :

$$(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$$

a) Déterminer les coordonnées des points Ω_1 et Ω_2 et calculer R_1 , puis R_2 .

- b) En utilisant la question I), montrer que (C_1) et (C_2) sont sécants.
- c) Soit I et J les points d'intersection des cercles (C_1) et (C_2) , I désigne le point d'intersection d'abscisse nulle. Déterminer les coordonnées de I et J .
- d) Déterminer une équation de la tangente au cercle (C_1) en I , ainsi qu'une équation de la tangente au cercle (C_2) en J .
Montrer alors que (C_1) et (C_2) sont orthogonaux.
- e) Calculer la puissance du point Ω_1 par rapport au cercle (C_2) , et la puissance du point Ω_2 par rapport au cercle (C_1) .
Comparer les nombres obtenus.
- f) Soit (D) la droite passant par Ω_1 et parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$.
Donner les coordonnées des points d'intersection P_1 et Q_1 de (D) avec le cercle (C_1) , puis les coordonnées des points d'intersection de P_2 et Q_2 de (D) avec le cercle (C_2) .
Montrer que : $\Omega_1 P_1^2 = \Omega_1 Q_1^2 = \Omega_1 \overrightarrow{P_2} \cdot \Omega_1 \overrightarrow{Q_2}$

Exercice 7 Axe radical de deux cercles

On considère deux cercles de centres distincts : (C_1) de centre Ω_1 et de rayon R_1 , et (C_2) de centre Ω_2 et de rayon R_2 .

On note $\Phi_1(M)$ et $\Phi_2(M)$, les puissances de M par rapport aux cercles (C_1) et (C_2) .

1. a) Montrer que l'ensemble Δ des points M du plan tels que $\Phi_1(M) = \Phi_2(M)$ est une droite perpendiculaire à la droite $(\Omega_1 \Omega_2)$

b) Cette droite est appelée axe radical des cercles (C_1) et (C_2) . Quel est l'axe radical de deux cercles sécants en A et B ?

2. Construire Δ dans les cas suivants (on suppose que l'unité choisie est le centimètre) :

a) $R_1 = 2$, $R_2 = 5$ et $\Omega_1 \Omega_2 = 7$

b) $R_1 = 3$, $R_2 = 4$ et $\Omega_1 \Omega_2 = 7$

3. On considère maintenant trois cercles dont les centres sont distincts et non alignés :

(C_1) de centre Ω_1 et de rayon R_1 ,

(C_2) de centre Ω_2 et de rayon R_2 ,

(C_3) de centre Ω_3 et de rayon R_3 .

Soit Δ_1 l'axe radical des cercles (C_2) et (C_3) ,

Δ_2 l'axe radical des cercles (C_1) et (C_3) ,

Δ_3 l'axe radical des cercles (C_1) et (C_2) .

a) Montrer que les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point O . Ce point est appelé centre radical des trois cercles (C_1) , (C_2) et (C_3) .

b) Application : construction de l'axe radical de deux cercles n'ayant aucun point commun.

Soit (C_1) et (C_2) deux cercles de centres Ω_1 et Ω_2 et de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 = 3$ et $R_2 = 2$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$.

En utilisant un cercle (C_3) convenablement choisi, déterminer un point de l'axe radical de (C_1) et (C_2) .

Construire alors cet axe.

c) Démontrer que le centre radical de trois cercles est soit intérieur aux trois cercles, soit extérieur aux trois cercles, soit sur les trois cercles.

Exercice 8

Soit a un réel strictement positif. Soit α un réel fixé.

Soit AOB un triangle rectangle en O , tel que $OA = a$ et $OB = 4a$.

1. a) Déterminer Γ_α , ensemble des points M du plan tels que :

$$\alpha MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2$$

- b) Lorsque Γ_α est un cercle de centre Ω_α , déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.
- c) Le point O est sur Γ_α . Démontrer que Δ , tangente en O à Γ_α est une droite indépendante de α . Caractériser Δ .
- d) Soit N un point quelconque de Δ . Démontrer que N a même puissance que tous les cercles Γ_α .
- e) Soit E un point fixe de Δ . On mène par E deux tangentes à un cercle Γ_α . L'une d'elles est (EO) ; l'autre est tangente à Γ_α en T_α . Déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$4MA = 3MB$$

Déterminer les points M du plan vérifiant à la fois :

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2 \text{ et } 4MA = 3MB$$

LA SPHERE

Exercice 1

On considère la sphère $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 7 = 0$

1. Déterminer le centre et le rayon de S .
2. Le point $A(1; 1; 1)$ appartient-il à S ?
3. Déterminer une équation du plan tangent à S en A .

