

Françoise VAN DIEREN
Pierre SARTIAUX

Caféd

MATHS 3^e

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 1 \\ \overline{OB} &= 1,25 \\ \overline{OC} &= 1,25^2 \\ \vdots \\ \overline{OF} &= 1,25^5 \\ \overline{OG} &= 1,25^6 \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OB}} = \frac{1,25^6}{1,25}$$
$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{1,25^5}{1}$$

$$\overline{AB} = 1,36$$
$$\overline{FG} = ?$$

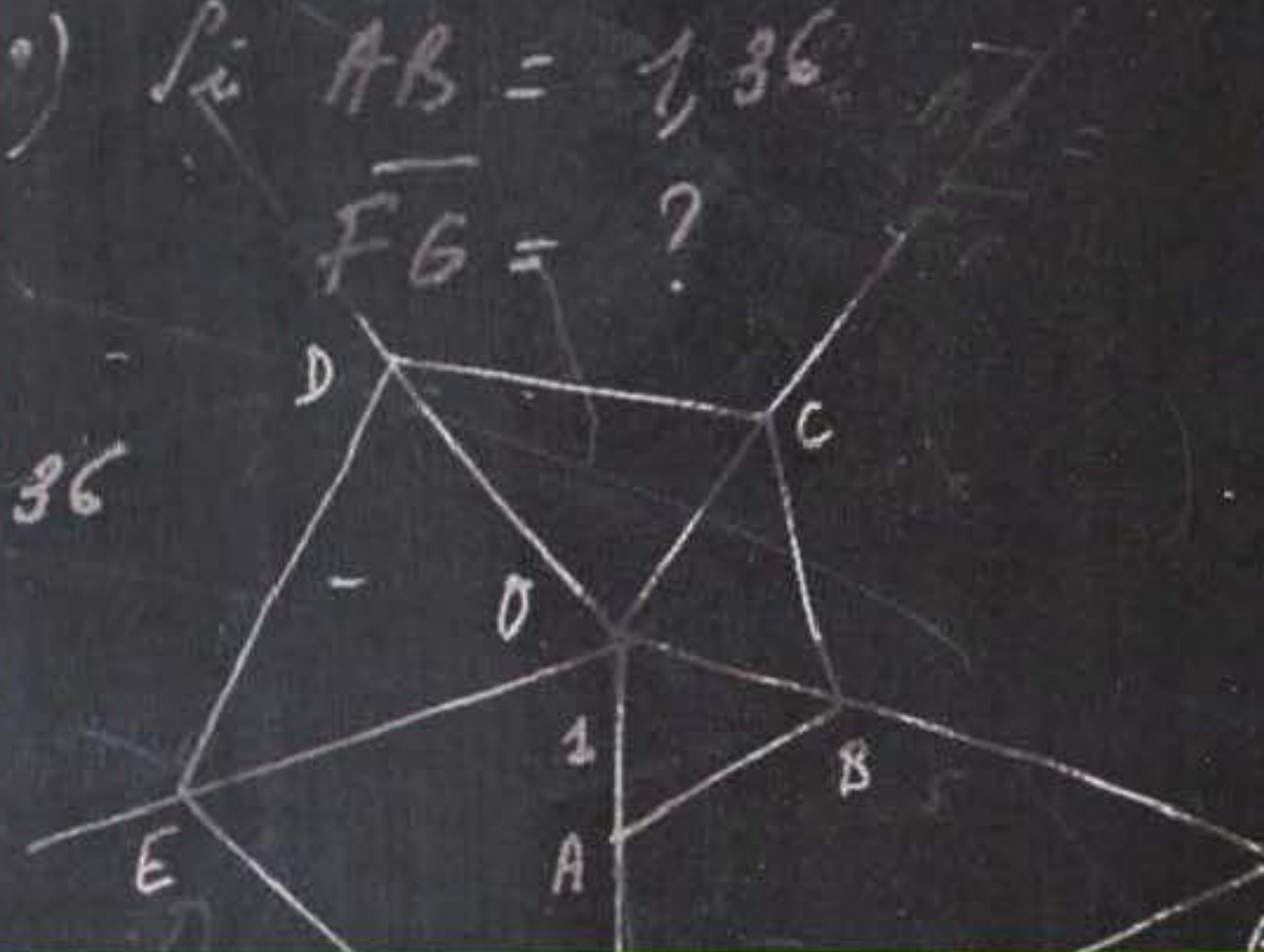
$$1,25^5$$
$$1,25^5$$

et $FG \parallel AB$

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 1 \\ \overline{OB} &= 1,25 \\ \overline{OC} &= 1,25^2 \end{aligned}$$

Si $\overline{AB} = 1,36$
 $\overline{FG} = ?$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 1,36 \\ \overline{FG} &= ? \end{aligned}$$



MANUEL

Confid
MATHS 3^e



MANUEL



de boeck

Pour toute information sur notre fonds, consultez notre site web : www.deboeck.com

Couverture : Primo & Primo

Mise en pages : Softwin

Crédits photographiques : © Cassini Imaging Team, SSI, JPL, ESA, NASA (p. 1 ht d), © ESA (Image by C. Carreau) (p. 1 bas), © CERN (p. 11 ht), © Claude Henri Bernardot/Athom (p. 13), © Collection Dagli Orti / Alfredo Dagli Orti (p. 99), © Alex Ibh – Educot.net (p. 146), © LIDL, brochure 07/2009, p. 18 (p. 148 ht), © LIDL, brochure 07/2009, p. 19 (p. 148 bas), © Roger-Viollet (p. 168) ; © Fotolia : DerSchmock (p. 1 ht g), Nali (p. 10), DX (p. 11 bas), Ronald Hudson (p. 12), Berdoulat Jérôme (p. 32), Johann2000 (p. 43), Guillaume Besnard (p. 44), Milosluz (p. 46), Lagui (p. 47), Danielle Bonardelle (p. 63), Michael Flippo (p. 64), Ken Mellott (p. 65), Onidji (p. 66), Stefan Helander (p. 80), Drx (p. 81), Nathalie P (p. 82 ht), Stephane Bonnel (p. 83), Fuxart (p. 86), Andrea Seemann (p. 93 ht), Beth Miller (p. 93 bas), Urbanhearts (p. 95), Thierry Planche (p. 98), Cyrano (p. 110 m), Fauxware (p. 110 bas), Tyler Olson (p. 130), Mi.Ti. (p. 134 ht), Arkna (p. 134 ht), Sergey (p. 136), Rachid Amrous-Spleen (p. 150), Nathalie P (p. 154), VtIs (p. 169), Telliac (p. 171 ht), Lilufoto (p. 171 bas), Danimages (p. 172 ht), NfrPictures (p. 172 bas), SL-66 (p. 176), Ataly (p. 181 ht), Greg Pickens (p. 181 m), Maxim Vechnoved (p. 181 bas), Pat31 (p. 182), Fungus (p. 183), Razorconcept (p. 184).

© De Boeck Éducation s.a., 2010
Rue des Minimes, 39, B-1000 Bruxelles

2^e tirage 2013

Même si la loi autorise, moyennant le paiement de redevances (via la société Reprobel, créée à cet effet), la photocopie de courts extraits dans certains contextes bien déterminés, **il reste totalement interdit de reproduire**, sous quelque forme que ce soit, en tout ou en partie, **le présent ouvrage**. (Loi du 30 juin 1994 relative au droit d'auteur et aux droits voisins, modifiée par la loi du 3 avril 1995, parue au Moniteur du 27 juillet 1994 et mise à jour au 30 août 2000.)

La reprographie sauvage cause un préjudice grave aux auteurs et aux éditeurs.

Le « photocopillage » tue le livre !

Imprimé en Belgique

Dépôt légal 2010/0074/217

ISBN 978-2-8041-2412-0

avant-propos

Chaque fois que l'on arrive au bout d'une démonstration, on écrit : CQFD (« Ce Qu'il Fallait Démontrer ») !

Faire des mathématiques, c'est s'appuyer sur des arguments pour **Démontrer**, mais c'est aussi **Découvrir, Démonter, Démystifier**. Au fil des pages de la collection « CQFD », selon les contenus et les contextes, ces compétences alternent, se complètent...

Les onze chapitres du manuel *CQFD 3^e* couvrent l'ensemble des programmes des deux réseaux. Ils sont regroupés en deux parties : nombres et algèbre d'une part, géométrie de l'autre. Il revient à l'enseignant de construire un plan de matières qui équilibre ces deux aspects tout au long de l'année.

Dans chaque partie, les matières s'enchaînent dans une construction progressive. Prudence donc si l'on modifie l'ordre des chapitres à l'intérieur d'une même partie.

Sous la rubrique « Tâches d'intégration », les programmes du Segec pointent quelques problématiques qui se situent dans le prolongement des contenus. Dans le manuel, la plupart de ces tâches figurent sous la rubrique « Pour aller plus loin ». Néanmoins, lorsqu'elles relèvent de savoirs et savoir-faire particuliers, ces tâches sont préparées dans l'exploration et la synthèse.

Tâches d'intégration dans le programme Fesec	Dans le manuel et les fiches <i>CQFD 3^e</i>	
1. Calculs liés à la vie sociale et économique.	Chapitre 3 Équations	Explorations 6 et 7 Synthèses 6 et 7 Exercices 19 à 23
2. Compléments sur les angles.	Chapitre 7 Angles et triangles isométriques	Explorations 2 à 4 Synthèses 2 à 4 Exercices 1, 2, 3, 12, 16, 23 à 26.
3. Problèmes de géométrie analytique.	Chapitre 4 Fonctions du premier degré	Exercice 11 Fiche 18 exercice 1
	Chapitre 5 Systèmes d'équations	Exercice 28
4. Relations métriques et propriétés de figures.	Chapitre 10 Figures semblables	Exploration 5 Synthèses 5 à 7 Exercices 16 à 18 Fiche 41 exercices 1 et 2
5. Approximer un nuage de points.	Chapitre 4 Fonctions du premier degré	Exploration 8 Synthèse 7 Exercices 20 et 21

Les matières couvertes par ces « tâches » figurent dans les programmes de la Communauté française, dans certains cas de manière explicite ; dans d'autres, elles relèvent des « compétences transversales » mentionnées dans les programmes et les référentiels interréseaux.

Dans chaque chapitre, un même parcours – introduction, exploration, synthèse, exercices et problèmes – structure les apprentissages. Des fiches de travail personnel et des fiches autocorrectives facilitent la régularité et le suivi du travail des élèves. Elles peuvent être utilisées comme travaux à domicile, exercices individuels, évaluations formatives, préparations. Le va-et-vient qu'il faut ménager entre les différentes parties du manuel et les fiches est indiqué dans l'exploration.

Nous tenons à remercier Giuseppe Bianchi pour sa participation à quelques discussions et pour ses relectures. Son expérience pédagogique nous a été fort précieuse.

Les auteurs

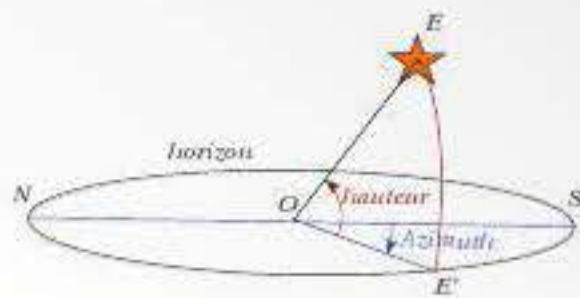
comment s'y prendre ?

L'ouvrage est structuré en 11 chapitres qui proposent, chacun, un déroulement identique.

Nous avons vu que la relation de Pythagore dans le triangle rectangle permet de calculer la longueur d'un côté en fonction des autres. Avec la trigonométrie, on articule mesures d'angles et mesures de longueurs.

Le mot trigonométrie vient du grec *trigone* (« triangle ») et *metria* (« mesure »). Dans l'*Encyclopédie* (1751), d'Alembert définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ». C'est la démarche qui sera suivie dans ce chapitre.

À l'issue de ce chapitre, chacun sera à même de résoudre quelques problèmes proches de ceux qui se posent dans la réalité.



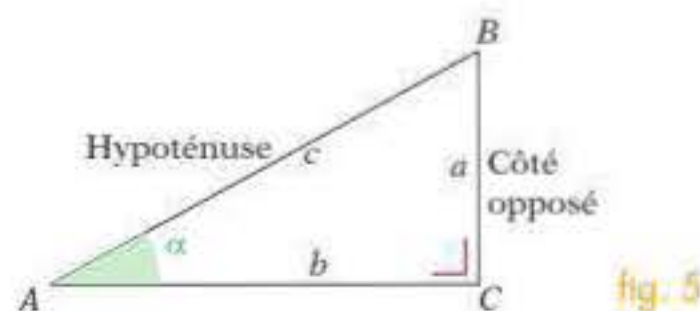
Lis attentivement l'introduction pour situer ce que l'on va apprendre.

exploration

2. Le sinus

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus d'un angle aigu le rapport entre le côté opposé à cet angle et l'hypoténuse : $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ (fig. 5).

- a. Construire un triangle équilatéral, tracer sa hauteur et se servir de cette figure pour calculer $\sin 60^\circ$. Construire ensuite un triangle rectangle isocèle et se servir de cette figure pour calculer $\sin 45^\circ$.



- b. Utiliser une calculatrice pour calculer la hauteur d'un escalier d'embarquement sachant qu'il mesure 580 cm et que son inclinaison par rapport au sol est de 32° .

En classe, avec le professeur et les autres élèves, tu découvres les nouvelles notions.

synthèse

6. Comment reconnaître un système indéterminé ?

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 4x + 10y = 12 \end{cases}$$

Après les calculs habituels, on obtient l'égalité

$$0y = 0.$$

Quelle que soit la valeur que l'on donne à y , cette égalité sera vraie. Elle revient à **zéro égale zéro**. Il y a donc une infinité de solutions.

On dit aussi que **le système est indéterminé**. Les droites qui représentent ces équations sont confondues.

En observant les données, on constate que les rapports entre les coefficients des inconnues et des

termes indépendants sont égaux $\left(\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}\right)$

Énoncé 5.2

On peut prévoir qu'un système dont les équations sont réduites est indéterminé en examinant les coefficients des inconnues et des termes indépendants respectifs. S'ils sont proportionnels, alors le système est indéterminé et les deux équations sont représentées par la même droite.

Étudie les questions de la synthèse pour pouvoir te débrouiller seul dans d'autres situations.

exercices

Expliciter les savoirs et les procédures

5. Clôture

Les poteaux d'une clôture sont distants de 3 m. La clôture délimite deux prés, elle n'est pas fermée et doit avoir minimum 58 m de long.

- Faire un schéma pour une clôture qui comporte 6 poteaux et comparer le nombre de poteaux au nombre d'intervalles.
- Si p est le nombre de poteaux, quelle est l'inéquation qui correspond à la situation ?
 - $3(p + 1) \leq 58$
 - $3(p - 1) \leq 58$
 - $3(p + 1) \geq 58$
 - $3(p - 1) \geq 58$
- Résoudre cette inéquation pour trouver le nombre minimum de poteaux qu'il faut prévoir.



Les exercices *Expliciter les savoirs et les procédures* permettent de fixer l'essentiel et d'appliquer directement ce que tu as étudié.

exercices

Appliquer une procédure

5. D'une similitude à l'autre

Les triangles T_1, T_2, T_3, T_4 sont semblables.

Voici les mesures de certains côtés des triangles de la fig. 25.

$$\begin{array}{lll} \overline{a_1} = 10 & \overline{b_1} = \dots & \overline{c_1} = \dots \\ \overline{a_2} = 12,5 & \overline{b_2} = 26,25 & \overline{c_2} = \dots \\ \overline{a_3} = \dots & \overline{b_3} = 32,8125 & \overline{c_3} = 25,78125 \\ \overline{a_4} = \dots & \overline{b_4} = \dots & \overline{c_4} = 32,2265625 \end{array}$$

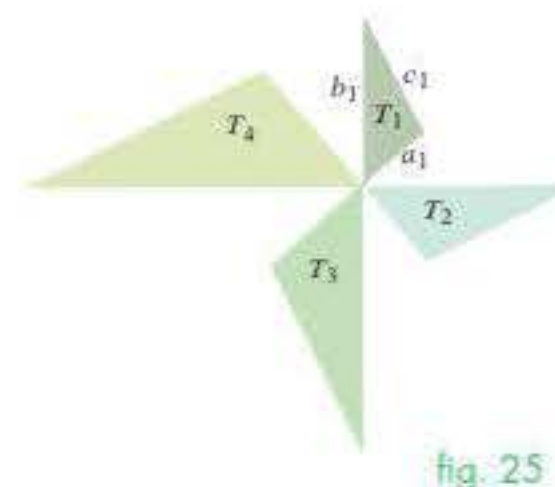


fig. 25

- Calculer les mesures des autres côtés.
- Si cela est possible avec les données fournies, calculer le rapport $\frac{\text{aire } T_3}{\text{aire } T_1}$.

Avec les exercices *Appliquer une procédure*, tu acquiers un « **savoir faire** » qui s'appuie sur les énoncés et les méthodes découverts.

exercices

Résoudre un problème

16. Le cric

La fig. 27 montre un cric qui sert à soulever une voiture. Lorsque qu'on tourne la manivelle, les points O et S se rapprochent et le point P s'élève. Chacune des quatre barres $[PO], [OR], [RS], [SP]$ mesure 25 cm.

- Calculer la hauteur de P au-dessus de R quand O et S sont distants de 40 cm.
- Quelle est la distance entre O et S quand P est 20 cm au-dessus de R ?

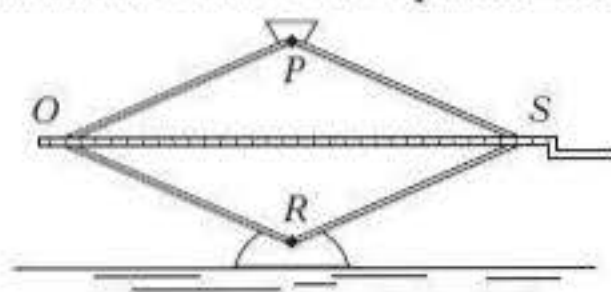


fig. 27



Les problèmes proposés mobilisent les concepts dans des situations variées.

exercices

Pour aller plus loin

25. Valeur nutritive

L'énergie fournie par 5 g de glucides et 10 g de lipides produit 110 kcal. L'énergie fournie par 10 g de glucides et 5 g de lipides produit 85 kcal.

- Quelle est l'énergie (en kcal) produite par 1 g de glucides ? Par 1 g de lipides ?
- Sachant que 1 g de protéines apporte 4 kcal, vérifier sur le tableau ci-contre que 100 g du produit sec fournit une énergie de 336 kcal (les fibres et le sodium n'apportent aucune calorie supplémentaire).

Valeur nutritionnelles	Par 100 g de produit sec		Par portion	
	100 g	30 g	30 g	100 g
Energie	336 kcal (1394 kJ)	100 kcal (418 kJ)	100 kcal (418 kJ)	336 kcal (1394 kJ)
Protéines/Eau	8,3 g	2,5 g	2,5 g	8,3 g
Glucides	51,7 g	15,5 g	15,5 g	51,7 g
Lipides	10 g	3 g	3 g	10 g
Fibres	4,8 g	1,4 g	1,4 g	4,8 g
Sodium	112 mg	34 mg	34 mg	112 mg

Avec les exercices *Pour aller plus loin*, tu peux t'aventurer dans des questions plus difficiles.

Sommaire

1. Puissances à exposants entiers	1
2. Polynômes	13
3. Équations, fractions algébriques et transformations de formules	29
4. Fonctions du premier degré	47
5. Systèmes d'équations	67
6. Inéquations	85
7. Angles et triangles isométriques	99
8. Pythagore et les radicaux	115
9. Projection parallèle et configurations de Thalès	135
10. Figures semblables	151
11. Trigonométrie du triangle rectangle	169

1 puissances à exposants entiers

En physique, lorsque l'on manipule des grandeurs inaccessibles, on utilise des **ordres de grandeur**. C'est le cas des distances aux planètes, aux étoiles et aux galaxies. Quand on situe ces distances dans l'échelle des « puissances de dix » (en mètres), on a une première idée des écarts et on se rend compte que, contrairement aux apparences, les objets célestes ne sont pas sur une sphère !



L'ordre de grandeur de la distance Terre-Lune est de 10^8 m.



L'ordre de grandeur de la distance Terre-Saturne est de 10^{12} m.



L'ordre de grandeur de la distance de la Terre au Trou noir qui se trouve au centre de la Galaxie est de 10^{20} m.

Dans ce chapitre, nous apprendrons à calculer (le plus souvent avec une calculatrice scientifique) des mesures de grandeurs « inimaginables », qu'elles soient très grandes (les exposants sont positifs) ou très petites (les exposants sont négatifs). Nous verrons ensuite comment utiliser des exposants entiers dans le cadre du calcul algébrique.

1. Puissances positives de 10

a. Faire les calculs ci-contre avec une calculatrice scientifique.

b. Qu'affiche la calculatrice pour

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 ?$$

c. Écrire ce nombre sous forme d'une puissance de 10.

d. Prévoir ce que la calculatrice affichera pour le calcul $10^{10} \times 100$.

e. Les astronomes estiment que notre Univers observable contient 10^{11} galaxies. Une galaxie moyenne comme la nôtre est composée d'environ 10^{11} étoiles.

Notre Soleil est une étoile de taille moyenne et sa masse est de l'ordre de 10^{33} grammes. De plus, nous savons que la majorité de cette masse est constituée d'atomes d'hydrogène. Or, dans un gramme d'hydrogène, il y a environ 10^{24} atomes.

Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'atomes dans notre univers¹ ?

10×10
 $10 \times 10 \times 10$
 $10 \times 10 \times 10 \times 10$
 $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
.....

2. Puissances négatives de 10

a. Faire les calculs ci-contre avec une calculatrice.

b. Qu'affiche la calculatrice pour

$$10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 ?$$

c. Écrire ce nombre sous forme d'une puissance de 10.

d. La masse d'un atome d'hydrogène est

$$0,00000000000000000000000027 \text{ grammes.}$$

Introduire ce nombre dans la calculatrice et interpréter ce qu'affiche l'écran.

e. Calculer la masse de 5×10^8 atomes d'hydrogène. Noter ce nombre en écriture décimale.

$10 : 10$
 $10 : 10 : 10$
 $10 : 10 : 10 : 10$
 $10 : 10 : 10 : 10 : 10$
.....

3. Notation scientifique

La vitesse de la lumière est d'environ 300 000 km/s. En notation scientifique, on écrit cette vitesse sous la forme 3×10^5 km/s.

a. Calculer la distance parcourue par la lumière en une heure et écrire le résultat en notation scientifique.

b. En un an, la lumière parcourt à peu près $9,46 \times 10^{12}$ km. Noter cette distance en écriture décimale.

¹ En physique, pour déterminer l'ordre de grandeur d'une dimension, on utilise sa notation scientifique et on retient comme ordre de grandeur la puissance de 10 supérieure lorsque la mesure est supérieure ou égale à $5 \cdot 10^n$, sinon on garde la même puissance de 10.

4. Exposants entiers

- a. Partir du tableau des puissances de trois ci-dessous. Observer que l'on passe d'une colonne à la précédente en divisant par 3 puis prolonger le tableau vers la gauche.
- b. Compléter le tableau pour les puissances de (-2) et de $\frac{2}{3}$.

Exposant	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Puissance de 3				$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$	$\frac{3}{3} = 1 = 3^0$	3	9	27
Puissance de (-2)									
Puissance de $\frac{2}{3}$									

- c. Utiliser ce tableau pour calculer

$(-2)^3 \times (-2)$	$(-2)^{-3} \times (-2)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$
$(-2)^3 \times (-2^2)$	$(-2)^{-3} \times (-2^2)^5$		

- d. Réduire les expressions suivantes

$a^3 \cdot a$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$	$(-a) \cdot (-a^{-3})$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$
$a^{-2} \cdot a$		$a^{-1} \cdot a^{-5}$	

- e. Écrire le résultat sous forme d'une seule puissance de a

$\frac{a^{-5}}{a}$	$\frac{a^{-5}}{a^2}$	$\frac{a^{-5}}{a^3}$	$\frac{a^{-5}}{a^4}$	$\frac{a^{-5}}{a^5}$	$\frac{a^{-4}}{a}$	$\frac{a^{-4}}{a^2}$	$\frac{a^{-4}}{a^3}$
--------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	--------------------	----------------------	----------------------

1. Comment écrire un nombre sous la forme d'une somme de produits par une puissance de 10 ?

Exemples

$$1\ 111,111 = 1000 + 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$= 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3}$$

$$7\ 654,321 = 7000 + 600 + 50 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$= 7 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$$

10^6

Lire « dix puissance six ».

10^6 , c'est un 1 suivi de six 0, soit 1 000 000.

Pour multiplier 1,0 par 10^6 , on déplace la virgule de six rangs vers la droite :

$$1,0 \times 10^6 = 1\ 000\ 000$$

10^{-6}

Lire « dix puissance moins six ».

10^{-6} , c'est 1 divisé par 10^6 , soit $\frac{1}{1\ 000\ 000}$.

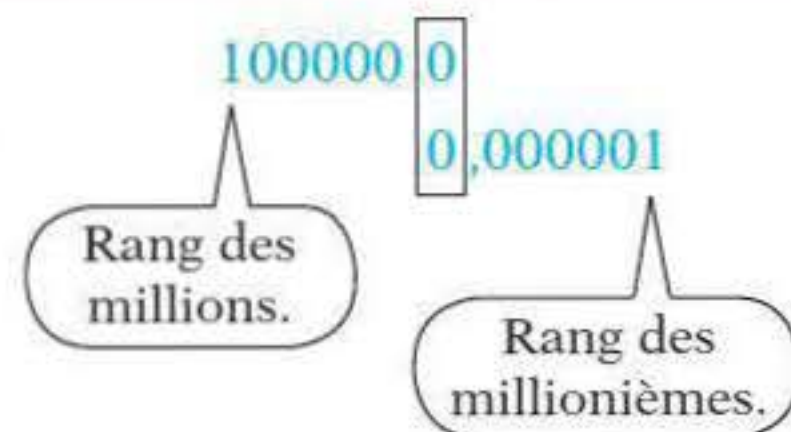
Pour multiplier 1,0 par 10^{-6} , on déplace la virgule de six rangs vers la gauche :

$$1,0 \times 10^{-6} = 0,000001$$

Les écritures décimales de 10^6 et de 10^{-6} sont symétriques par rapport à leur chiffre des unités (et non pas par rapport à la virgule).

On retiendra que :

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$



Si n est **positif**, l'expression 10^n est une façon d'écrire le nombre 1 **suivi** de n zéros.

Si n est **négalif**, l'expression 10^n est une façon d'écrire le nombre 1 **précédé** de n zéros, y compris le chiffre des unités (qui est 0).

2. Comment interpréter la notation scientifique ?

La notation scientifique permet de voir facilement l'ordre de grandeur d'un nombre. Elle est utilisée pour de « grands nombres » (ceux qui s'écrivent avec de nombreux zéros) et pour des nombres proches de 0 (ceux qui comportent de nombreux zéros après la virgule).

Exemples

$$3,6 \times 10^{10} = 36\ 000\ 000\ 000 = 36 \text{ milliards.}$$

$$3\ 450\ 000\ 000\ 000\ 000 = 3,45 \times 10^{15}.$$

$$0,000000000003 = 3,0 \times 10^{-12}.$$

Dans la notation scientifique, les nombres sont représentés par un produit de la forme $a \times 10^n$ dans lequel le nombre a est écrit avec exactement un chiffre différent de 0 avant la virgule. Dans le cadre de mesures de grandeurs, le nombre a est positif. Le nombre n est un **entier** (c'est-à-dire un nombre qui s'écrit sans virgule et qui est soit positif, soit négatif)¹.

3. Comment comparer deux nombres donnés en notation scientifique ?

Si les puissances de 10 de nombres écrits sous la forme $a \times 10^n$ sont différentes, l'ordre est celui des valeurs de n .

Exemple 1

$$\begin{aligned} &5,4 \times 10^{-11} \text{ et } 7,9 \times 10^{-15} \\ &10^{-11} > 10^{-15}, \\ &\text{donc } 5,4 \times 10^{-11} > 7,9 \times 10^{-15} \end{aligned}$$

Si les puissances de 10 de nombres écrits sous la forme $a \times 10^n$ sont égales, l'ordre est celui des valeurs de a .

Exemple 2

$$\begin{aligned} &5,4 \times 10^{-11} \text{ et } 5,378 \times 10^{-11} \\ &5,4 > 5,378, \\ &\text{donc } 5,4 \times 10^{-11} > 5,378 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

4. Comment utiliser la notation scientifique dans les calculs ?

Pour additionner des nombres écrits en notation scientifique, on se réfère à la priorité des opérations. Ainsi donc, pour additionner ou soustraire des nombres en écriture scientifique, il faut utiliser l'écriture décimale.

Exemple 1

$$\begin{aligned} &5,7 \times 10^{-3} + 3,2 \times 10^{-4} = \\ &0,0057 + 0,00032 = \\ &0,00602 = \\ &6,02 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Pour multiplier des nombres écrits en notation scientifique, on se réfère à l'associativité de la multiplication. Ainsi donc, pour multiplier deux nombres écrits dans la notation scientifique, on groupe les décimaux entre eux et les puissances de 10 entre elles.

Exemple 2

$$\begin{aligned} &(9 \times 10^{-4}) \times (7 \times 10^{-3}) = \\ &(9 \times 7) \times (10^{-4} \times 10^{-3}). \\ &\text{On sait que } 10^{-4} \times 10^{-3} = \frac{1}{10000} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{10000000} = 10^{-7}, \\ &\text{donc } (9 \times 7) \times (10^{-4} \times 10^{-3}) = 63 \times 10^{-7} = 6,3 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

¹ Dans ce chapitre, nous utiliserons le signe « \times » pour les calculs numériques afin d'éviter la confusion avec le point décimal affiché par les calculatrices.

On se souvient que lorsque l'on multiplie un nombre qui comporte 4 chiffres après la virgule par un nombre qui en comporte 3, le produit comporte 7 chiffres après la virgule. On peut donc prévoir le rang du dernier chiffre de $0,0009 \times 0,007$. De même, on peut prévoir le nombre de zéros du produit $90\,000 \times 7\,000$.

Cette règle de calcul peut s'exprimer sous la forme d'un calcul sur les puissances entières de 10.

Pour multiplier entre elles des puissances entières de 10, on additionne les exposants.

Les calculatrices scientifiques permettent d'introduire des nombres en notation scientifique et de faire directement les opérations dans ces notations. La procédure est expliquée dans le mode d'emploi.

5. Quels sont les préfixes utilisés pour les mesures de grandeurs ?

1×10^3 , c'est 1 Kilo	1×10^{-3} , c'est 1 milli
1×10^6 , c'est 1 Méga	1×10^{-6} , c'est 1 micro
1×10^9 , c'est 1 Giga	1×10^{-9} , c'est 1 nano
1×10^{12} , c'est 1 Tera	1×10^{-12} , c'est 1 pico

Exemples

1×10^6 tonnes, c'est une Mégatonne,

1×10^{-3} mètre, c'est un millimètre.

6. À quoi correspond l'usage de puissances entières dans le calcul numérique et dans le calcul algébrique ?

La règle de simplification des fractions permet de comprendre la signification des exposants négatifs. Dans les expressions qui suivent, on suppose que les fractions n'ont pas de dénominateur nul.

Ainsi :

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^{5-3} = a^2$$

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{3-5} = a^{-2}$$

$$\frac{a^3}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a} = a^{3-4} = a^{-1}$$

L'écriture sous forme de puissance entière est utilisée pour passer d'une expression qui comporte des fractions à une autre, équivalente, qui n'en contient pas (ou le contraire).

On retiendra que :

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a}{b^{-n}} = \frac{a}{\frac{1}{b^n}} = a \cdot b^n$$

On observe que lorsqu'un facteur du numérateur d'une fraction passe au dénominateur (ou le contraire), son exposant change de signe.

Exemples

$$5 \times (-3)^{-4} = \frac{5}{(-3)^4} = \frac{5}{81}$$

$$3 \times (-7)^{-3} = \frac{3}{(-7)^3} = -\frac{3}{343}$$

$$\frac{5}{3^{-2}} = \frac{5}{\frac{1}{3^2}} = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45.$$

7. Comment calculer avec des puissances entières ?

Les règles de calcul avec des exposants naturels s'étendent aux puissances entières. Les calculs qui suivent expliquent pourquoi.

$$a^{-5} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

L'exposant du résultat est bien la somme des exposants.

$$\frac{a^{-5}}{a^3} = \frac{\frac{1}{a^5}}{a^3} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}$$

L'exposant du résultat est bien la différence entre l'exposant du numérateur et celui du dénominateur.

$$(a^{-3})^5 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^5 = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15}$$

L'exposant du résultat est bien le produit des exposants.

$$(a^{-2}b^{-1}c^3)^{-1} = \frac{1}{a^{-2}b^{-1}c^3} = a^2bc^{-3}$$

Dans le résultat, on retrouve chaque facteur élevé à la puissance -1 .

$$\left(\frac{a^{-5}}{b^{-3}}\right)^{-2} = (a^{-5} \cdot b^3)^{-2} = a^{10}b^{-6} = \frac{a^{10}}{b^6}$$

Dans le résultat, on retrouve le numérateur élevé à la puissance -2 et le dénominateur élevé à la même puissance.

Conclusion

Les cinq règles de calcul rappelées ci-après sont valables pour des nombres m et p entiers.

Règle 1 $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$

Règle 2 $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

Règle 3 $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$

Règle 4 $(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$

Règle 5 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

exercices

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Attention à la virgule

Écrire le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

a. $7,03 \times 10^4$	d. $7,311 \times 10^6$	g. $7,03 \times 10^{-5}$	j. $0,003 \times 10^{-4}$
b. $7,003 \times 10^4$	e. $7,03 \times 10^{-1}$	h. $7,301 \times 10^{-4}$	k. $0,00007 \times 10^4$
c. $7,003 \times 10^5$	f. $7,03 \times 10^{-2}$	i. $0,03 \times 10^3$	l. $1,11111 \times 10^{-3}$

2. Les bons exposants

Compléter les exposants manquants.

a. $12,3 = 1,23 \times 10^{\dots}$	e. $1\,234 = 1,234 \times 10^{\dots}$	i. $0,001 = 1,0 \times 10^{\dots}$
b. $123,4 = 1,234 \times 10^{\dots}$	f. $0,12 = 1,2 \times 10^{\dots}$	j. $0,0003 = 3 \times 10^{\dots}$
c. $7 = 7,0 \times 10^{\dots}$	g. $0,0123 = 1,23 \times 10^{\dots}$	k. $12,34 = 1,234 \times 10^{\dots}$
d. $23 = 2,3 \times 10^{\dots}$	h. $0,0102 = 1,02 \times 10^{\dots}$	l. $0,00012 = 1,2 \times 10^{\dots}$

3. Comparer

- a. $3,56 \times 10^{-5}$ et $7,68 \times 10^{-6}$
b. 356×10^{-5} et $7,68 \times 10^{-5}$
c. $3,56 \times 10^{-5}$ et 456×10^{-7}

4. Faire les bons choix

Parmi les expressions **a**, **b** et **c**, quelles sont celles qui ont le même résultat que l'expression placée en tête de la colonne ?

	$3^2 \times 3^5$	$2^3 \times 2$	$3^{-2} \times 3^{-1}$	$3^{-2} + 3^{-1}$	$((-3)^2)^3$	$-(3^2)^3$
a.	3^{10}	4^3	3^2	3^{-3}	-3^5	-3^5
b.	3^7	2^4	3^{-3}	6^{-3}	-3^6	-3^6
c.	9^7	$2^2 \times 2^2$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{3}$	3^6	3^6

5. Justifier

Réduire les expressions suivantes. Procéder par étapes et citer la règle utilisée.

a. $(a^3 a^{-1} b)^3$

b. $\left(\frac{a^5}{a^{-3}}\right)^{-2}$

Appliquer une procédure

6. Écrire en notation scientifique

a. 1 000	d. 0,204	g. 0,0012	j. -0,00000765
b. 225	e. 90	h. 18	k. -117,117117
c. 0,91	f. -782	i. 12 345 098 765	l. $\frac{1}{8}$

7. L'un dans l'autre

- a. Combien y a-t-il de microgrammes dans 100 kilogrammes ?
- b. Combien y a-t-il de millimètres dans 1 Gigamètre ?

8. Résultat sans exposants négatifs

Transformer chaque expression de façon à ce qu'il n'y ait pas d'exposant négatif.

a. $b^{-1}a^4$ b. $\frac{3^{-1}a^{-2}b^5}{9^{-1}c^3d}$ c. $\frac{(a^2b)^{-1}}{(dc)^{-1}}$

9. Réduire

- a. Donner d'abord le résultat avec des exposants entiers (sans utiliser de barre de fraction).
- b. Convertir le résultat en une expression qui ne comporte pas d'exposant négatif.
- c. Calculer la valeur numérique de chaque expression pour $a = 2$ et $b = 5$.

1) $\frac{a^{-6}b^4}{b^{-1}a^5}$ 2) $\frac{3^{-1}a^{-2}b^5}{9^{-1}a^3b}$ 3) $\frac{(a^2b)^{-1}}{a^{-1}b^3}$

10. Pas de barre de fraction

Réduire les expressions suivantes. Exprimer le résultat sans utiliser de barre de fraction.

a. $\frac{3^2a^{-2}b^5}{3^{-1}a^3b}$ d. $\frac{12a^{-1}}{[(4a)^{-1}b^3]^{-2}}$

b. $(5a)^{-2}b^{-3}[(2a)^{-1}b]^2$ e. $\frac{2^{-1}a^5b^2}{5a^{-1}b^{-2}} \cdot \frac{15a^3b^{-2}}{2^{-2}a^2b}$

c. $\frac{(3^{-1}a^{-2}b)^3}{a^3b}$ f. $\left(\frac{a^{-3}b^5}{b^{-3}}\right)^{-2}$

Résoudre un problème

11. Douter de sa calculatrice

Noémie fait l'opération suivante avec sa calculatrice : $2\,005\,000 \times 6\,000\,300$. Sa calculatrice affiche $1,2030602 \times 10^{13}$. Elle doute du résultat. Pourquoi ? Quel est le résultat exact ?

12. Des masses minuscules

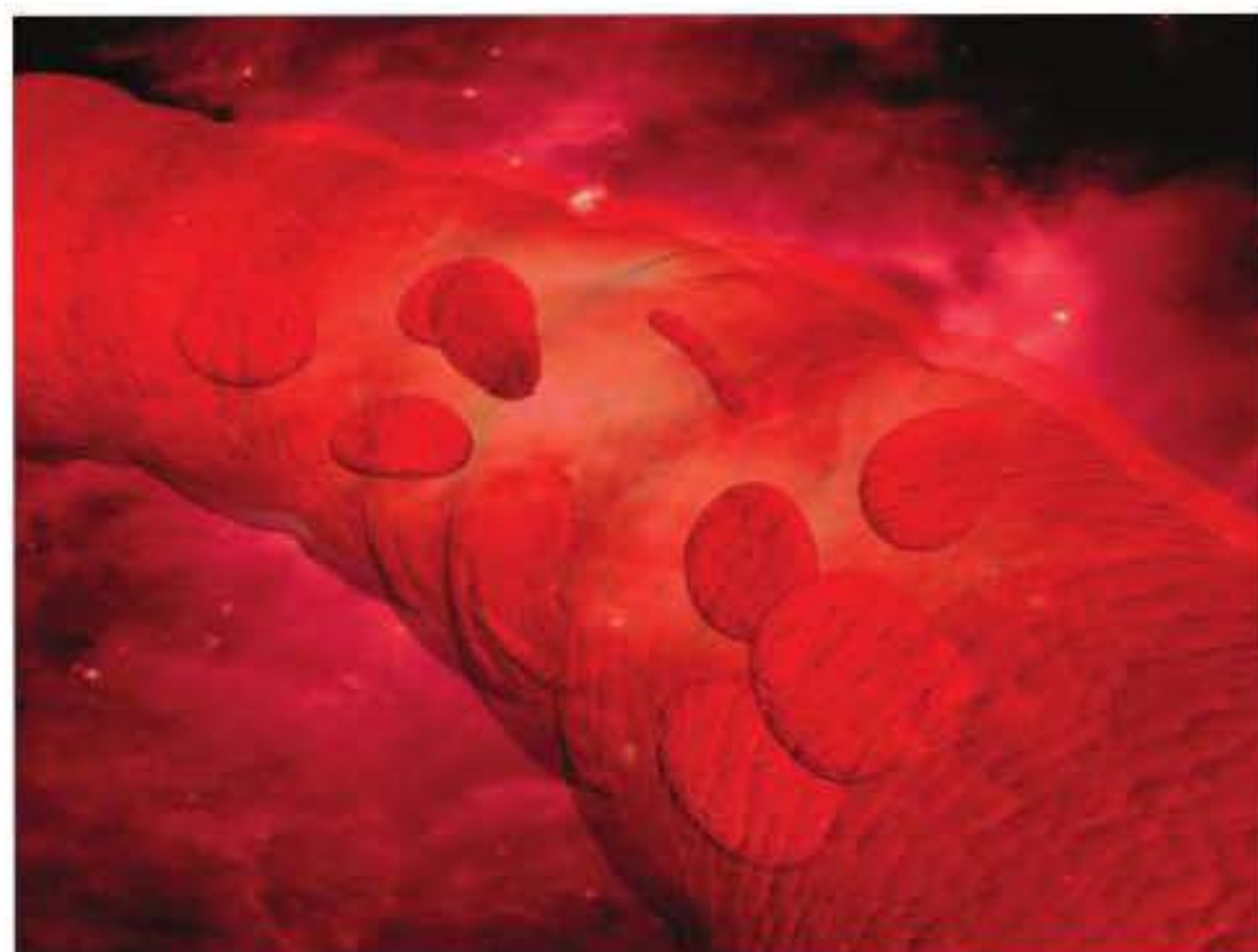
- La masse de l'atome d'hydrogène est d'environ $1,67 \times 10^{-24}$ g, tandis que celle de l'atome d'uranium est d'environ $3,95 \times 10^{-22}$ g. Quel est le rapport entre la masse de l'atome d'uranium et celle de l'atome d'hydrogène ? Donner le résultat d'abord sous forme d'écriture scientifique, puis avec 3 chiffres significatifs.
- Une mole de carbone pèse 12 g. Elle est composée de $6,02 \times 10^{23}$ atomes. Quelle est la masse d'un atome de carbone ?

13. La Terre et les astres

- En un an la lumière parcourt environ $9,46 \times 10^{12}$ km. Le diamètre de la Voie lactée est de 100 000 années-lumière. Convertir cette distance en kilomètres. Utiliser la notation scientifique.
- La galaxie d'Andromède est l'objet le plus lointain visible à l'œil nu ; elle se trouve à 2 300 000 années-lumière. Évaluer cette distance en kilomètres.
- L'étoile la plus proche, Prima du Centaure, est à environ $4,0 \times 10^{12}$ km de la Terre. Exprimer cette distance en années-lumière.
- La masse de la Terre est d'environ $5,97 \times 10^{24}$ kg. Combien cela fait-il de tonnes ?

14. Les globules rouges

- On sait que $1 \text{ dm}^3 = 1 \times 10^6 \text{ mm}^3$ et que 1 dm^3 de sang contient environ 1 litre de sang. Il y a en moyenne 5,5 litres de sang qui circulent dans le corps humain. Un millimètre cube de sang contient 5 millions de globules rouges. Combien y a-t-il de globules rouges dans le sang d'une personne ?
- Les globules rouges du sang humain ont à peu près la forme d'un cylindre de 7 micromètres de diamètre et de 3 micromètres de hauteur. Quel est le volume d'un globule rouge ?
- Quel est le volume total de tous les globules rouges du corps humain ?



15. Faisceau de protons

Accélérateur de particule du CERN

Voici quelques extraits du site du CERN à Genève. Répondre aux questions posées après chaque paragraphe.

« Des atomes d'hydrogène sont extraits d'une bouteille d'hydrogène ordinaire. On obtient des protons en arrachant à des atomes d'hydrogène leur électron en orbite.

Les protons sont ensuite accélérés par le complexe d'accélérateurs du CERN.

Chaque **faisceau de protons** est composé de près de 3000 paquets de particules, chacun d'eux contenant 100 milliards de particules. »



- a. Combien y-a-t-il de particules dans un faisceau ? Écrire le résultat dans l'écriture scientifique.

« Les particules sont si petites que la probabilité d'une collision est infime. Au moment où les paquets se croisent, il ne se produit qu'une vingtaine de collisions parmi les 200 milliards de particules. Cela dit, les paquets se croisent à la cadence d'environ 30 millions de fois par seconde ; ainsi, le LHC génère jusqu'à 600 millions de collisions par seconde. »

- b. De quelle opération le nombre « 600 millions » est-il le résultat ? Poser l'opération et écrire le résultat en notation scientifique.

« Un faisceau peut circuler pendant 10 heures. À une vitesse proche de celle de la lumière, un proton accomplit 11 245 tours par seconde dans le LHC parcourant plus de 10 milliards de kilomètres. »

- c. De quelle opération la distance « plus de 10 milliards de kilomètres » est-elle le résultat ? Poser l'opération et écrire le résultat en notation scientifique.
(le tunnel du LHC a 26,659 km de circonférence).

16. Pollution

On sait que chaque m^3 de pétrole pèse 860 kg. Lors d'un incendie, 258 tonnes de pétrole se répandent sur la mer. On estime que ce pétrole forme une couche de 10^{-4} cm d'épaisseur et on suppose que celui-ci s'étale uniformément à la surface de l'eau.

Estimer l'aire (en km^2) de la tache ainsi formée.



Indications

Commencer par compléter le tableau ci-dessous.

Masse	Volume
860 kg	1 m ³
1 kg	
258 tonnes	

17. Une invasion de pissenlits

Une plante de pissenlit donne environ 100 graines par année. Si toutes ces graines germaient et si l'on n'arrachait aucune plante, on obtiendrait l'année suivante 10 000 graines. En supposant qu'il faille deux mille pissenlits pour recouvrir un m², au bout de combien d'années les continents seraient-ils entièrement recouverts de pissenlits ?

Information

Superficies en millions de km² : Afrique : 30 ;
Amérique : 42 ; Asie : 44 ; Europe : 10 ;
Océanie : 9.

Indication

Commencer par compléter tableau suivant.



Au début	Après 1 an	Après 2 ans	Après 3 ans	Après 4 ans	Après n années
1 plante	100 plantes	10 000 plantes			

2 polynômes

Faire de l'algèbre pense-t-on, c'est employer des lettres. Et pourquoi donc ?

Pour jouer par exemple au « calculateur prodige » et expliquer « comment ça marche ».

Ce faisant, on s'aperçoit que les lettres se comportent comme des chiffres, ou plutôt des nombres, et que l'abc du métier de mathématicien n'est pas, au départ, très éloigné des calculs numériques. Additionner, soustraire, multiplier, diviser avec des lettres se fait selon les mêmes règles et les mêmes procédures qu'avec des nombres.

Mais le pouvoir des lettres, c'est d'expliquer, de prouver, de généraliser, en un mot, de **démontrer**.

S'exercer à traduire une situation dans le langage de l'algèbre et à transformer des expressions algébriques, c'est se donner des outils pour explorer de nouveaux horizons : élaborer une formule, résoudre des équations de plus en plus compliquées, étudier de nouvelles fonctions.

Dans ce chapitre, on apprend à transformer une expression algébrique en une autre plus commode ou mieux adaptée au problème. Principalement à passer d'une « écriture somme » à une « écriture produit ». Pour ce faire, on apprendra comment se servir des produits remarquables, on découvrira de nouvelles techniques liées aux propriétés des **polynômes**.

L'objectif ? Devenir de plus en plus habile dans le calcul littéral, l'intégrer comme un nouveau langage et l'utiliser pour démontrer.



Pour fabriquer de telles pièces, il faut calculer la quantité de métal utilisé, c'est-à-dire la somme des volumes de chaque partie. Si, dans une série de pièces à fabriquer, une seule dimension varie (par exemple, le diamètre de la base), le volume de chaque pièce est la valeur numérique d'un polynôme d'une seule variable.

1. Le magicien et les dominos

Un ensemble de dominos est étalé sur la table. Chacun en choisit un. Un « magicien » va deviner lequel. Pour y arriver, il demande d'effectuer les calculs suivants.

- Multiplier un des deux nombres du domino par 10.
- Ajouter le double de l'autre nombre au produit obtenu.
- Multiplier cette somme par le premier nombre.
- Multiplier ce produit par 10.
- Ajouter à ce produit le carré du second nombre du domino.

Il suffit au magicien de connaître ce dernier résultat pour découvrir (en faisant une seule opération à la calculatrice) le domino choisi.

Pour expliquer ce tour,

- a. appeler a , le nombre de points situés d'un côté, et b , le nombre de points situés de l'autre côté,
- b. traduire la suite des opérations sous forme d'une expression algébrique,
- c. réduire cette expression et l'interpréter.



2. Une preuve sans mots

En découpant puis en réassemblant différemment les deux trapèzes de la fig. 1, on montre que $a^2 - 1$ peut s'écrire sous forme d'un produit.

Réaliser un dessin qui illustre cette identité au départ de ces deux trapèzes.

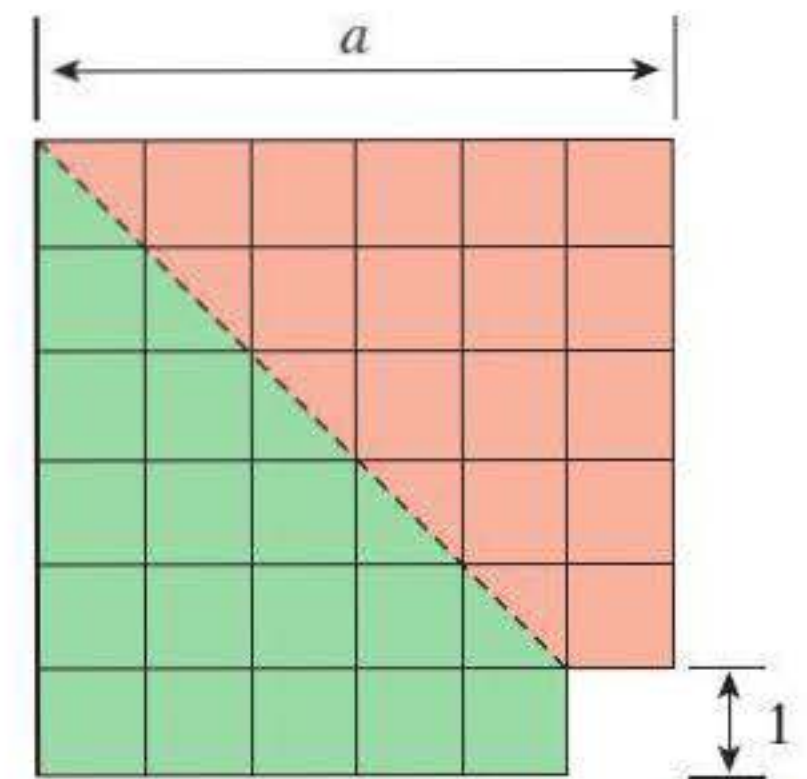


fig. 1

3. Développer et factoriser

Pour développer un produit de deux sommes, on peut présenter les calculs comme le montrent les deux exemples ci-dessous.

Développer $(x + 4)(x + 1)$

multiplié par	x	4
x	x^2	$4x$
1	x	4

$$(x + 4)(x + 1) = (x^2 + 5x + 4)$$

$(x - 3)(x - 5) =$

multiplié par	x	-5
x	x^2	$-5x$
-3	$-3x$	15

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$$

- a. Compléter les tableaux ci-dessous et écrire les égalités correspondantes.

multiplié par	x	...
...	x^2	$-2x$
-1	...	2

$$\dots = \dots$$

multiplié par
...	x^2	$3x$
...	$2x$	6

$$x^2 + 5x + 6 = \dots$$

Dans ce dernier exercice, la partie gauche de l'égalité est une somme, celle de droite, un produit. **Transformer une somme en produit, c'est factoriser.** Le produit de deux binômes du premier degré est un trinôme du deuxième degré et le **terme indépendant** du trinôme (le terme qui ne contient pas la variable) est le produit des termes indépendants des deux binômes.

- b. Compléter les tableaux ci-dessous et les égalités correspondantes.

multiplié par
...	x^2	x
...	x	1

$$x^2 + 2x + 1 = \dots$$

multiplié par
...	x^2	...
...	...	9

$$x^2 - 6x + 9 = \dots$$

multiplié par
...	x^2	
...		-1

$$x^2 - 1 = \dots$$

multiplié par
...	$4x^2$	
...	...	-9

$$4x^2 - 9 = \dots$$

multiplié par	x	$-a$
x	x^2	$-ax$
$-b$	$-bx$...
$(x - a)(x - b) = x^2 - (\dots) x + \dots$		

4. Démontrer

- a. Si on augmente d'une unité le produit de deux nombres impairs consécutifs, on trouve un carré parfait. Explorer, démontrer.

Indication

Faire la démonstration en écrivant les nombres impairs consécutifs d'abord sous la forme $(2n - 1)$ et $(2n + 1)$, puis sous la forme $(2n + 1)$ et $(2n + 3)$.

- b. La somme de deux nombres est 70. La différence de leur carré est 2 100. Quels sont ces deux nombres ?

5. Factoriser un polynôme dont on connaît un des facteurs

Pour factoriser le polynôme $P_1(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, on peut disposer les calculs dans un tableau que l'on complète progressivement. Voici les premières étapes.

On place dans le tableau les éléments dont on connaît la position

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x^2 + \dots x + \dots).$$

On calcule les éléments qui viennent compléter la deuxième colonne.

On sait que la somme des termes en x^2 est $4x^2$, on complète ainsi une case de la troisième colonne. On poursuit dans un va-et-vient entre le tableau et le polynôme à factoriser.

- Écrire $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ sous forme d'un produit.
- Factoriser $P_2(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$ sachant que le binôme $x - 3$ est l'un de ses facteurs.

multiplié par
x	x^3
3	6

multiplié par	x^2
x	x^3
3	$3x^2$...	6

multiplié par	x^2	x	...
x	x^3	x^2	...
3	$3x^2$...	6

6. La division euclidienne

Pour diviser le polynôme $P_1(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ par le binôme $(x + 3)$, on peut aussi disposer les calculs comme pour une division écrite (fig. 2).

Voici un exemple de division d'un polynôme par un binôme dont le reste n'est pas nul (fig. 3). Dans ce cas, le polynôme peut s'écrire sous la forme $x^2 - 8x + 17 = (x - 1)(x - 9) + 26$.

Ce qui ne correspond pas à une « écriture produit ».

Effectuer les divisions suivantes pour écrire le polynôme donné sous la forme $D(x) = (x - a)Q(x) + r$.

Diviser...	... par ...
$x^2 + 9x + 14$	$x + 7$
$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$	$x + 3$
$x^2 + 9x + 14$	$x - 7$
$x^2 + 9x + 20$	$x + 7$

7. Divisibilité d'un polynôme par un binôme

S'en référer aux polynômes de l'exercice d'exploration 5.

- Calculer $P_1(-3)$, à savoir, la valeur numérique de $P_1(x)$ pour $x = -3$.
- Calculer $P_2(3)$.
- Expliquer pourquoi ces résultats sont nuls.

Exercices 1 à 3 ;
8 à 14 ;
problèmes entre
18 et 28
Utiliser la synthèse
1 à 11 comme
ressource
Fiches 1 à 4

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \quad | \quad x + 3 \\
 \underline{-(x^3 + 3x^2)} \quad | \quad | \\
 x^2 + 5x \quad | \quad | \\
 \underline{-(x^2 + 3x)} \quad | \quad | \\
 2x + 6 \quad | \quad | \\
 \underline{-(2x + 6)} \quad | \quad | \\
 0 \quad | \quad |
 \end{array}$$

fig. 2

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 8x + 17 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{-(x^2 + x)} \quad | \quad | \\
 -9x + 17 \quad | \quad | \\
 \underline{-(9x - 9)} \quad | \quad | \\
 26 \quad | \quad |
 \end{array}$$

fig. 3

Exercices 4 à 7,
16 et 17
Étudier la synthèse
Fiche 5

Outre les nouveaux acquis, cette synthèse reprend l'essentiel de ce qui a été étudié les années précédentes : ce qui sert de référence pour établir les nouvelles propriétés et pour faire les exercices.

1. Comment réduire un produit ?

Exemples

Les expressions $x(-2x^2)$; $xy(-2)$; $-2x^3y^7(-3)$; $x^2yx^5y^3$ sont des produits.

Les expressions $-2x^3$; $-2xy$; $6x^3y^7$; x^7y^4 sont les **formes réduites** de ces produits.

Énoncé 2.1

La forme réduite d'un produit de facteurs numériques et littéraux est appelée **monôme**. Un **binôme** est une somme de deux monômes. Un **polynôme** est une somme de monômes.

2. Comment déterminer le degré d'un monôme ?

Exemples

Le degré du monôme $-2x^3$ est 3.

Le degré du monôme $6x^3y^7$ est 10.

Énoncé 2.2

Le **degré d'un monôme** est la somme des exposants de toutes les lettres qui figurent dans ce monôme.

3. Comment multiplier un monôme par un nombre ?

Exemples

Pour multiplier 200 par 6, on fait $6 \times (2 \times 100) = 12 \times 100$.

On n'a multiplié qu'un seul facteur du produit (2×100) par 6.

En calcul littéral, cela devient

$$\begin{aligned} -7(-2xy) &= 14xy \\ -1(6x^3y^7) &= -6x^3y^7 \end{aligned}$$

Énoncé 2.3

Pour multiplier un monôme (sous sa forme réduite) par un nombre, on multiplie uniquement le facteur numérique de ce produit par ce nombre.

Multiplier un monôme par -1 , c'est prendre l'opposé de ce monôme.

4. Comment élever un monôme à une puissance ?

Exemples

Pour élever 30 au carré, on fait $(3 \times 10)^2 = 9 \times 100 = 900$.

Pour élever 0,3 au carré, on fait $(3 \times 0,1)^2 = 9 \times 0,01 = 0,09$.

En calcul littéral, on a

$$(-2xy)^3 = -8x^3y^3 ; (6x^3y^7)^2 = 36x^6y^{14} ; (x^7y^4)^2 = x^{14}y^8$$

Énoncé 2.4

Pour élever un produit à une puissance, on élève chaque facteur du produit à cette puissance.

5. Comment multiplier un polynôme par un monôme ?

Exemples

Pour multiplier 102 par 6, on fait $6 \times (100 + 2) = (6 \times 100) + (6 \times 2)$.

On a multiplié chaque terme de la somme $(100 + 2)$ par 6.

En calcul littéral, on a

$$\begin{aligned}2a(a + 3b) &= 2a^2 + 6ab \\ -3a^2(2a - 1) &= -6a^3 + 3a^2 \\ -(-3a + 5) &= -1(-3a + 5) = 3a - 5\end{aligned}$$

Dans ces trois exemples, la partie gauche de l'égalité est un produit, la partie droite est une somme. Passer d'une « écriture produit » à une « écriture somme », c'est **développer** l'expression algébrique.

Énoncé 2.5

Pour multiplier un polynôme par un monôme, on multiplie chaque terme du polynôme par le monôme.

Pour prendre l'opposé d'une somme, on prend l'opposé de chaque terme de cette somme.

6. Comment mettre en évidence ?

Exemples

Pour additionner $(0,2 \times 13)$ et $(0,2 \times 7)$, on fait $(0,2 \times 13) + (0,2 \times 7) = 0,2 \times (13 + 7)$.

Le nombre 0,2 qui figurait dans chaque terme (de la partie gauche) a été mis en évidence.

En calcul littéral, cela devient

$$\begin{aligned}12a^2 + 18a &= 6a(2a + 3) \\ -15ab^2 + 3a^2b - 3ab &= 3ab(-5b + a - 1)\end{aligned}$$

Énoncé 2.6

Après avoir repéré les facteurs qui figurent dans chaque terme d'un polynôme, mettre en évidence conduit à une « écriture produit ».

7. Comment réduire une somme de termes semblables ?

Cette réduction repose sur une ou plusieurs mises en évidence.

Exemples

$$3a + 2a = a(2 + 3) = 5a.$$

$$3a + 2a + 5b - 3b = a(2 + 3) + b(5 - 3) = 5a + 2b.$$

$$5x^3y^2 - 2x^3y^2 = x^3y^2(5 - 2) = 3x^3y^2.$$

$$-2xy + 6x^3y^2 - x^3y^2 - 5xy = -7xy + 5x^3y^2.$$

Énoncé 2.7

Les termes semblables ont la même partie littérale (les mêmes lettres figurent avec les mêmes exposants dans chacun des termes). On ne peut réduire que des termes semblables.

Un **polynôme réduit** est un polynôme dans lequel la réduction des termes semblables a été effectuée.

8. Comment déterminer le degré d'un polynôme ?

Exemples

Le polynôme $-2x^3 + 4x$ est ordonné et de degré 3.

Le polynôme $3x^2 + 5x + 2x^2 - 5x^2 + 7$ n'est ni réduit ni ordonné. Il est du premier degré.

Le polynôme $3x^2 + 5x + 2x^3 + 7$ est réduit mais n'est pas ordonné. Il est du troisième degré.

Énoncé 2.8

Le degré d'un polynôme réduit et ordonné par ordre décroissant est le degré de son premier terme.

9. Comment diviser un polynôme entier en x par un binôme ?

Exemple

Diviser $3x^3 + 4x^2 - 19x + 8$ par $3x - 2$.

Comme le degré du dividende est 3 et celui du diviseur est 1, le degré du quotient est $3 - 1 = 2$.

Voici comment disposer les calculs.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 4x^2 - 19x + 8 & 3x - 2 \\
 \underline{-(3x^3 - 2x^2)} & x^2 + 2x - 5 \\
 6x^2 - 19x & \\
 \underline{-(6x^2 - 4x)} & \\
 -15x + 8 & \\
 \underline{-(-15x + 10)} & \\
 -2 &
 \end{array}$$

fig. 4

On sait que dans toute division, la relation entre dividende (D), diviseur (d), quotient (q) et reste (r) est

$$D = dq + r.$$

Appliquée au polynôme donné, cette égalité devient :

$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 8 = (3x - 2)(x^2 + 2x - 5) - 2.$$

Avant d'effectuer une division d'un polynôme par un binôme du premier degré, on peut prévoir le degré du quotient : il suffit de diminuer celui du dividende d'une unité.

Le reste est de degré zéro, c'est-à-dire qu'il ne renferme pas la variable x .

Appliquée à la division d'un polynôme en x par un binôme en x , la relation fondamentale $D = dq + r$ entre le dividende, le diviseur, le quotient et le reste devient :

$$P(x) = (ax - b)Q(x) + r.$$

$Q(x)$ étant le quotient de la division et r le reste.

Remarque

Avant de poser la division, il faut veiller à ce que le dividende soit ordonné et complet. S'il est incomplet, on insère le (ou les) terme(s) manquant(s) avec un coefficient nul.

Énoncé 2.9 – Loi du reste

Lorsque la division se fait exactement, on peut prévoir le dernier terme du quotient : c'est le quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur.

10. Comment reconnaître si un polynôme est divisible par $(x - a)$?

Énoncé 2.10

Le reste de la division d'un polynôme entier en x par le binôme $(x - a)$ est la valeur numérique du polynôme pour $x = a$.

Démonstration

Si on divise le polynôme $P(x)$ par le binôme $(x - a)$, on a :

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r.$$

Si on remplace x par a dans cette égalité, on a :

$$P(a) = (a - a)Q(x) + r,$$

$$\text{Donc } P(a) = r.$$

Cqfd

Énoncé 2.11

Si la valeur numérique d'un polynôme $P(x)$ pour $x = a$ est nulle, alors $P(x)$ est divisible par $(x - a)$. En effet, si $P(a) = 0$, le reste de la division est zéro.

On utilise cette propriété pour essayer de factoriser un polynôme.

Exemple

Factoriser $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$.

Si ce polynôme est divisible par $(x - a)$ avec a entier, la valeur de a est un diviseur entier de -2 . Calculons successivement $P(-1)$, $P(1)$, $P(-2)$, $P(2)$ jusqu'à ce que l'on trouve un diviseur qui convient.

$$P(1) = 1 + 2 - 7 - 2 \neq 0,$$

$$P(-1) = -1 + 2 + 7 - 2 \neq 0,$$

$$P(2) = 8 + 8 - 14 - 2 = 0.$$

Donc $P(x) = (x - 2)Q(x)$.

On détermine $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ par $(x - 2)$. On peut aussi organiser les calculs en utilisant un tableau.

11. Quelle factorisation utiliser ?

Énoncé 2.12

Factoriser, c'est transformer une « écriture somme » en une « écriture produit » équivalente.

Plusieurs procédés permettent d'y parvenir :

- mettre en évidence (voir plus haut) ;
- reconnaître, quand cela se présente, un produit remarquable ;

Exemple

$$4a^4 - 9b^2 = (2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$$

$$4a^4 + 9b^2 - 12a^2b = (2a^2 - 3b)^2$$

- effectuer la division par $(x - a)$ quand $P(a) = 0$.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Vrai ou faux ? Expliquer

Dans tous les énoncés où elle figure, la lettre n désigne un nombre naturel (c'est-à-dire un nombre entier positif).

- a. Le nombre $n + 5$ se termine par 5.
- b. Le nombre $10n + 5$ se termine par 5.
- c. Les nombres $2n + 5$ et $2n - 5$ sont tous les deux impairs.
- d. Le prédécesseur de $n + 1$ est $n - 1$.
- e. Si n est un nombre de trois chiffres, a étant le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités, alors le nombre renversé vaut $100c + 10b + a$.
- f. Quelqu'un dit que l'opposé de $(a - b)$ est $(b - a)$. A-t-il raison ?
- g. Quelqu'un dit $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. A-t-il raison ?
- h. Parmi les calculs ci-après, quels sont ceux qui ont comme résultat le carré de 19 ?

$$\begin{array}{ll} 20^2 - 1^2 & 100 + 180 + 81 \\ 10^2 + 9^2 & 400 - 40 + 1 \end{array}$$

2. Mentalement ou presque...

On sait que $29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$. Utiliser la même identité pour calculer 49^2 ; 99^2 ; 199^2 ; 499^2 .

3. Le bon facteur

Par quel facteur faut-il multiplier les expressions algébriques suivantes ?

- a. $a + b$ pour obtenir $a^2 - b^2$
- b. $a - b$ pour obtenir $a^2 - b^2$
- c. $2a^2b + 1$ pour obtenir $12a^4b^2 + 12a^2b + 3$
- d. $5a^3$ pour obtenir $15a^2$
- e. $3a^3$ pour obtenir $5a^4$
- f. abc^2 pour obtenir c^3
- g. $\frac{x}{3}$ pour obtenir $\frac{3}{x}$
- h. $3 + x$ pour obtenir 3
- i. $3 + x$ pour obtenir x
- j. abc pour obtenir $a + b + c$

4. Prévoir

a. Les divisions suivantes se font exactement. Prévoir le degré du quotient, le premier et le dernier terme du quotient.

1) $(35x^3 + 47x^2 + 13x + 1) : (5x + 1)$

2) $(6x^2 - 17x^2 + 14x - 3) : (2x - 3)$

b. Prévoir le reste des divisions suivantes.

1) $(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) : (x - 1)$

2) $(x^4 - 7x^2 - x + 6) : (x + 3)$

3) $(x^3 - 40x - 63) : (x - 7)$

c. Un seul des polynômes ci-dessous (d) n'est pas divisible par $x - a$. Lequel ?

d. Un seul des polynômes n'est pas divisible par $x + a$. Lequel ?

1) $x^5 - a^5$

2) $2ax^5 + a^3x^3 - 3a^5x$

3) $x^3 + a^3$

4) $x^5 - ax^4 - a^2x^3 + a^3x^2$

5. Déterminer un paramètre

Calculer la valeur de m sachant que $P(x) = x^2 - 5x + m$ est divisible par $x + 3$.

Appliquer une procédure

6. Factoriser les expressions suivantes

a. $4x^2 - 12$	g. $3x^3 - 7x^2$	m. $-(6t + 4)(x - 1) + (3t + 2)(z - 6)$
b. $8t^3 - 6xt$	h. $2a(p + 3) + 2a(-p + 8)$	n. $(2x - 4)(-3x + 2) - (-9x + 6)(5x + 3)$
c. $-8x^2 - 4x^2$	i. $4x^3(a - 6) + 12x^3(2a - 3)$	o. $ab + b$
d. $21ab + 7a$	j. $9x^2(2x + 7) - 5x^2(-2x + 3)$	p. $ab^2 + ab$
e. $12b^2 - 8ab$	k. $(a - 1)(2a - 3) + (a - 1)(4t + 6)$	q. $3(a + b)^2 + (a + b)$
f. $4xt - 3xt$	l. $(-7x + 3)(3x + 1) - (3x + 1)(6x - 3)$	r. $a(b + 1) - (b + 1)$

7. Développer

Écrire les produits suivants sous forme de sommes et réduire ces sommes.

a. $(x + 2)(3x - 4)$	f. $(x^2 - y)(x^2 + y)$	k. $(x + 2)(-x + 2)$
b. $(x - 2)(3x + 4)$	g. $(x - 1)(x + 2)(2x - 1)$	l. $(-x + 2)(-x - 2)$
c. $(2x^2 - 5)(3x - 6)$	h. $(-x - 1)(x - 2)(2x + 1)$	m. $(-x + 2)^2$
d. $(-2x^2 - 5)(-3x - 6)$	i. $(x - 1)(-x + 2)(-2x - 1)$	n. $(-x - 2)^2$
e. $(-x + y)(x - y)$	j. $-(x - 1)(-x + 2)(-2x - 1)$	o. $-(x - 2)^2$

8. Un tableau pour factoriser

a. Compléter les tableaux ci-dessous pour factoriser les trinômes donnés.

multiplié par
...	x^2	
...		30
$x^2 - 11x + 30 = \dots$		

multiplié par
...	x^2	
...		+12
$x^2 - 8x + 12 = \dots$		

b. Utiliser un tableau pour factoriser les trinômes donnés.

1) $x^2 - 4x - 5$

3) $x^2 - 4x - 12$

5) $x^2 - 5x - 14$

2) $x^2 + 10x + 16$

4) $x^2 - 4x - 32$

6) $x^2 + 20x + 19$

9. Factoriser

a. $a^2 - 9$

h. $a^4 - b^4$

o. $\frac{x^2}{16} - \frac{3xy}{2} + 9y^2$

b. $b^2 - 4$

i. $16a^4 - 81b^4$

p. $x^2 + 10x + 21$

c. $a^2 - \frac{1}{16}$

j. $a^2 + 2a + 1$

q. $x^2 + 5x + 6$

d. $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}$

k. $4a^2 - 12a + 9$

r. $x^2 - x - 12$

e. $3a^2b^2 - 12b^2$

l. $9a^4 + 24a^2 + 16$

s. $x^2 - 8x + 12$

f. $4a^5b - 9ab^3$

m. $a^2 - a + \frac{1}{4}$

t. $3a^2 - 3a + \frac{3}{4}$

g. $3a^6 - 48a^8$

n. $0,25a^2 + a + 1$

u. $8a^2 - 24a + 18$

10. Le PGCD de plusieurs polynômes

Pour chaque groupe de polynômes, déterminer un diviseur commun de degré le plus élevé possible.

a. $30x^2y^2z^2$; $24xyz$; $6y^2$; $15y^2z$.

b. $3x(x-2)(x-1)^2$; $6x(x-1)$; $(x-1)(x+2)$.

c. $15x^2(x-y)$; $12(x-y)(x+y)$; $16(x-y)^2$.

d. $24x^2 + 8x$; $2x^3$; $12x^3 + 4x^2$.

e. $x^2 - x$; $x^3 - 3x^2 + 2x$; $x^3 - 4x^2 + 3x$.

f. $2x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 2x + 1$; $(x+1)^3(x-3)$.

g. $x^2 - x - 20$; $x^2 - 11x + 30$; $x^2 - 5x$.

h. $x^5 - 81x$; $(x^2 - 9)(x+2)$; $x^2 + 5x + 6$.

11. Fractions algébriques

Simplifier les fractions suivantes (on suppose que les dénominateurs ne sont pas nuls).

a. $\frac{15y^2z}{30x^2y^2z^2}$ c. $\frac{x^2 - x}{x^3 - 4x^2 + 3x}$
b. $\frac{15x^2(x-y)}{16(x-y)^2}$ d. $\frac{x^5 - 81x}{x^2 + 5x + 6}$

12. Différence et quotient

Calculer $A - B$ et $\frac{A}{B}$. Simplifier les expressions obtenues. On suppose $B \neq 0$.

A	B
$7t - 21$	$14(t - 3)$
$3x - xy$	$x(y - 3)$
$b^2 - 4$	$(b + 2)^2$
$4t - 4$	$2(3 + t)$
$5xy - x^2$	$5y^2 - xy$
$t^2 - 1$	$t^2 - t$
$x^2 + 2x + 1$	$1 - x^2$
$-2(3 - 5a)(3 + 5a)$	$(5a + 3)(5a - 3)$
$(25 - x)^2$	$(x - 25)^2$
$4a^2 - 12a + 9$	$(3 - 2a)(1 + 5a)$
$1 - a^2$	$(a + 1)^2(a - 1)$
$-b^2 + 2b + 3$	$(b - 2)(b + 1)$
$25 - x^2$	$x - 5$
$16x^2 + 24x + 9$	$-8x - 6$

13. Utiliser la loi du reste

Factoriser les polynômes suivants.

a. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ c. $3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4$
b. $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$ d. $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$

14. Division euclidienne

Effectuer les divisions suivantes et écrire l'égalité fondamentale correspondante.

a. $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 2)$
b. $(x^3 + 9x^2 + 11x - 21) : (x + 2)$
c. $(6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4) : (x - 2)$
d. $(x^3 + 3x^2 - 16x - 40) : (x - 2)$

Résoudre un problème

15. En boucle !

Si on entre 7 dans le programme de calcul ci-contre (fig. 5), on trouve 93. Ensuite on recommence avec 93 et on retrouve... 7 !

- a. Recommencer avec un autre nombre plus grand que 100, puis avec un nombre négatif.
- b. Expliquer pourquoi on retrouve toujours le nombre entré.

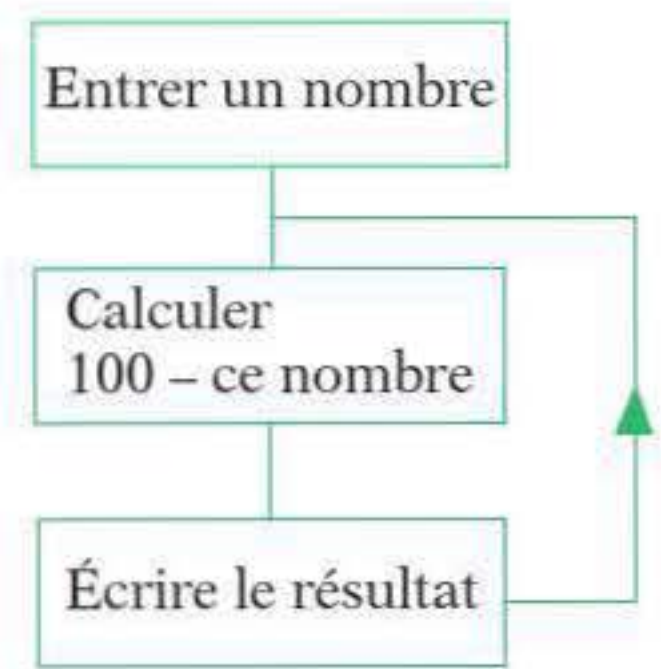


fig. 5

16. Inverse et opposé

La particularité du programme de calcul ci-contre (fig. 6) n'apparaît qu'à l'issue de la troisième boucle... si l'on n'a pas fait d'erreur de calcul.

