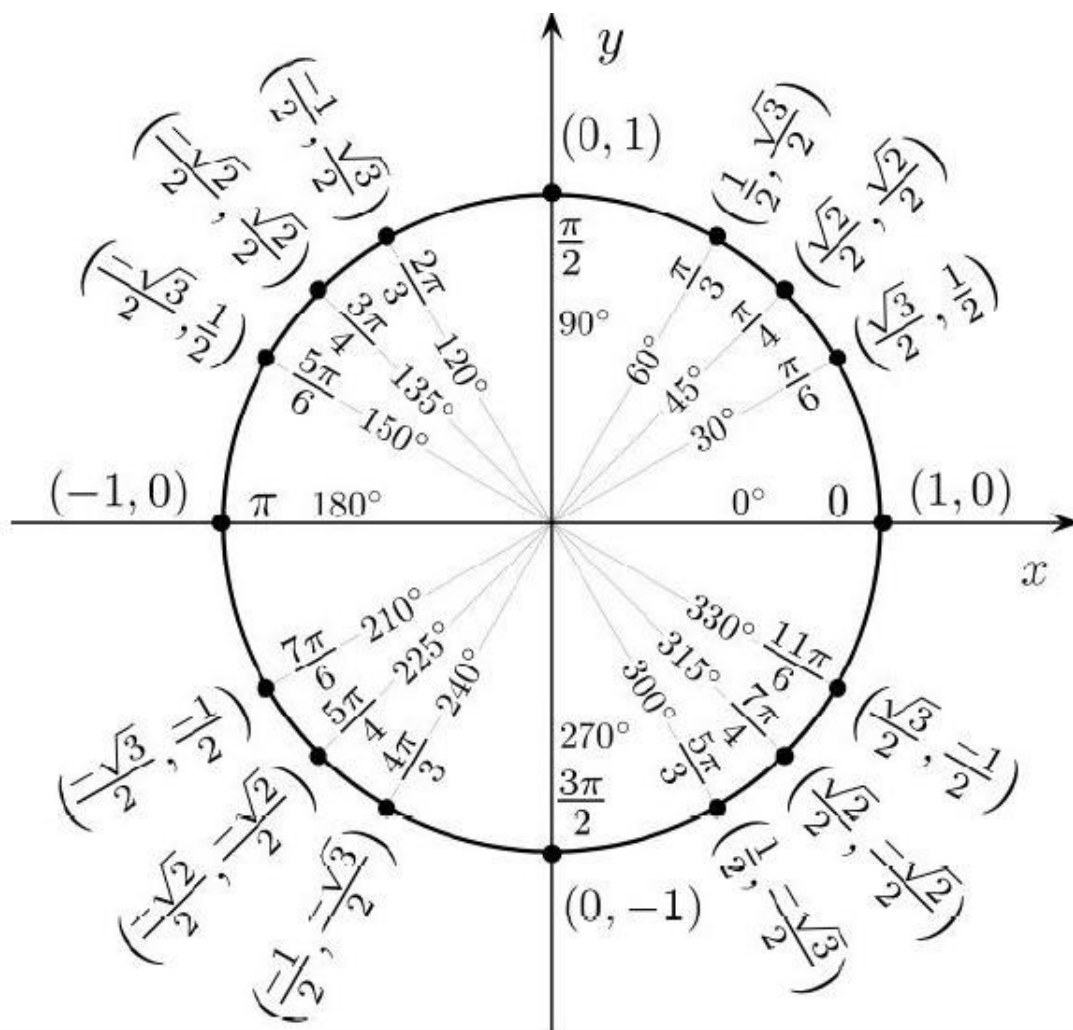


Manuel Sesamath Mathématiques 2e

Chapitre 6 - Fonctions trigonométriques



Problème

Une nouvelle espèce de lutins a été trouvée ... Ils naissent un jour où le jour, le mois et les deux derniers chiffres de l'année sont identiques. Les premiers lutins du XXI^e siècle sont apparus le 01-01-01, soit le 1er janvier 2001 qui était un lundi. Les suivants sont nés le 02-02-02, soit le 2 février 2002. En quel jour de la semaine sont nés les lutins 06-06-06 ?

1 [Souvenirs] Rappels sur les angles et leur mesure

1. Comment définit-on un angle ?

2. La mesure d'un angle est un nombre réel positif qu'on associe à un angle. Il existe différentes unités de mesure : un angle est couramment mesuré en **degrés** décimaux (par exemple $28,5^\circ$) ou en **degrés-minutes-secondes** (par exemple $34^\circ 23' 41''$). Comment la mesure en degré est-elle définie ?

3. Convertir :

a. $28,5^\circ$ en degrés-minutes-secondes.

b. $34^\circ 23' 41''$ en degrés décimaux.

4. Remarque : on peut également mesurer les angles en **grade** ; c'est pour cela que sur votre calculatrice on trouve encore parfois cette possibilité de paramétrage ... Comment la mesure en grade est-elle définie ? Combien y a-t-il de degrés dans un angle de 1 grade ?

2 [Activité] Drôles de degrés

Une voiture roule en ville sur une chaussée sale et plate. Elle passe inévitablement sur un chewing-gum qui se colle sous le pneu avant droit dont le rayon mesure 30 cm.



Après 3 secondes, elle a parcouru 30 mètres. Quel est l'angle arrondi au degré que forme le chewing-gum avec la verticale :

5730° ?

330° ?

30° ?

0° ?

-30° ?

Autre ?

3 [Activité] Une nouvelle mesure

1. Rappel : la relation entre la mesure en degré α d'un angle au centre dans un cercle de rayon R et la longueur L de l'arc de cercle intercepté est donnée par la formule $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R}$. Illustrer.

2. Le radian est une nouvelle mesure d'angle un peu plus complexe; il s'agit de l'unité qu'on utilise quand on étudie la trigonométrie dans le cadre de l'analyse mathématique. Un **radian**, que l'on note **1[rad]**, est la mesure d'un angle α qui, placé au centre d'un cercle, intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle. Illustrer cette définition par un schéma explicatif sur un cercle trigonométrique.

3. La **mesure d'un angle α en radian** est le rapport entre la longueur L de l'arc intercepté et le rayon R lorsque cet angle est placé au centre du cercle : $\alpha[\text{rad}] = \frac{L}{R}$. Illustrer avec des exemples.