Exercice 2

Soit S la sphère de centre $\Omega(1; 2; -1)$ et de rayon $r = 3$.

On considère aussi le plan P d'équation $x + 2y + 2z = 0$

1. Déterminer une équation cartésienne de S .
2. La sphère S coupe-t-elle le plan P ?
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S \cap P$.

Exercice 3

On considère la sphère $S : x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - z = 0$

Soit S' la sphère de centre $\Omega(1; 1; 1)$ et de rayon $r' = 2$.

1. Déterminer le centre et le rayon de S .
2. Déterminer une équation cartésienne de S'
3. Déterminer $S \cap S'$.

Exercice 4

On considère les points $A(2; 1; 2)$ et $B(-2; 0; 2)$.

Le but de l'exercice est de déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[AB]$ par deux méthodes.

1^{ère} Méthode : Orthogonalité.

- a) Déterminer une équation l'ensemble S des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
- b) En déduire la nature de S .

2^e Méthode : Centre et Rayon

- a) Calculer la distance AB et les coordonnées du milieu I de $[AB]$
- b) Déterminer une équation cartésienne de S puis donner sa nature.

Exercice 5

On considère les points $A(1; 2; -1)$ et $B(2; 1; 0)$.

1. Déterminer une équation de l'ensemble S des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $2MA^2 - MB^2 = 8$.
2. En déduire la nature de S .

Exercice 6

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans $(P_m): 2x + 2y - z + m = 0$; où m est un paramètre réel et les points $A(3; -2; -1)$; $B(-1; 2; -1)$.

1. Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[AB]$ puis déterminer son rayon R et les coordonnées de son centre I .
2. Déterminer les réel m pour lesquels (P_m) est tangent à S .

ANGLES ORIENTES

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que :

$$\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$$

1. Faire une figure.
2. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}), \quad (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}), \quad (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$$

Exercice 2

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

1. Faire une figure.
2. En utilisant la relation de Chasles, prouver que :

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$$

3. En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

Exercice 3

On considère la ligne brisée A, B, C, D, E telle que :

$$AB = 4\text{cm}, BC = 5\text{cm} \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi], \quad CD = 3\text{cm} \text{ et}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi], \quad DE = 2\text{cm} \text{ et } (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

1. Construire avec soin cette ligne brisée.
2. Déterminer la mesure principale des angles $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DE})$

3. Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DE}) \equiv -\pi[2\pi]$.

4. Que peut-on dire des :

a) Vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$?

b) Droites (AB) et (DE) ?

Exercice 4

1. Soit $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{9}$ et $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale de :

$(-\vec{u}; \vec{w}); (-\vec{u}; \vec{v}); (-\vec{v}; -2\vec{w}); (-2\vec{u}; \vec{w})$

2. ABC est un triangle équilatéral direct, CBD ; ACE et AFB sont des triangles rectangles et isocèles respectivement en D, E et F.

a) Faire la figure.

b) Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}); (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BF}); (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{CA}); (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{CB})$.

Exercice 5

On considère un triangle ABC direct, isocèle et rectangle en A ; on construit les deux triangles équilatéraux indirects AIC et BJA.

1. Faire la figure.

2. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AI})$.

b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AI})$.

3. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{JB}); (\overrightarrow{JB}; \overrightarrow{BA}); (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$.

b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{BC})$

4. Déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{JI}; \vec{BC})$ puis conclure.

Exercice 6

Soit (C) et (C') deux cercles sécantes en A et B de centre respectifs O et O' tels que : $(\vec{AO'}; \vec{AO}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$. Soit M un point de (C) distinct de A et B tel que la droite (MA) recoupe (C') en C et (MB) recoupe (C') en D .

1. Que représente (AO') pour (C) ?
2. En déduire que $(\vec{MA}; \vec{MB}) = (\vec{AO'}; \vec{AB})[\pi]$.
3. Démontrer de même que : $(\vec{CA}; \vec{CB}) = (\vec{AO}; \vec{AB})[\pi]$
4. Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré, E et F les points tels que ABE et BCF soit équilatéraux. Le but de l'exercice est de montrer que les points D , E et F sont alignés.

