BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE

Fascicule de Mathématiques

Première D

NKODIA-LOEMBA

Edition 2023-2024

Avant-propos

Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classe de Première D.

Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de cette classe.

L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue des évaluations. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez quelques exercices stimulants issus des sujets proposés par les inspections des lycées zones I et IV du Congo-Brazzaville qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux évaluations. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.

L'auteur

PARTIE A

Algèbre

CALCULS SUR LES POLYNOMES

Exercice 1

On donne les polynômes suivants :

$f(x) = 2x - 1;\ g(x) = -x^2 + 2x - 1;\ h(x) = 3x^3 - 1$

On pose $P(x) = f(x).g(x)\ ; Q(x) = f(x) - h(x); R(x) = g(x).h(x) + f(x)$

1) Déterminer $d°P\ ;\ d°Q\ ;\ d°R$

2) Quels sont les coefficients dominants de P, Q et R ?

Exercice 2

1) On considère la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$

a et b étant des réels.

- *a) Déterminer a et b tels que f soit divisible par* $x + 1$ *et* $x + 2$
- *b) Factoriser* $f(x)$ *par la méthode d'Honer.*

2) Déterminer les nombres réels a et b de façon que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx$ *vérifie la relation la relation* $\forall\ x\ ; P(x+1) - P(x) = x$

Justifier que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = P(n+1) - P(1)$ *et en déduire que :*

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ \ \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}^*.$

Exercice 3

Soient a et b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P par : $P(x) = a^2(b - x) + b^2(x - a) + x^2(a - b)$.

1) Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 *tel que, pour tout nombre réel* x : $P(x) = (x - a)(x - b)P_1(x)$

2) Quel est le degré de $P_1(x)$ *?*

3) Factoriser $P(x)$.

Exercice 4

Soit le polynôme : $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

On suppose que le polynôme P admet trois racines distinctes x_1 , x_2 et x_3.

1. Montrer qu'il est possible de calculer :

$x_1 + x_2 + x_3$; $x_1 . x_2 . x_3$; $x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_1 . x_3$.

2. En déduire la valeur de : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Exercice 5

1) Soit le polynôme : $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$

a) Trouver le polynôme Q tel que $P(x) = [Q(x)]^2$
b) Résoudre $P(x) = 0$

2) Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ soit divisible par $x^2 + x + 1$.

3) Soit $f(x)$ le polynôme de troisième degré tel que : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 9 \\ f(4) = 22 \end{cases}$

a) On pose $g(x) = f(x) - x^2$. Démontrer que : $g(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)$, k étant une constante.
b) Calculer $g(4)$ et en déduire la valeur de k.
c) Déterminer $f(x)$.

Exercice 6

1) Déterminer suivant les valeurs du paramètre m, le degré de la fonction f définie par :

$f(x) = (m^2 - m)x^4 + (2m - 2)x^3 + mx^2 + (m - 3)x + 5$

2) Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que :

$f(x) - f(x - 1) = x^2$.

(On peut poser $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*).*

En déduire une expression de $1 + 4 + \cdots + n^2$.

Exercice 7

Soit P et Q deux polynômes définis par $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 10$ *et* $Q(x) = 3x^3 - 5x + 2$

1. Montrer que $Q(x)$ *est factorisable par* $(x - 1)$

2. En déduire la factorisation du polynôme $Q(x)$.

3. Montrer qu'il existe un polynôme T tel que $P(x) = (x - 1)T(x)$

4. On pose $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Donner l'ensemble de définition de F
b) Simplifier l'expression de F.

Exercice 8

Soit f *la fonction rationnelle suivante :* $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 10}{x - 4}$

1. Déterminer la condition d'existence de f

2. Déterminer les réels a, b, c *et* d *tel que pour tout* $x \neq 4$ *;*

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 4}$

3. En déduire la partie entière de f notée h.

Exercice 9

1. a) Déterminer le polynôme f de degré 3 admettant -2 pour racine et tels que : $f(-3) = -8$; $f(2) = 12$ et $f(0) = -2$.

b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = (\alpha x^2 - \beta)(x + 2)$ où α et β sont des réels à déterminer.

2. On considère le polynôme P défini par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

a) Montrer que -1 est une racine de P.

b) Montrer que pour tout $x \neq 0$; $P(x) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right)$

c) Calculer $P(2)$

d) En déduire que $\frac{1}{2}$ est aussi racine de P.

Exercice 10

Calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$

1) Déterminer tous les polynômes $P(x)$ de degré 3 vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$P(x+1) - P(x) = (2x+1)^2$$

2) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

3) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie pour tout nombre réel x :

$$P(x+1) - P(x) = x^2$$

4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

En déduire que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

LE SECOND DEGRE

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

$ax^2 - (2 + a)x + 2a = 0 \; (a \in \mathbb{R})$

$3x^2 + 6x - 9 \leq 0$

2) Trouver deux nombres réel α et β tels que $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha\beta = -35$ avec $\alpha < \beta$.

3) Comparer le réel -3 aux racines du trinôme $T(x) = 5x^2 + 3x - 2$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (E_1) : $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$ et

(E_2) : $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$.

2. Soit p un polynôme défini par : $p(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

   a) Montrer que 0 n'est pas racine du polynôme $p(x)$.
   b) Exprimer $\frac{p(x)}{x^2}$ en fonction de t, avec $t = x + \frac{1}{x}$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6t^2 + 35t + 50 = 0$.
   d) En déduire les solutions de l'équation $p(x) = 0$.

Exercice 3

On considère l'équation (E): $3x^4 + x^3 - 10x^2 - x + 3 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. En mettant x^2 en facteur, montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E'): $3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$.

3. Par changement de variable, résoudre l'équation (E').

4. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 4

1. Représenter graphiquement dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la fonction : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

2. Soit m un réel. Discuter graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation : $-x^2 + 2x + 3 = m$

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Construire la courbe (C) de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2$.

2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

On désigne par (C') sa courbe représentative dans le plan.

- *a) Utiliser la forme canonique du trinôme du second degré pour déterminer les réels a, b et c tels que : $g(x) = a(x-b)^2 + c$.*
- *b) En posant $y = g(x)$, montrer que le changement de variables $X = x - b,\ Y = y - c$, entraine $Y = aX^2$.*
- *c) Par quelle transformation simple la courbe (C') se déduit-elle de (C) ?*
- *d) Construire la courbe (C') sur la même figure que (C).*

Exercice 6

1) Etudier suivant les valeurs du paramètre m l'existence et le signe des racines de l'équation :

$(E_m) :\ (m-5)x^2 - 2(m-1)x + m + 2$.

2) On considère l'équation d'inconnue x :

$(m-2)x^2+2(m-4)x+(m-4)(m+2)=0$

1) Etudier l'existence et le signe des racines de cette équation.

2) a) Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x' et x'' de cette équation.

b) En déduire les valeurs des racines doubles

3) Calculer en fonction de m l'expression : $y=\frac{1}{1+x'}+\frac{x}{1+x''}$

Exercice 7

Une équation du second degré a ses racines x' et x'' telles que :

$$\begin{cases} mx'+mx''-m=4-2x'-2x'' \\ mx'x''+m=2-2x'x'' \end{cases}$$

1. Former cette équation dont les coefficients dépendent du paramètre m.

2. Montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de m.

3. Utiliser cette relation pour déterminer les racines doubles de l'équation obtenue.

4. Comment faut-il choisir m pour que les deux racines soient positives ?

Exercice 8

Soit (E_m) *l'équation* $(m+3)x^2+2mx+m-5=0$

1. Déterminer m pour que (E_m) *admette deux solutions distinctes x' et x''.*

2. Dans le cas où (E_m) *admet deux solutions x' et x'' , déterminer m tel que :*

a) $(2x'-1)(2x''-1)=6$

b) $x'^2 + x''^2 = 2$

Trouver une relation indépendante de m entre x' et x''.

3. Former une équation paramétrique du second degré ayant pour solutions : $(3x' - 2)$ *et* $(3x'' - 2)$.

4. Déterminer m pour que l'équation (E_m) *admette :*

a) Deux solutions de signes contraires.
b) Deux solutions positives
c) Deux solutions négatives

Exercice 9

1) Soit l'équation $(E): (m+1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 = 0 \ \ (m \neq -1)$

a) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E).
b) Dans le cas où (E) *admet deux solutions distinctes, déterminer leurs signes selon les valeurs de m.*
c) Dans les cas où les racines distinctes existent et sont notées x_1 *et* x_2*, trouver une relation indépendante de m qui les lie. Déduire de cette relation les solutions* x_1 *et* x_2 *telles que* $x_1 = 2x_2$.
d) Déterminer m pour que si on suppose $x_1 < x_2$*, on ait* $x_1 < 1 < x_2$

2) Résoudre suivant les valeurs de m $(m \neq -1)$

$$(E): (m+1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 > 0$$

3) Former l'équation du second degré dont les solutions sont

$X = 2x_1 - 1$ *et* $Y = 2x_2 - 1$.

Exercice 10

A) Les racines x_1 *et* x_2 *d'une équation du second degré vérifiant les relations suivantes*

- $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0$
- $mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1$ *où m est un paramètre réel.*

1) Former cette équation.

2) Déterminer m pour que l'équation admet deux racines positives.

3) On considère un triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives x_1 et x_2.

Déterminer m pour que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

B) Soit l'équation (E): $x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 = 0$

1) Etudier l'existence et le signe des solutions de l'équation (E).

2) a) Former une équation du second degré d'inconnue étant les solutions $X_1 = 4x_1 - 3m$ et $X_2 = 4x_2 - 3m$.

b) Déterminer m pour que x_1 et x_2 étant les solutions des racines qui vérifient $4X - 3 > 0$.

Exercice 11

Soi (E_m): $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ une équation paramétrique du second ordre de paramètre réel m.

1. Déterminer la valeur du paramètre m pour que cette équation soit du premier degré.

2. On suppose que $m \neq 1$ et on pose :

$$T_m(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3$$

a) Calculer le discriminant Δ_m puis étudier son signe.
b) Déterminer en fonction de m la somme S et le produit P des racines x_1 et x_2 de T_m puis étudier leurs signes.
c) Déterminer une relation indépendante du paramètre réel m entre les solutions x_1 et x_2 de (E_m). En déduire les racines doubles de cette relation.

d) Donner le nombre de solutions et leurs signes suivant les valeurs de m.