4. Etudier le cas particulier lorsque cet angle est placé au centre d'un cercle trigonométrique.

5. Combien y a-t-il de radians dans un angle plat de 180° ?

6. Combien y a-t-il de degrés dans un angle de 1 [rad] ?

7. Les angles suivants sont exprimés en radians : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$. Les convertir en degrés sans utiliser la calculatrice puis les représenter dans le cercle trigonométrique.
8. Comment fait-on pour utiliser la mesure d'angle en radians avec la calculatrice ?
9. Les angles suivants sont exprimés en radians : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{\pi}{18}$; 1 ; 3 ; 5,5. Les convertir en degrés avec la calculatrice (réponses arrondies au dixième) puis les représenter dans le cercle trigonométrique.
10. Comment utiliser la calculatrice de façon efficace pour convertir des angles d'une mesure vers l'autre ?
11. Les angles suivants sont exprimés en degrés. Les convertir en radians :
 - a. Sans calculatrice : 30° ; 120° ; 240° ; 105°
 - b. Avec calculatrice (réponses au millième) : 30° ; 200° ; 1° ; $3,25^\circ$; 122° ; $15^\circ 23'$; $51^\circ 37' 22''$
12. Déterminer une formule générale pour convertir en radian une mesure d'angle donnée en degré, et réciproquement pour convertir en degré une mesure d'angle donnée en radian,

4 [Aller plus loin] Rayon de la Terre

La Terre est conçue comme sphérique dès le début du Ve siècle avant J.-C. Cette conception est l'œuvre de l'école pythagoricienne et peut-être due à Pythagore lui-même. C'est à Eratosthène (275-195 av. J.-C.), mathématicien, géographe et conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, que l'on doit une des premières estimations de la circonférence terrestre. Il s'appuyait sur l'observation que le soleil était exactement au zénith (c'est-à-dire à la perpendiculaire, ce qu'il mesurait en constatant que les rayons solaires éclairaient le fond des puits) au moment du solstice d'été à Syène, qui était une ville au bord du Nil (dont le nom actuel est Assouan). Ce moment de l'année étant connu avec précision, il constata qu'un obélisque dressé verticalement dans le sol faisait à Alexandrie (situé au nord de Syène et approximativement sur la même longitude) une ombre que l'on pouvait mesurer et qui correspondait à un angle de $7\frac{1}{5}^\circ$. Il mesura à l'aide d'un bématis¹ la distance qui sépare Alexandrie d'Assouan et qui correspond environ à 800 de nos kilomètres. Faire un schéma de cette situation et calculer avec ces données la circonférence de la Terre.

5 [Activité] Sinus et cosinus

1. Rappeler la définition de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ pour un α un angle compris entre 0° et 180° .
2. Étendre cette définition pour des angles compris entre 180° et 360° .
3. Interpréter cette définition lorsque les angles sont mesurés en radians.
4. Expliquer comment on peut « voir » la mesure de l'angle en radian dans le cercle trigonométrique.
5. On considère les angles $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, 1, 3, \frac{6\pi}{5}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$ (en radians). Représenter α ,

¹ Mesure au pas régulier qui suivait les armées dans leur conquête afin de fournir des mesures aussi précises que possible de la grandeur des territoires conquis.

Prérequis et activités de découverte

$\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ dans le cercle trigonométrique.

6. Quel sens peut-on donner à un angle de mesure comprise entre 0° et -360° (en degrés) ou entre 0 et -2π (en radians) ?
7. Comment étendre la définition de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ pour des angles de mesure négative ?
8. On considère les angles $\alpha = -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -1, -3, -\frac{6\pi}{5}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}, -2\pi$. Représenter α , $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ dans le cercle trigonométrique.

6 [Activité] Tangente

1. Définir et étudier la tangente d'un angle compris entre -360° et 360° ou entre -2π et 2π .
2. Représenter α et $\tan(\alpha)$ pour $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ et pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{11\pi}{6}$.

7 [Activité] Valeurs exactes

Déterminer les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ pour $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et leurs symétriques entre 0 et 2π , puis les représenter sur un cercle trigonométrique.

8 [Activité] Des angles aux nombres

1. Montrer comment on peut désormais considérer non plus des angles mais directement des nombres réels quelconques x et leur associer via le cercle trigonométrique des nombres $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$.
2. Représenter x , $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ dans le cercle trigonométrique :

a. $x = 7$

g. $x = -\frac{44\pi}{3}$

b. $x = -9,5$

h. $x = \frac{22\pi}{6}$

c. $x = 18\pi$

d. $x = -\frac{12\pi}{5}$

e. $x = -10,5$

f. $x = \frac{17\pi}{3}$

9 [Activité] Fonctions sinus, cosinus et tangente

1. Comment définir les fonctions réelles $\sin$, $\cos$ et $\tan$?
2. Pour chacune des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$, déterminer :
 - a. Quelques images
 - b. Le domaine de définition
 - c. L'ensemble des zéros
 - d. Le tableau de signes
 - e. La valeur minimale et maximale prise par la fonction
 - f. Une représentation graphique

10 [Activité] Période, amplitude

Définir et étudier la **période** et l'**amplitude** des fonctions $\sin$ et $\cos$.

11 [Aller plus loin] Propriétés

1. Utiliser le cercle trigonométrique pour rappeler les propriétés essentielles de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Explorer les propriétés essentielles de $\tan(x)$.

12 [Activité] Équations et inéquations trigonométriques

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

a. $\cos(x) = 0$

c. $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

e. $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ en utilisant une calculatrice :

a. $\sin(x) = 0,21705$

b. $\tan(x) = 3,159$

3. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

a. $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$

b. $2\cos(x) > \sqrt{3}$

c. $\tan^2(x) > 1$

4. Répondre en valeurs exactes : $\cos(x) = -\frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\sin(x) = ?$

13 [Aller plus loin] Formules trigonométriques

Démontrer que $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ et $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

14 [Activité] Table numérique

Explorer la partie « trigonométrie » de la table numérique.

15 [Activité] Autres fonctions trigonométriques

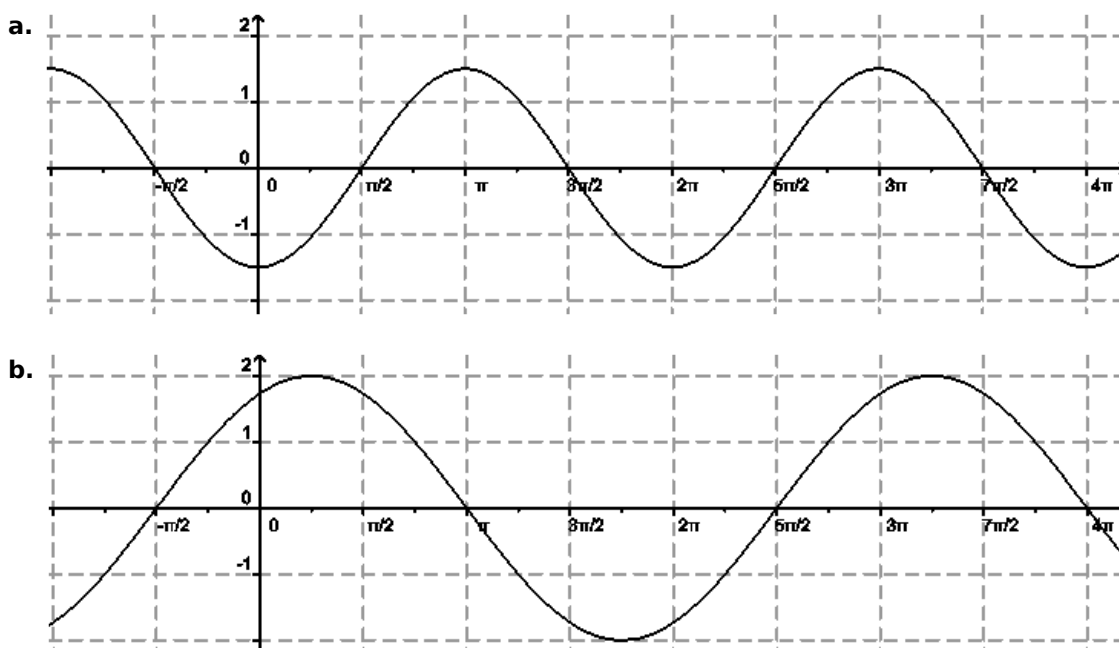
1. L'intensité en ampères du courant dans un circuit électrique à courant alternatif au temps t en secondes est donnée par : $I(t) = 30 \sin(50\pi t - \frac{7\pi}{3})$. Quelle est la plus petite valeur exacte de t pour laquelle $I = 15A$?