- a. Entrer d'abord un nombre naturel, puis un nombre négatif, et ensuite une fraction.
- b. Expliquer la particularité de ce programme.

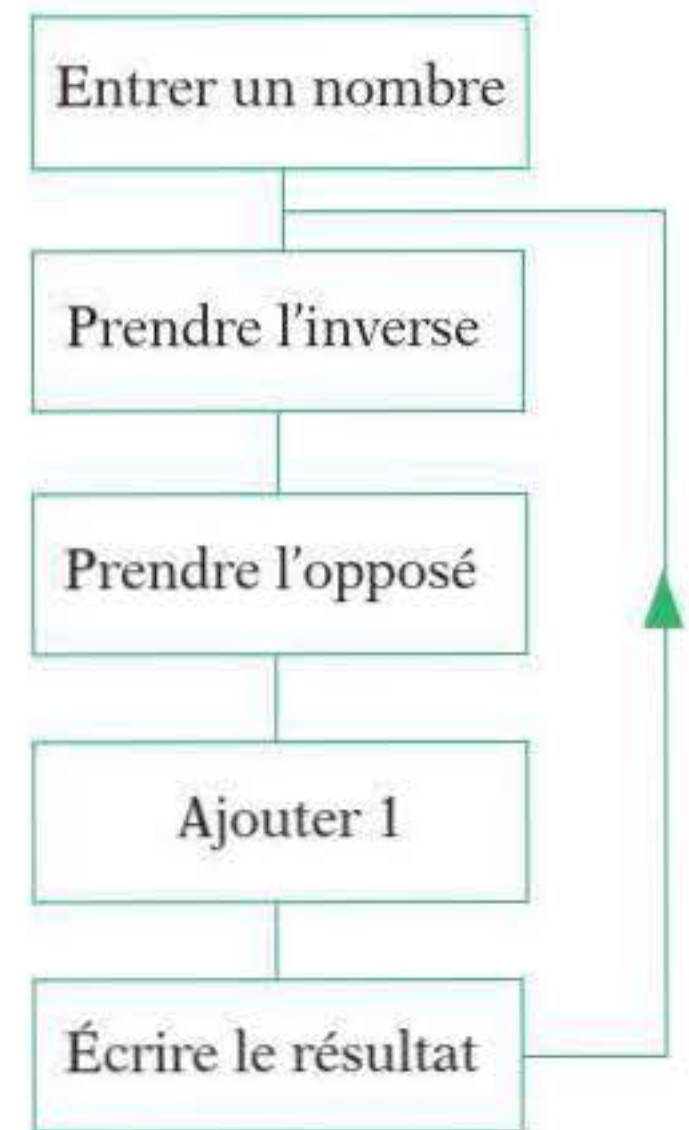


fig. 6

17. Trois nombres consécutifs

Chacun choisit trois nombres consécutifs. Il retranche au carré du deuxième le produit du premier par le troisième. Le résultat est toujours 1. Expliquer cela en appelant « a » le deuxième nombre.

18. Avec une calculatrice

Écrire le volume du solide formé par le cylindre et le cône en fonction de y (fig. 7). Transformer cette formule pour que, lorsqu' y est donné, le calcul de ce volume, soit le plus rapide possible.

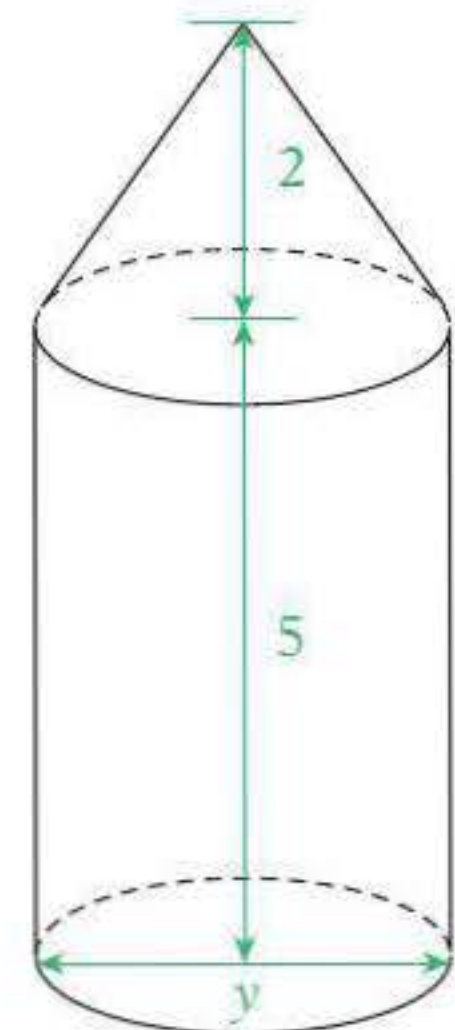


fig. 7

19. Un cône et deux « diabolos »

Les trois cylindres ci-dessous ont tous les mêmes mesures. Les hauteurs des cônes de la fig. 9 ont même mesure.

Le cône inscrit dans la fig. 8 et les diabolos des fig. 9 et 10 ont-ils même volume ?

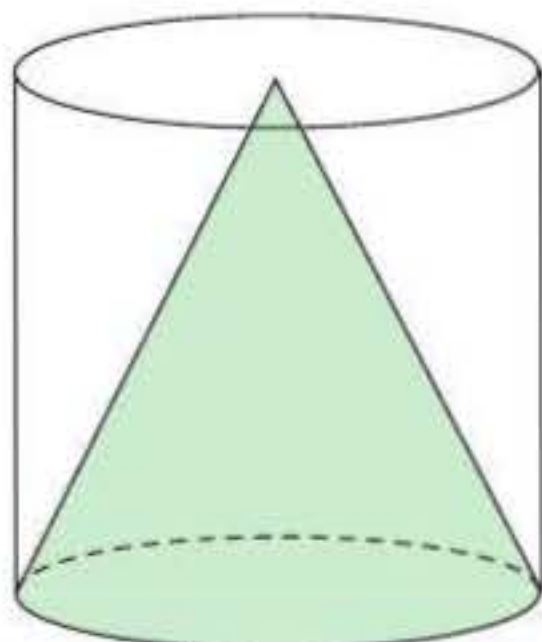


fig. 8

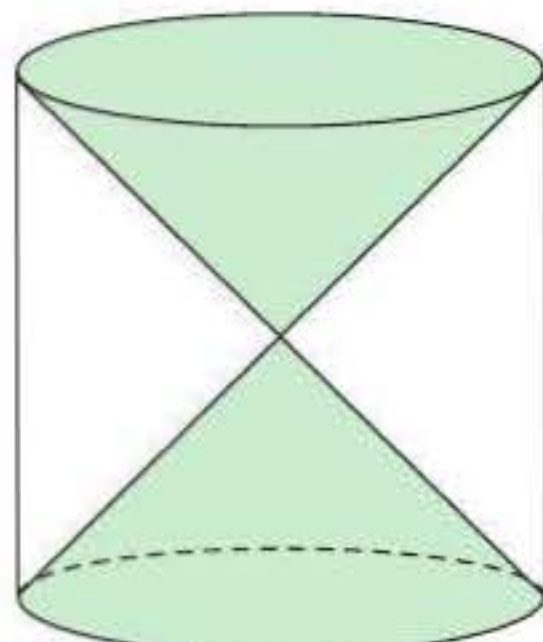


fig. 9

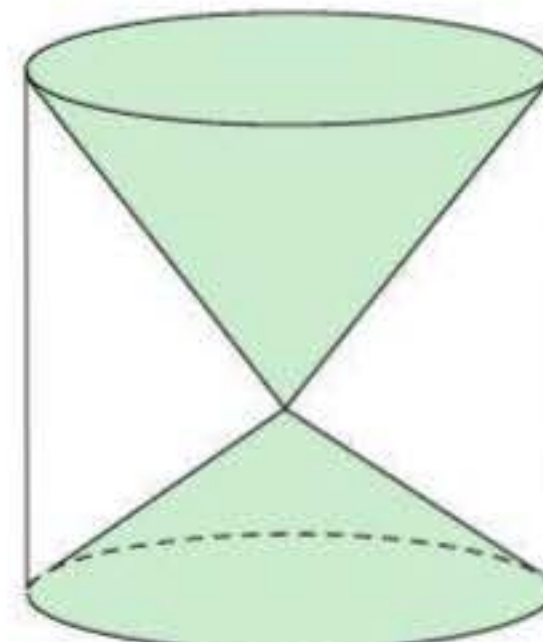


fig. 10

Pour aller plus loin

20. Lire dans les yeux

Choisir un nombre de deux chiffres différents. Écrire le nombre renversé (le chiffre des unités devient le chiffre des dizaines et réciproquement). Calculer la différence entre ces deux nombres (le plus grand moins le plus petit). Repérer ce nombre dans l'une des tables (fig. 11 et 12) et regarder attentivement le sigle qui figure en face de ce nombre.

Le magicien pourra lire ce sigle dans les yeux de celui qui l'a fixé. Comment ? Pourquoi.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98

fig. 11

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98

fig. 12

21. D'après le dernier chiffre

Choisir un nombre de trois chiffres dont le premier chiffre est différent du troisième. Écrire le nombre renversé. Calculer la différence entre ces deux nombres (le plus grand moins le plus petit). En donnant le dernier chiffre de ce nombre au magicien, celui-ci peut deviner le résultat. Expliquer pourquoi.

22. Programmes de calcul

- Choisir deux chiffres a et b différents et dont aucun ne vaut 0.
 - écrire tous les nombres naturels que l'on peut former avec ces deux chiffres,
 - calculer la somme de ces nombres,
 - calculer le quotient de cette somme par $(a + b)$.

Exécuter ce programme plusieurs fois.
Quelle est la propriété du résultat ?
Démontrer.

- b.** Rédiger un programme analogue avec trois chiffres a , b et c . Exécuter ce programme plusieurs fois et énoncer la propriété des résultats obtenus. Démontrer.

23. Et après ?

Prolonger cette suite de calculs. Écrire l'identité correspondante et la démontrer.

$$8 - 2 = 1 \times 2 \times 3$$

$$27 - 3 = 2 \times 3 \times 4$$

$$64 - 4 = 3 \times 4 \times 5$$

...

24. Avec trois dés

Le magicien demande au public de lancer trois dés, de noter les scores puis de cacher les dés sous un foulard.

Il demande ensuite de faire successivement les opérations suivantes :

- doubler le score du premier dé,
- ajouter 5,
- multiplier le résultat par 5,
- ajouter le score du deuxième dé,
- multiplier le résultat par 10,
- ajouter le score du troisième dé,
- retrancher 139.

Le magicien demande de lui fournir ce résultat. Mentalement, il retranche 111 puis il est capable de donner, dans l'ordre, les scores de chacun des dés. Explorer. Démontrer.



25. Prodigeux !

Pour élever au carré un nombre qui se termine par 5, on multiplie le nombre de ses dizaines par le nombre de ses dizaines augmenté de 1. Le produit obtenu est le nombre de centaines du résultat. Il suffit alors d'ajouter 25.

Ainsi pour calculer le carré de 35 on fait 3 fois 4 égal 12. Ensuite on ajoute 25 à 1200. Le carré de 35 est 1225 !

- a.** Appliquer la « recette » pour élever 45 au carré puis 65.
- b.** Écrire le nombre que l'on veut élever au carré sous la forme $10a + 5$, élever cette somme au carré et montrer qu'on peut aussi l'écrire sous la forme $100a(a + 1) + 25$.
- c.** Expliquer ce prodige en comparant cette écriture littérale à la « recette » appliquée.

3 équations, fractions algébriques et transformations de formules

Quand on résout un problème par la méthode des équations, on représente les quantités inconnues par des lettres et on traduit la situation par des opérations. Mais, ce que l'on sait peu, c'est que cette manière de faire n'est apparue que très tardivement dans l'histoire. Les symboles actuels tels que le signe « + » ou le signe « = » n'ont été utilisés en Europe qu'à l'époque de la Renaissance (après les années 1500).

Il y a presque 4 000 ans, les Égyptiens utilisaient déjà des méthodes formulées un peu comme des recettes pour résoudre certaines catégories de problèmes. Ces méthodes ont conduit à des techniques de calcul de plus en plus efficaces.

Vers 780, AL-KHWARIZMI, qui travaillait à Bagdad, a écrit le *Livre abrégé sur le calcul par al-gabr et al-muqabala*. On y trouve deux règles permettant de résoudre ce que l'on appelle aujourd'hui des « équations ». La technique *al-gabr* a donné son nom à l'algèbre. Ces règles sont très proches de celles que l'on pratique actuellement.

Dans ce chapitre, on apprend à utiliser ces règles pour transformer une formule. On revient ensuite aux fractions algébriques dont le dénominateur contient une ou plusieurs variables.

On apprend ensuite à résoudre des problèmes variés par la méthode des équations.

Ceux qui approfondissent leurs compétences dans ce chapitre-ci aborderont des problèmes liés aux calculs de pourcentages.



Première page du Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala

exploration

1. Garder l'équilibre

Une brique est placée sur le plateau de gauche d'une balance. On maintient l'équilibre en déposant à droite les $\frac{3}{4}$ d'une brique et une masse de $\frac{1}{2}$ kg.

On demande quelle est la masse d'une brique.

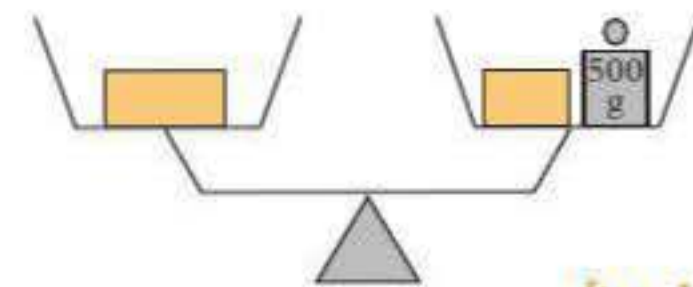


fig. 1

- Dessiner un schéma de la même balance dans laquelle on a enlevé les $\frac{3}{4}$ d'une brique de chaque côté.
- Que pèse le quart d'une brique ?
- Que pèse une brique ?
- Si on appelle x la masse d'une brique, la situation peut être traduite en langage littéral par l'équation

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

- Écrire l'équation qui correspond à la deuxième situation (la balance dessinée en a).
- En déduire la valeur de x .

2. D'une équation à l'autre

- Pour passer de l'équation $3x + 1 = 7$ à l'équation équivalente $3x = 6$, on retranche 1 aux deux membres.

Voici six équations et leur solution. Pour chacune d'elles, indiquer le (ou les) propriété(s) utilisée(s).

1) $-x = 7$ $x = -7$	3) $\frac{1}{2}x = -1$ $x = -2$	5) $4x = 3x + 1$ $x = 1$
-------------------------	------------------------------------	-----------------------------

2) $x - 5 = 0$ $x = 5$	4) $-\frac{2}{3}x = 5$ $x = -\frac{15}{2}$	6) $-4x + 3 = -3x$ $3 = x$
---------------------------	---	-------------------------------

- Quelles sont les valeurs de x qui vérifient les égalités suivantes ?

1) $3x = 0$	4) $3x = -1$	7) $-3\left(x + \frac{1}{3}\right) = -3x - 1$
-------------	--------------	---

2) $0x = 3$	5) $3x - 5 = 3x + 5$
-------------	----------------------

3) $-3x = -3x + 1$	6) $\frac{1}{3}x = 0$
--------------------	-----------------------

3. Une couronne circulaire

Pour calculer l'aire d'une couronne circulaire, on utilise la formule

$$A = \pi(d + c)c,$$

dans laquelle d est le diamètre du cercle intérieur et c la distance entre les deux cercles.

- a. Établir cette formule à partir de celle de l'aire du disque.

Indication

L'aire du grand disque peut s'écrire : $\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$, celle du petit disque peut s'écrire : $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

Après avoir écrit leur différence et transformé cette expression, on opère quelques remplacements sachant que $D - d = 2c$ et que $D = d + 2c$.

- b. Si on sait que $A = 188,4 \text{ mm}^2$ et que $c = 5 \text{ mm}$, calculer d . Écrire l'équation que l'on obtient en remplaçant $A = 188,4$ et $c = 5$, résoudre cette équation.
- c. Lorsque l'on doit effectuer beaucoup de calculs de ce type, on transforme la formule $A = \pi(d + c)c$ en une autre qui exprime d en **fonction** de A et de c . Quelle est cette formule ?

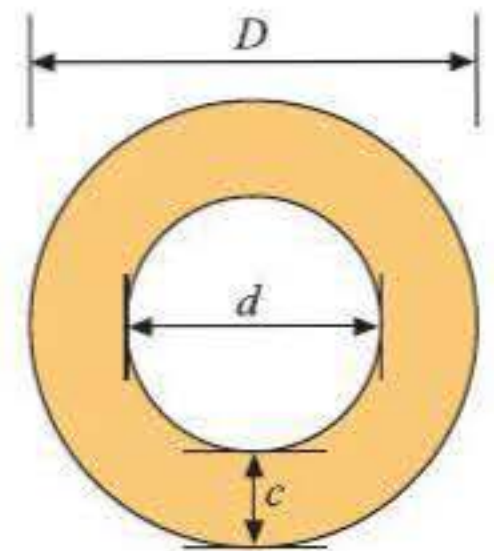


fig. 2

Synthèses 1 et 2
Exercices 1 à 3,
puis 5 et 6
Fiche 12

4. Produit nul

- a. Compléter l'égalité

$$(-2x + 5)(\dots \dots \dots) = -2x^2 - 9x + 35.$$

Par quels nombres faut-il remplacer x pour que l'expression $-2x^2 - 9x + 35$ soit égale à zéro ?

- b. Compléter le tableau suivant.

	Écriture somme	Écriture produit	Valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$
$P_1(x)$	$x^2 + 5x + 6$		
$P_2(x)$		$(2x + 6)(x - 1)$	
$P_3(x)$	$x^2 + 7x + 10$		
$P_4(x)$		$(x - 1)(2x + 3)$	
$P_5(x)$	$-6x^2 - 3x + 9$		

- c. Pour quelles valeurs de x la fraction algébrique $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ n'est-elle pas un nombre réel ?

- d. Les fractions $\frac{P_2(x)}{P_4(x)}$ et $\frac{2x+6}{2x+3}$ sont-elles équivalentes pour n'importe quelle valeur de x ?

Synthèses 3 et 4
Exercices 7 et 8
Fiches 12 à 15

5. L'algèbre pense pour vous !

Une raffinerie mélange 400 litres d'huile d'olive de première pression coûtant 3 € le litre avec 600 litres d'huile de seconde pression. Le mélange revient à 2,40 € le litre. Quel est le prix de production (au litre) de l'huile de seconde pression ?

- Reprendre, sous forme de schéma, les différentes quantités présentes dans l'énoncé.
- Repérer l'inconnue et l'appeler x .
- Quelle est la quantité d'huile du mélange ?
- Quel est le prix total de l'huile de première pression ?
- Écrire le prix total de l'huile de seconde pression.
- Traduire dans le langage de l'algèbre l'égalité suivante : lorsque l'on additionne le prix total de l'huile de première pression et le prix total de l'huile de seconde pression, on trouve le prix total du mélange. C'est l'équation qui permet de trouver la solution du problème.
- Résoudre cette équation.
- Revenir à l'équation et remplacer l'inconnue par la valeur trouvée. Vérifier si cette valeur est exacte.



Pour aller plus loin

6. La TVA

On considère que le montant de la TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est de 21 %.

- Utiliser la disposition du tableau ci-contre pour calculer les prix TVAC (TVA Comprise) des articles qui, hors TVA, coûtent 45 €, 67 €, 124 €, 258 €.
- Un commerçant doit appliquer le même taux de TVA à de nombreux articles. Après avoir terminé ses premiers calculs, il se demande comment passer *directement* de la première colonne à la troisième. Il observe qu'il y a toujours le *même rapport* entre le prix hors TVA et le prix TVAC. Quel est ce rapport ? Écrire la formule qui permet de calculer le prix TVAC quand on connaît le prix HTVA.
- Un article coûte 300 € TVA comprise. Quelle était sa valeur avant qu'on lui applique la TVA ? Écrire la formule qui permet de calculer le prix HTVA quand on connaît le prix TVAC.

Prix HTVA	TVA	Prix TVAC
45	9,45	54,45
67		
...		

7. Prix d'amis

Alexia tient une boutique de vêtements. Elle calcule ses prix de façon à faire un bénéfice de 40 %. Lorsque son amie vient lui acheter quelque chose, elle réduit le prix affiché de 40 %. Après avoir fait ses comptes, Alexia s'aperçoit que non seulement elle n'a rien gagné sur cette vente, mais qu'elle y a perdu. Voici le schéma qu'elle a suivi pour faire ses calculs.

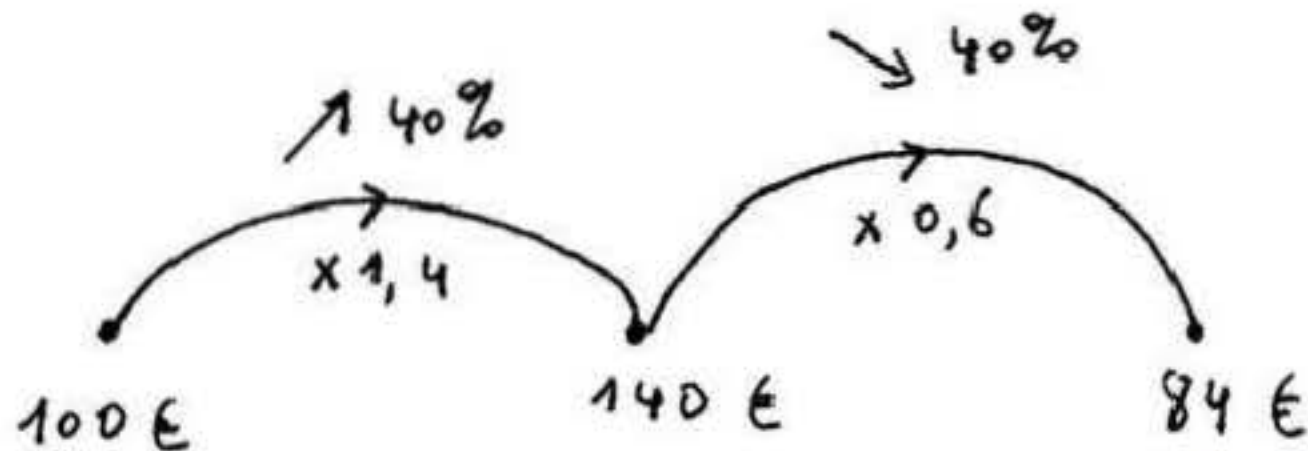
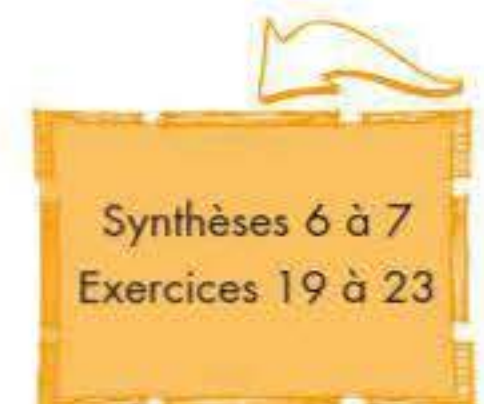


fig. 3

- Quel est le pourcentage de perte ? Écrire la formule qui permet de calculer le prix final lorsqu'on applique successivement une augmentation de 40 % et une réduction de 40 %.
- Et si Alexia fait un bénéfice de 45 % sur un vêtement qu'elle achète 80 € puis qu'elle accorde à son amie une réduction de 45 % sur le prix affiché, quel sera le prix accordé ? Quelle sera sa perte (en € et en % de son prix d'achat) ?



1. Quelles sont les propriétés des égalités qui permettent de résoudre une équation du premier degré ?

Deux propriétés permettent de remplacer une équation par une autre équivalente (qui a les mêmes solutions). D'étape en étape, on arrive ainsi à une équation dont le premier membre est l'**inconnue** et dont le deuxième est un nombre. Ce nombre est la **solution** de l'équation.

Énoncé 3.1

Si on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une équation, on a une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première.

Énoncé 3.2

Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une équation par un même nombre différent de zéro, on a une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première.

Si on multiplie (ou divise) les deux membres par une expression littérale, il faut exclure les valeurs qui annulent ce facteur.

Exemple

$$\begin{array}{l}
 5x = 2x + 12 \\
 3x = 12 \\
 x = 4
 \end{array}$$

On retranche $2x$ aux deux membres.

On divise les deux membres par 3.

La solution est 4.

L'équation $0x = 3$ n'a pas de solution car il n'existe aucun nombre qui, multiplié par 0, donne comme résultat 3. On dit que cette équation est **impossible**.

L'équation $0x = 0$ a comme solution « n'importe quel nombre » car tout nombre multiplié par 0 donne 0 comme résultat. On dit que cette équation est **indéterminée**.

2. Comment transformer une formule ?

Exemple

Dans la formule $v = u + at$, v est la vitesse d'un mobile qui se meut à une vitesse uniformément accélérée, u désigne la vitesse initiale, a est l'accélération et t est la durée.

Transformer $v = u + at$ pour exprimer a en fonction de v , u et t .

$$\begin{array}{l}
 v = u + at \\
 v - u = at \\
 \frac{v - u}{t} = a
 \end{array}$$

Retrancher u aux deux membres.

Diviser les deux membres par t .

Pour transformer une formule, on utilise à bon escient les propriétés des égalités en ayant en vue d'isoler la variable choisie dans l'un des deux membres.

3. Comment résoudre une équation qui n'est pas du premier degré ?

On peut résoudre certaines équations d'un degré supérieur à 1 en procédant comme suit.

- Transformer l'équation en une autre équivalente dont l'un des membres est 0.
- Factoriser l'autre membre pour faire apparaître des facteurs du premier degré.
- Pour chaque facteur du produit, déterminer la valeur de x qui l'annule.

Cette procédure de résolution est appelée « **règle du produit nul** ».

Exemple

$$\text{Résoudre } x^3 = 9x.$$

$$x^3 = 9x$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x = -3 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est $S = [-3, 0, 3]$.

4. À quelle condition une fraction algébrique représente-t-elle un nombre réel ?

On appelle **nombre réel** tout nombre qui désigne l'abscisse d'un point sur une droite orientée et graduée. L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

Exemples

Les nombres 2 ; $\frac{22}{7}$; $\sqrt{2}$; $-\frac{11}{3}$; π ; $0,010010001$; ... sont des nombres réels.

Le nombre $a = \frac{22}{0}$ n'est pas un nombre réel car $a \cdot 0 \neq 22$.

La fraction algébrique $a = \frac{x}{y}$ désigne un réel lorsque y n'est pas nul. Lorsque le dénominateur d'une fraction contient une lettre (une variable ou une inconnue), il faut repérer la (ou les) valeur(s) de la lettre qui annule(nt) le dénominateur.

Exemples

La fraction $\frac{2}{x+7}$ ne désigne un nombre réel que si $x \neq -7$.

La fraction $\frac{2}{x^2-9}$ ne désigne un nombre réel que si $x \neq -3$ et si $x \neq 3$.

Si, dans la fraction $a = \frac{x}{y}$, x et y sont tous les deux nuls, on dit que la fraction est indéterminée.

Pour qu'une fraction algébrique désigne un nombre réel, il faut que son dénominateur soit différent de zéro.

5. Comment résoudre un problème ?

Pour résoudre un problème par la méthode des équations, on passe le plus souvent par les étapes suivantes.

- 1) Repérer et si possible retenir toutes les informations données, imaginer le contexte, faire éventuellement un schéma.
- 2) Cibler l'inconnue.
- 3) Écrire la relation ou la formule qui se rapporte à la situation.
- 4) Traduire cette relation ou cette formule sous forme d'équation.
- 5) Résoudre cette équation et vérifier si la solution convient.
- 6) Replacer la solution dans le contexte du problème.

Exemple

Partager 100 € entre trois personnes de manière que la deuxième ait 10 € de plus que la première et la troisième 20 € de plus que la deuxième.

1) Il s'agit d'un partage dont les parts ne sont pas égales. On connaît le montant à partager, et on sait que la part de la première personne est inférieure à chacune des autres. On indique aussi ce qu'il faut ajouter à la part de la première pour trouver la part des autres.

2) On choisit la part de la première comme inconnue.

3) La somme des parts de chacun est 100 €. La part de la deuxième est $x + 10$; celle de la troisième est $(x + 10) + 20$.

4) L'équation est

$$x + (x + 10) + (x + 30) = 100.$$

5) La solution est $x = 20$.

Vérification : $20 + 30 + 50 = 100$.

6) Les parts sont 20 €, 30 € et 50 €.

6. Comment s'y prendre dans les calculs de pourcentages ?

	Formule
<i>Exemple de situation</i>	n est le nombre donné, i est le pourcentage, x est le nombre cherché.
Prendre 3 % d'un nombre n en une seule opération. 3 % de n c'est $0,03n$.	$x = \frac{in}{100}$
On a pris 3 % d'un nombre x et on a trouvé un nombre n qui vaut 369. Quel est le nombre initial ? On résout l'équation $0,03x = 369$.	$x = \frac{100n}{i}$
Augmenter un nombre n de 3 % de ce nombre. $n + 0,03n = n(1 + 0,03) = 1,03n$.	$x = n \left(1 + \frac{i}{100} \right)$

<p>On a augmenté un nombre x de 21 % et on a trouvé un nombre n qui vaut 363. Quel est le nombre initial ? On résout l'équation $1,21x = 363$. Cette situation correspond à la recherche d'un prix HTVA quand on connaît le prix TVAC.</p>	$x = \frac{n}{1 + \frac{i}{100}}$
<p>Diminuer un nombre n de 3 % de ce nombre. $n - 0,03n = n(1 - 0,03) = 0,97n$.</p>	$x = n \left(1 - \frac{i}{100} \right)$
<p>On a diminué un nombre x de 10 % et on a trouvé un nombre n qui vaut 180. Quel est le nombre initial ? On résout l'équation $0,9x = 180$. Cette situation correspond à la recherche d'un prix avant une remise quand on connaît le prix avec remise.</p>	$x = \frac{n}{1 - \frac{i}{100}}$
<p>Convertir un rapport $\frac{a}{b}$ en « pour cent » ? On résout l'équation $\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$.</p>	<p>Le rapport étant $\frac{a}{b}$ et l'inconnue i on a :</p> $i = \frac{100a}{b}$
<p>Remarque</p> <p>Pour maîtriser les éléments du tableau ci-dessus, il importe de comprendre comment la formule est établie à partir de la situation mais il n'est pas utile de retenir chaque formule. Une fois les principes acquis, il suffit, pour résoudre un problème, de reconnaître la situation de référence.</p>	

7. Comment utiliser une table d'indices ?

Passer de l'indice 100 à l'indice 117, cela signifie qu'un prix de 100 € devient un prix de 117 €. Cela correspond à une **augmentation** de 17 %. Cela signifie aussi que chaque euro **est multiplié par 1,17**.

Passer de l'indice 100 à l'indice 200, cela signifie qu'un prix de 100 € devient un prix de 200 €. Cela correspond à une **augmentation** de 100 € par tranche de 100 €. L'augmentation est donc de 100 %. Cela signifie aussi que chaque euro **est multiplié par 2**.

Passer de l'indice 100 à l'indice 300, cela correspond à une **augmentation** de 200 %.

exercices

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Inventer

- a. Une équation qui comporte une somme et un produit dans le premier membre et dont la solution est 10.
- b. Une équation qui comporte une somme, un produit par une fraction et dont la solution est $\frac{4}{5}$.
- c. Une équation dont l'inconnue figure dans les deux membres et dont la solution est -10 .
- d. Une équation qui n'a pas de solution.

2. Solutions rapides

Pour quelles valeurs de x les égalités suivantes sont-elles vérifiées ?
Écrire directement la solution.

a. $3x = 12$	e. $-x - 1 = 0$	i. $-3x = 0$	m. $(3 + x) - 3x = -2x + 3$
b. $-2x = 12$	f. $x - 1 = -1$	j. $\frac{1}{3}x = 1$	n. $(3 + x) - 3x = -2x + 6$
c. $\frac{1}{3}x = -12$	g. $3x = 0$	k. $\frac{1}{3}x = 0$	o. $7x - 10 - (2x - 5) = 5(x - 1)$
d. $-x = -1$	h. $3 + x = 0$	l. $3x = 3x + 1$	p. $7x - 10 - (2x - 5) = 5(x - 2)$

3. Quelle propriété ?

Transformer chacune de ces formules en isolant n dans un des deux membres. Citer chaque fois la propriété qui permet de passer d'une égalité à l'autre (donner son numéro, voir synthèse).

Poser les conditions d'existence quand il y a lieu (pour les fractions qui figurent dans l'énoncé et celles qui figurent dans les solutions).

a. $an = b$	d. $\frac{n}{a} = \frac{b}{a}$	g. $q = \frac{a}{n} - r$	j. $a = \frac{b}{cn}$
b. $an + b = c$	e. $a = \frac{b}{n}$	h. $q = \frac{a-r}{n}$	k. $a = \frac{b}{cn} + d$
c. $a = \frac{cx}{n}$	f. $a = \frac{n}{b} - a$	i. $a - n = b$	l. $a = \frac{b+d}{cn}$

4. Démontrer que $2 = 1$

On considère deux nombres égaux a et b et on écrit

$$a = b.$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par a

$$a^2 = ab.$$

On retranche b^2 aux deux membres

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

En divisant les deux membres par $(a - b)$, on obtient

$$a + b = b,$$

ou encore

$$2b = b.$$

On divise les deux membres par b , ce qui donne

$$2 = 1.$$

Bizarre, non ? Mais où est l'erreur ?

Appliquer une procédure

5. Isoler une lettre

Transformer chaque formule pour que la lettre en vert soit isolée dans le premier membre. Indiquer les conditions sur la ou les variables pour que la solution soit un nombre réel.

a. $q = 4s + b$

f. $t = \frac{am}{by}$

b. $d = kt + a$

g. $q = k(r + a)$

c. $g = \frac{z}{a} + b$

h. $d = k(t - a)$

d. $r = fs + b$

i. $u = \frac{h}{a + x}$

e. $d = kt - a$

6. Attention aux fractions

Résoudre les équations suivantes.

a. $3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$

d. $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$

b. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{5x}{4} - 4 \right) = x + \frac{27}{5}$

e. $\frac{5x}{18} - \frac{4x-3}{8} = \frac{9-2x}{9}$

c. $\frac{5x-11}{4} - \frac{x-1}{10} = \frac{11x-1}{12}$

7. Règle du produit nul

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 - 3x = 0$

d. $(x - 4)^2 - 49 = 0$

b. $16x^2 - 9 = 0$

e. $(x - 2)^2 - 9(x - 2) = 0$

c. $(x - 9)^2 - 1 = 0$

f. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

8. Somme, produit, fraction

a. Changer la forme des polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$... selon les indications du tableau ci-dessous.

	Écriture somme	Écriture produit	Valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$
$P_1(x)$	$x^2 + 6x + 9$		
$P_2(x)$		$(x - 3)(x + 3)$	
$P_3(x)$	$9x^2 - 12x + 4$		
$P_4(x)$		$(3x - 2)(3x + 2)$	
$P_5(x)$	$6x^2 + 9x + 3$		
$P_6(x)$		$-3(2x + 1)(x - 3)$	
$P_7(x)$	$x^2 - 2x + 1$		
$P_8(x)$		$(x - 4)(x + 1)$	
$P_9(x)$	$2x^2 - 17x + 30$		
$P_{10}(x)$		$(x - 6)(x + 5)$	

b. Pour quelles valeurs de x les fractions suivantes ne sont-elles pas des nombres réels ?

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}, \frac{P_3(x)}{P_4(x)}, \frac{P_5(x)}{P_6(x)}, \frac{P_7(x)}{P_8(x)}, \frac{P_9(x)}{P_{10}(x)}$$

c. Simplifier les fractions $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}, \frac{P_3(x)}{P_4(x)}, \frac{P_5(x)}{P_6(x)}, \frac{P_7(x)}{P_8(x)}, \frac{P_9(x)}{P_{10}(x)}$.

Résoudre un problème

9. Aire sous une arche

L'aire sous une arche symétrique peut être calculée **approximativement** à partir des mesures indiquées par la fig. 4.

$$A = \frac{d(H + 4h)}{6}$$

dans laquelle,

- d est la largeur de l'arche en mètres ;
- H est la hauteur maximum en mètres ;
- h est la hauteur mesurée respectivement à un quart ou à trois quarts du bord.

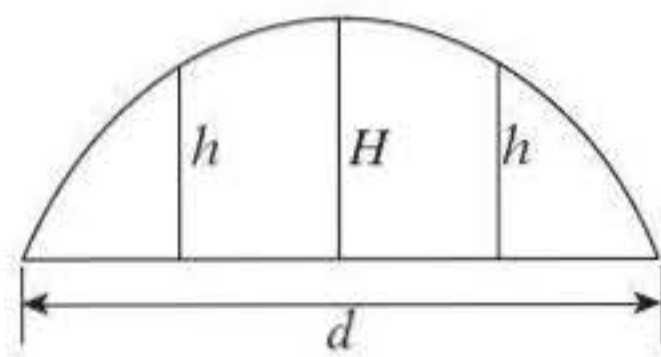
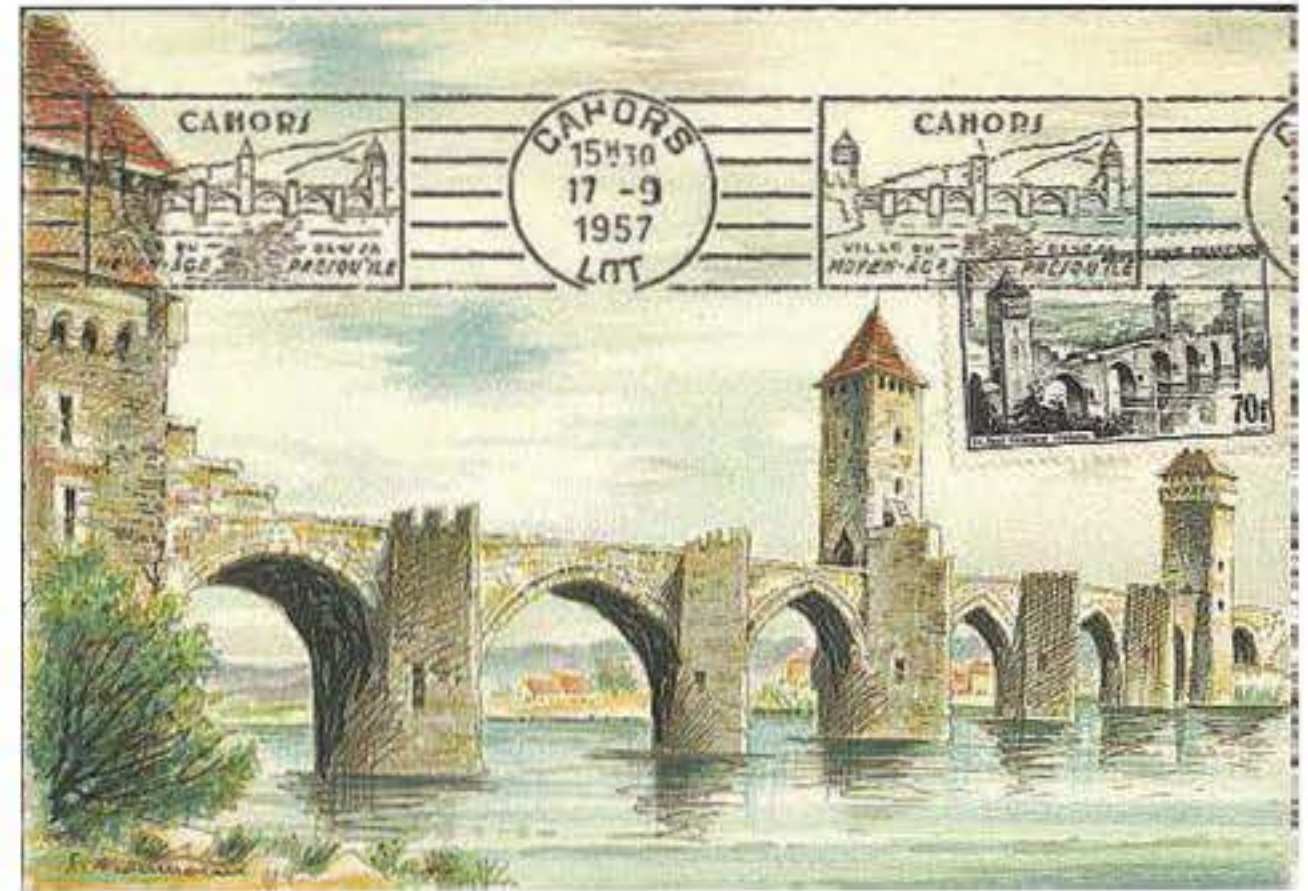


fig. 4



- a. Transformer cette formule pour calculer h en fonction de A et de H .
- b. Utiliser une calculatrice pour compléter ce tableau.

A	H	d	h
48	16	4,5	
768	48	24	
408	32	18	

10. Volumes

- a. Le volume de la pyramide (fig. 5) se calcule à partir de la formule $V = \frac{A_1 h}{3}$. Exprimer h en fonction de V et de A_1 .

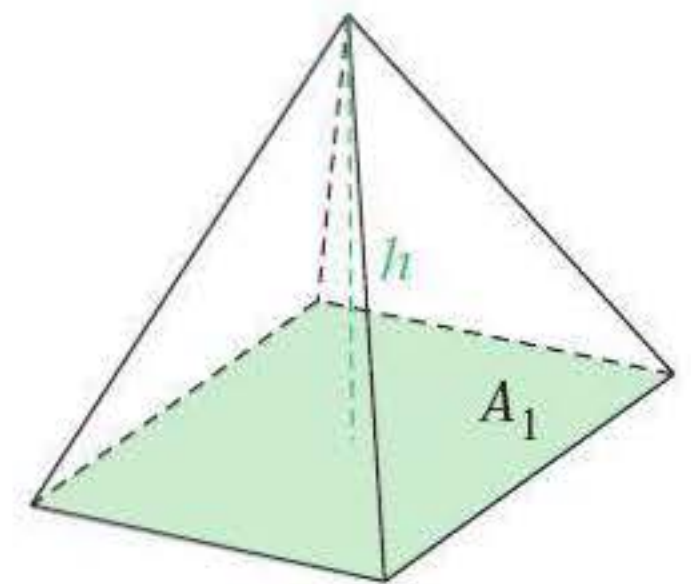


fig. 5

- b. La formule $V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$ permet de calculer le volume d'un tronc de pyramide (fig. 6) quand on connaît sa hauteur et les surfaces des deux bases. Exprimer h en fonction du volume et des deux bases.

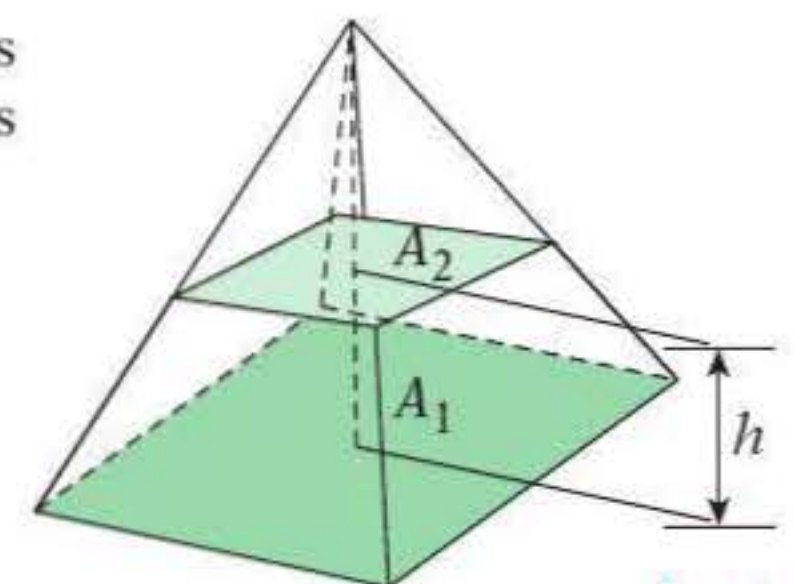


fig. 6

- c. La formule $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ permet de calculer le volume d'un cylindre (fig. 7) quand on connaît sa hauteur et le diamètre de la base. Exprimer h en fonction du volume et du diamètre. Ensuite exprimer d en fonction du volume et de la hauteur.

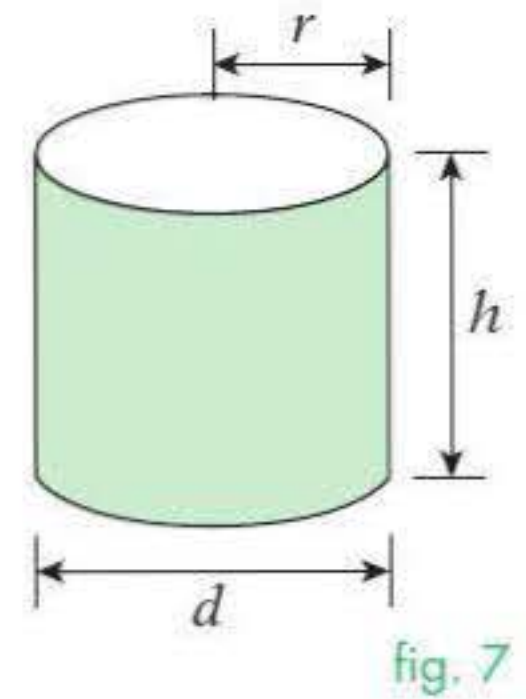


fig. 7

11. Arêtes

- a. Écrire la longueur (T) du fil métallique utilisé pour construire la charpente de chacune de ces boîtes en fonction des dimensions données sur les figures.
- b. Écrire l en fonction de T , k et j (fig. 8).
- c. Sachant que p est le côté de l'octogone (fig. 9), écrire T en fonction de p et l . Écrire l en fonction de p et T .

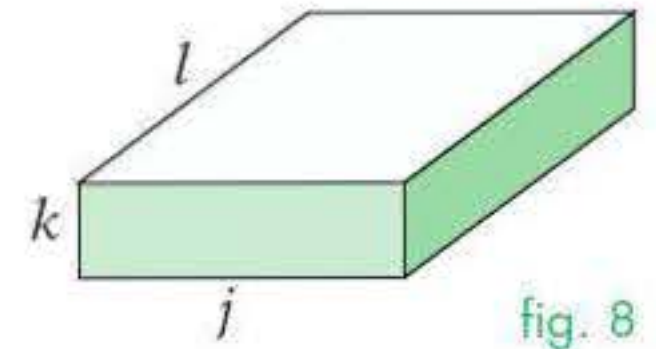


fig. 8

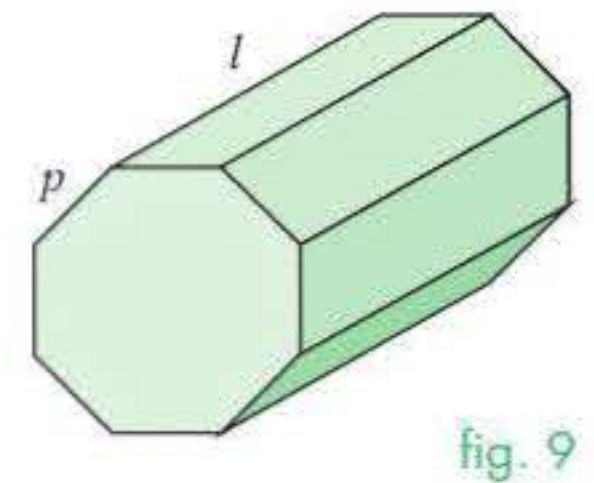


fig. 9

- d. La formule pour calculer l'aire d'un cylindre (fig. 10) est :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Écrire la hauteur en fonction de l'aire et du rayon.

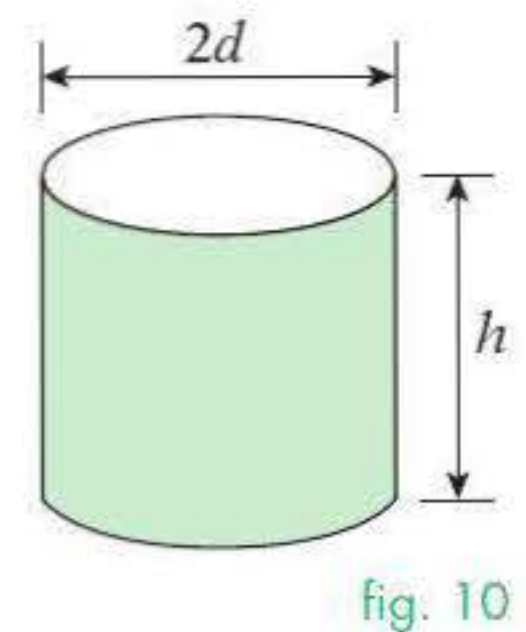


fig. 10

12. Fabriquer des poêlons, des boîtes

- a. Une usine fabrique des poêlons. La surface intérieure est recouverte d'une matière anti-adhésive. Quand un nouveau modèle est mis en fabrication, il faut calculer la surface intérieure pour déterminer la quantité de matière anti-adhésive nécessaire.

On peut calculer l'aire de la surface intérieure du poêlon (fig. 11) en utilisant la formule

$$A = \pi D \left(\frac{D}{4} + h \right).$$

En général, on calcule le volume d'un cylindre en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur. Expliquer pourquoi la formule proposée est équivalente.

- b. Utiliser cette formule pour calculer l'aire de la surface intérieure d'un poêlon qui a 22 cm de diamètre et une hauteur de 11 cm.

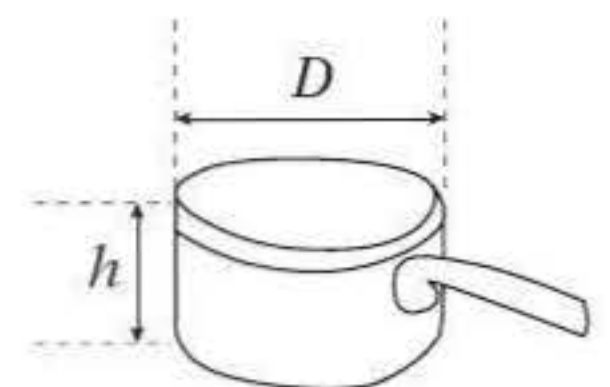


fig. 11

On décide de fabriquer des modèles pour lesquels l'aire de la face intérieure et le diamètre du fond sont fixés. Écrire la formule qui permet de calculer la hauteur des poêlons en fonction de ces données.

- c. Calculez z pour que la fabrication des deux boîtes (fig. 12 et 13) avec couvercles consomme la même surface de tôle (unité de longueur 1 cm).

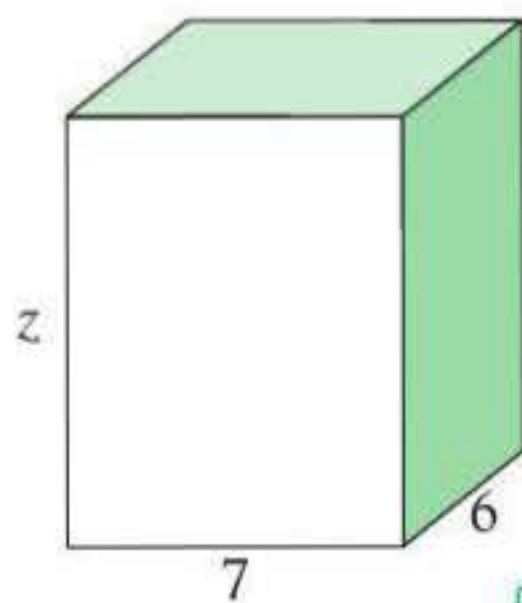


fig. 12

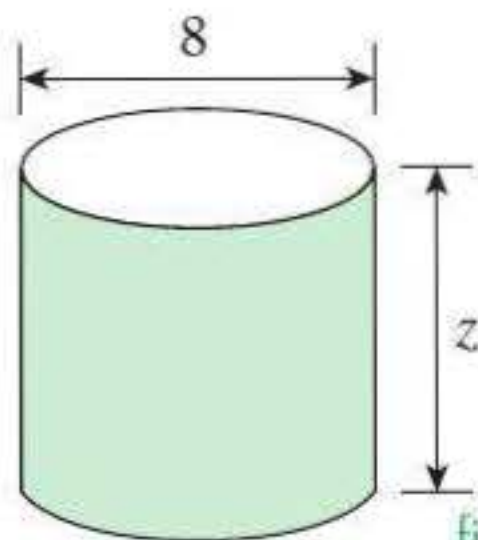


fig. 13

13. De quelle fraction s'agit-il ?

Le numérateur d'une fraction dépasse de 50 le dénominateur de cette fraction. Lorsqu'on ajoute 7 aux deux termes, elle vaut 3 unités. Trouver cette fraction.

14. Dividende, diviseur, quotient et reste

Trouver deux nombres sachant qu'ils diffèrent de 495, que leur quotient est 4 et le reste de leur division, 60.

15. Nombre et nombre renversé

- Trouver un nombre de deux chiffres sachant que le chiffre des unités est 6 et que, si on retranche 45 du nombre renversé, on retrouve le nombre départ.
- On sait que le chiffre des dizaines d'un nombre de deux chiffres est égal aux deux tiers du chiffre des unités. Le nombre lu à rebours surpasse de 18 le nombre primitif. Avec ces seules données, peut-on trouver ce nombre ? Dans l'affirmative, quel est-il ?

16. Des pièces contre des billets

Une personne échange des pièces de 2 € contre des billets de 5 €. Après l'échange elle compte ses billets et constate qu'elle a beaucoup moins de billets que de pièces (évidemment !). La différence est 102. À partir de là, peut-on savoir quel est le montant de l'échange ?



Pour aller plus loin

17. Lire les solutions sur le graphique

Se servir du graphique (fig. 14) de la fonction

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

pour résoudre l'équation $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$.

Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$.

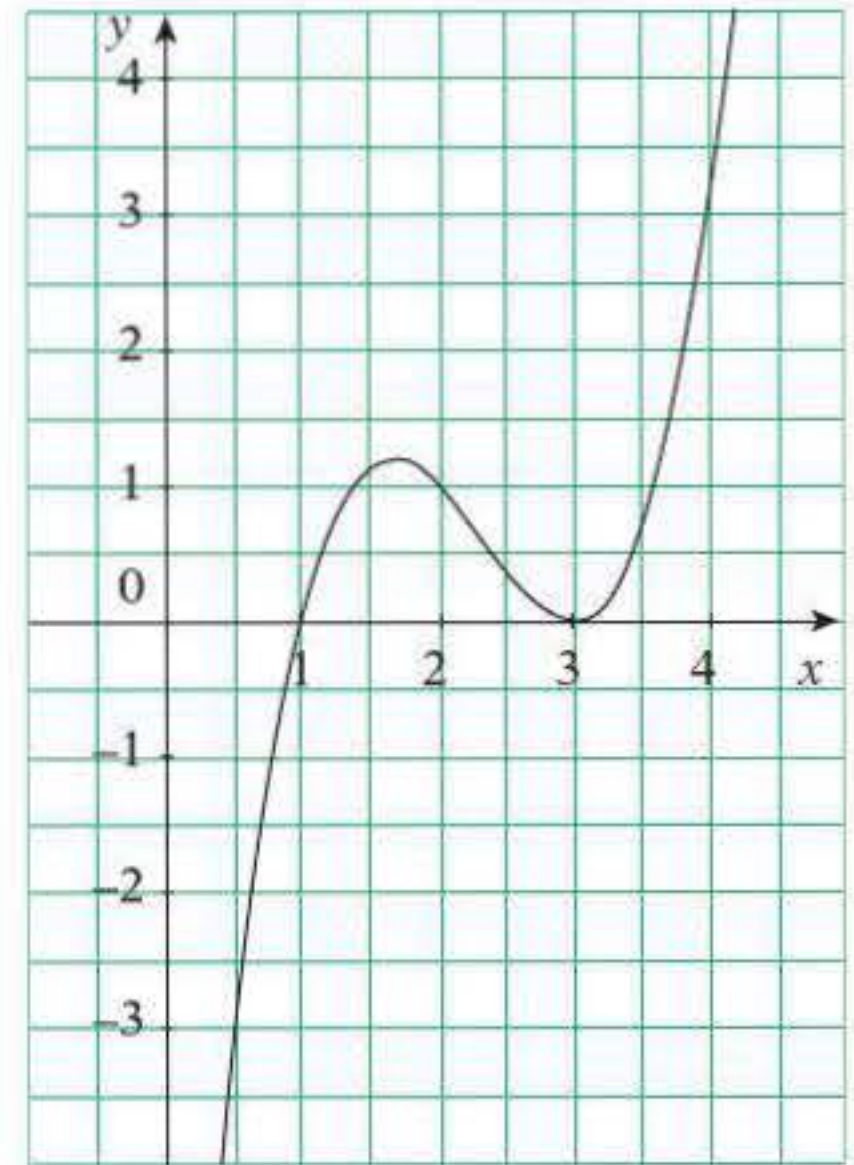


fig. 14

18. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Une vitesse initiale u (en m/s) et l'accélération a (m/s^2) étant donnés, la formule $v = u + at$ permet de calculer la vitesse (en m/s) du mobile en fonction de la durée (en s) du parcours.

- Transformer cette formule pour exprimer t en fonction de v et de u .
- Utiliser une calculatrice pour compléter ce tableau.

u	a	v	t
20	0,3	32	
5	5	15	
2	2	10	
100	0,5	250	

- Quels sont les ensembles de données qui correspondent :
 - au mouvement d'un cycliste qui aborde une descente ?
 - au vol d'un oiseau qui profite de la vitesse du vent ?
 - au déplacement d'un train qui aborde une longue ligne droite en descente ?
 - au vol d'un avion qui, après le décollage, continue son ascension pour atteindre progressivement sa vitesse de croisière ?



19. Population active

Le tableau ci-dessous donne, en milliers d'individus, le nombre d'actifs¹ parmi les hommes et les femmes, selon les tranches d'âges en 1999.

Actifs	Femmes	Hommes
Moins de 25 ans	1 615	1 756
De 25 à 55 ans	9 117	11 057
Plus de 55 ans	1 076	1 362
Total	11 808	14 175

Source : INSEE, France, portrait social 2000

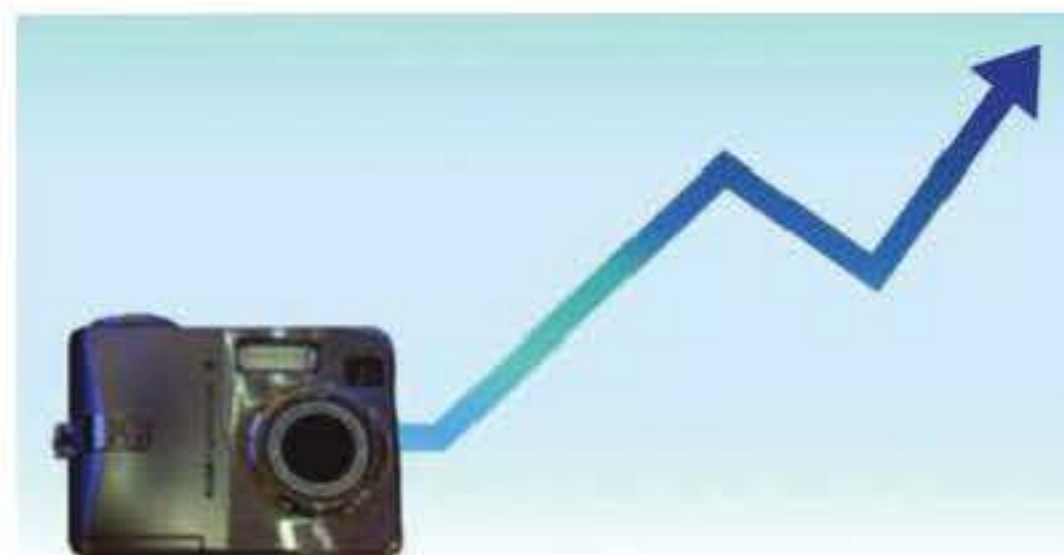
- Calculer le pourcentage de femmes de 25 à 55 ans parmi les femmes actives.
- Calculer le pourcentage d'hommes de 25 à 55 ans parmi les hommes actifs.
- Les pourcentages trouvés sont-ils dans le même ordre que les données absolues ?
- Comparer le pourcentage de « moins de 25 ans » parmi les femmes actives et le pourcentage de « moins de 25 ans » parmi les hommes actifs.

20. Retrouver le nombre initial

- Le lendemain d'un jour d'élection communale, on peut lire dans un quotidien régional :
« 1 695 personnes ont pris part au vote, c'est-à-dire 75 % des inscrits sur les listes électorales ».
Calculer le nombre des inscrits.
- Un magasin d'accessoires fait une réduction de 25 % sur tous ses sacs et bijoux. À cette occasion, Muriel achète un bracelet qu'elle paie 15 € et un sac qu'elle paie 27 €. Quels étaient les prix avant réduction ?

21. Augmentations et baisses successives

- De janvier à juin, le prix d'un produit augmente de 2 % ; de juillet à décembre, il subit une nouvelle augmentation de 3 %. Que vaut, en décembre, un produit qui coûtait 100 € en janvier ? Et un produit qui coûtait 345 € en janvier ?
- Le prix d'un produit augmente de 7 %, puis diminue de 7 %. Revient-il au prix de départ ?



¹ La population active est formée par les actifs occupés, les chômeurs et les militaires du contingent.

22. Taux d'évolution

Lorsque l'on veut s'informer sur l'évolution des prix au fil des années, on peut faire une recherche sur Internet à partir des mots-clés « index » ou « indice des prix ». Au cours d'une telle recherche, on a trouvé un tableau reprenant les prix du pain, entre 1951 et 1999. Tous ces prix sont indiqués dans la monnaie de l'époque : en francs belges. Ce tableau porte le titre « L'évolution scandaleuse du prix du pain ! ». Le « scandale » apparaît surtout quand on compare les prix du pain à ceux du blé. Voici quelques données extraites de ce tableau.



	Prix du pain de 800 g	Prix du blé
1951	7,50 BEF	Non renseigné
1962	8,50 BEF	Non renseigné
1970	13,25 BEF	11,00 BEF
1990	48,00 BEF	8,36 BEF
1999	59,00 BEF	Non renseigné

Le schéma ci-dessous montre comment calculer le taux d'évolution du prix du pain entre 1951 et 1970 puis entre 1970 et 1990.

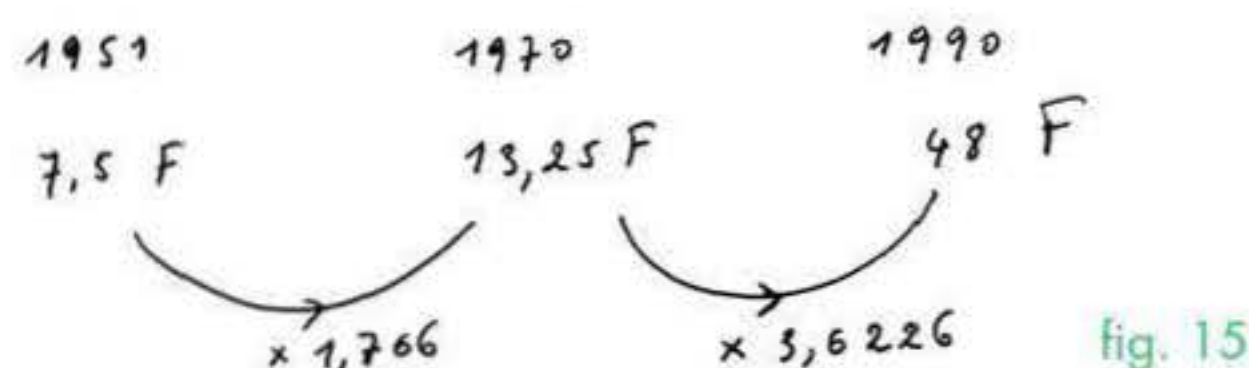


fig. 15

Entre 1951 et 1970 (en 19 ans), chaque BEF a été multiplié par 1,766. C'est une augmentation de 76,6 %.

Entre 1970 et 1990 (en 20 ans), chaque BEF a été multiplié par 3,6226. Donc 100 € deviennent 362,26 €. C'est une augmentation de 262,26 %.

Comparer cette augmentation à celle du blé pour la période située entre 1970 et 1990.

23. Indice des prix à la consommation

On veut savoir ce que coûte, en décembre 2005, un produit non alimentaire¹ qui, en 1996, coûtait 2 120 BEF. On suppose que ce produit a suivi l'évolution moyenne des prix. On s'en réfère donc à l'indice des prix à la consommation² dont voici un extrait.

Calculer ce prix en euros.

Principaux groupes de dépenses (base 1996 = 100)

Période	Produits alimentaires ^(a)	Produits non alimentaires	Services	Loyer
Décembre 2005	118,01	117,61	121,67	118,39

(a) Y compris les boissons.

1 En 1996, les prix étaient encore exprimés en francs. Pour comparer avec des prix exprimés en euros, il faut opérer la conversion. Prendre comme base : 1 € = 40 BEF.

2 Données recueillies sur le site : © 1998/2006 SPF Economie – Direction générale Statistique.

4 fonctions du premier degré

Le prix d'une course en taxi **est fonction de** la longueur du trajet. Mais comment varie-t-il ? Est-il **proportionnel** au nombre de kilomètres ? On sait qu'il n'en est pas ainsi car il faut tenir compte de la prise en charge, un montant, toujours le même, qui fait partie du prix, quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.

L'allongement d'une tige de métal **est fonction de** la température, la distance parcourue à une vitesse donnée **est fonction de** la durée du trajet... En mathématiques, la fonction apparaît comme un moyen d'exprimer la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre. Cette « autre grandeur » est appelée la **variable**.

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions qui ne dépendent que d'une seule variable (du premier degré). De telles fonctions servent de modèles à de nombreux phénomènes économiques, physiques, géométriques...

En représentant une fonction du premier degré dans un repère, on entre dans un domaine des mathématiques appelé « géométrie analytique ».



« Le ministre a marqué son accord pour une adaptation des prix maxima des courses de taxis. Cette augmentation des prix s'explique notamment par la hausse des produits pétroliers. Dorénavant, le tarif maximal pour la prise en charge sera de 2,40 € tandis que le prix au kilomètre a été fixé à 1,25 € » (L'Echo, 13 août 2008).

exploration

1. Imprimer ses photos

Basile veut imprimer ses photos via Internet et consulte deux sites. Sur le premier, l'impression d'une photo en format 13×17 coûte $0,2 \text{ €}$; les frais de port sont compris. Sur le second, pour le même prix de $0,2 \text{ €}$ à l'unité, Basile peut avoir un format plus grand, mais il doit payer un supplément de $2,40 \text{ €}$ par envoi (emballage et frais de port).

Voici le tableau de valeurs qui correspond à l'impression de photos via le premier site. On l'a copié deux fois pour montrer plus clairement ses différentes propriétés.

- a. Réaliser un autre tableau pour l'impression de photos via le second site (il faut donc intégrer le prix de l'envoi) et comparer les propriétés des deux tableaux.



Nbre de photos	Coût
0	0
1	0,2
2	0,4
3	0,6
4	0,8
5	1
6	1,2

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Nbre de photos	Coût
0	0
+1	0,2
+1	0,4
+1	0,6
+1	0,8
+1	1
+1	1,2

Les accroissements sont constants.

- b. Voici à présent le graphique qui montre le coût en fonction du nombre de photos imprimées et ce, pour les deux sites. Quel est le nombre de photos de chaque sorte que l'on peut réaliser avec 4 € ? Lire la réponse sur le graphique (fig. 1).
- c. Écrire les formules qui permettent de calculer les coûts quand on connaît le nombre de photos.
- d. Écrire la formule qui permet de calculer le nombre de photos du second site quand on connaît le prix payé pour l'impression.
- e. Si on fait imprimer 10 photos, quel est, pour chaque site, le prix de revient par photo ? Et si on en fait imprimer 30 ?

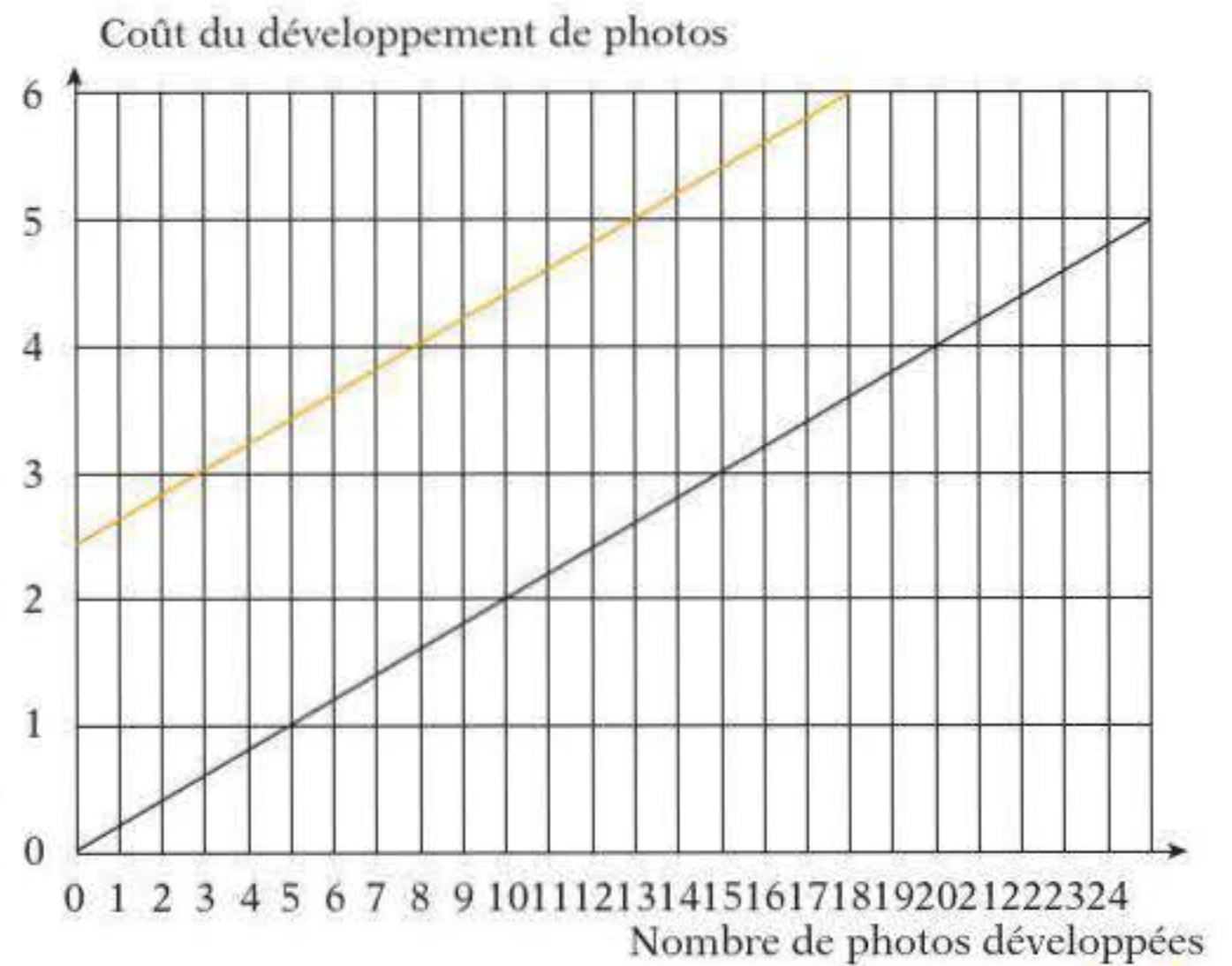


fig. 1

2. Consommation d'essence

Ce graphique (fig. 2) montre la quantité d'essence contenue dans le réservoir d'une camionnette en fonction du nombre de kilomètres parcourus. Au départ, le réservoir est plein et on suppose que la consommation est constante : il s'agit donc d'une **consommation moyenne**.

- a. Quelle est la capacité du réservoir ?
- b. Quelle est la quantité d'essence qui reste après 200 km, 300 km, 400 km ?
- c. La quantité restante est-elle proportionnelle au nombre de kilomètres ?
- d. Combien d'essence cette camionnette consomme-t-elle aux cent kilomètres ?
- e. La formule qui permet de calculer ce qui reste dans le réservoir est $y = 50 - \frac{x}{10}$, dans laquelle x est le nombre de

kilomètres parcourus et y le contenu du réservoir. Pour un réservoir de 45 litres et une consommation de 7 litres aux cent kilomètres, quelle serait la formule ?