3. Montrer que toutes les paraboles (P_m) passent par un point fixe I dont on donnera les coordonnées.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ 4+\sqrt{x^2+4}=x$; $b)\ \sqrt{x}-\sqrt{x+3}=3$; $c)\ \sqrt{x^2+1}+1=0$;

$d)\ \sqrt{(x+1)(3-x)}=3x-1$; $e)\ \sqrt{x+2}=3x-4$; $f)\ \sqrt{x+5}=\sqrt{1-x}$;

$g)\ \sqrt{x-3}=2$; $h)\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x-1}$; $i)\ \sqrt{|1-x^2|}=\frac{1}{2}x^2+1$.

$j)\ \sqrt{x^2+x}=2x-1$; $k)\ \sqrt{3x^2-11x+21}=2x-3$

$l)\ 2x+1+\sqrt{-7x-5}=0$; $m)\ \sqrt{6x+2}-\sqrt{3x}=\sqrt{9x-2}$

$n)\ \sqrt{x^2-x-2}=|3x-4|$; $o)\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1$

$p)\ x+\sqrt{-x+3}-2=0$; $q)\ 1+\sqrt{3x^2-2x-1}=x$

$r)\ \sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{-x^2-3x+4}$; $s)\ \sqrt{1-2x^2}=\sqrt{x-4}$

$t)\ \sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$; $u)\ \sqrt{5x+9}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1}$; $v)\ x+a^3=\sqrt[3]{a-x}$

$w)\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=4$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)\ \sqrt{3-x}\geq x-1$; $b)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\geq 3$; $c)\ \sqrt{2x^2+2}\leq 3-x$

$d)\ 2x+1-\sqrt{7-6x}>0$; $e)\sqrt{2x+3}<3$; $f)\ \sqrt{4x+1}<2x+1$

$g)\ \sqrt{5x^2+19x-4} > \sqrt{x(x+1)};\ h)\ \sqrt{x^2-x-1} < x+5$

$i)\ \sqrt{2x^2-x} < 2x-3\ ;\ j)\ \sqrt{3(x^2-1)} > 2x-1$

$k)\sqrt{x^2+5} \geq \sqrt{-2x+1};\ l)\sqrt{x^2+5x+4} < \sqrt{2x+9}$

$m)\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{5+x} < \sqrt{x-1}\ ;n)\ \sqrt{x+4}+\sqrt{x-1} > \sqrt{5+4x}$

$o)\ \sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1|\ ;\ p)\ \sqrt{-5x^2+x+6} \geq m$

$r)\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1} < \sqrt{6x+7}\ ;s)\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1} < \sqrt{6x-1}$

$u)\ \sqrt{2x-3} \leq \sqrt{|x|-|2x-1|}$

Exercice 14

1) Soit l'équation $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x-9} = 18\ (1)$

a) Définir l'équation puis montrer qu'en posant $y = \sqrt{2x^2+3x-9}$ *l'équation* (1) *devient* $y^2+y-12 = 0\ (2)$

b) Résoudre alors l'équation (2) *puis déduire les solutions de l'équation* (1).

2) Résoudre de même les équations suivantes :

a) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+3} = 9$

b) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+11} = 1$

SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *et discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, chacun des systèmes suivants :*

$$a)\ \begin{cases}(\sqrt{2}-1)x - my = \sqrt{2}-1 \\ x - (\sqrt{2}+1)y = m\end{cases} ;\quad b)\begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer le nombre réel m pour que le système suivant ait un couple unique de solution :

$$\begin{cases}(m-1)x - 2y = m \\ 4x - (m+1)y = m+1\end{cases}$$

Résoudre alors ce système.

Exercice 3

Résoudre, en utilisant un changement d'inconnues, chacun des systèmes d'équations suivants :

$$a)\ \begin{cases}\dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = -3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1\end{cases} ;\quad b)\begin{cases}5(x+y) - 3(x-y) = 9\sqrt{2} \\ 3(x+y) + (x-y) = 4\sqrt{2}\end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases}2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = -1 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2\end{cases} ;\quad d)\begin{cases}4x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 3\end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre chacun des systèmes suivants :

$a)\ \begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$; $b)\begin{cases} x + y + 4xy = -1 \\ 3(x+y) - xy = 10 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$; $d)\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x^2 - 7y^2 = 12 \end{cases}$

Exercice 5

Le plan est muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminer une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points $A(1;0)$; $B(2;-5)$; $C(3;-12)$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ *les systèmes suivants :*

$1.\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$; $2.\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$; $3.\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases}$

$4.\ \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$; $5.\ \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$; $6.\begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

$7.\begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ z - 2x = \sqrt{2} \end{cases}$; $4.\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 1 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y-1} + \sqrt{z} = 0 \end{cases}$; $5.\begin{cases} -a^2 + 2\sqrt{b} + \frac{1}{c-1} = 1 \\ -2a^2 + 3\sqrt{b} + \frac{1}{c-1} = 1 \\ 4a^2 + \sqrt{b} + \frac{2}{c-1} = 8 \end{cases}$;

$$6.\begin{cases} 9x + my - z = 4 \\ 4mx - 2y + (m-1)z = m \\ 5x + (2m-1)y - 3z = 3(m+2) \end{cases}$$

$$7.\begin{cases} 2mx + (m+1)y + z = 2 \\ (m+2)x + (2m+1)y + mz = m+2 \\ 5x + (2m-1)y - 3z = 3(m+2) \end{cases}$$

Exercice 7

Un artisan fabrique des objets (A) *et des objets* (B). *La réalisation d'un objet* (A) *demande 30 F de matière première et 125 F de main d'œuvre. Celle d'un objet* (B) *demande 70 F de matière première et 75 F de main d'œuvre.*

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et de main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 F et 1250 F. Les profits réalisés sont 54 F par objet (A) *et 45 F par objet* (B). *On désigne par* x *le nombre d'objets* (A) *et* y *le nombre d'objet* (B) *fabriqué par jour.*

1. Calculer en fonction de x *et de* d_1 *la dépense journalière en matière première et* d_2 *la dépense journalière en main d'œuvre.*

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de points $M(x;y)$ *du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.*

3. Calculer en fonction de x *et* y *le profit journalier* P *réalisé.*

4. On donne $D_1 : 3x + 7y = 56$ *et* $D_2 : 5x + 3y = 50$

a) Montrer que D_1 *et* D_2 *passe par le point* $C(7;5)$

b) En déduire la valeur du profit lorsque l'entreprise fabrique 7 objets (A) *et 5 objets* (B).

PARTIE B
Analyse

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^4 + 2x + 6$; $g(x) = \sqrt{x+1}$; $h(x) = \sqrt{|x+2| - 2}$

$k(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-1)}$; $l(x) = x + 5 + \sqrt{2x+4}$; $m(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x(x+3)}$; $o(x) = \sqrt{|1+x^2|}$; $p(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}{|x| - 1}$

$q(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2} - x}$; $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x}, & si\ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} h(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x+3)} ,si\ x \leq 2 \\ h(x) = \sqrt{4-x}, \quad si\ x > 2 \end{cases}$; $u_m(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2mx + 1}$

$v(x) = \sqrt{\dfrac{3+x^2}{2-x^2}}$; $w(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$; $h(x) = \sqrt{|x^2 + 2x|}$;

$i(x) = cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $j(x) = sin(-2x - \pi)$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définies par :* $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ *et* $g(x) = \sqrt{x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g.

2. Montrer que g est la restriction de f à E_g*. Que peut-on dire de f ?*

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les images des nombres $-3; -2; 0; 2$ et 3 par f.

3. En déduire les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec les axes des coordonnées.

4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $I = [-3; 3]$

Exercice 4

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq 1$

3. Que peut-on déduire de f ?

Exercice 5

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Vérifier que : $2x = x^2 + 1 - (x-1)^2$, puis déduire que f est majorée.

3. Vérifier que : $2x = (x+1)^2 - (x^2+1)$, puis déduire que f est minorée.

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x(x-2)$ *et* $g(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g

2. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$. En déduire que f est minorée par 1

3. Calculer $g^2(x) - (2)^2$.

4. En posant $X = x^2$, démontre que $g^2(x) - (2)^2 = -(X-2)^2$.

5. En déduire que $-2 \leq g(x) \leq 2$. Que peut-on dire de g ?

Exercice 7

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+4x+3}{x^2+1}$

$g(x) = -2x^2 + 6x + 1$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f et $(\mathcal{C}')$ celle de g dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Déterminer trois réels α, β et γ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2+1}$$

3. Montrer que le point $B(0;3)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

5. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe $(\mathcal{C}')$ de g.

Exercice 8

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2 - 1$

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ est l'image de la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation

$y = x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera.

c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$

2. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies par :

$f_1(x) = f(-x)$; $f_2(x) = -f(-x)$; $f_3(x) = |f(x)|$; $f_4(x) = f(x+1) - 1$

et $f_5(x) = f(|x|)$.

Construire la courbe représentative de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.

Exercice 9

Soit f, g et h trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que les fonctions $(f+g)\circ h$ et $(f\circ h) + (g\circ h)$ sont égales.

2. On suppose que f, g et h sont définies par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$,
$g(x) = \frac{x-3}{x-1}$ et $h(x) = x^2$

a) Déterminer les fonctions $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f) + (h\circ g)$
b) Les fonctions $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f) + (h\circ g)$ sont-elles égales ?