1. a) Déterminer la nature du triangle DEA puis une mesure de l'angle $(\vec{DA}; \vec{DE})$.
b) En déduire une mesure de l'angle $(\vec{DE}; \vec{DC})$.
2. Déterminer la nature du triangle CDF puis une mesure de l'angle $(\vec{DF}; \vec{DC})$.
3. Montrer que $(\vec{DE}; \vec{DF}) = 0[\pi]$. Conclure.

Exercice 8

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Placer, sur le cercle trigonométrique d'origine I les points M , N et Q tels que :

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi; (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}) = \frac{38\pi}{3} + 2k\pi; (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OQ}) = x \text{ avec } 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2. Soit (C) un cercle de centre A et B un point de (C) .

a) Construire les points C , D , E et F du cercle (C) tels que :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}; (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}; (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6}; (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AF}) = \frac{3\pi}{4}$$

b) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}); (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}); (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AE})$$

Exercice 9

ACE est un triangle isocèle direct en A et tel que $AC = 5$ et

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

1. Tracer le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A .

2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{EC})$.

Exercice 10

Dans le plan orienté, on considère le cercle (C) de centre O et deux points A et B de (C) tels que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit M un point de (C) distinct de A et B .

1) a) Comparer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$ puis $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})$

b) Montrer que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$

c) En déduire que : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$

2) Soit C le point de $(\mathcal{C})$ tel que le triangle ABC soit isocèle en C et direct.

a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

b) Calculer alors $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC})$

3) Soit B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle $(\mathcal{C})$ et D le point de $(\mathcal{C})$ tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{12} [2\pi]$

a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires.

b) En déduire que les droites (AB') et (BD) sont parallèles et donner la nature du quadrilatère $ABDB'$.

Exercice 11 Cocyclicité

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupant en I . Soit P , Q , R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB) , (BC) , (CD) et (DA) .

1. Construire la configuration précédente.

2. Montrer que les points A , P , I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3. a) Montrer que : $(\overrightarrow{PS}; \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC})[\pi]$.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA})[\pi]$.

4. En déduire que : $(\overrightarrow{PS}; \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{RS}) = 2(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{CA})[\pi]$.

5. Montrer que les points P , Q , R et S sont cocycliques si et seulement si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires. Illustrer cette situation sur une figure.

Exercice 12 Triangle orthique

Soit ABC un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ et H son orthocentre. Les droites (AH) et (BC) se

coupent en Q , les droites (BH) et (AC) se coupent en R , les droites (CH) et (AB) se coupent en P .

1. a) Montrer que les points A, B, Q et R sont cocycliques. En déduire que $(\overline{BA}; \overline{BC}) \equiv (\overline{RA}; \overline{RQ})[\pi]$.

b) Soit T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle (C) . Montrer que $(\overline{RA}; \overline{RQ}) \equiv (\overline{CA}; \overline{CT})[\pi]$. En déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles.

c) Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires.

2. a) En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d'une part et Q, C, R et H d'autre part, montrer que : $(\overline{QP}; \overline{QA}) \equiv (\overline{QA}; \overline{QR})[\pi]$.

b) En déduire que (AH) est une bissectrice du triangle QRP . Dit Triangle Orthique.

Exercice 13

A et B sont deux points distincts du plan.

Représenter l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$; b) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; c) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$; e) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$; f) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$

i) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$; j) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$; k) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[2\pi]$

TRIGONOMETRIE

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. On donne le point E de coordonnées cartésiennes $(2; 0)$ et F de coordonnées polaires $\left[2; \frac{3\pi}{4}\right]$ et on désigne par I le milieu du segment $[EF]$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de E et I .

2. a) Déterminer la nature du triangle OEF .

b) En déduire la mesure principale de $(\vec{i}; \overrightarrow{OI})$

3. a) Déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{2 - \sqrt{2}}\cos x + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sin x = -1$

Exercice 2

Soit $(0; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct, le point A de coordonnées polaires $\left[2; -\frac{\pi}{3}\right]$.

1. Construire le point A puis déterminer ses coordonnées cartésiennes.

2. Soit le point B de coordonnées cartésiennes $(-\sqrt{3}; -1)$.

a) Déterminer les coordonnées polaires de B puis le construire.

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O .