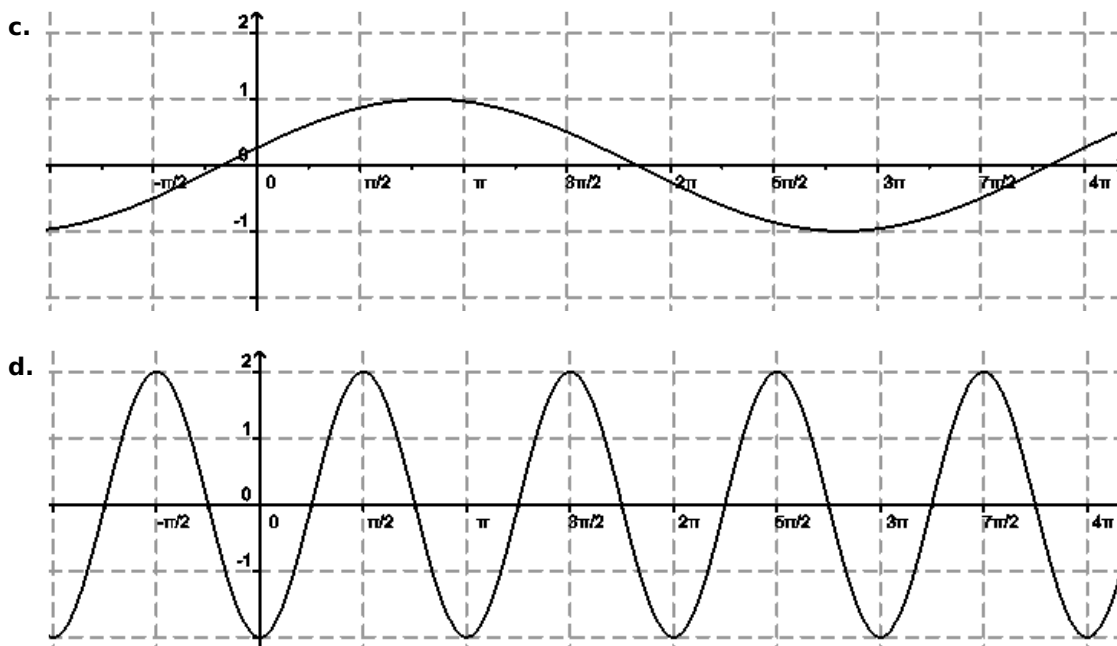
2. Soit f la fonction réelle déterminée par $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.

Comment déterminer une représentation graphique à partir de celle de la fonction $\sin$? Comment interpréter les effets de chaque paramètre ?

16 [Aller plus loin] Retrouver l'expression algébrique

1. Déterminer les expressions algébriques des fonctions trigonométriques représentées ci-dessous :





2. Les solutions sont-elles uniques ?

17 [Aller plus loin] Fonctions trigonométriques +

Utiliser GeoGebra pour explorer les représentations graphiques de fonctions réelles de la forme $f(x) = a \sin(b \cdot (x - c)) + d \cos(e \cdot (x - f))$ et $f(x) = a \sin(b \cdot (x - c)) \cos(e \cdot (x - f))$.

1 [Souvenirs] Angles et mesure d'un angle

Définitions

□ Un **angle** est une partie infinie du plan limitée par deux demi-droites $[BC$ et $[BA$ issues d'un même point B appelé sommet de l'angle (en fait, une telle situation définit deux angles !) ; on note $\widehat{ABC}$ si B est le sommet de l'angle.

□ La **mesure d'un angle** est un nombre réel positif qu'on associe à un angle. Il existe différentes unités de mesure : un angle est couramment mesuré en **degrés décimaux** (par exemple $28,5^\circ$) ou en **degrés-minutes-secondes** (par exemple $34^\circ 23' 41''$).

□ Pour le degré, on associe à l'angle plat la mesure 180° puis on en déduit proportionnellement la mesure des autres angles; ainsi un angle droit mesure 90° et un angle plein 360° . "Le degré, divisé en minutes et secondes qui sont des soixantièmes, vient des Babyloniens : ils comptaient en base 60 (sexagésimale). Les mathématiciens arabes ont poursuivi et mesuré les angles célestes et terrestres de la même manière. La mesure du temps de cette façon, directement issue des angles astronomiques, en a découlé." *En lire plus dans wikipedia : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Degr%C3%A9>*

□ Pour le grade, c'est le même principe avec une mesure de 200 [gr] pour l'angle plat. "Le grade est la conséquence du mètre, en ce sens que le mètre étant la 10 millionième partie du quart d'un méridien terrestre, en divisant la totalité de la circonférence (40 000 km) par 400 gr, il résulte que 1 km = 1/100 de grade et 1 mètre = 1/100 000 de grade. Les cartes Michelin ont utilisé le grade comme unité jusqu'aux années 2000, avec pour référence d'origine l'Observatoire de Paris (la référence d'origine des degrés restant Greenwich)." *En lire plus dans wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Grade_%28angle%29*

Exemple : convertir $\alpha = 38,413^\circ$ en degrés-minutes-secondes

$$\alpha = 38,413^\circ = 34^\circ + 0,413^\circ$$

$$\text{il faut convertir } 0,413 \text{ degrés en minutes : } \frac{0,413^\circ}{1^\circ} = \frac{x'}{60'} \Rightarrow x' = 0,413 \cdot 60 = 24,78'$$

$$\text{il faut convertir } 0,78' \text{ en secondes : } \frac{0,78'}{1'} = \frac{y''}{60''} \Rightarrow y'' = 0,78 \cdot 60 = 46,8'' \simeq 47''$$

$$\text{donc } \alpha \simeq 38^\circ 24' 47''$$

Remarque : on confond souvent les notions d'angle – un objet géométrique – et de mesure d'un angle – un nombre, pour lesquels on utilise la même notation !

2 [A savoir] Radian

□ Un **radian**, que l'on note $1[\text{rad}]$, est la mesure d'un angle qui, placé au centre d'un cercle, intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle.

□ La **mesure d'un angle** α **en radian** est le rapport entre la longueur L de l'arc intercepté et le rayon R lorsque cet angle est placé au centre du cercle : $\alpha[\text{rad}] = \frac{L}{R}$.

Théorème

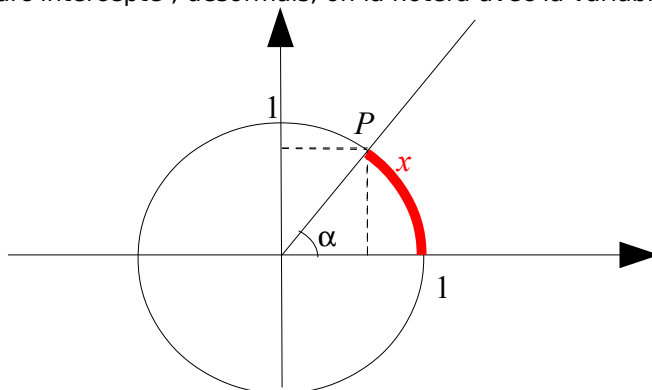
$$\text{Soit } \alpha \text{ un angle. Alors on a : } \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha[\text{rad}]}{2\pi[\text{rad}]}$$

Remarque : lorsqu'on calcule avec la calculatrice, attention de bien contrôler dans quelle unité se font les calculs (degré ou radian, parfois grade) !