Exercice 10

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f l'application de $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

1. a) Démonter que f est bijective.

b) Déterminer la bijection réciproque de f notée f^{-1}

2. a) Construire la courbe représentative de f^{-1}

b) En déduire la courbe représentative de f

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2x + 1$ et

$$\begin{cases} g(x) = -\frac{1}{2}x; si \quad \leq 0 \\ g(x) = -3x;\ si\ \ x > 0 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que les fonctions f et g sont bijectives de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Déterminer leurs bijections réciproques notées f^{-1} et g^{-1}

c) Tracer les courbes représentatives de f, g, f^{-1} et g^{-1}

2. a) Déterminer l'application $g \circ f$ et sa bijection réciproque notée $(g \circ f)^{-1}$

b) Tracer les courbes représentatives de $g \circ f$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

LIMITES ET ASYMPTOTES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$a) \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{-x^2+5x-4}$; $b) \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+1}{1-x}$; $c) \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; $d) \lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$

$e) \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $f) \lim\limits_{x \to 2} \frac{8-x^3}{x^2-4}$; $g) \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$

$h) \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+\sqrt{x^2+1})$; $i) \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-3x)$; $j) \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$

$k) \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$; $l) \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$; $m) \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $n) \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$o) \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2+x+5}-3x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1}+x)$

Exercice 2

1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 2sinx$

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. On considère la fonction g définie sur $[2;+\infty[$ telle que :

$$|g(x)-3| \leq \frac{4}{x-1}$$

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1}$.

b) En déduire la limite de g en $+\infty$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$; $d)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin \pi x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$

$f)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$; $g)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{12\sin x-6}{4x-\pi}$; $h)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}$; $i)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$

$j)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; $k)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; $l)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$; $m)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\tan^2 x}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. Etudier les branches infinies.

4. a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

b) Montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$

c) Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote oblique

5. Montrer que le point $I(-2;-1)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$ de f

Exercice 5

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^3+4x^2+5x+4}{x^2+1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ *la courbe de f dans le repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

3. Déterminer trois réels α, β et γ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2+1}$$

4. Montrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = 3x + 4$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f

5. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.

6. Montrer que le point $B(0; 4)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$. *On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f

3. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f

5. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.

6. Etudier les branches infinies.

Exercice 7

Soit f *la fonction définie par :* $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$. *On désigne par* $(\mathcal{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. *Préciser l'ensemble de définition de* f
2. *Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de* f
3. *Etudier les branches infinies de la courbe* $(\mathcal{C})$ *de* f.
4. *Soit* $(\mathcal{D})$ *la droite d'équation* $y = x - 1$.

   a) Etudier le signe de $f(x) - y$.
   b) En déduire la position de $(\mathcal{C})$ *par rapport à* $(\mathcal{D})$

CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Exercice 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2x - x^2; & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - x}{1 - x}; & si\ x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1} & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Etudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f

4. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

5. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2; & si\ x > 1 \\ f(x) = \frac{x+a}{x-2}\ ; & si\ x \leq 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1

2. a) Trouver le domaine de définition de la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x - 9}$$

b) Déterminer un prolongement par continuité en 3 de h.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+ax-2}{x+1};\ si\ x < 1 \\ f(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 - 1}; si\ x \geq 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$

3. Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 5

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

1. Justifier que f est bien continue sur $\mathbb{R}$

2. Calculer $f(2);\ f(3)$ et $f(2) \times f(3)$

3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins unique solution $\alpha \in [2; 3]$

4. Comment doit être la fonction f sur $[2; 3]$ pour que cette solution soit unique ?

5. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près, puis en déduire une valeur approchée de α.

DERIVATION

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1\,; si\ x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} \qquad ;\ si\ x < -1 \end{cases}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f

2. Etudier la continuité de f en $x_0 = -1$

3. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

Exercice 2

Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h

2. Démontrer qu'il est possible de prolonger h par continuité en $x = 0$

3. Soit g le prolongement par continuité de h en $x = 0$

a) Définir g.
b) Préciser le domaine de définition D_g de g.
c) Etudier la dérivabilité de g en $x = 0$.
d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1;\ \ si\ x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}; \quad si\ x \geq 1 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue en 1

2. Etudier la dérivabilité de f en 1.

3. Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 3 - 2x\,; & si\ x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x}\,; & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.

3. Déterminer une équation de chacune de ces demi-tangentes.

Exercice 5

1. Déterminer la dérivée de la fonction f :

$a)\ f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2\,;\ b)\ f(x) = (x^3 + 3x)(x^4 - 3)\,;$

$c)\ f(x) = (2x^2 + 3)^2\,;\ d)\ f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 1}\,; e)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 3}\,;$

$g)\ f(x) = (x^3 + 2)\sqrt{2 - x}\,;\ h)\ f(x) = cos^2x\,; i)\ f(x) = sin2x\,;$

$j)\ f(x) = x + sinx\,;\ k)\ f(x) = xcosx\ ;\ l)\ f(x) = \dfrac{1}{sinx}\,; m)\ f(x) = tan^2x;$

$o)\ f(x) = sin^2x + cos^2x\,;\ p)\ f(x) = tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$

2. Déterminer les fonctions dérivées de $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

$a)\ f(x) = 3x - 2\ et\ g(x) = 4x^2 + x + 1$

$b)\ f(x) = \sqrt{x}\ \ et\ g(x) = sin3x$

Exercice 6

1. *Déterminer la fonction polynôme du second degré* f *telle que :*

$f(0) = 4$; $f'(0) = 3$ *et* $f(1) = 3$.

2. *Soit* a *et* b *deux nombres réels. On considère la fonction* g *définie par :* $g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$

   a) *Calculer les valeurs de* a *et* b *sachant que :* $g(2) = 2$ *et* $g'(2) = 0$
   b) *Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse* 2 *de la courbe représentative de* g

3. *Soit* h *la fonction définie par* $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *et* $(\mathcal{C})$ *sa courbe représentative.*

   a) *Démontrer que* $(\mathcal{C})$ *est un demi-cercle de centre O, dont on déterminera le rayon. Tracer* $(\mathcal{C})$.
   b) *Préciser l'ensemble de dérivabilité de h, puis déterminer sa fonction dérivée.*

Exercice 7

1. *Soit* a *et* b *deux nombre réels. On considère la fonction* f *définie par :* $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

Déterminer a *et* b *pour que la représentation graphique de* f *:*

Passe par le point $A(0; 3)$

Admette en A une tangente d'équation $y = 4x + 3$

2. *Déterminer le réel* a *pour que la représentation graphique de la fonction* $g(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$ *admette au point d'abscisse* 1 *une tangente parallèle à l'axe des abscisses.*

3. *Soit* h *la fonction définie par :* $h(x) = x|x - 3|$

   a) *Etudier la continuité de* f *en 3*

b) Calculer le nombre dérivée de f à droite et à gauche en 3. f est-elle dérivable en 3 ?

Exercice 8

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f

3. Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f

4. Calculer la dérivée f' de la fonction f

5. Donner le sens de variations de la fonction f

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 9

Soit f_m une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2+mx+3}{x^2+1}$ avec m un réel. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Préciser la branche infinie à la courbe $(\mathcal{C}_m)$ de f_m

3. Calculer la dérivée f'_m de la fonction f_m

4. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 10

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x\sqrt{1-x} \ ; \ si\ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{4x+4}{x^2-6x+9} \ ; si\ x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction f est définie et continues sur $\mathbb{R} - \{3\}$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

2. Déterminer, suivant les valeurs de x, la dérivée f' de f

3. Dresser le tableau de signe de f'

4. Dresser le tableau de variation de f.

On donne $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 1 \ ; & si\ x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \ ; & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

b) En déduire l'ensemble de dérivabilité E_D de f

2. a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \ ; & si\ x < 0 \\ f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \ ; & si\ x > 0 \end{cases}$$

b) Déterminer le signe de $f'(x)$

3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Dresser le tableau des variations de f

4. Calculer $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1

On considère la fonction f *définie par :* $f(x) = \frac{1-4x^2}{2-x}$ *et on désigne par* $(\mathcal{C})$ *la courbe représentative de* f *dans un plan muni d'un repère orthonormé* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$*. Unité graphique : 2 cm.*

1. Préciser l'ensemble de définition E_f *de* f

2. Déterminer les réels a, b *et* c *tels que* $\forall\ x\ \in E_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$

3. Etudier les variations de f *puis dresser son tableau de variation*

4. Montrer que la droite (Δ) *d'équation* $y = 4x + 8$ *est asymptote à la courbe* $(\mathcal{C})$ *puis étudier la position de la courbe* $(\mathcal{C})$ *par rapport à la droite* (Δ)*. En déduire l'autre asymptote.*

5. Tracer $(\mathcal{C})$ *et les deux asymptotes.*

Exercice 2

On considère la fonction numérique f *définie par :* $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ *et on désigne par* $(\mathcal{C})$ *la courbe représentative de* f *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. Préciser l'ensemble de définition de f

2. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition

3. Etudier les variations de f *puis dresser son tableau de variation*

4. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$

5. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ *d'équation* $y = 1$ *est asymptote à* $(\mathcal{C})$ *puis étudier la position de* $(\mathcal{C})$ *par rapport à la droite* $(\mathcal{D})$

6. Construire $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{D})$

Exercice 3

Soit f *une fonction définie par :* $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+3}$ *et* $(\mathcal{C})$ *la courbe de* f *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer les limites de f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.

3. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ *d'équation* $y = 1$ *est une asymptote horizontale à la courbe* $(\mathcal{C})$.

4. Etudier la position de $(\mathcal{C})$ *par rapport à* $(\mathcal{D})$.

5. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$

6. Etudier le signe de $f'(x)$ *puis dresser le tableau de variation.*

7. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ *et la courbe* $(\mathcal{C})$ *de* f.

Exercice 4

Soit g *une fonction définie par :* $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{x+1}; & si\ x \leq 0 \\ g(x) = x^3 + 3x; & si\ x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g

2. Calculer les limites aux bornes de E_g.

3. Etudier la continuité de g *en* $x_0 = 0$

4. Etudier la dérivabilité de g *en* $x_0 = 0$

5. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

6. a) Déterminer les équations des demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ *de* g *en* $x_0 = 0$

b) Donner la nature du point $O(0; 0)$

7. Etudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$

8. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ *de* g.

Exercice 5

Soit a *et* b *deux réels. On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer a *et* b, *pour que la courbe* $(\mathcal{C})$ *de* f *soit tangente au point d'abscisse* 0 *à la droite d'équation* $y = 4x + 3$

2. Pour les valeurs de a *et* b *trouvées à la 1ère question, démontrer que pour tout réel* $x, f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$.

3. Etudier les variations de f

4. Démontrer que le point $I(0; 3)$ *est un centre de symétrie de* $(\mathcal{C})$.

5. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ *de* f.