3. Soit le point C de coordonnées polaires $\left[2; \frac{\pi}{3}\right]$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2cm. On considère les points M et N définis par les abscisses curvilignes $\alpha = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ et $\beta = (\vec{i}; \overrightarrow{ON})$ en radians avec $\alpha = \frac{13\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$.

1. Déterminer la mesure principale de $\frac{13\pi}{3}$
2. Placer les points M et N sur le cercle trigonométrique.
3. Démontrer qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})$ est $-\frac{\pi}{12}$.
4. Construire le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ dans le plan.
5. Préciser $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.
6. On admet que tout point P d'abscisse curviligne θ sur le cercle trigonométrique s'écrit : $\overrightarrow{OP} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$. En déduire les coordonnées cartésiennes des points M et N .

Exercice 4

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct plan et l'intervalle

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right].$$

1. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de coordonnées $x_M = 3\cos\theta$ et $y_M = 3\sin\theta$ lorsque θ décrit I .
 - a) Démontrer que les points M appartiennent à un cercle de centre O .
 - b) Donner une mesure de l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ en fonction de θ .
 - c) Construire l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. On considère le point $N(3\cos\theta + 1; 3\sin\theta - 2)$ où $\theta \in I$.
 - a) Montrer que N est l'image de M par une transformation que l'on précisera.

- b) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points N lorsque θ décrit I et construire cet ensemble.

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. On veut construire l'ensemble E des points $M_\alpha(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ lorsque α décrit l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Vérifier que E est contenu dans un cercle de centre O ; préciser son rayon.

b) Construire l'ensemble E .

2. On considère le point $N_\alpha(2\cos\alpha - 3; 2\sin\alpha + 1)$ où α est un élément de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Vérifier que N_α est l'image de M_α par une translation; préciser son vecteur.

b) Construire l'ensemble F des points N_α lorsque α décrit l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6

Soit x un réel. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sin(4x) - \sin(2x) - 2\cos(3x)$$

1. a) Montrer que pour tout x ; $f(x) = 2\cos(3x)(\sin(x) - 1)$

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$

2. On pose $g(x) = \frac{2\cos^2(2x) - 2\sin^2(x)}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de g .

b) Montrer que pour tout x on a : $\cos(3x) = \cos x(2\cos(2x) - 1)$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$; on a : $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$

3. Résoudre dans $\mathcal{D}$ l'équation : $g(x) = 1$.

Exercice 7

Soit $f(x) = 1 - \sin(2x) + \cos(2x)$.

1. Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2. a) Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ puis l'équation

$$f(x) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Soit $g(x) = \frac{2\cos 2x}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble D_g de définition de g .

b) Montrer que $f(x) = 2\cos x(\cos x - \sin x)$

c) Montrer que $\forall x \in D_g; g(x) = 1 + \tan x$.

d) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 8

Soit $x \in [0; \pi]$ et soit la fonction $f(x) = -2\cos^2 x - 3\sin x + 3$

1) Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

3) a) Montrer que $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$

b) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$

4) On pose $g(x) = -2\sin^2 x + 3\sin(\pi - x)$.

Montrer que $f(x) - g(x)$ est une constante dont on déterminera sa valeur.

Exercice 9

On considère les expressions :

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } P = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1) Montrer que : $P = \frac{1}{4}$

2)a) Montrer que pour tout réel x , $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) En déduire que : $S = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3)a) Vérifier que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont les solutions de l'équation

$$(E) : x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

b) Résoudre (E) puis déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4)a) Vérifier que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

b) Transformer en $r \cos(x - \varphi)$ l'expression $A = \cos x + (2 - \sqrt{3}) \sin x$.

Exercice 10

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sqrt{3} \sin 4x - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

1) Montrer que $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \cos 4x = 8 \sin^2 x \cos^2 x$

3) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

5) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation $f(x) \leq 0$

Exercice 11

Soient a et b deux mesures données d'angle orienté du plan P

1. Complète, après avoir recopié, les formules trigonométriques suivantes :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

2. a) Démontrer que, pour tout réel x tel que $\sin 3x \neq 0$, on a :

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

b) En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{3\pi}{4}$.

3. Soit l'équation trigonométrique (E) : $\cos(2x) - \sin(2x) = -1$

a) Montrer que $\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résoudre dans $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ l'équation (E).

c) Représenter sur un cercle trigonométrique les images des solutions de (E) sur I .