Angle en radian dans le cercle trigonométrique

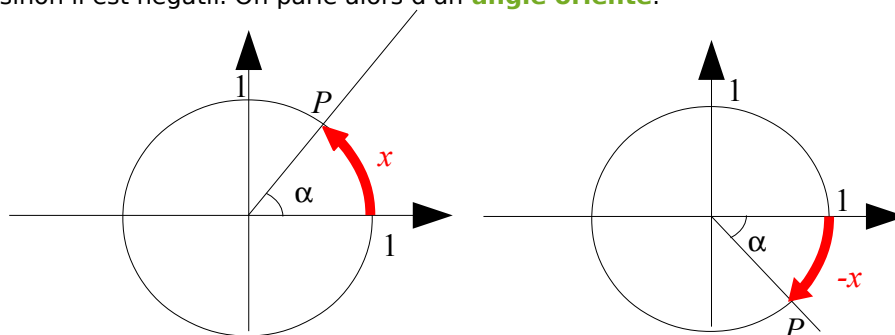
Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes de coordonnées, sur lequel on a défini un sens positif de rotation - le sens contraire des aiguilles d'une montre - appelé **sens trigonométrique**.

Comme le rayon vaut 1, la mesure en radians d'un angle α au centre de ce cercle est égale à la longueur de l'arc intercepté ; désormais, on la notera avec la variable x :

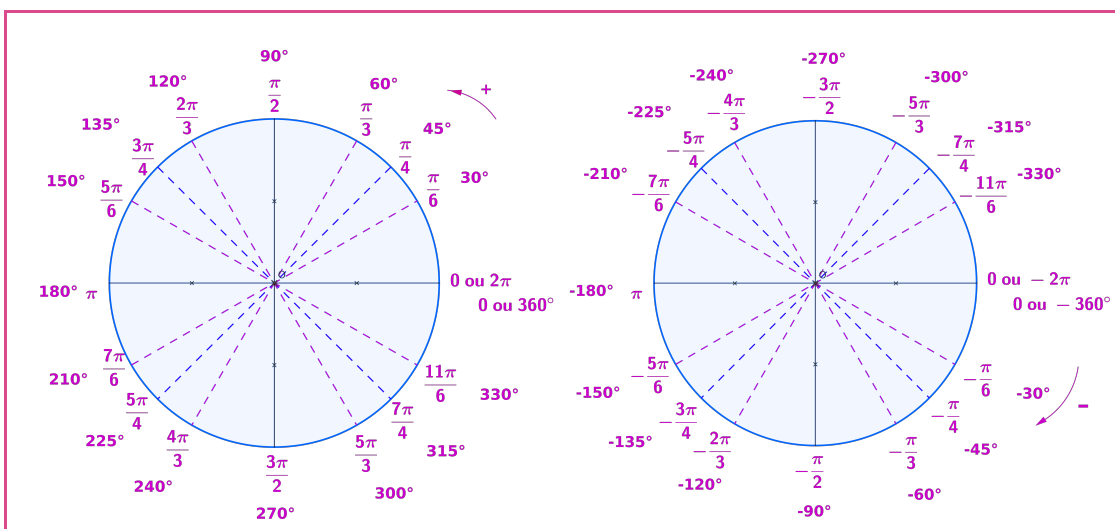


Angle orienté

Soit α un angle. On peut associer un signe à la mesure (en radians) selon « le sens dans lequel on tourne ». Si on respecte le sens trigonométrique, on considère que l'angle est positif ; sinon il est négatif. On parle alors d'un **angle orienté**.



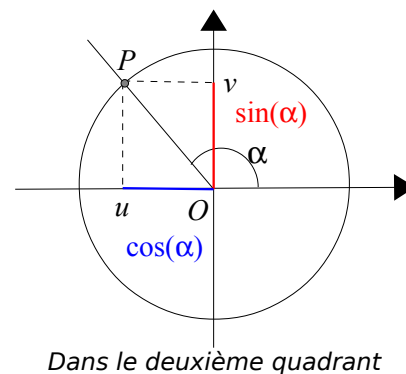
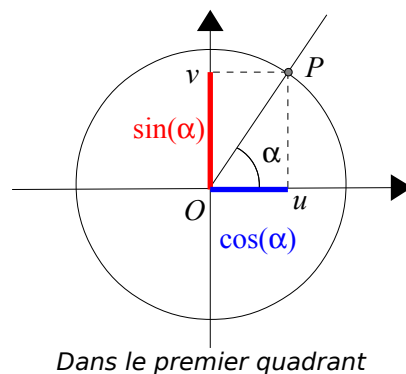
Relation entre mesure en degré et en radian



3 [A savoir] Sinus et cosinus d'un angle en radian

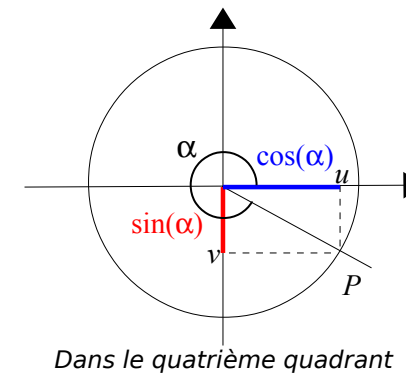
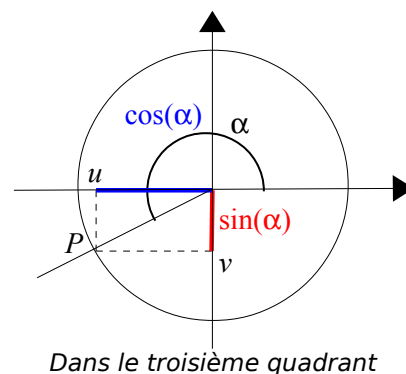
Rappel : définition du sinus et du cosinus pour un angle dans $]0^\circ; 180^\circ[$

Soit $\alpha \in]0^\circ; 180^\circ[$ mesuré en degrés. On représente cet angle au centre d'un cercle trigonométrique de telle sorte que l'une des demi-droites qui définit α soit le demi-axe positif des abscisses et l'autre une demi-droite d issue de O coupant le cercle trigonométrique dans le premier ou le deuxième quadrant. Soit $P(u;v)$ le point d'intersection de d avec le cercle trigonométrique ; on définit le sinus et le cosinus de α ainsi : $\sin(\alpha)=v$ et $\cos(\alpha)=u$



Définition du sinus et du cosinus pour un angle dans $[0^\circ; 360^\circ]$

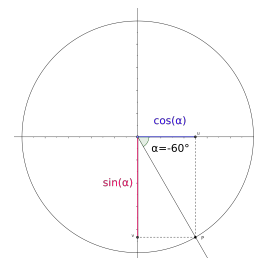
On peut étendre cette définition pour un angle α dans $[0^\circ; 360^\circ]$:



Définition du sinus et du cosinus pour un angle orienté dans $[-360^\circ; 360^\circ]$

On peut étendre cette définition pour un angle orienté α dans $[-360^\circ; 360^\circ]$:

- ☐ si α est positif, c'est ce que nous venons de voir
- ☐ si α est négatif, on « tourne » dans le sens trigonométrique inverse et on définit sin et cos de façon identique; par exemple si $\alpha = -60^\circ$:



Remarque : on a ainsi

$$\square \sin(0^\circ)=0, \cos(0^\circ)=1$$

$$\square \sin(90^\circ)=1, \cos(90^\circ)=0$$

$$\square \sin(180^\circ)=0, \cos(180^\circ)=-1$$

$$\square \sin(270^\circ)=-1, \cos(270^\circ)=0$$

$$\square \sin(360^\circ)=0, \cos(360^\circ)=1$$

$$\square \sin(-90^\circ)=-1, \cos(-90^\circ)=0$$

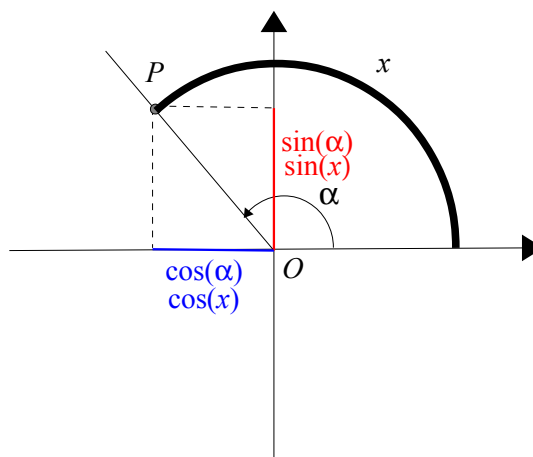
$$\square \sin(-180^\circ)=0, \cos(-180^\circ)=-1$$

$$\square \sin(-270^\circ)=1, \cos(-270^\circ)=0$$

$$\square \sin(-360^\circ)=0, \cos(-360^\circ)=1$$

Définition du sinus et du cosinus pour un angle en radians

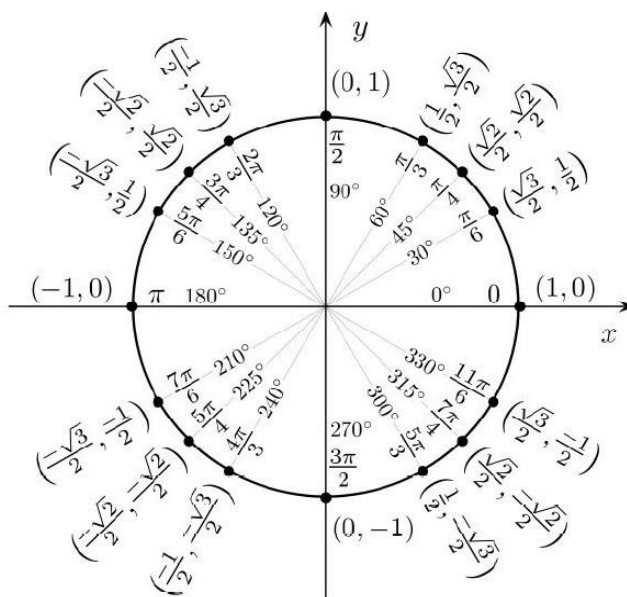
Plutôt que de considérer des mesures d'angles en degrés, on peut utiliser les radians ; rappelons qu'alors on peut « voir » la mesure en radians sur le cercle trigonométrique et qu'on la note x . Pour un angle α de mesure x en radians dans $[0; 2\pi[$, on obtient le sinus et le cosinus de α de façon tout-à-fait identique ; on notera indistinctement $\sin(\alpha)$ ou $\sin(x)$, $\cos(\alpha)$ ou $\cos(x)$. Par exemple dans le deuxième quadrant :



De même pour un angle orienté α dans $[-2\pi; 2\pi[$.

On écrit alors directement $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ pour dire : si α est de mesure $x=\frac{\pi}{2}$, alors $\sin(\alpha)=1$

Valeurs exactes du sinus et du cosinus

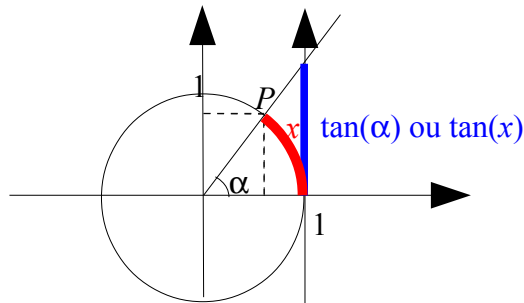


4 [A savoir] Tangente

Définition

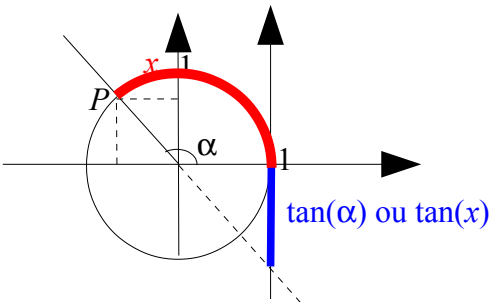
Soit α un angle de mesure x en radian. Alors la tangente de α , notée $\tan(\alpha)$ ou $\text{tg}(\alpha)$, est définie ainsi :

□ pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$:



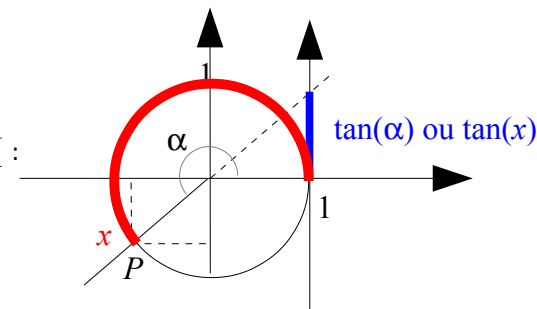
Remarque: quand x varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\tan(x)$ est positive et varie entre 0 et $+\infty$

□ pour $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi]$:



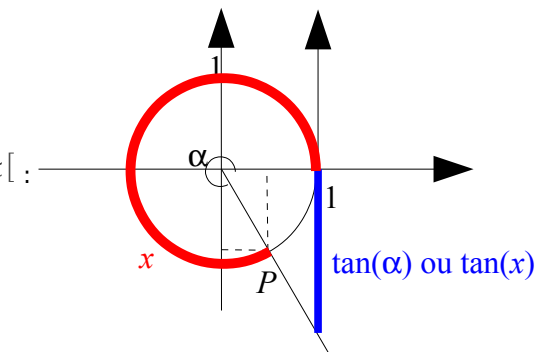
Remarque: quand x varie entre $\frac{\pi}{2}$ et π , $\tan(x)$ est négative et varie entre $-\infty$ et 0

□ pour $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}[$:



Remarque : quand x varie entre π et $\frac{3\pi}{2}$, $\tan(x)$ est positive et varie entre 0 et $+\infty$

□ pour $x \in]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$:



Remarque : quand x varie entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π , $\tan(x)$ est négative et varie entre $-\infty$ et 0

□ pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$, $\tan(x)$ n'est pas défini.