6. a) Tracer $(\mathcal{C})$ *et sa tangente au point I.*

b) En déduire la courbe $(\mathcal{C}')$ *de la fonction* g *définie par*

$g(x) = -f(x)$

Exercice 6

On considère la fonction numérique f *définie par :* $f(x) = \frac{2x^2+3x-6}{x+2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Etudier les limites de f *aux bornes de son ensemble de définition*

3. Calculer le réel a *tel que :* $f(x) = 2x + a - \frac{4}{x+2}$

4. Démontrer que la droite d'équation $y = 2x - 1$ *est une asymptote à la courbe de* f

5. Donner la nature et l'équation de l'autre asymptote de la courbe de f

6. Calculer la dérivée de f puis donner son signe sur D_f

7. Dresser le tableau de variations de f sur D_f

8. Tracer la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

9. Montrer que $I(-2;-5)$ est centre de symétrie à la courbe de f.

Exercice 7

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x-3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3. Calculer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

4. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

5. Etudier la position de la courbe par rapport à la droite $(\mathcal{D})$

6. Donner la nature et l'équation de l'autre asymptote à f

7. Calculer la dérivée de f puis donner son signe sur D_f

8. Dresser le tableau de variations de f sur D_f

9. Tracer la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

10. Démontrer que la courbe de f admet un centre de symétrie $I(a;b)$ que l'on précisera.

Exercice 8

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1. Etudier les variations de g *sur* $\mathbb{R}$

2. Dresser le tableau de variation de g

3. Monter que l'équation $g(x) = 0$ *admet une solution unique* α. *Justifier que* $\alpha \in]-1,6; -1,5[$ *puis déduire le signe de* $g(x)$.

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \frac{x^3-4}{1+x^2}$

Soit $(\mathcal{C})$ *sa courbe représentative dans un repère.*

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ *de* $f(x)$. *Montrer que* $f'(x) = \frac{xg(x)}{(1+x^2)^2}$

2. En déduire le sens de variation de f *et dresser le tableau de variations.*

a) *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que : pour tout réel* x,
$$f(x) = x + \frac{ax+b}{1+x^2}$$
b) *Etudier la position relative de* $(\mathcal{C})$ *et de la droite* $(\mathcal{D})$ *d'équation* $y = x$
c) *Démontrer que la droite* $(\mathcal{D})$ *d'équation* $y = x$ *est une asymptote à* $(\mathcal{C})$
d) *Déterminer les abscisses des points de* $(\mathcal{C})$ *en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation* $y = x$

3. Tracer $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ *et les tangentes obtenues à la question précédente. On prendra* $f(\alpha) \approx -2,2692$.

Exercice 9

Soit la fonction numérique h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 3}{2x + 2} & ; x \leq 1 \\ h(x) = -x - 9 + 6\sqrt{x+3} & ; x > 1 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_h)$ *désigne sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. *Unité graphique : 1 cm.*

1. Déterminer le domaine de définition D_h *de h.*

2. Calculer les limites de h aux bornes du domaine de définition D_h *de h.*

3. a) On admet que h est continue au point $x = 1$, *étudier la Dérivabilité de h en* $x = 1$.

b) En déduire les équations cartésienne des demi-tangentes à la courbe de h en $x = 1$.

4. Suivant les intervalles de x, *calculer la dérivée* h' *de h*

5. Dresser le tableau des variations de h.

6. Etudier les branches infinies à la courbe de h

7. Construire la courbe de h dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

FONCTIONS CIRCULAIRES

Exercice 1

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est orthonormé.*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4sin^2x.cos2x$.

On désigne par (C) *la courbe représentative de f.*

1a) Démontrer que f est périodique, de période π.

b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ *est un axe de symétrie de* (C).

2a) Démontrer que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4sin2x(1 - 4sin^2x)$.

b) Dresser le table de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Tracer (C) *sur* $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est orthonormé.*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2sinx + sin2x$.

On désigne par (C) *la courbe représentative de f.*

1) Démontrer que f est impaire et périodique, de période 2π.

2) Démontrer que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2cosx - 1)(cosx + 1)$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4) Tracer (C) *sur* $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 3

Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *est orthonormé.*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2cosx - \frac{1}{2}cos2x$.

On désigne par (C) *la courbe représentative de f.*

1) Démontrer que f est paire et périodique, de période 2π.

2) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2sinx(1 + cosx)$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4) Tracer (C) *sur* $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 2sin^3x - 3sinx$.

On désigne par (C) *sa courbe présentative dans un repère orthonormée* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Etudier la parité de f.

b) Montrer que f est périodique de période 2π.

2) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ *est axe de symétrique de la courbe* (C).

3) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *et expliquer comment l'on obtient alors la courbe* (C) *complète.*

4)a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -3cosxcos2x$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ *et dresser son tableau de variation sur l'intervalle I.*

5) Tracer la courbe (C) *sur* $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = cos4x + 2sin2x$.

On note (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormée* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Démontrer que f est périodique de période π.

2) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ *est un axe de symétrie de* (C).

3) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ *et expliquer comment l'on obtient alors la courbe* (C) *complète.*

4)a) Vérifier que $f'(x) = -4cos2x(2sin2x - 1)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ *et dresser son tableau de variation sur I.*

5) Tracer la courbe (C) *sur l'intervalle* $[-\pi; \pi]$.

6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ *dans* $[-\pi; \pi]$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = (cos2x + 2)sinx$.

On note (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1)a) Etudier la parité de f.

b) Démontrer que f est périodique de période 2π.

2) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ *est un axe de symétrie de* (C).

3) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *et expliquer comment l'on obtient alors la courbe* (C)*complète.*

4)a) Démontrer que $f'(x) = (3 - 6sin^2x)cosx$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ dresser son tableau de variation sur I.

5) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + cosx)sinx$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Etudier la parité de f.

b) Démontrer que f est périodique de période 2π.

2) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = [0; \pi]$ et expliquer comment l'on obtient alors la courbe (C) complète.

3)a) Vérifier que $f'(x) = cos2x + cosx$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle I.

4) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2cos^2x + sin2x$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

1) a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)$. Que peut-on en déduire concernant (C_f) ?

b) Montrer que la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{8}$ comme axe de symétrique.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2cosx(cosx + sinx)$.

b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

c) Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right]$.

3) a) Tracer la courbe (C_I) représentant la restriction de f à l'intervalle I.

b) Comment obtient-on la courbe $\left(C_f\right)$ à partir de la courbe (C_I) ?

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + cos^2x$ et (C) sa courbe représentative.

1) a) Démontrer que pour tout réel $x, x \leq f(x) \leq x + 1$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.

2) On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec la droite (d_1), puis avec la droite (d_2).

3)a) Déterminer la fonction dérivée f' de f. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - sin2x$.

b) En déduire le sens de variations de la fonction f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

4)a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.

b) Tracer (d_1), (d_2) et la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.

5) a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Comment déduit-on la courbe (C) de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$?

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

On considère la suite (U_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+2} \end{cases}$

1) a) Démontrer que la suite (V_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $V_n = \frac{1}{U_n}$ *est suite arithmétique.*

b) Préciser sa raison et son premier terme.

c) Exprimer V_n *puis* U_n *en fonction de n.*

2) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ *en fonction de n.*

3) Etudier la convergence de la suite (U_n)*.*

Exercice 2

On considère la suite (U_n) *définie par :* $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{U_n+1}; n \geq 1$ *et* $U_1 = 3$*.*

1) Calculer U_2 *et* U_3*.*

2) a) Montrer que la suite (U_n) *est majorée par 1.*

b) Montrer que la suite (U_n) *est décroissante.*

c) En déduire que (U_n) *est convergente.*

3) On pose $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1}$*.*

a) Montrer que (V_n) *est une suite arithmétique. Préciser son premier terme.*

b) Exprimer V_n *puis* U_n *en fonction de n.*

c) Déterminer la limite de la suite (V_n)*.*

Exercice 3

Soit (U_n) *et* (V_n) *deux suites définies pour tout entier naturel n par :*

$U_n = \frac{n}{n+1}$ *et* $V_n = \frac{n+2}{n+1}$

1) Etudier la monotonie des suites (U_n) *et* (V_n).

2) Vérifier que $V_n - U_n > 0$

3) Calculer la limite des suites (U_n) *et* (V_n).

4) En déduire que les suites (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes.*

Exercice 4

On donne la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *la suite réelle définie par :* $V_n = U_n + a$ *où* $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le réel a pour que (V_n) *soit une suite géométrique.*

2) On pose $a = -6$, *déterminer le premier terme et la raison de la suite* (V_n).

3) Ecrire V_n *et* U_n *en fonction de n.*

4) Calculer $S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{50}$.

Exercice 5

On considère la suite numérique (U_n) *définie par* $U_0 = 3$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$.

1) Prouver que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $V_n = \frac{1}{U_n}$ *est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.*

2) Exprimer V_n *en fonction de n, puis* U_n *en fonction de n.*

3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) *définie par :* $U_0 = \frac{1}{2}$ *et* $U_n = \frac{3U_{n-1}}{2U_{n-1}+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer U_1 *et* U_2.

2) On considère la suite (V_n) *définie par* $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$.

- *a) Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique.*
- *b) Exprimer* (V_n) *puis* (U_n) *en fonction de n.*

3) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ *et* $S'_n = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{U_k}$. *Exprimer* S_n *et* S'_n *en fonction de n.*

Exercice 7

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

(V_n) *est une suite numérique définie par :* $V_n = U_n - 3\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la valeur de α *pour laquelle* (V_n) *est une suite géométrique dont on dont on précisera la raison.*

2. On donne $\alpha = 1$.

- *a) Montrer que* $V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- *b) En déduire l'expression de* U_n *en fonction de* n.
- *c) Calculer la limite de la suite* (U_n).

3. Soit les sommes $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n+1}$ *et* $Y_n = U_0 + U_1 + \cdots U_{n+1}$.

- *a) Calculer la somme* S_n *en fonction de* n.

b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n, puis calculer $\lim Y_n$.

Exercice 8

On définit la suite numérique $(U_n), n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3.$$

1. Calculer U_1.
2. a) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par -6
   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
   c) Justifier alors qu'il existe un réel unique α tel que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$
3. Soit la suite numérique (V_n) définie par $V_n = U_n - U_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n - U_{n-1} = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$
4. Déterminer ainsi la valeur numérique de α.