Exercice 12

Soit x un nombre réel.

1. Factoriser $d(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $d(x) = 0$.

3. Soit $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$.

Montrer que $f(x) = 1, \forall x \in I; I$ est un ensemble que l'on précisera.

4. On pose : $A = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et

$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

b) En déduire la valeur exacte de A et B

5. Soient a et b deux mesures d'angle telles que $\cos(a + b) \neq 0$.

Démontrer la formule trigonométrique : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$.

Exercice 13

1) Soit l'équation (E) : $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = -\sqrt{2}$

a. Montrer que $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E)

2) On donne $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$

a. Montrer que $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

b. En déduire que $f(x) = \cos 4x$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{\sin 4x}{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)} = 1$

3) On donne $\theta = \frac{11\pi}{12}$

a. Vérifier que $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

b. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exercice 14

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3}$

1. a) Calculer $f\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)$
 - b) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$
 - d) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 4\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
 - e) Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2. Soit x un réel tel que $f(x) \neq 0$ et $g(x) = \frac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1}{f(x)}$
 - a) Montrer que $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 4\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
 - b) En déduire que $g(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
 - c) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $g(x) = 1$

Exercice 15

Soit l'application $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -2\sin^2 x - (\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3} + 2$$

- 1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- 2) Soit θ un élément de $[0; \pi]$ tel que $\sin\theta = -\sqrt{2}$
Calculer $\cos\theta$; $\tan\theta$ puis $f(\theta)$
- 3) Montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$, $f(x) = 2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3}$
- 4) a) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$
 - b) Puis l'équation $2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)|\cos x| + \sqrt{3} = 0$
 - c) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$

5) Dans cette question x désigne un élément de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$

b) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x)$ à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$

c) Résoudre l'équation $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$

Exercice 16

1. On donne les expressions suivantes :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$

b) En déduire les valeurs exactes de A et B .

2. Démontrer que : $16 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = 1$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\cos x = 0$; b) $\sin x = 0$; c) $\tan x = 0$; d) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; g) $1 + \tan x = 0$; h) $1 - 2\cos x = 0$; i) $\cos 4x = \cos x$

j) $\sin x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; k) $\cos 2x + \cos x = 0$;

l) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; m) $\sin 2x = -\sin x$;

n) $-\sqrt{6}\cos x + 3\sqrt{2}\sin x = \sqrt{6}$; o) $-\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$;

p) $\sin 2x = \cos^2 x$; q) $\cos 2x + 2 \sin x \cos x = 0$; r) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 5x$

s) $\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 2$; t) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

1) $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \geq 0$; 2) $\cos x < -1$; 3) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\tan 2x < 0$; 6) $\cos x > -\frac{1}{2}$; 7) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $1 + \tan x < 0$

9) $\sqrt{3} \tan x + 1 < 0$; 10) $1 - 2 \cos x > 0$; 11) $\sin 2x < 0$;

12) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0$; 13) $\sin x \leq \cos x$.

Exercice 18

Résoudre dans l'intervalle I donnée :

a) $2 \sin 2x + 3 = 0, I = \mathbb{R}$; b) $\cos^2 2x + 4 \cos 2x + 3 = 0, I =]-\pi; \pi]$

c) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, I = [0; 2\pi[$; d) $\sin x = \sin 2x, I = \mathbb{R}$

e) $\cos x = \sin 2x, I = \mathbb{R}$; f) $(\sin x)^2 = \frac{3}{4}, I = \mathbb{R}$

g) $\cos 3x = \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right), I =]-\pi; \pi]$;

h) $-\sqrt{3} \cos \left(\frac{x}{2}\right) - 3 \sin \left(\frac{x}{2}\right) \leq \sqrt{6}, I =]-2\pi; 2\pi]$

i) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0, I = [0; 2\pi[$

k) $\frac{1 - 2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \geq 0, I =]-\pi; \pi]$

TRANSFORMATIONS PLANES

Exercice 1

Soit f et g deux applications définies par :

$$f: \begin{cases} x' = x + y + 4 \\ y' = -2x + 3y + 7 \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 \\ y' = 2x - y + 5 \end{cases}$$

1. Montrer que f et g sont des transformations planes.
2. a) Déterminer les coordonnées du point B , image du point $A(2; 3)$
Par f .
b) Soit $D(6; 8)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que
 $f(C) = D$.
3. Déterminer les ensembles des points invariants par f et g .
4. Déterminer l'expression analytique de la réciproque f^{-1}
5. Déterminer les expressions analytiques des applications : $g \circ f$;
 $f \circ g$; $g \circ f^{-1}$.
6. Soit (D) la droite d'équation $y = 3x - 1$.
Déterminer la droite (D') , image de (D) par f .