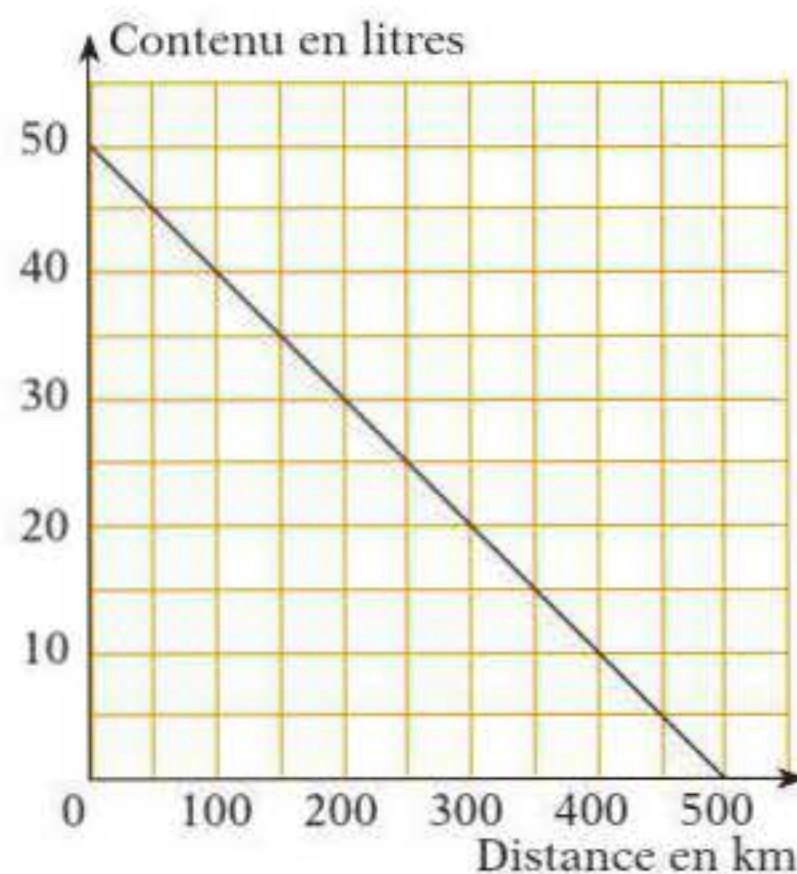
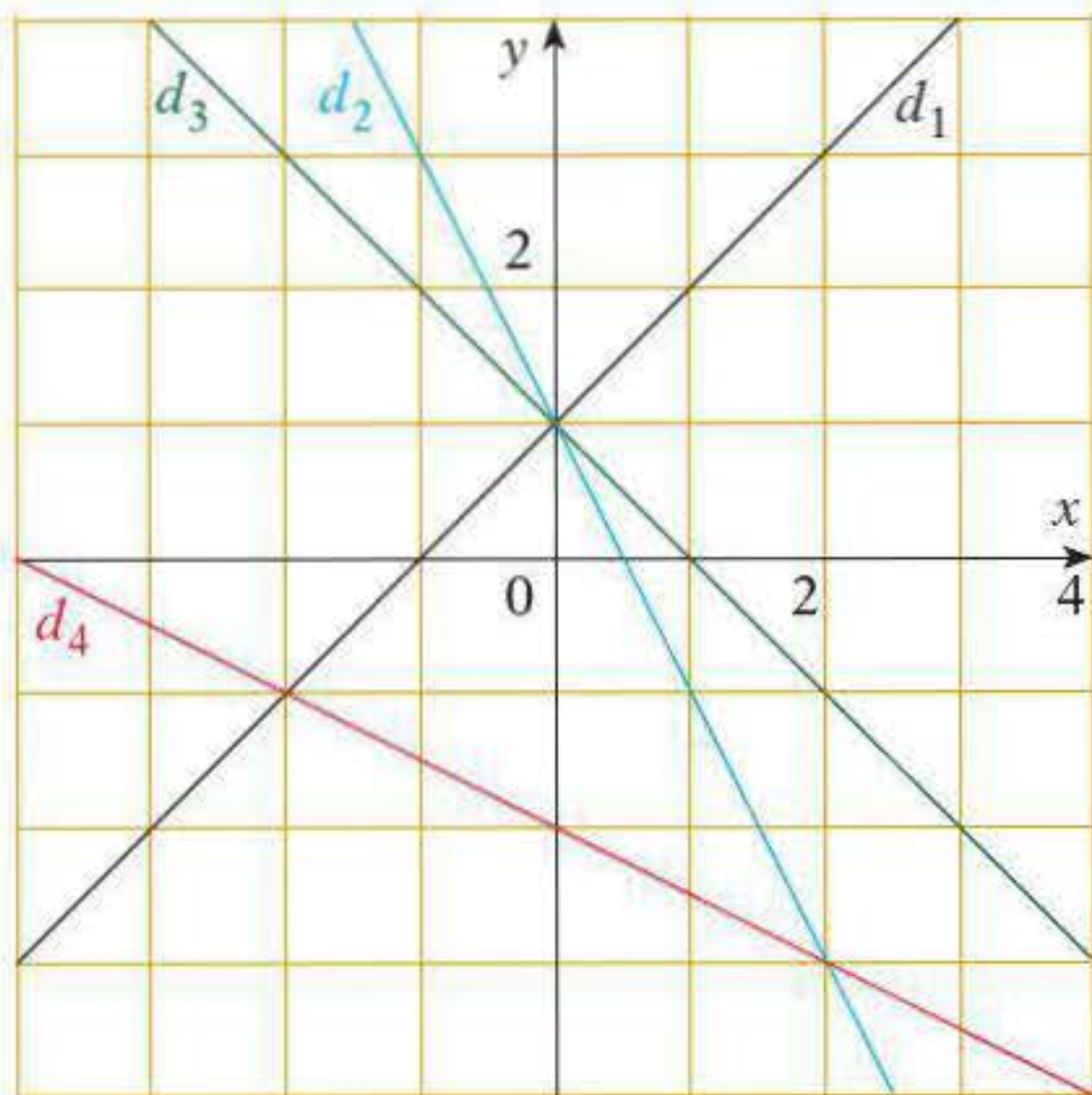


fig. 2

3. Vers une généralisation

Jusqu'à présent, les nombres mis en relation dans les formules, les graphiques ou les tableaux, ont toujours été positifs. Dans l'exercice qui suit, on trouve aussi des nombres négatifs. Associer à chaque droite l'une des équations données.



- a. $2y = -x - 4$
- b. $y = 1 - x$
- c. $y = x + 1$
- d. $y = -2x + 1$
- e. $y = 2x + 1$
- f. $2y = 3x - 4$

fig. 3

4. Accroissements

Ce tableau correspond à une formule du premier degré ; les accroissements de x (que l'on note Δx) sont irréguliers. Observer les accroissements de y (ils sont notés Δy).

Comment déterminer la pente de la droite correspondante ?

Δx	x	y	Δy
	-2	0	
4			+6
	2	6	
4			+6
	6	12	
2			+3
	8	15	
16			+24
	24	39	

5. Intersection avec les axes

Soit par exemple la formule $y = 4x + 3$.

- a. Lorsqu'on remplace x par 0, que vaut y ?
Le point $(0, 3)$ est l'intersection de la droite avec l'axe des y .
- b. Lorsqu'on remplace y par 0, que vaut x ?
- c. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la droite avec l'axe des x ?
- d. Et si la formule était $y = -2x + 4$, quelles seraient les intersections avec les axes ?

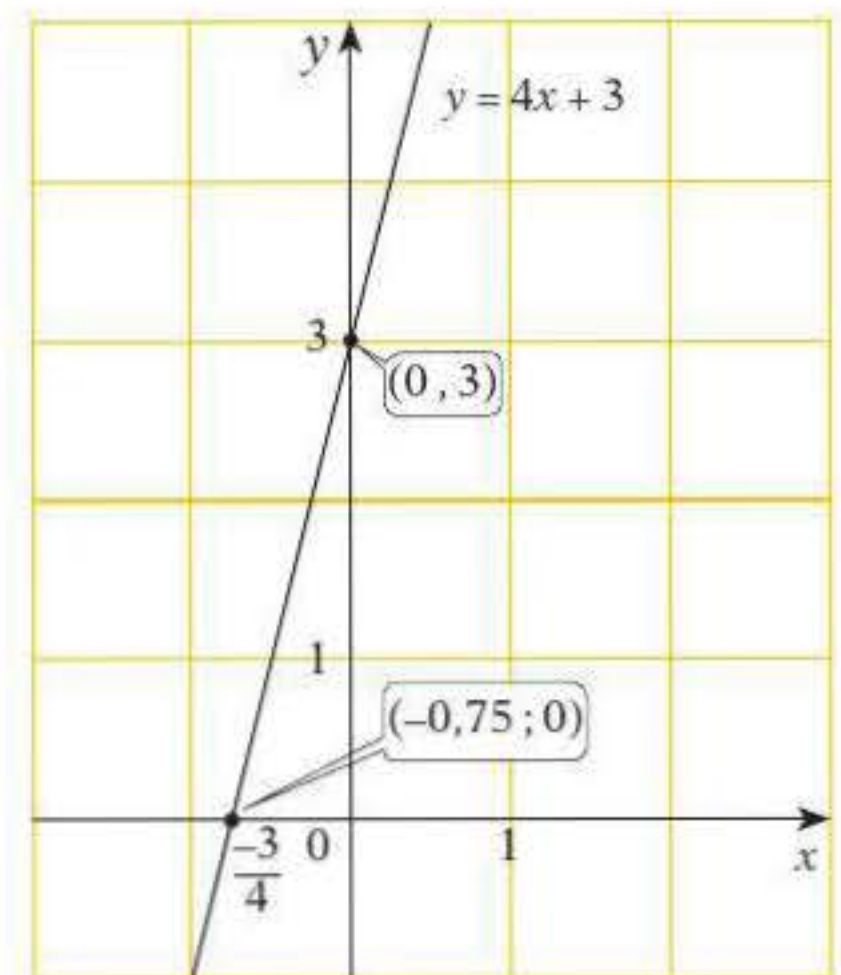


fig. 4

Synthèses 1 à 5
Exercices 1 à 3,
5 à 10
Fiches 16, 17, 18

6. Sur papier quadrillé

Quand on trace des droites sur une feuille quadrillée, on peut s'appuyer sur le quadrillage pour tracer des parallèles ou, si elles sont déjà tracées, pour vérifier si elles sont parallèles ou non.

- Vérifier sans équerre si les droites a et b de la fig. 5 sont parallèles ou non.
- La droite c est perpendiculaire à la droite a . Elle a été construite en « comptant des carreaux ». Dessiner sur une autre feuille quadrillée une droite b' qui a la même direction que la droite b et tracer, sans instrument, une droite d perpendiculaire à b' .

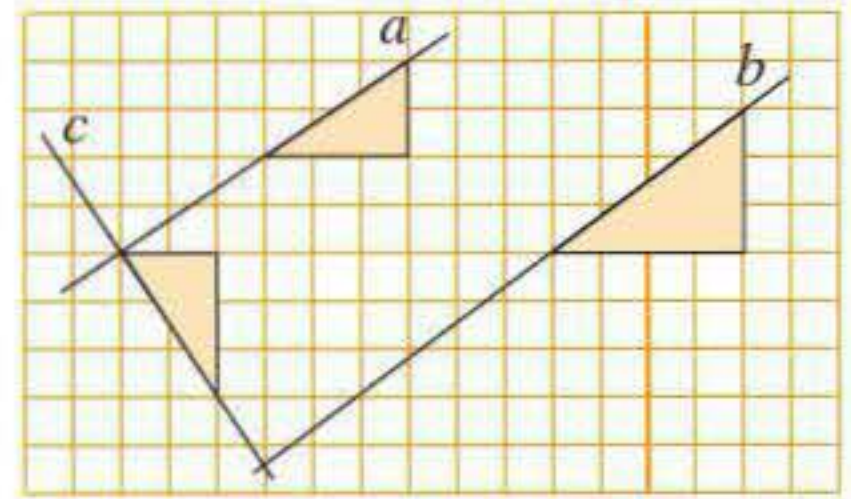


fig. 5

7. Les pentes de droites perpendiculaires

- Sur la fig. 6, la droite d_2 est l'image de la droite d_1 par une rotation de 90° .
Chaque droite est-elle croissante ou décroissante ? Écrire la pente de chaque droite.
- Écrire l'équation de d_1 et l'équation de d_2 .
- Écrire l'équation d'une droite d_3 , perpendiculaire à d_2 passant par le point de coordonnées $(-7, 3)$.

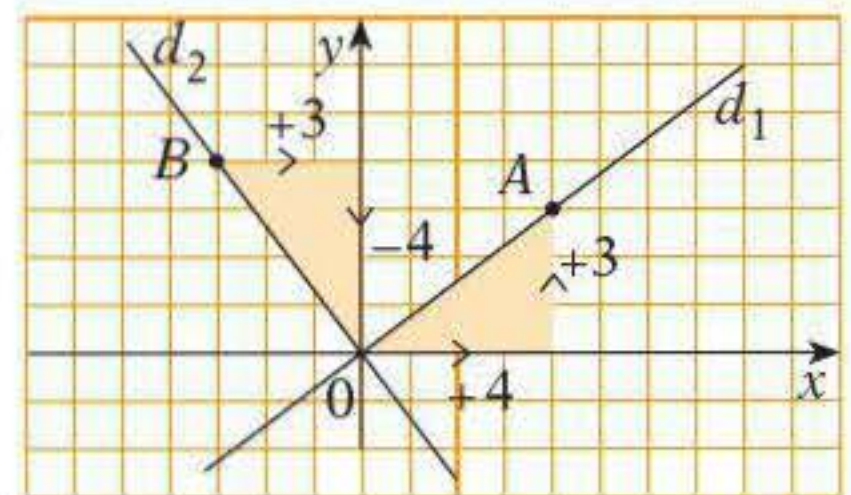


fig. 6

Synthèses 6 et 7
Exercices 4, 11
à 19
Fiche 19

8. Modéliser pour décider et prévoir

Une entreprise s'interroge sur sa politique de publicité et met en relation le budget qu'elle lui consacre avec le chiffre d'affaires. Pour cela, elle rassemble les données de ces derniers mois.

- Représenter ces données par des points sur un graphique en portant les dépenses publicitaires en abscisse (2,5 cm pour 500 €) et les chiffres d'affaires en ordonnée (1,5 cm pour 5 000 €).
- Tracer une droite qui, selon vous, approxime « le mieux » ce nuage de points. Il faut qu'il y ait à peu près autant de points au-dessus de la droite que de points en dessous.
- Écrire l'équation de cette droite, comparer cette équation avec celles d'autres élèves.
- Classer les couples donnés par ordre croissant de leurs abscisses.
- Calculer les coordonnées d'un point moyen (M_1) qui correspond aux quatre premiers couples : son abscisse est la moyenne des abscisses et son ordonnée est la moyenne des ordonnées. De même pour un point (M_2) qui correspond aux quatre derniers couples.
- Écrire l'équation de la droite qui passe par ces deux points. Cette droite est la même pour tous les élèves, pourquoi ?
- La droite passant par M_1 et M_2 est appelée **droite de Mayer**. En utilisant l'équation de cette droite comme « modèle », déterminer le chiffre d'affaires qui correspondrait à un budget publicitaire de 3 000 € ?

Dépenses en publicité (€)	Chiffre d'affaires (€)
3 000	48 000
2 800	42 000
4 000	60 000
3 600	50 000
2 400	41 000
3 000	51 000
3 200	52 000
3 200	54 000

- h.** Après avoir complété le tableau ci-dessous, on peut estimer quelle est « en moyenne » l'erreur que l'on commet en calculant le chiffre d'affaires avec le modèle plutôt qu'en se référant aux données. Si cette moyenne est trop élevée, cela signifie que le « modèle » n'est pas très fiable. Compléter le tableau puis calculer la moyenne entre les valeurs absolues des erreurs.
- i.** Calculer la moyenne des écarts pour la droite tracée en **b** et comparer entre elles ces deux moyennes. Quelle est la fonction du premier degré qui modélise le mieux cette situation ?

Dépenses publicitaires (en euros)	Chiffre d'affaires donné (en euros)	Chiffre d'affaires calculé avec l'équation de Mayer	Valeur absolue de la différence entre les deux chiffres d'affaires
3 000	48 000		
2 800	42 000		
4 000	60 000		
3 600	50 000		
2 400	41 000		
3 000	51 000		
3 200	52 000		
3 200	54 000		



1. Qu'entend-on par « fonction du premier degré » ?

Jusqu'à présent, nous avons représenté une fonction le plus souvent par la lettre y et la variable dont elle dépend par la lettre x .

Lorsque l'on réalise une représentation graphique, les valeurs numériques de la variable sont portées sur l'axe des abscisses (l'axe des x) et les valeurs de la fonction sont portées sur l'axe des ordonnées (appelé l'axe des y).

Lorsque l'on met l'accent sur le fait qu'une fonction « envoie » un nombre sur un autre, on note cette fonction en utilisant la lettre f . Ainsi, une fonction du premier degré s'écrit :

$$f(x) = mx + p.$$

Dans ce chapitre nous nous en tiendrons le plus souvent à la notation $y = mx + p$ qui exprime le lien entre ordonnée et abscisse des points qui représentent cette fonction.

2. Comment construire le graphique d'une fonction du premier degré ?

Le graphique d'une fonction du premier degré est une droite. On peut construire le graphique qui correspond à une équation du premier degré de la forme $y = mx + p$ de plusieurs façons. En voici deux.

- 1) On calcule les coordonnées de l'intersection de la droite avec l'axe des y . Puis, à partir de là, on avance d'une unité et on monte (ou descend). La valeur m du coefficient angulaire indique jusqu'où monter ou descendre.

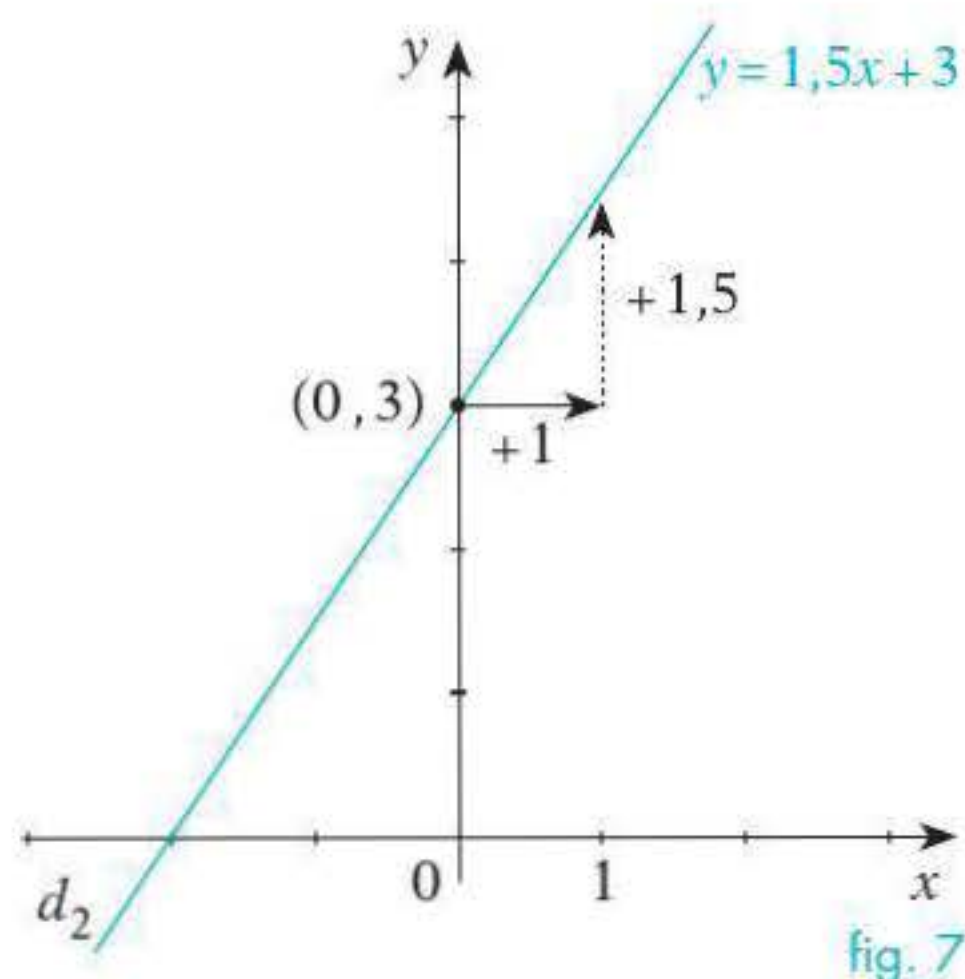
Exemple

Voici comment construire de cette façon le graphique qui correspond à la formule $y = 1,5x + 3$.

On calcule les coordonnées de l'intersection de la droite avec l'axe des y : c'est le point $(0, 3)$.

À partir de là, on avance de 1 et on monte de 1,5 unités (c'est le coefficient de x).

On trouve ainsi un autre point de la droite.



- 2) On construit la droite d'équation $y = mx$ puis la parallèle à cette droite passant par le point $(0, p)$.

Exemple

Voici comment construire de cette façon le graphique qui correspond à la formule $y = 1,5x + 3$.

On trace la droite d'équation $y = 1,5x$ puis on construit la parallèle à cette droite passant par le point $(0, 3)$.

La fig. 8 montre que la droite d_2 est l'image de la droite d_1 par la translation dont la direction est parallèle à l'axe des y .

Comme le terme indépendant de l'équation est « +3 », le sens de la translation est positif (vers le haut) et sa longueur est de 3 unités.

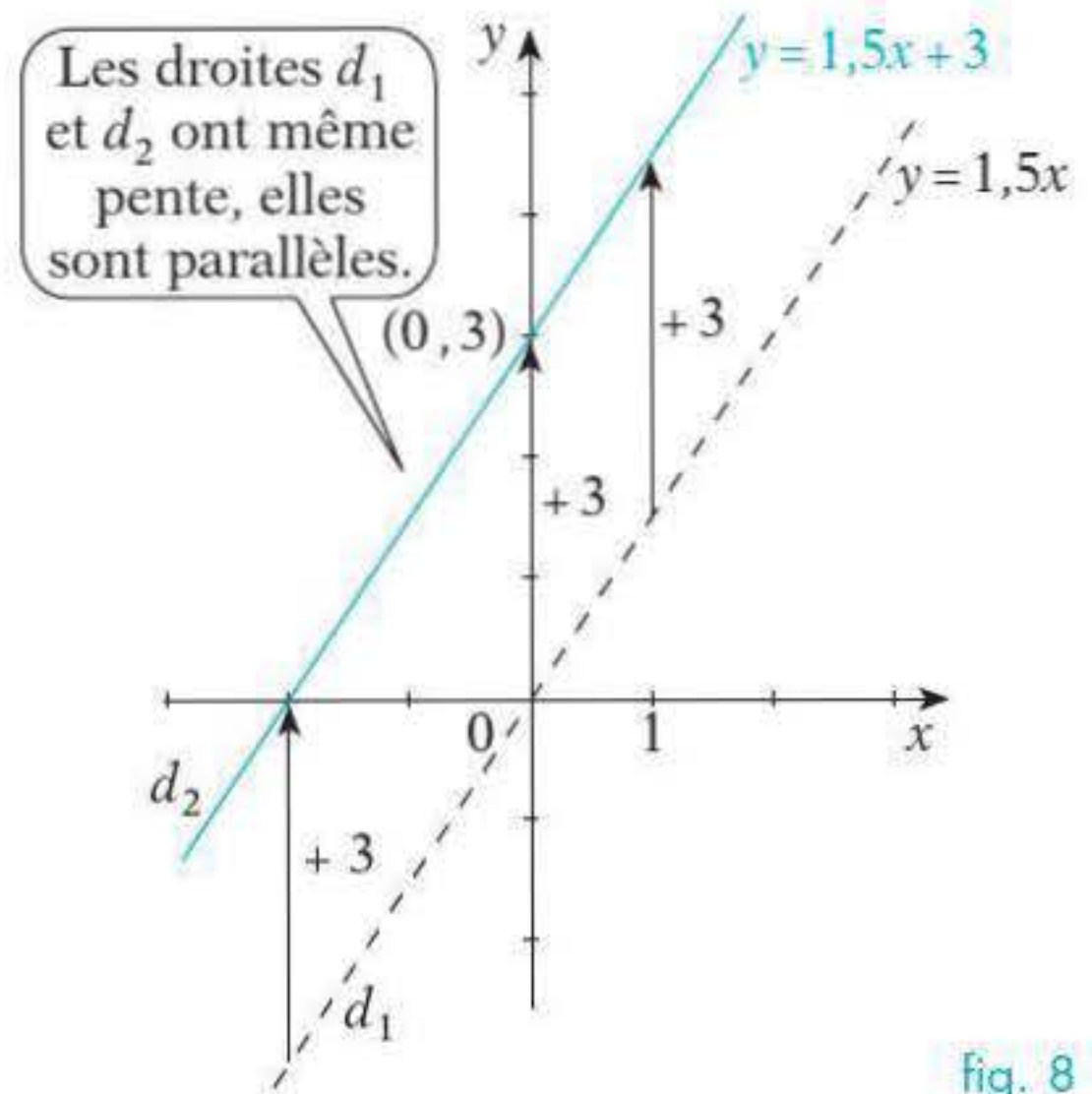


fig. 8

Pour indiquer qu'une équation correspond à une droite dont on a dessiné le graphique, on utilise le symbole « \equiv » qui se lit « a comme équation ». On écrit donc

$$d_1 \equiv y = 1,5x$$

$$d_2 \equiv y = 1,5x + 3.$$

3. Comment calculer les coordonnées à l'origine d'une droite ?

Les coordonnées à l'origine sont celles des points d'intersection d'une droite avec les axes du repère. Pour les déterminer, on remplace dans l'équation de la droite, tantôt x par 0, tantôt y par 0, comme le montre l'exemple ci-dessus.

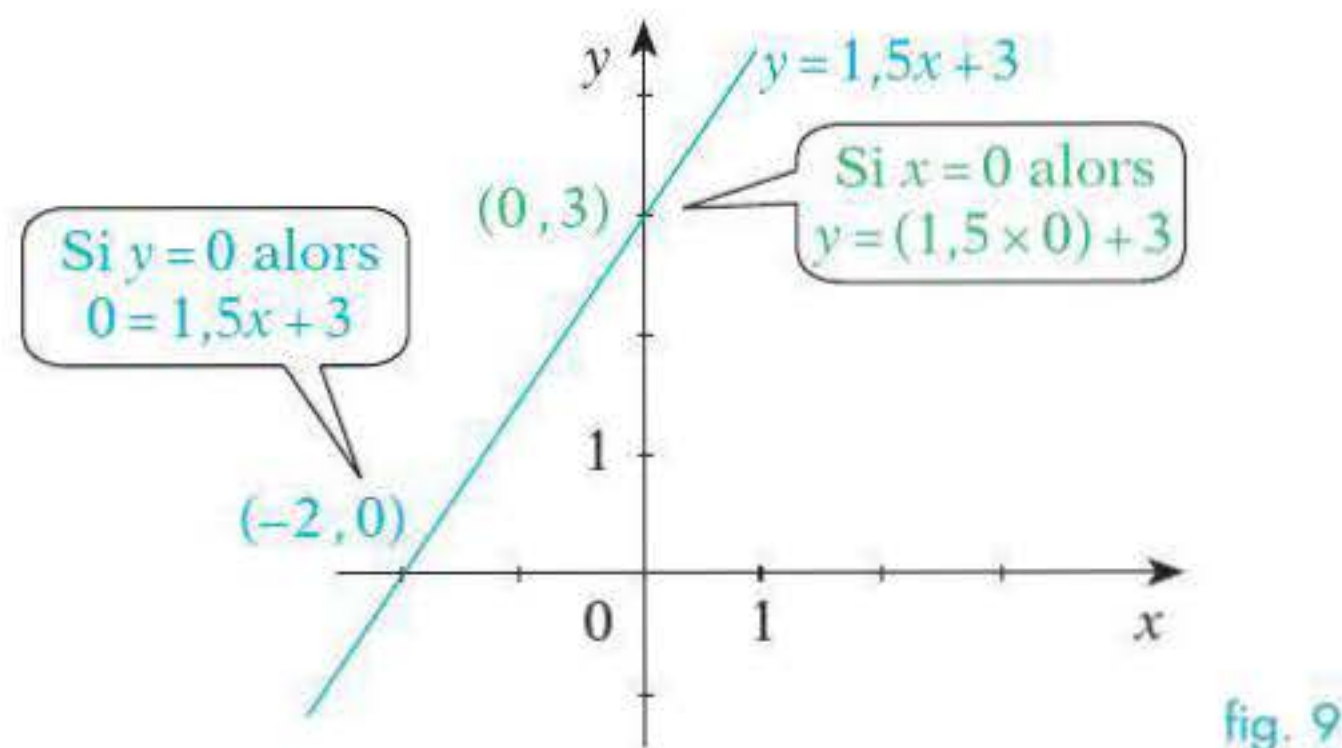


fig. 9

4. Quels sont les paramètres d'une fonction du premier degré ?

Dans une fonction de la forme

$$f(x) = mx + p.$$

m est le **coefficient angulaire**,
il donne la pente de la droite.

p est le **terme indépendant**, il donne
l'ordonnée du point d'intersection de
la droite avec l'axe des y .

La fonction de proportionnalité est une fonction du premier degré dans laquelle $p = 0$.

5. Comment déterminer la pente d'une droite ?

Il faut calculer la différence entre les ordonnées de deux points (Δy) et la différence entre les abscisses (Δx) de ces mêmes points, écrire ensuite le rapport entre le premier et le deuxième nombre.

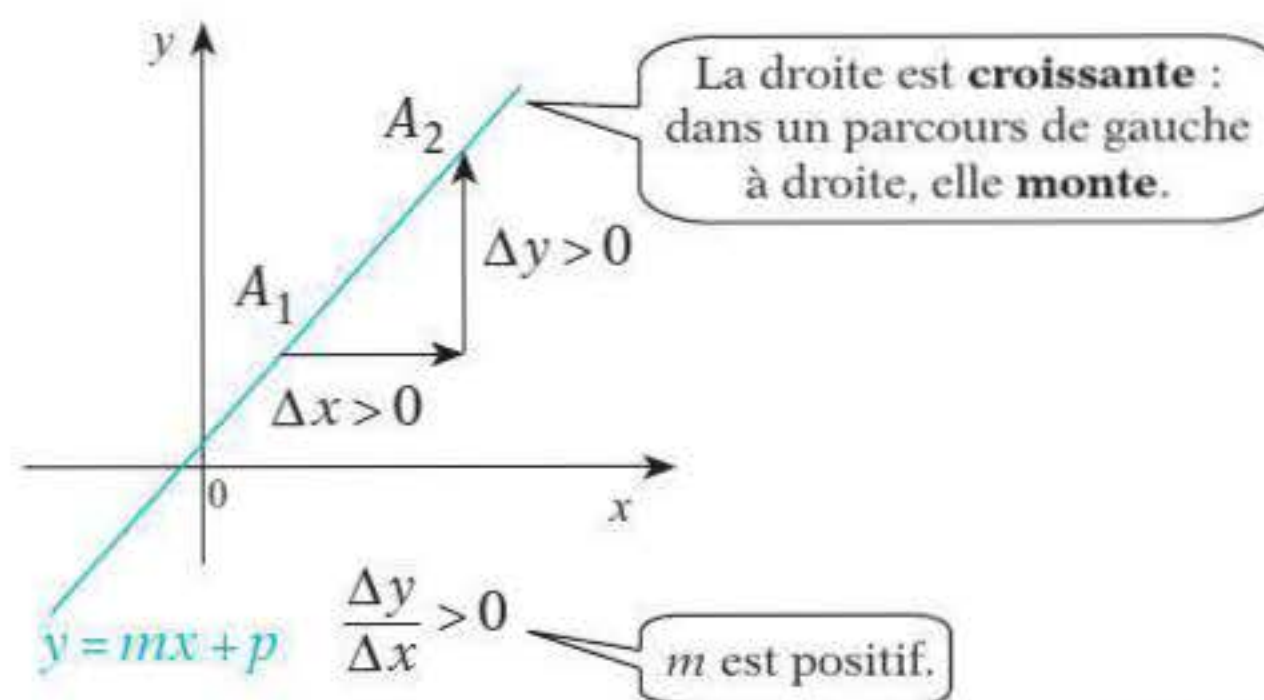


fig. 10

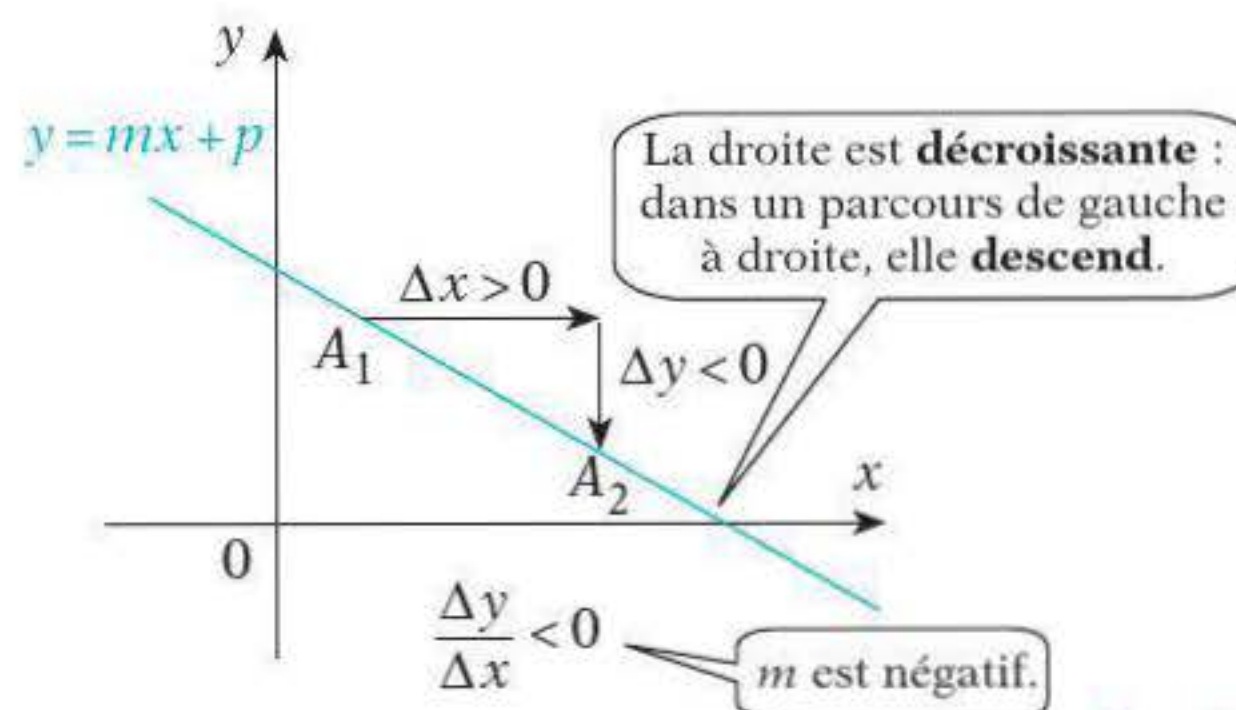


fig. 11

6. Comment savoir si deux droites données par leurs équations sont perpendiculaires ?

Deux droites dont les équations sont de la forme $y = ax + b$ sont perpendiculaires lorsque les coefficients de x sont opposés et inverses l'un de l'autre.

Exemple

Les droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = -\frac{1}{2}x + 4$ sont perpendiculaires.

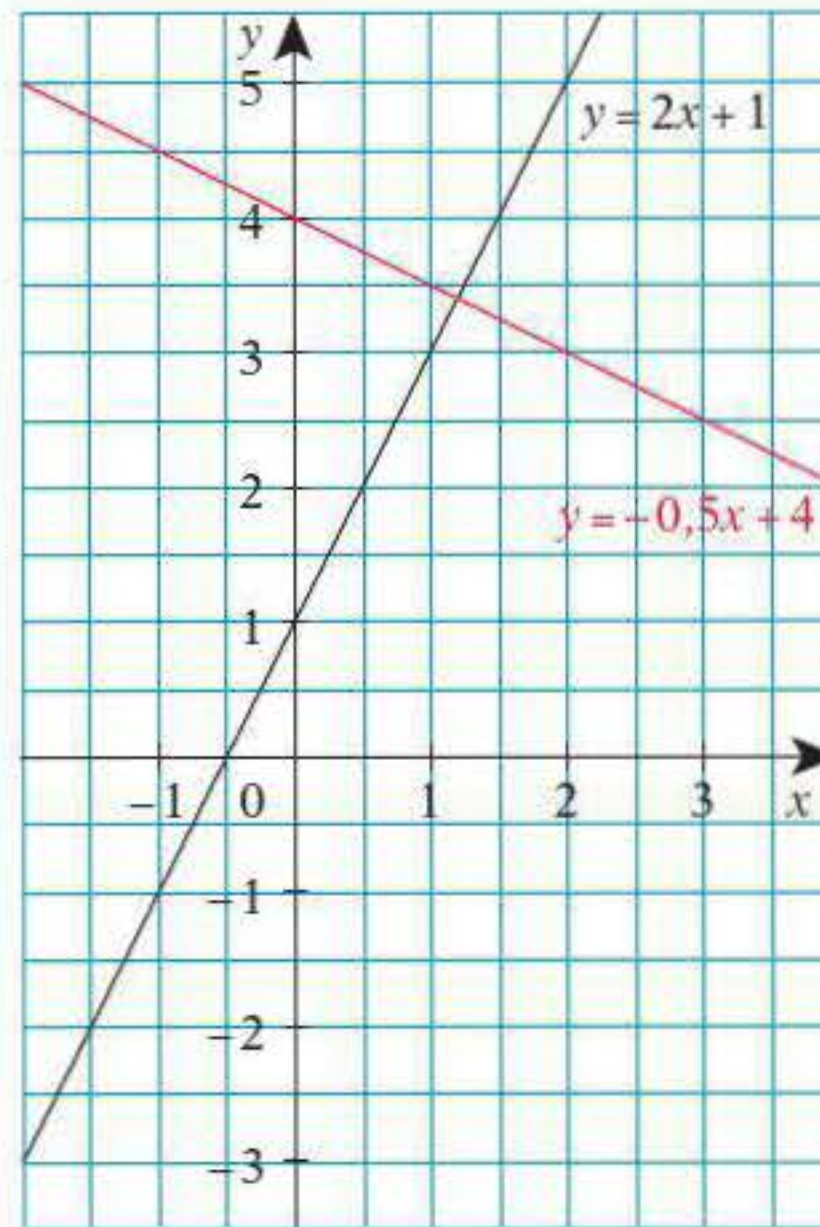


fig. 12

7. Droites parallèles aux axes

Une équation de la forme $y = k$ correspond à l'ensemble des points dont **l'ordonnée est toujours la même**. Cette équation peut s'écrire $y = 0x + k$. Cette droite est donc parallèle à l'axe des x et sa pente est nulle.

Exemple

La droite dessinée en rouge a comme équation $y = -3$.

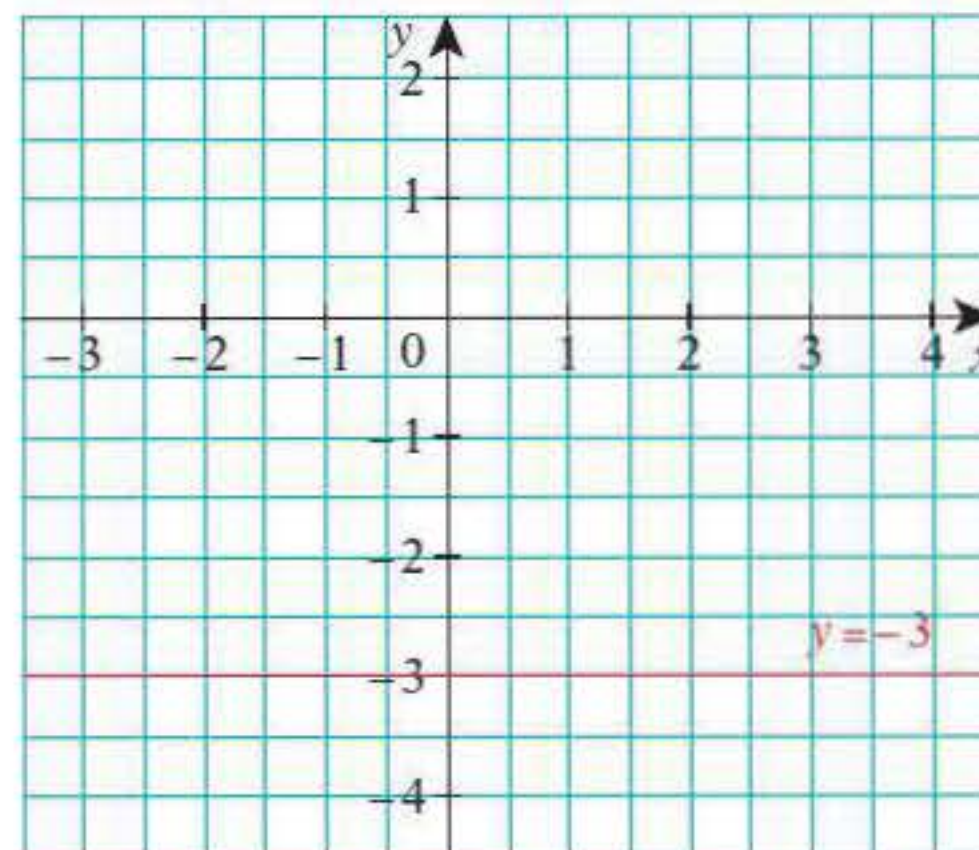


fig. 13

Une équation de la forme $x = k$ ne correspond pas à une fonction du premier degré et cependant sa représentation graphique est une droite. Il s'agit de l'ensemble des points dont **l'abscisse est toujours la même**. Cette droite est donc parallèle à l'axe des y . L'équation ne peut pas s'écrire sous la forme $y = ax + b$, la pente de la droite n'est pas définie.

8. Comment déterminer l'équation de la droite de Mayer qui approxime un nuage de points ?

Exemple

Le graphique ci-dessous montre le nuage de points dont les abscisses et ordonnées sont respectivement la taille et le poids (la masse !) de 22 joueurs de basket (les données sont celles de l'exercice 20). La droite qui traverse ce nuage est la droite de Mayer. Calculer l'équation de cette droite et la représenter permet, par exemple, de déterminer le « poids idéal » d'un nouveau joueur dont on connaît la taille.

Relation Masse-Taille pour des joueurs de Basket

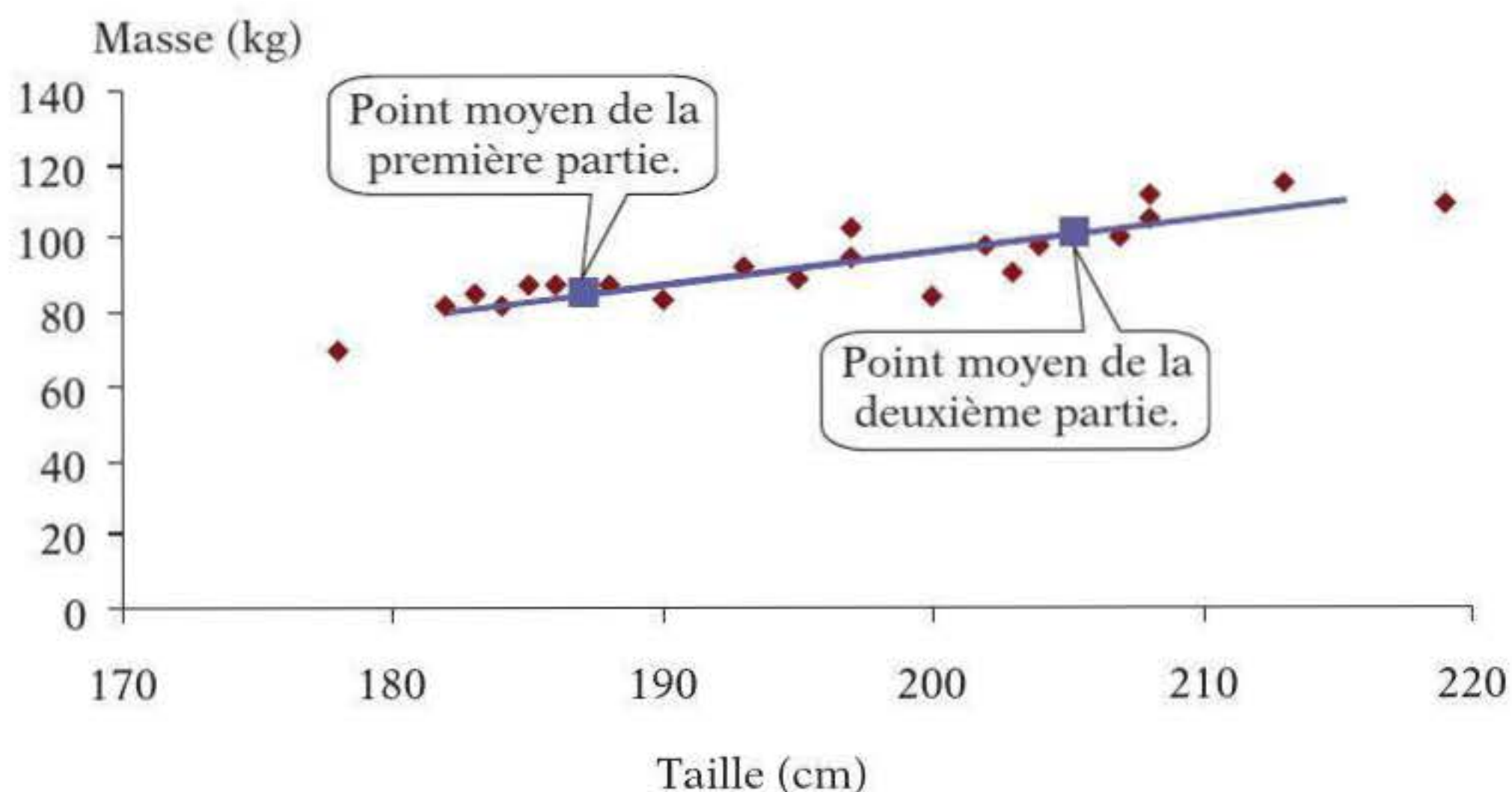


fig. 14

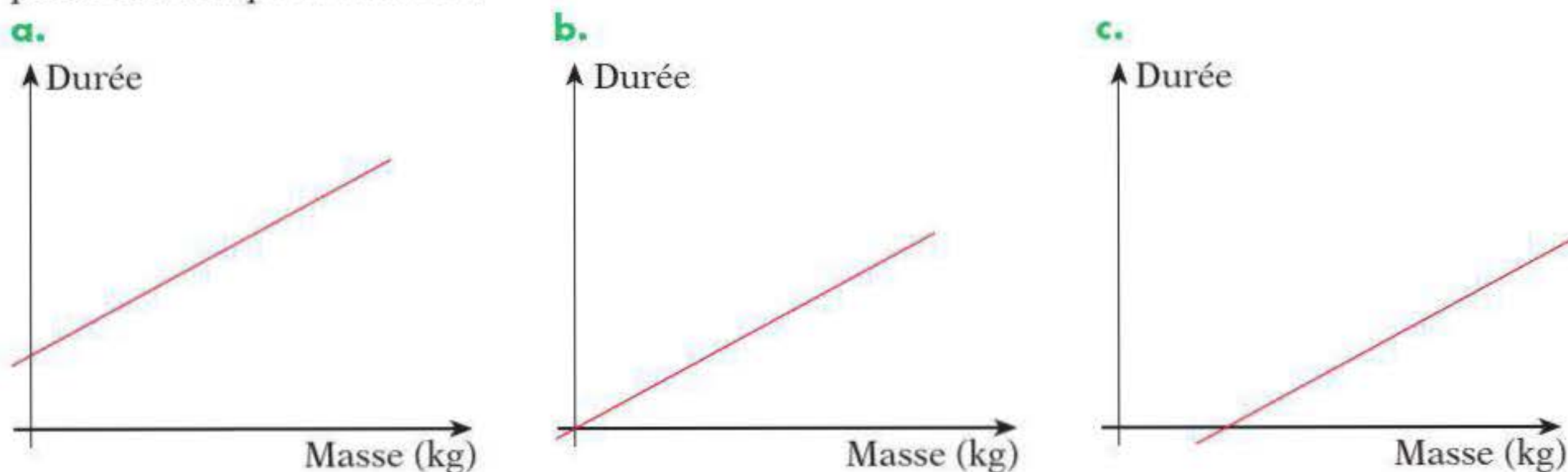
Pour établir l'équation de la droite de Mayer qui correspond à un ensemble de couples, on ordonne les couples par ordre croissant de leurs abscisses. On divise ce « nuage » en deux parties égales (à une unité près). On détermine un **point moyen** pour chacune des parties (moyenne des abscisses, moyenne des ordonnées). On écrit l'équation de la droite passant par ces deux points moyens.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Un rôti bien cuit

Un livre de recettes donne les instructions suivantes pour la cuisson d'un rôti : 20 minutes par kilo de viande, plus 30 minutes.

Quel est le graphique dont l'allure correspond à la relation entre le poids et le temps de cuisson ?



Le temps de cuisson est-il proportionnel au poids ?

2. Des points sur les droites

- a.** On donne la formule $y = 5x + 11$.
Calculer y lorsque $x = 5$; $x = 10$; $x = 20$; $x = 1,2$; $x = 0$;
 $x = -2$.
Calculer x lorsque $y = 21$; $y = 36$; $y = -4$; $y = 0$.
- b.** Vrai ou faux ?
Le point $A(-1, 0)$ appartient à $d_1 \equiv y = x + 1$.
Le point $B(0, 0)$ appartient à $d_2 \equiv y = x$.
Le point $C(0, -1)$ appartient à $d_3 \equiv y = -x + 1$.
Le point $E(-2, 0)$ appartient à $d_4 \equiv y = x + 2$.

3. Croissante ou décroissante ?

- a.** Placer les points $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ et $(1, 1)$ dans un repère puis répondre aux questions suivantes.
- b.** La droite qui passe par les points $(-1, -1)$ et $(0, 0)$ est-elle croissante ou décroissante ?
- c.** La droite qui passe par les points $(-1, -1)$ et $(1, -1)$ est-elle parallèle à l'axe des y ?
- d.** La droite qui passe par les points $(-1, 1)$ et $(0, 0)$ est-elle décroissante ?
- e.** La droite qui passe par les points $(1, -1)$ et $(1, 0)$ est-elle parallèle à l'axe des y ?

4. C'est logique !

On donne des informations à propos de quelques droites. Quand peut-on conclure qu'elles sont parallèles à l'un des axes, qu'elles sont croissantes ou décroissantes ?

Si on sait que...	alors on peut dire que cette droite...
... deux points d'une même droite ont même abscisse,	...
... deux points d'une même droite ont même ordonnée,	...
... dans l'équation de la droite, le coefficient angulaire est positif,	...
... les couples (0, 0) et (1, 1) vérifient l'équation d'une droite,	...
... les couples (0, 0) et (1, -1) figurent dans le tableau qui correspond à une droite,	...

5. Pente douce ou raide, droite croissante ou décroissante ?

a. Quelle est la pente de chacune des droites (fig. 15) ?

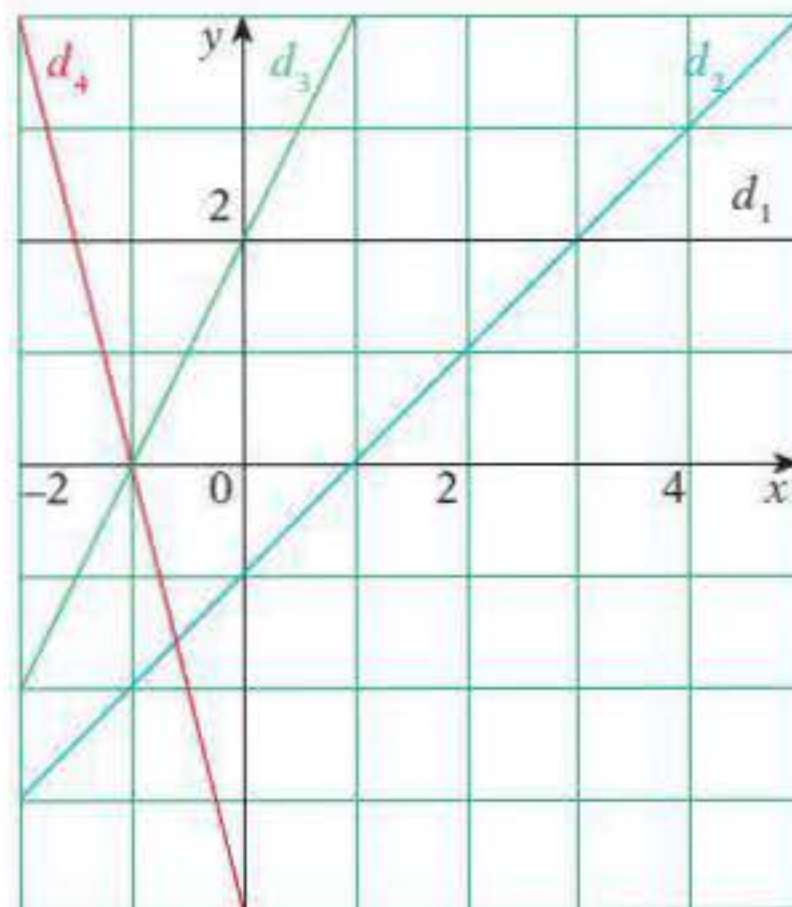


fig. 15

b. Les tableaux ci-dessous correspondent chaque fois à une droite. Déterminer la pente de chaque droite.

d_1

Δx	x	y	Δy
	-2	0	
	-1	0,5	
	0	1	

d_2

Δx	x	y	Δy
	-5	0	
	-1	1	
	3	2	

d_3

Δx	x	y	Δy
	-5	0	
	-2	-1	
	1	-2	

c. Quelle est la pente des droites suivantes ?

$$d_1 \equiv y = 2x - 5$$

$$d_2 \equiv y = 4 + 8x$$

$$d_3 \equiv y - 4 = 2x$$

$$d_4 \equiv y - 4x + 7 = 0$$

$$d_5 \equiv 6y + 2x - 4 = 0$$

- d. Déterminer la pente
- de la droite qui passe par $(3, -2)$ et $(6, -4)$;
 - de la droite qui passe par $(-3, -2)$ et $(-6, -4)$;
 - de la droite qui passe par $(-3, 2)$ et $(-6, 4)$;
 - de la droite qui passe par $(-2, 3)$ et $(-4, 6)$.

Appliquer une procédure

6. Partir de la fonction

Soit la formule $y = 3x - 2$.

- a. Recopier puis compléter le tableau pour des valeurs entières de x comprises entre -2 et 2 .
- b. Faire le graphique pour des valeurs entières de x comprises entre -5 et 5 .
- c. Écrire la formule réciproque (x en fonction de y).

x	y	Δy
-2		
		3
-1		

7. Partir du graphique

À partir du graphique ci-contre (fig. 16),

- a. faire le tableau pour des valeurs entières de x comprises entre -2 et 2 ;
- b. écrire la formule (y en fonction de x) ;
- c. écrire la formule réciproque (x en fonction de y).

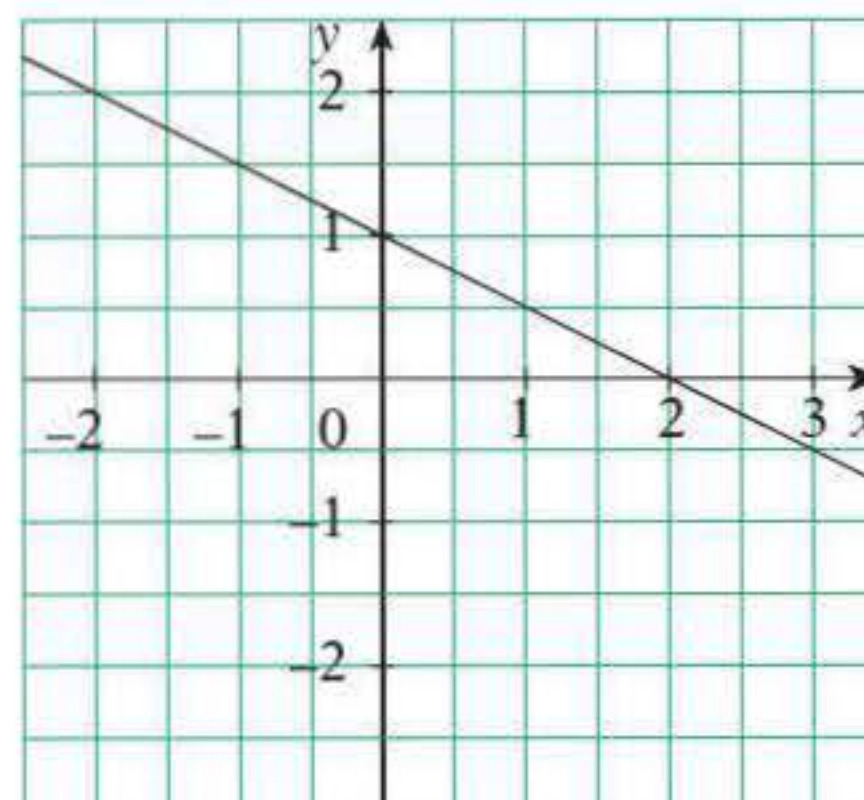


fig. 16

8. Un point sur une droite

On sait que $A(1, a)$ appartient à la droite $d_1 \equiv y = 2x - 5$. Déterminer a .

9. Trouver une équation (exercices résolus)

- a. Une droite est déterminée quand on connaît sa direction et un point de cette droite. On peut donc écrire l'équation d'une droite dont on donne les coordonnées d'un point et la pente.

Écrire l'équation de la droite de pente 2 passant par le point $(5, 8)$.

Solution

On part de la forme générale..... $y = mx + p$,
on remplace m par 2, on a..... $y = 2x + p$,
le point $(5, 8)$ appartient à la droite, donc..... $8 = 10 + p$,
on isole p $p = -2$.
L'équation de la droite est..... $y = 2x - 2$.

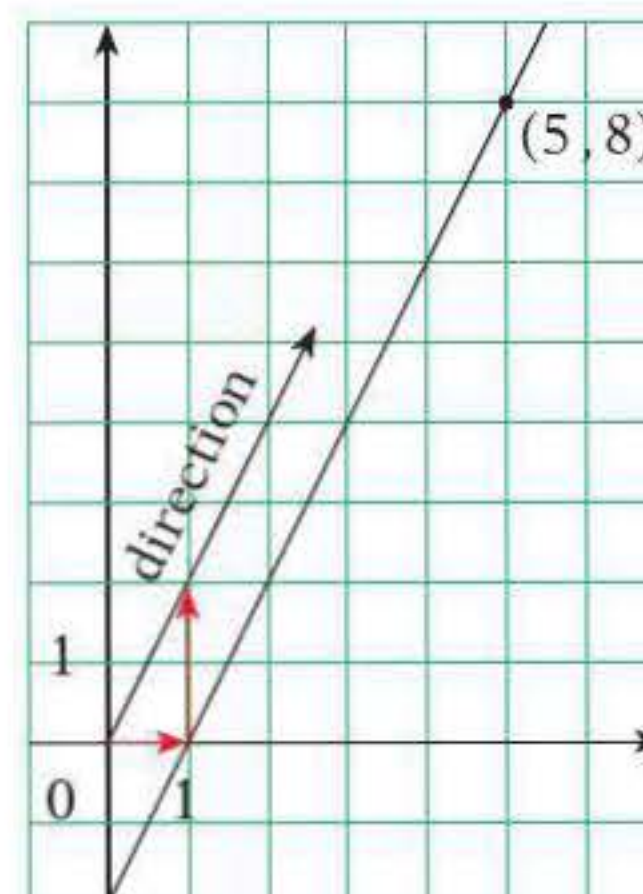


fig. 17

- b.** On peut aussi déterminer une droite quand on connaît deux de ses points.
Écrire l'équation de la droite passant par les points $(3, 8)$ et $(5, 2)$.

Solution

La pente est négative car la droite est décroissante.

Elle vaut $-\frac{6}{2} = -3$.

À présent, on connaît la pente de la droite et un de ses points, par exemple $(5, 2)$. On peut donc appliquer la méthode précédente pour écrire son équation.

On trouve $y = -3x + 17$.

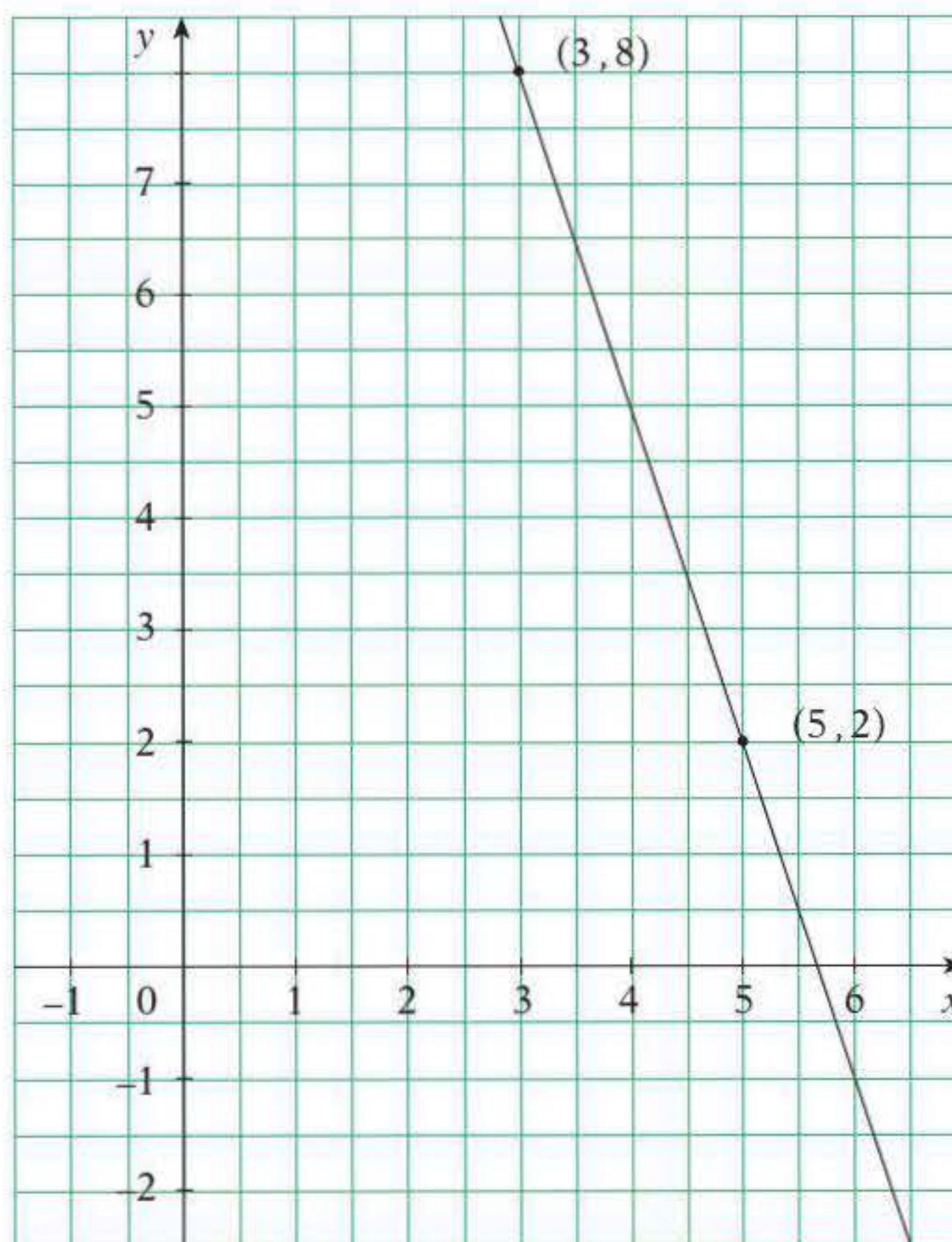


fig. 18

10. Encore des équations

- Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et de pente 3 ?
- Quelle est l'équation de la droite de pente -2 et passant par le point de coordonnées $(-2, 1)$?
- Quelle est l'équation de la droite passant par les points de coordonnées $(3, -2)$ et $(4, -3)$?

11. Une droite et ses images

- Tracer la droite d_1 qui correspond à la formule $y = 0,5x + 3$.
- Dessiner dans le même repère :
 - d_2 image de d_1 par la symétrie orthogonale dont l'axe est l'axe des x ;
 - d_3 image de d_1 par la symétrie orthogonale dont l'axe est l'axe des y ;
 - d_4 image de d_1 par la symétrie centrale dont le centre est l'origine du repère ;
 - d_5 image de d_1 par la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite qui a comme équation $y = x$.
- Écrire l'équation de chacune de ces droites.

Résoudre un problème

12. Ressorts

Un employé essaie des ressorts. Il suspend différentes masses et mesure la longueur du ressort ainsi allongé.

Il découvre que la longueur est fonction de la masse et que, pour un certain type de ressorts, la longueur peut être calculée à partir de la formule $l = \frac{m}{4} + 10$ dans laquelle l est la longueur du ressort en centimètres et m est la masse en kilogrammes que l'on y suspend.

Copier et compléter ce tableau.

Masse en kilos	16	40		
Longueur en centimètres			32	80

- Dessiner un repère et choisir des unités sur les axes pour pouvoir y porter tous les couples de nombres qui figurent dans le tableau.
- Quelle est la longueur du ressort quand on n'y suspend aucune masse ?

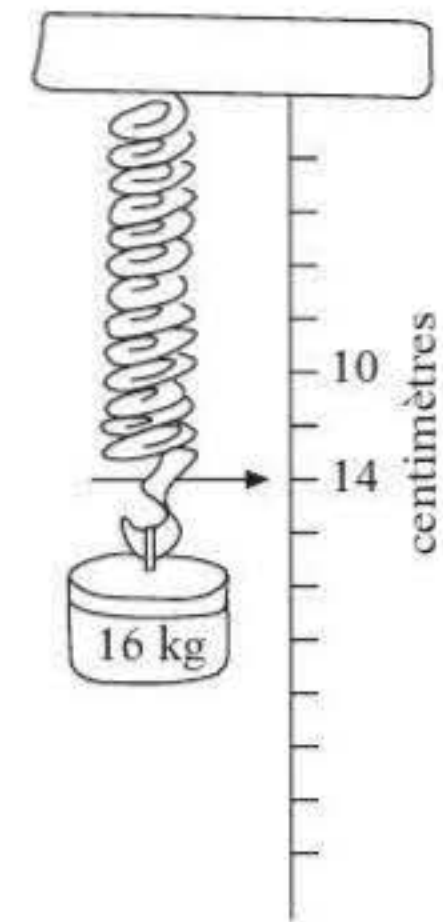


fig. 19

13. Le réservoir du bateau

La réserve de combustible d'un bateau qui navigue à vitesse constante est en fonction de la durée t (en nombre de journées de 24 h) de son voyage. Pour un navire donné cette fonction est $f(t) = 2500 - 1500t$.

- Représenter cette information par un graphique.
- Après combien de jours le bateau doit-il refaire un plein ?

14. La facture de téléphone fixe (exercice résolu)

Muriel examine ses deux dernières factures mensuelles de téléphone fixe. Chaque facture inclut un forfait pour l'abonnement et un montant proportionnel à la durée des appels. Ces factures portent uniquement sur des communications nationales.

La première facture se monte à 25,10 € pour une durée totale des appels de 2 heures 15 minutes.

La deuxième facture se monte à 30,20 € pour une durée totale des appels de 3 heures 40 minutes.

- Peut-on retrouver le tarif (prix à la minute et montant de l'abonnement) à partir de ces données ?
- Si c'est le cas, déterminer ce tarif.

Solution

On exprime les durées en minutes.

On reporte les données dans un tableau et on calcule les écarts.

Δx	Nombre de minutes	Prix total en €	Δy
	135	25,10	
85			5,10
	220	30,20	

On calcule le coefficient angulaire $m = \frac{5,10}{85} = 0,06$.

On part de la forme générale

de la fonction du premier degré..... $f(x) = mx + p$

on a $f(x) = 0,06x + p$

(220 ; 30,20) vérifie l'équation $30,20 = 13,2 + p$

on isole p $p = 30,20 - 13,2$

$$p = 17.$$

Le prix à la minute est donc de 0,06 € et le montant de l'abonnement est de 17 €.

Vérification : pour une durée de 2h15, il faut payer

$$17 \text{ €} + 8,10 \text{ €} = 25,10 \text{ €}.$$

15. Coût d'une voiture

Monsieur Dubois veut calculer le coût annuel de sa voiture. Il estime que ce coût comporte deux parties. La première comprend les charges fixes comme l'assurance, la taxe de circulation et l'amortissement du prix d'achat. Il rassemble ses factures et trouve 1 200 € pour l'assurance, 420 € pour la taxe et 2 833 € pour l'amortissement (il a considéré que sa voiture serait amortie en 6 ans).

La deuxième partie du coût de la voiture dépend du nombre de kilomètres parcourus. Ce prix intègre le prix du diesel et l'entretien. Le diesel coûte 1,20 € au litre et la voiture consomme 6,50 l aux 100 km. L'entretien revient à 350 € tous les 15 000 kilomètres.

- S'il fait 15 000 km sur une année, quel est son budget « voiture » ?
- Et s'il fait 30 000 km ?
- Écrire la formule qui lui permet de calculer son budget annuel en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

16. Variations de périmètres

- Le périmètre d'un carré est-il proportionnel à la longueur de son côté ?
- On considère la famille de rectangles dont la base est 13 cm et dont la hauteur varie (fig. 20). Le périmètre est-il proportionnel à la hauteur ? Écrire la formule qui permet de calculer la hauteur quand on connaît la base et le périmètre.

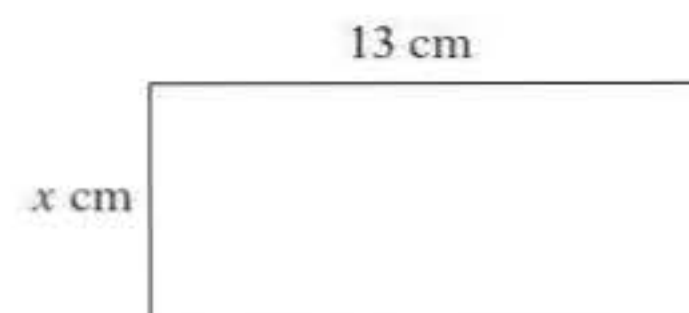


fig. 20

17. Rectangles de même périmètre

Ce graphique montre la hauteur de rectangles de même périmètre en fonction de leur base. Chaque unité sur les axes représente 1 cm.

- Quel est le périmètre de ces rectangles ?
- Écrire la formule qui permet de calculer la hauteur quand on connaît la base.

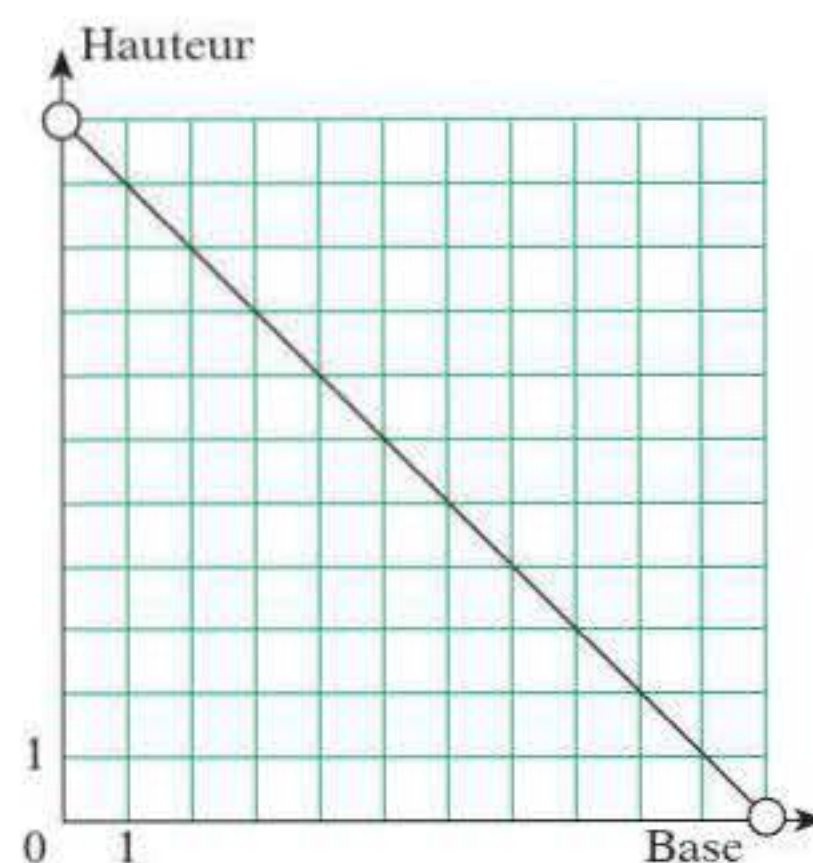


fig. 21

18. Un triangle et un carré

Soit un segment $[AB]$ de 10 cm de longueur.

- Placer un point X sur ce segment.
- Construire un triangle équilatéral de base $[AX]$ et un carré de côté $[XB]$.
- Étudier les variations de périmètre des deux figures lorsque X se déplace sur $[AB]$.

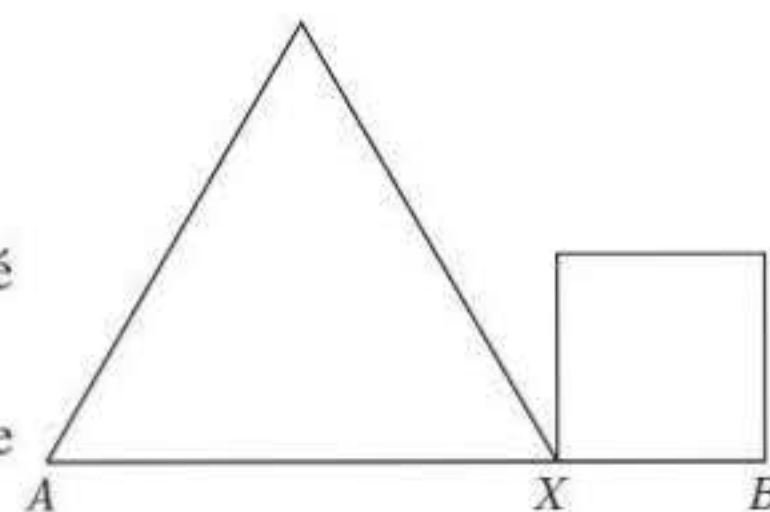


fig. 22

Pour aller plus loin

19. Coûts de production

Pour fabriquer des tee-shirts, un atelier investit un montant de 2 800 € pour l'équipement et les machines. Chaque lot de 100 tee-shirts lui coûte alors 320 € en matières premières et en salaires.

Si l'atelier s'équipe d'un autre type de machines, le coût de l'installation atteint 5 000 €. Mais la fabrication de 100 articles ne revient plus qu'à 160 € en matières premières et en salaires.

Pour chaque type d'équipement, faire le graphique qui montre le coût total de fabrication pour un nombre d'articles inférieur à 3 000 (2 cm pour 500 articles sur l'axe horizontal et 1 cm pour 1 000 € sur l'axe vertical).

À partir du graphique, trouver :

- le coût de production de 1 500 articles avec le premier équipement en machines ;
- combien d'articles on peut fabriquer avec le second équipement pour un montant de 11 000 € ;
- le nombre d'articles pour lesquels le coût total est le même selon les deux équipements.



20. Le poids idéal d'un joueur de basket

Un entraîneur s'est renseigné sur la masse et la taille de quelques joueurs de basket réputés.

Il veut déduire de ces renseignements une relation entre la taille et la masse. Il proposera cette formule à ses joueurs afin que chacun détermine une masse idéale (ou du moins une fourchette raisonnable). Comment peut-il s'y prendre ?

Taille (en cm)	Masse (en kg)
178	70
182	82
183	85
184	82
185	87
186	87
188	87
190	83
193	92
195	89
195	89
197	95
197	103
200	84
202	98
203	91
204	98
207	100
208	105
208	112
213	115
219	109



21. Prévoir le stock

Le gérant d'un camping fait le compte du nombre de cannettes de limonades vendues chaque jour. Il décide de mettre ces données en relation avec la température moyenne de la journée afin d'organiser le stockage dans le frigidaire. Voici ces données.



Température moyenne en degré Celsius	Nombre de cannettes vendues
14	2
16	3
16	5
17	4
18	5
20	6
20	10
22	9
24	12
24	15
26	14
28	18
29	20
31	24

- Représenter ces données sur un graphique, déterminer et tracer la droite de Mayer.
- La météo annonce 25°C pour le lendemain. Utiliser l'équation pour prévoir le nombre de cannettes à stocker.

5 systèmes d'équations

Souvenez-vous : on a exploré les équations au départ d'une « énigme » dans laquelle intervenait une balance. La méthode : ôter une quantité égale (les trois quarts d'une brique) de chaque côté de la balance. Mais comment résoudre une énigme comme celle montrée par la fig. 1 ?