Exercice 9

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 6 \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. Calculer le deuxième terme de la suite (u_n)

3. On pose la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 2$. Pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

5. Etudier la convergence des suites (v_n) et (u_n)

6. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n
b) Calculer la limite de S_n

Exercice 10

La suite de terme U_n est définie par $U_1 = 2$; $U_2 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\}$: $U_n = \frac{2U_{n-1}+U_{n-2}}{3}$.

La suite de terme général W_n est définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$:

$W_n = U_n - U_{n-1}$.

1) Calculer W_n en fonction de W_{n-1}.

2) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on calculera le premier terme W_2. Exprimer W_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

4) Calculer S_n en fonction de $U_n - U_1$.

5) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

6) Quelle est la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 11

1- Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$ *; pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$.

2- Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.
b) Exprimer (v_n) et (u_n) en fonction de n.
c) Calculer la limite de la suite u_n.

3- On considère la suite (w_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $w_n = \frac{3}{u_n}$ *et on pose* $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $w_n = 1 - v_n$.

b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $S_n = (n+1) + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

c) *Calculer la limite de* $\frac{S_n}{n}$ *quand n tend vers* $+\infty$

PRIMITIVES ET INTEGRALES

Exercice 1

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

1. Montrer que la fonction F *définie, pour tout réel* x*, par*

$F(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l’ensemble des primitives de f *sur* $\mathbb{R}$

3. Déterminer la primitive F_1 *de* f *telle que* $F_1(0) = 1$

Exercice 2

Soit f *et F deux fonctions définies par :*

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *et* $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Montrer que F est une primitive de f.

2. Calculer l’intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

Exercice 3

1. Comment vérifier que F est une primitive de f *sur un intervalle I ?*

2. Soit f *et* g *deux fonctions continues sur* $I = [-1; 0]$ *par*

$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^3}$ *et* $g(x) = -\frac{1}{2(x^2+x-2)^2}$

Montrer que g est la primitive de f *sur I*

3. Qu’est-ce-que l’intégrale d’une fonction continue ?

4. Soit f *une fonction continue sur* $I = [a; b]$ *et F une primitive de* f.

On rappelle que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. *Calculer* $J = \int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^3} dx$

Exercice 4

On pose les fonctions numériques F et f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + bx - 5\,;\, f(x) = x^2 - x + 2.$

a et b sont deux réels.

1. Déterminer la dérivée F' de F en fonction des réels a et b

2. En déduire les valeurs de a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. On donne $a = \frac{1}{3}\,;\, b = 2$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (x^2 - x + 2)dx$

On rappelle que : $\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a)$ avec H primitive de h.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^4 dx \ ;\ B = \int_0^4 |x-2|dx \ ; C = \int_0^4 (x - |x-1|)dx \ ;$$

$$D = \int_{-4}^{5} |x^2 - 9|dx\,;\ E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx \ ;\ F = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2xdx \ ;\ G = \int_0^{\pi} tan^2xdx$$

Exercice 6

On donne :

$$E = \int_0^{\pi} cos^2xdx \quad et\ F = \int_0^{\pi} sin^2xdx$$

1. Calculer $E + F$ et $E - F$

2. En déduire E et F.

Exercice 7

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = sin^4x$

1. *Exprimer* sin^2x *ainsi que* cos^2x *en fonction* $cos2x$.

2. *Exprimer* sin^4x *en fonction de* $cos2x$ *et* $cos4x$.

3. *Calculer* $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$

Exercice 8

1. *Calculer I et J tels que* $I = \int_0^1 3x\sqrt{x^2+7}dx$ *et* $J = \int_0^1 sin^2\pi x cos\pi x dx$

2. *Soit h la fonction définie, continue sur* $\mathbb{R}$*, par :*

$$h(x) = \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$$

   a) *Montrer que la fonction H définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $H(x) = \frac{x^3-4}{1+x^2}$ *est une primitive de h*
   b) *Calculer* $I = \int_0^1 h(x)dx$

3. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = (3x^2+5)(x^3+5x-2)$$

   a) *Calculer l'intégrale* $I = \int_0^2 f(x)dx$
   b) *Calculer la valeur moyenne de la fonction* f *sur l'intervalle* $I = [0;2]$.

STATISTIQUES

Exercice 1

On considère la série statistique suivante, donnant les notes de Mathématiques d'une classe de Première D :

Notes (x_i)	1	2	4	7	8	10	12
Effectif (n_i)	8	15	19	31	11	10	6

1. Quel est l'effectif total de cette série ?

2. Déterminer la médiane puis le mode de cette série

3. Calculer les 1er et 3^{e} quartiles

4. Déterminer l'écart interquartile puis l'intervalle interquartile

5. En déduire le coefficient inter quartile relatif à cette série

6. Calculer les 1er et 9^{e} déciles

7. Déterminer l'écart inter décile puis l'intervalle inter décile

8. Calculer la moyenne pondérée de la série.

9. Construire le diagramme en boîte de cette série statistique.

Exercice 2

On a interrogé les 250 élèves de première D du Bureau du Centre Académique sur leur nombre de frères et sœurs. Voici les résultats :

Nombre (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif (n_i)	80	90	46	20	8	3	1	1	1
Fréquence (en %)									
FCC									
ECC									

1. Recopier et compléter le tableau avec les fréquences en % ; les fréquences cumulées croissantes et les effectifs cumulés croissants.

2. Calculer la moyenne puis l'écart moyen de cette série.

3. Calculer la médiane M_e de cette série.

4. a) Déterminer Q_1 et Q_3 relatifs aux premier et troisième quartiles.

   b) Déterminer l'intervalle inter quartile I_0 ainsi que l'écart interquartile E_0

5. a) Déterminer le premier et le neuvième déciles de cette série, notés respectivement D_1 et D_9.

   b) En déduire l'intervalle inter déciles.

Exercice 3

Partie A

On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant.

Classe C_i	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$	$[16;20[$
Effectif n_i	3	7	13	5	2

1. Déterminer la classe modale ainsi que le mode de cette série.

2. Déterminer l'amplitude et le centre d'une classe de cette série.

Partie B

On considère la série statistique suivante, donnant les notes de Mathématiques d'une classe de Première D :

Notes x_i	2	6	10	14	18
Effectif n_i	3	7	13	5	2

1. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?

2. Calcule la moyenne de la série.

3. Déterminer :

a) La variance
b) L'écart-type
c) Le coefficient de dispersion ainsi que l'étendue de cette série.

Exercice 4

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire d'une entreprise en milliers de francs, pendant huit années consécutives.

Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires (y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

1. Représenter le nuage de points $(M_i)_{1\leq i\leq 8}$ associé à cette série statistique.

2. a) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.

b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x

puis représenter cette droite.

3. On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux : $(M_i)_{1\leq i\leq 4}$ et $(M_i)_{5\leq i\leq 8}$.

a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2, points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.
b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) puis représenter cette droite.
c) Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2).

4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaires pour la 9e année :

a) A l'aide de la droite de régression de y en x
b) A l'aide de la droite (G_1G_2).

DENOMBREMENT

Exercice 1

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages comprenant :

a) 3 boules de même couleur ?
b) 3 boules de couleurs différentes ?

Exercice 2

Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de ce sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. Déterminer le nombre de tirages d'avoir deux boules rouges.

3. Calculer le nombre de tirages d'avoir deux boules blanches

4. Calculer le nombre de tirage d'avoir deux boules de couleurs différentes.

5. Calculer le nombre de tirage d'avoir deux boules de même couleur.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules rouges, 2 boules blanches et 4 boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Combien y-a-t-il des tirages possibles ?

2. Combien y-a-t-il des tirages comprenant :

a) 3 boules de même couleur ?
b) 3 boules de couleurs différentes ?
c) Exactement 2 boules rouges ?
d) Au plus 2 boules blanches ?

Exercice 4

Une urne contient deux boules rouges marquées R_1 et R_2 et deux jaunes marquées J_1 et J_2. On tire au hasard une première boule dans l'urne sans remettre puis une deuxième boule.

On note à chaque tirage la couleur et le numéro tirés.

1. Construire un arbre pour représenter la situation

2. a) Quel est le nombre des issues possibles ?

b) Donner l'ensemble des issues possibles.

3. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants :

A « Obtenir deux boules de même couleur ou de même numéro »

B « Obtenir deux boules portant des numéros ayant un écart de 1 »

4. Déterminer l'événement « A et B »

PARTIE C
Géométrie

OUTIL VECTORIEL DU PLAN

Exercice 1

Soit ABC un triangle, et les points E et F définis par :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

1. Placer les points E et F.

2. Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

3. Que peut-on en déduire pour les droites (EF) et (BC) ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. L le point du plan tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BJ}$

1. Faire une figure.

2. Démontrer que les droites (CL) et (AI) sont parallèles.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

1. Placer les points D et E définis par :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2. Montrer que A, D, E sont alignés.

3. Soit F le point défini par $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que E est milieu de $[AF]$.

Exercice 4

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ *et le point N tel que* $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. *Que peut-on déduire ?*

3. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ *et* $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$. *En déduire la nature du quadrilatère ABNI.*

Exercice 5

Dans un triangle ABC, on considère par M le milieu de $[AB]$, *par I celui de* $[MC]$ *et K le point tel que* $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que les points A, I, K sont alignés.

Exercice 6

Soit un triangle ABC. M, N et P sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

b) En déduire que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, *exprimer* $\overrightarrow{PM}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

3. a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PM}$ *et* $\overrightarrow{PN}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right)$

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.

Exercice 7

Soit ABC un triangle vérifiant : $AB = 3cm\,; BC = 4cm$. M, N, P les points définis vectoriellement par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}$.

1. Faire une figure et exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que M, N et P sont alignés.

3. Soit I le milieu de $[AC]$ et J le symétrique de C par rapport à B. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

4. Quelle est la position des droites (IJ) et (MN) ?

Exercice 8

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de $[AC]$.

2. Exprimer, en le justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

3.a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$.

c) Que peut-on alors conclure ?