Exercice 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$, soit (D) une droite d'équation $4x + 3y - 2 = 0$; $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 8 \end{cases}$

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ de la translation $t_{\vec{v}}$.
b) Donner l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$
2. Déterminer les expressions analytiques des translations : $t_{-\vec{u}}$;

$$t_{-\vec{v}} ; t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{v}} ; t_{-\vec{u}} \circ t_{-\vec{v}}.$$

2. Déterminer une équation de $(\mathcal{D}')$ image de $(\mathcal{D})$ par la translation $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.

Exercice 3

La plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit les points $A(-1; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(1; 2)$, $D(3; 0)$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 2x$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

1. On pose $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$.

Déterminer les coordonnées de A' et B' .

2. Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par t .

Exprimer x' et y' en fonction de x et y puis x et y en fonction de x' et y' .

3. En déduire une équation de $(\mathcal{D}')$ image de la droite $(\mathcal{D})$ par t .

Exercice 4

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Soit ABCD un parallélogramme. E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ et F est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

1. Faire la figure puis placer les points E et F.

2. Déterminer l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

3. Déterminer l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

4. Déduire que : $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$.

Partie B

Soit ABC un triangle.

On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Construire les points E et F , images respectives des points A et B par $t_2 \circ t_1$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $AEFB$.

Partie C

$ABCD$ est un carré de centre O , de sens direct. On note I, J, K et L les milieux des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Soit $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ et $T' = t_{\overrightarrow{OA}}$.

1. Déterminer les images des points A, I, O, D, K et L par T .
2. Déterminer les images des points O, C, J et K par T' .

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de centre O . E est l'image de A par la symétrie de centre D , F est l'image de C par la symétrie de centre D . K est un point du plan tel que $DEKF$ soit un carré.

1. Faire la figure.
2. Déterminer les images des points A et B par la symétrie de centre O .
3. Le plan est muni d'un repère $(D; \overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF})$.
 - a) Déterminer les coordonnées des points D, A, B, C et O dans le repère $(D; \overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF})$.
 - b) Déterminer l'expression analytique de la symétrie centrale de centre O .
 - c) Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de centre O . I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[DC]$. D est milieu du segment $[CF]$, E est l'image de A par la symétrie d'axe (CF) . S, P et Q sont trois points du plan tels que $ADFS$, $DCPE$ et $DEQF$ soient des carrés.

1. Faire la figure.
2. Déterminer l'image de L par la symétrie d'axe (IK) puis celle de K par la symétrie d'axe (JL) .
3. On muni le plan d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$.
 - a) Déterminer les coordonnées des points C, F et Q dans le repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$.
 - b) Déterminer les coordonnées du point F' , image de F par la symétrie d'axe (AC) .
 - c) Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe (QC)
4. On désigne par $S_{(AF)}$ la symétrie d'axe (AF) . Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par $S_{(AF)}$
 - a) Déterminer l'équation de la droite (AF) .
 - b) Justifier que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
 - c) En déduire les coordonnées du point Q' , image de Q par $S_{(AF)}$
5. Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe $y = x_Q$
6. Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe $x = y_F$
7. Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe (CQ) et de direction $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Exercice 6

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sens direct de côté a , de centres respectifs O et O' . On désigne par I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les images par r des points A , D et E .
2. Prouver l'existence de la rotation r' qui transforme C en F et D en G .
3. Donner les éléments caractéristiques de r' puis préciser sa nature exacte.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Déterminer les expressions analytiques des rotations suivantes :

- a) $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$
- b) $r(A, \pi)$
- c) $r\left(F, \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 7

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'application f_θ définie analytiquement par :

$$f_\theta : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x\sin\theta - \frac{4}{3}y\cos2\theta \\ y' = -\frac{2}{3}x\cos2\theta - \frac{1}{3}y\sin\theta \end{cases}$$

1. Montre que $f_{\frac{\pi}{2}}$ est une transformation plane.
2. a) Déterminer les coordonnées du point A' , image de $A(3; 3)$ par $f_{\frac{\pi}{2}}$.
b) Déterminer les coordonnées du point B tel que $f_{\frac{\pi}{2}}(B) = O$
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f_{\frac{\pi}{2}}$
4. a) Déterminer l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{2}}^{-1}$.

b) Calculer $f_{\frac{\pi}{2}} \circ f_{\frac{\pi}{2}}$.