Dans ce chapitre, nous apprenons à résoudre des problèmes du premier degré qui comportent deux inconnues. Chemin faisant, nous mettons au point plusieurs méthodes. L'une d'elles, la méthode graphique, nous ramène dans le cadre de la géométrie analytique.

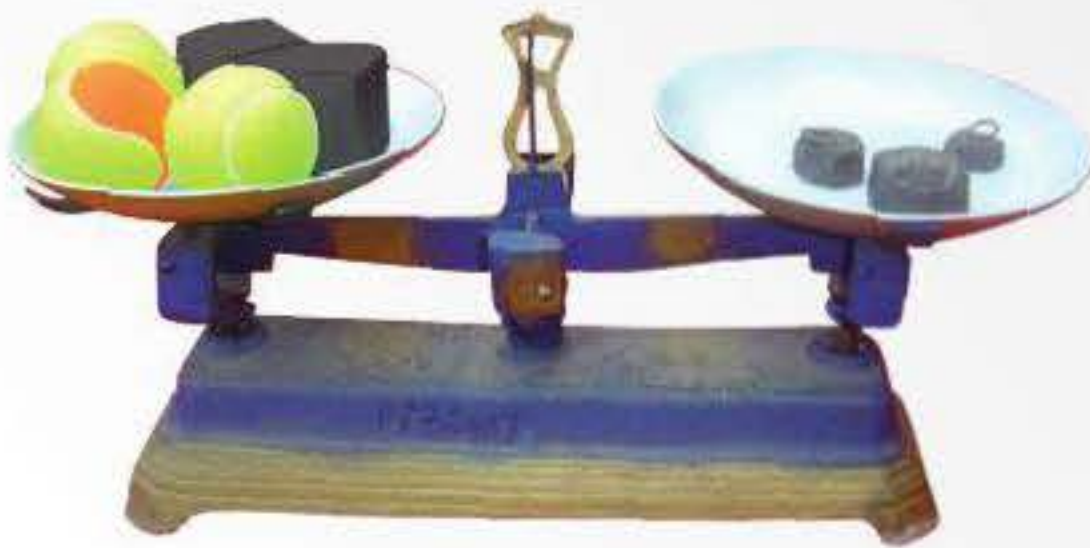


fig. 1

*On connaît la masse de deux balles et d'un cube,
celle de trois balles et de deux cubes.
Que pèsent une balle, un cube ?*

1. Deux poids, deux mesures !

Karim a placé des sphères et des cubes sur une balance et constaté les équilibres montrés par la **fig. 2**. L'unité utilisée est le kg.

Déterminer la masse d'une sphère et celle d'un cube en combinant les informations de ces deux schémas.

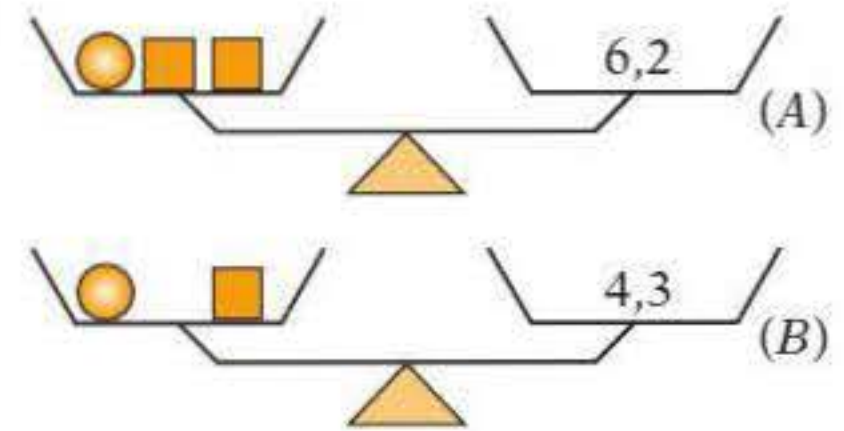


fig. 2

2. Traduction mathématique

Si x est la masse de la sphère et y la masse du cube, le schéma de la **fig. 2** devient le **système de deux équations à deux inconnues** :

$$\begin{cases} x + 2y = 6,2 & (A) \\ x + y = 4,3 & (B) \end{cases}$$

Le but est de combiner ces deux équations pour n'avoir plus qu'une équation à une inconnue. La **combinaison** $(A) - (B)$, dans laquelle on soustrait membre à membre la deuxième équation de la première, permet d'y arriver.

- Résoudre cette nouvelle équation pour trouver la valeur de y .
- Trouver la valeur de x .

3. Trouver la bonne combinaison

Voici une nouvelle énigme.

- Écrire une **combinaison** entre les schémas (A) et (B) qui permet d'avoir d'un côté uniquement des cubes ou uniquement des sphères. Déterminer ensuite les masses respectives.
- Traduire la situation à l'aide d'un **système d'équations**.
- Résoudre ce système.

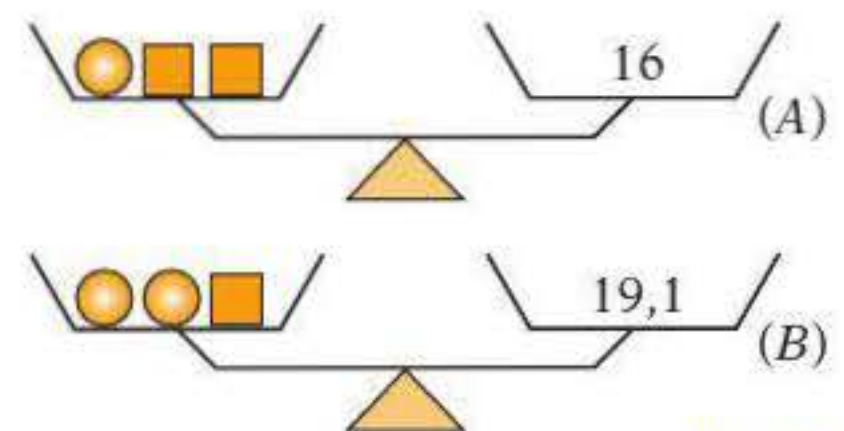


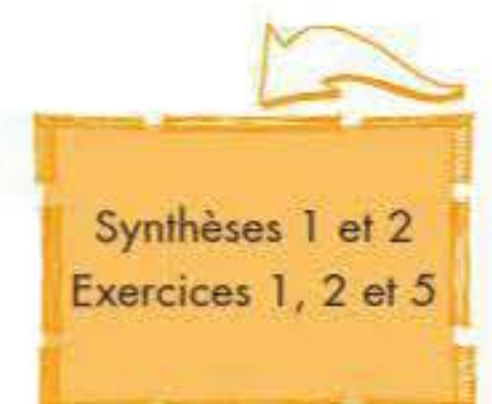
fig. 3

4. Se dépasser

Aurore et Bertrand habitent la même rue mais ils se rendent séparément au même endroit situé à 100 kilomètres de chez eux. Bertrand part une demi-heure après Aurore mais sa voiture roule plus vite.

La voiture d'Aurore roule à 60 km/h de moyenne, celle de Bertrand fait du 100 à l'heure.

Le graphique (**fig. 4**) montre que Bertrand arrive avant Aurore et qu'à un moment donné, ils se trouvent au même endroit.



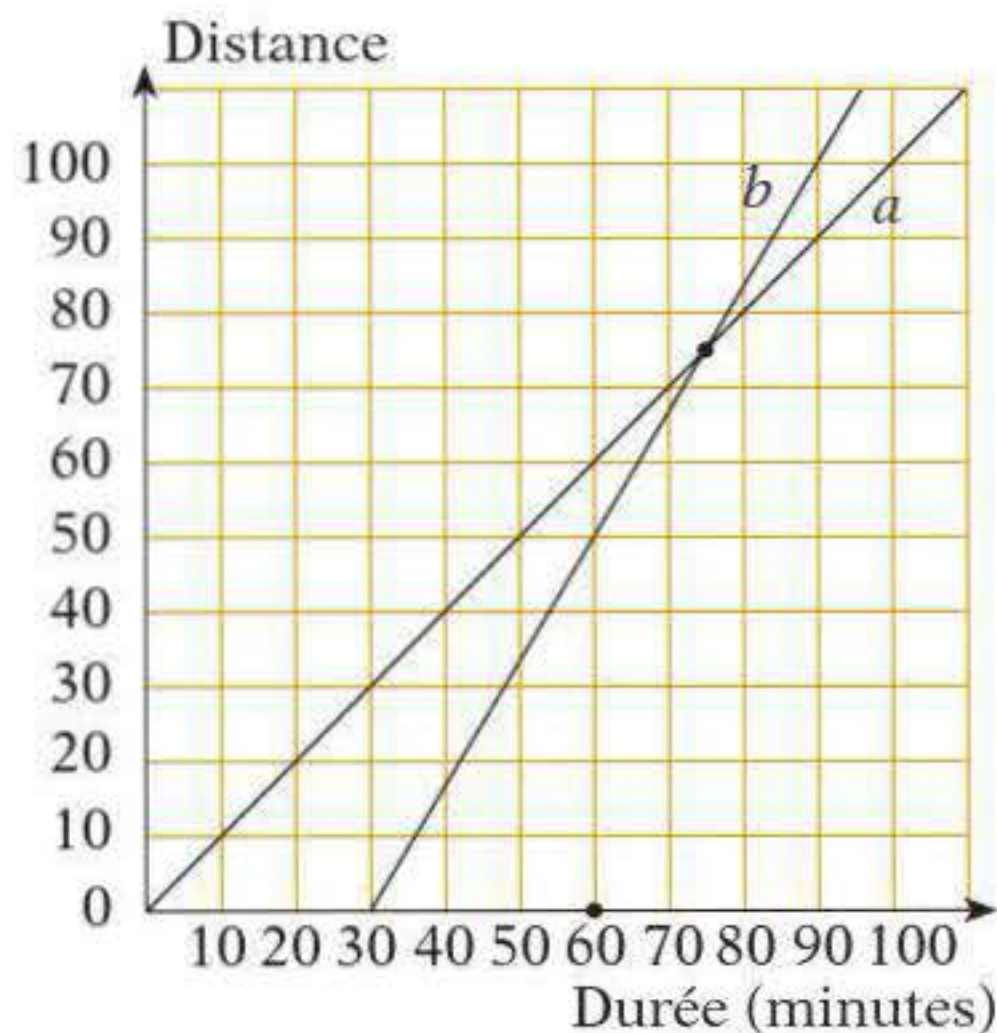


fig. 4

Après combien de temps et à quelle distance de chez eux, la voiture de Bertrand dépasse-t-elle celle d'Aurore ?

5. Calculer le point de rencontre

Revenons aux trajets d'Aurore et de Bertrand en imaginant que l'on ne dispose pas du **graphique** des deux mouvements mais bien de leurs **équations**. La lettre x représente la durée en heures et la lettre y , la distance en km.

La droite a a comme équation $y = 60x$.

La droite b a comme équation $y = 100x - 50$.

Au moment du dépassement, les voitures ont parcouru la même distance, donc la valeur de y doit être la même pour les deux équations.

On écrit

$$60x = 100x - 50.$$

- Résoudre cette équation et comparer la valeur trouvée avec la solution graphique.
- Retourner à l'équation de la droite a pour trouver la valeur de y .



6. La méthode de substitution

Voici un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x + y = 12 & (A) \\ 2x + 5y = -18 & (B) \end{cases}$$

Comme il n'y a pas de combinaison qui permet d'éliminer rapidement une inconnue, on repère celle qui s'isole le plus facilement dans une des deux équations.

- a. Dans (A), exprimer y en fonction de x .
- b. Dans (B), remplacer y par l'expression trouvée.
- c. Déterminer les solutions.
- d. Vérifier en remplaçant x et y par leurs valeurs respectives dans une des deux équations.



7. Observer d'abord !

Pour chaque ligne du tableau, choisir la ou les affirmations justes. Corriger les affirmations fausses.

Système	Affirmation 1	Affirmation 2	Affirmation 3	Affirmation 4
A $\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ -4x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$	Le couple (1, 1) est solution de la première équation et aussi de la deuxième.	Le couple (2, 2) est solution du système.	Les coefficients des inconnues et des termes indépendants sont proportionnels.	Les couples qui vérifient la première équation vérifient aussi la deuxième et réciproquement.
B $\begin{cases} d_1 \equiv y = 2x - 1 \\ d_2 \equiv 3y = 6x - 3 \end{cases}$	Le point (5, 10) appartient aux deux droites.	Le point (4, 9) appartient aux deux droites.	Les droites ont même pente.	Les droites d_1 et d_2 sont confondues.
C $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 2y - 4x - 1 = 0 \end{cases}$	Le couple (1, 1) est solution du système.	Le couple (2 ; 4,5) est solution du système.	Les coefficients des inconnues et des termes indépendants ne sont pas proportionnels.	Les couples qui vérifient la première équation vérifient aussi la deuxième et réciproquement.
D $\begin{cases} d_1 \equiv y = 2x - 1 \\ d_2 \equiv 3y = 6x - 12 \end{cases}$	Le point (1, -2) est solution de la deuxième équation.	Le point (1, -2) appartient à la droite d_1 .	Les droites ont même pente.	Les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
E $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - 4x + 3 = 0 \end{cases}$	Le couple (2, 3) est solution de la première équation.	Le couple (1, 1) est solution de la deuxième équation.	Les coefficients des inconnues et des termes indépendants sont proportionnels.	Il y a un et un seul couple qui vérifie les deux équations.
F $\begin{cases} d_1 \equiv y = 2x - 1 \\ d_2 \equiv 3y = 4x - 3 \end{cases}$	Le point (5, 11) appartient aux deux droites.	Le point (0, 0) appartient aux deux droites.	Les droites ont même pente.	Les droites d_1 et d_2 sont sécantes.



1. Que signifie « résoudre un système » ?

Résoudre **un système de deux équations du premier degré à deux inconnues**, c'est chercher les couples de nombres qui vérifient à la fois les deux équations. De tels couples sont appelés **solutions** du système.

2. Comment résoudre un système par la méthode de combinaison ?

Exemple 1

$$\text{Soit le système } \begin{cases} x + y = 14 & (A) \\ 2x - y = 4 & (B) \end{cases}.$$

On observe qu'en additionnant membre à membre les deux équations, on obtient **une seule équation à une inconnue**.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 14 & (A) \\ 2x - y = 4 & (B) \end{cases} \\ \hline (A + B) \quad 3x = 18 \\ x = 6 \end{array}$$

On remplace x par 6 dans (A) ou dans (B), pour trouver y .
En remplaçant dans (A), on a

$$\begin{aligned} 6 + y &= 14 \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Vérification : en remplaçant x par 6 et y par 8 dans (B), on a
 $(2 \times 6) - 8 = 4$.

C'est bien une égalité. La solution du système est le couple (6, 8).

Exemple 2

$$\text{Soit le système } \begin{cases} 4x + 3y = 37 & (A) \\ -3x + 2y = -15 & (B) \end{cases}.$$

Pour obtenir une seule équation en y , on peut utiliser la combinaison $3(A) + 4(B)$.
Ce qui conduit à l'équation $17y = 51$. On remplace ensuite y par 3 dans (A) ou dans (B) pour trouver x .

La solution du système est le couple (7, 3).

Cette façon de faire convient chaque fois que l'on peut **combiner** les deux équations pour obtenir une seule équation à une inconnue.

Cette méthode est appelée **méthode par combinaison**.

Remarque

Avant d'utiliser cette méthode, il est nécessaire de réduire et d'ordonner de la même façon les équations.

3. Comment interpréter graphiquement un système d'équations et sa solution ?

Exemple

$$\text{Soit le système } \begin{cases} y = x + 1 & (A) \\ y = 3 - x & (B) \end{cases}.$$

On représente chaque équation par une droite (fig. 5).

La solution du système correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites. C'est le point (1, 2).

Les coordonnées de ce point vérifient les équations de ces droites.

$$1 - 2 = -1 \quad (A)$$

$$1 + 2 = 3 \quad (B)$$

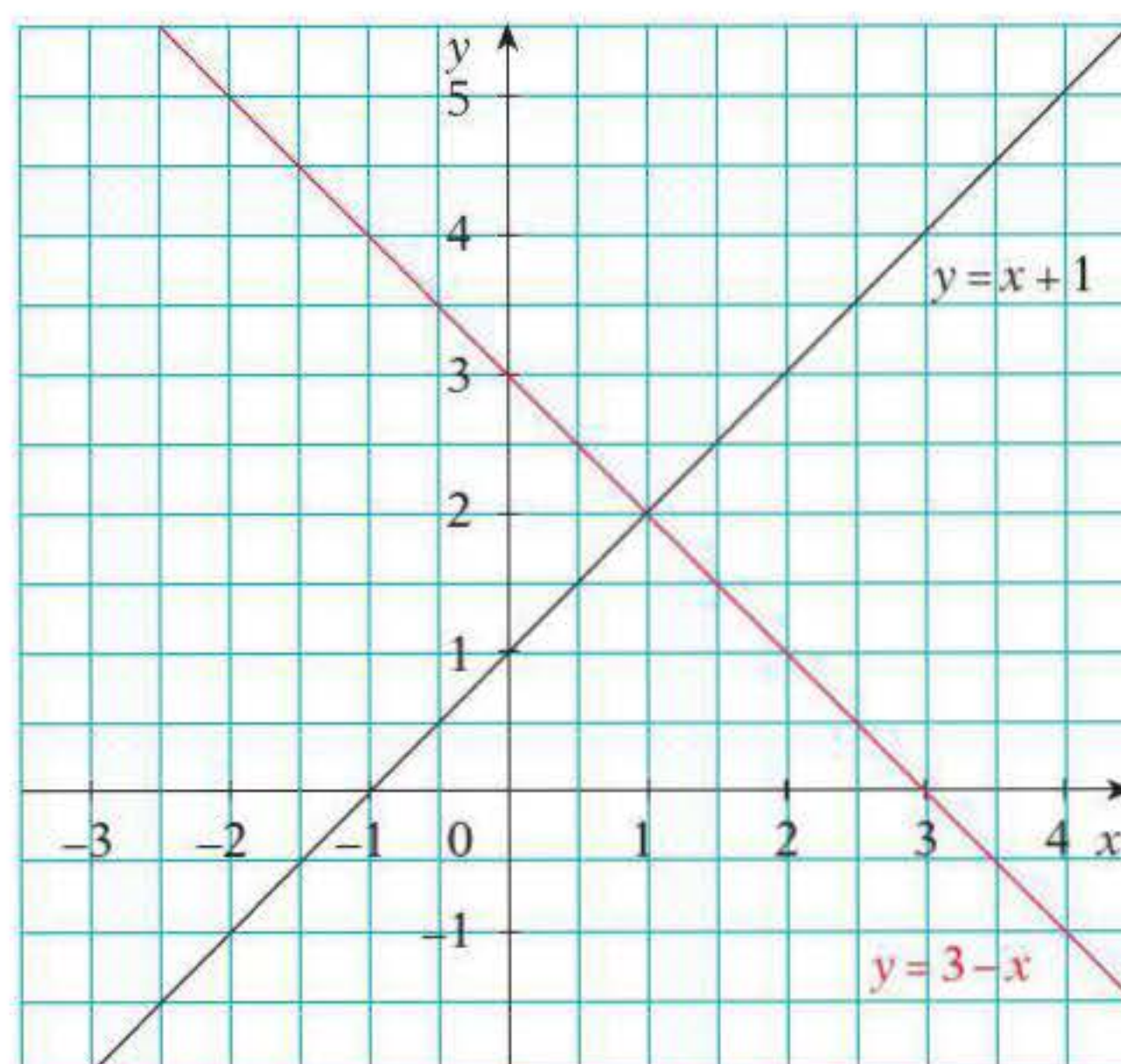


fig. 5

Résoudre un système de cette façon revient à lire la solution sur le graphique. On ne trouve cependant que les solutions entières ou approchées.

Pour résoudre un tel système par calcul, l'inconnue « y » étant isolée dans le premier membre de chacune des équations, il suffit d'égaliser les seconds membres pour obtenir une équation qui ne contient que x comme inconnue. On remplace ensuite x par la valeur trouvée dans une des deux équations données.

Isoler la même inconnue dans les deux équations puis égaliser les seconds membres est une deuxième méthode de résolution appelée **méthode par comparaison**.

Remarque

Avant d'utiliser cette méthode il est nécessaire de réduire chacune des équations et d'explicitier y.

4. Comment résoudre un système par substitution ?

Exemple

$$\text{Soit le système } \begin{cases} 3x - y = 11 & (A) \\ 2x - 5y = -36 & (B) \end{cases}.$$

Dans l'équation (A), on isole y dans le premier membre. On trouve $y = 3x - 11$.
Dans l'équation (B), on remplace y par $3x - 11$. Le système devient

$$\begin{cases} y = 3x - 11 & (A) \\ 2x - 5(3x - 11) = -36 & (B) \end{cases}.$$

On résout l'équation qui ne contient qu'une inconnue

$$\begin{aligned} 2x - 15x + 55 &= -36 \\ -13x &= -91 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

On remplace x par sa valeur dans (A). On trouve $y = 10$.

La solution est le couple $(7, 10)$.

Cette méthode est commode lorsqu'une des deux inconnues a comme coefficient 1 dans au moins une des deux équations. On l'appelle **méthode par substitution**. Il s'agit en effet de substituer (c'est-à-dire de remplacer) une inconnue dans une équation par sa valeur calculée dans l'autre.

5. Comment reconnaître un système impossible ?

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases}$$

Isolons x dans la première équation. On a

$$\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 4(2 - 2y) + 8y = 12 \end{cases}$$

Lorsque l'on regroupe les termes qui contiennent y , dans le premier membre de la seconde équation, on trouve

$$\begin{aligned} -8y + 8y &= 4 \\ 0y &= 4. \end{aligned}$$

Quelle que soit la valeur de y , le produit $0y$ ne vaudra jamais 4. Il est impossible de trouver une solution à ce système.

En observant les données, on constate que les rapports entre les coefficients des inconnues est le même mais n'est pas égal au rapport entre les termes indépendants

$\left(\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \neq \frac{4}{12}\right)$. Les droites qui représentent ces équations ont même pente, elles sont parallèles.

Lorsqu'un système ne possède aucune solution, on dit que ce système est **impossible**. Les droites qui représentent ces équations sont parallèles.

Énoncé 5.1

On peut prévoir qu'un système est impossible en réduisant les deux équations et en les explicitant par rapport à y . Si les coefficients angulaires sont identiques et si les termes indépendants ne le sont pas, alors le système est impossible. Ces équations sont représentées par des droites parallèles.

6. Comment reconnaître un système indéterminé ?

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 4x + 10y = 12 \end{cases}$$

Après les calculs habituels, on obtient l'égalité

$$0y = 0.$$

Quelle que soit la valeur que l'on donne à y , cette égalité sera vraie. Elle revient à **zéro égale zéro**. Il y a donc une infinité de solutions.

On dit aussi que **le système est indéterminé**. Les droites qui représentent ces équations sont confondues.

En observant les données, on constate que les rapports entre les coefficients des inconnues et des termes indépendants sont égaux $\left(\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}\right)$.

Énoncé 5.2

On peut prévoir qu'un système dont les équations sont réduites est indéterminé en examinant les coefficients des inconnues et des termes indépendants respectifs. S'ils sont proportionnels, alors le système est indéterminé et les deux équations sont représentées par la même droite.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Des sommes et des différences

- Trouver deux nombres dont la somme est 56 et dont la différence est 12.
- Trouver deux nombres dont la somme vaut 454 et la différence 152.
- Trouver deux nombres dont la somme vaut 34 et la différence 142.
- Trouver deux nombres dont la somme vaut 109 et la différence 86.

2. Chercher l'erreur

Trois élèves sont au tableau pour résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 & (A) \\ -2x + 5y = 69 & (B) \end{cases}$$

Voici comment chacun démarre :

$$\begin{array}{l} \text{Élisa} \begin{cases} 6x + 4y = 1 & (2A) \\ -6x + 15y = 69 & (3B) \end{cases} \quad \text{Jordan} \begin{cases} 15x + 10y = 5 & (5A) \\ 4x - 10y = -138 & (-2B) \end{cases} \quad \text{Brieuc} \begin{cases} 6x + 2y = 2 & (2A) \\ -6x + 5y = 138 & (3B) \end{cases} \end{array}$$

- Un seul des trois a bien commencé. Lequel ?
- Quelles sont les erreurs commises ?
- Résoudre ce système.

3. Remplacer

On donne le système

$$\begin{cases} 5x + 2y = -61 & (A) \\ x - 9y = -31 & (B) \end{cases}$$

- Dans l'équation (B), exprimer x en fonction de y .
- Dans l'équation (A), remplacer x par l'expression obtenue.
- Terminer la résolution du système.

4. Deux écolières

Laura et Manon se dirigent vers leur école. Toutes deux quittent leur maison à 8h15. Laura arrive à l'école avant Manon. Répondre aux questions en se référant au graphique donné (fig. 6).

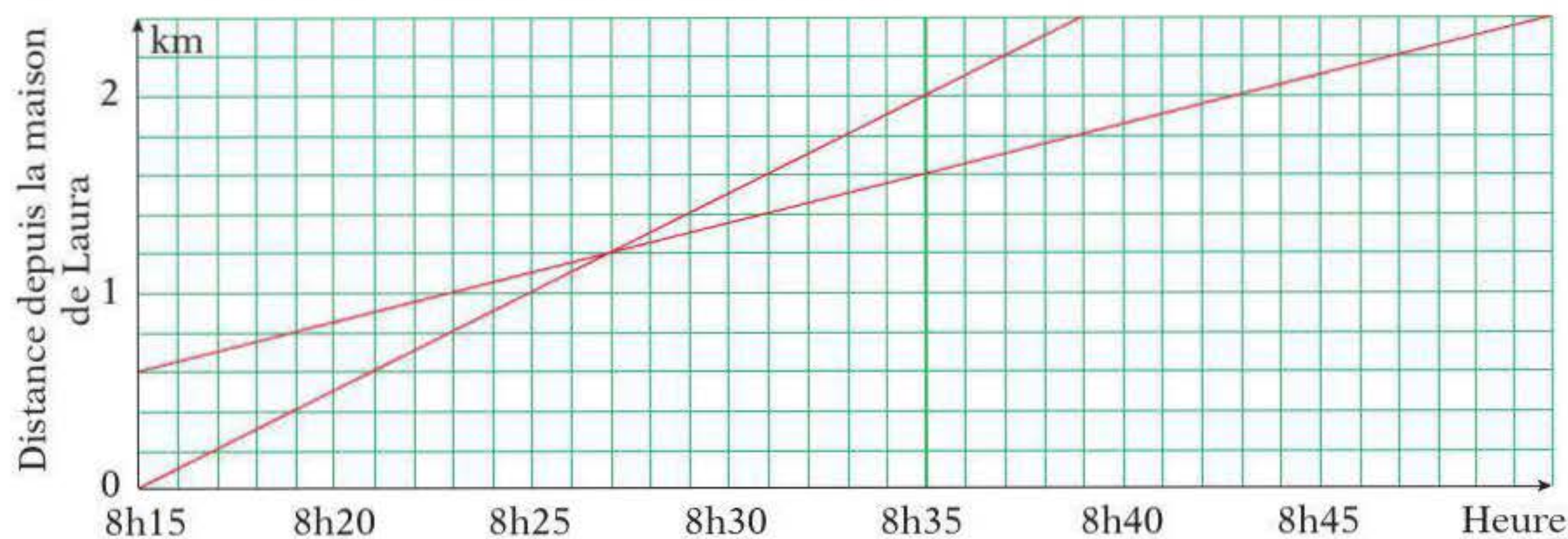


fig. 6

- Combien de temps dure le trajet de Manon ?
- À quelle distance de l'école habite Manon ?
- À quelle heure sont-elles à même distance de l'école ?
- Qui marche le plus vite, Laura ou Manon ?
- À quelle distance de l'école habite Laura ?
- Quelle est la vitesse de Laura (en mètre par minute puis en km/h) ?
- À quelle distance de la maison de Laura se rencontrent-elles ? À quelle heure ?

Appliquer une procédure

5. Résoudre par combinaison

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 50 \\ 5y - 4x = -2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x + 3y - 50 = 0 \\ 5y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 7x + 3y = 91 \\ -2x + 5y = 15 \end{cases}$

6. Résolution graphique

Résoudre les systèmes et vérifier les solutions en utilisant le graphique.

a. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ e. $\begin{cases} y = x + 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ d. $\begin{cases} y = x + 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

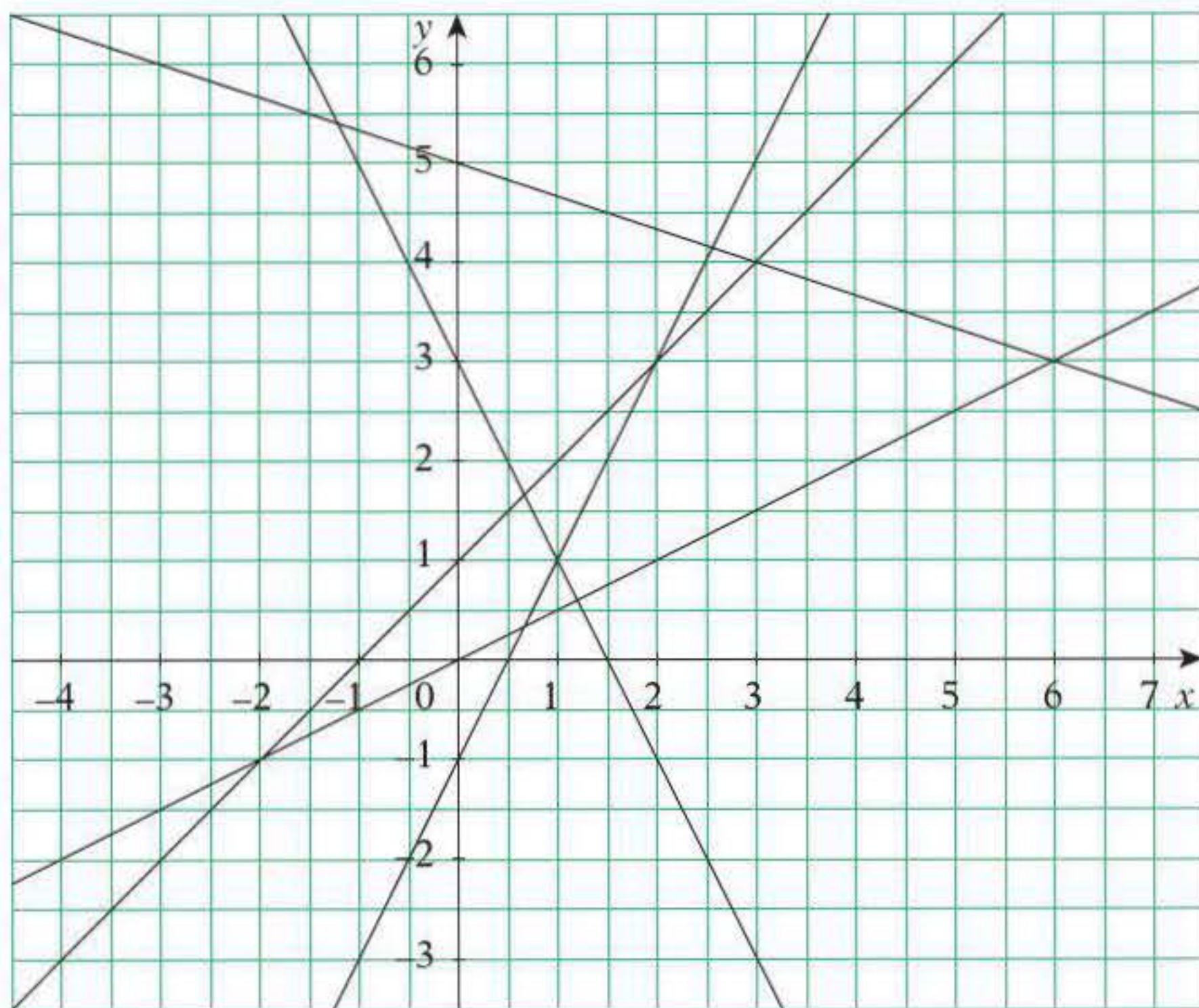


fig. 7

7. Résoudre par substitution

a.
$$\begin{cases} 2x + y = -12 \\ 5x + 4y = -33 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 5y = 27 \\ 7x - 6y = -98 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 4x - 5y = -35 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

8. Droites parallèles

Ce graphique (fig. 8) correspond au système
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$$

 Quelles sont les solutions ?

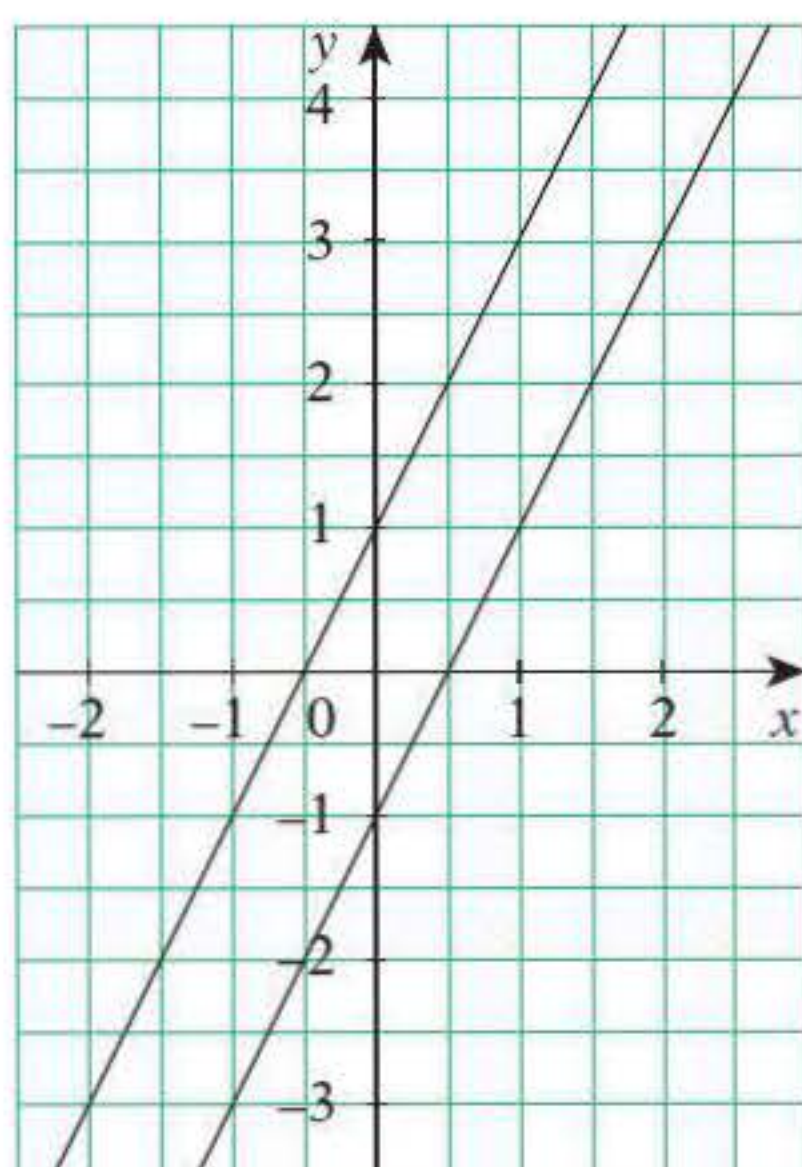


fig. 8

9. Droites confondues

Ce graphique (fig. 9) correspond au système
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

Quelles sont les solutions ?

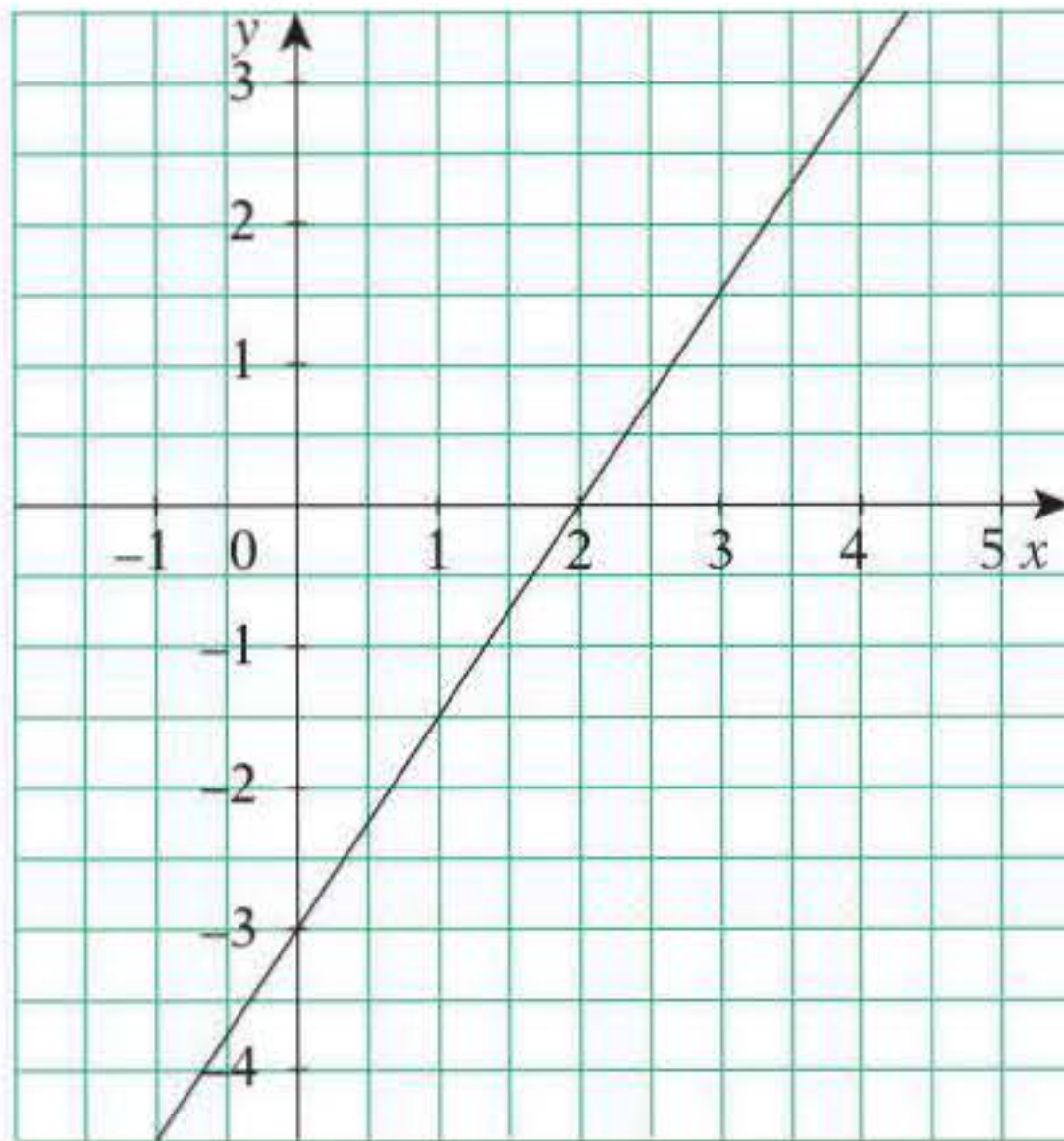


fig. 9

10. Le bon choix

Indiquer la méthode qui vous semble la plus adéquate (combinaison, substitution, graphique) pour résoudre chaque système.

a.
$$\begin{cases} y = 3 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y = 579 \\ x - y = -33 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 14x + 9y = -20 \\ 7x - 2y = 55 \end{cases}$$

11. Sans papier ni crayon

Résoudre les systèmes suivants de tête, en les observant attentivement.

a.
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 5y = 21 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 4x - 3y = 16 \\ 2y = 8 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 3y = 13 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 0,7x = 4,2 \\ 0,3x + 1,2y = 3 \end{cases}$$

12. Résoudre les systèmes suivants

Série 1

$$\text{a. } \begin{cases} x = 3 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} -x + y = 40 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x = y \\ x + y = 32 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x - 2y = 20 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Série 2

$$\text{a. } \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} s - 6p = -18 \\ 3s - 6p = -24 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 10a - b = -2 \\ 10a - 4b = 7 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 0,3x + 0,2y = 0,4 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Série 3

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 8x - 6y = -36 \\ \frac{2x}{3} - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} \frac{x-1}{8} + \frac{y-2}{5} = 2 \\ 2x + \frac{2y-5}{3} = 21 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} \frac{x}{3} + y = 19 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x + \frac{3y}{7} = 17 \\ y - \frac{5x}{8} = 6 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} \frac{4x+15}{3} - \frac{3y-5}{5} = x \\ \frac{2y+3x}{4} + \frac{y+15}{5} = y \end{cases}$$

13. Impossibles ou indéterminés ?

Parmi les exercices suivants, préciser ceux qui sont impossibles et ceux qui sont indéterminés.

$$\text{a. } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2(x + y) = 5 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} 7x - 5 = 6y + 3 \\ y + 7x = 7y + 12 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x = 4y + 9 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x - 6y = 22 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

Résoudre un problème

14. Rectangles

Le périmètre d'un rectangle mesure 1 330 m. Les deux tiers de sa largeur valent autant que les trois cinquièmes de sa longueur. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Indications

Pour résoudre un problème par la méthode des équations, on passe le plus souvent par les étapes suivantes.

De quoi s'agit-il ? D'un rectangle, de son périmètre et de ses dimensions.

Données : le périmètre du rectangle et une relation entre sa longueur et sa largeur.

Inconnues : la longueur (L) et la largeur (l).

Formules qui se rapportent à la situation : la formule du périmètre du rectangle :

$$p = 2L + 2l \text{ ou } \frac{p}{2} = L + l.$$

Les relations entre les inconnues, fournies par l'énoncé, sont traduites par le système :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}l = \frac{3}{5}L \\ L + l = 665 \end{cases}$$

- Résoudre ce système.
- Vérifier la solution.
- Quelles sont les dimensions des rectangles suivants ?
 - Le demi-périmètre du rectangle A mesure 24 cm et la longueur vaut 5 fois la largeur.
 - Le périmètre du rectangle B mesure 94 cm et la largeur surpasse de 2 cm la moitié de la longueur.

15. Des billets de cinq et de vingt euros seulement

Un commerçant se rend à la banque pour toucher un chèque de 270 €. Il souhaite obtenir des billets de 5 € et de 20 €. On lui donne 30 billets au total.

Combien de billets de chaque sorte a-t-il reçus ?

Indications

Appeler x le nombre de billets de 5 €, et y , le nombre de billets de 20 €.

La somme constituée par des billets de 5 € est donc $5x$ et la somme constituée par des billets de 20 € est donc $20y$.

Une des équations traduit l'information : la somme formée par les billets est la même que celle formée par les pièces.

L'autre équation traduit l'information : le nombre total de billets est 30.



16. Petite monnaie

Bernadette a des pièces de 20 centimes et des pièces de 50 centimes. Elle en a 23 au total pour une valeur de 7 €. Combien de pièces de chaque sorte a-t-elle ?

17. Au concert

Des tickets pour un concert coûtent 12 € au prix plein et 8 € au tarif étudiant. Ce soir, on a vendu, en tout, 800 tickets pour un montant de 8540 €. Combien a-t-on vendu de tickets au prix plein et de tickets au tarif étudiant ?



18. Livraison à domicile

Un camionneur doit livrer 58 caisses provenant de deux grossistes différents. Chez l'un, les caisses pèsent 7 kg, chez l'autre, elles pèsent 12 kg. La masse totale à charger est de 496 kg.

Combien de caisses de chaque sorte doit-il livrer ?

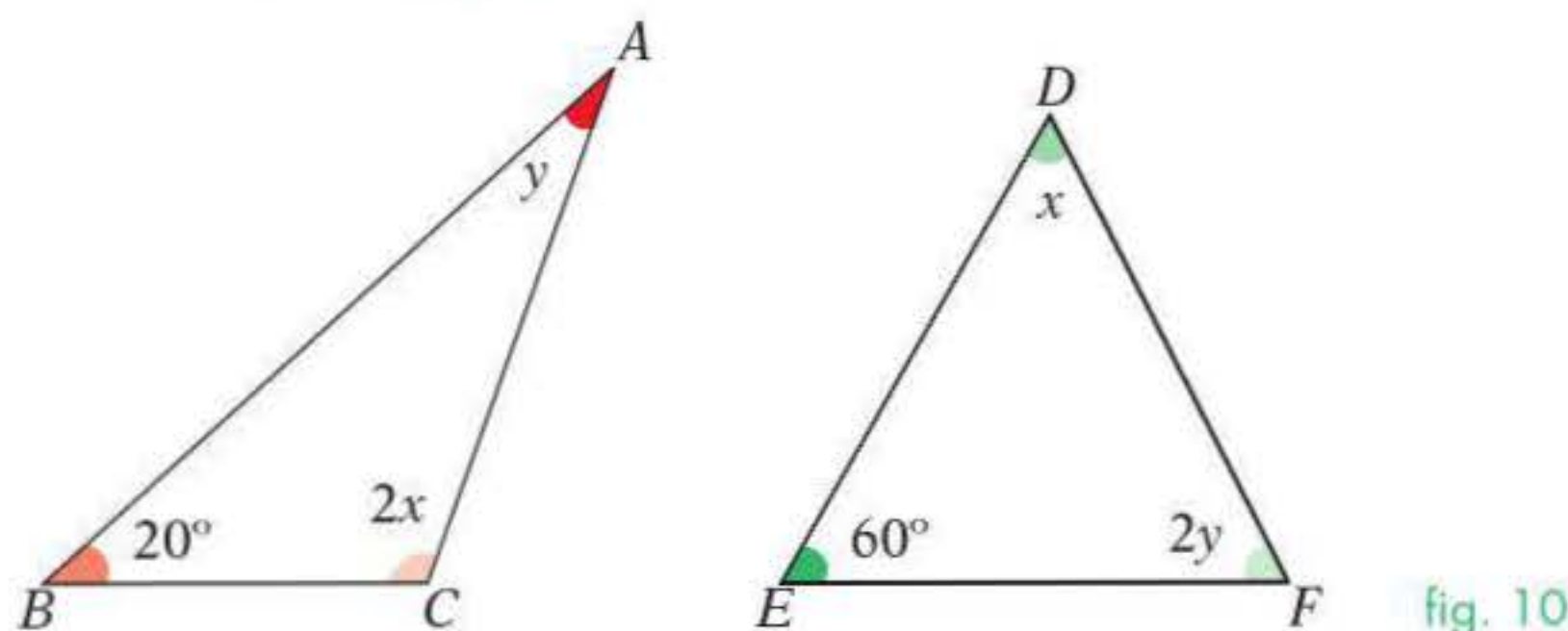
19. Deviner un nombre

Trouver deux nombres tels que le premier augmenté de 5 fois le second donne 140, alors que ce même premier nombre augmenté de 8 fois le second donne 215.

Quels sont ces nombres ?

20. Dans les triangles

Déterminer les mesures des angles de ces triangles en utilisant les données fournies par la fig. 10.



21. Consommation d'eau

Léa prend, en moyenne par semaine, quatre douches et trois bains. Elle consomme ainsi 730 litres d'eau. Jonas, lui, prend généralement six douches et un bain chaque semaine. Il consomme ainsi 570 litres d'eau.

Combien de litres d'eau consomme-t-on en moyenne pour une douche ? Pour un bain ?

22. Ça chauffe !

Une publicité d'installation de chauffage vous indique que pour 5 convecteurs électriques et 4 radiateurs à accumulation, il vous en coûtera 540 €.

Cette publicité annonce aussi que pour 7 radiateurs à accumulation et 6 convecteurs, le prix est de 802 €.

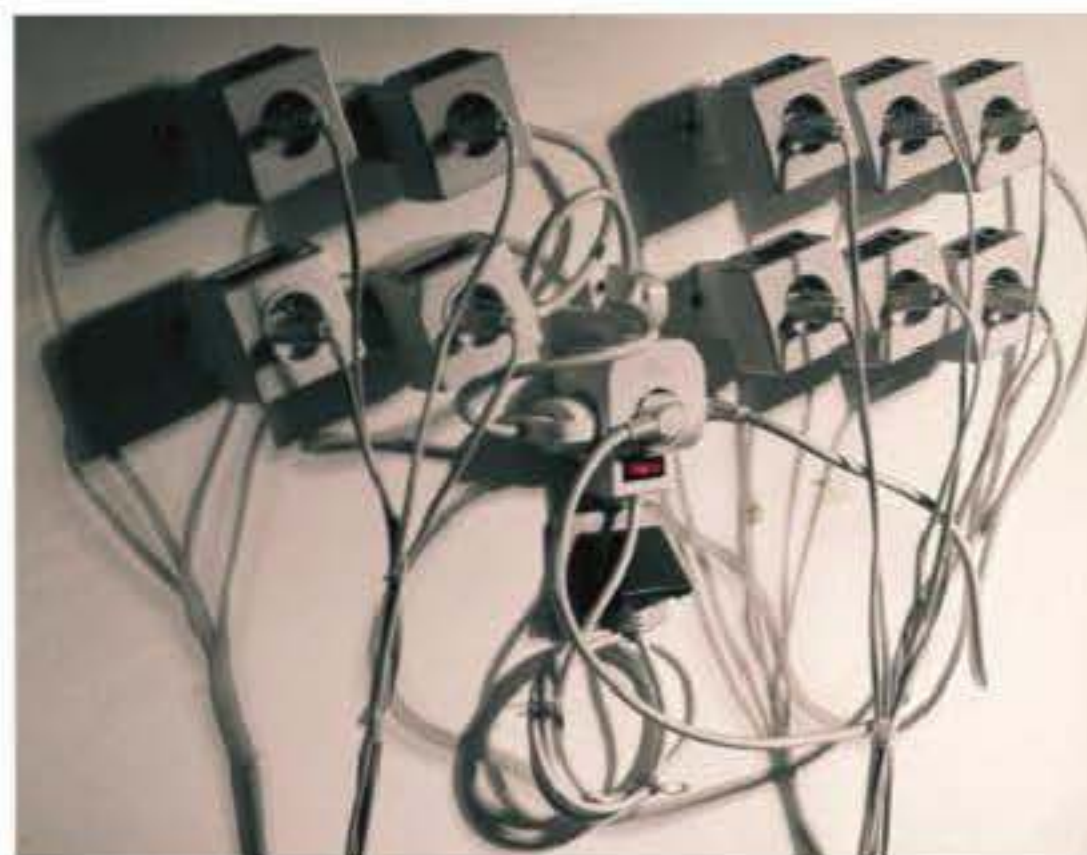
Une petite note mentionne qu'un forfait de 100 € est demandé pour toute installation, quelle qu'elle soit. Dans votre maison, vous voudriez 3 convecteurs et 10 radiateurs. Combien cela vous coûtera-t-il ?

23. Se mettre au courant

Si 100 mètres de fil et 8 prises coûtent 62 € et 150 mètres de fil et 10 prises valent 90 €, quel est le prix du fil au mètre et le prix des prises à la pièce ?

24. Faire toute la lumière

On peut acheter 3 lampes et 4 mètres de fil pour 38 € alors que 5 lampes et 14 mètres de fil coûtent 67 €. Quel est le prix des lampes et le prix du fil au mètre ?



Pour aller plus loin

25. Valeur nutritive

L'énergie fournie par 5 g de glucides et 10 g de lipides produit 110 kcal. L'énergie fournie par 10 g de glucides et 5 g de lipides produit 85 kcal.

- Quelle est l'énergie (en kcal) produite par 1 g de glucides ? Par 1 g de lipides ?
- Sachant que 1 g de protéines apporte 4 kcal, vérifier sur le tableau ci-contre que 100 g du produit sec fournit une énergie de 336 kcal (les fibres et le sodium n'apportent aucune calorie supplémentaire).

VALEURS NUTRITIONNELLES MOYENNES GEMIDDELDE VOEDINGSWAARDEN	Par 100 g de produit sec	Par portion ⁽¹⁾	Par portion ⁽¹⁾	% GDA ^(***)
	Per 100 g droog product	Per portie ⁽¹⁾	Per portie ⁽¹⁾	
Energie	336 kcal 1425 kJ	130 kcal 548 kJ	136 kcal 574 kJ	7%
Protéines/Eiwitten	8,5 g	4,37 g	4,80 g	10%
Glucides / Koolhydraten	73,2 g	25,35 g	25,95 g	10%
dont sucres waarvan suikers	2,0 g	3,10 g	3,70 g	4%
Lipides / Vetten	1,0 g	1,12 g	1,35 g	2%
dont saturés waarvan verzadigd vet	0,8 g	0,72 g	0,82 g	4%
Fibres / Vezels	6,8 g	2,12 g	2,12 g	8%
Sodium/Natrium	112 mg	59 mg	65 mg	3%

fig. 11

26. Vitesse et distance de freinage

Pour tester l'efficacité des « pneus pluie », un constructeur a enregistré les distances de freinage d'une automobile circulant sur une route humide à plusieurs vitesses différentes. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous. La relation entre la vitesse et la distance de freinage est donnée par la formule :

$$d = av^2 + b.$$

v (km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110	120
d (m)	29	42	57	74	94	115	140	166	193



- Calculer les coefficients a et b , en choisissant les vitesses 40 et 60 km/h.
- Calculer les distances de freinage correspondant aux autres vitesses et comparer les résultats à ceux fournis par le tableau.
- Recommencer avec un choix initial différent.

27. Ensemble à l'arrivée

Deux sœurs partent en excursion dans des voitures différentes. Celle qui quitte la maison la première voyage dans une voiture qui roule à une vitesse moyenne de 60 km/h. L'autre quitte la maison 30 minutes plus tard mais la voiture roule à une vitesse moyenne de 100 km/h. Elles arrivent à destination en même temps. Quelle est la distance entre le lieu d'arrivée et leur domicile ?

Résoudre ce problème par la méthode graphique.

28. Quelques problèmes de géométrie analytique

- Les points suivants sont-ils alignés ? Vérifier à partir d'une représentation graphique et par calcul.
 - $A(1, 1)$; $B(4, 2)$; $C(7, 3)$
 - $A(-7, 5)$; $B(-4, 3)$; $C(-1, 1)$
 - $A(-4, -2)$; $B(0, -3)$; $C(4, -4)$
- Écrire l'équation de la médiatrice du segment dont les extrémités sont les points
 - $A(0, 0)$ et $B(4, 6)$
 - $A(-1, 3)$ et $B(1, -5)$
 - $A(-1, -2)$ et $B(3, 2)$
- Voici les équations des droites d_1 , d_2 et d_3 .

$$d_1 \equiv 2x + y = 11 ; d_2 \equiv 3x - y = 4 ; d_3 \equiv 7x - 2y = 61$$

La droite d_3 passe-t-elle par l'intersection des droites d_1 et d_2 ?

- d. Les droites d_1 , d_2 et d_3 , dont on donne les équations ci-dessous, sont-elles concourantes ?

$$d_1 \equiv 5x - y = 5 ; d_2 \equiv 6x - 2y = 4 ; d_3 \equiv 2x - 4y = -57$$

- e. Les points A , B , C et D sont-ils les sommets d'un parallélogramme ?

$$A(-3, 0) ; B(0, 4) ; C(4, 4) \text{ et } D(4, 0).$$

Indication

Vérifier si les droites AB et CD sont parallèles et si les droites BC et AD le sont aussi.

- f. Les points A , B , C et D sont-ils les sommets d'un rectangle ?

$$A(-2, 2) ; B(1, 3) ; C(2, 0) \text{ et } D(-4, -3).$$

Indication

Vérifier si les droites AB et BC sont perpendiculaires et si les droites DC et AD le sont aussi.

- g. Les points A , B , C et D sont-ils les sommets d'un losange ?

a. $A(4, 5) ; B(11, 4) ; C(7, -1) \text{ et } D(-1, 0).$

b. $A(-3, 2) ; B(2, 5) ; C(6, 2) \text{ et } D(2, -1).$

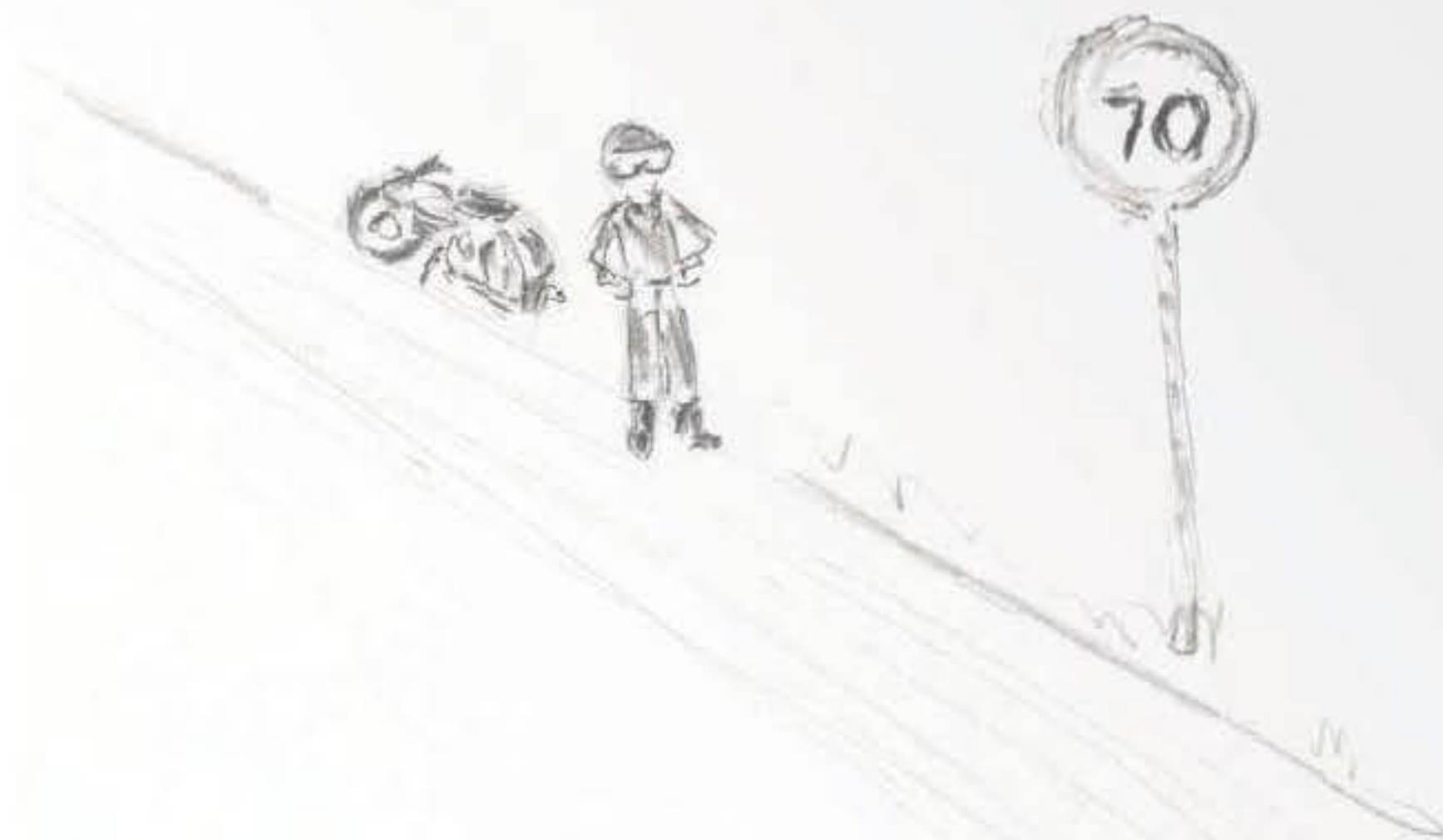
6 inéquations

On entend dire :

- « Ce film est interdit aux moins de 15 ans. »
- « Mon compte en banque ne peut pas descendre en dessous de 500 €. »
- « Aujourd'hui ma note de supermarché ne doit pas dépasser 75 €. »
- « Le coût de production de cet article ne peut pas dépasser 19 € par pièce produite et la quantité de pièces doit être supérieure à 12000 par mois. »
- « Ce produit doit être conservé à moins de 4 degrés centigrades. »
- « La vitesse maximum autorisée est de 70 km/h. »

Pour modéliser et résoudre des problèmes qui comportent de telles expressions, on travaille avec des *inéquations*.

Dans ce chapitre, nous apprendrons à nous en servir.



exploration

1. Plus de t-shirts ou plus de jeans ?

Un vendeur se rend au marché avec des t-shirts à 12 € et des jeans à 28 €. Il vend x t-shirts et y jeans.

Écrire les différentes situations ci-dessous sous une forme mathématique.

- a. Il espère vendre en tout plus de 120 articles.
- b. Il espère vendre pour plus de 500 €.
- c. Il espère que le nombre de jeans vendus soit plus grand que le double de t-shirts.



2. Toutes les solutions

Si $x + 4 = 7$, x ne peut prendre qu'une seule valeur.

- a. Quelle est cette valeur ?
- b. Est-ce que 3,5 est une solution pour $x + 4 > 7$? Et 3,1 ? Et $\frac{10}{3}$?
- c. Peut-on faire la liste de toutes les solutions de $x + 4 > 7$?
- d. Parmi les deux schémas ci-dessous, seul le premier représente **toutes** les solutions de $x + 4 > 7$.
Que signifient les symboles \circ et \bullet ?

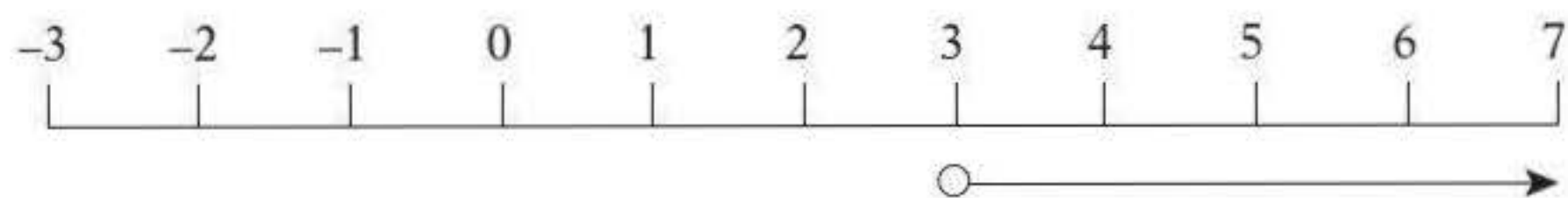


fig. 1

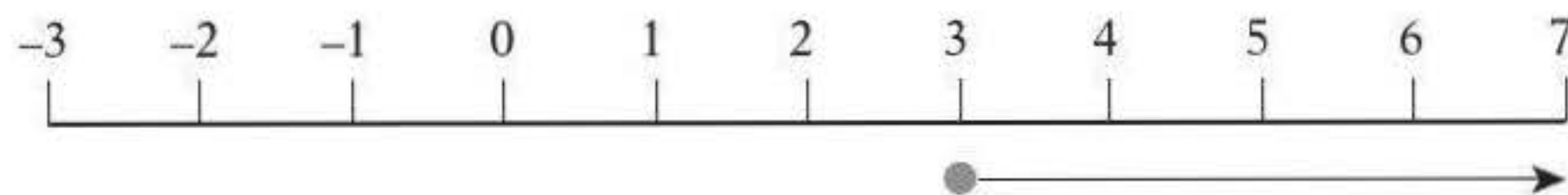


fig. 2

- e. Quelle est la signification de la flèche ?
- f. Quelle est la solution de l'équation $x + 1 = 3$?
- g. Représenter les solutions de l'inéquation $x + 1 \leq 3$.

3. D'une inégalité à l'autre

Choisir deux nombres p et q tels que $p < q$ et les repérer sur une droite des nombres.

Les inégalités suivantes sont-elles vraies ?

a. $2p < 2q$

d. $p - 1 < q - 1$

g. $-p - 1 < -q - 1$

b. $-p < -q$

e. $-3p < -3q$

h. $\frac{p}{2} < \frac{q}{2}$

c. $-p + 3 < -q + 3$

f. $-q < -q$

i. $-p + 1 < -q + 1$

4. Dans un sens ou dans l'autre ?

La fig. 3 illustre que si $p < q$ alors $p + 2 < q + 2$.

La fig. 4 illustre que si $p < q$ alors $2p < 2q$.

Dessiner un schéma qui montre que si $p < q$, alors $-2p > -2q$. Choisir d'abord p et q positifs, puis de signes différents, puis tous les deux négatifs.

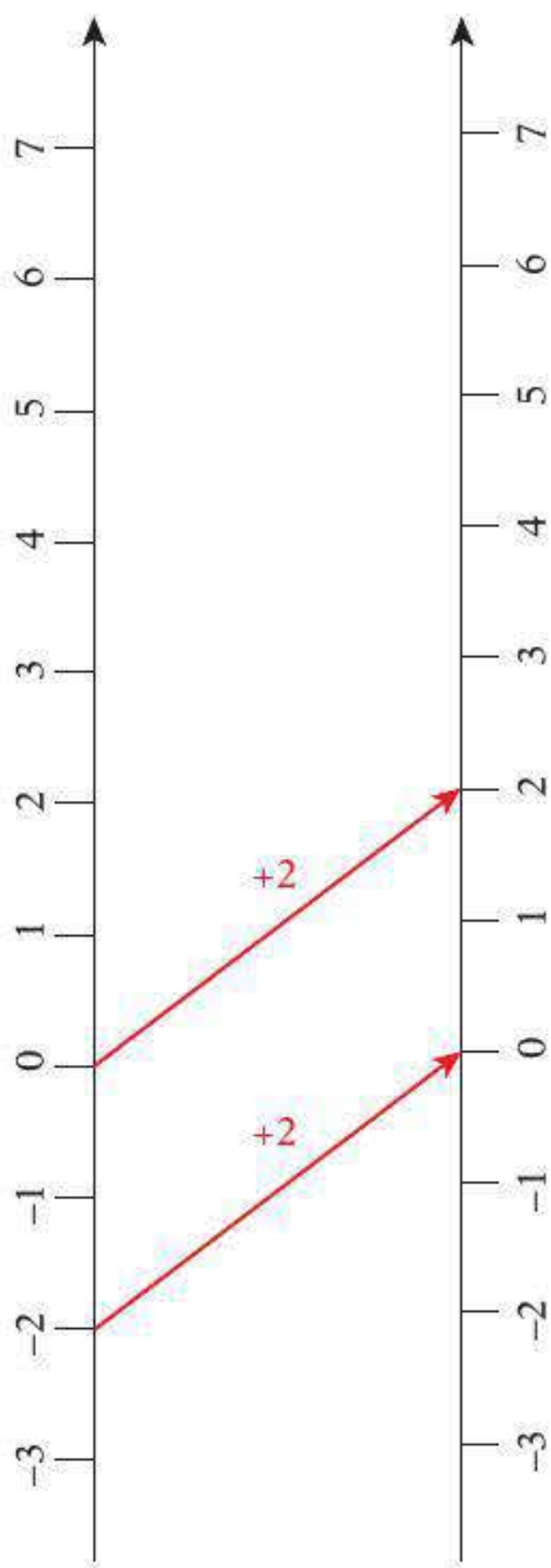


fig. 3

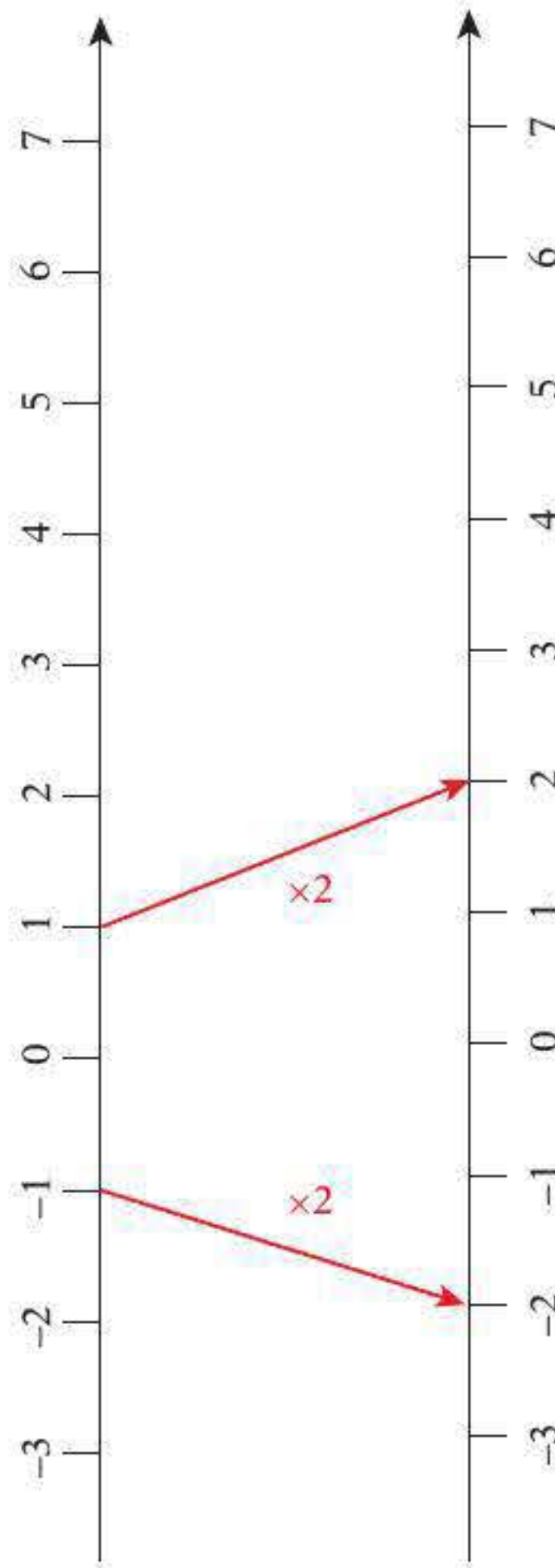


fig. 4

5. Signe de la fonction du premier degré

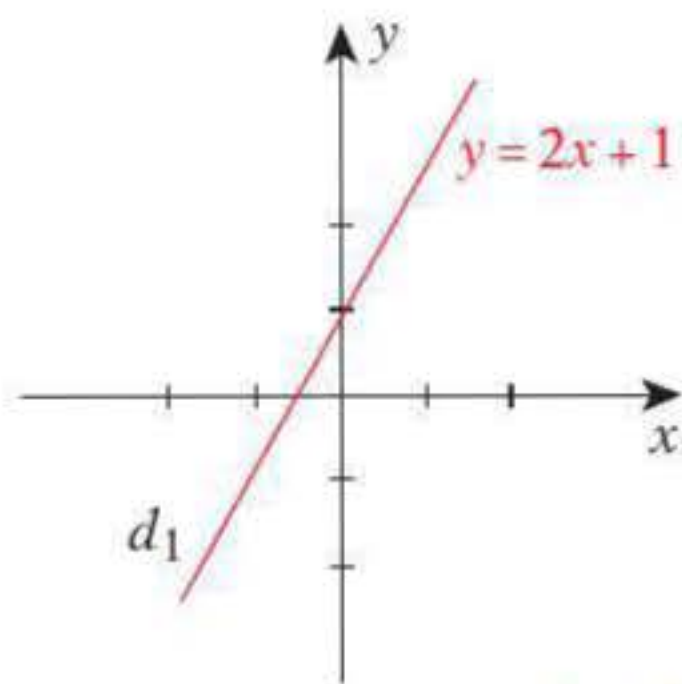


fig. 5

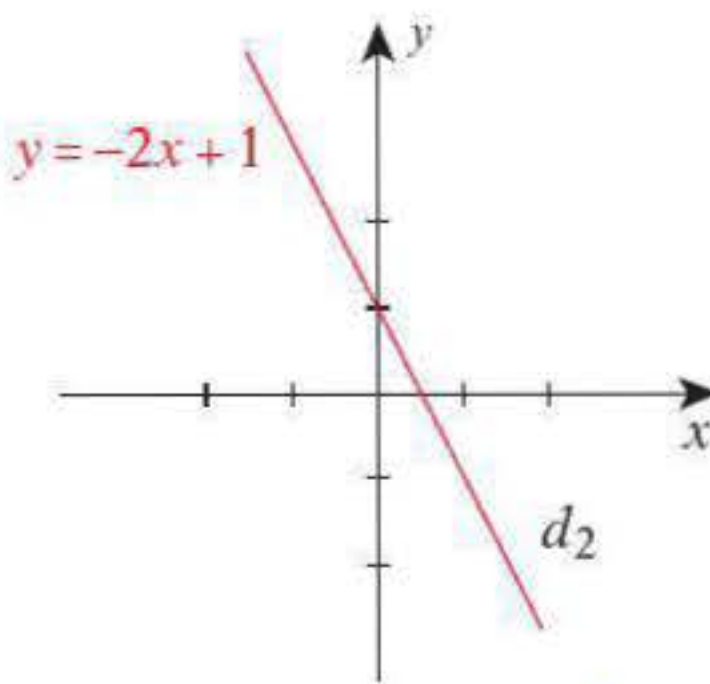


fig. 6

Sur la droite d_1 (fig. 5), on voit que le point d'abscisse $-0,5$ a une ordonnée qui vaut 0.

- Examiner les points de d_1 qui ont une abscisse inférieure à $-0,5$. Quel est le signe de leur ordonnée ?
- Examiner les points d_1 qui ont une abscisse supérieure à $-0,5$. Quel est le signe de leur ordonnée ?
- Examiner des points de d_2 (fig. 6) dont l'abscisse est égale, inférieure puis supérieure à $0,5$. Indiquer chaque fois le signe des ordonnées.

6. Vers une généralisation

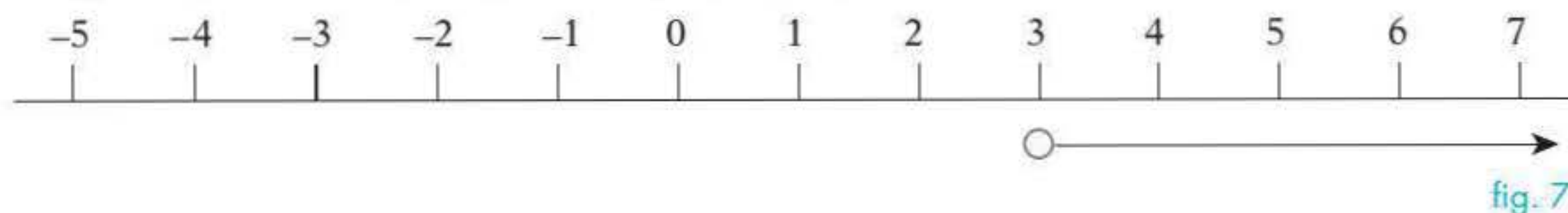
Dessiner une droite croissante et une droite décroissante (ne pas choisir les mêmes que celles qui ont été traitées ci-dessus). Examiner le signe des ordonnées des points de chacune de ces droites.

1. Comment lire les symboles ?

$<$ signifie « est plus petit que » ou « est inférieur à ».
 $>$ signifie « est plus grand que » ou « est supérieur à ».
 \leq signifie « est plus petit ou égal à ».
 \geq signifie « est plus grand ou égal à ».
 $n < 5$ se lit « n est plus petit que 5 » ou « n est inférieur à 5 ».
 $3 \leq n \leq 8$ se lit « n est plus grand ou égal à 3 mais plus petit ou égal à 8 ».
 $3 < n < 8$ se lit « n est compris entre 3 et 8 ».