4.a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C. Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 9

Soit ABC un triangle et un nombre x. A chaque valeur de x, on associe le point E et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure pour $x = -\frac{1}{2}$

2. Démontrer que, quel que soit x, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on :

- *E et F confondus ?*
- *BCFE est un parallélogramme ?*

Exercice 10

Soit ABC un triangle. Soit M, N et P les points définis par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BP} = -2\overrightarrow{BC}$.

1. Placer les points M, N et P sur une figure.

2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{MP}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

4. Soit I, J et K les milieux des cotés $[BC], [AC]$ *et* $[AB]$. *On appelle M' le symétrique de M par rapport à J, N' le symétrique de N par rapport à K et P' le symétrique de P par rapport à I.*

a) Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ *et* $\overrightarrow{M'P'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
b) Démontrer que les points M' , N' et P' sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire les points D et E tels que ABCD soit un parallélogramme et E soit le symétrique de A par rapport à D.

2. On désigne par O le centre de ABCD et par I le milieu de $[DC]$; (AI) coupe (BD) en J et la parallèle à (BC) passant par J coupe (AB) en K. On note H le milieu de $[JK]$.

a) Que représente J pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
b) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c) Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (on pourra, en le justifiant, utiliser l'égalité : $3\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MC}$, où M désigne le milieu de $[AD]$)
d) Des questions précédentes, déduire l'expression de $\overrightarrow{AH}$. Que peut-on conclure ?

Exercice 12

Soit ABCD un parallélogramme.

1. a) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

2. a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$.

b) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c) En déduire que les points B, M et F sont alignés.

3.a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

b) Montrer que A est le milieu de $[IB]$.

4.a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

c) Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

Exercice 13

Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1. Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.

2. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que M appartient à la droite (ID).

4. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que M appartient à la droite (JB).

5. Démontrer que MINJ est un parallélogramme.

6. Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC). Démontrer que B est le milieu du segment $[CE]$.

Exercice 14

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A,1); (B,-3)$ et $(C,-2)$ et E le point défini par : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

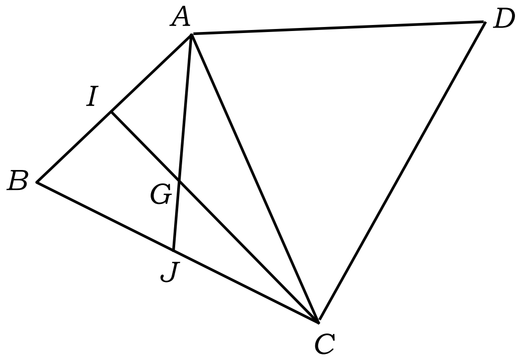
1. Ecrire $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis faire la figure.

2.a) Montrer que E est le barycentre des points pondérés $(B,-3)$ et $(C,-2)$.

b) En déduire que les points A, E et G sont alignés.

3. Soit I le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-3)$. Montrer que G est le milieu du segment $[CI]$.

Exercice 15



Sur la figure ci-dessus, ABCD est quadrilatère, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ *et* $[BC]$ *et G est le centre de gravité du triangle ABC. On considère les points L et K tels que :*

$L = bar\{(A,1);(D,3)\}$ *et* $K = bar\{(C,1);(D,3)\}$.

1. Reproduire la figure puis placer les points L et K.

2. Soit H tel que : $H = bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.

- *a) Montrer que H est le barycentre de G et D affectés de coefficients à préciser.*
- *b) Montrer que H est le barycentre de J et L affectés de coefficients à préciser.*
- *c) Montrer que H est le barycentre de I et K affectés de coefficients à préciser.*

3. Déduire de la question 2 que les droites (GD)*,* (JL) *et* (IK) *sont concourantes en un point que l'on précisera.*

Exercice 16

ABCDE est un pentagone.

G_1 *et* G_2 *sont les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ADE. On considère le barycentre G des points pondérés* $(A,1);(B,-1);(C,-1);(D,2)$ *et* $(E,2)$.

1. Construire G_1 *et* G_2.

2. Montrer que les points G_1, G_2 et G sont alignés. En déduire une construction de G.

3. On définit les points H et K par :

H est le barycentre du système $\{(A,-1);(B,2);(C,3);(D,-1)\}$

K est le barycentre du système $\{(A,-1);(C,-1);(D,-3);(E,-4)\}$

a) Montrer que G appartient à la droite (HK).
b) En déduire la position relative des droites (G_1G_2) et (HK).

Exercice 17

Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J est le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S = \{(A;1),(B;m),(C;2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que G_1 est le milieu du segment $[CI]$

2. Montrer que les points G_1, J et C sont alignés.

3. Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$

4. Montrer que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$

5. Montrer que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle

Exercice 18

ABCD est un rectangle et I et J respectivement les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

1.a) Construire le point F barycentre des points pondérés $(A, 1)$ *et* $(C, 3)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| = AC$.

2. Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ *et soit E barycentre des points pondérés* $(B, 1)$ *et* $(D, 3)$.

- *a) Montrer que G est le milieu de* $[EF]$.
- *b) Construire les points E et G. Montrer que les points I, J et G sont alignés.*

Exercice 19

ABCD est un carré de centre O.

1. Montrer que $C = bar\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$.

2. On pose $S = bar\{(A, 1); (B, 2); (C, 1); (D, -2)\}$.

- *a) Montrer que* $S = bar\{(B, 3); (D, -1)\}$.
- *b) En déduire que S est le symétrique du point O par rapport au point B. Construire le point S.*

3. a) Démontrer que, pour tout point M du plan, le vecteur

$\vec{u} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ *est un vecteur constant qu'on exprimera en fonction du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ *des points M du plan tel que :* $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = \|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$.

Exercice 20

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ *et* $[AC]$.

1. Construire le point G barycentre des points pondérés $(A, 3)$ *et* $(B, 2)$.

2. Soit H le point défini par : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

   a) Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(G, 5)$ et $(C, 1)$.
   b) Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(I, 2)$ et $(J, 1)$.
   c) En déduire une construction simple de H.

3. La droite (AH) coupe la droite (BC) au point K. Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(H, -2)$.

4. a) Montrer que pour tout point M du plan on a :

   $$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MH}.$$

   b) Déterminer les ensembles suivants :

   $$E_1 = \left\{M \in P / \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH}\right\|\right\}$$

   $$E_2 = \left\{M \in P / \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\right\|\right\}$$

OUTIL VECTORIEL DE L'ESPACE

Exercice 1

Soit $A(-1;2;-3)$; $B(0;2;-1)$ et $C(-1;1;0)$ trois points de l'espace (E) muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. Placer les points A, B et C dans ce repère.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

3. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

4. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

5. Calculer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 2

Soit ABCDEFGH un cube de côté 8 cm.

1. Faire une figure.

2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$.

4. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont-ils colinéaires ?

5. Déterminer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[FH]$.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$*, on considère les points* $A(2;4;1);B(0;4;-3);C(3;1;-3);D(1;0;-2);E(3;2;-1)$ *et le vecteur* $\vec{n}(12;12;-6)$.

Pour chacune des sept affirmations suivantes, dire en justifiant si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Une équation du plan (ABC) *est :* $2x+2y-z-11=0$.

2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. Les droites (AB) *et* (CD) *sont orthogonales.*

4. La droite (CD) *est donnée par la représentation suivante :*

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t, \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$$

5. Le point A est sur la droite (CD).

6. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}$

7. Le vecteur $\vec{n}$ *est normal au plan* (ABC).

Exercice 4

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ *d'équation* $2x+y-2z+4=0$ *et les points* $A(3;2;6);B(1;2;4)$ *et* $C(4;-2;5)$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.

2. a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b) Vérifier que ce plan est le plan $(\mathcal{P})$.

3. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Ecrire un système d'équation paramétrique de la droite (Δ)

passant par l'origine O et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$. Déterminer les coordonnées de K, puis calculer la distance OK.

Exercice 5

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points suivants : $A(1;0;0)$; $B(0;2;0)$ et $C(0;0;3)$.

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Justifier alors que les points A, B et C déterminent un plan $(\mathcal{P})$

c) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

2. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.

a) Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites Δ et Δ'.
b) Soit Ω le point d'intersection de Δ et Δ'. Déterminer les coordonnées de Ω.
c) Calculer la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;3)$; $B(0;1;4)$; $C(-1;-3;2)$; $D(4;-2;5)$ et le vecteur $\vec{n}(-2;1;-1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droit *passant par O et orthogonale au plan (ABC).*

3. a) Justifier que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre.

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

4. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 4 - k \end{cases}$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

5. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

On considère les points $E(1; -2; 0)$; $F(-2; -3; 5)$; $G(2; 1; 1)$ et $H(1; 1; 3)$.

1. Démontrer que les points E, F, G et H sont coplanaires. On note (P) le plan passant par les points E, E, G et H.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal à (P).

3. Déterminer une équation cartésienne de (P).

4. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D) passant par $A(1; 2; 5)$ et perpendiculaire à (P).

5. Montrer que le point A n'appartient pas à (P).

6. a) Calculer l'aire du triangle AFG.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEFG.

Exercice 8

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(2;1;0)$; $B(0;1;1)$; $C(0;3;2)$ et $K(0;0;1)$.

1. Soit G l'isobarycentre de A, B et C. Déterminer les coordonnées du point G.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. Déterminer alors l'équation du plan (ABC).

4. Les points A, B, C, G et K sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (OK).

6. La droite (OK) perce le plan (ABC) en un point I. Déterminer les coordonnées du point I.

7) Calculer l'aire du triangle ABC.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *et F un sous ensemble de E défini par :* $F = \{(x, y, z) \in E / x - 2y + 3z = 0\}$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

2) Déterminer la base et la dimension de F

3) Soit $\vec{u}(0; 1; 2)$, $\vec{v}(1; 2; 1)$ *et* $\vec{v}(2; 1; m)$ *trois vecteurs de E.*

Déterminer le réel m pour que la famille $(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w})$ *soit liée.*

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ *rapporté à sa base canonique* $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *on considère les vecteurs* $\overrightarrow{e_1}(2; -1; 0)$, $\overrightarrow{e_1}(-3; 2; 1)$ *et* $\overrightarrow{e_1}(5; 0; -2)$.