5. Dédurre des questions précédentes que $f_{\frac{\pi}{2}}$ est une involution.

6. Soit (D) la droite d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta = 0$. Pour quelle valeur de θ la droite (D') d'équation $\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)y = 0$ est l'image de (D) par la transformation $f_{\frac{\pi}{2}}$?

ISOMETRIES DU PLAN

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de sens direct tel que les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires et $AC = 2BD$

1. *Faire la figure*

2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :*

a) $f = S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$

b) $g = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$

c) $g \circ f$

Exercice 2

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1. *Démontrer qu'il existe un point A et un seul invariant par f*

2. *Pour tout point M distinct de A et d'image $M' = f(M)$, calculer AM'^2 et AM^2*

3. *En déduire la relation qui lie AM'^2 et AM^2*

4. *f est-elle une isométrie ?*

Exercice 3

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. I ; J et K les milieux respectifs des segments [BC]; [AC] et [AB]

1. *Déterminer et construire les droites (d), (D) et (Δ) telles que :*

- a) $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right) = S_{(d)} \circ S_{(AB)}$
- b) $r\left(O; \frac{2\pi}{3}\right) = S_{(D)} \circ S_{(AO)}$
- c) $t_{\overrightarrow{BJ}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(IK)}$

2. On pose $g = S_{(AO)} \circ R\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$ avec $S_{(AO)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA) et $R\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$ la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$

- a) La transformation g est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Justifier la réponse.
- b) Calculer $g(B)$ et $g(O)$
- c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB rectangle isocèle en O . Avec $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie centrale de centre O .

On place un point C non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés $BEDC$ et $ACFG$ directs tels que $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1. Faire la figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. a) Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée de deux réflexions d'axe (AB) et (OA) .
b) En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$
3. a) Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$
b) En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$

c) On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$. Etudier l'image de C par la transformation

$$R_F \circ S_O \circ R_D.$$

d) Déterminer la nature de la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$

e) Placer H le symétrique de D par rapport à O .

f) Démontrer que $R_F(H) = D$

g) Montrer que le triangle FOD est rectangle isocèle en O .

HOMOTHETIE

Exercice 1

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C , de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$

- 1. Démontrer que $h' \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.*
- 2. Construire l'image de A par $h' \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.*

Exercice 2

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C ; de rapports respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

- 1. Démontrer que $h' \circ h$ est une translation.*
- 2. Construire l'image de A par $h' \circ h$.*
- 3. En déduire une détermination du vecteur de cette translation puis l'exprimer en fonction de $\overrightarrow{BC}$.*

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soit $H = h\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et $T = t_{\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}$

- 1. Justifier que $T \circ H$ est une homothétie et préciser son rapport.*
- 2. Construire l'image de A par $T \circ H$*

3. En déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Soit h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont respectivement :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

1. Déterminer les rapports k et k' , les centres O et Ω des homothéties h et h' .
2. Démontrer que les transformations $h' \circ h$ et $h \circ h'$ sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques.
3. Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties.

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2; 1)$ et de rapport -3 , t est la translation de vecteur $\vec{u}(1; 3)$ et f l'isométrie définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les expressions analytiques des homothéties $t \circ h$ et $h \circ t$.
2. h' est une homothétie de centre $A(1; 1)$ et de rapport $\lambda = \sqrt{2}$ et on note $(h')^{-1}$ sa réciproque.
 - a) Déterminer analytiquement $(h')^{-1}$ et $f \circ (h')^{-1}$
 - b) Montrer que $f \circ (h')^{-1}$ est une isométrie.

NOS CENTRES D'ENCADREMENT

Site 1 : Quartier **Vindoulou**, arrêt église catholique en allant vers le secteur Douanier.

Site 2 : Quartier **Makayabou 418**, vers le terminus

Suivez nous sur :

Facebook : Bureau du Centre Académique –BCA

Whatsapp : +242 06 810 90 90 / +242 06 71332 41

Contactez-nous aux numéros indiqués à l'entête de chaque page pour plus d'informations.