2. Comment représenter les solutions d'une inéquation ?

Si x est un **entier** tel que $x > 3$, alors x est l'un des nombres 4, 5, 6, 7...
On peut décrire cet ensemble de solutions par une énumération.
Mais si x est un nombre **réel**, alors x peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 3, par exemple 3,1 mais aussi 3,0001 ou encore 3,000001.
On **représente** cette solution de la façon suivante.



Le cercle vide indique que le nombre 3 n'est pas solution de cette inéquation. La flèche orientée vers la droite indique que *toutes* les valeurs supérieures à 3 sont des solutions.

3. Quelles sont les propriétés des inégalités ?

Énoncé 6.1

Le sens de l'inégalité est conservé si on ajoute un même nombre aux deux membres de l'inégalité.

Énoncé 6.2

Le sens de l'inégalité est conservé si on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif.

Énoncé 6.3

Le sens de l'inégalité est renversé si on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement négatif.

Exemple

$$3 < 5 \text{ mais } -3 > -5$$

Sur une droite graduée (fig. 7), 3 précède 5, mais -5 précède -3.

4. Comment résoudre une inéquation du premier degré ?

On résout l'inéquation en utilisant à bon escient les énoncés 6.1 à 6.3.

Ensuite, on représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée. À savoir :

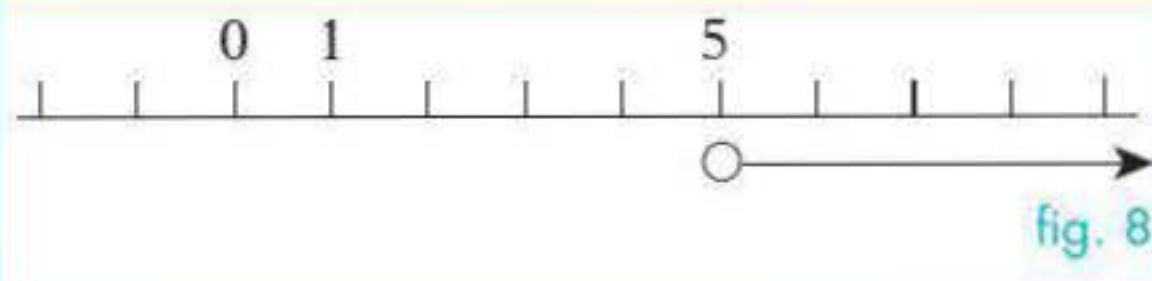
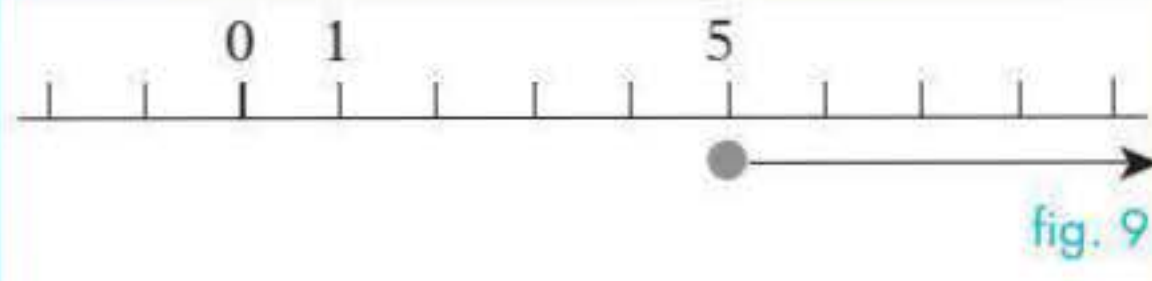
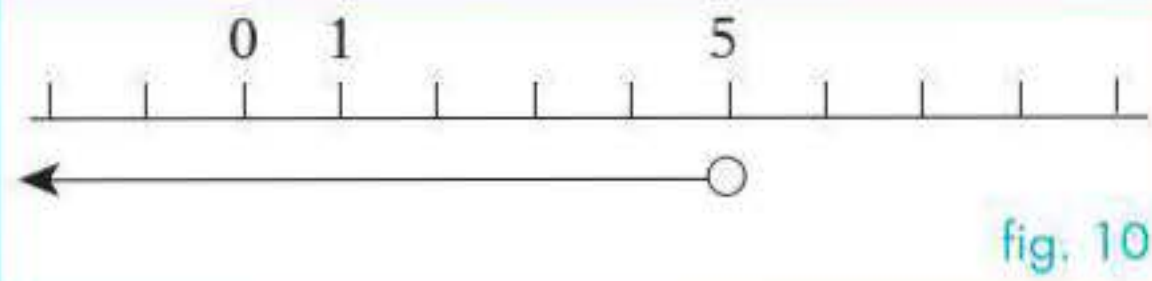
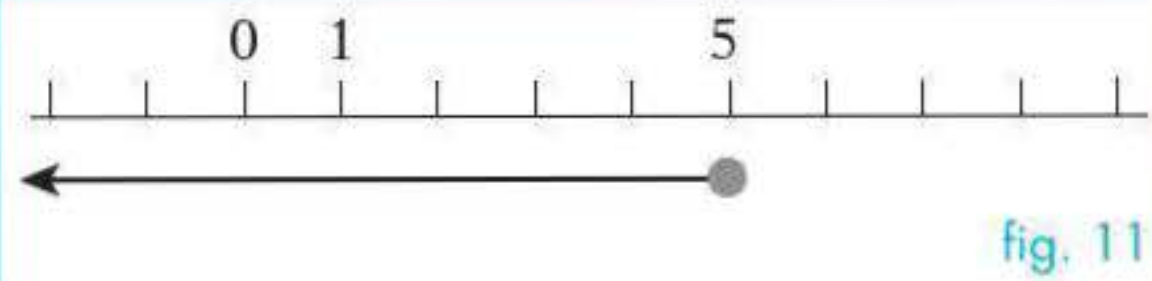
- placer le symbole ● ou ○ sur une droite graduée :
 - le ● est utilisé si le signe de l'inéquation est \leq ou \geq , dans ce cas, le nombre désigné par le point est solution de l'inéquation,
 - le ○ est utilisé si le signe de l'inéquation est $<$ ou $>$, dans ce cas, le nombre désigné par le point n'est pas solution de l'inéquation ;
- accentuer la partie de la droite graduée qui correspond à l'ensemble des solutions.

Remarque

Il est parfois demandé de représenter l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalle. On utilise alors les notations géométriques des segments et des demi-droites.

En résumé, voici comment écrire et représenter l'ensemble des solutions d'une inéquation.

Exemples

Écriture algébrique	Représentation sur une droite graduée	Écriture sous forme d'intervalle
$x > 5$	 fig. 8	L'ensemble est la demi-droite ouverte $]5 ; \rightarrow[$
$x \geq 5$	 fig. 9	L'ensemble est la demi-droite fermée $S = [5 ; \rightarrow[$
$x < 5$	 fig. 10	L'ensemble est la demi-droite ouverte $S =]\leftarrow ; 5[$
$x \leq 5$	 fig. 11	L'ensemble est la demi-droite fermée $S =]\leftarrow ; 5]$

5. Comment déterminer le signe d'une fonction du premier degré ?

Sur une représentation graphique d'une fonction du premier degré, on peut constater que :

- si la droite est croissante (fig. 12), la fonction est négative pour des valeurs de x inférieures à la racine et positive pour des valeurs de x supérieures à la racine,
- si la droite est décroissante (fig. 13), la fonction est positive pour des valeurs de x inférieures à la racine et négative pour des valeurs de x supérieures à la racine.

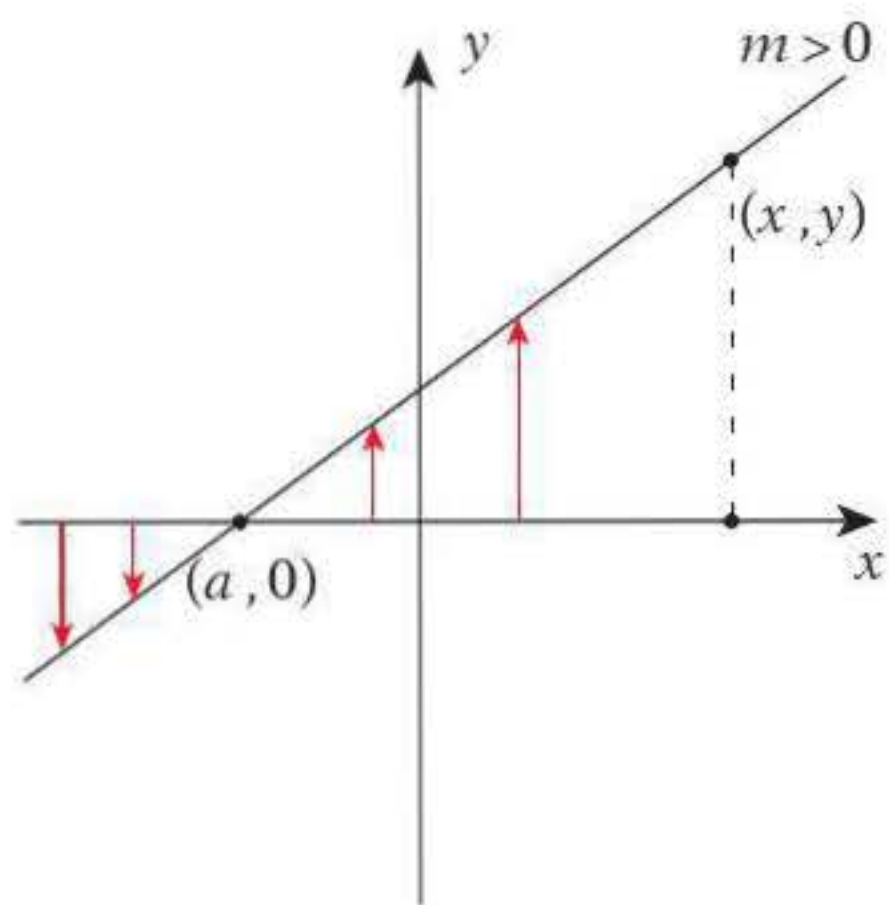


fig. 12

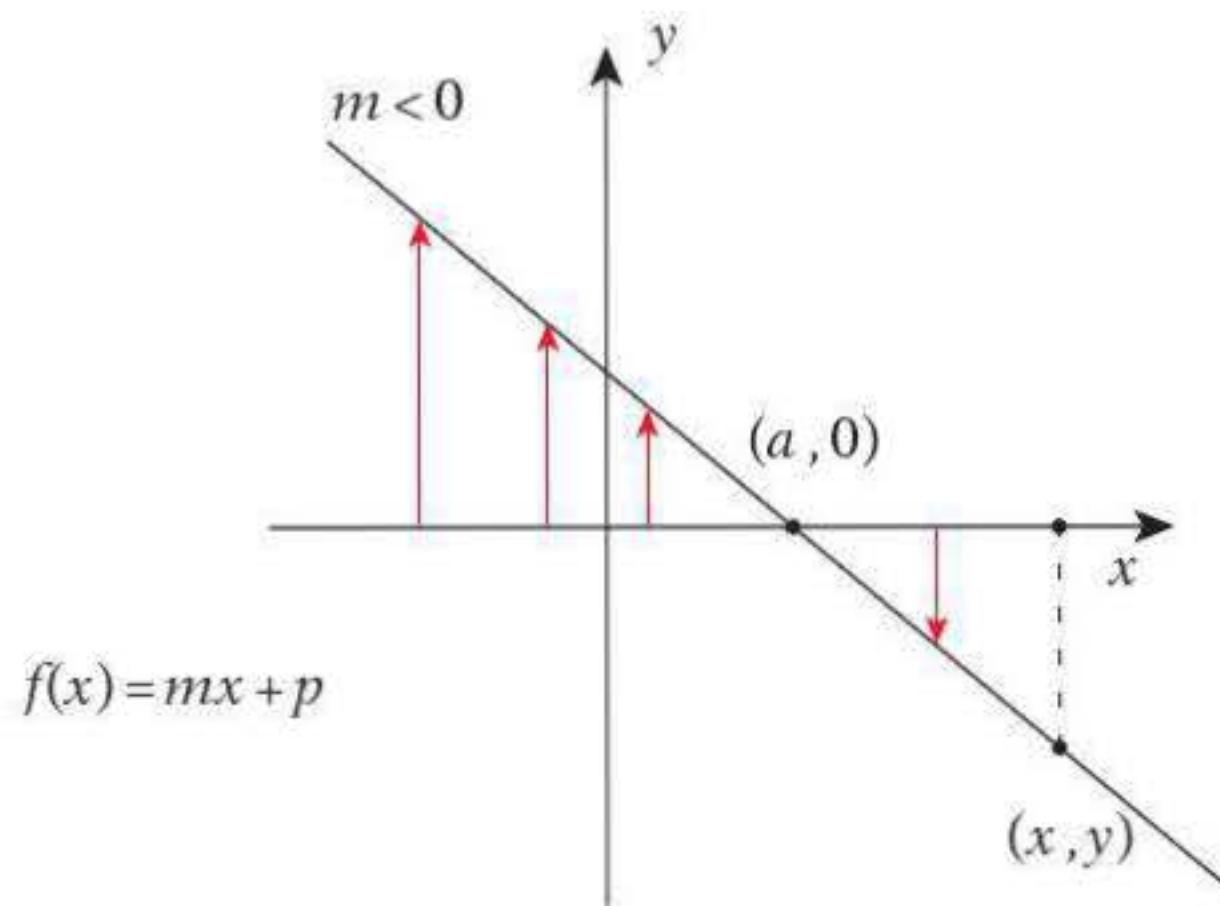


fig. 13

Énoncé 6.4

Le nombre a étant la solution de l'équation $mx + p = 0$,

si $x > a$, alors $f(x)$ a le même signe que m .

Expliciter les savoirs et les procédures

1. La droite des nombres

- a. Représenter les inéquations suivantes sur une droite des nombres. Dessiner une droite différente pour chaque inéquation.

$$\begin{aligned}x &> -2 \\ 2 &< x < 5 \\ -2 &< x \leq 4\end{aligned}$$

- b. Si x est un nombre entier, écrire l'ensemble des solutions de chacune de ces trois inéquations.

2. L'inégalité qui convient

Choisir l'inégalité qui traduit la situation.

- a. La vitesse dans ce village est limitée à 30 km/h. La lettre v représente une vitesse.

$$\begin{array}{ll}1) v > 30 & 3) v \geq 30 \\ 2) v < 30 & 4) v \leq 30\end{array}$$

- b. Dans cette école, les classes comportent au moins 15 élèves mais n'atteignent jamais 30 élèves. La lettre x représente le nombre d'élèves.

$$\begin{array}{ll}1) 15 < x < 30 & 3) 15 < x < 30 \\ 2) 15 \leq x < 30 & 4) 15 \leq x \leq 30\end{array}$$

- c. Écrire une double inégalité qui traduise cette situation : la durée de cuisson doit être supérieure à 1h00 et inférieure à 1h15.

3. Il est majeur

Cédric dit : « Il y a au moins 4 ans que je suis majeur. » Quelle est l'inégalité qui traduit cette affirmation ? La lettre x représente son âge actuel.

$$\begin{array}{llll}1) x + 4 < 18 & 3) x + 4 > 18 & 5) x + 4 \geq 18 & 7) x - 4 \geq 18 \\ 2) x - 4 < 18 & 4) x - 4 > 18 & 6) x + 4 \leq 18 & 8) x - 4 \leq 18\end{array}$$

4. Excursion scolaire

Pour l'excursion scolaire, les élèves sont répartis par groupes de 5. Dans un autocar, on peut placer maximum 47 personnes. Quatre professeurs accompagnent et il ne faut pas scinder les groupes d'élèves.

- a. Quelle est l'inéquation qui traduit les conditions d'accès à cet autocar ? La lettre n représente le nombre de groupes.

$$\begin{array}{lll}1) 5n + 4 < 47 & 3) 5n - 4 \leq 47 & 5) 5n + 4 \leq 47 \\ 2) 5n + 4 > 47 & 4) 5n - 4 > 47 & 6) 5n + 4 \geq 47\end{array}$$

- b. Résoudre cette inéquation pour trouver le nombre de groupes que l'on peut faire entrer dans l'autocar:



5. Clôture

Les poteaux d'une clôture sont distants de 3 m. La clôture délimite deux prés, elle n'est pas fermée et doit avoir minimum 58 m de long.

- a. Faire un schéma pour une clôture qui comporte 6 poteaux et comparer le nombre de poteaux au nombre d'intervalles.
- b. Si p est le nombre de poteaux, quelle est l'inéquation qui correspond à la situation ?
- 1) $3(p + 1) \leq 58$ 3) $3(p + 1) \geq 58$
 2) $3(p - 1) \leq 58$ 4) $3(p - 1) \geq 58$
- c. Résoudre cette inéquation pour trouver le nombre minimum de poteaux qu'il faut prévoir.



Appliquer une procédure

6. Résoudre une inéquation et représenter les solutions (deux exercices résolus)

Résoudre $\frac{x}{5} - 7,2 \leq 29$ et $3(1 - 5x) < -12$, représenter les solutions sur une droite graduée.

$$\frac{x}{5} - 7,2 \leq 29$$

ajouter 7,2
aux 2 membres

$$\frac{x}{5} \leq 36,2$$

multiplier les
2 membres par 5

$$x \leq 181$$

$$3(1 - 5x) < -12$$

Calcul algébrique

$$3 - 15x < -12$$

Retencher 3 aux
2 membres

$$-15x < -15$$

Diviser les 2 membres
par -15

$$x > 1$$

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée.

Série 1

- | | | |
|---------------------|--------------------------|----------------------------|
| a. $x - 7 > 21$ | d. $n - 17 \leq -1$ | g. $\frac{n+3}{2} < -1$ |
| b. $2a > 3$ | e. $\frac{a}{2} \leq 3$ | h. $\frac{1+2n}{5} \geq 4$ |
| c. $5n + 4 \geq -3$ | f. $\frac{a}{5} - 1 < 1$ | i. $\frac{-1+2n}{5} < 5$ |

Série 2

- | | | |
|----------------|---------------------------|----------------------|
| a. $2n < -5$ | e. $7 - 2x \leq 5$ | i. $2(3 + 5n) < 10$ |
| b. $-2n < 5$ | f. $7 - 2x < -1$ | j. $2(3 - 5n) < 10$ |
| c. $-2n > 5$ | g. $\frac{7-2x}{3} > 1$ | k. $2(3 + 5n) < -10$ |
| d. $2n \geq 5$ | h. $\frac{3-x}{2} \leq 5$ | l. $2(3 - 5n) > 10$ |

Série 3

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| a. $-1 < x + 4 < 5$ | d. $-5 < 5m < 25$ |
| b. $2 \leq a - 1 < 15$ | e. $-16 < \frac{n}{4} < 20$ |
| c. $-14 < 2n \leq 5$ | f. $-7 < -n < 12$ |

Série 4

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a. $3n - 9 < 7 - 4n$ | c. $3(n - 5) > -2n$ |
| b. $2(n - 5) > 3n$ | d. $2(n - 1) < 3(n + 2)$ |

7. Abscisses et ordonnées

- a. La droite d_1 a comme équation $y = -5x + 1$. Pour quelles valeurs de x les points de cette droite ont-ils une ordonnée négative ?
- b. La droite d_2 a comme équation $-2y = 6x - 1$. Pour quelles valeurs de x les points de cette droite ont-ils une ordonnée positive ?

Résoudre un problème

8. Bonnes conditions

Quelles sont les valeurs du nombre x pour lesquelles le carré de la différence entre x et 3 est inférieur à la différence entre le carré de x et le carré de 3 ?

9. Au marché

Un marchand se rend au marché avec 100 kg d'oranges et 120 kg de bananes. Il vend les oranges à 3 € le kg et les bananes à 2,5 € le kg. À la moitié de la matinée, il a vendu toutes ses oranges mais il lui reste beaucoup de bananes. Combien doit-il avoir vendu de bananes s'il veut que la vente de ces deux produits atteigne, ensemble, au moins 500 € ?



10. Dans un triangle

On sait que, dans un triangle, chaque côté est inférieur à la somme des deux autres. Les mesures des côtés d'un triangle sont 7 cm, 5 cm et $(x + 3)$ cm. Quelles sont les valeurs de x qui permettent de construire un tel triangle ?

11. Un point voyage sur les bords d'un rectangle (exercice partiellement résolu)

On considère un rectangle $ABCD$ de 6 cm de longueur et de 4 cm de largeur.

Le point M est mobile, il part de B et se déplace vers C sur le côté BC du rectangle. On désigne par x la longueur (en cm) du trajet effectué par M .

Pour quelles valeurs de x l'aire de la surface grise est-elle :

- a. strictement inférieure à 5 cm^2 ?
- b. supérieure ou égale à 10 cm^2 ?

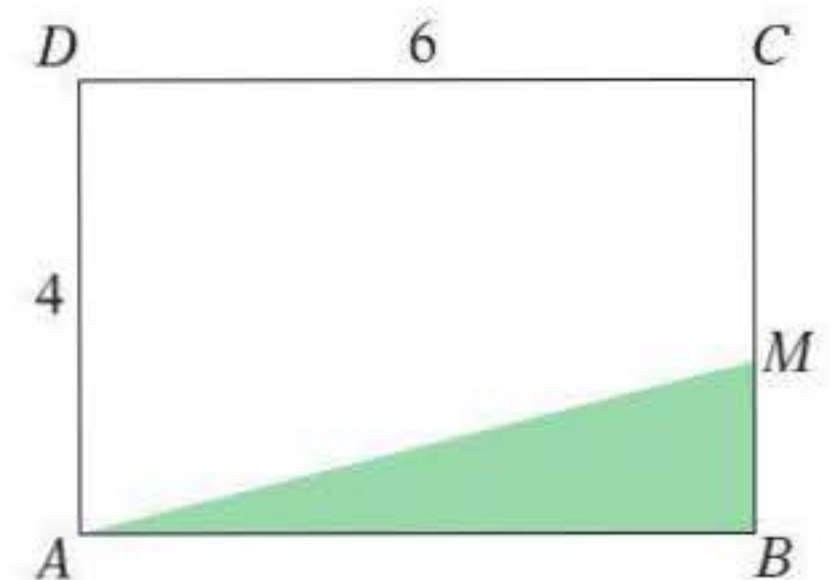


fig. 14

Indications pour une résolution algébrique

Si x est la distance du point M au point B , l'aire de la surface grisée (A) s'écrit :

$$A = \frac{6x}{2}$$

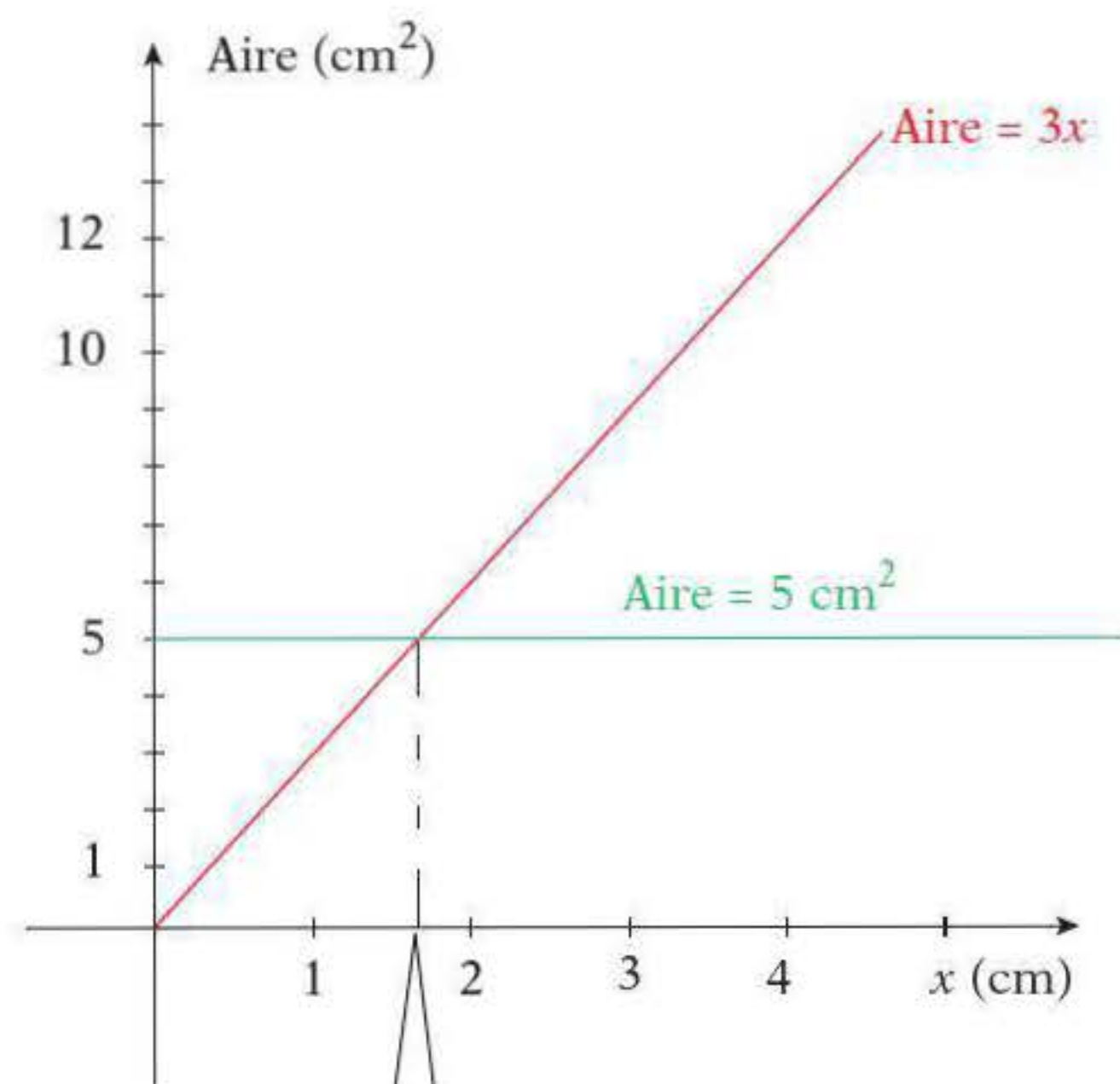
- 1) En partant de $A = 3x$ et en posant $A < 5$, on résout l'inéquation $3x < 5$.
- 2) En partant de $A = 3x$ et en posant $A \geq 10$, on résout l'inéquation $3x \geq 10$.

Indications pour une résolution graphique

Représenter (éventuellement avec un logiciel graphique) la fonction qui montre les variations d'aire quand le point M bouge. C'est la fonction $A = 3x$.

Repère le point de cette droite dont l'ordonnée est 5.

Sélectionner tous les points de la droite $A = 3x$ dont l'ordonnée est inférieure à 5. Les abscisses de ces points sont les valeurs de x demandées. On voit donc que le point M doit se situer entre 0 cm et à peu près 1,7 cm.



Pour $x = 1,666 \dots$, l'aire vaut 5 cm^2 .
Pour $0 \leq x < 1,666 \dots$, l'aire est inférieure à 5 cm^2 .

fig. 15

Pour que l'aire soit supérieure à 10 cm^2 , on repère sur la droite les points dont l'ordonnée est supérieure à 10.

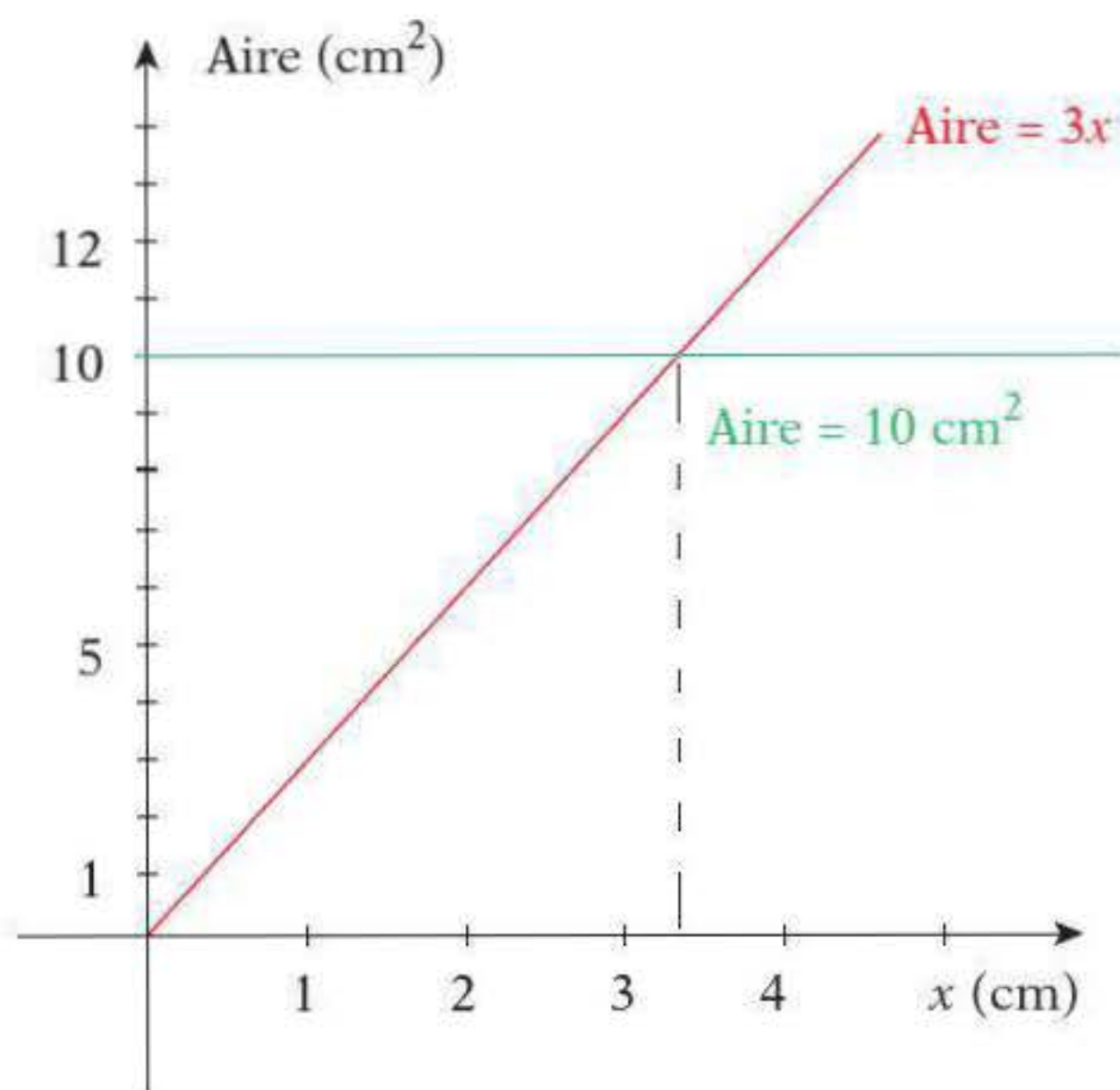


fig. 16

Pour aller plus loin

12. Un point circule sur un trapèze

On considère un trapèze rectangle $ABCD$.

Certaines dimensions sont indiquées sur la fig. 17.

Choisir un point M quelconque sur le côté DC . Noter $\overline{DM} = x$.

- Comparer l'aire du triangle BCM et celle du trapèze $ABMD$ quand $x = 3$.
- Rechercher pour quelles valeurs de x l'aire du triangle MBC est supérieure ou égale à l'aire du trapèze $ABMD$.

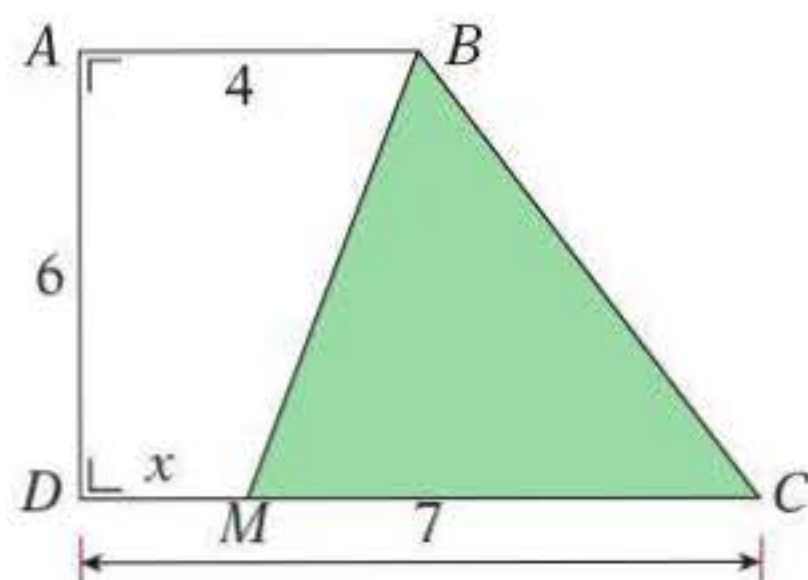


fig. 17

13. Sur l'autoroute

Lise roule sur autoroute à une vitesse moyenne de 110 km/h. Elle est à 165 km du péage. Nicolas est parti plus tard et circule sur la même autoroute à 120 km/h de moyenne. Il veut rattraper Lise avant le péage. Quelle doit être la distance minimale entre Lise et Nicolas pour que cela soit possible ?



Indication

Commencer par compléter le tableau ci-dessous

	Vitesse (v)	Durée (t)	Distance ($d = v t$)
Lise	110 km/h	...	165 km
Nicolas	120 km/h	< ...	165 + x



angles et triangles isométriques

Jusqu'à présent, les propriétés des figures ont été découvertes à partir d'observations, d'expériences (construire, reporter, superposer) et de déductions. Nous poursuivons l'étude des figures isométriques en nous appuyant sur ces connaissances mais, de plus en plus souvent, nous établirons les propriétés par la seule force du raisonnement et en se référant aux **énoncés** établis, c'est-à-dire en construisant des **démonstrations**. Le verbe « démontrer » vient du latin *demonstrare* qui signifie « montrer à partir de ».

Cette façon de raisonner se situe dans la tradition mathématique inaugurée par EUCLIDE (320-269 A.C.N.), un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité. Il a dirigé, à Alexandrie, une équipe qui a participé à l'écriture de son œuvre : *Les Éléments*.

Euclide apporte des définitions rigoureuses et démontre les grands théorèmes de ses ancêtres, comme ceux de THALES DE MILET (624-548 A.C.N.) et PYTHAGORE DE SAMOS (569-475 A.C.N.). Les œuvres d'Euclide serviront de base à la géométrie pendant plus de 2000 ans.

À la suite d'Euclide, nous construirons des démonstrations qui s'appuient sur des énoncés établis précédemment. Certains énoncés peuvent être démontrés de plusieurs façons, mais dans ce chapitre on utilisera chaque fois que c'est possible les « **cas d'isométrie des triangles** ».



Étude de la théorie de géométrie du mathématicien grec Euclide, ou *Les Éléments*, tiré du portrait de Fra Luca Pacioli, mathématicien (détail), par Jacopo de Barbari, 1495.

1. Médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle

a. Sur la fig. 1, on a indiqué que le triangle ABC est rectangle et que le point M est le milieu de son hypoténuse.

Reproduire la figure et construire l'image de ce triangle par la symétrie de centre M .

b. Quelle est la propriété du rectangle qui permet de comprendre pourquoi $[CM]$ est la moitié de $[AB]$?

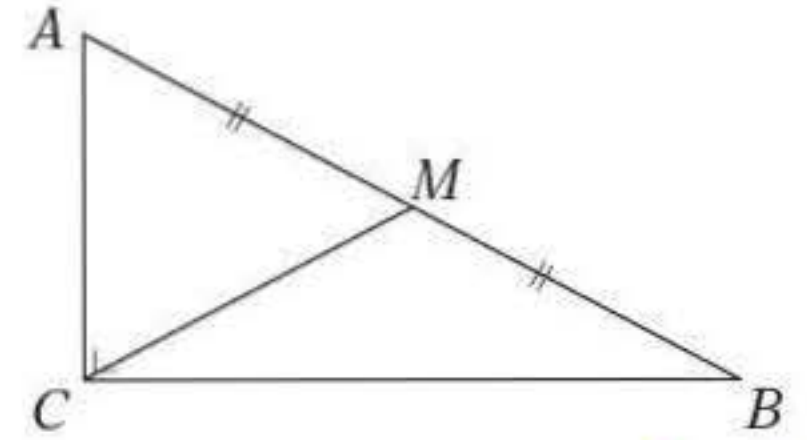


fig. 1

2. Un angle mobile

On fait pivoter un angle de 90° de telle sorte que ses deux côtés soient en contact avec deux clous A et B (fig. 2).

a. Expérimenter en plaçant l'angle droit d'une équerre entre deux points fixes.

b. Expliquer pourquoi le sommet de l'angle décrit un demi-cercle (rechercher le centre et le rayon de ce cercle...).

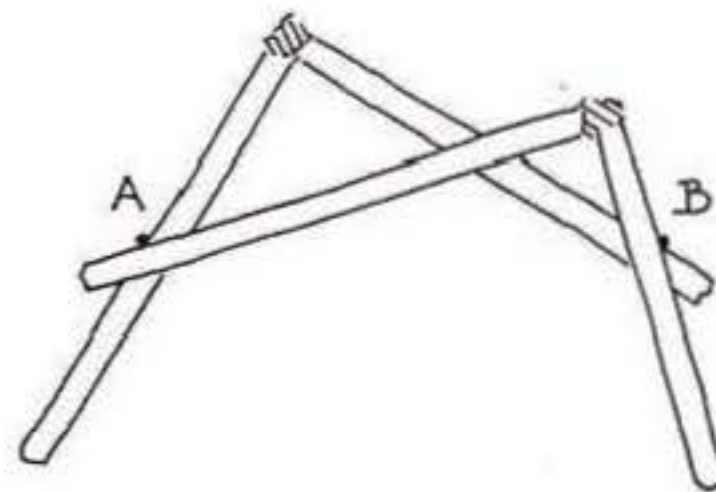


fig. 2



Ce procédé est utile aux artisans pour tracer un arc de cercle dont le centre n'est pas accessible.

3. Angle inscrit dans un cercle

a. En utilisant les mesures indiquées sur la fig. 3 et certaines propriétés des angles, déterminer l'angle dont l'amplitude est notée par la lettre x .

b. Comparer la mesure de l'angle inscrit à celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

c. Expliquer pourquoi cette propriété est vraie pour n'importe quel angle inscrit.

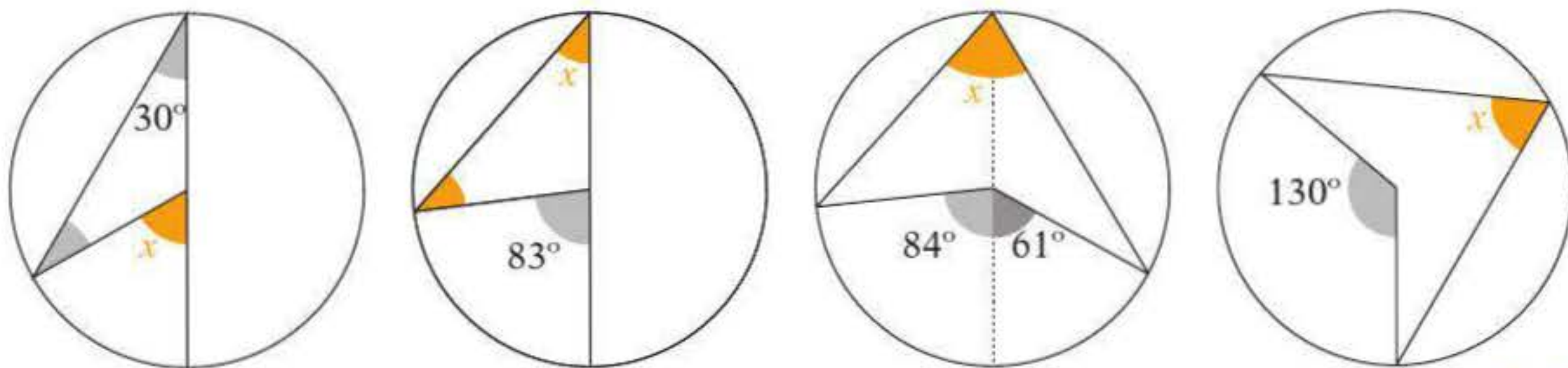


fig. 3

4. Angles à côtés perpendiculaires

- Les angles A_1 et B_1 (fig. 4) ont leurs côtés respectivement perpendiculaires. Ont-ils même amplitude ? Faut-il les mesurer pour le savoir ?
- Repérer sur la même figure un autre angle ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle $\widehat{A_1}$ et qui n'a pas la même amplitude.
- Repérer dans la synthèse un énoncé correspondant aux conclusions que l'on peut tirer.
- Tracer la hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle (fig. 5). Repérer des angles à côtés perpendiculaires. Ces angles ont-ils même amplitude ? Explorer, généraliser.
- Considérer un secteur angulaire α inférieur à 180° . Choisir un point et tracer un angle β dont les côtés sont perpendiculaires à ceux de l'angle α . Faire varier la position du sommet de l'angle β . Dans quels cas les deux angles ont-ils même amplitude et dans quels cas sont-ils supplémentaires ?

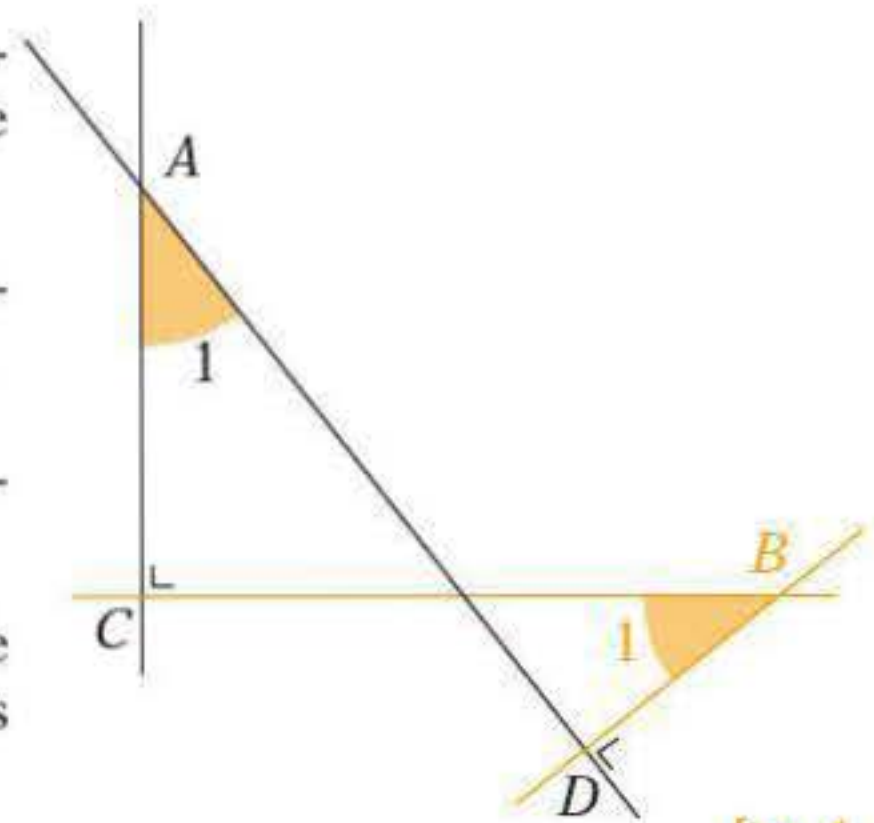


fig. 4

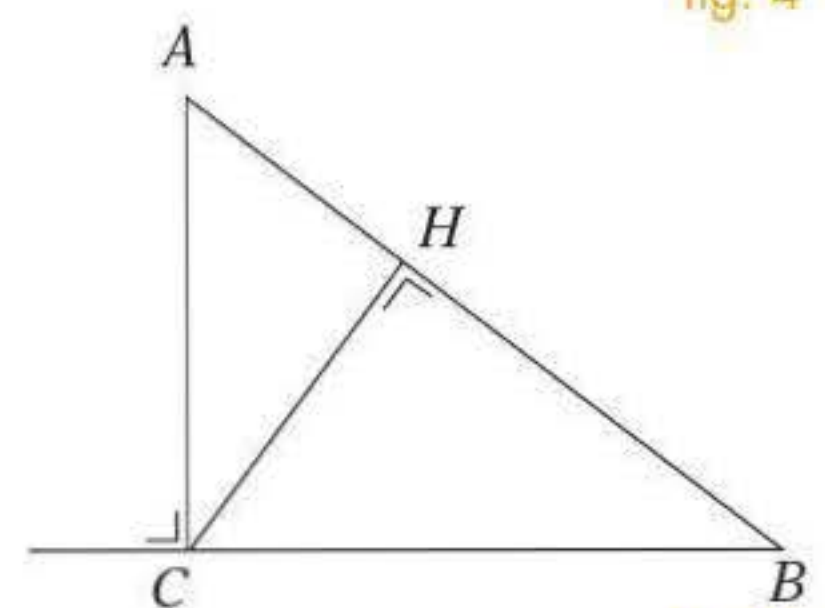


fig. 5



5. Déterminer une figure

À chaque polygone correspondent des mesures de côtés et d'angles. Mais pour en dessiner un, il n'est pas nécessaire de fournir les mesures de tous les angles et de tous les côtés. On dit qu'un ensemble de données **déterminent** un polygone si tous les polygones dessinés à partir de ces seules données sont superposables ou isométriques.

- La fig. 7 représente le développement latéral d'un prisme droit (fig. 6). Peut-on dessiner la base de ce prisme à l'aide des données fournies ? Si c'est le cas, construire cette figure.
- Si on forme deux plis dans un rectangle, peut-on toujours former un prisme droit ?

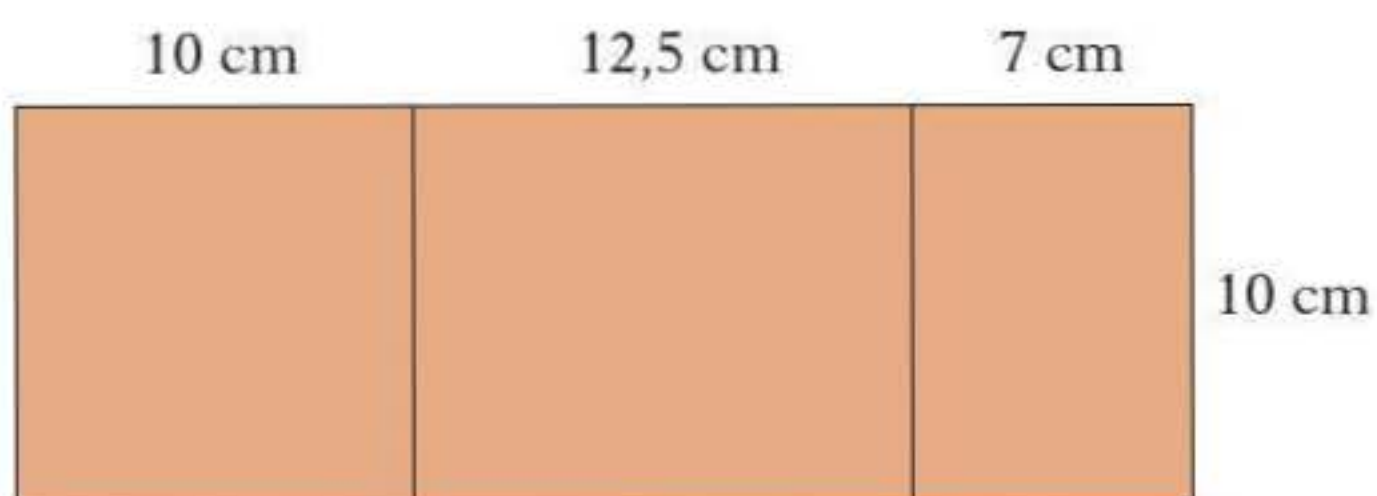


fig. 7

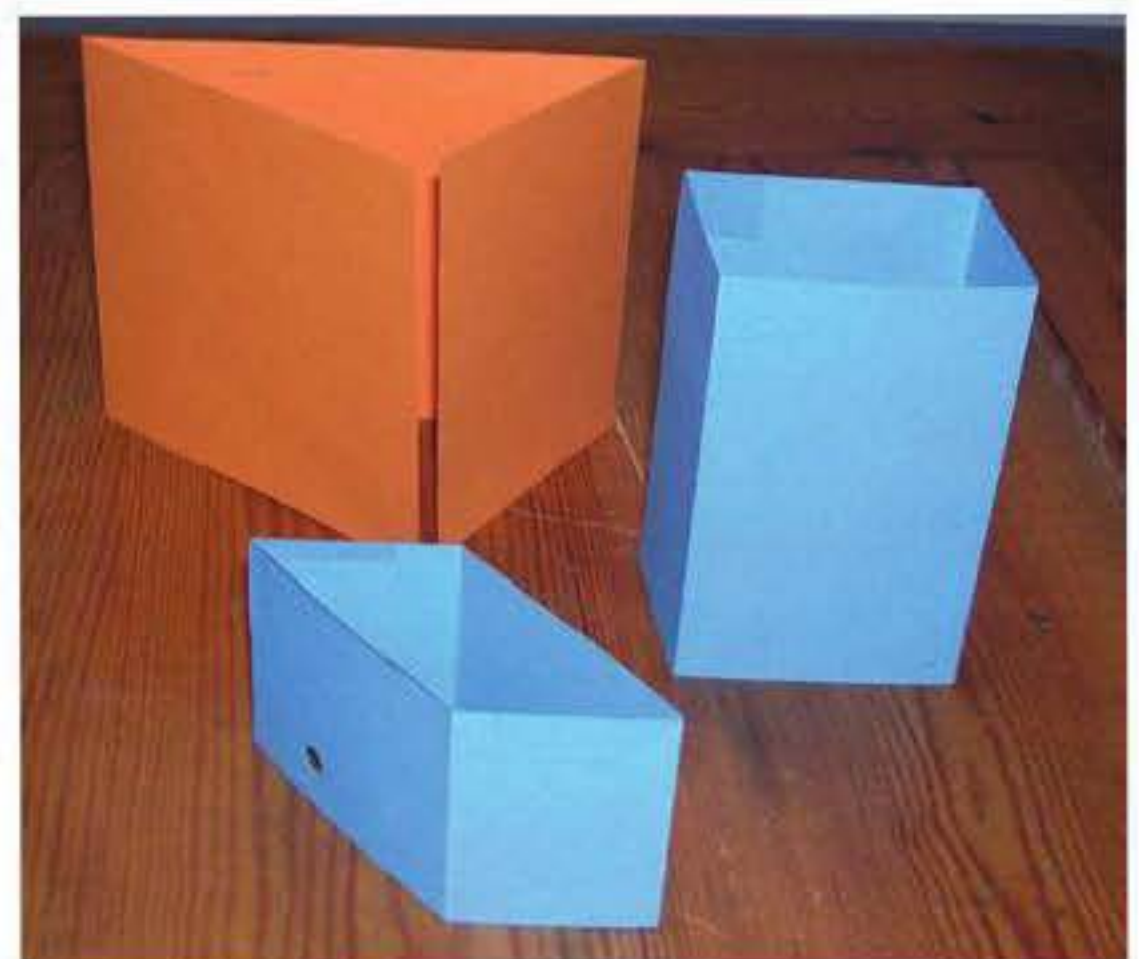


fig. 6

c. La fig. 8 représente le développement latéral d'un autre prisme droit. Reproduire cette figure sur du papier cartonné en utilisant les mesures indiquées. Prévoir quelle sera la forme de sa base.

d. Si on referme ce développement (fig. 8) de manière à ce que deux faces forment entre elles un angle de 45° , quelle sera la forme de la base ? Dessiner cette base.

e. Vrai ou faux ?

- Un triangle est déterminé lorsque l'on donne les mesures de ses trois côtés.
- Un parallélogramme est déterminé lorsque l'on donne les mesures de deux côtés non parallèles.
- Un parallélogramme est déterminé lorsque l'on donne les mesures de deux côtés consécutifs et la mesure d'un angle de ce parallélogramme.
- Un rectangle est déterminé lorsque l'on donne les mesures de deux de ses côtés non parallèles.
- Si l'on construit deux losanges en prenant les mêmes mesures pour les côtés, ces losanges sont superposables.

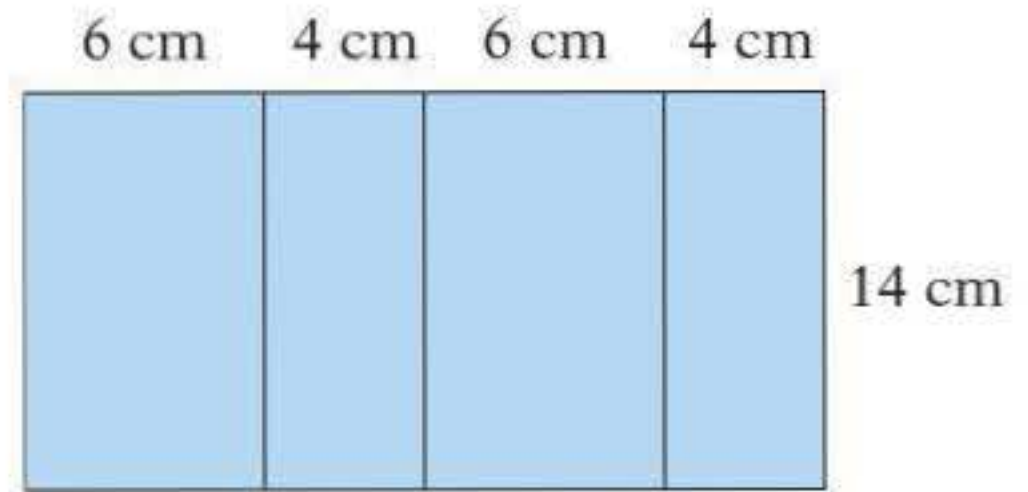


fig. 8

6. Vers les cas d'isométrie des triangles

Pour construire un triangle, on peut relever la mesure de chacun des trois angles et la mesure de chacun des trois côtés. Nous avons expérimenté qu'il n'est pas nécessaire de fournir ces six mesures pour pouvoir dessiner un triangle donné.

- a. Construire un ou plusieurs triangles répondant aux conditions imposées ci-dessous. Les notations sont celles de la fig. 9. Il importe de respecter leurs positions relatives.
- b. Les données fournies déterminent-elles entièrement la figure ? Expliquer.
- c. Les conditions déterminantes retenues conduisent aux énoncés appelés généralement cas d'isométrie des triangles. Repérer, parmi les énoncés de la synthèse, ceux qui correspondent aux conclusions de cette recherche.

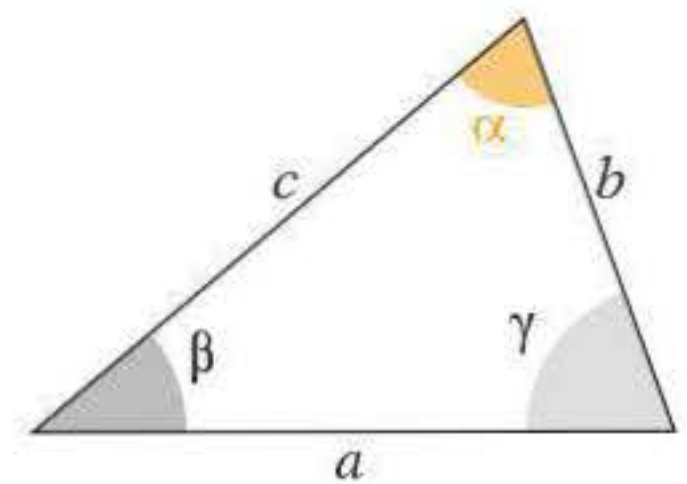


fig. 9

1) $\alpha = 30^\circ ; \beta = 50^\circ ; \gamma = 100^\circ$	6) $c = 7 \text{ cm} ; a = 5 \text{ cm} ; b = 4 \text{ cm}$	11) $c = 7 \text{ cm} ; \alpha = 90^\circ ; a = 5 \text{ cm}$
2) $c = 10 \text{ cm} ; a = 6 \text{ cm} ; \gamma = 45^\circ$	7) $c = 5 \text{ cm} ; \gamma = 135^\circ ; b = 3 \text{ cm}$	12) $\alpha = 10^\circ ; c = 7 \text{ cm} ; \beta = 30^\circ$
3) $\alpha = 30^\circ ; \beta = 70^\circ ; c = 7 \text{ cm}$	8) $c = 5 \text{ cm} ; \alpha = 10^\circ ; a = 7 \text{ cm}$	13) $\gamma = 10^\circ ; c = 12 \text{ cm} ; a = 6 \text{ cm}$
4) $c = 7 \text{ cm} ; \alpha = 30^\circ ; \gamma = 70^\circ$	9) $c = 7 \text{ cm} ; \alpha = 90^\circ$	14) $\alpha = 60^\circ ; \beta = 40^\circ ; b = 5 \text{ cm}$
5) $\alpha = 45^\circ ; \beta = 62^\circ ; a = 12 \text{ cm}$	10) $b = 6 \text{ cm} ; \alpha = 90^\circ$	15) $\alpha = 50^\circ ; c = 10 \text{ cm} ; a = 8 \text{ cm}$

7. Une démonstration

Dessiner un parallélogramme et ses diagonales en plaçant les lettres comme sur la fig. 10. Placer un point F sur la droite AB . Tracer la droite FO . Appeler E l'intersection de FO avec DC .

Les segments $[BF]$ et $[ED]$ ont-ils même longueur ?

Pour répondre à cette question, procéder comme suit.

- Faire plusieurs dessins en modifiant chaque fois l'emplacement du point F , puis en partant d'un autre parallélogramme. Examiner si les segments $[BF]$ et $[ED]$ ont chaque fois même longueur.
- Pour expliquer pourquoi cette égalité est vraie pour toute figure qui correspond à ces constructions, on considère les segments $[BF]$ et $[ED]$ comme éléments de triangles dont on peut justifier l'isométrie. Quels triangles faut-il choisir ? Porter les informations fournies par l'énoncé sur la figure. Citer le cas d'isométrie utilisé.
- Il n'est pas facile de rédiger une démonstration. Voici un modèle qu'il faut lire attentivement.

Hypothèse

$ABCD$ est un parallélogramme de diagonales $[AC]$ et $[DB]$.

O est l'intersection de $[AC]$ et de $[DB]$.

E appartient à la droite DC .

EO coupe AB en F .

Thèse

$$\overline{ED} = \overline{BF}$$

Démonstration

Montrons que les triangles EOD et FOB sont isométriques.

- Les angles en O ont même amplitude car ils sont opposés par le sommet.
- $\overline{DO} = \overline{OB}$ car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- $\widehat{EDO} = \widehat{FBO}$ car ils sont alternes-internes formés par les parallèles AF et EC coupées par la droite BD .

Un côté du triangle EOD a même mesure qu'un côté du triangle FOB et les angles adjacents à ces côtés ont respectivement même amplitude, ces triangles sont donc isométriques (voir énoncé 7.13). On en déduit que $\overline{ED} = \overline{BF}$.

Cqfd

- Rédiger une démonstration en suivant ce modèle pour un énoncé qui correspond aux lettres de la fig. 12. Démontrer que $\overline{DX} = \overline{BY}$.

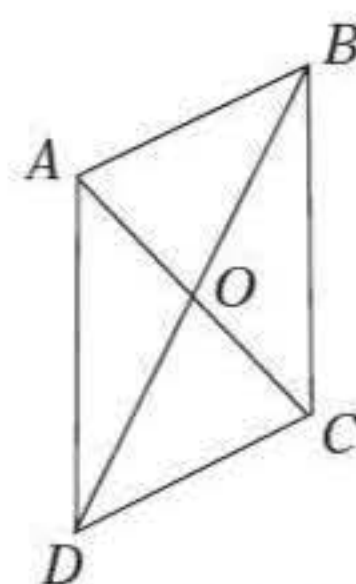


fig. 10

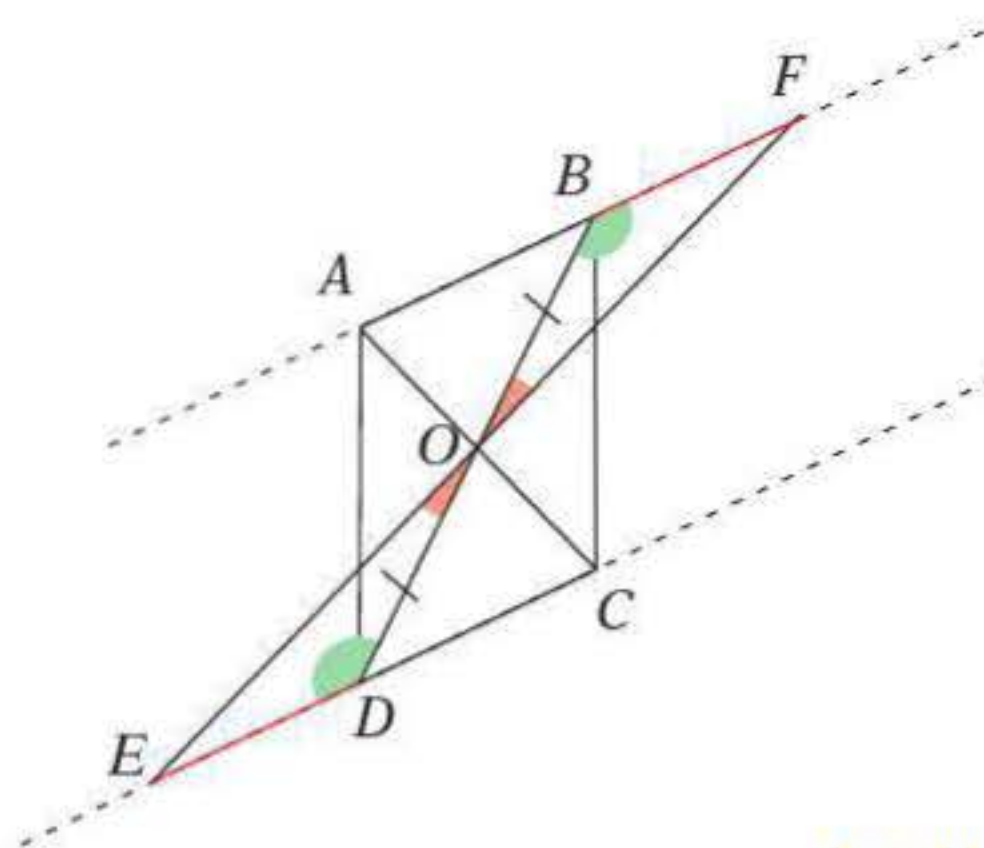


fig. 11

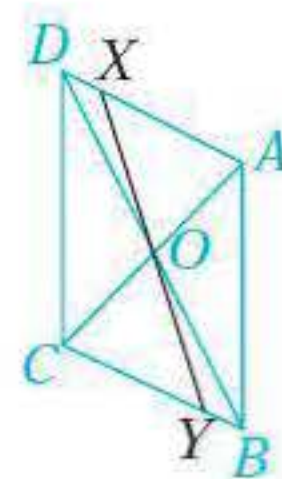
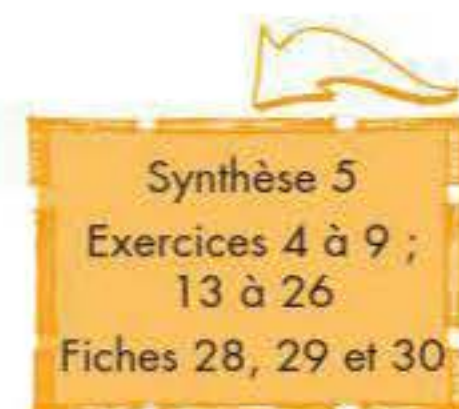


fig. 12



À la suite d'Euclide, l'étude des figures géométriques ne consiste pas seulement à observer, mesurer, dessiner, construire... mais aussi à déduire les propriétés géométriques les unes des autres. Ce travail de déduction est un modèle de raisonnement mathématique qui déborde largement la géométrie. Il importe donc d'avoir présent à l'esprit l'ensemble des énoncés que l'on utilise pour opérer une déduction.

En plus des énoncés que nous venons d'établir, les énoncés découverts les années précédentes serviront de référence dans les démonstrations. Ils sont repris dans la fiche 26.

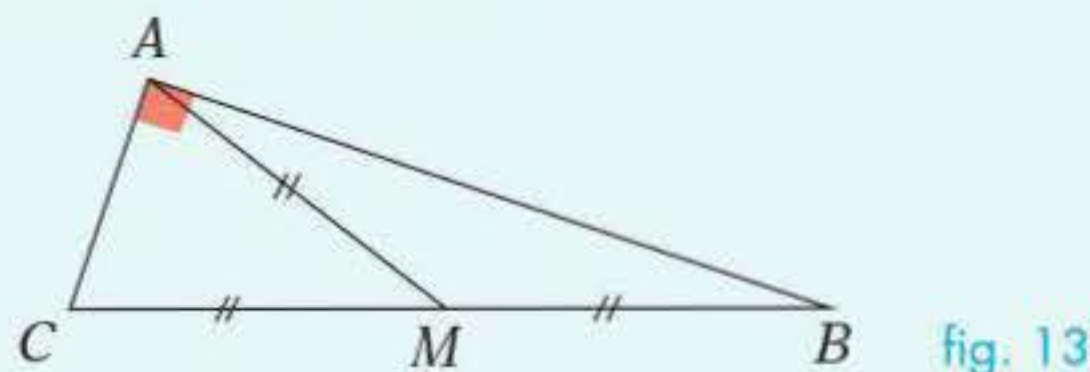
1. Comment rattacher la propriété de la médiane d'un triangle rectangle à celle du triangle inscrit dans cercle ?

Énoncé 7.1

Dans tout triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de celle-ci. La démonstration a été faite lors de l'exploration 1.

Énoncé 7.2

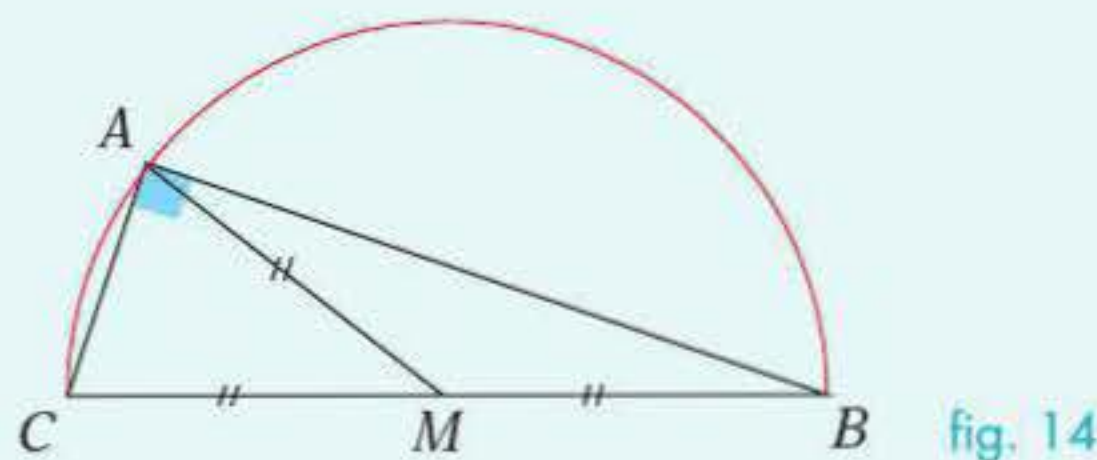
Réciproquement, si, dans un triangle, la médiane relative au plus grand côté vaut la moitié de ce côté, alors ce triangle est rectangle.



Cette réciproque permet de considérer cette propriété comme une caractéristique du triangle rectangle.

Énoncé 7.3

Corollaire : le triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle dont le rayon vaut la moitié de l'hypoténuse.



Comme le triangle ABC est rectangle en A , on a $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$. Le cercle de centre M , milieu de $[BC]$, passe donc par A .

2. Quelles sont les propriétés de l'angle inscrit dans un cercle ?

Énoncé 7.4

On appelle angle inscrit dans un cercle, un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont des cordes de ce cercle.

Énoncé 7.5

L'amplitude d'un angle inscrit dans un cercle vaut la moitié de l'amplitude de l'angle au centre qui intercepte le même arc (fig. 15).

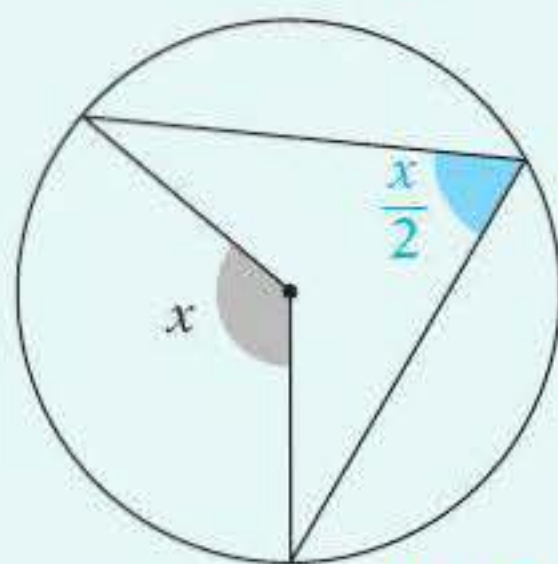


fig. 15

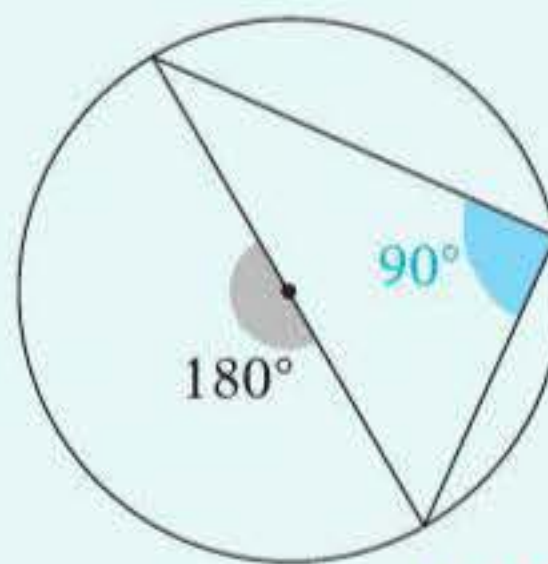


fig. 16

Énoncé 7.6

Un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est un angle droit (fig. 16 et fig. 17).

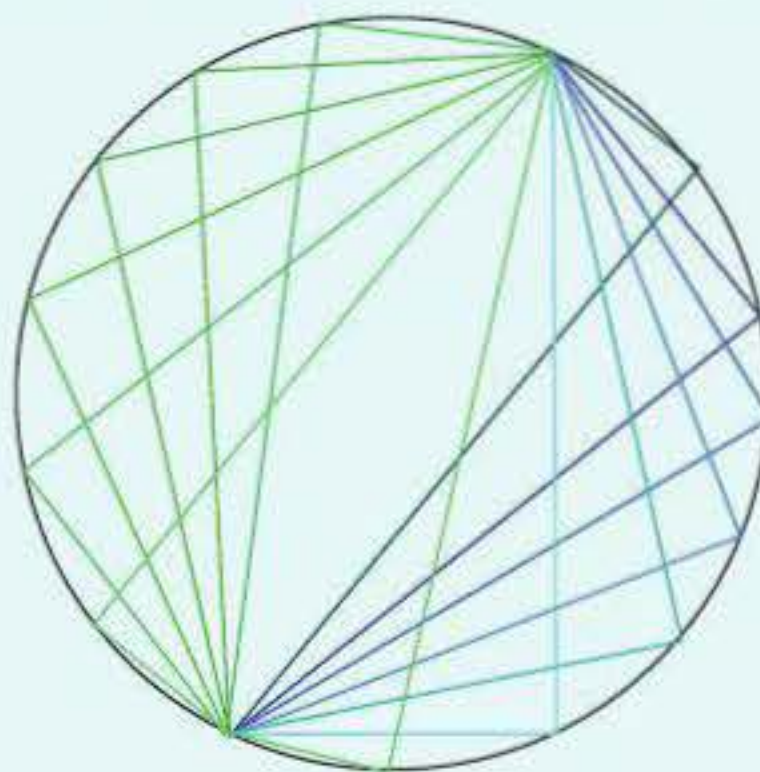


fig. 17

Réciproquement, si le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et si le point P , distinct de A et B , appartient au cercle, alors l'angle \widehat{APB} est droit.

3. Comment construire une droite tangente à un cercle, un cercle tangent ?

Énoncé 7.7

La tangente à un cercle est une droite qui a un et un seul point d'intersection avec le cercle.

Énoncé 7.8

La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point d'intersection de cette tangente avec le cercle (fig. 18).

Énoncé 7.9

La droite qui passe par les centres de deux cercles tangents passe par le point d'intersection de ces deux cercles (fig. 19).

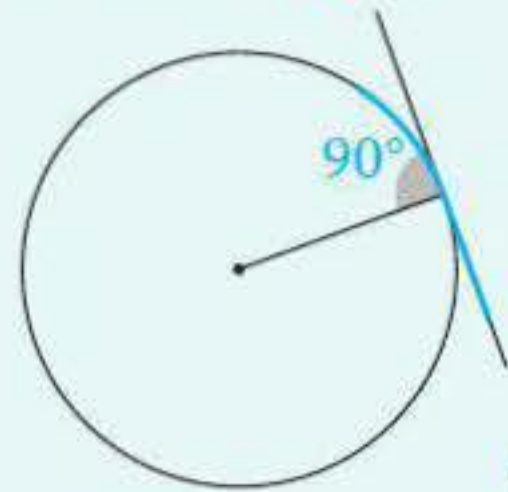


fig. 18

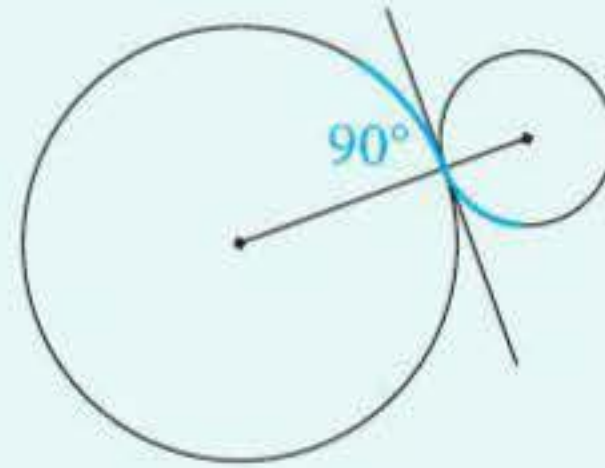


fig. 19

Les propriétés 7.8 et 7.9 servent à réaliser un raccordement entre une droite et un cercle, et entre deux cercles ou deux arcs de cercles.