1) Montrer que $B' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}(5; 8; -14)$ *dans* B'

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ *on considère les vecteurs*

$\overrightarrow{v_1}(1; 0; 1)$; $\overrightarrow{v_2}(1; 1; 0)$ *et* $\overrightarrow{v_3}(a; 2; -a^2)$ *où a est un réel.*

1) Montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ *est une famille libre.*

2) Déterminer les valeurs de a pour que le vecteurs $\overrightarrow{v_3}$ *soit une combinaison linéaire des vecteurs* $\overrightarrow{v_1}$ *et* $\overrightarrow{v_2}$.

Exercice 4

On considère les vecteurs $\overrightarrow{U_1}(1;1;0;0)$; $\overrightarrow{U_2}(0;1;1;0)$ *et* $\overrightarrow{U_3}(0;0;1;1)$ *de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^4$.

1) Montrer que la famille $F = \left(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right)$ *des trois vecteurs de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^4$ *est libre.*

2) Soit le vecteur $\vec{U}(1;2;3;2)$ *de l'espace* $\mathbb{R}^4$*, déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait :* $\vec{U} = a\overrightarrow{U_1} + b\overrightarrow{U_2} + c\overrightarrow{U_3}$*, c'est-à-dire que* $\vec{U}$ *soit une combinaison linéaire des vecteurs de la famille F.*

3) Soit le vecteur $\vec{V}(x;y;z;t)$ *du sous espace E de* $\mathbb{R}^4$*, trouver une relation entre les coordonnées* x, y, z *et* t *du vecteur* $\vec{V}$ *de E sachant que l'on a :* $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{U_1} + \beta\overrightarrow{U_2} + \gamma\overrightarrow{U_3}$*, où* α, β *et* γ *sont des réels.*

4) Vérifier que le vecteur $\vec{W}(20;20;-15;-15)$ *appartient à E.*

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

$a)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $b)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$; $c)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $d)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO}$

Exercice 2

ABCD est un carré de sens direct, de côté a et de centre O.

1. Faire une figure.

2. Déterminer en fonction de a les produits scalaires :

$a)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $b)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $c)\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $d)\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OA}$

Exercice 3

ABCD est un carré de côté 6 et ADE est un triangle équilatéral. I est le projeté orthogonal de E sur la droite (AD) , M est le milieu du segment $[AB]$ et N celui du segment $[BC]$.

1. Faire la figure.

2. Calculer les produits scalaires suivants :

$a)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $b)\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NE}$; $c)\ \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IB}$; $d)\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}$; $e)\ \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DE}$

Exercice 4

On considère un triangle ABC de côté a. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G étant le centre du triangle ABC.

1. Faire une figure.

2. Calculer les produits scalaires suivants :

$a)$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $b)$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $c)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $d)$ $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $e)$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BJ}$; $f)$ $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

Exercice 5

1. ABCD est un trapèze rectangle avec $AB = 3a$; $AD = 2a$ *et* $DC = 5a$

Calculer les produis scalaires : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

2. a) Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ *de centre* $A(2;3)$ *et de rayon* $R = 2$.

b) Construire le cercle $(\mathcal{C})$ *dans le plan rapporté au repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 6

Soit A et B deux points du plan $(\mathcal{P})$ *tels que* $AB = 8$. *On considère l'application* f *de* $(\mathcal{P})$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M \longmapsto f(M) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

1. Qu'appelle t'on isobarycentre G de deux points pondérés A et B ?

2. Construire l'isobarycentre G du système $\{(A,1);(B,1)\}$

3. Démontrer que $f(M) = 2MG^2 - 32$

4. Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ *des points M tels que :* $f(M) = 18$

Exercice 7

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ *et* $BC = 6$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$

2. Soit I le milieu de $[BC]$ *et G le barycentre de* $\{(A;2);(B;3);(C;3)\}$.

Montrer que G est le barycentre de $\{(A;2);(I;6)\}$ *et construire G puis vérifier que la distance* $AG = 3$.

3. Soit f l'application du plan qui à tout point M du plan associe $f(M)$ *définie par :* $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

a) *Montrer que* $f(M) = f(G) + 4MG^2$ *et calculer* $f(A)$ *et* $f(G)$.
b) *Déterminer et représenter l'ensemble* (Q) *des points M vérifiant :* $f(M) = f(A)$.

Exercice 8

On donne un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G et A' le milieu de $[BC]$. *On pose* $BC = a$.

1. Exprimer $4\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AA'}$ *en fonction de a.*

2. Exprimer $GB^2 + GC^2$ *en fonction de a.*

3. En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{3}{4}a^2$.

4. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Exercice 9

Dans le plan P on considère un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse $[BC]$ *de longueur 2a. Soit f l'application :*

$$M \longmapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ *soit un vecteur constant* $\overrightarrow{v_0}$ *et calculer* $\overrightarrow{v_0}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

2. On pose $m = -1$. *Démontrer que le barycentre G du système* $(A, 4); (B, -1); (C, -1)$ *est symétrique par rapport à A du milieu I de* $[BC]$.

3. Déterminer l'ensemble :

$C = \left\{M \in P / 4\overrightarrow{MA^2} - \overrightarrow{MB^2} - \overrightarrow{MC^2} = -4a^2\right\}$ *(on remarque que A* $\in$*)*

ANGLES ORIENTES

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que :

$mes(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$ *et* $mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$

1. Faire une figure.

2. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}),\qquad (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}),\qquad (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$$

Exercice 2

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

1. Faire une figure.

2. En utilisant la relation de Chasles, prouver que :

$$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$$

3. En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

Exercice 3

1. Soit $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{9}$ *et* $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale de :

$(-\vec{u};\vec{w})$; $(-\vec{u};\vec{v})$; $(-\vec{v};-2\vec{w})$; $(-2\vec{u};\vec{w})$

2. ABC est un triangle équilatéral direct, CBD ;ACE et AFB sont des triangles rectangle et isocèles respectivement en D, E et F.

a) Faire la figure.
b) Déterminer la mesure principale des angles suivant :

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CB})$.

Exercice 4

On considère un triangle ABC direct, isocèle et rectangle en A ; on construite les deux triangle équilatéraux indirects AIC et BJA.

1. Faire la figure.

2. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI})$.

b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI})$.

3. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB})$; $(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$.

b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{BC})$

4. Déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC})$ *puis conclure.*

Exercice 5

Soit $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$ *deux cercles sécantes en A et B de centre respectifs O et O' tels que :* $\left(\overrightarrow{AO'};\overrightarrow{AO}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$. *Soit M un point de* $(\mathcal{C})$ *distinct de A et B tel que la droite* (MA) *recoupe* $(\mathcal{C}')$ *en C et* (MB) *recoupe* $(\mathcal{C}')$ *en D.*

1. Que représente (AO') *pour* $(\mathcal{C})$ *?*

2. En déduire que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \left(\overrightarrow{AO'};\overrightarrow{AB}\right)[\pi]$.

3. Démontrer de même que : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})[\pi]$

4. Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés.

Exercice 6

Soit ABCD un carré, E et F les points tels que ABE et BCF soit équilatéraux. Le but de l'exercice est de montrer que les points D, E et F sont alignés.

1. a) Déterminer la nature du triangle DEA puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DE})$.

b) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC})$.

2. Déterminer la nature du triangle CDF puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{DC})$.

3. Montrer que $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}) = 0[\pi]$. *Conclure.*

Exercice 7

ACE est un triangle isocèle direct en A et tel que $AC = 5$ *et* $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

1. Tracer le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.

2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{EC})$.

TRIGONOMETRIE

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$*. On donne le point E de coordonnées cartésiennes* $(2;0)$ *et F de coordonnées polaires* $\left[2;\frac{3\pi}{4}\right]$ *et on désigne par I le milieu du segment* $[EF]$*.*

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de E et I.

2. a) Déterminer la nature du triangle OEF.

b) En déduire la mesure principale de $(\vec{i};\overrightarrow{OI})$

3. a) Déduire les valeurs exactes de $cos\frac{3\pi}{8}$ *et* $sin\frac{3\pi}{8}$*.*

b) Résoudre, dans $\mathbb{R}$*,* $\sqrt{2-\sqrt{2}}cosx+\sqrt{2+\sqrt{2}}sinx=-1$

Exercice 2

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ *un repère orthonormé direct, le point A de coordonnées polaires* $\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$*.*

1. Construire le point A puis déterminer ses coordonnées cartésiennes.

2. Soit le point B de coordonnées cartésiennes $\left(-\sqrt{3};-1\right)$*.*

a) Déterminer les coordonnées polaires de B puis le construire.
b) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

3. Soit le point C de coordonnées polaires $\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$*.*

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$*.*
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. *Unité graphique* 2cm. *On considère les points M et N définis par les abscisses curvilignes* $\alpha = \overline{(\vec{\imath};\overrightarrow{OM})}$ *et* $\beta = \overline{(\vec{\imath};\overrightarrow{ON})}$ *en radians avec* $\alpha = \frac{13\pi}{3}$ *et* $\beta = \frac{\pi}{4}$.

1. *Déterminer la mesure principale de* $\frac{13\pi}{3}$

2. *Placer les points M et N sur le cercle trigonométrique.*

3. *Démontrer qu'une mesure de l'angle* $\overline{(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})}$ *est* $-\frac{\pi}{12}$.

4. *Construire le vecteur* $\vec{u} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ *dans le plan.*

5. *Préciser* $cos\alpha,\ sin\alpha,\ cos\beta$ *et* $sin\beta$.