5 [A savoir] Sinus et cosinus d'un nombre réel quelconque

Jusque-là, nous avons considéré le sinus et le cosinus d'un angle, que sa mesure soit en degré ou en radian. Nous allons désormais nous intéresser à définir le sinus et le cosinus non plus d'un angle mais d'un nombre réel quelconque, en considérant des valeurs de x en dehors de l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. Pour cela, nous allons étendre – une fois de plus ! – l'idée du déplacement avec signe le long du cercle trigonométrique.

Définition du sinus, du cosinus et de la tangente pour un nombre réel x

Si x est positif ou nul : partant du point $(1;0)$, on se déplace le long du cercle dans le sens trigonométrique jusqu'à avoir parcouru la longueur x . On se situe alors en un point $P(u;v)$ du cercle. On définit : $\sin(x)=v$ et $\cos(x)=u$

Si x est négatif : partant du point $(1;0)$, on se déplace le long du cercle dans le sens trigonométrique inverse jusqu'à avoir parcouru la longueur x (ou plutôt $-x$!). On se situe alors en un point $P(u;v)$ du cercle. On définit : $\sin(x)=v$ et $\cos(x)=u$

Remarque : si $x > 2\pi$ (respectivement $x < -2\pi$), on effectue plus d'un tour complet sur le cercle dans le sens trigonométrique (respectivement dans le sens trigonométrique inverse).

6 [A savoir] Fonctions trigonométriques de base

Définition des fonctions sinus et cosinus

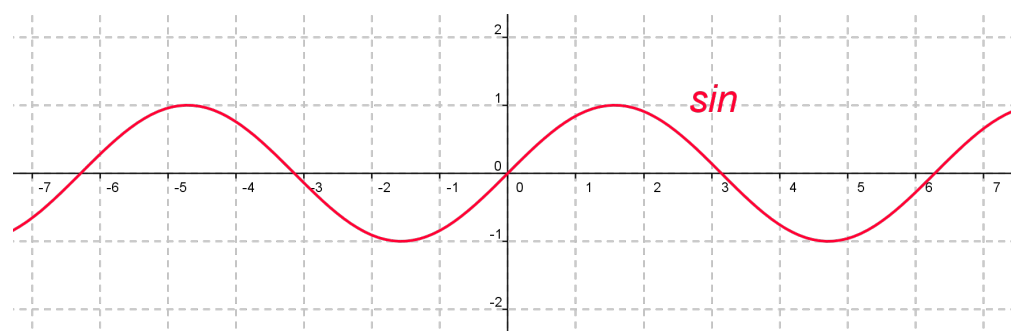
Soit x un nombre réel.

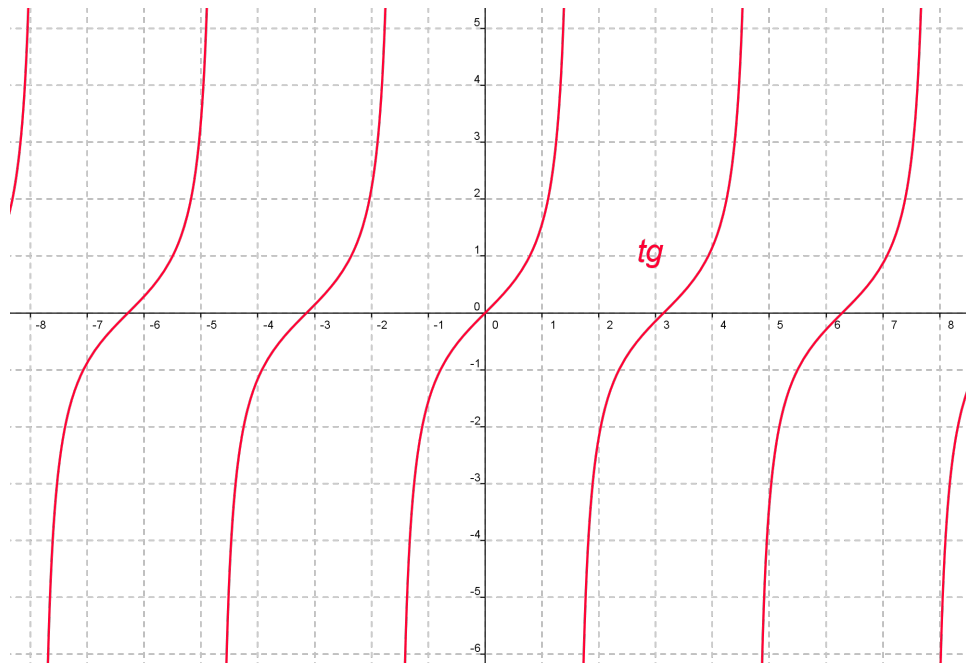
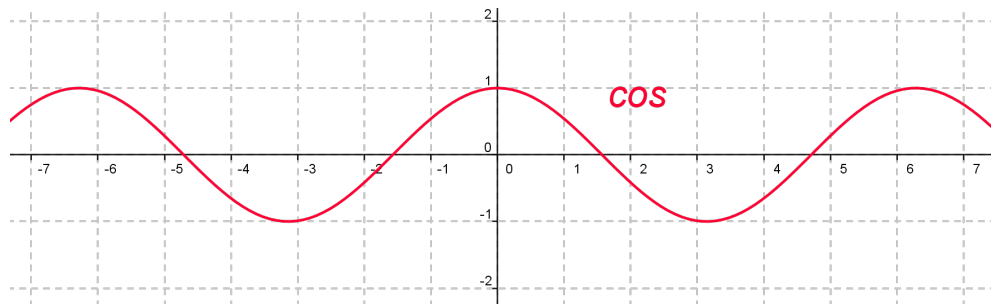
La fonction réelle **sinus** est définie par $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$

La fonction réelle **cosinus** est définie par $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos(x)$

La fonction réelle **tangente** est définie par $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \tan(x)$

Représentations graphique





Définition

Une fonction réelle f est périodique si il existe un nombre réel strictement positif P tel que $f(x+P)=f(x), \forall x \in D_f$. Le plus petit tel nombre P s'appelle la **période** de f .

Remarque : les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de période 2π , $\tan$ est de période π

Théorème

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Alors $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

7 [Aller plus loin] Cotangente

Définition

La cotangente d'un nombre réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, notée $\cotg(x)$, est définie par $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$



8 [A savoir] Propriétés

Théorème (Propriétés de sinus et cosinus)

- ☐ $-1 \leq \sin(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\cos(-x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\sin(\pi - x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\cos(\pi - x) = -\cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Théorème « Propriétés de la tangente »

$$\tan(-x) = -\tan(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

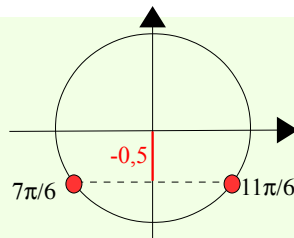
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Remarque: on peut « démontrer » ces propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.