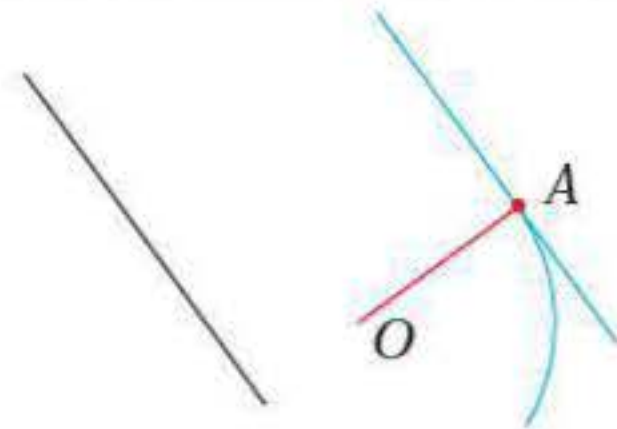


fig. 20

Raccorder un cercle de rayon donné à une droite de direction donnée.

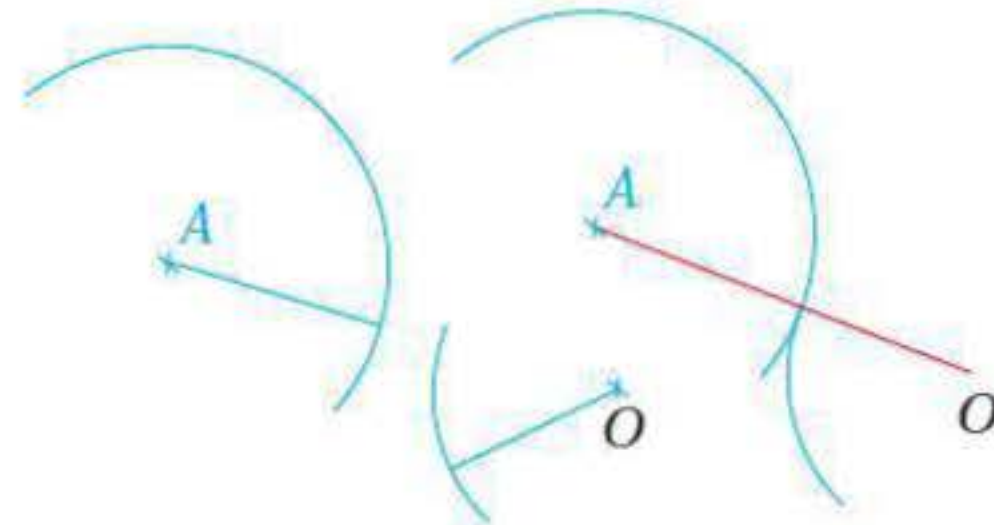


fig. 21

Raccorder un cercle de rayon donné à un autre cercle de rayon donné.

4. Quelles sont les principales propriétés des angles qui ont des côtés perpendiculaires ?

Énoncé 7.10

Si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, soit ils ont même amplitude, soit ils sont supplémentaires.

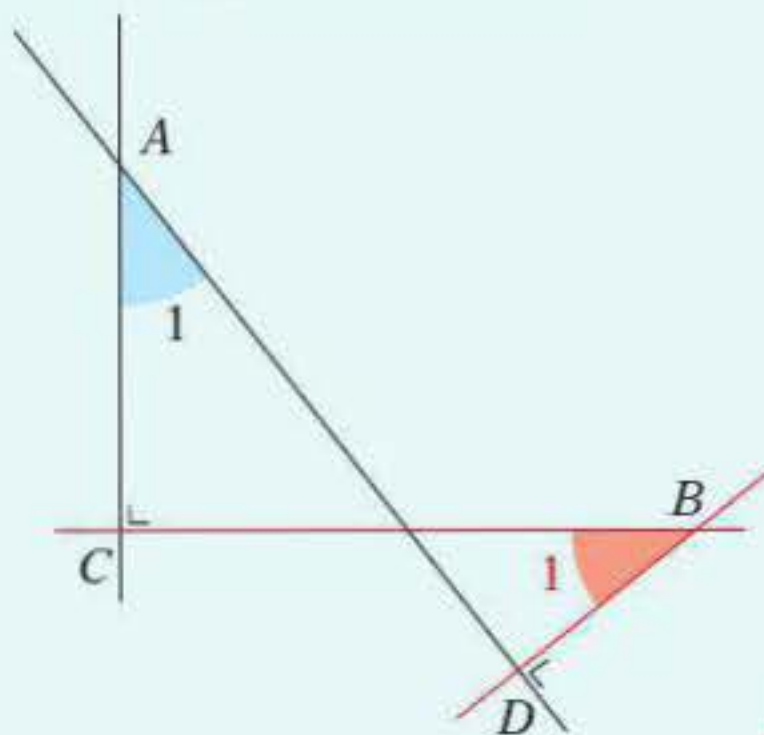


fig. 22

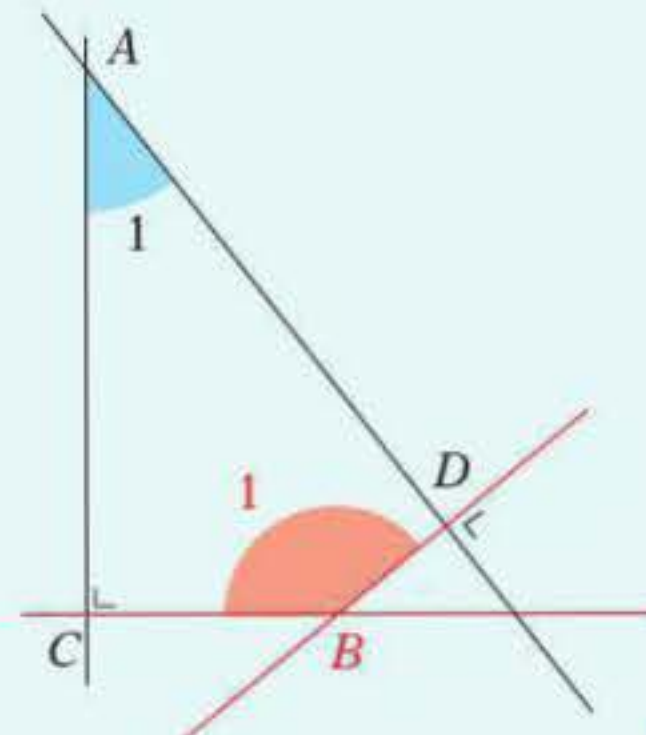


fig. 23

5. Comment savoir si un ensemble de mesures détermine ou non un triangle ? Quels sont les cas d'isométrie des triangles ?

Avant de procéder à la construction d'un triangle, il faut examiner si la somme des mesures d'angles est égale à 180° et si les mesures de côtés vérifient l'énoncé ci-après.

Énoncé 7.11

Dans un triangle, chaque côté est inférieur à la somme des deux autres¹.

On examine ensuite si les données correspondent à un cas d'isométrie des triangles, à savoir :

- 1) un triangle est déterminé si l'on donne un angle ainsi que les mesures des côtés adjacents à cet angle ;

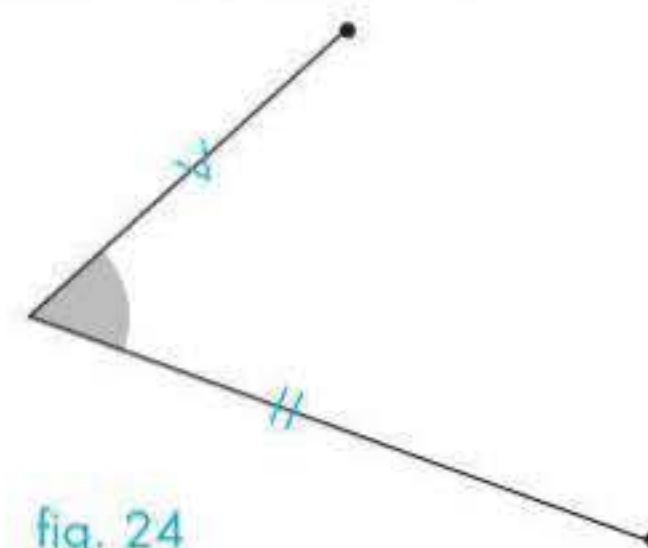


fig. 24

Énoncé 7.12

Cas d'isométrie CAC. Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont respectivement un angle de même amplitude compris entre deux côtés respectivement de même longueur chacun à chacun.

- 2) un triangle est déterminé si l'on donne l'amplitude de deux angles (dont la somme est inférieure à 180°) ainsi que les mesures d'un côté compris entre ces deux angles ;

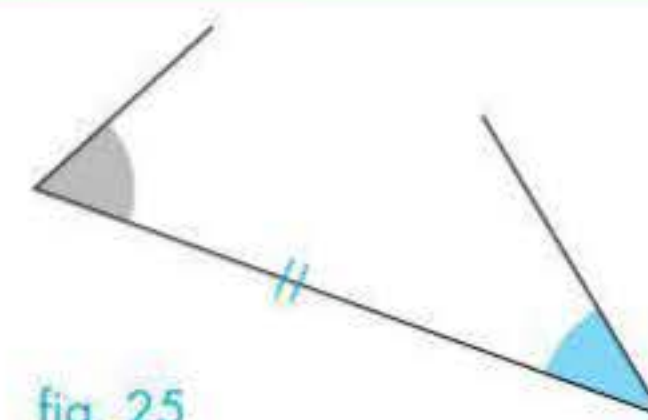


fig. 25

Énoncé 7.13

Cas d'isométrie ACA. Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont respectivement un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même amplitude chacun à chacun.

- 3) un triangle est déterminé si l'on donne la mesure de ses trois côtés. Il faut que la mesure du plus grand côté soit inférieure à la somme des deux autres mesures.

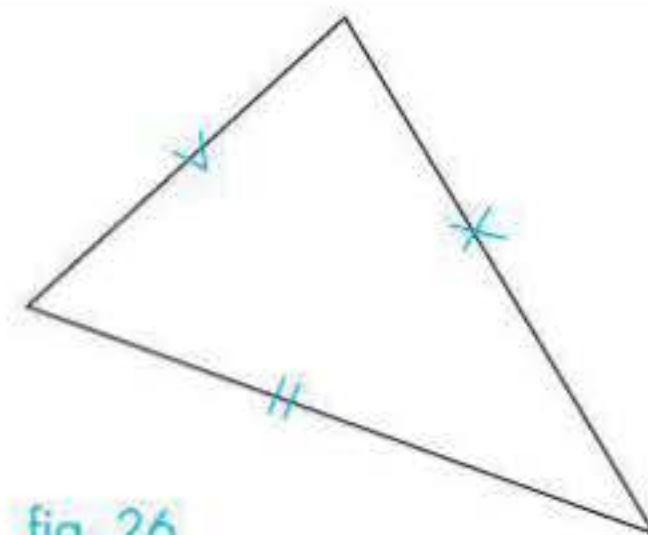


fig. 26

Énoncé 7.14

Cas d'isométrie CCC. Deux triangles sont isométriques s'ils ont respectivement trois côtés de même longueur.

1. La relation d'ordre entre segments est définie indépendamment de la longueur de ces segments. Les constructions au compas s'appuient sur ce fait.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Quadrilatère inscrit à un cercle

Que vaut la somme des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle ? Formuler un énoncé et le noter dans la fiche 26.

2. Points sur un cercle

Tracer un triangle ABC acutangle non isocèle. Tracer le cercle de diamètre $[BC]$. Appeler E l'intersection de ce cercle avec $[AB]$, et F , l'intersection avec $[AC]$. Démontrer que CE est perpendiculaire à AB et que BF est perpendiculaire à AC .

3. Construction de la tangente

Dans l'une des ses « propositions », Euclide propose une construction de la tangente à un cercle issue d'un point extérieur à ce cercle.

La fig. 27 montre cette construction. Décrire les étapes et valider la construction.

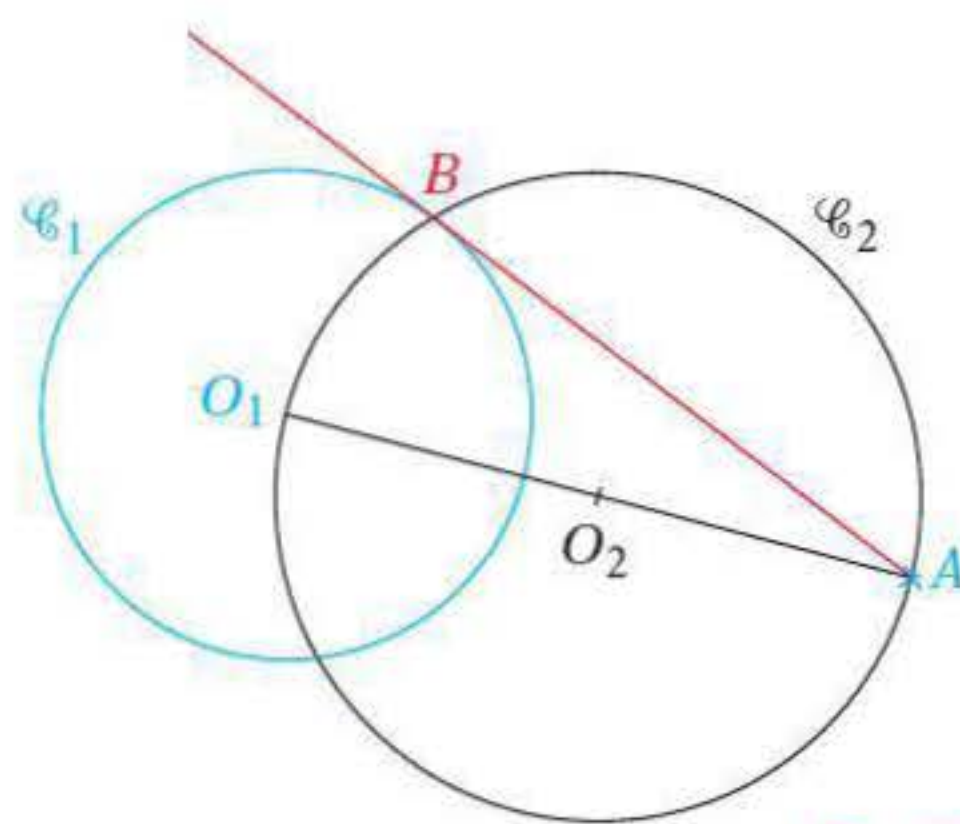


fig. 27

4. Triangles isométriques

Parmi les triangles de la fig. 28, trois sont isométriques. Lesquels ? Justifier.

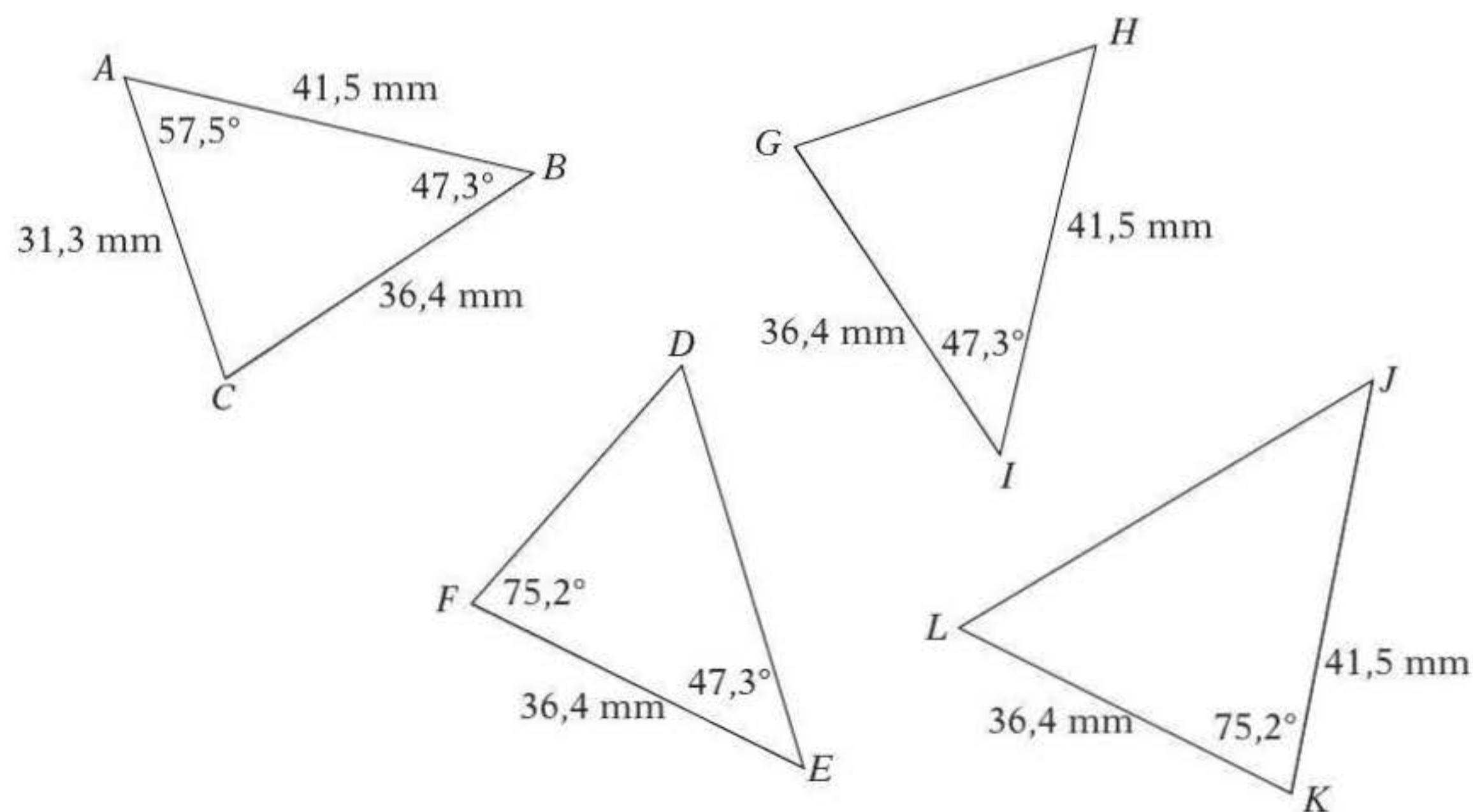


fig. 28

5. Choisir le cas d'isométrie

Sur la fig. 29, les droites AD et BE sont perpendiculaires. Quel est le cas d'isométrie qui permet de prouver que les triangles ABE et CDE sont isométriques ?

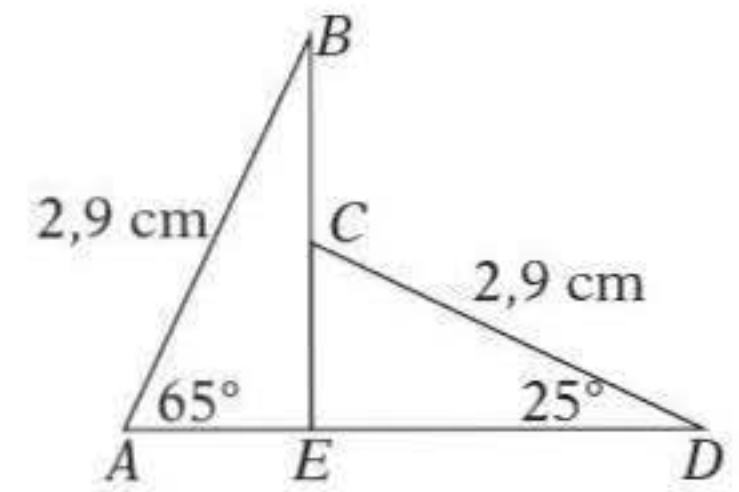


fig. 29

6. Dans un parallélépipède rectangle

La fig. 30 représente un parallélépipède rectangle en perspective cavalière. Dans la réalité, les triangles ABC et CEF sont-ils isométriques ? Justifier.

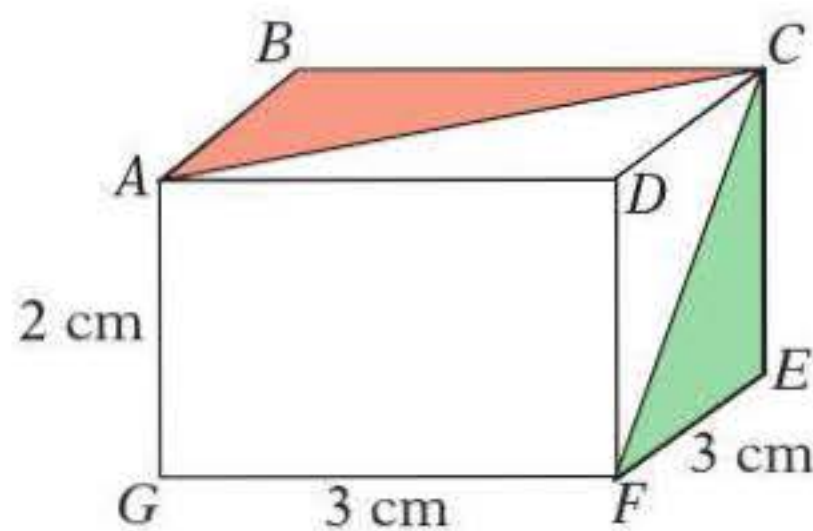


fig. 30

7. Cas d'isométrie des triangles isocèles, des triangles rectangles

Que deviennent les énoncés des cas d'isométrie des triangles si on sait qu'il s'agit de triangles isocèles ? Et si on sait que les triangles sont rectangles (tenir compte de la construction réalisée à l'exploration 6, ex. 12).

Résoudre un problème

8. Dans un triangle isocèle

Dessiner un triangle isocèle ABC , de sommet A . Tracer le cercle de diamètre $[AC]$. Ce cercle passe-t-il par le milieu de la base $[BC]$? Explorer, conjecturer, démontrer.

9. Le milieu du bâton

Un bâton est appuyé sur un mur et glisse sur le sol. On place un point de repère M au milieu de ce bâton.

Réaliser une figure qui montre trois positions d'un bâton de 10 cm et repérer chaque fois le milieu. Appeler ces points M_1 , M_2 , M_3 . Ces points sont-ils alignés, sont-ils sur un cercle ?

Conjecturer, démontrer.

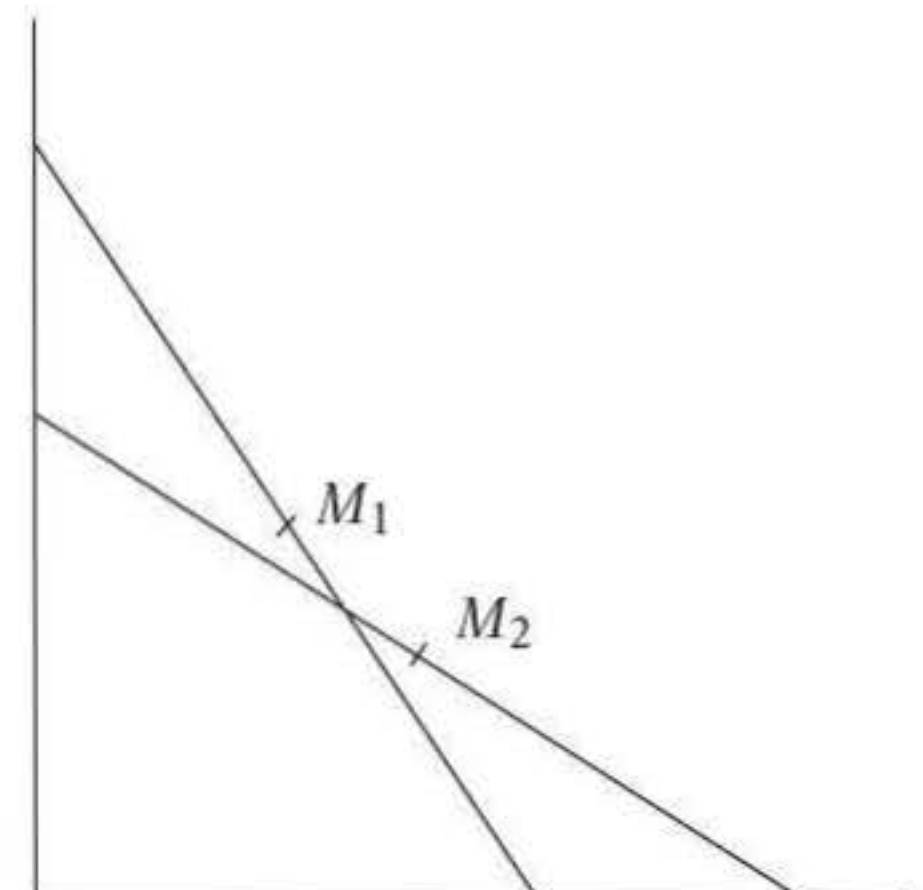


fig. 31

10. Tir au but

- On donne un segment $[AB]$ de 6 cm. Repérer un point P_1 tel que $\widehat{AP_1B} = 30^\circ$.
- Repérer deux autres points P_2 et P_3 tels que $\widehat{AP_2B} = 30^\circ$ et $\widehat{AP_3B} = 30^\circ$.

Indications

Utiliser le dispositif illustré par la fig. 32 : une équerre (ou un triangle de carton), dont un angle vaut 30° , que l'on place de façon à ce que les côtés de l'angle de 30° passent par les points A et B.

- Caractériser l'ensemble des points P tels que $\widehat{APB} = 30^\circ$.
- Les montants des buts d'un terrain de football sont distants de 7,32 m. Déterminer l'ensemble des positions pour lesquelles l'angle de tir est de 70° . Réaliser un dessin à l'échelle 1:100.

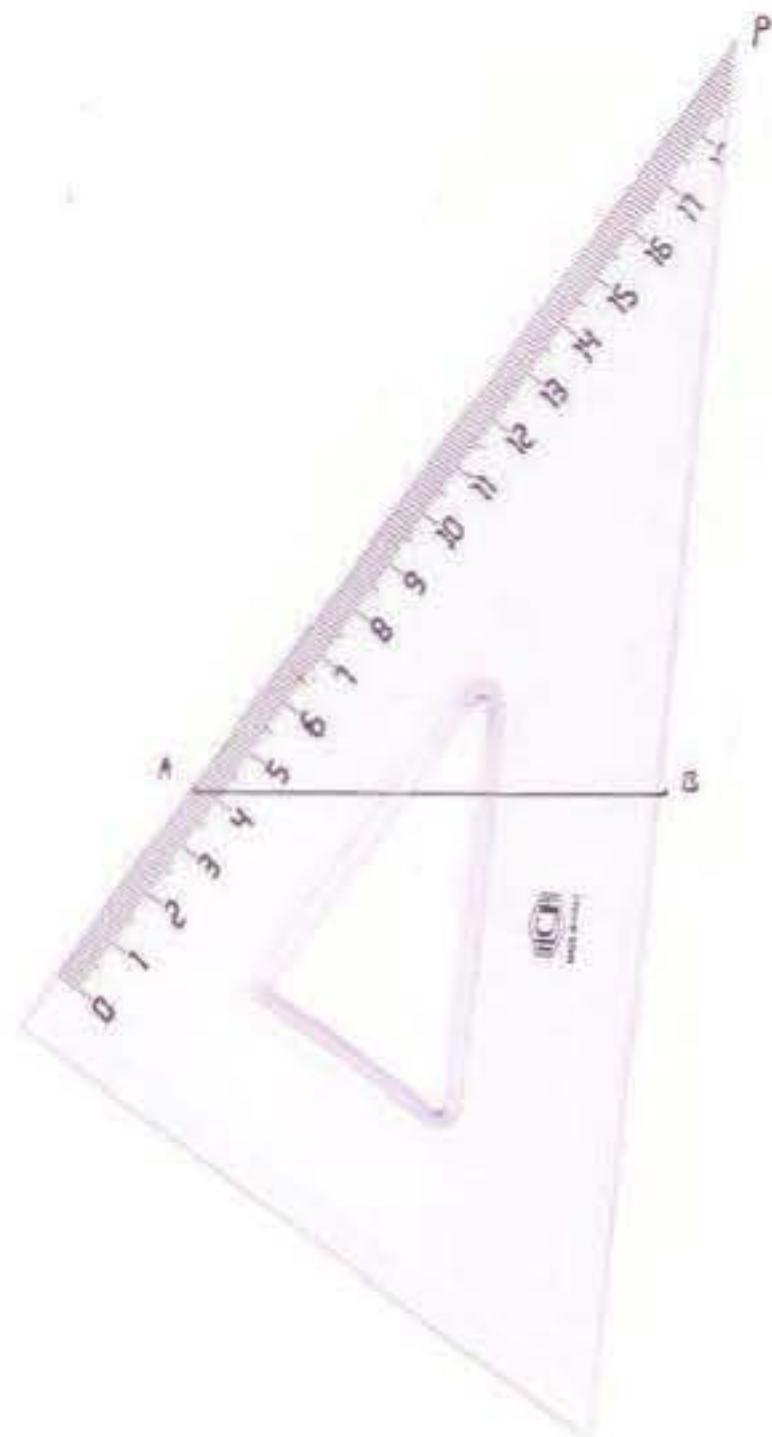


fig. 32



11. Atteindre la cible

Pour s'exercer au tir à la catapulte, Élie se place à 10 mètres d'une cible de 4 mètres de long et à égale distance des extrémités de la cible. Quels sont tous les points qui ont le même angle de tir ? Réaliser un dessin à échelle.



12. Angle tangentiel

Un angle tangentiel est formé par une tangente et une corde, l'intersection de la corde et de la tangente est le sommet de l'angle.

Démontrer que l'amplitude de cet angle est la même que celle d'un angle inscrit qui intercepte le même arc. Formuler un énoncé et le noter dans la fiche 26.

Indication

Tracer le diamètre passant par le point de contact et considérer l'angle inscrit qui intercepte l'arc BT (fig. 33).

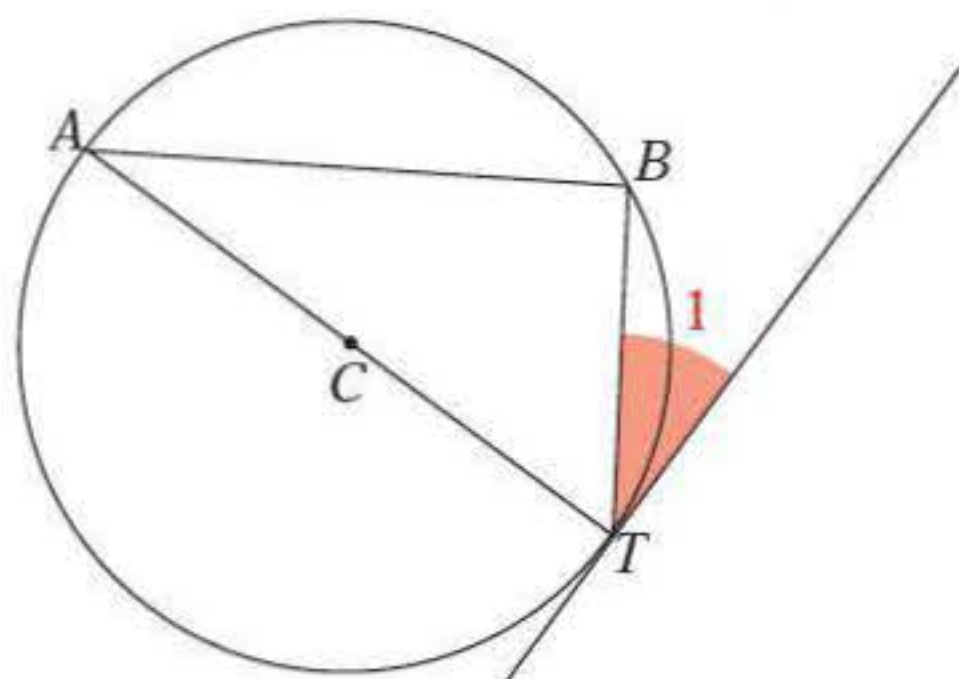


fig. 33

13. Justifier la construction de la bissectrice d'un angle

La fig. 34 montre comment construire, au compas, la bissectrice d'un angle. Utiliser un cas d'isométrie des triangles pour démontrer que la demi-droite $[BP$ partage l'angle \widehat{ABC} en deux angles de même amplitude.

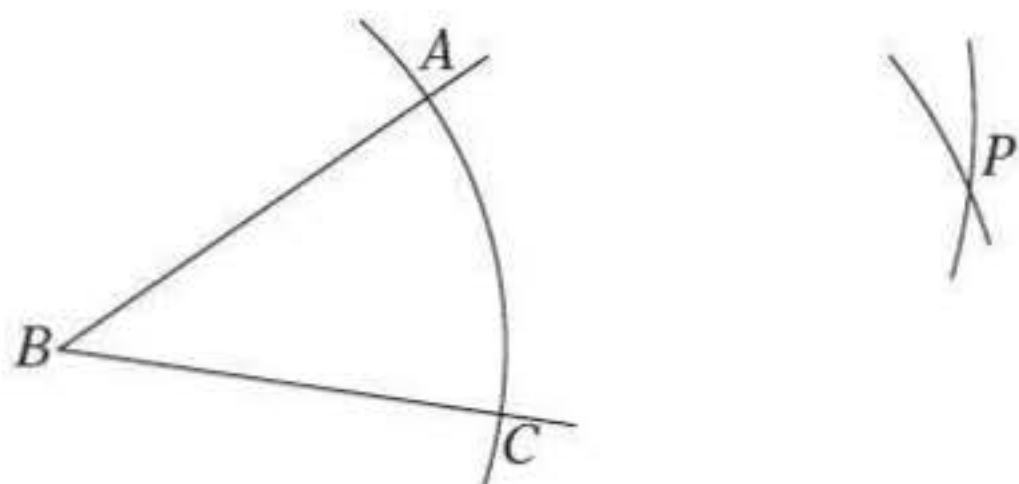


fig. 34

14. Dans un triangle isocèle

Le triangle ABC est isocèle de sommet A . Les points R et S sont respectivement les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$. Utiliser des triangles isométriques pour prouver que les segments $[RB]$ et $[SC]$ ont même longueur.

15. Dans un cube

La fig. 35 représente un cube dont les sommets sont $ABCDEFGH$.

Dans la réalité, les angles \widehat{ACH} et \widehat{DBG} ont-ils même amplitude ? Justifier.

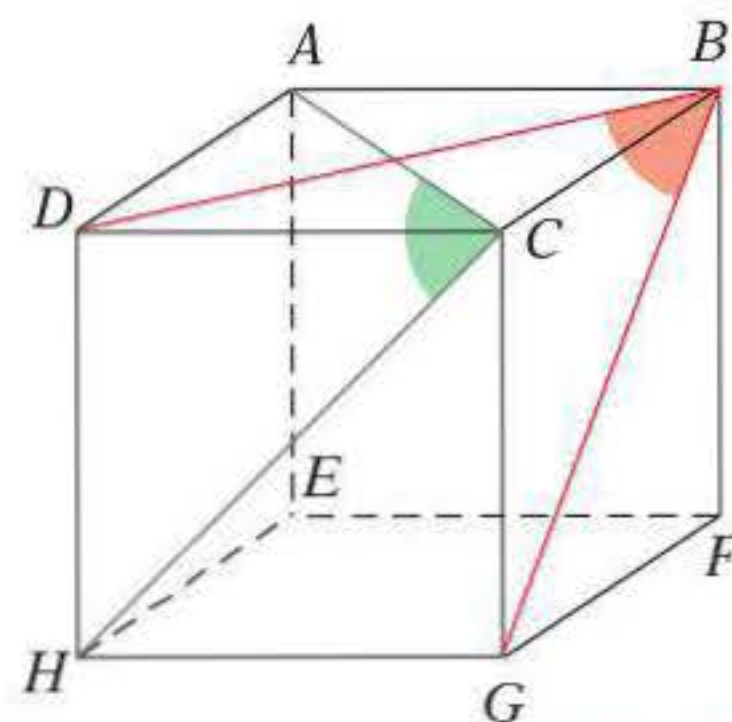


fig. 35

16. Angle au centre et corde

- Deux angles au centre qui déterminent des cordes de même longueur sur un même cercle ou sur des cercles de même rayon ont-ils même amplitude ? Expérimenter, démontrer. Formuler l'énoncé établi et le noter dans la fiche 26.

- b. Dans un même cercle ou dans des cercles de même rayon, les cordes qui sous-tendent des arcs de même amplitude ont-elles même mesure ? Expérimenter, démontrer. Formuler l'énoncé établi et le noter dans la fiche 26.

17. Toujours isométriques ?

Construire un triangle ABC et tracer la médiane $[AM]$. Tracer un autre triangle RST dans lequel $\overline{RT} = \overline{AC}$ et $\overline{TS} = \overline{CB}$ et dont la médiane issue de R a la même longueur que $[AM]$.

Les triangles ABC et RST sont-ils isométriques ? Pourquoi ?

18. Deux équerres

On dispose deux équerres isocèles et on joint les extrémités de l'une aux extrémités de l'autre comme sur la fig. 36.

Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont-ils même mesure ? Expérimenter, démontrer.

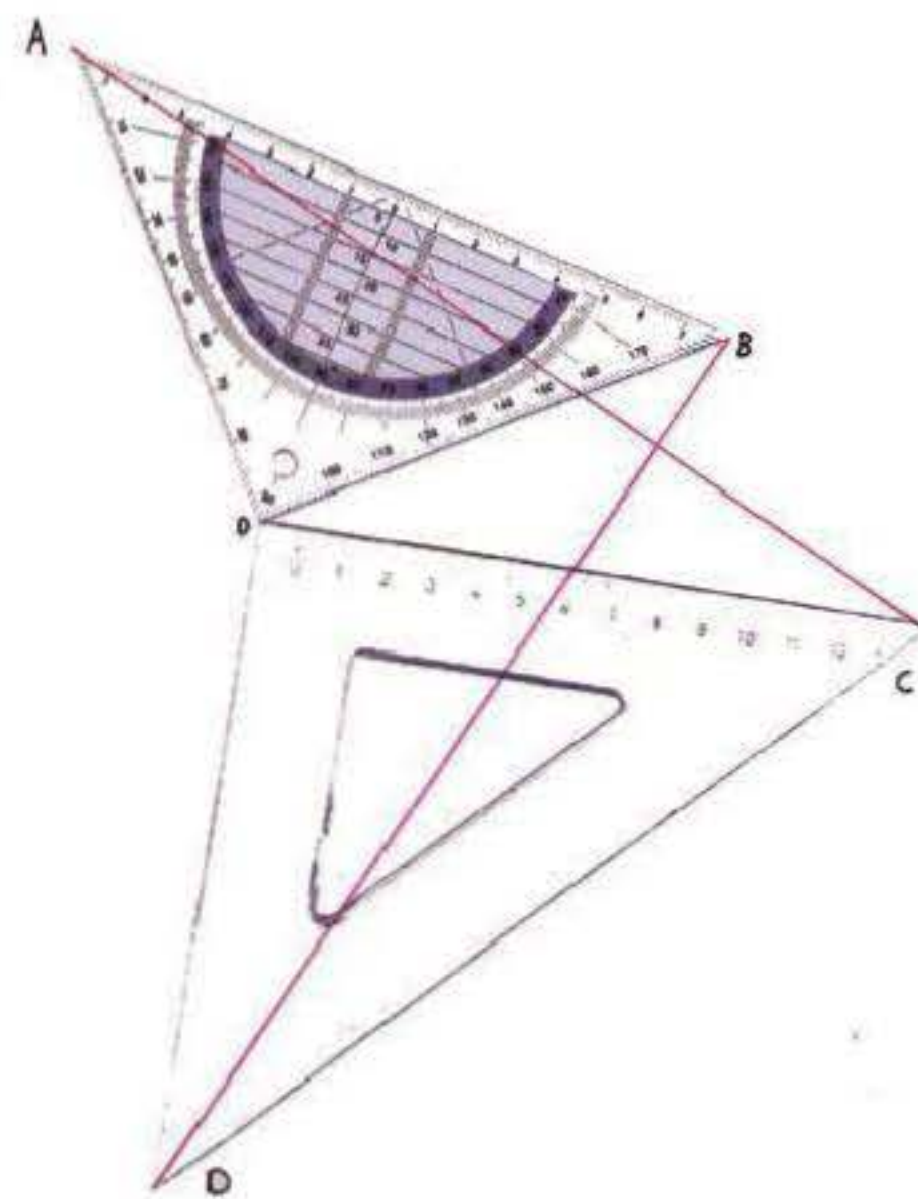


fig. 36

19. Partager la diagonale d'un parallélogramme

Construire un parallélogramme $ABCD$ et tracer sa diagonale $[AC]$. Placer deux points E et F qui partagent $[AC]$ en trois parties égales. Caractériser le quadrilatère $BEDF$. Expérimenter, démontrer.

20. Une droite passant par le centre de symétrie d'un parallélogramme

Construire un parallélogramme $ABCD$. Appeler I l'intersection de ses diagonales. Tracer une droite passant par I et appeler respectivement R et S les intersections de cette droite avec $[AB]$ et $[DC]$. Les segments $[AR]$ et $[CS]$ ont-ils même longueur ? Expérimenter, démontrer.

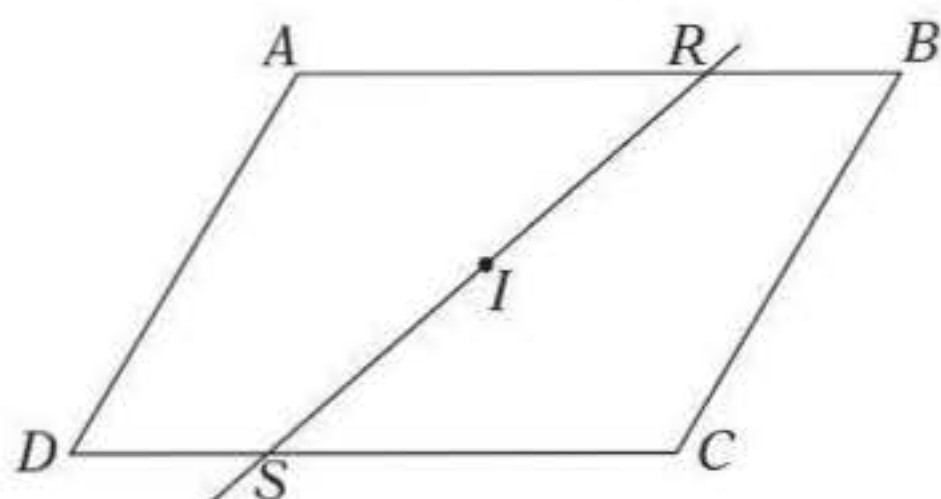


fig. 37

21. Reporter une même longueur

Soit un parallélogramme $ABCD$. Prolonger les côtés dans le même sens d'une même longueur (fig. 38).

- Caractériser le quadrilatère $EFGH$ ainsi obtenu. Expérimenter, justifier.
- Et si on place les points à même distance de chaque sommet à l'intérieur du parallélogramme ?

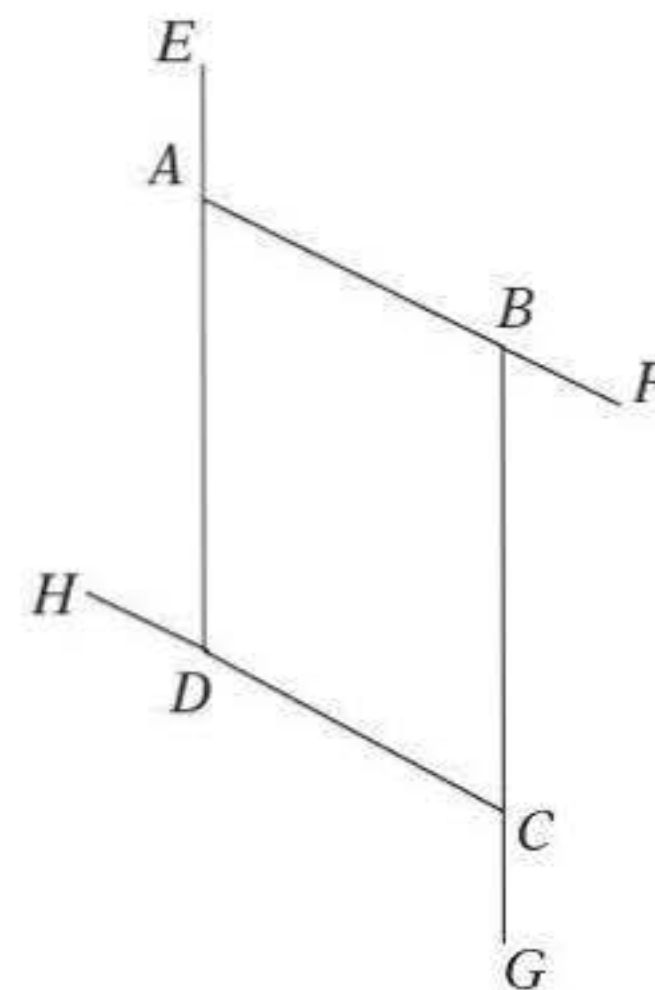


fig. 38

Pour aller plus loin

22. Carré d'aire triple

Pour réaliser certains objets ou motifs décoratifs, les artisans utilisent des méthodes de dessin parfois très anciennes qu'ils se transmettent. Ces méthodes ne reposent pas toutes sur des principes géométriques, les solutions sont donc parfois approximatives.

Le problème ci-dessous est traité par le mathématicien arabe Abul-Wafa¹ (940-997) dans son livre *Constructions géométriques nécessaires à l'artisan*. Il s'agit de construire un carré $EFGH$ dont l'aire est triple de celle d'un carré $ABCD$ donné. Il résout le problème à partir de trois carrés identiques. Deux d'entre eux sont coupés selon une diagonale et disposés autour du premier comme sur la fig. 39.

- Réaliser une construction analogue à partir de trois carrés identiques.
- Le procédé est-il correct, fournit-il une bonne approximation ou un résultat exact ?

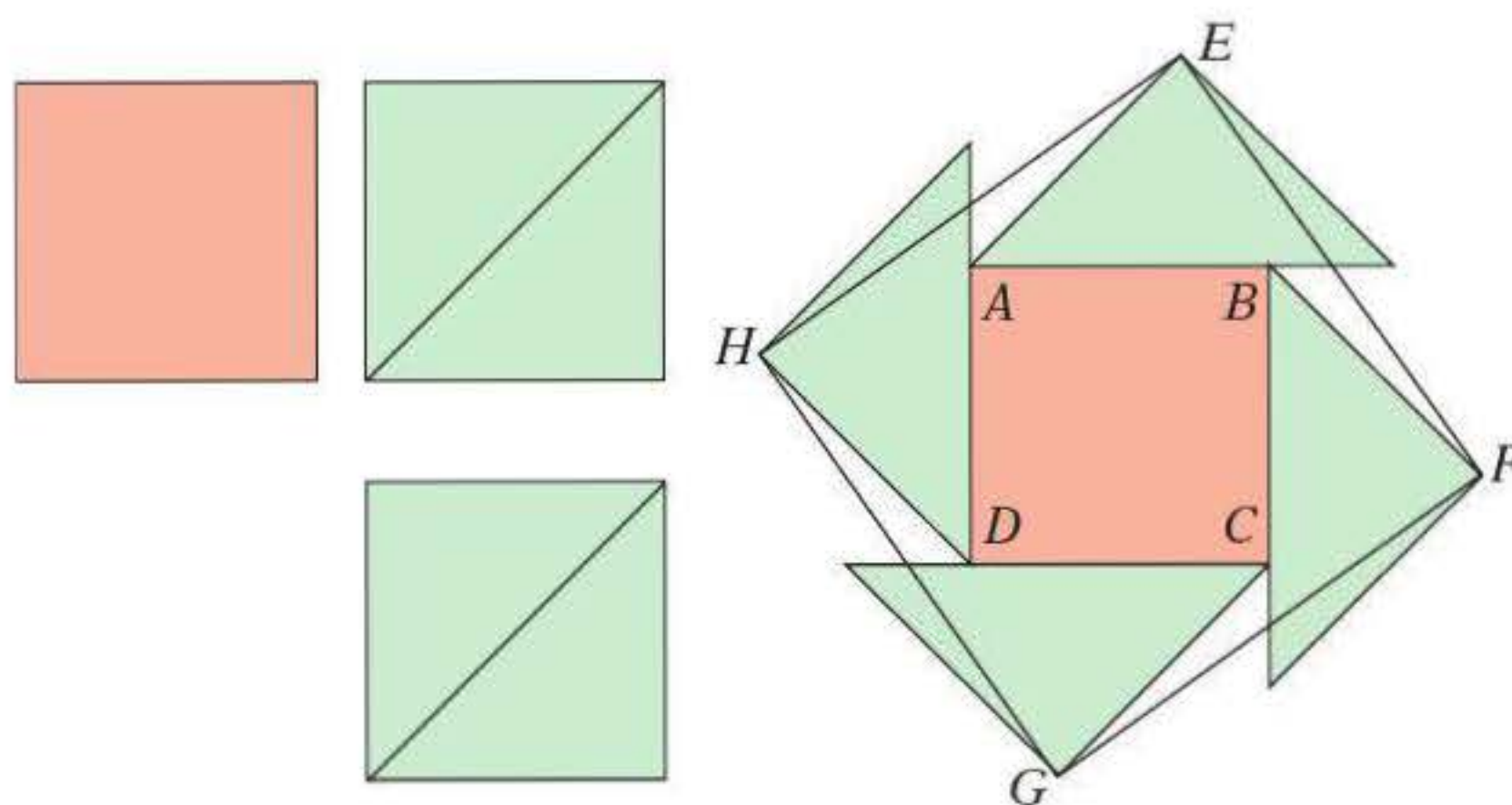


fig. 39

¹ Problème inspiré du livre de l'IREM de Paris, *Histoire des mathématiques pour les collèges*, CEDIC, 1980.

23. Cordes de même longueur

Les cordes $[AB]$ et $[DE]$ du cercle de centre C (fig. 40) ont même longueur. Le point F est l'intersection de $[BE]$ et $[AD]$. Démontrer que CF est la médiatrice de $[BD]$.

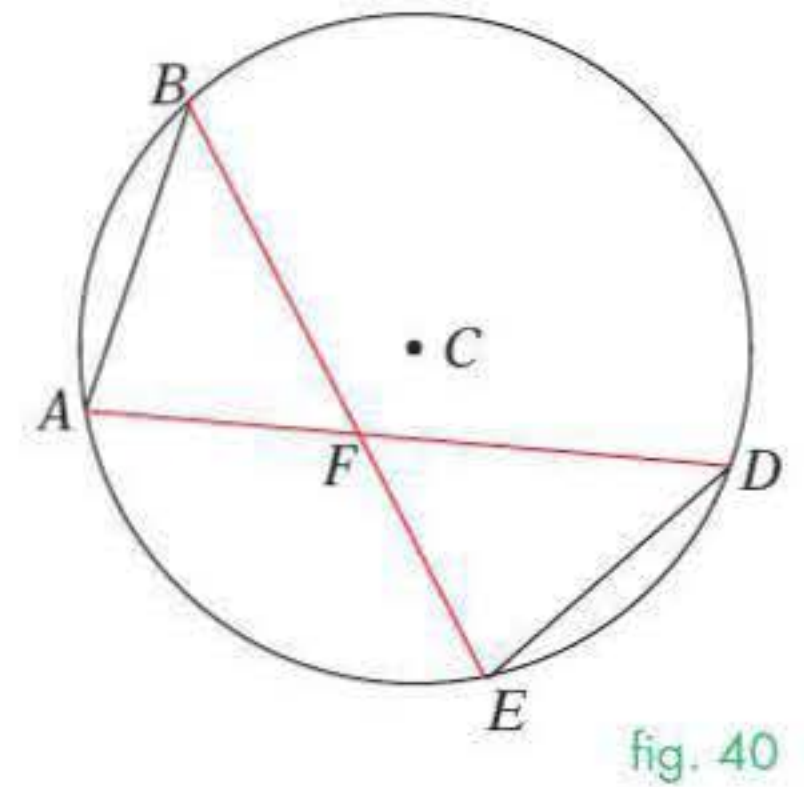


fig. 40

24. Tangentes issue d'un même point

Les tangentes à un cercle issues d'un même point (fig. 41), limitées à leurs points de contact avec le cercle, ont-elles même longueur ? Expérimenter, démontrer. Formuler un énoncé et le noter dans la fiche 26.

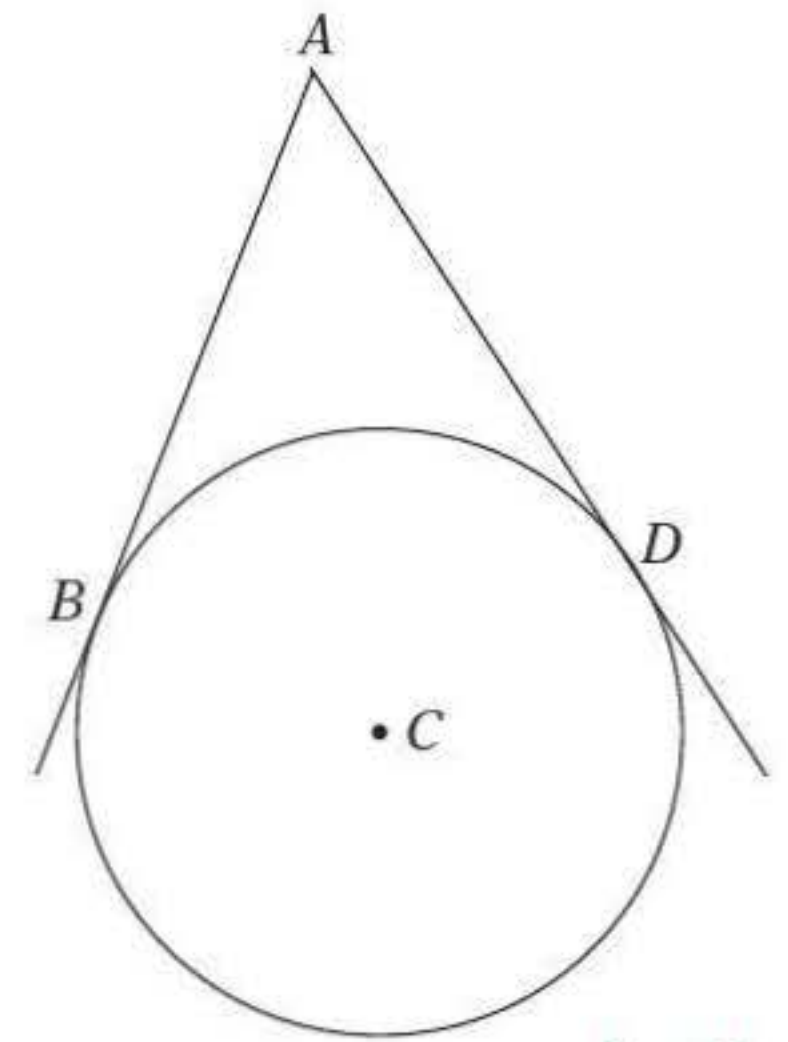


fig. 41

25. Ovoïde

Dessiner un ovoïde en utilisant la procédure montrée par les fig. 42 et 43. Prendre 3 cm comme longueur de $[AB]$. Justifier les raccordements.

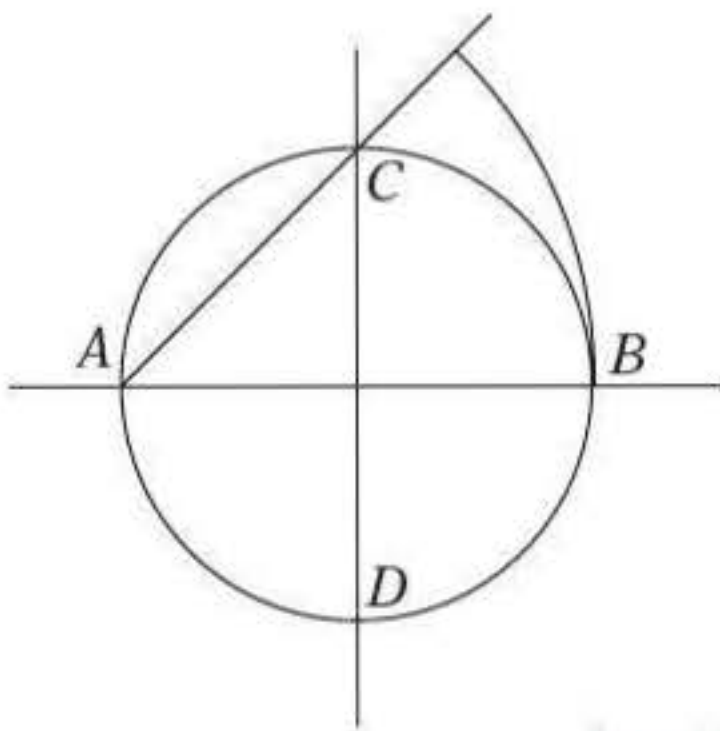


fig. 42

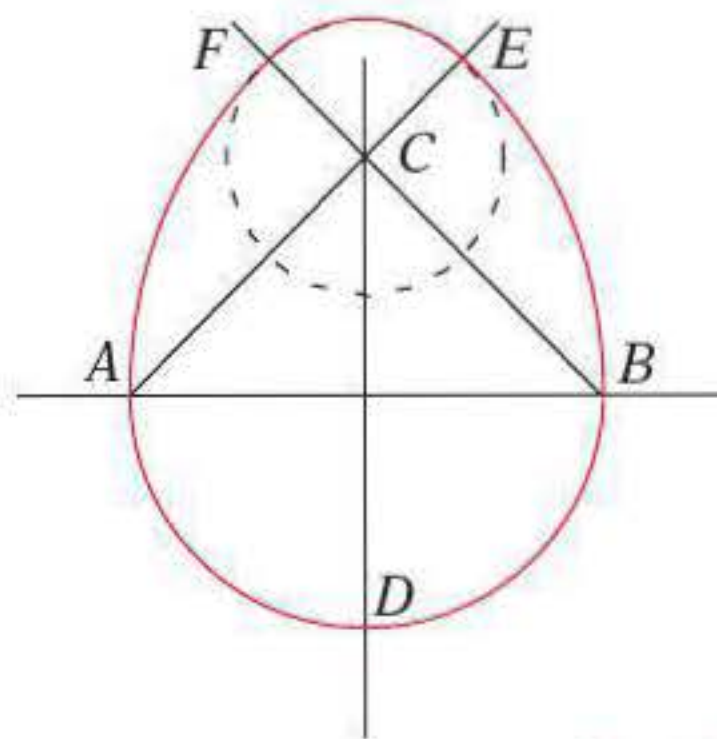


fig. 43

26. Cœur

Reproduire le motif de la fig. 44 et construire son symétrique par rapport à la droite a . Prendre 3 cm comme mesure du côté de chacun des triangles équilatéraux. Justifier les raccordements.

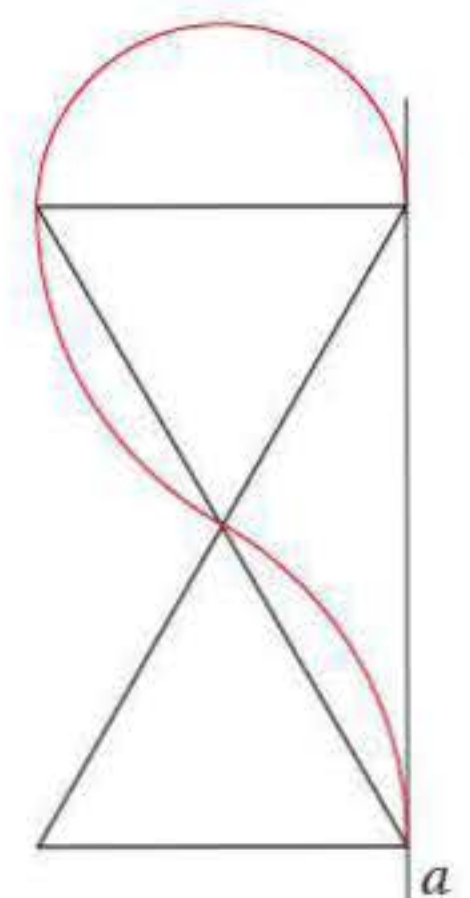


fig. 44

8 Pythagore et les radicaux

Lorsque l'on assemble deux tiges et qu'on les maintient à angle droit, la longueur du fil qui joint deux extrémités est déterminée. Cela signifie que si l'on connaît les mesures des deux tiges, il doit être possible de calculer la longueur du fil.

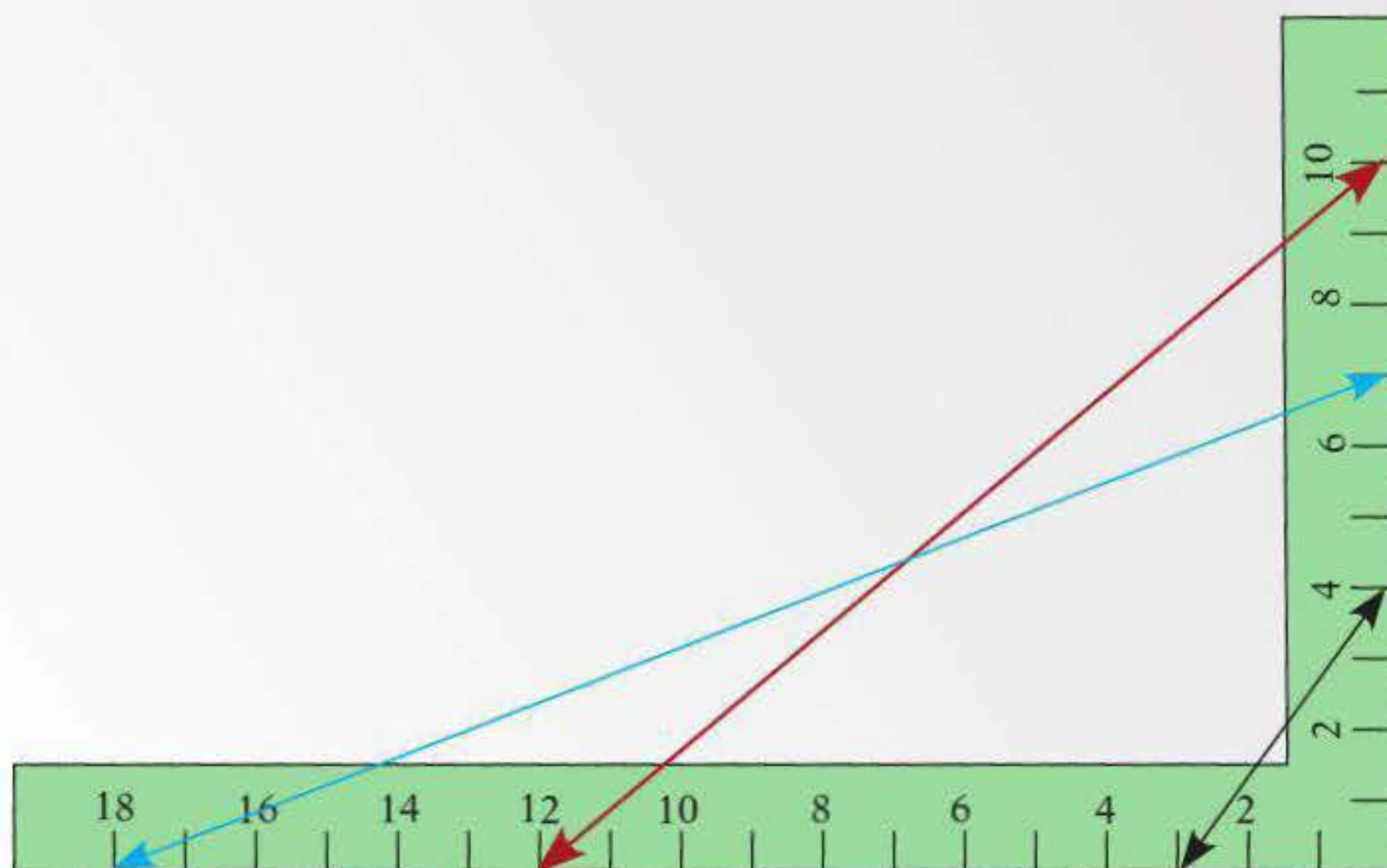


fig. 1

Ce problème se pose dès que l'on réalise des bâtiments dont l'importance nécessite de faire des plans, de prévoir le nombre de pierres nécessaires, la façon de les tailler, de les agencer. Or, il se fait que cette relation entre des mesures de côtés passe par le détour d'une relation entre des aires !

Plusieurs tablettes d'argile, datant de la dynastie des HAMMOURABI à Babylone (vers 1700 A.C.N.), ont été retrouvées au milieu du XIX^e siècle. Ces tablettes présentent des listes de nombres et des figures qui montrent que, plus de mille ans avant PYTHAGORE, on savait évaluer avec une précision remarquable les dimensions d'un triangle rectangle.

Les recherches sur la construction des pyramides ont montré que les Égyptiens, eux aussi, faisaient de tels calculs. Mais c'est assurément à l'école de Pythagore, au VI^e siècle A.C.N., que l'on doit la formule générale et, surtout, la découverte d'un fait étonnant : pour ces calculs, les nombres habituels (les naturels et les fractions) ne suffisent pas. Il faut en inventer d'autres !

1. Une expérience numérique

Avec un logiciel de dessin, on place un point P mobile sur le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. Pour chacune des positions, on enregistre les distances au millimètre près du point P aux extrémités du diamètre. On fait afficher chacune de ces distances. Le logiciel fournit des valeurs approchées des distances au dixième de millimètre près. Voici quelques résultats :

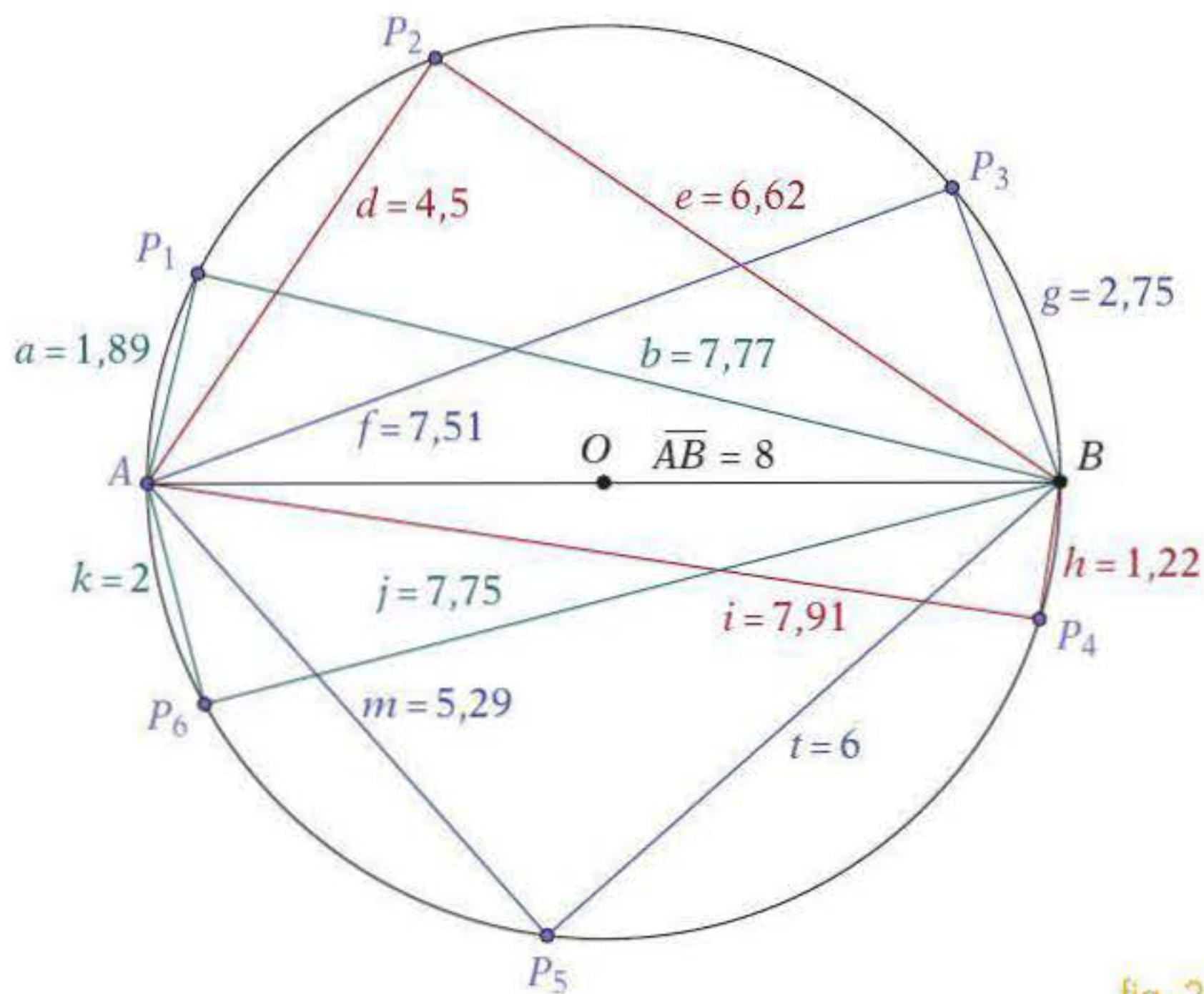


fig. 2

Pour chaque position du point P , calculer (répartir le travail dans la classe) :

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \text{ et } \overline{AB}^2$$

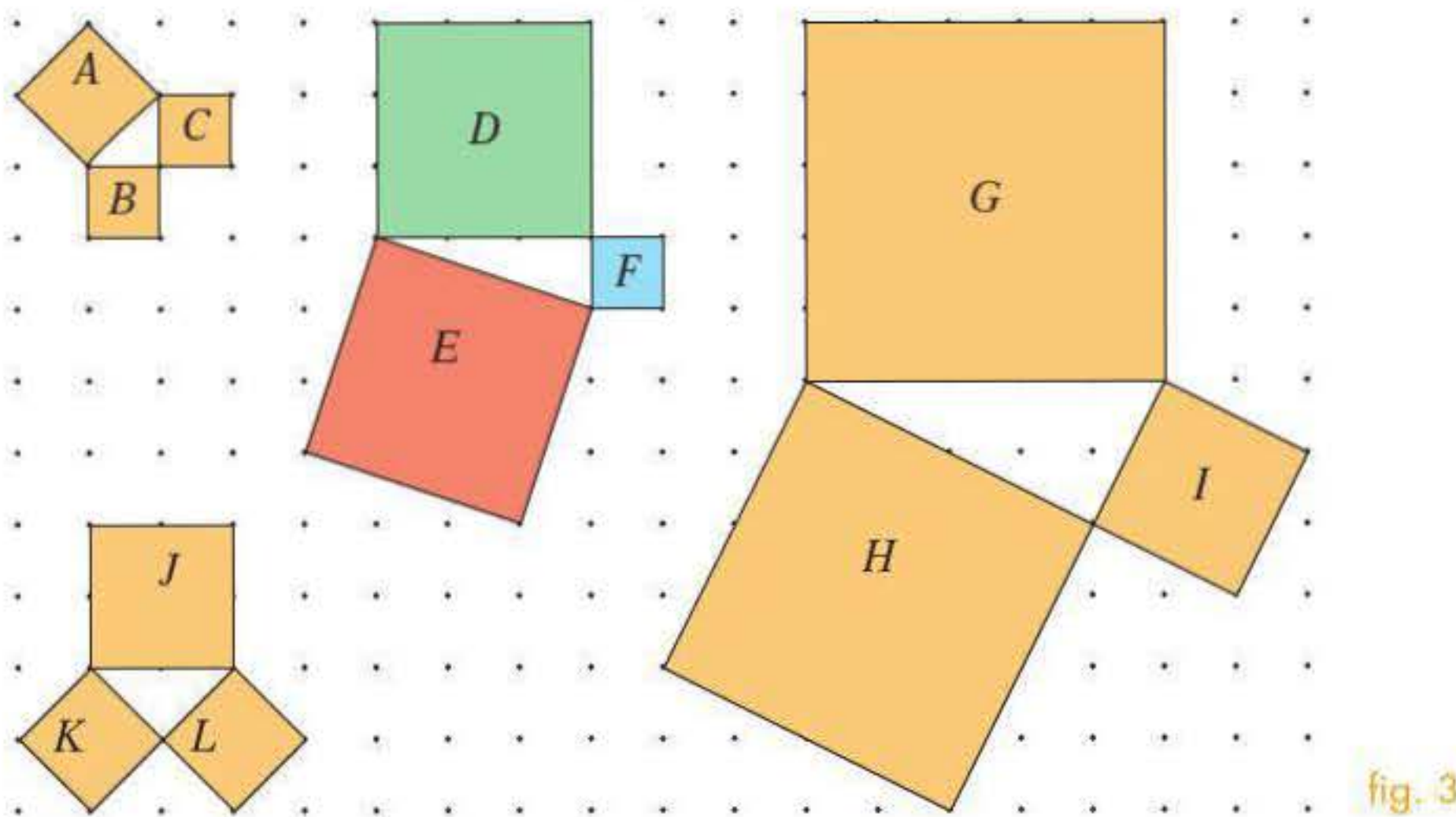
Les résultats des calculs sont des valeurs approchées puisque les données le sont. Néanmoins, une régularité dans les résultats apparaît. Que peut-on conjecturer ?

2. Des carrés sur les côtés d'un triangle

Pour trouver la relation entre les mesures des côtés d'un triangle rectangle, il faut examiner les carrés des mesures des côtés. Le carré d'une longueur, c'est une aire.

Pour comprendre et valider la relation entre les trois côtés d'un triangle, il faut donc déterminer les aires des carrés construits sur les côtés du triangle.

- a. Dans la fig. 3, on a construit des carrés sur les côtés des triangles rectangles. Calculer l'aire de chaque carré en prenant pour unité d'aire le carré du quadrillage (penser aux « boîtes extérieures »).



- b. Organiser les résultats de ces calculs dans un tableau qui permette de comparer les mesures des côtés pour l'ensemble des triangles de la figure.

- c. Formuler la propriété observée.

- d. La fig. 4 montre un autre carré de côté $(a + b)$ dans lequel figurent les carrés D et F .

La fig. 5 attire l'attention sur le carré de côté $(a + b)$ qui entoure le carré E .

Expliquer pourquoi la somme (aires de D + aire de F) est égale à l'aire de E .

Cette relation entre les côtés d'un triangle rectangle est appelée **relation de Pythagore**.

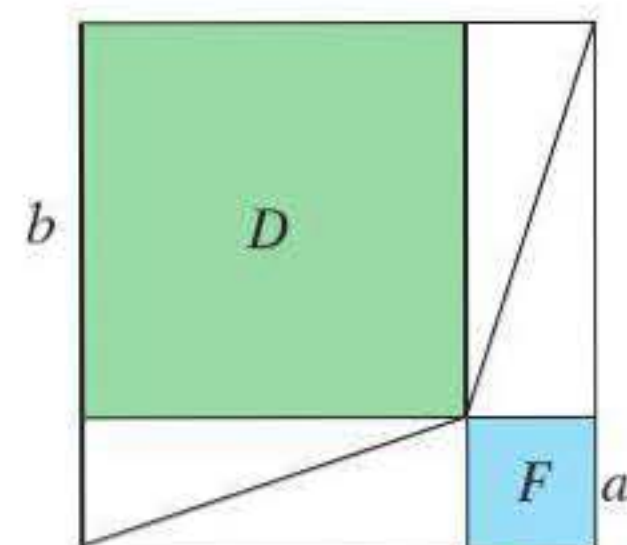


fig. 4

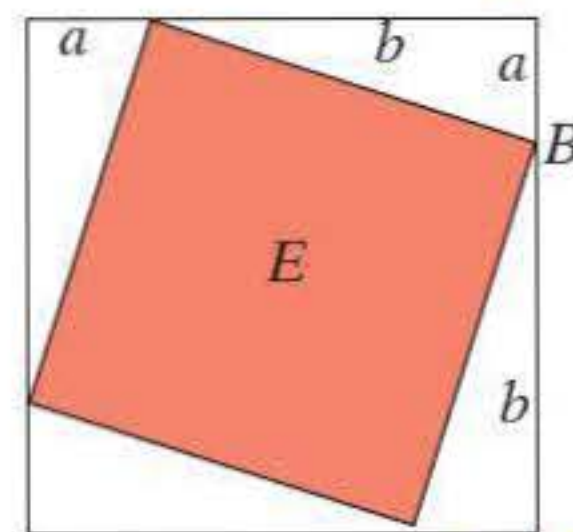


fig. 5

3. La diagonale du carré

Soit un carré dont le côté a mesure 1 dm. Pour calculer la longueur de sa diagonale d , on utilise la relation de Pythagore. On trouve $d^2 = 2$. Mais quel est ce nombre dont le carré vaut 2 ? On sait qu'il est compris entre 1 et 2 et on écrit

$$1 < d < 2.$$

- a. Encadrer d au millième près.
- b. Le nombre positif dont le carré est 2 s'écrit $\sqrt{2}$. Afficher ce nombre à l'écran d'une calculatrice.
- c. Pour savoir si le nombre affiché est une valeur exacte ou une valeur approchée, multiplier ce nombre par lui-même en l'introduisant chiffre par chiffre.