6. *On admet que tout point P d'abscisse curviligne* θ *sur le cercle trigonométrique s'écrit :* $\overrightarrow{OP} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$. *En déduire les coordonnées cartésienne des points M et N.*

Exercice 4

1. *Soient* a *et* b *deux réels.*

Développer $cos(a-b)$ *et* $sin(a-b)$

Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. *Calculer* $cos\frac{\pi}{12}$ *et* $sin\frac{\pi}{12}$

2. *On considère l'équation* (E) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cosx + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)sinx = 2$$

   a) *Montrer que l'équation* (E) *peut encore s'écrire :*
$$cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$$
   b) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* (E)
   c) *En déduire les solutions de* (E) *sur* $]-\pi;\pi[$

Exercice 5

I. Linéariser les expressions suivantes : $A = cos^6x$; $B = sin^3x.cos^2x$

II. Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes

1. $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sin2x$
2. $1 + \sqrt{2}sin3x \geq 0$

III. Montrer que :

1. $cos^2x + cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$. Sachant que $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$

2. $sinx = \frac{2tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Exercice 6

1. Exprimer $cos(a + b)$ et $sin(a + b)$ en fonction de $cosa$; $cosb$; $sina$ et $sinb$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos2x - \sqrt{3}sin2x$

a) Déterminer les réels a ; b et c tels que $f(x) = ccos(ax + b)$
b) Montrer que pour tout réel x, on a : $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + f(x) = 0$
c) Calculer $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis déduis $f\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
e) Déduis que pour tout réel x, $f(x) = -2sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 0$

Exercice 7

Soit x un réel. On considère la fonction définie par :

$$f(x) = sin(4x) - sin(2x) - 2cos(3x)$$

1. a) Montrer que pour tout x ; $f(x) = 2\,cos(3x)\,(sin(x) - 1)$

b) Calculer $f(\frac{\pi}{12})$. *En déduire la valeur exacte de* $sin(\frac{\pi}{12})$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, *l'équation* $f(x) = 0$

2. On pose $g(x) = \frac{2cos^2(2x)-2sin^2(x)}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ *de définition de* g.
b) Montrer que pour tout x *on a :* $cos(3x) = cosx(2\,cos(2x) - 1)$
c) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ *; on a :* $g(x) = \frac{cosx}{sinx-1}$

3. Résoudre dans $\mathcal{D}$ *l'équation :* $g(x) = 1$.

Exercice 8

Soit $f(x) = 1 - sin(2x) + cos(2x)$.

1. Calculer $f(\frac{\pi}{12})$ *et* $f(\frac{\pi}{8})$.

2. a) Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2}cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, *l'équation* $f(x) = 0$ *puis l'équation*

$f(x) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Soit $g(x) = \frac{2cos\,2x}{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble D_g *de définition de* g.
b) Montrer que $f(x) = 2cosx(cosx - sinx)$
c) Montrer que $\forall\ x \in\ D_g; g(x) = 1 + tanx$.
d) En déduire que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 9

Soit $x \in [0;\pi]$ *et soit la fonction* $f(x) = -2cos^2x - 3sinx + 3$

1) Calculer $f(0)$ *;* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ *en fonction de* $cosx$ *et* $sinx$

3)a) Montrer que $f(x)=2sin^2x-3sinx+1$

b) Résoudre dans $[0;\pi]$ *l'équation* $f(x)=0$

4) On pose $g(x)=-2sin^2x+3sin(\pi-x)$.

Montrer que $f(x)-g(x)$ *est un constante don on déterminera sa valeur.*

Exercice 10

On considère les expressions :

$S=cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $P=cos\left(\frac{\pi}{12}\right)sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1) Montrer que : $P=\frac{1}{4}$

2)a) Montrer que pour tout réel x, $consx+sinx=\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

b) En déduire que : $S=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3)a) Vérifier que $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *sont les solutions de l'équation* $(E):\ x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

b) Résoudre (E) *puis déduire les valeurs de* $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4)a) Vérifier que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

b) Transformer en $rcos(x-\varphi)$ *l'expression* $A=cosx+\left(2-\sqrt{3}\right)sinx$.

Exercice 11

Pour tout x dans $\mathbb{R}$*, on pose :* $f(x)=\sqrt{3}sin4x-8sin^2xcos^2x$

1) Montrer que $\sqrt{3}sinx + cosx = 2cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Monter que $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$, $1 - cos4x = 8sin^2xcos^2x$

3) Déduire que $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$, $f(x) = 2cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

5) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation $f(x) \leq 0$

Exercice 12

Soient a et b deux mesures données d'angle orienté du plan P

1. Complète, après avoir recopié, les formules trigonométriques suivantes :

$tan(a+b) = \dfrac{tana + tanb}{.\ \ .\ \ .}$ et $tan2a = \dfrac{.\ \ .\ \ .}{1 - tan^2a}$

2. a) Démontrer que, pour tout réel x tel que $sin3x \neq 0$, on a :

$tan3x = \dfrac{3tanx - tan^2x}{1 - 3tan^3x}$

b) En déduire la valeur exacte de $tan\frac{3\pi}{4}$.

3. Soit l'équation trigonométrique (E) : $cos(2x) - sin(2x) = -1$

a) Montrer que $cos(2x) - sin(2x) = \sqrt{2}cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résoudre dans $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ l'équation (E).

c) Représenter sur un cercle trigonométrique les images des solutions de (E) sur I.

Exercice 13

Soit x un nombre réel.

1. Factoriser $d(x) = cos^2x - cos^4x$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $d(x) = 0$.

3. Soit $f(x) = \frac{sin^2x - sin^4x}{cos^2x - cos^4x}$.

Montrer que $f(c) = I, \forall x \in I; I$ est un ensemble que l'on précisera.

4. On pose : $A = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et

$B = sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.
b) En déduire la valeur exacte de A et B

5. Soient a et b deux mesures d'angle telles que $cos(a + b) \neq 0$.

Démontrer la formule trigonométrique : $tan(a + b) = \frac{tana + tanb}{1 - tana \times tanb}$.

Exercice 14

1. Soit l'équation (E) : $-\sqrt{3}cosx + sinx = -\sqrt{2}$

a) Montrer que $-\sqrt{3}cosx + sinx = 2cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E)

2. On donne $f(x) = (cos2x + sin2x)(cos2x - sin2x)$

a) Montrer que $cos4x = cos^22x - sin^22x$
b) En déduire que $f(x) = cos4x$
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{sin4x}{(cos2x + sin2x)(cos2x - sin2x)} = 1$

3. On donne $\theta = \frac{11\pi}{12}$

a) Vérifier que $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
b) Calculer $cos\theta$ et $sin\theta$

Exercice 15

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sqrt{3}cos2x - sin2x + \sqrt{3}$

1. a) *Calculer* $f\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ *et* $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)$

   b) *Montrer que pour tout réel x,* $f(x) = 2cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$

   c) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *puis dans* $]-\pi, \pi]$ *l'équation* $f(x) = 0$

   d) *Montrer que pour tout réel x,* $f(x) = 4cosxcos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

   e) *Calculer* $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et en déduire* $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

2. *Soit x un réel tel que* $f(x) \neq 0$ *et* $g(x) = \frac{cos2x+\sqrt{3}sin2x+1}{f(x)}$

   a) *Montrer que* $cos2x + \sqrt{3}sin2x + 1 = 4cosxsin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

   b) *En déduire que* $g(x) = tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

   c) *Résoudre dans* $]-\pi, \pi]$ *l'équation* $g(x) = 1$

Exercice 16

Soit l'application $f : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -2sin^2x - \left(\sqrt{3} + 2\right)cosx + \sqrt{3} + 2$$

1) *Calculer* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2) *Soit* θ *un élément de* $[0; \pi]$ *tel que* $sin\theta = -\sqrt{2}$

Calculer $cos\theta$; $tan\theta$ *puis* $f(\theta)$

3) *Montrer que pour tout* $x \in [0; \pi], f(x) = 2cos^2x - \left(\sqrt{3} + 2\right)cosx + \sqrt{3}$

4) a) *Résoudre dans* $[0; \pi]$ *l'équation* $f(x) = 0$

   b) *Puis l'équation* $2cos^2x - \left(\sqrt{3} + 2\right)|cosx| + \sqrt{3} = 0$

   c) *Résoudre dans* $[0; \pi]$ *l'inéquation* $f(x) > 0$

5) *Dans cette question x désigne un élément de* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $(cosx - sinx)^2 + (cosx + sinx)^2 = 2$

b) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x)$ *à l'aide de* $cosx$ *et* $sinx$

c) Résoudre l'équation $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes :*

$a)\ cosx = 0\ ;\ b)\ sinx = 0;\ c) tanx = 0;\ \ d)\ cos\,2x = -\frac{1}{2};\ \ e)\ cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f)\ sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ g)\ 1 + tanx = 0\ ;\ h) 1 - 2cosx = 0;\ \ i)\ cos4x = cosx$

$j)\ sinx = sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right);\ \ k)\ cos2x + cosx = 0\ ;$

$l)\ cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0\ ; m)\ sin2x = -sinx\ ;$

$n) - \sqrt{6}cosx + 3\sqrt{2}sinx = \sqrt{6}\ ;\ o) - cos2x - sin2x = \sqrt{2}\ ;$

$p)\ sin2x = cos^2x\ ; q)\ cos2x + 2sinxcosx = 0\ ;\ \ r)\ cos^2x - sin^2x = cos5x$

$s)\ cos^2x - 2sinxcosx + 2sin^2x = 2\ ;\ t)\ 2sin^2x - sinx - 1 = 0$

$1)\ 2sin^2x - \sqrt{3}sinx \geq 0\ ; 2)\ cosx < -1;\ 3)\ cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; 4)\ sinx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$5)\ tan2x < 0\ ;\ 6)\ cosx > -\frac{1}{2};\ 7)\ sinx \geq -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ 8)\ 1 + tanx < 0$

$9)\ \sqrt{3}tanx + 1 < 0\ ;\ 10)\ 1 - 2cosx > 0\ ;\ \ 11)\ sin2x < 0\ ;$

$12)\ 2cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0\ ;\ \ 13)\ sinx \leq cosx.$

Exercice 18

Résoudre dans l'intervalle I donnée :

$a)\ 2sin2x + 3 = 0, I = \mathbb{R}$; $b)\ cos^2 2x + 4cos2x + 3 = 0, I =]-\pi; \pi]$

$c)\ cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [0; 2\pi[$; $d)\ sinx = sin2x, \quad I = \mathbb{R}$

$e)\ cosx = sin2x, I = \mathbb{R}$; $f)\ (sinx)^2 = \frac{3}{4}, \quad I = \mathbb{R}$

$g)\ cos3x = sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad I =]-\pi; \pi]$;

$h) - \sqrt{3}cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sqrt{6}, \quad I =]-2\pi; 2\pi]$

$i)\ tan^2x + \left(1 + \sqrt{3}\right)tanx + \sqrt{3} = 0, \ I = [0; 2\pi[$

$k)\ \frac{1 - 2cosx}{2sinx - \sqrt{3}} \geq 0, \quad I =]-\pi; \pi]$