9 [A savoir] Équations et inéquations trigonométriques

Exemple 1 : résoudre $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

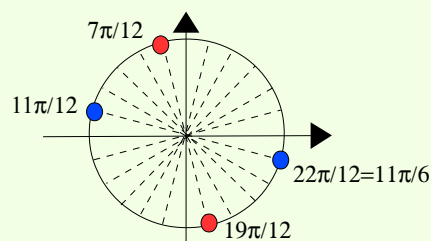
$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

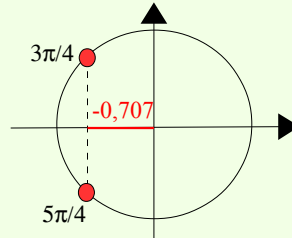
$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi; \frac{11\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Exemple 2 : résoudre $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

$$\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



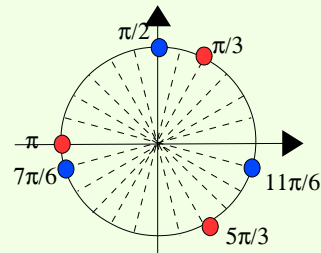
$$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{4\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{6\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{4\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{6\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

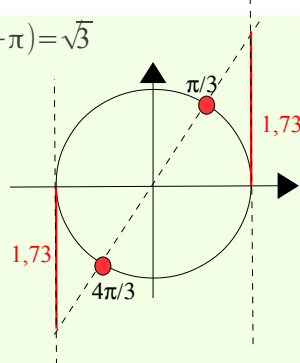
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Exemple 3 : résoudre $\tan(2x + \pi) = \sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

$$\tan(2x + \pi) = \sqrt{3}$$



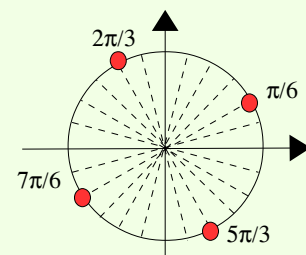
$$\Rightarrow 2x + \pi = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

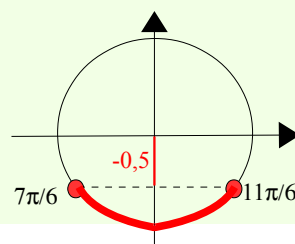


Exemple 4 : résoudre $\sin(x) \leq -\frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

$$\sin(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$$

$$S = \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$$



10 [A savoir] Autres fonctions trigonométriques

Soit f la fonction réelle déterminée par $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.

En partant d'une représentation graphique de la fonction $\sin$, on a :

- ☐ d agit par translation verticale
- ☐ c agit par translation horizontale : si $c < 0$, la translation s'effectue dans le sens opposé à l'orientation de l'axe, si $c > 0$, la translation s'effectue dans le sens de l'orientation de l'axe ; c s'appelle le **déphasage**
- ☐ a agit par étirement vertical ; si $a < 0$, la représentation graphique est « retournée » symétriquement à l'axe Ox ; $|a|$ s'appelle l'**amplitude**
- ☐ b agit par étirement/compression horizontal

11 [Aller plus loin] Déterminer algébriquement la période

Exemple : déterminer la période de la fonction f définie par $f(x) = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$

$$f(x) = f(x + P) \Leftrightarrow 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1 = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left((x + P) + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(3 \cdot \left((x + P) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \left((x + P) + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \text{ ou } \pi - 3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \left((x + P) + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow P = -\frac{2k\pi}{3} \text{ ou pas de solution car } P \text{ dépendrait de } x$$

le plus petit tel $P > 0$ est $P = \frac{2\pi}{3}$ qui est donc la période de f .

Remarque : La période d'une fonction du type $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ est donc $P = \frac{2\pi}{b}$.

12 [A savoir] Formules trigonométriques

Théorème «Formules de la somme »

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

1 Convertir les angles suivants en degrés, sans utiliser la calculatrice : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{18}$;

2π ; $\frac{5\pi}{3}$.

2 Convertir les angles suivants en degrés, en utilisant la calculatrice (réponses arrondies au dixième) : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{18}$; 1,25 ; 3,14 ; 4,456

3 Les angles suivants sont exprimés en degrés. Les convertir en radians :

a. Sans calculatrice : 45° ; 150° ; 210° ; 315° ; 240° ; 135°

b. Avec calculatrice (réponses arrondies au millième) : 120° ; 1° ; $31,25^\circ$; 222° ; $35^\circ 13'$; $321^\circ 27' 54''$

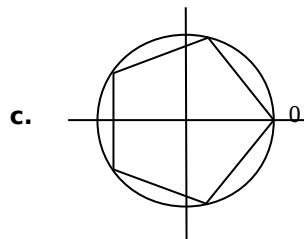
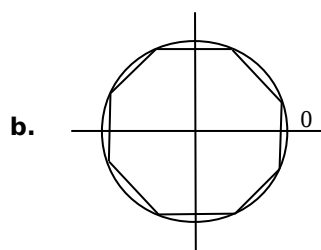
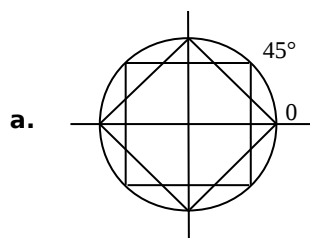
4 Calculer, à 1 mm près, le diamètre d'un cercle sur lequel :

a. un arc de 1° mesure 2 mm ;

b. un arc de $0,04^\circ$ mesure 0,03 mm.

5 Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $1,5^\circ$. Quelle est la distance qui sépare ces deux points sachant que le rayon moyen de la Terre est de 6370 km ?

6 Exprimer en degrés et en radians la mesure des angles représentés sur le cercle trigonométrique par les sommets des polygones réguliers suivants (angles compris dans le premier tour positif) :



7 Représenter les angles suivants sur un cercle trigonométrique :

a. $x + 180^\circ$ **c.** $x + 720^\circ$ **e.** $\pi - x$

b. $90^\circ - x$ **d.** $x + \frac{\pi}{2}$ **f.** $\frac{3\pi}{2} - x$

8 Représenter les angles suivants sur un cercle trigonométrique, ainsi que leur sinus et leur cosinus : $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; π .

9 Représenter les angles suivants, leur sinus et leur cosinus sur un cercle trigonométrique : $\frac{35\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{-5\pi}{6}$; 45π ; $-\frac{23\pi}{4}$.

10 Reprendre les angles des deux exercices précédents et représenter leur tangente sur un cercle trigonométrique.

11 Déterminer les valeurs exactes de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ pour :

a. $x = \frac{5\pi}{4}$ **c.** $x = -\frac{\pi}{3}$ **e.** $x = \frac{29\pi}{6}$

b. $x = \frac{5\pi}{2}$ **d.** $x = 5\pi$ **f.** $x = -\frac{7\pi}{3}$

12 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

a. $\sin(x) = 0$ **f.** $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -1$

b. $\sin(2x) = 0$ **g.** $2\cos(\frac{1}{4}x) = -\sqrt{2}$

c. $\sin^2(x) = 1$ **h.** $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1$

d. $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

e. $\cos(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **i.** $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$

13 Résoudre pour $x \in [0; 2\pi[$ en utilisant une calculatrice :

a. $\cos(x) = -0,51812$

b. $\sin(x) = -0,49712$

c. $\cos(x) = -1,24$

d. $\tan(x) = 138,245$

14 Résoudre pour $x \in [0; 2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique:

a. $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c. $\cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin(x) < \frac{1}{2}$ d. $-2\cos(x) \leq \sqrt{3}$