On pouvait prévoir, sans faire la multiplication, que le nombre affiché n'a pas comme carré 2,0000... En effet, si, par exemple, le dernier chiffre décimal du nombre affiché est 4, son carré se termine par 6 (le dernier chiffre de 16).

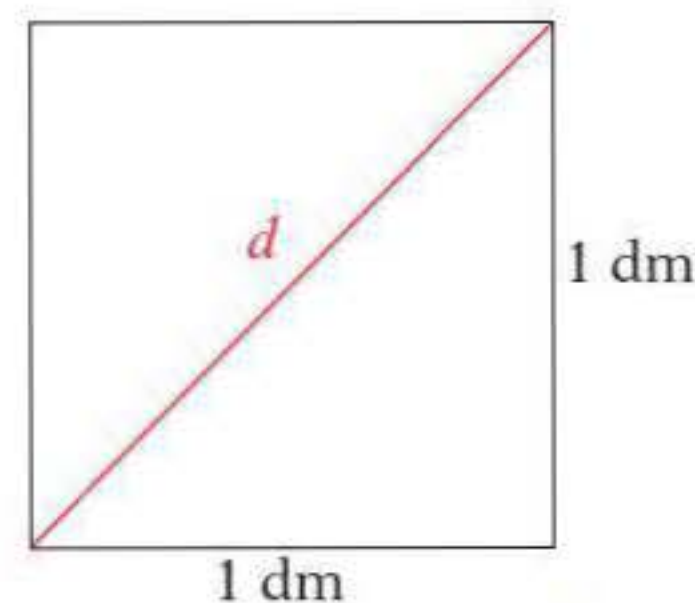


fig. 6

On peut raisonner de la même façon à propos de tous les chiffres entre 1 et 9. Aucun de ces carrés ne se termine par 0. On conclut que **le nombre dont le carré est 2 est un décimal illimité.**

On sait aussi depuis l'Antiquité grecque que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers. Les Grecs appelaient de tels nombres des **irrationnels**.

En latin, *ratio*, c'est la raison : ces nombres seraient donc des « nombres fous ». Mais le mot *ratio* désigne aussi le rapport entre deux nombres, ce qui correspond à la signification mathématique de nombre « irrationnel » : **un nombre qui ne peut être écrit sous forme fractionnaire.**

4. Un triangle puis un carré...

La fig. 7 est une suite de triangles rectangles isocèles et de carrés. Le premier segment mesure une unité. Calculer les mesures a , b , c , et d .

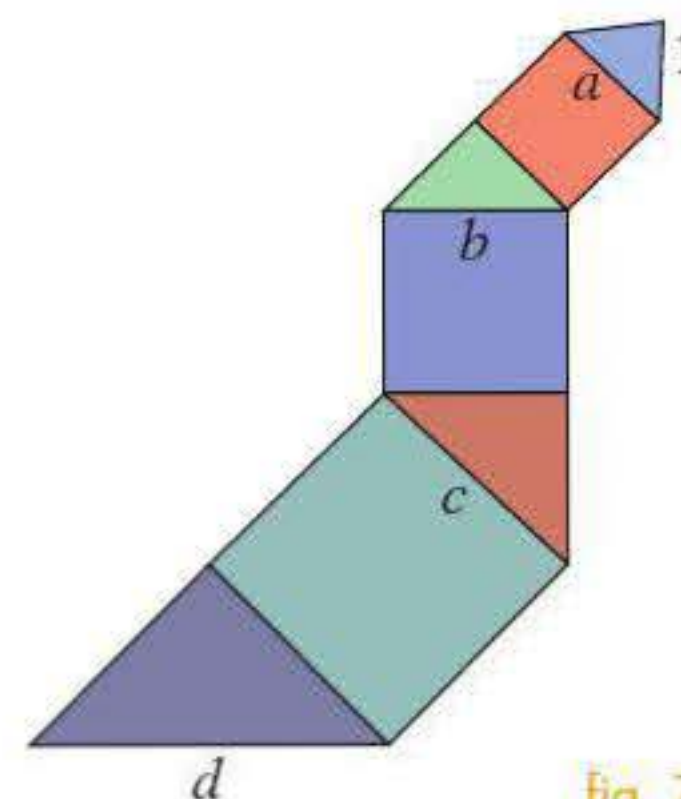
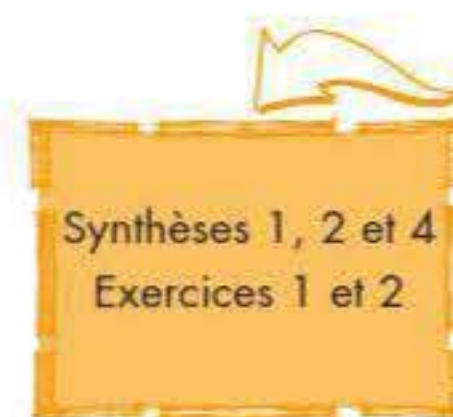


fig. 7

5. La hauteur du triangle équilatéral

La fig. 8 montre des triangles équilatéraux dessinés sur une trame triangulaire. L'unité de longueur est le côté du pavé triangulaire qui constitue la trame.

- a. Calculer la hauteur a du premier triangle.
- b. Pour calculer la hauteur b , on peut procéder de deux façons : si on utilise le théorème de Pythagore, on trouve

$$b = \sqrt{12} .$$

si on considère que b est le double de a , on trouve

$$b = 2\sqrt{3} .$$

On constate donc par la voie géométrique que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

En examinant cette égalité par la voie numérique, on a :

$b = \sqrt{12}$	$b = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3}$	$2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

On conclut que $\sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$.

- c. Montrer par calcul que $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
- Pour calculer la hauteur c , on peut procéder de deux façons : si on utilise le théorème de Pythagore, on trouve

$$c = \sqrt{\frac{3}{4}} .$$

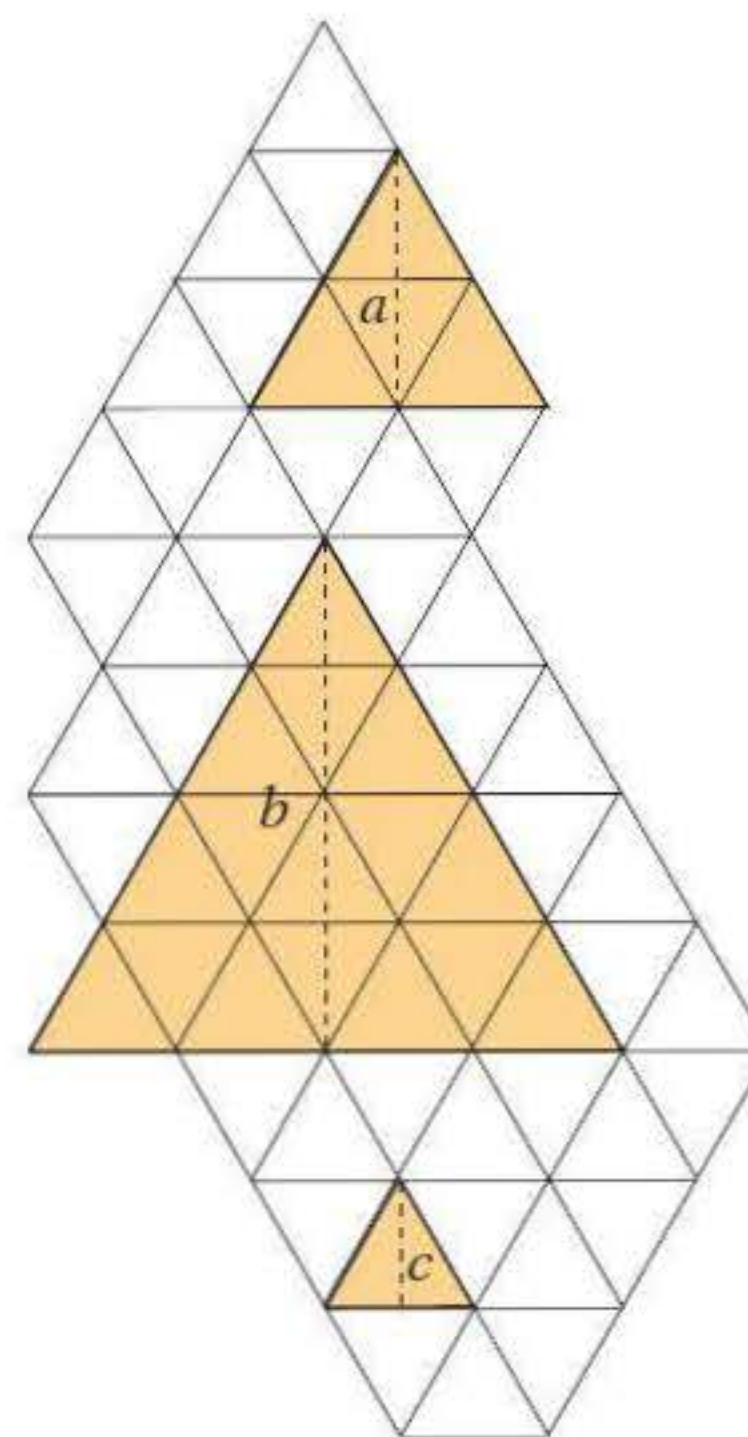


fig. 8

si on considère que c est la moitié de a , on trouve

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On constate donc que $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En examinant cette égalité par la voie numérique, on a :

$c = \sqrt{\frac{3}{4}}$	$c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$
--------------------------	--

On conclut que $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

- c. Montrer par calcul que $\sqrt{\frac{8}{100}} = 0,2\sqrt{2}$.

6. Construire

- a. On ne peut pas écrire le nombre $\sqrt{3}$ sous la forme d'une fraction. Mais peut-on dessiner un segment qui mesure $\sqrt{3}$ dm ?
- b. Construire un segment $[AB]$ dont la mesure est $\sqrt{72}$ cm ; un segment $[CD]$ de $\sqrt{14}$ cm ; un segment $[EF]$ qui mesure $\sqrt{15}$ cm.
- c. Construire un triangle isocèle dont la base mesure 5 cm et la hauteur $\sqrt{15}$ cm.
- d. Si le côté du premier triangle de la fig. 9 mesure 1 cm, quelle est la mesure du dernier côté ?

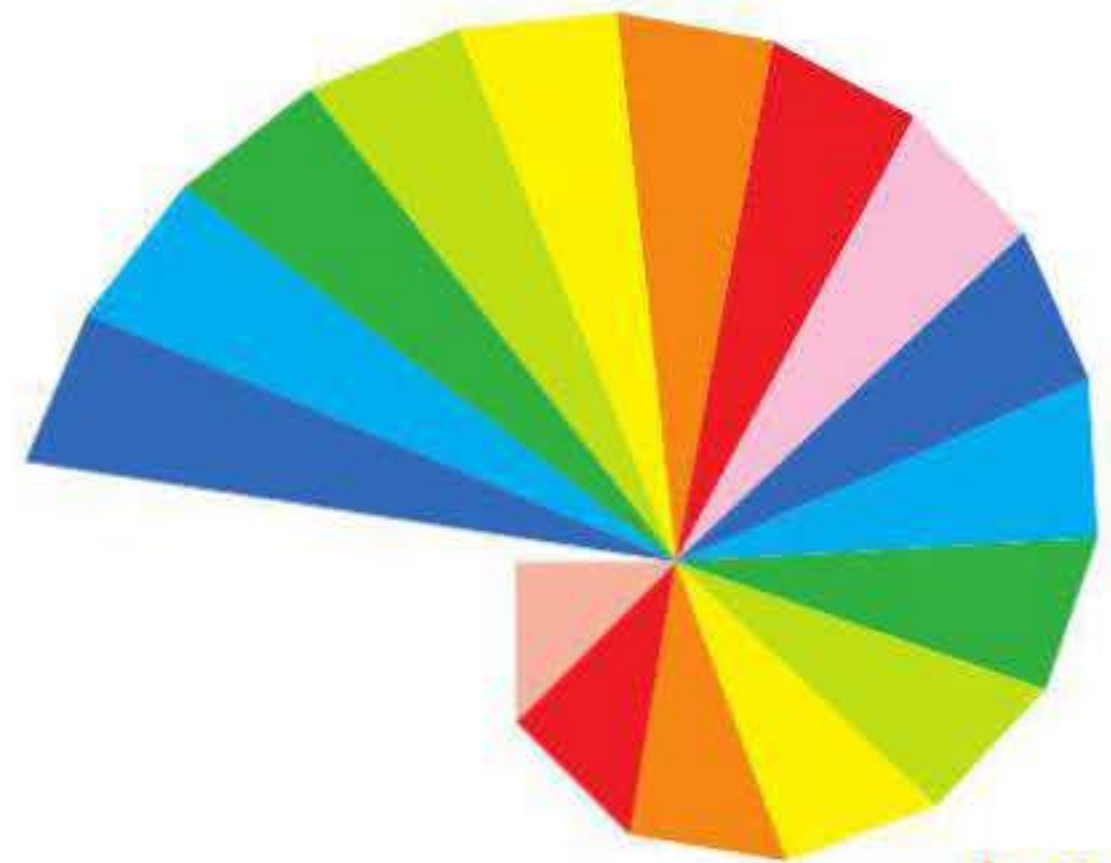


fig. 9

L'escargot de Pythagore



7. La corde à 13 nœuds

On peut tracer un angle droit en utilisant une équerre ou un rapporteur. Mais on peut aussi le faire en pleine nature sans aucun instrument mathématique. On doit juste avoir en poche une ficelle et ramasser un bâton pour y porter des longueurs égales.

Chacun peut expérimenter : faire 13 nœuds (ou 13 marques) espacés d'une même distance dans la corde. Les 12 segments de même longueur peuvent déterminer les côtés d'un triangle rectangle.

Un tel triangle vérifie-t-il la relation de Pythagore ?

Les arpenteurs égyptiens se servaient de la corde à 13 nœuds, elle restera un outil de géomètre pendant encore tout le Moyen Âge. La corde à 13 nœuds est encore utilisée actuellement en arpentage et en construction. C'est une équerre de poche pratique, facile d'emploi et assez précise.



fig. 10



1. Comment nommer les côtés d'un triangle rectangle ?

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long côté, il est opposé à l'angle droit. Les deux autres côtés sont appelés côtés de l'angle droit. Dans la fig. 11, les nombres a et b sont les mesures des côtés de l'angle droit, c la mesure de l'hypoténuse.

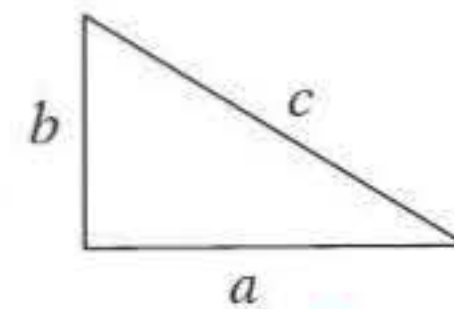


fig. 11

2. Comment calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle dont on connaît les mesures des autres côtés ?

Énoncé 8.1

Si un triangle est un triangle rectangle, alors l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Cette relation est appelée **théorème de Pythagore**. Elle s'exprime brièvement par la formule

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

dans laquelle a et b sont les mesures des côtés de l'angle droit et c la mesure de l'hypoténuse, ces mesures étant toutes exprimées dans la même unité.

Voici la démonstration de cette propriété.

Hypothèse

Soit un triangle ABC rectangle en C (fig. 12).

Thèse

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Démonstration

La fig. 13 est construite au départ d'un carré de côté $(a + b)$.

Elle montre que

$$(a + b)^2 = a^2 + \frac{4ab}{2} + b^2 \quad (1)$$

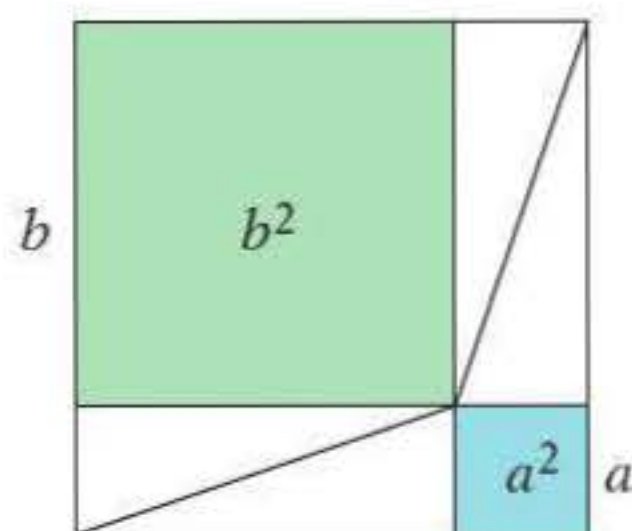


fig. 13

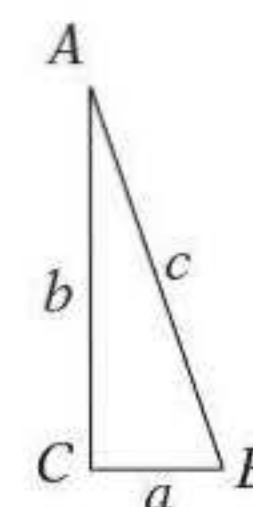


fig. 12

La fig. 14 est construite à partir du même carré de côté $(a + b)$. Sur chacun des côtés du carré, on reporte, toujours dans le même sens, le côté a . On détermine ainsi le quadrilatère $ABDE$. Montrons que ce quadrilatère est un carré.

En effet : les quatre triangles (voir fig. 5) sont isométriques (énoncé 7.12). On en tire que :

- les hypoténuses sont égales, les côtés du quadrilatère $ABCD$ ont donc même mesure ;
- $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$, les angles du quadrilatère sont donc droits.

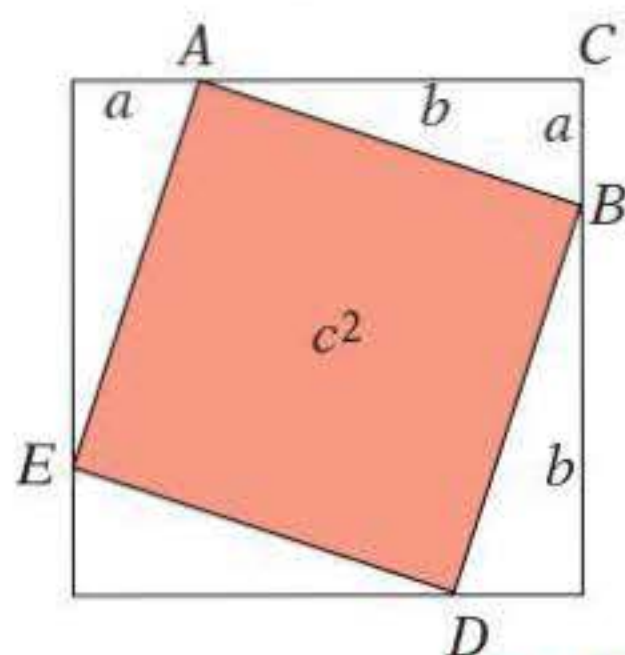


fig. 14

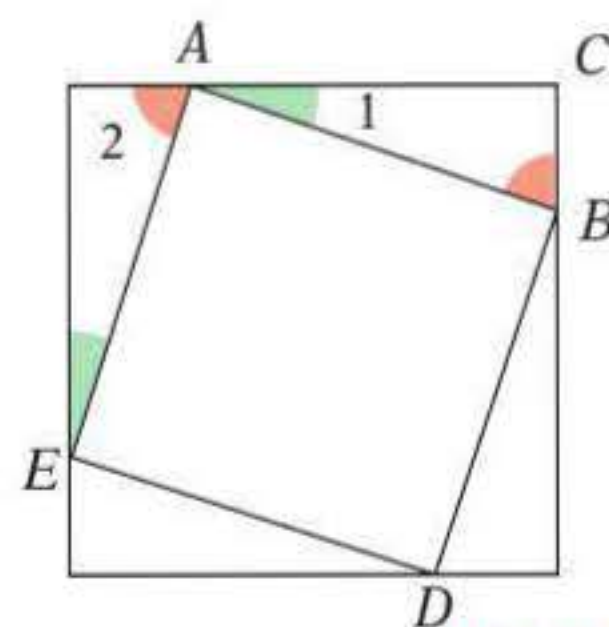


fig. 15

Revenons à la fig. 14. On peut à présent écrire :

$$(a+b)^2 = c^2 + \frac{4ab}{2} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on tire :

$$a^2 + \frac{4ab}{2} + b^2 = c^2 + \frac{4ab}{2}$$

D'où,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cqfd

3. Comment savoir si un triangle dont on connaît les mesures des trois côtés est un triangle rectangle ?

Il faut vérifier si les côtés de ce triangle vérifient la relation de Pythagore. Cette vérification repose sur la **réciproque de la relation de Pythagore**.

Énoncé 8.2

Trois mesures de côtés étant données, si le carré de la plus grande mesure est égal à la somme des carrés des deux autres mesures, alors ce triangle est rectangle.

Exemples

Le triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 12 cm et 13 cm est un triangle rectangle car $13^2 = 12^2 + 5^2$.

Le triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et $\sqrt{41}$ cm est un triangle rectangle car $41 = 4^2 + 5^2$.

Voici une démonstration de cette réciproque.

Hypothèse

Soient a , b et c , les mesures de trois côtés d'un triangle et $c^2 = a^2 + b^2$.

Thèse

Ce triangle est rectangle.

Démonstration

- On peut construire un seul triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b , (cas d'isométrie CAC).
- Si on appelle x son hypoténuse, on a $x^2 = a^2 + b^2$ par le théorème de Pythagore. Donc $x = c$.
- Comme tous les triangles qui ont leurs côtés de même mesure sont isométriques (CCC), seul le triangle rectangle construit correspond à ces mesures.

Cqfd

4. Comment lire et écrire les radicaux ?

On appelle nombres réels, les nombres qui sont utilisés pour repérer des points sur une droite orientée. Cet ensemble contient les nombres entiers, les fractions, les décimaux limités ou non, les radicaux, le nombre π ...

$\sqrt{2}$ se lit « radical 2 » ou « racine 2 », c'est le nombre **positif** dont le carré est 2 :

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

$-\sqrt{2}$ se lit « moins radical 2 » ou « moins racine de 2 », c'est le nombre **négalif** dont le carré est 2 :

$$(-\sqrt{2})^2 = 2.$$

Il n'y a aucun nombre dont le carré vaut -2 . Lorsque l'on écrit \sqrt{a} , il faut préciser que a est positif ($a \geq 0$).

Le nombre qui figure sous le signe $\sqrt{\quad}$ est appelé le **radicant**.

5. Comment calculer avec des radicaux ?

Énoncé 8.3

La racine carrée d'un produit de nombres positifs est égale au produit des racines de chaque facteur.

Exemple

$$\sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$$

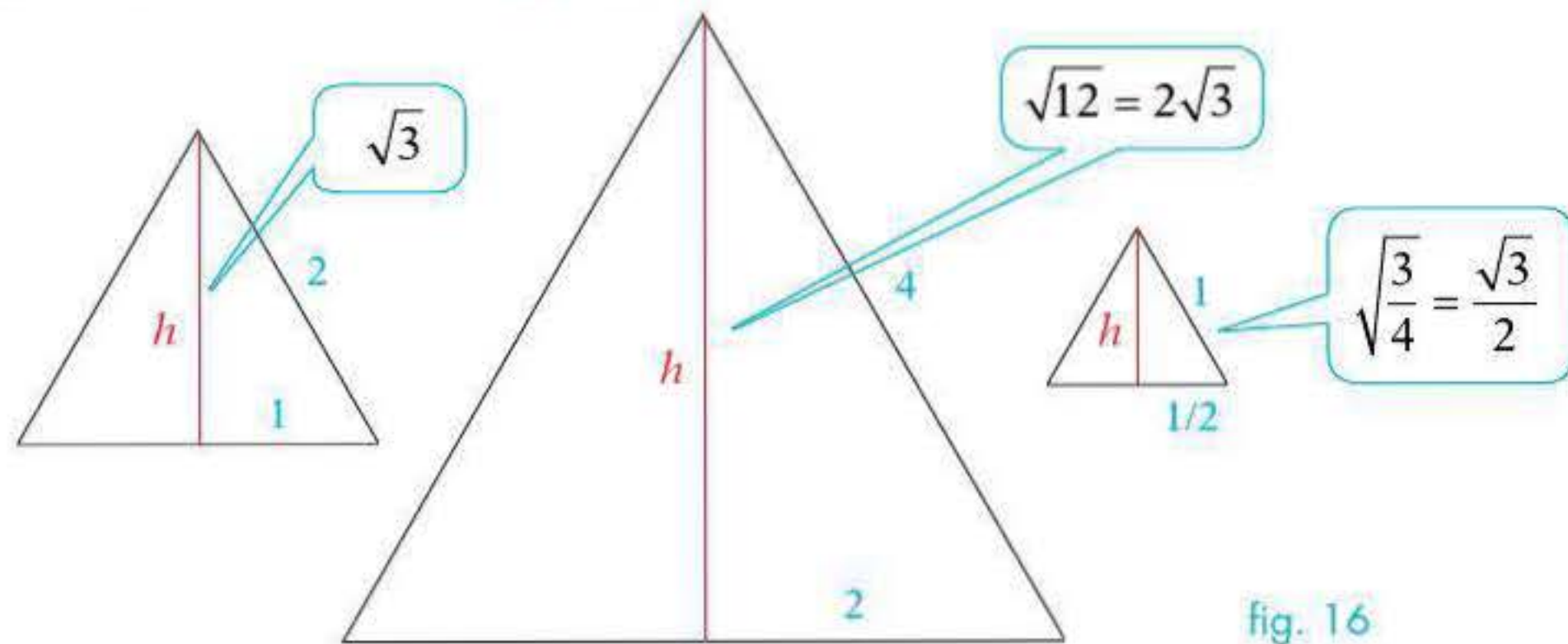
Énoncé 8.4

La racine carrée d'une fraction dont les termes sont positifs est égale au quotient entre la racine carrée du numérateur de la fraction et la racine carrée de son dénominateur.

Exemples

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3}$$

Ces propriétés trouvent une illustration géométrique dans les diverses façons de calculer la hauteur des triangles équilatéraux de la fig. 16.



6. Comment simplifier des radicaux ?

Simplifier un radical, c'est extraire, s'il y a lieu, la partie entière de ce radical. Pour ce faire, on décompose le radicand en deux facteurs dont l'un est le plus grand carré parfait possible.

Exemples

$$\sqrt{800} = \sqrt{2 \cdot 400} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{400} = 20\sqrt{2}.$$
$$\sqrt{0,18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9}}{\sqrt{100}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

7. Comment rendre rationnel le dénominateur d'une fraction ?

Lorsqu'une fraction présente un radical au dénominateur, on la transforme en une fraction équivalente dont le dénominateur est un nombre naturel. Ceci facilite un traitement ultérieur pour comparer, additionner...

Règle 1

Si le dénominateur d'une fraction comporte un facteur irrationnel, on multiplie numérateur et dénominateur par le radical simplifié.

Exemple

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{4}.$$

Règle 2

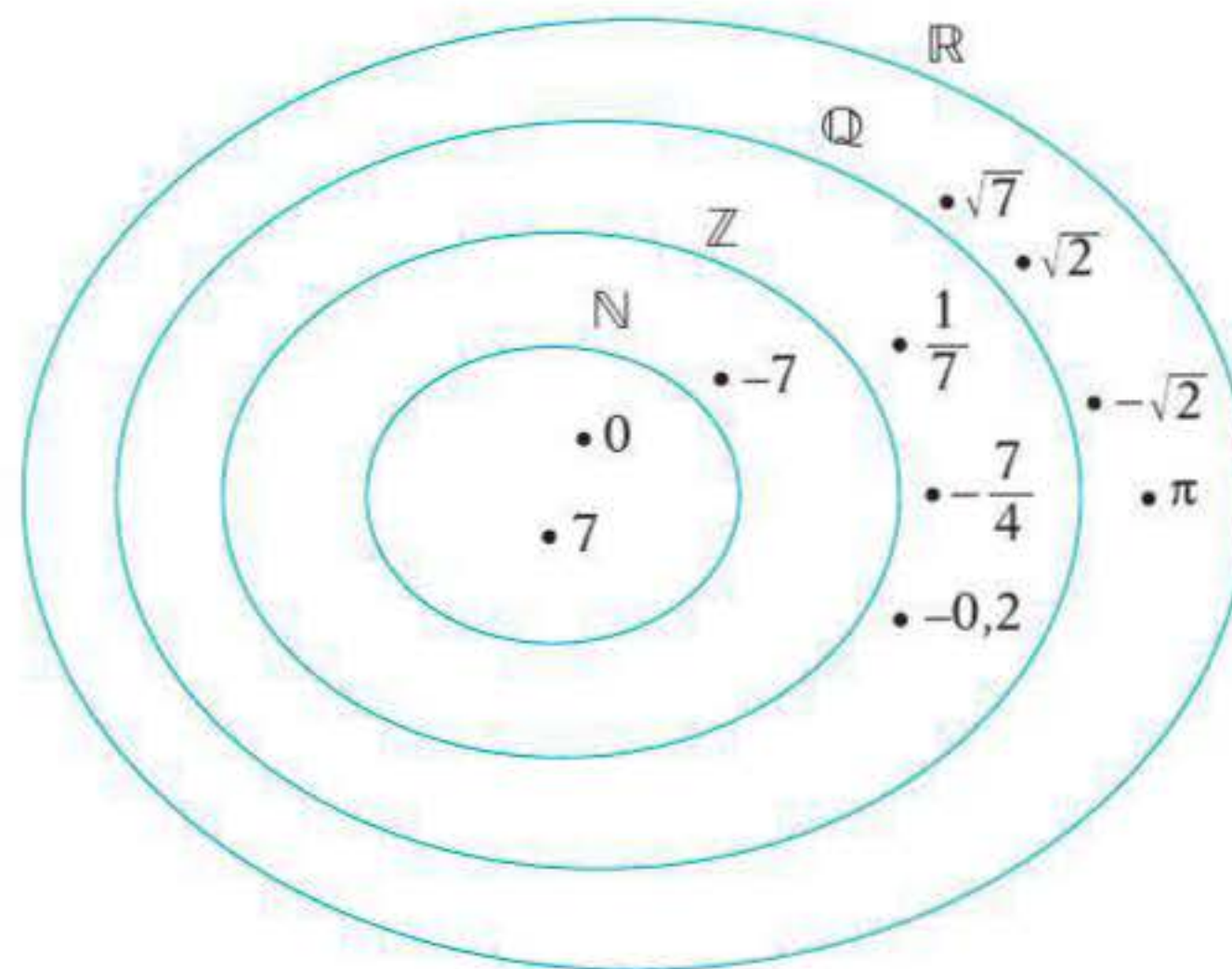
Si le dénominateur d'une fraction est un binôme dont un terme au moins est irrationnel, on multiplie numérateur et dénominateur de la fraction par le binôme conjugué.

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{(3+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{15}}{-3} \\ &= \frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}.\end{aligned}$$

8. Comment représenter les différents ensembles de nombres ?

On représente les ensembles de nombres par un diagramme qui montre comment ils « s'emboîtent ».



\mathbb{N} est l'ensemble des naturels,

\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers,

\mathbb{Q} est l'ensemble des rationnels (ou fractions),

\mathbb{R} est l'ensemble des réels.

Les nombres 0 ; -3 ; $-\frac{2}{7}$; $\sqrt{5}$ sont des réels.

Les nombres $\sqrt{5}$ et π ne sont pas des rationnels.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. À partir d'un point de la diagonale d'un rectangle

Décrire la construction qui fait apparaître le rectangle vert et le rectangle gris dans la fig. 17. Ces rectangles ont-ils la même aire ?

Faire la même construction dans un parallélogramme en menant des parallèles aux côtés. Les parallélogrammes ainsi déterminés ont-ils même aire ?

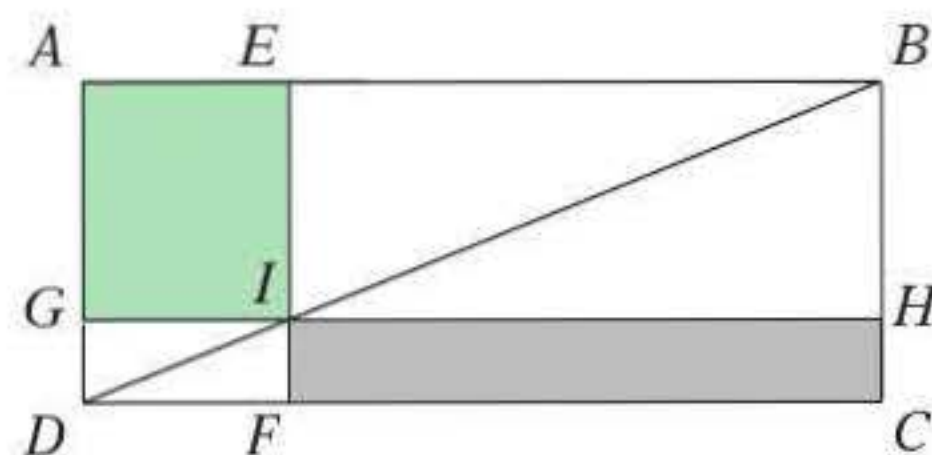


fig. 17

2. Des aires aux longueurs

a. Que vaut l'aire du carré de la fig. 18, sachant que la distance entre deux points du quadrillage est 10 cm ?

b. Quelle est la mesure du côté du carré ?

Encadrer ce nombre entre deux mesures exprimées en millimètres.

c. Si l'aire de A (fig. 19) est 100 cm^2 et celle de C est 69 cm^2 , quelle est la mesure du côté du carré B ?

Encadrer ce nombre entre deux mesures exprimées en millimètres.

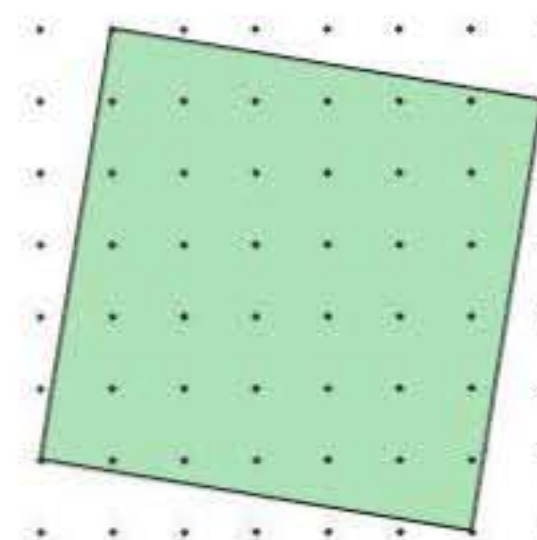


fig. 18

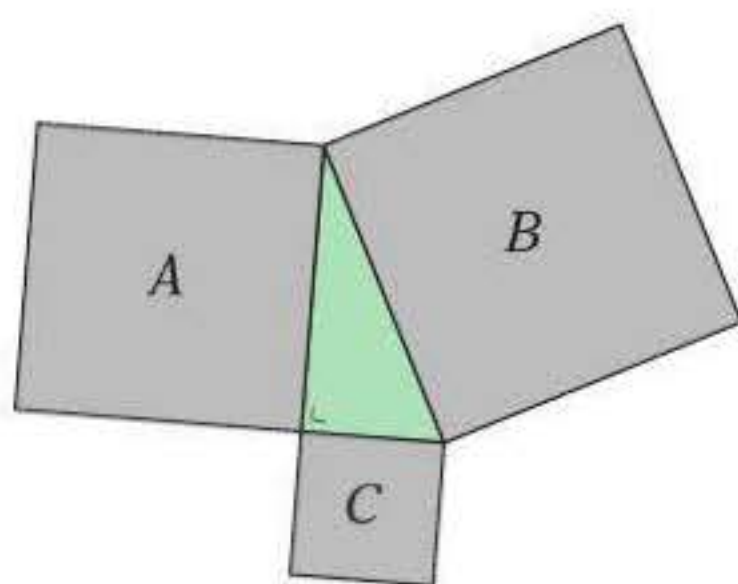


fig. 19

3. Les triangles rectangles sont les seuls

La synthèse propose une démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore.

En voici une autre qui permet de réaliser de manière plus visuelle que « si les mesures de côtés d'un triangle vérifient la relation de Pythagore, alors ce triangle est rectangle ».

Tracer un triangle ABC rectangle isocèle.

- Écrire la relation entre les aires des carrés construits sur les côtés de ce triangle.
- Choisir un point M sur la hauteur de ce triangle ou sur son prolongement. Tracer $[MA]$ et $[MB]$. Construire les carrés dont les côtés sont $[MA]$ et $[MB]$.
- Comparer les aires de ces carrés avec celles des carrés construits sur les côtés de l'angle droit du triangle.
- Expliquer pourquoi la relation de Pythagore n'est vraie que lorsque le triangle isocèle est aussi un triangle rectangle.
- Recommencer la même expérience avec un triangle qui n'est pas isocèle.
- Les nombres 6, 8 et 10 peuvent-ils être les mesures (dans la même unité) d'un triangle rectangle ?

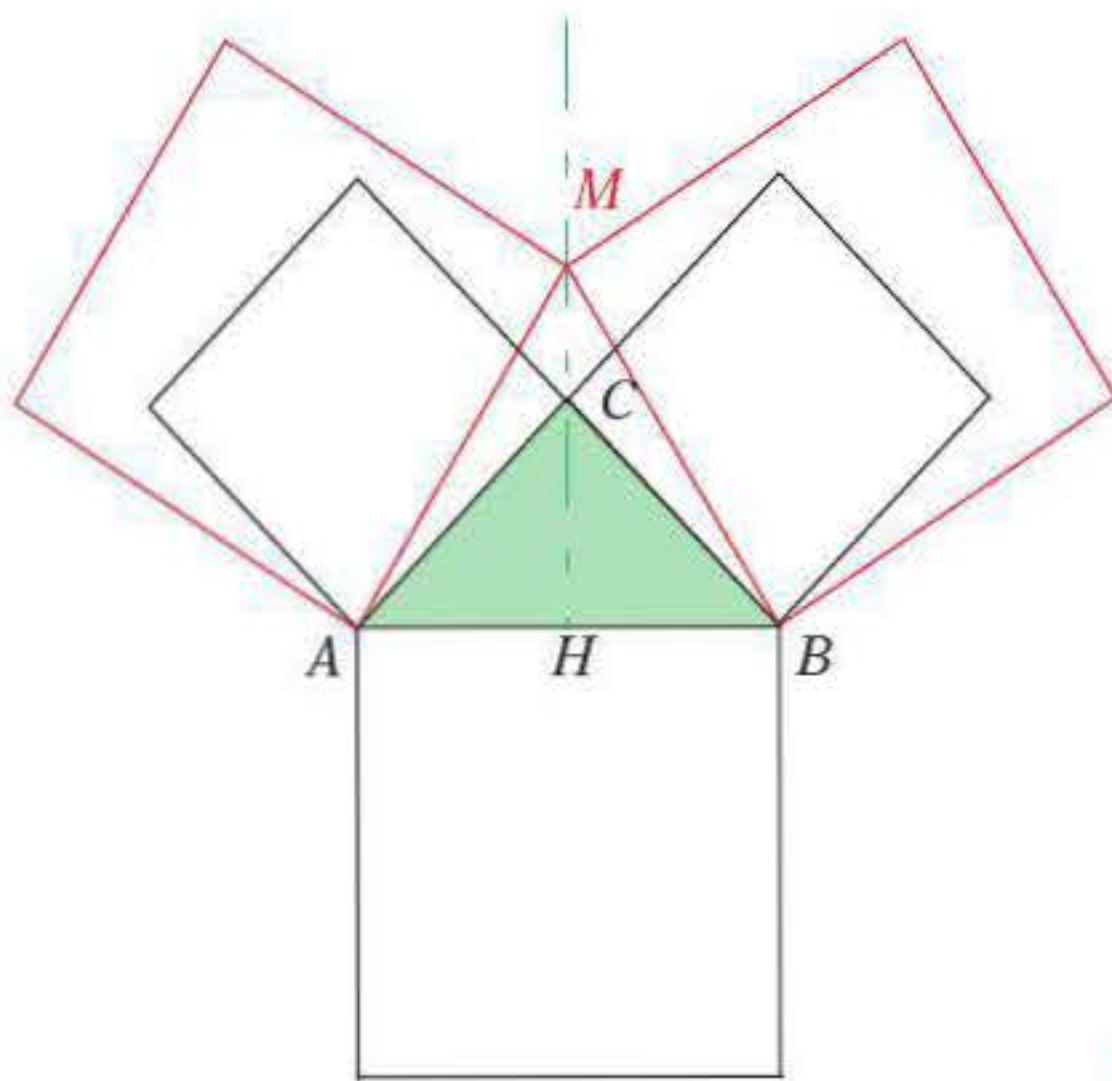


fig. 20

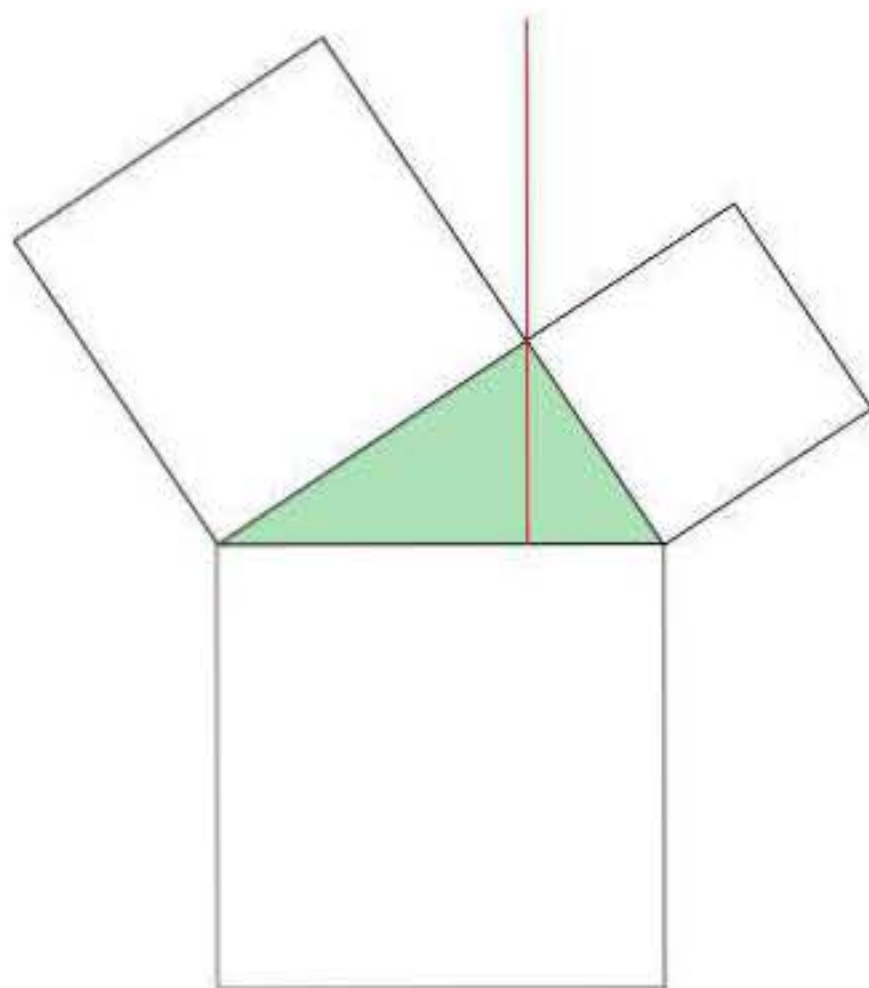
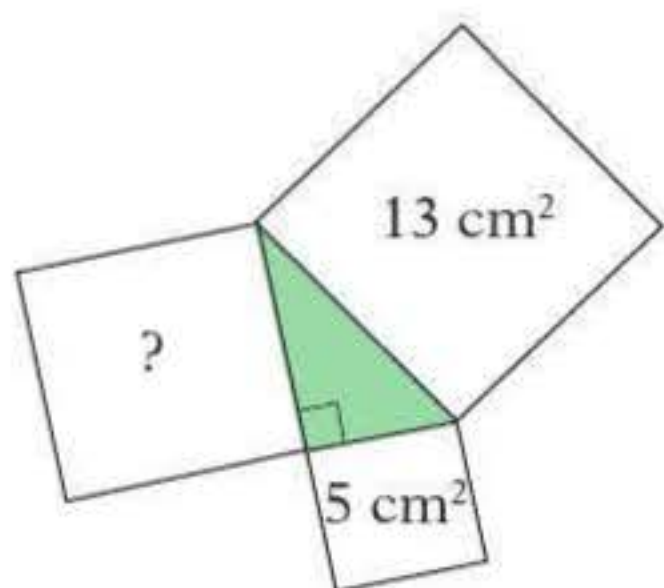


fig. 21

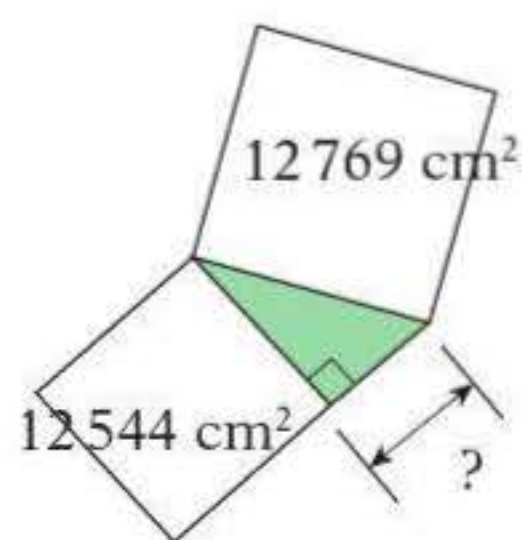
Appliquer une procédure

4. Calculer l'aire ou la longueur demandées

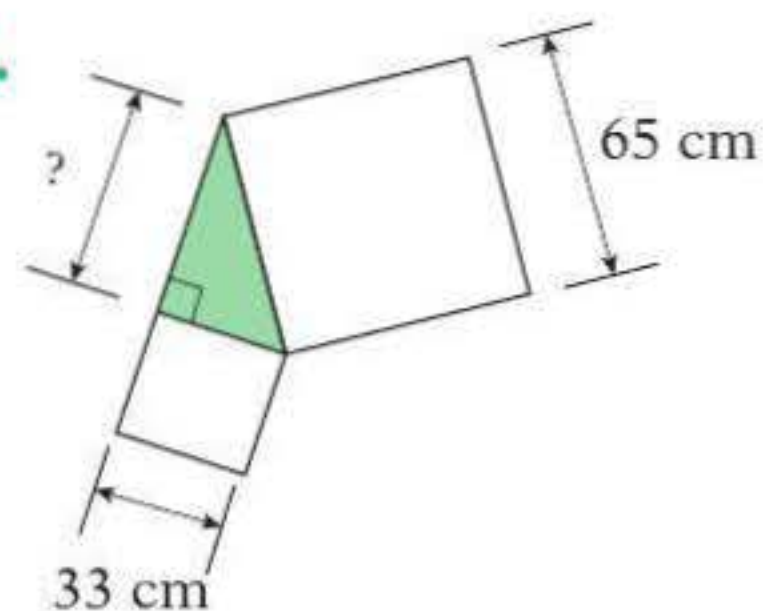
a.



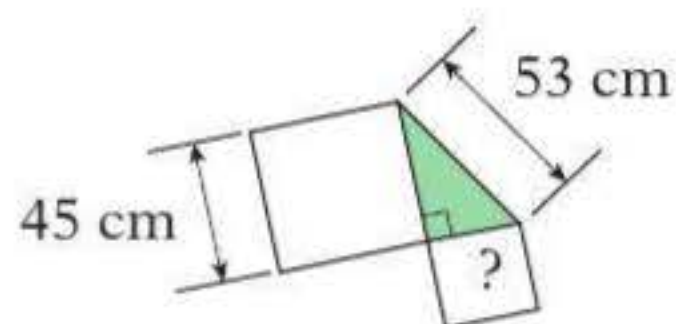
c.



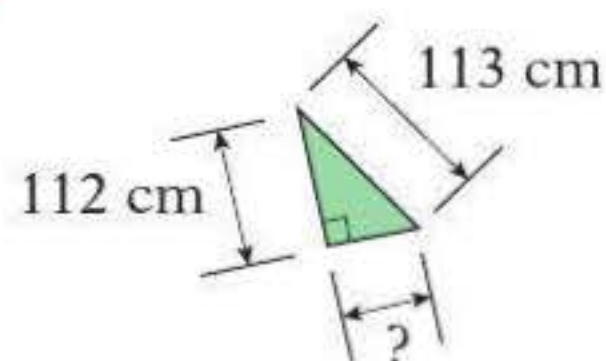
e.



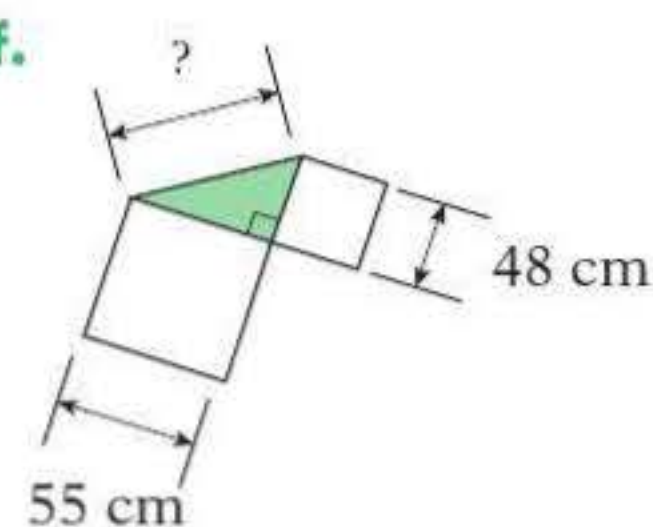
b.



d.



f.



5. Triangles inscrits dans un demi-cercle

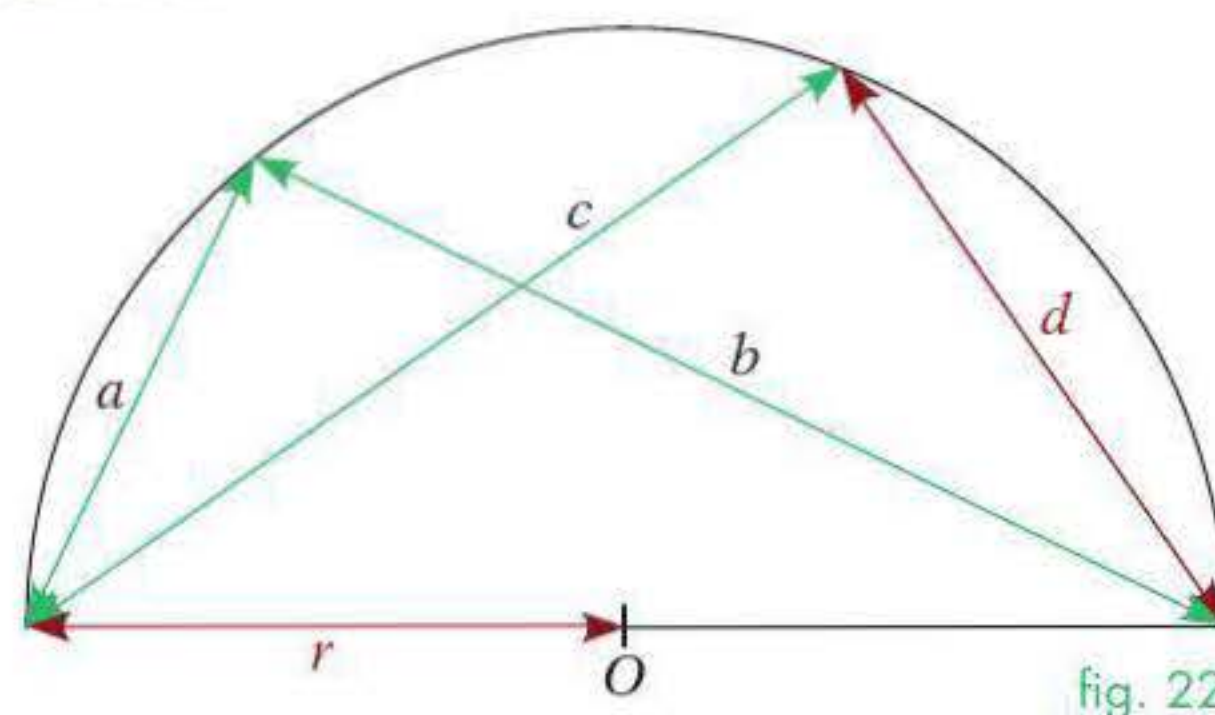
On donne

$$a = 40 \text{ mm}$$

$$b = 96 \text{ mm}$$

$$c = 81 \text{ mm}$$

Calculer r et d .



6. Pythagore ou sa réciproque ?

a. Le triangle ABC est rectangle en A . On sait que $\overline{AB} = 3,2 \text{ cm}$ et $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$. Calculer \overline{BC} .

b. Le triangle XYZ est rectangle en X . On sait que $\overline{XY} = 5 \text{ cm}$ et $\overline{YZ} = 15 \text{ cm}$. Donner la valeur exacte de \overline{XZ} puis un arrondi à 0,1 cm près.

c. On sait que $\overline{RS} = 14,5 \text{ cm}$; $\overline{ST} = 14,4 \text{ cm}$; $\overline{RT} = 1,7 \text{ cm}$. Le triangle RST est-il rectangle ? Quel est l'angle droit ?

7. Compléter par = ou ≠

a. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \dots \sqrt{5}$	d. $(\sqrt{2})^3 \dots 3\sqrt{2}$	g. $(-\sqrt{3})^2 \dots 3$	j. $\sqrt{0,02} \dots \frac{1}{10}\sqrt{2}$
b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \dots \sqrt{5}$	e. $(\sqrt{3})^3 \dots 3\sqrt{3}$	h. $(-\sqrt{5})^2 \dots -5$	k. $\sqrt{\frac{3}{4}} \dots \frac{\sqrt{3}}{2}$
c. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \dots 2$	f. $\sqrt{8} \dots 2\sqrt{2}$	i. $\sqrt{0,25} \dots 0,5$	l. $\sqrt{0,001} \dots 0,01$

8. Simplifier

a. $\sqrt{16}$	d. $\sqrt{32}$	g. $\sqrt{50}$	j. $\sqrt{1,21}$
b. $\sqrt{54}$	e. $\sqrt{10\,000}$	h. $\sqrt{500}$	k. $\sqrt{6,25}$
c. $\sqrt{4\,900}$	f. $\sqrt{128}$	i. $\sqrt{2,25}$	l. $\sqrt{1,89}$

9. Calculer les produits suivants

a. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$	d. $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$	g. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$	j. $\sqrt{\frac{36}{10}} \cdot \sqrt{\frac{45}{72}}$
b. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	e. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{320}$	h. $\sqrt{30} \cdot \sqrt{120}$	k. $\sqrt{50} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$
c. $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$	f. $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$	i. $\sqrt{\frac{18}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$	l. $\sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$

10. Réduire les radicaux semblables

- | | |
|---|--|
| a. $2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ | e. $3\sqrt{80} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$ |
| b. $3\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$ | f. $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$ |
| c. $4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6}$ | g. $2\sqrt{242} + 3\sqrt{288} - \sqrt{338}$ |
| d. $2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$ | h. $\sqrt{1372} + \sqrt{1575} - \sqrt{1792}$ |

Exercice résolu

$$\begin{aligned}
 5\sqrt{54} - 3\sqrt{24} + 2\sqrt{6} &= \\
 5\sqrt{6 \times 9} - 3\sqrt{6 \times 4} + 2\sqrt{6} &= \\
 15\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 2\sqrt{6} &= \\
 11\sqrt{6} &.
 \end{aligned}$$

11. Effectuer les calculs

a. $(3\sqrt{2})^2$	d. $(1-\sqrt{2})^2$	g. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$	j. $(5-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{3})$
b. $(1+\sqrt{2})^2$	e. $(2+\sqrt{3})^2$	h. $(\sqrt{24} + \sqrt{6})^2$	k. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$
c. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$	f. $(2+\sqrt{5})^2$	i. $(9+2\sqrt{10}) \cdot (9-2\sqrt{10})$	l. $(5-2\sqrt{3}) \cdot (5+2\sqrt{3})$

12. Rendre rationnels les dénominateurs des fractions

a. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

d. $\frac{2}{\sqrt{7}}$

e. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

f. $\frac{-2}{\sqrt{8}}$

g. $\frac{1}{\sqrt{14}-2}$

h. $\frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}}$

Exercice résolu

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{32}} &= \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 16}} = \frac{-1}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1 \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1\sqrt{2}}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{-1}{8} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Résoudre un problème

13. Tabatières, pignons, charpentes...

- Deux dimensions d'un triangle rectangle sont indiquées sur la photo. Quelle est la dimension représentée par la flèche ?
- Une échelle de 6 m de haut est appuyée contre un mur. Le bas de l'échelle est situé à 75 cm du mur. Calculer la hauteur du mur qui peut être atteinte
- Le dessin (fig. 23) montre une partie du pignon d'une maison. Rechercher la valeur de l (au millimètre près).
- Le schéma de la charpente d'un hangar est donné (fig. 24). Calculer la hauteur de A par rapport à BC (au millimètre près).
- Voici une partie d'une autre charpente (fig. 25). Quelle doit être la longueur (au millimètre près) de la pièce $[BC]$ pour que A se trouve 1 mètre au-dessus de BC ?

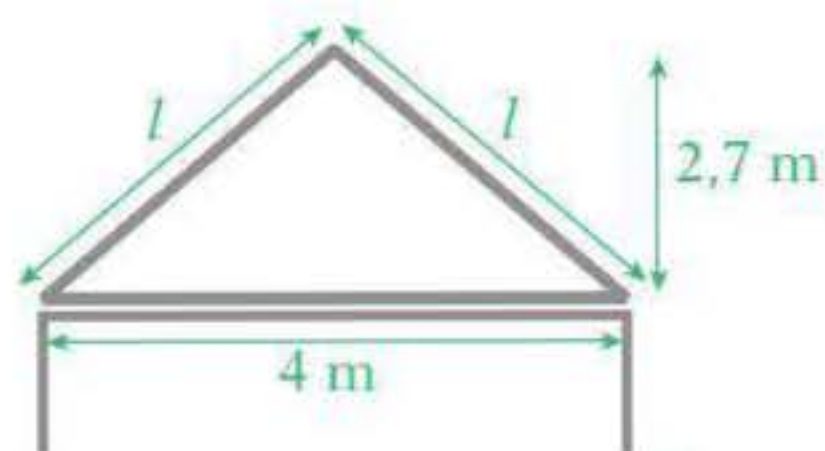
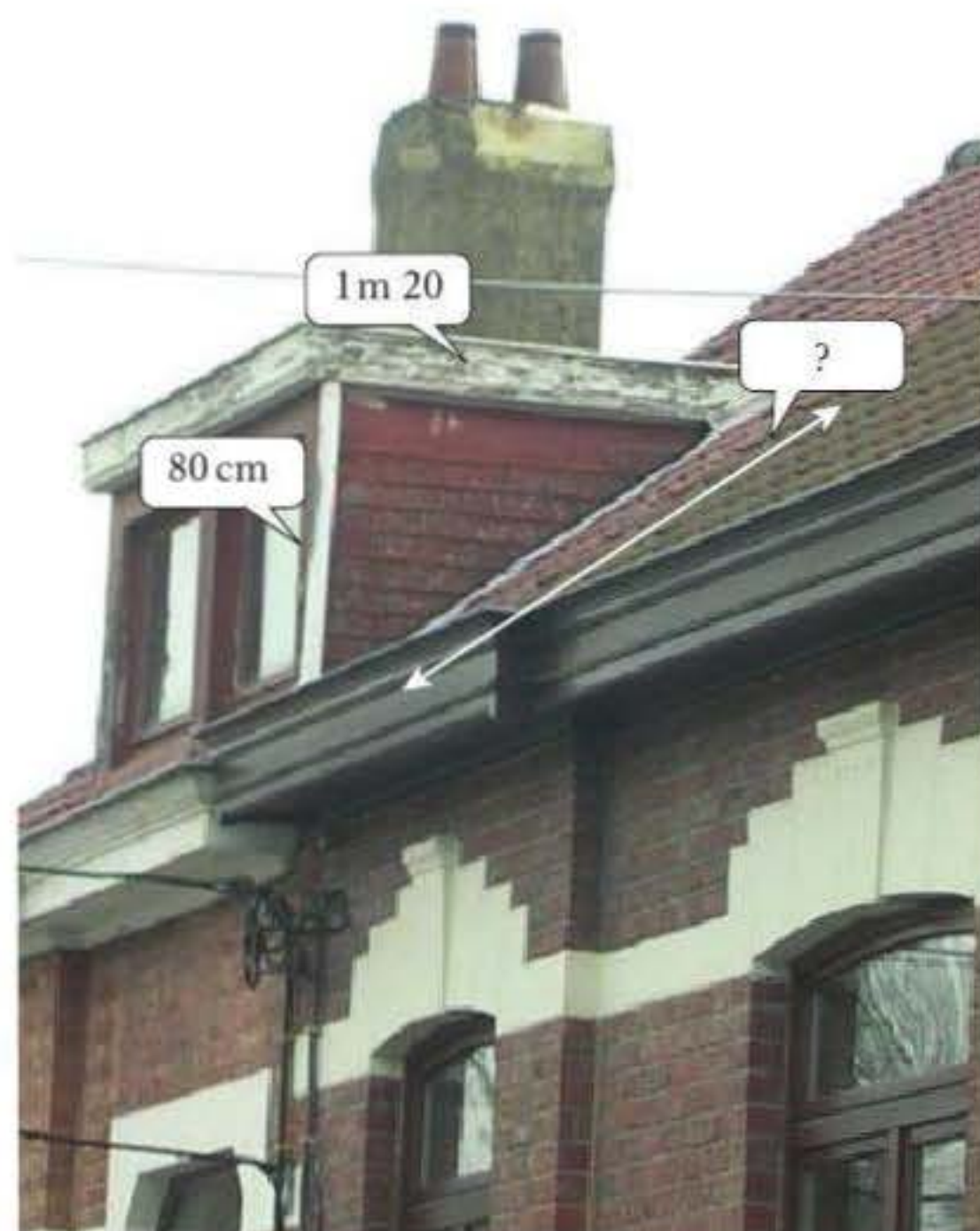


fig. 23

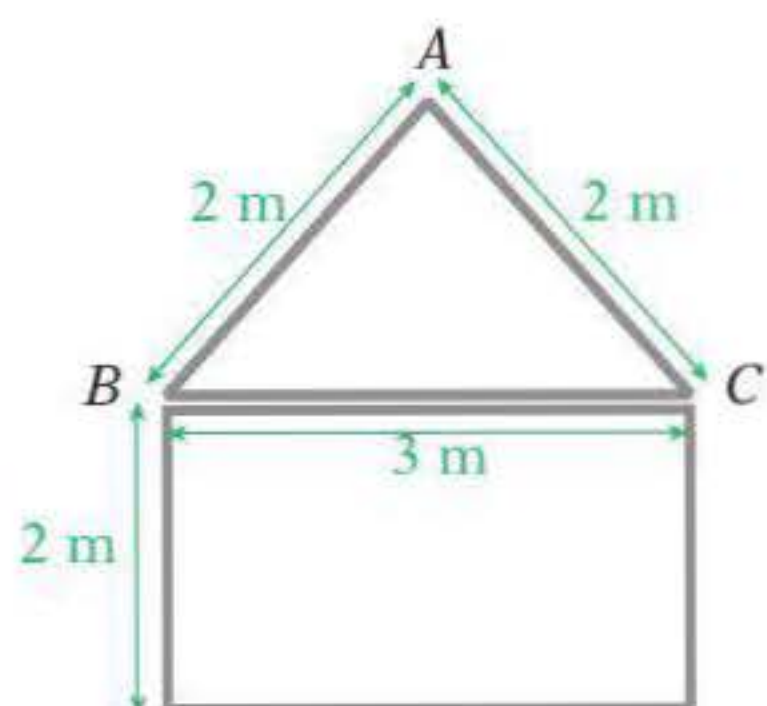


fig. 24

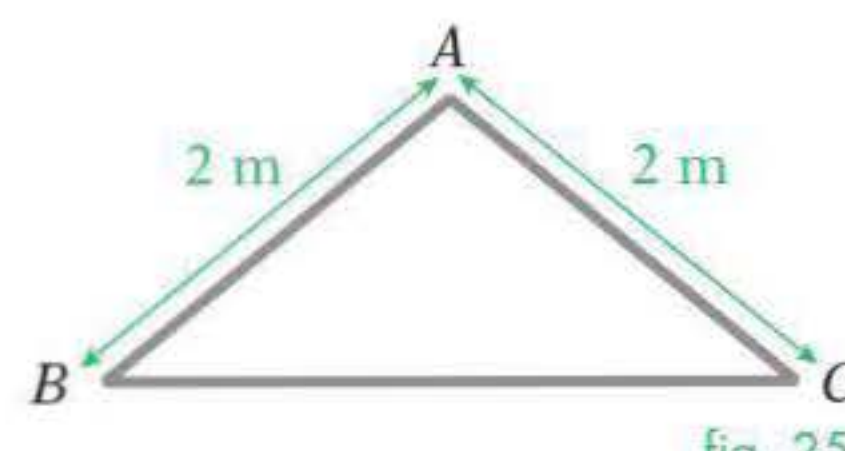


fig. 25

14. Les digues le long du canal

Les points A et B (fig. 26) sont situés sur les versants opposés d'un canal. On veut les connecter par un câble aérien.

On sait que la distance horizontale entre A et B est de 422 m et on sait aussi qu'ils sont situés respectivement à 243 m et 176 m au-dessus du niveau de l'eau du canal.

Rechercher la longueur du câble (au centimètre près).

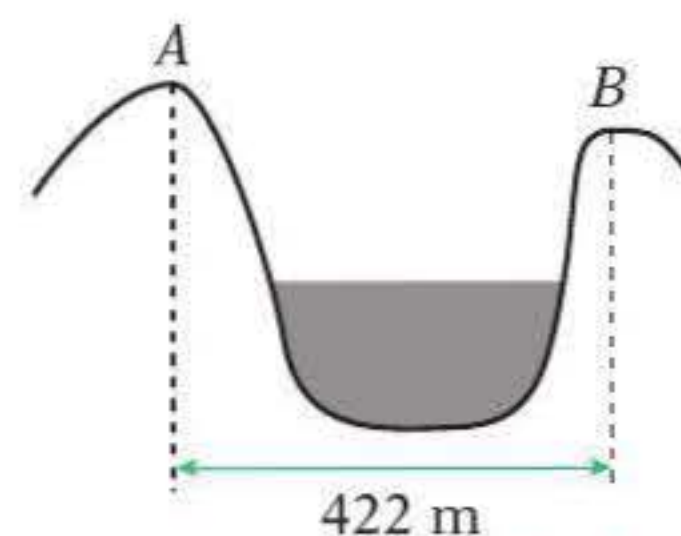


fig. 26

15. Le micro

On veut suspendre un micro dans une salle dont voici les dimensions :

- hauteur : 15,2 m ;
- largeur : 24,6 m.

Le micro sera maintenu par deux câbles métalliques de même longueur fixés à des crochets situés sur les murs opposés. Ces crochets se trouvent à 13,8 m au-dessus du sol. Le micro doit arriver à 3,6 m du sol.

Quelle doit être la longueur des câbles ?

16. Le cric

La fig. 27 montre un cric qui sert à soulever une voiture. Lorsque qu'on tourne la manivelle, les points O et S se rapprochent et le point P s'élève. Chacune des quatre barres $[PO]$, $[OR]$, $[RS]$, $[SP]$ mesure 25 cm.

- Calculer la hauteur de P au-dessus de R quand O et S sont distants de 40 cm.
- Quelle est la distance entre O et S quand P est 20 cm au-dessus de R ?

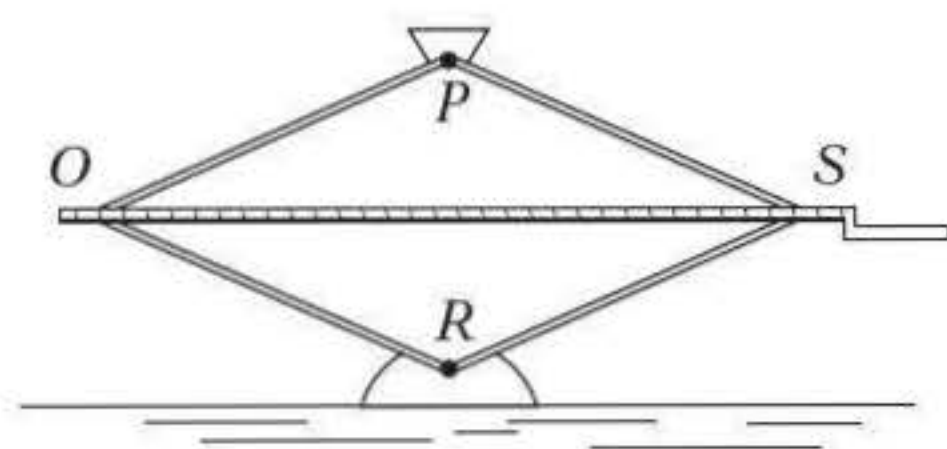


fig. 27



17. Le four à micro-ondes

La fig. 28 représente le fond d'un four à micro-ondes. On dépose un plat rectangulaire parfaitement centré sur le plateau tournant. Le plat est un rectangle de 26 cm sur 15 cm. Lorsque l'on met le four en marche, le plateau tourne-t-il sans se bloquer ?

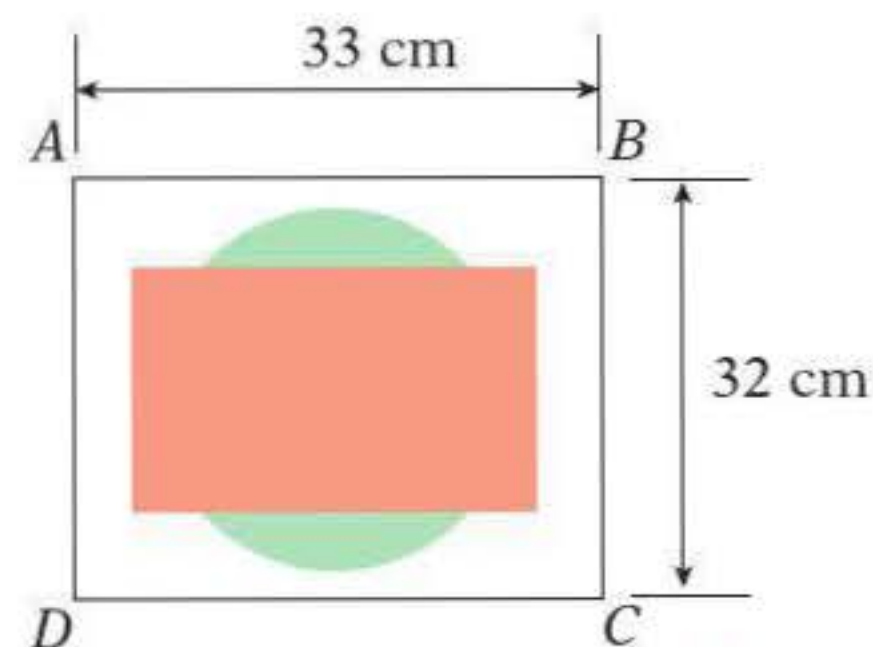


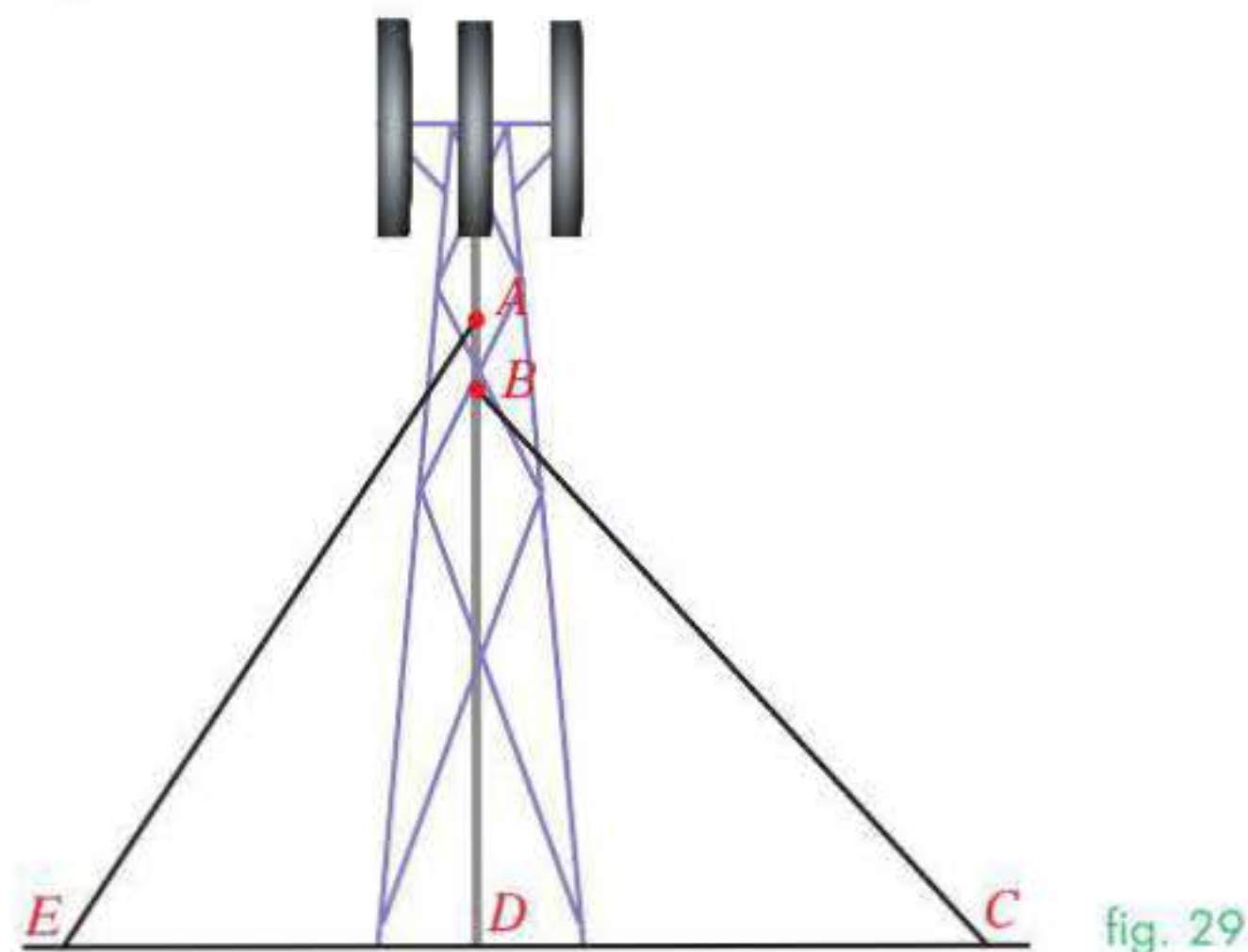
fig. 28

18. Des haubans de même longueur

Une antenne relai est munie de tendeurs de même longueur, fixés sur le mât à des hauteurs différentes. La fig. 29 montre deux de ces tendeurs : $[AE]$ et $[BC]$.