15 Répondre en valeurs exactes :

a. $\sin(x) = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\cos(x) = ?$

b. $\tan(x) = 10$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\sin(x) = ?$

16 On considère les fonctions réelles suivantes déterminées par leurs images :

a. $f(x) = -2\sin(3x)$

b. $f(x) = 3\sin(\frac{x}{2})$

c. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

d. $f(x) = 2\cos(\frac{3x}{4})$

e. $f(x) = -2\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$

f. $f(x) = -\tan(2x + \frac{\pi}{4})$

Déterminer :

- Le domaine de définition
- Quelques images
- L'ensemble des zéros

- La valeur maximale et minimale prise par la fonction (si possible)
- La période
- Un tableau de signes
- Une représentation graphique

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

17 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique:

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ e. $\sin(x) = \frac{\pi}{2}$

b. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ f. $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\sin(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$ g. $\cos(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$

d. $3\tan(x) = -\sqrt{3}$ h. $\tan(\frac{3x - \pi}{6}) = 1$

i. $\cos(6x + \pi) = 0$

18 Résoudre pour $x \in [0; 2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique:

a. $\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\tan(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ d. $-2\sin(x) > \sqrt{2}$

19 A Boston, le nombre d'heures de lumière du jour $D(t)$ à une certaine époque de l'année peut être modélisé par :

$$D(t) = 3\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

avec t en jours et $t=0$ correspondant au 1er janvier.

Combien de jours par année y a-t-il plus de 10,5 heures de lumière du jour ?

20 Déterminer l'amplitude, la période et le déphasage des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 5\cos(3x)$

b. $f(x) = 2\sin\left(\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

c. $f(x) = \sin\left(\frac{x + \pi}{3}\right)$

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

17

a. $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

b. $S = \left\{ \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$

c. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 6k\pi; \frac{5\pi}{2} + 6k\pi \right\}$

d. $S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$

e. $S = \emptyset$ car $\frac{\pi}{2} > 1$

f. $S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{5\pi}{8} + k\pi \right\}$

g. $S = \left\{ \frac{11\pi}{8} + 3k\pi; \frac{19\pi}{8} + 3k\pi \right\}$

h. $S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

i. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \right\}$

18

a. $S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$

b. $S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$

c. $S = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6} \right]$

d. $S = \left[\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right]$

19 entre $t = 49$ et $t = 292$, soit pendant 234 jours de l'année

20

a. amplitude : 5

période : $\frac{2\pi}{3}$

déphasage : 0

b. amplitude : 2

période : $\frac{4\pi}{3}$

déphasage : $-\frac{\pi}{2}$

c. amplitude : 1

période : 6π

déphasage : $-\pi$

Exercices d'approfondissement

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis représenter les solutions contenues dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

- a. $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$
- b. $2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)$
- c. $\sin(2x) = 2\sin(x)$
- d. $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
- e. $\cos^2(x) + 2\sin^2(x) = 2$
- f. $2(\sin^2(x) + \sin(x)) = \cos^2(x)$
- g. $2\cos^2(x) - \sin^2(x) + 4\cos(x) = 3$
- h. $\sin^2(x) + \sin(x) = \cos^2(x)$

2 Réciproques des fonctions trigonométriques :

la fonction $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ est
 $x \rightarrow \cos(x)$
 bijective et admet une réciproque $\cos^{-1}$
 appelée **arccosinus**, définie par :

$$\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], \\ x \rightarrow \arccos(x),$$

$$\text{avec } \cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x ;$$

la fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ est
 $x \rightarrow \sin(x)$

bijective et admet une réciproque $\sin^{-1}$
 appelée **arcsinus**, définie par :

$$\arcsin : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ x \rightarrow \arcsin(x),$$

$$\text{avec } \sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x ;$$

la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective
 $x \rightarrow \tan(x)$
 et admet une réciproque $\tan^{-1}$ appelée
arctangente, définie par :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x \rightarrow \arctan(x),$$

$$\text{avec } \tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x$$

3 A partir de plusieurs années de relevés météorologiques, on a établi une fonction donnant la température moyenne T , en degrés, observée à Fairbanks, en Alaska, en fonction du jour t de l'année :

$$T(t) = 10 \left(2 \sin \left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 101) \right) - 1 \right),$$

où $t=0$ correspond au 1er janvier.

a. Représenter graphiquement la fonction $T(t)$ pour $t \in [0; 365]$

b. Quel est, en moyenne, le jour le plus froid de l'année à Fairbanks ?

4 Trouver dans chacun des cas suivants une fonction du type $f(t) = A \sin(\omega t + \phi) + d$ qui représente la variation de la température durant le jour, t étant le temps en heures, $f(t)$ la température en $^{\circ}\text{C}$ et $t = 0$ correspondant à minuit :

a. La température maximale est de 10°C , et la température minimale de -10°C est atteinte à 4 heures du matin.

b. La température varie entre 10°C et 3°C , et la température moyenne de 20°C est observée la première fois à 9 heures du matin.

c. La température maximale de 28°C est atteinte à 2 heures de l'après-midi, et la température moyenne de 20°C est notée 6 heures plus tard.

5 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

Soit x , α , β et t des nombres réels quelconques :

a. Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

b. Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(y)} = \tan^2(x) - \tan^2(y)$$

c. $(\cos(x) - \sin(x))^2 = 2 - (\cos(x) + \sin(x))^2$

d. Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan(x) + \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

« En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux »

Eric T. Bell, mathématicien écossais (1883-1960)

Savoirs

- ✓ mesure d'angle en degré, en radians ;
- ✓ sin, cos et tg d'un angle entre 0° et 360° dans le cercle trigonométrique ;
- ✓ angle orienté ; sin, cos et tg d'un angle entre 0° et -360° dans le cercle trigonométrique ;
- ✓ sin, cos et tg d'un angle en radians entre -2π et 2π dans le cercle trigonométrique ;
- ✓ sin, cos et tg d'un nombre réel quelconque ;
- ✓ propriétés de sin, cos et tg (symétries dans le cercle) ;
- ✓ valeurs exactes lorsque cela est possible, utilisation correcte de la calculatrice sinon ;
- ✓ les fonctions sin, cos et tg ;
- ✓ équations trigonométriques - inéquations trigonométriques ;
- ✓ fonctions trigonométriques: amplitude, fréquence, période, ... ;
- ✓
- ✓

Savoir-faire

- ✓ transformer un angle donné en degré en radian, et vice-versa; à la main et avec la calculatrice ;
- ✓ représenter sur le cercle trigonométrique x et sin(x), cos(x) et tg(x):
 - ✓ pour x un angle entre -360° et 360° ou entre -2π et 2π ;
 - ✓ pour x un nombre réel quelconque ;
- ✓ représenter graphiquement les fonctions sin, cos et tg et interpréter leurs principaux paramètres (période, amplitude, ...) ;
- ✓ résoudre des équations trigonométriques dans $\mathbb{R}$ et représenter graphiquement les solutions dans $[0; 2\pi[$ sur un cercle trigonométrique ;
- ✓ résoudre des inéquations trigonométriques dans $[0; 2\pi[$ et représenter graphiquement les solutions sur un cercle trigonométrique ;
- ✓