On sait que $\overline{AD} = 16$ m ; $\overline{ED} = 18$ m ; $\overline{BD} = 15$ m .

Calculer la longueur des tendeurs et la distance du point d'ancrage (C) au pied du mât (D).

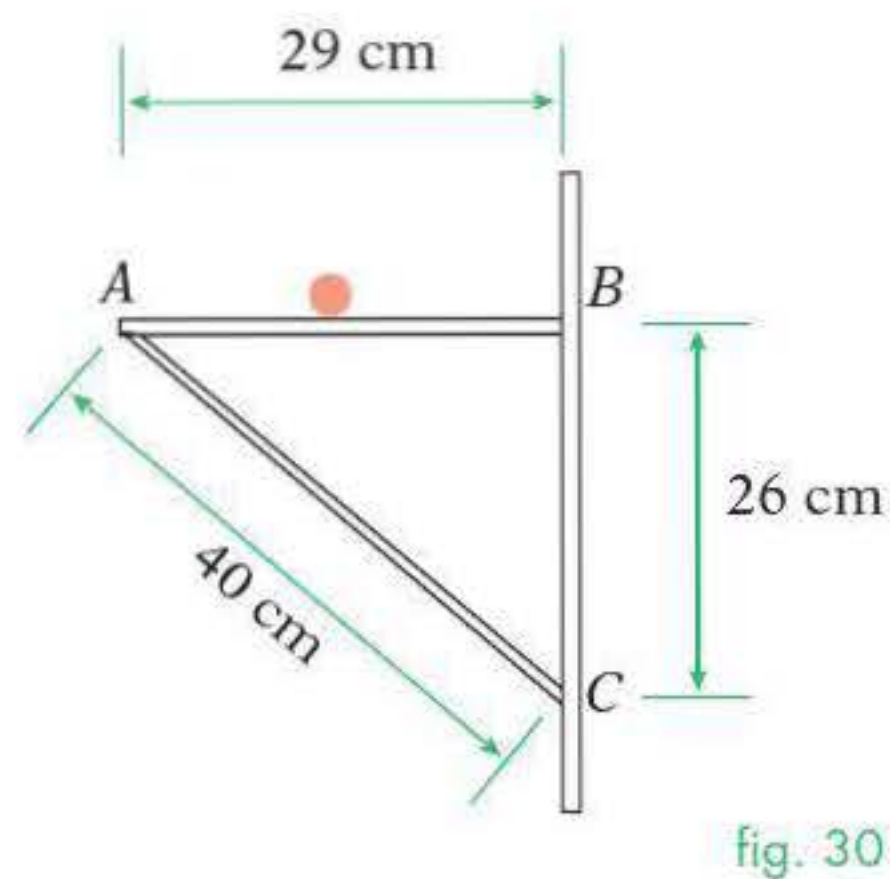


19. La bille sur l'étagère

Sébastien fabrique une étagère. Il réalise un plan sur lequel il indique les mesures à prendre (fig. 30).

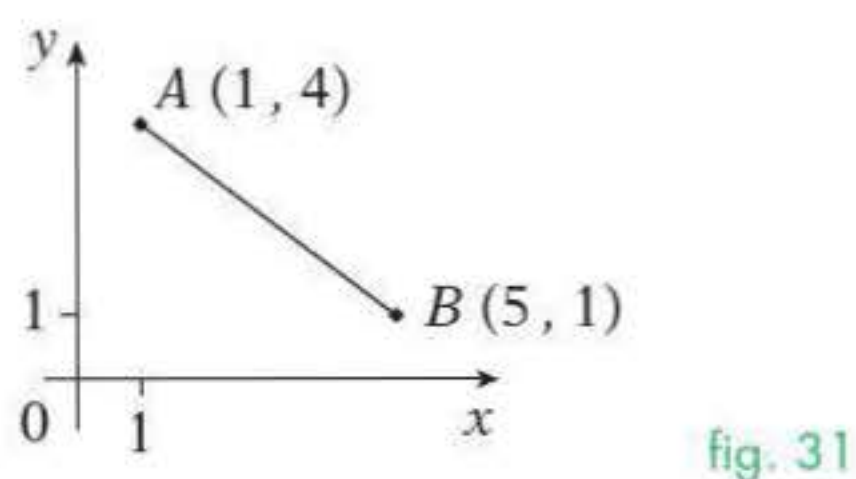
Une fois l'étagère montée, il y dépose une bille.

Celle-ci reste-t-elle en place ?



20. Distances dans un repère cartésien

a. Calculer la distance entre A et B dans l'unité du repère.



- b. Calculer les distances $a, b, c, d, e,$ et f dans l'unité du repère.

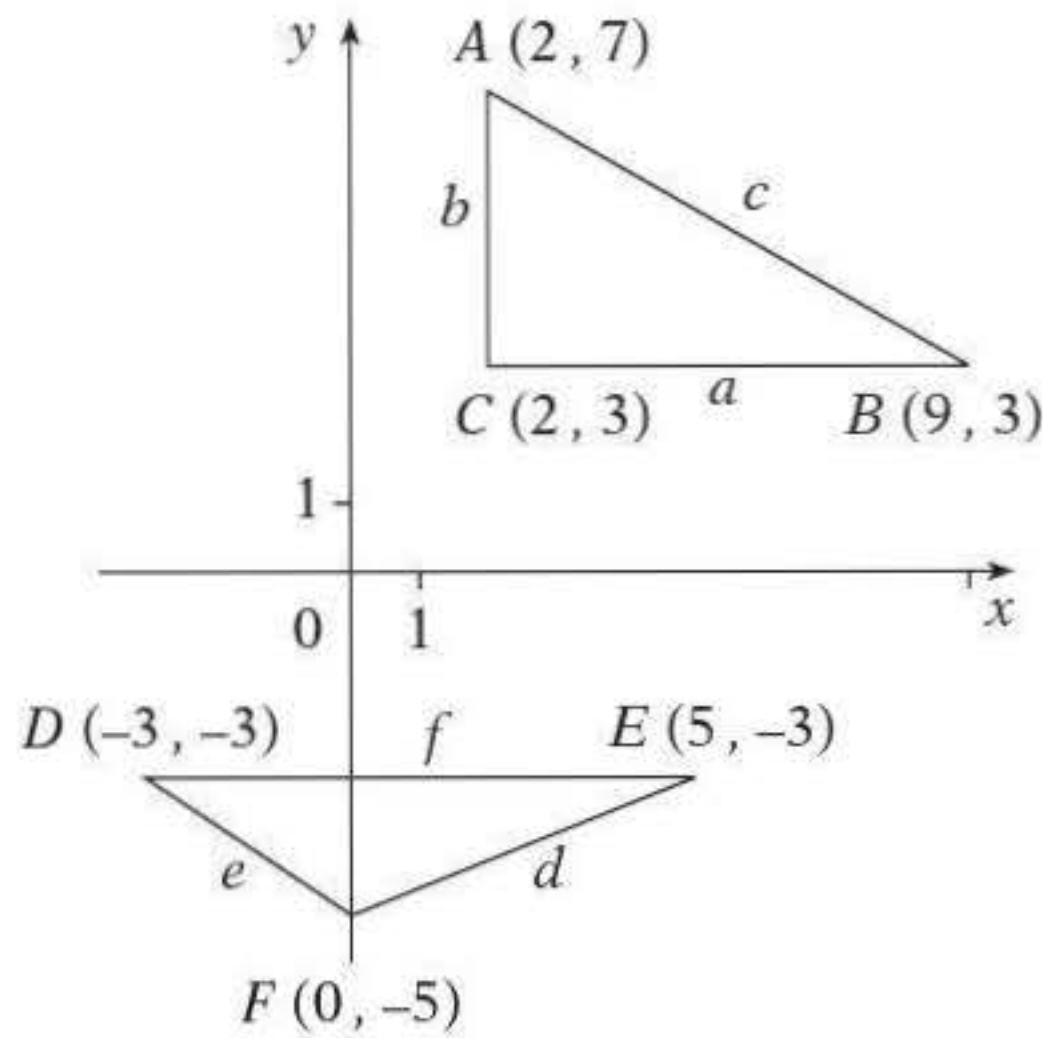


fig. 32

- c. Calculer la mesure des côtés du triangle dans l'unité du repère.

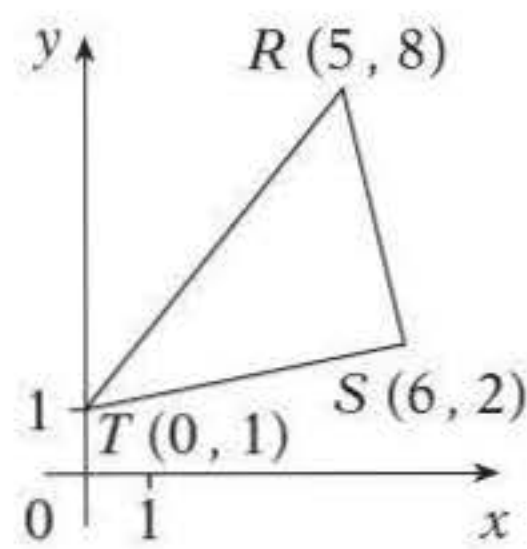


fig. 33

- d. Dans un repère orthonormé, on place les points $A(-1 ; 3)$, $B(-1,5 ; 3)$, $C(3 ; 1)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?
- e. Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), placer les points $A(8 ; 5)$, $B(-2 ; -1)$ et $C(5 ; 10)$.
- Calculer $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
 - Vérifier que le triangle ABC est rectangle et calculer son aire.
 - Quelle est la mesure de la hauteur relative au côté $[BC]$?

21. Diagonales perpendiculaires

Dans le quadrilatère $ABCD$ (fig. 34), les diagonales se coupent perpendiculairement en O . Démontrer que

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2.$$

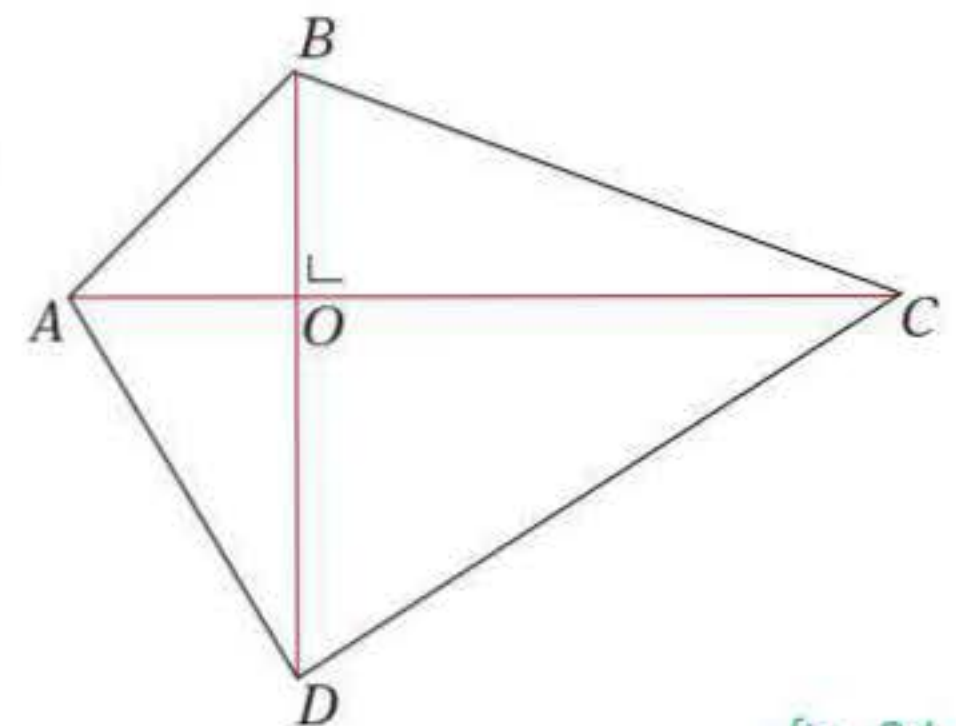


fig. 34

22. Un quadrilatère en moins

Reproduire la fig. 35 d'après les données mentionnées.

Calculer l'aire de la surface colorée.

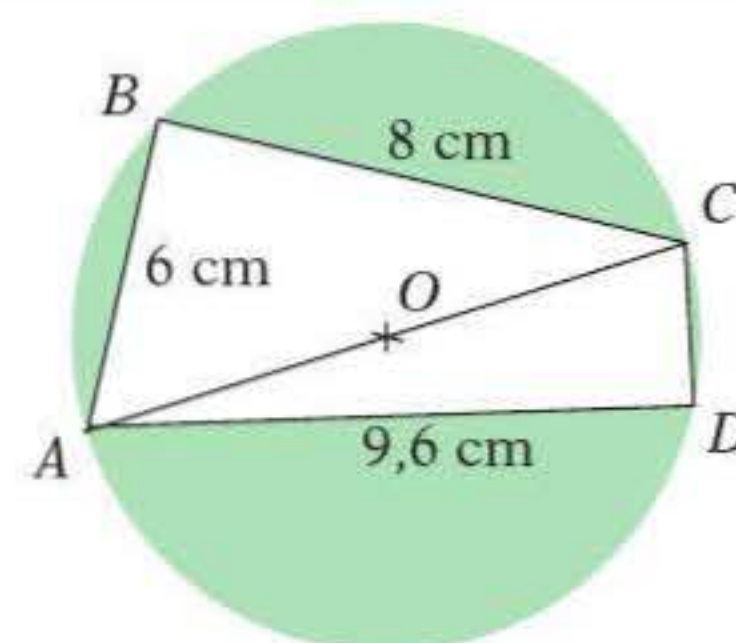


fig. 35

23. Deux cercles se coupent

Deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dont les centres O_1 et O_2 sont distants de 44 cm. Le cercle \mathcal{C}_1 a un rayon de 37 cm, le cercle \mathcal{C}_2 un rayon de 15 cm. Ils se coupent en deux points A et B. Quelle est la distance \overline{AB} ?

Indications

Utiliser les deux triangles rectangles dont h est un côté de l'angle droit.

Repérer le côté dont la longueur est $(44 - x)$.

Écrire h^2 de deux façons différentes (dans chacun des deux triangles).

En déduire une équation en x .

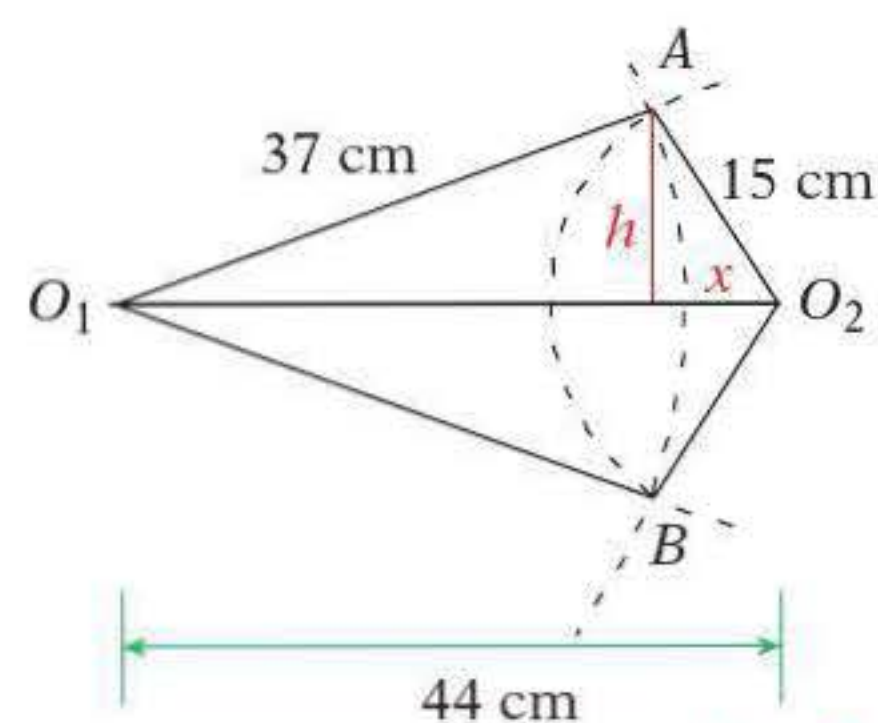


fig. 36

Pour aller plus loin

24. Une hauteur irrationnelle

Une pyramide a pour base un carré de 6 cm de côté et pour hauteur $\sqrt{17}$ cm. Toutes les faces sont des triangles isocèles. Construire le développement de cette pyramide.

25. L'aire du toit

On coupe un toit suivant le plan ABC.

- Représenter la section.
- Quelle est la hauteur du toit ?
- Quelle est l'aire du toit ?

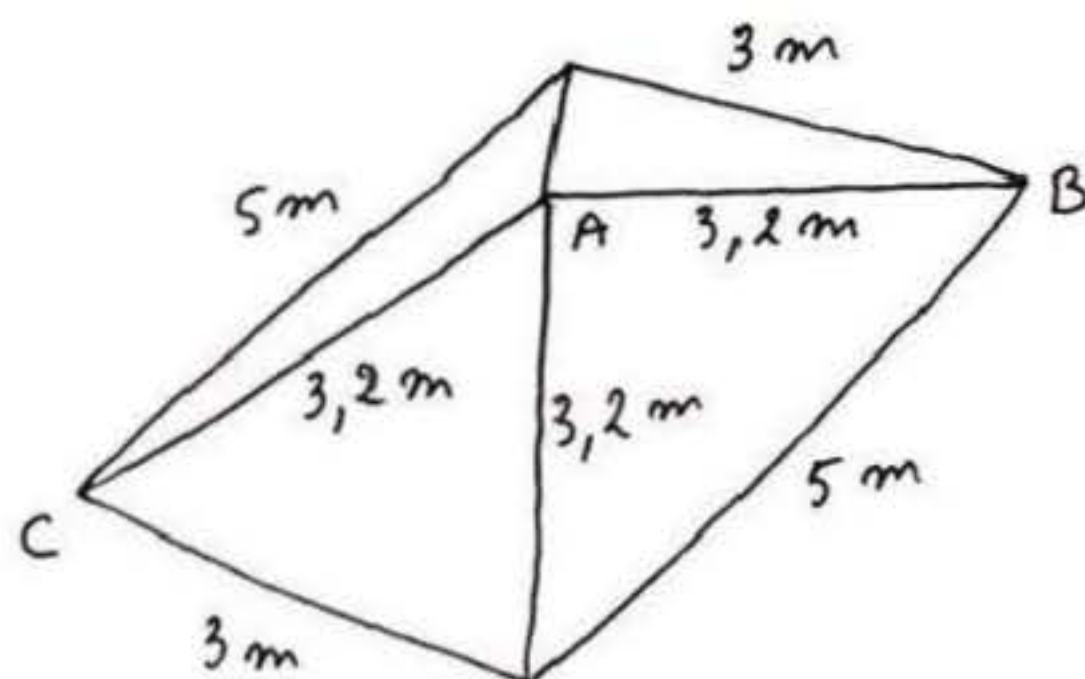


fig. 37



26. Le clocher

Est-il possible de calculer l'aire de la toiture d'un clocher qui a la forme d'une pyramide régulière dont chaque face latérale est un triangle isocèle ayant deux côtés de 8 mètres et dont la base est un hexagone régulier de 4 mètres de côté (ne pas tenir compte des ouvertures) ?

Si la réponse est affirmative, calculer l'aire au dm^2 près.



27. La ligne d'horizon

Quelqu'un regarde la mer depuis un rocher bordant la plage. Les yeux sont à une hauteur de 4 mètres au-dessus du niveau de la mer. À quelle distance se trouve la ligne d'horizon, sachant que le rayon de la Terre est 6400 km ?

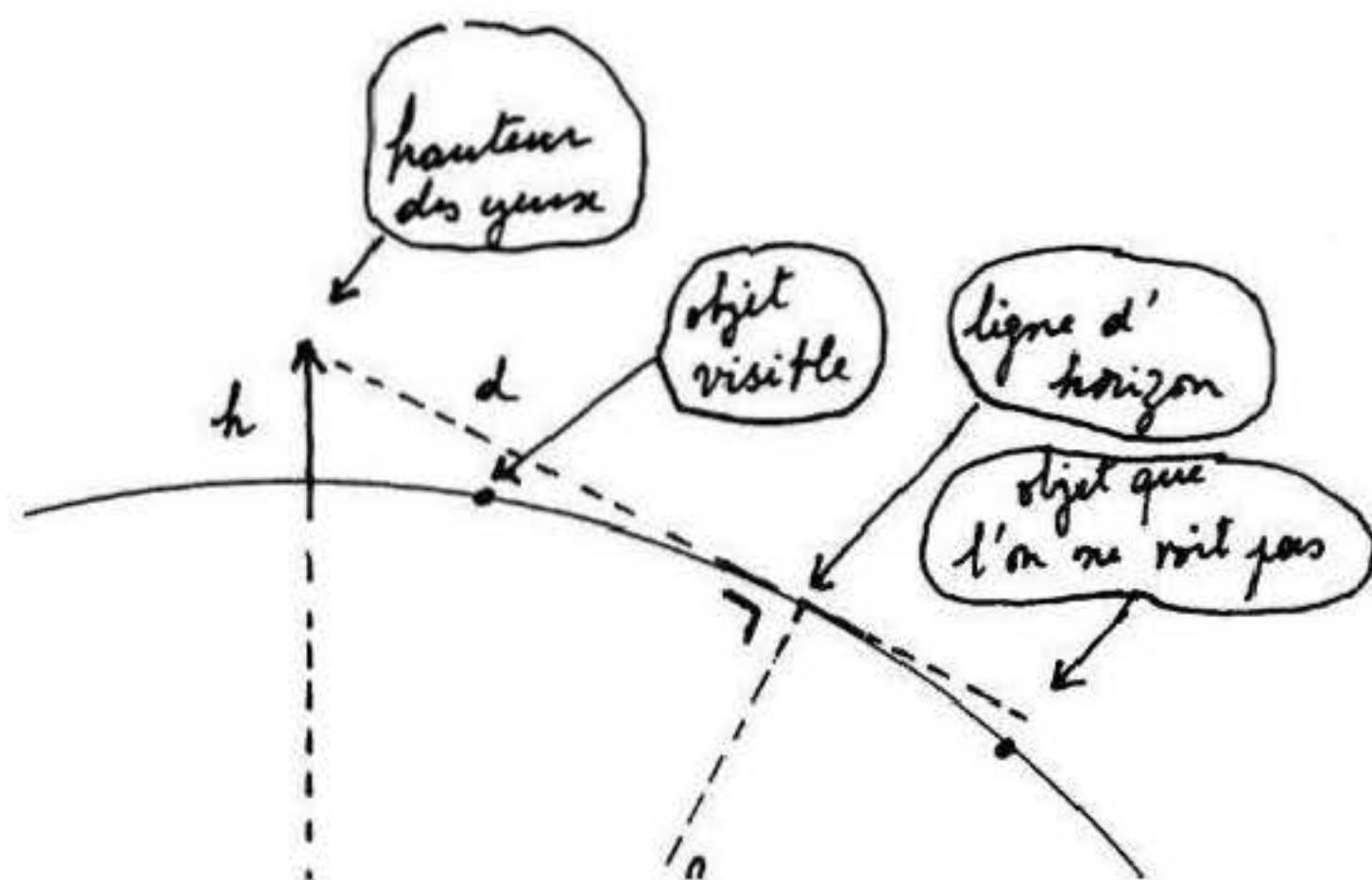


fig. 38

28. Triangle rectangle et... isocèle

Démontrer que si l'aire d'un triangle rectangle vaut le quart du carré de son hypoténuse, alors ce triangle rectangle est isocèle.

Indications

Utiliser la formule de l'aire du triangle, la relation de Pythagore, la manipulation d'une équation (pour que le deuxième membre soit 0), la factorisation d'un trinôme.

9 projection parallèle et configurations de Thalès

Un faisceau de rayons solaires constitue un réseau de parallèles très dense et la plupart du temps invisible ! On considère en effet que, le Soleil étant très éloigné de la Terre, les rayons arrivant sur un objet sont parallèles. C'est en tablant sur l'observation des ombres au soleil que Thalès, six siècles avant J.-C., est arrivé à déterminer à partir du sol, sans y monter, la hauteur de la pyramide de Khéops. En référence à la méthode utilisée par Thalès, les diverses configurations géométriques qui présentent des réseaux de parallèles sont appelées **configurations de Thalès**.

La **projection parallèle** modélise l'ombre au soleil. La direction de la projection correspond à celle des rayons solaires. On peut repérer cette direction en traçant sur la photo (fig. 1) la droite qui passe par un point de l'objet et l'ombre de ce point.

Dans ce chapitre, on apprend à utiliser les rapports et proportions pour calculer des longueurs et des distances, on découvre un nouveau critère de parallélisme.

On apprend aussi à traduire un énoncé par un dessin, à poser l'hypothèse et la thèse, à démontrer.

La synthèse expose une démonstration du fameux théorème de Thalès ainsi que celle de sa réciproque.

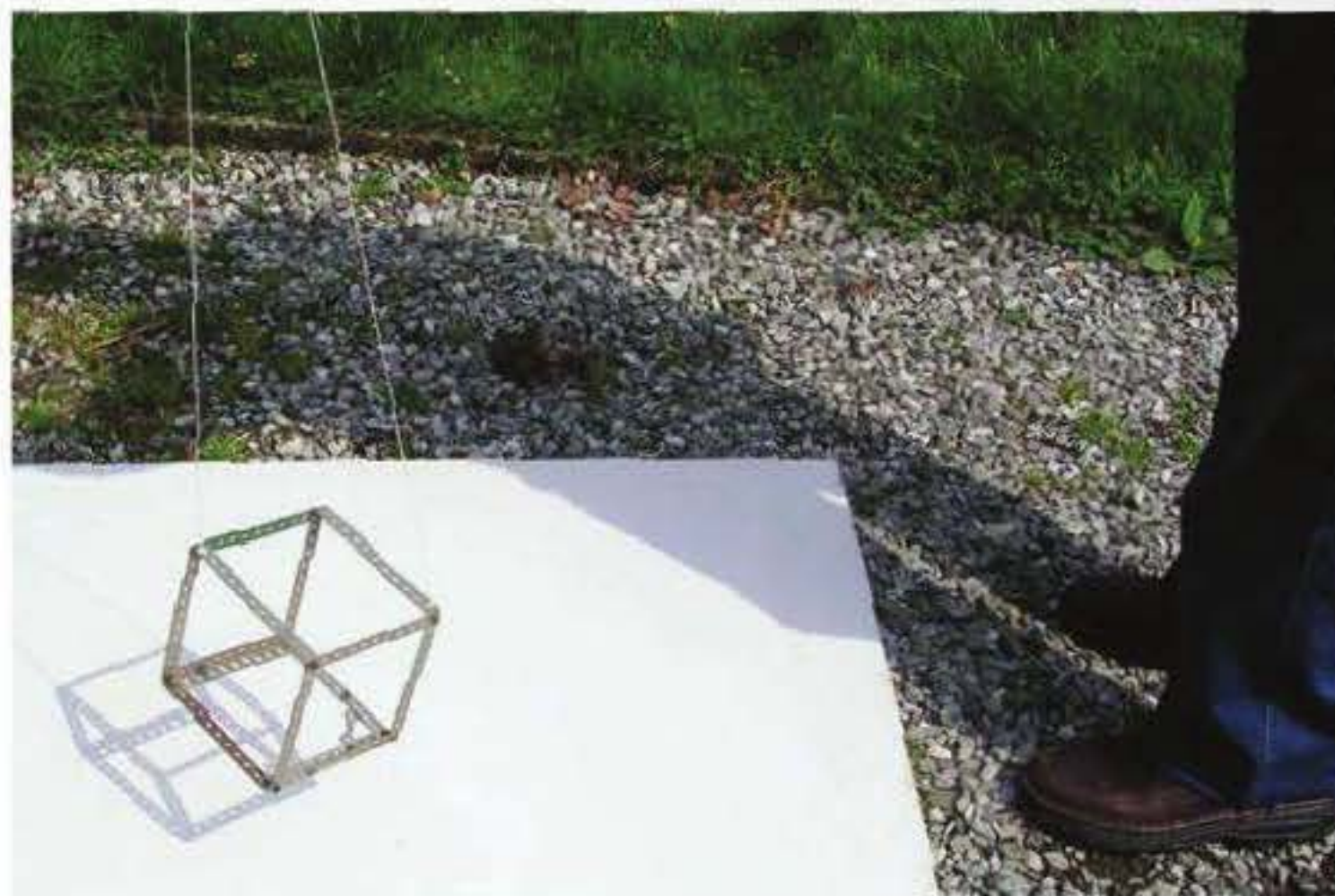


fig. 1

On remarque que les arêtes du cube qui sont parallèles entre elles ont des ombres qui sont aussi parallèles entre elles. Les règles du dessin en perspective cavalière sont celles de la projection parallèle : les parallèles sur l'objet sont représentées par des parallèles. C'est pour cette raison que cette perspective est aussi appelée « perspective parallèle ».

1. En perspective parallèle

Le dessin d'un cube de Rubik est ébauché à la fig. 2.

- Dessiner un autre cube en perspective parallèle dont l'arête de la face frontale mesure 6 cm.
- Partager la face frontale en mesurant puis achever le dessin sans rien mesurer. Utiliser des instruments adéquats (règle non graduée et une équerre par exemple) pour tracer des parallèles.

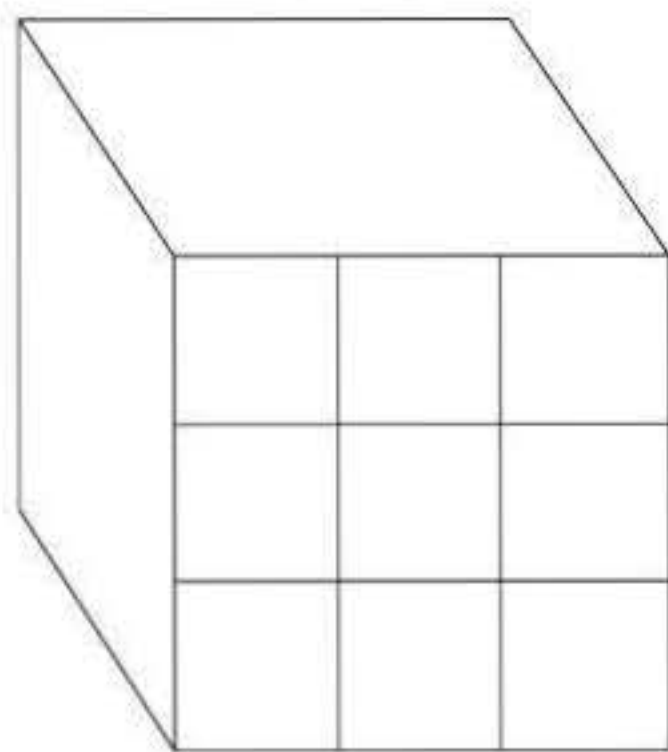
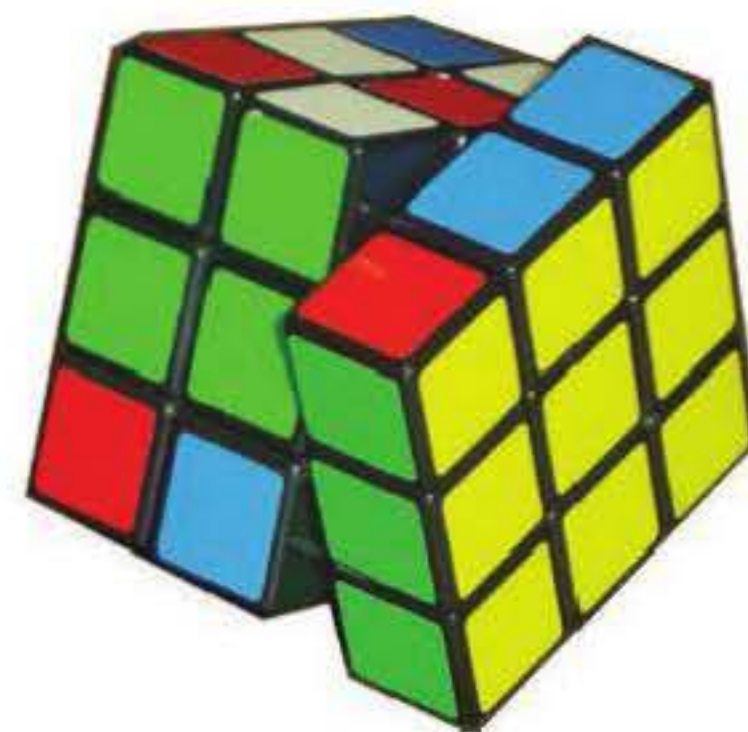


fig. 2

Indication

Une propriété guide la construction : la diagonale de chaque face du cube passe par les nœuds du quadrillage.



2. Rapports égaux, segments proportionnels

- D'après la fig. 3, compléter le tableau suivant¹.

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{3}{7}$	$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} =$
$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} =$	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} =$

- Écrire les proportions que l'on peut déduire de ces égalités.
- Si \overline{OA} mesure 18 cm et $\overline{OA'}$ 12 cm, quelles sont les mesures des segments \overline{OB} et $\overline{OB'}$? Écrire les mesures au millimètre près.
- Si \overline{OA} mesure 17 cm et $\overline{OA'}$ 10 cm, quelles sont les mesures des segments \overline{OB} et $\overline{OB'}$? Écrire les mesures au millimètre près.

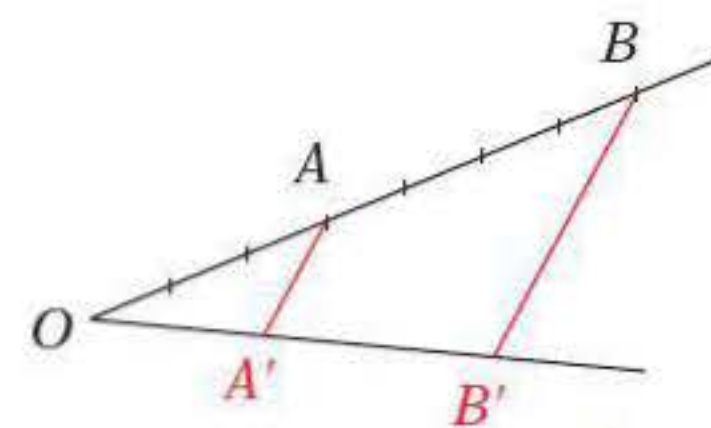


fig. 3

1. Pour ne pas alourdir les notations, dans le contexte des rapports et proportions, certains auteurs désignent par AB tantôt le segment $[AB]$, tantôt sa mesure. Notons que le rapport entre segments peut être défini indépendamment de leur mesure. La rigueur n'impose donc pas de mentionner chaque fois qu'il s'agit d'une mesure.



3. Projeter dans deux directions

a. Se référer à la fig. 4 pour compléter le tableau suivant.

$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{7}{10}$	$\frac{\overline{AF''}}{\overline{AD}} =$
$\frac{\overline{CF'}}{\overline{CA}} =$	$\frac{\overline{F'F}}{\overline{AD}} =$

b. Si les côtés du triangle ACD mesurent respectivement 45 cm, 25 cm et 30 cm, quelles sont les mesures des segments $[CF]$, $[AF'']$ et $[DF'']$?

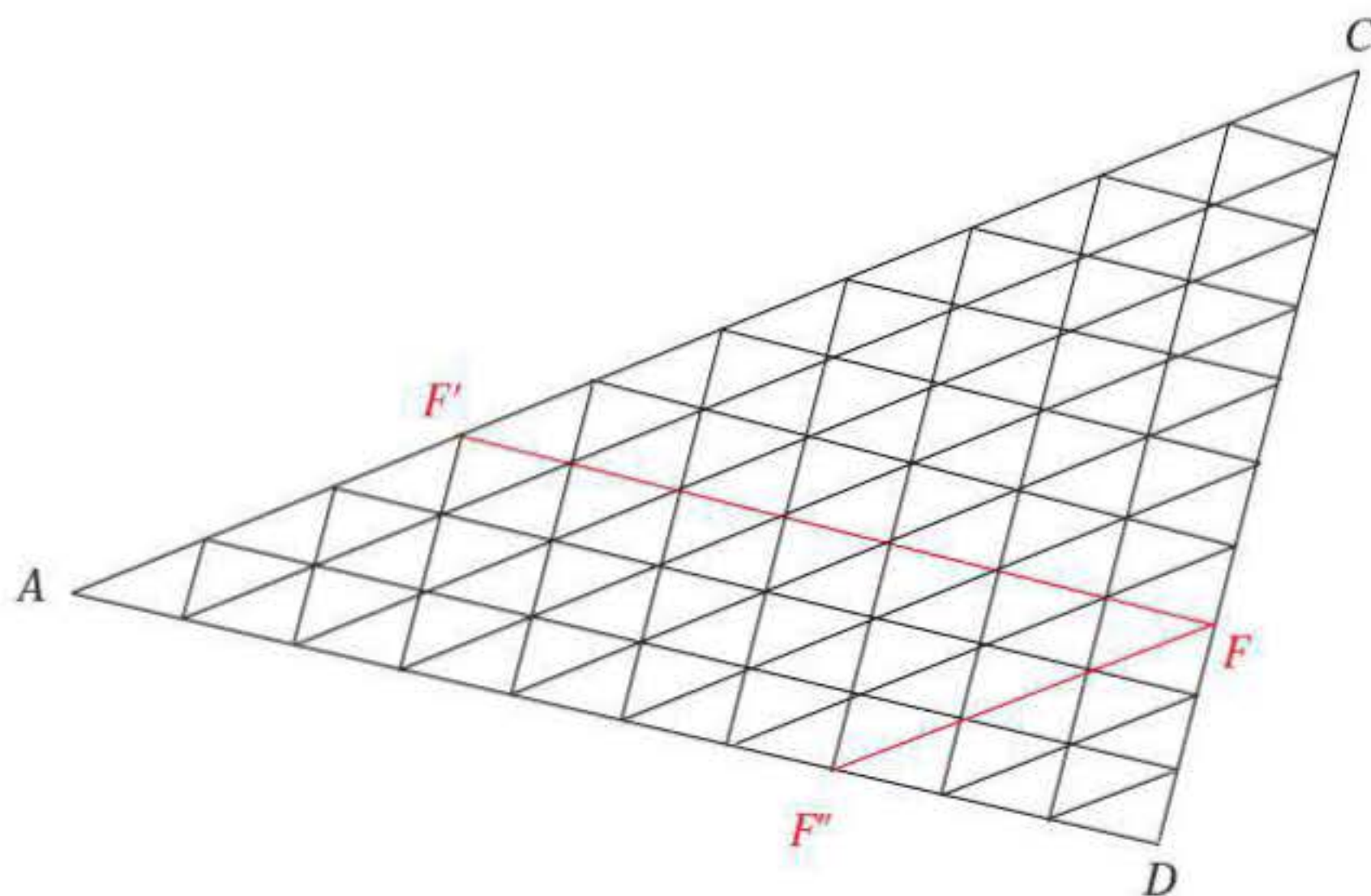


fig. 4

c. Dans la fig. 5, $BF \parallel AE$ et $BD \parallel CE$. Compléter les proportions suivantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} = \frac{\overline{AD}}{\dots}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} = \frac{\overline{EF}}{\dots}$$

Pourquoi sait-on que $\overline{EF} = \overline{BD}$?

On conclut $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$.

On observe que les numérateurs sont les trois côtés du triangle ABD et que les dénominateurs sont les côtés du triangle AEC .

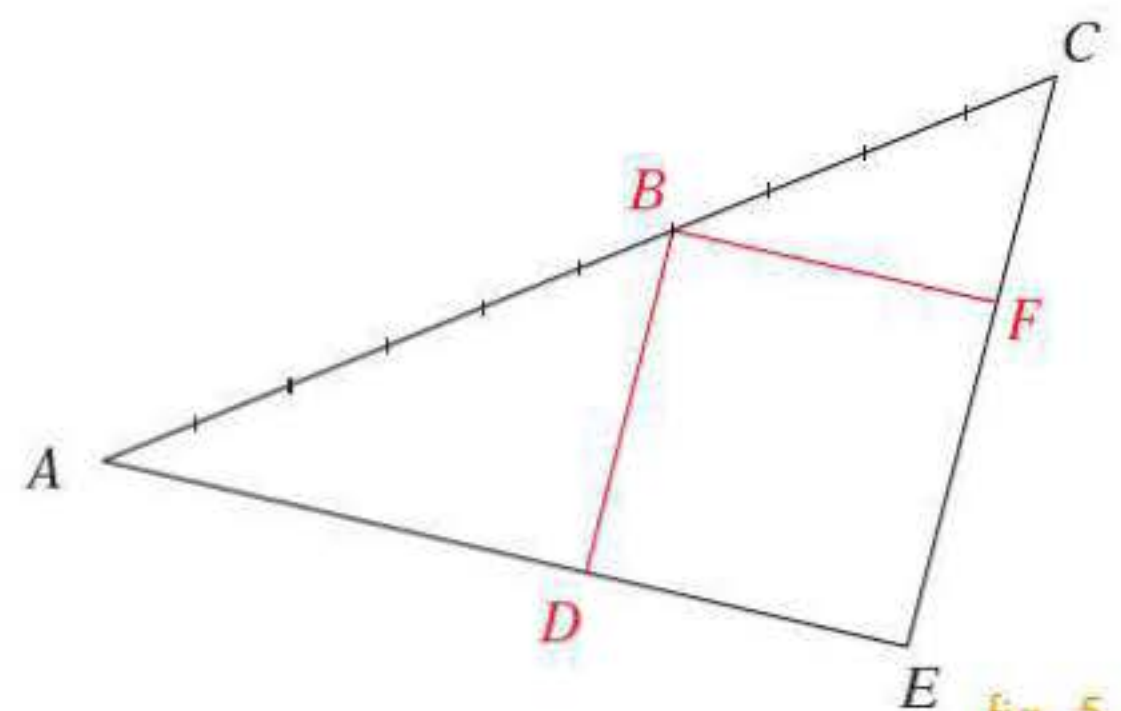


fig. 5

Synthèses 2 et 3
Exercice 5
Fiches 37

4. Les droites sont-elles parallèles ?

- a. Pour agrandir le quadrilatère $ABCD$, Théo choisit un point quelconque qu'il relie à chacun des sommets (fig. 6) : il porte, sur chacune de ces demi-droites, les deux tiers de la distance du point choisi au sommet correspondant.

Il se demande si les côtés du quadrilatère obtenu sont parallèles à ceux du quadrilatère $ABCD$.

Répondre à la question :

- à vue,
- par calcul.

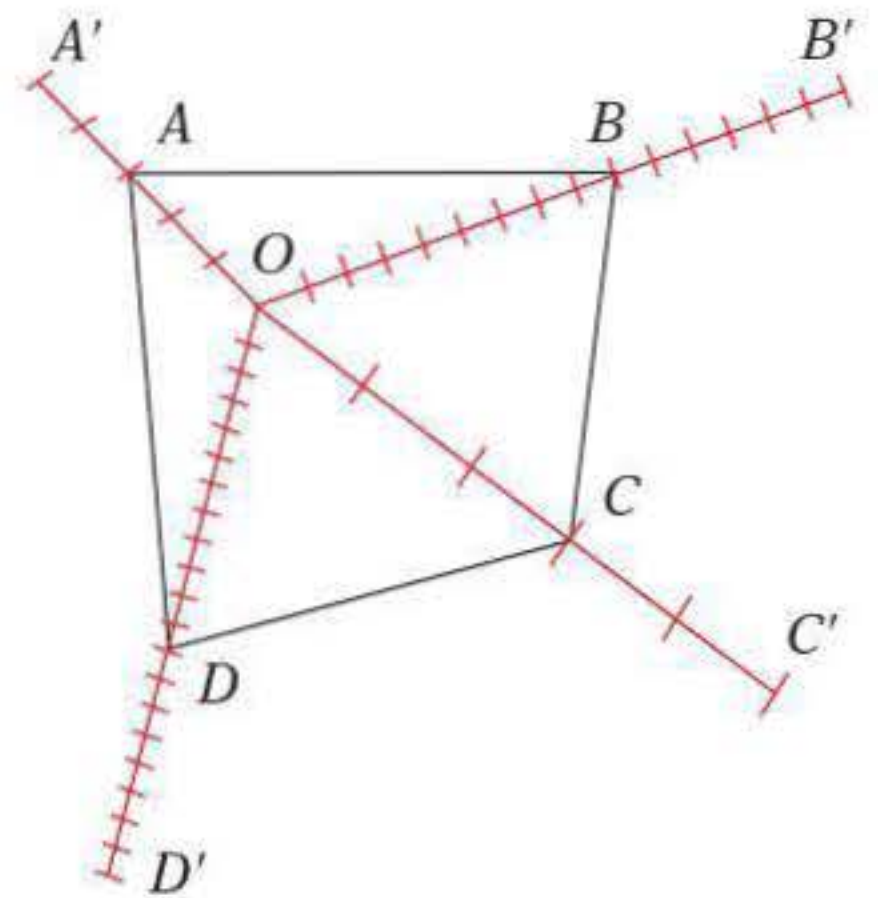


fig. 6

- b. Après avoir répondu à ces questions, Karim affirme : si les rapports $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{OA'}{OB'}$ déterminés sur deux droites sécantes en O sont

égaux, alors les droites AB et $A'B'$ sont parallèles. Le professeur lui répond en dessinant au tableau la fig. 7.

Que faut-il préciser pour que l'énoncé soit complet ?

Cet énoncé, construit à partir d'un exemple, est une **conjecture** : pour s'assurer de sa généralité, il faut le démontrer. C'est l'objet de la synthèse 7.

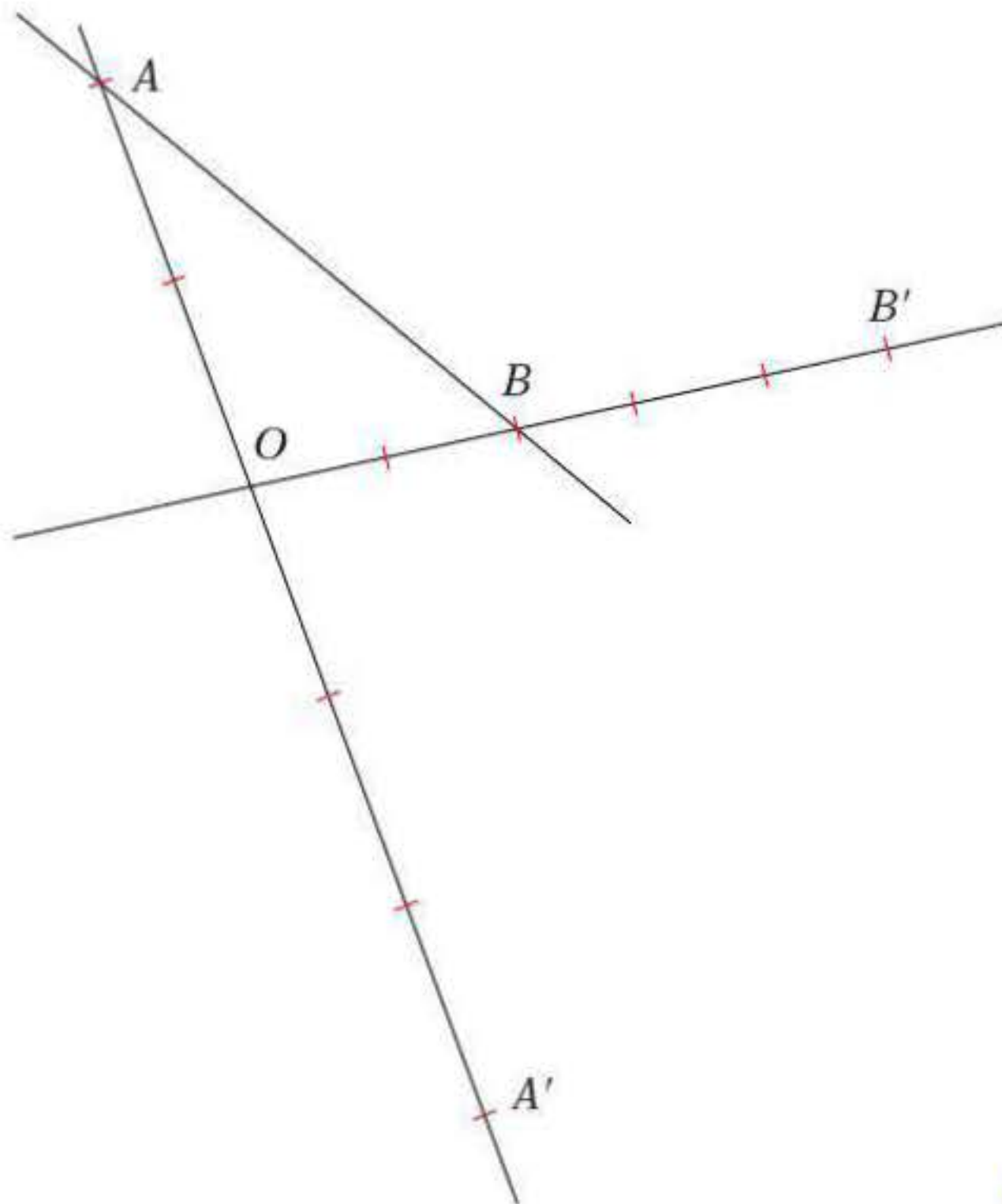


fig. 7



Synthèse 4
Exercices 6 à 15
Fiche 38

1. Comment démontrer que, dans un triangle, une parallèle à un côté détermine sur les deux autres des rapports égaux ?

Cette propriété est attribuée à Thalès (VI^e siècle A.C.N.). Une démonstration qui utilise les aires des triangles en a été donnée par Euclide au III^e siècle A.C.N. Celle proposée ici repose sur les aires de parallélogrammes. On se trouve donc à nouveau en présence d'une propriété de longueurs dont la démonstration utilise des aires (rappelons-nous Pythagore !).

Hypothèse

Dans le triangle OAB , la droite CD est parallèle à AB .

Thèse

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

Démonstration

1) Par O , menons la parallèle à AB et par B , la parallèle à OA ; elles se coupent en T (fig. 9).

$$\text{On a } \frac{\text{Aire } CUTO}{\text{Aire } ABTO} = \frac{\overline{OC} \cdot h_1}{\overline{OA} \cdot h_1} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

2) Par O , menons la parallèle à AB et par A , la parallèle à OB ; elles se coupent en R (fig. 10).

$$\text{On a } \frac{\text{Aire } SDOR}{\text{Aire } ABOR} = \frac{\overline{OD} \cdot h_2}{\overline{OB} \cdot h_2} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

3) Les parallélogrammes $CUTO$ et $SDOR$ ont même base, même hauteur et donc même aire.

Les parallélogrammes $ABTO$ et $ABOR$ ont même base, même hauteur et donc même aire.

$$\text{On conclut } \frac{\text{Aire } CUTO}{\text{Aire } ABTO} = \frac{\text{Aire } SDOR}{\text{Aire } ABOR}$$

$$\text{Et finalement } \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

Cqfd

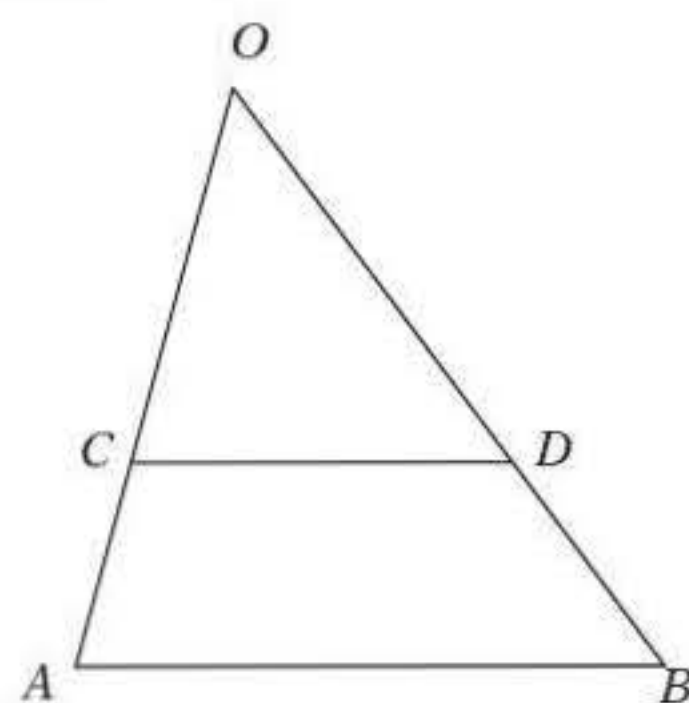


fig. 8

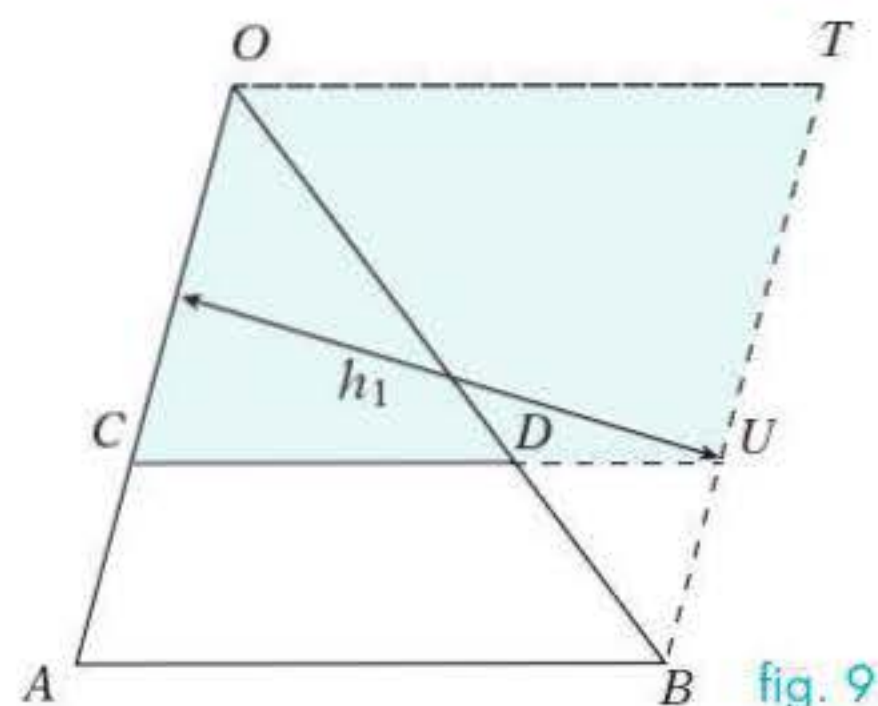


fig. 9

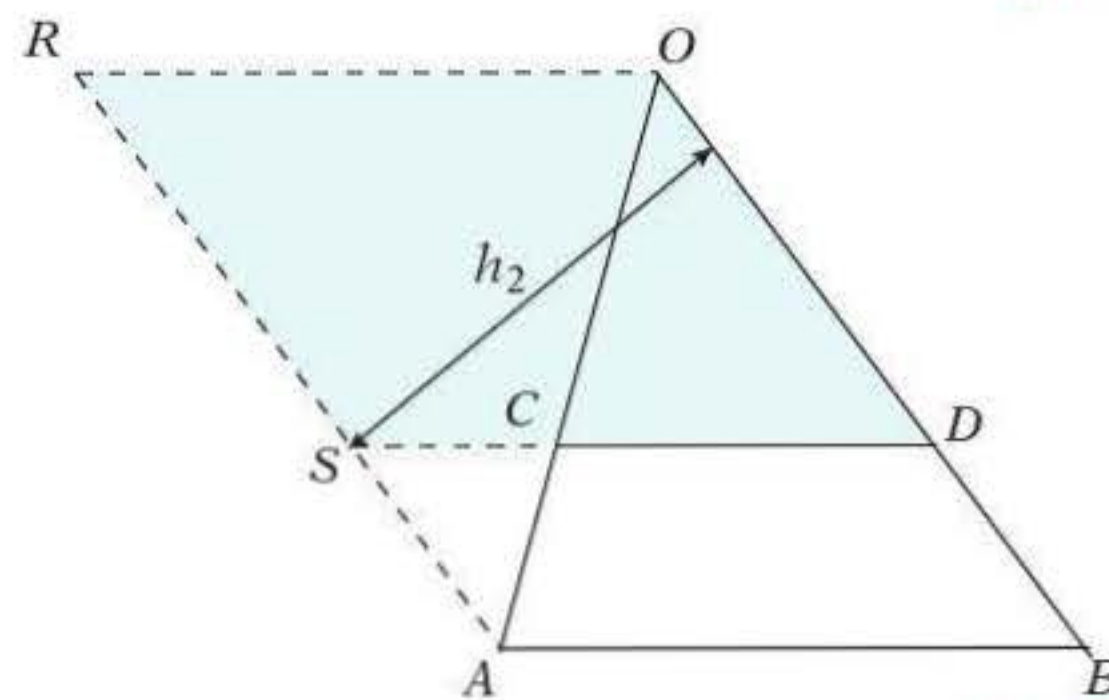


fig. 10

Énoncé 9.1

Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments homologues proportionnels.

2. Et les troisièmes côtés ?

Cette propriété concerne les segments déterminés sur les parallèles elles-mêmes. Montrons que dans le triangle OAB (fig. 11) dans lequel CD est parallèle à AB , on a la proportion :

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Hypothèse

Dans le triangle OAB , la droite CD est parallèle à AB .

Thèse

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

Démonstration

Par D , menons la parallèle à OA . Elle coupe AB en E .

La propriété de Thalès dans le triangle OBA conduit à

$$\text{écrire } \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}.$$

Par hypothèse et par construction, le quadrilatère $CDEA$ est un parallélogramme. Donc $\overline{AE} = \overline{CD}$.

Conclusion

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

Cqfd

Cette égalité associée à celle qui a été établie précédemment complète la propriété des projections parallèles.

Dans la fig. 11, on a donc trois rapports égaux :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Les numérateurs de cette fraction sont les côtés du triangle OCD , les dénominateurs sont les côtés du triangle OAB .

Énoncé 9.2

Si on mène une parallèle à un côté d'un triangle, on détermine un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels au triangle donné.

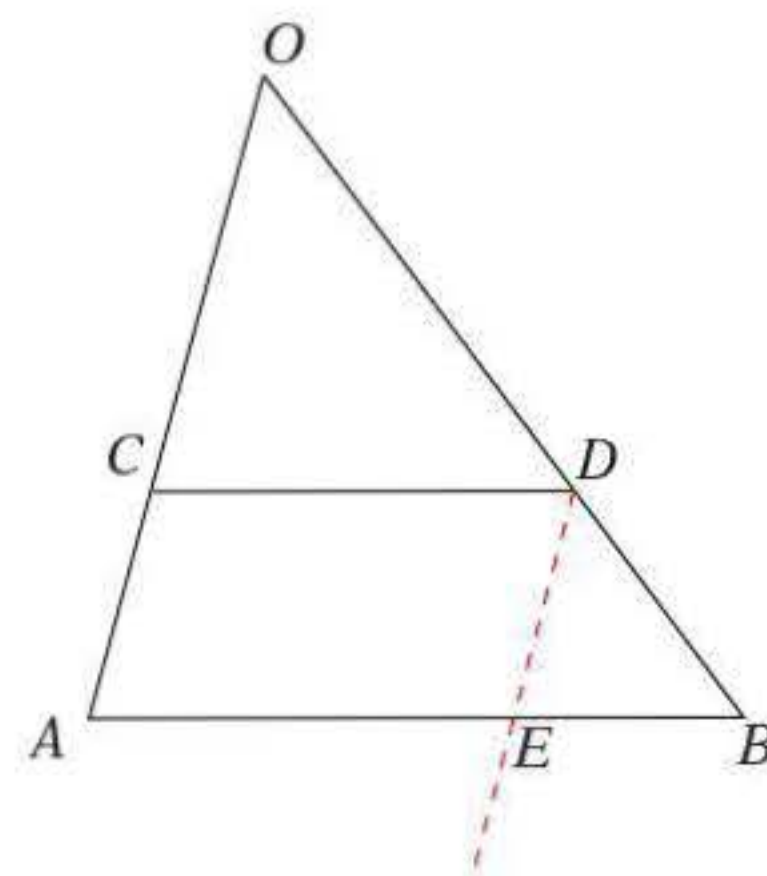


fig. 11

3. Comment repérer des rapports égaux dans une configuration de Thalès ?

Il s'agit d'associer à chaque configuration-type une ou plusieurs proportions.

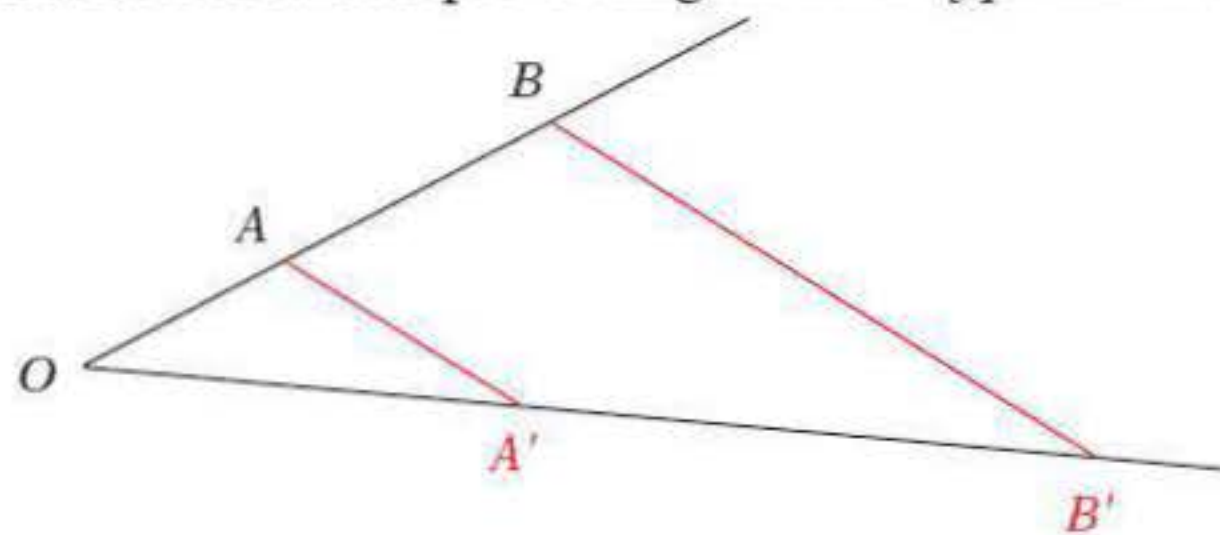


fig. 12

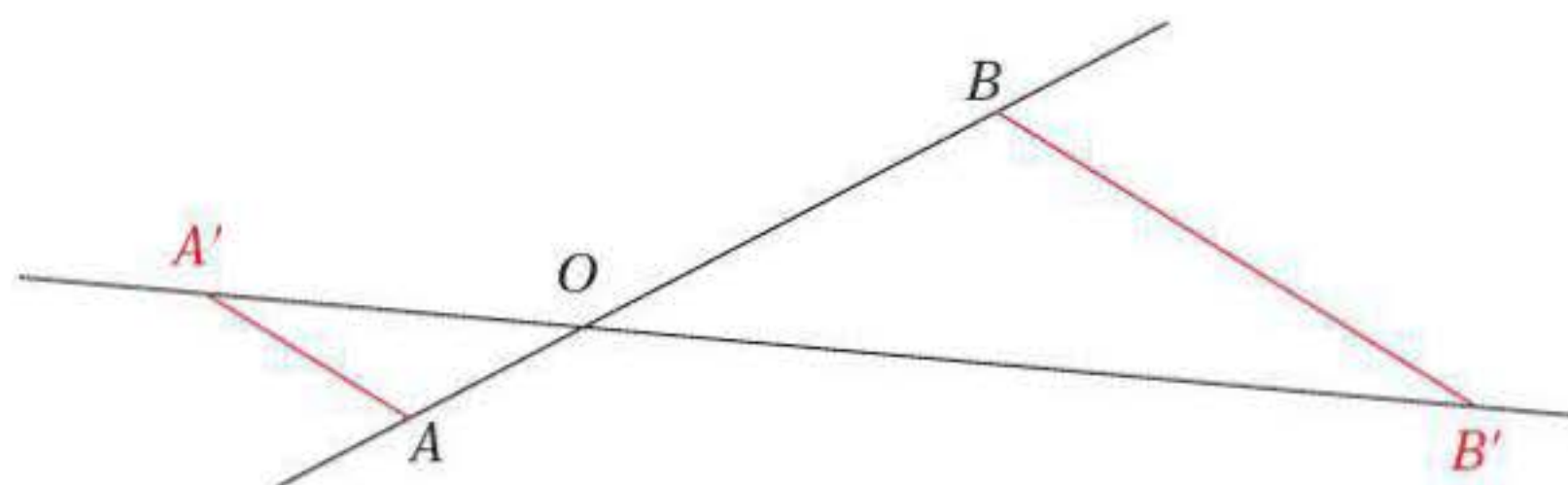


fig. 13

Pour ces deux configurations, on a

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

On observe que les numérateurs sont les côtés du triangle AOA' et les dénominateurs sont les côtés du triangle BOB' .

On peut aussi écrire

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

Dans la fig. 14, on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

On a aussi

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

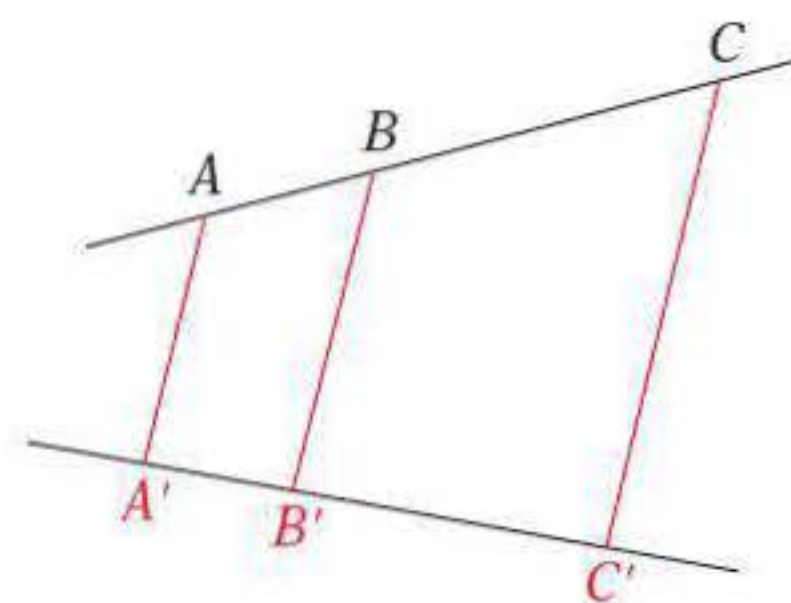


fig. 14

Énoncé 9.3 (appelé « théorème de Thalès »)

Si un réseau de parallèles est coupé par deux transversales, les rapports entre segments inclus à une transversale sont égaux aux rapports correspondants sur l'autre.

4. Comment démontrer qu'une conservation de rapport entraîne le parallélisme ?

L'énoncé ci-après est appelé **réciproque du théorème de Thalès**. Il se réfère aux notations des fig. 15 et 16.

Énoncé 9.4

Si les points O, C, A d'une part et les points O, D, B d'autre part sont alignés dans le même ordre, et si

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}},$$

alors les droites AB et CD sont parallèles.

Hypothèse

Dans le triangle OAB , on a

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} \quad (1)$$

Thèse

$CD \parallel AB$

Démonstration

Supposons que CD ne soit pas parallèle à AB .

Dans ce cas, menons par C la parallèle à AB qui coupe AB en E . Par Thalès, on a

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on tire

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}.$$

Ces fractions ont même dénominateur, les numérateurs sont donc égaux et E est confondu avec D . La droite CD doit donc être parallèle à AE .

Cqfd

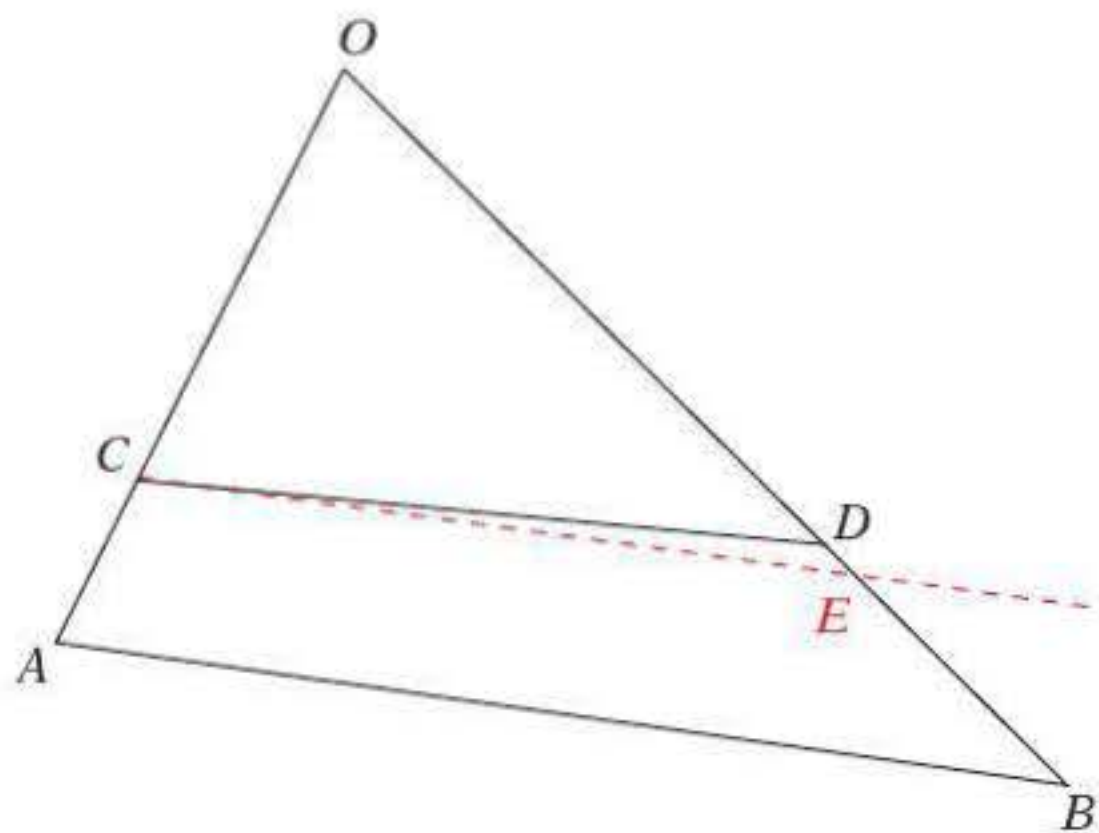


fig. 15

Cette figure montre une situation dans laquelle les points A et C d'une part, B et D d'autre part, sont situés d'un même côté du point O .

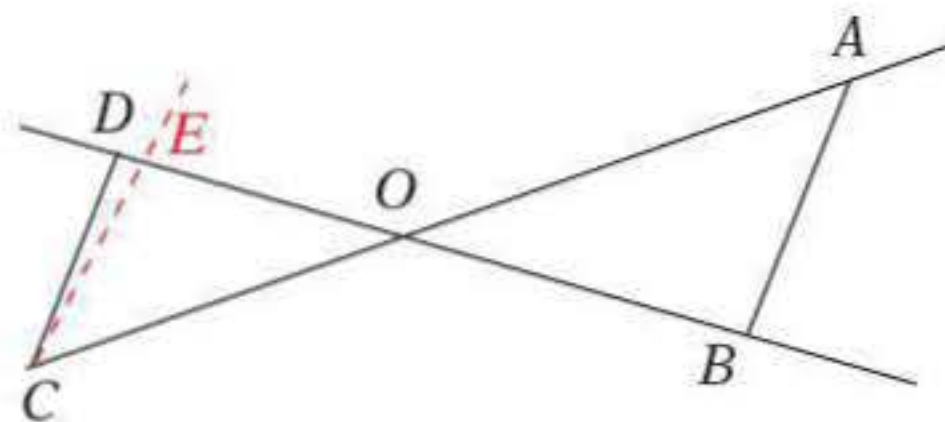


fig. 16

Dans cette figure, le point O est situé entre les points A et C d'une part et entre les points B et D d'autre part.

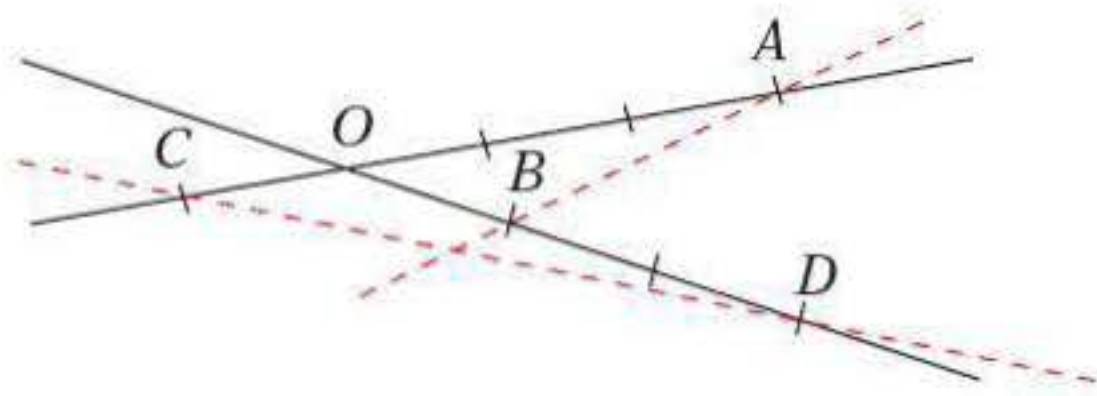


fig. 17

Ici, le point commun aux deux droites (le point O) est entre A et C mais il est situé d'un même côté par rapport aux points D et B . Les conditions de l'énoncé ne sont donc pas respectées.

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Déterminer le rapport

- Calculer le rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ (fig. 18).
- Repérer un rapport égal à $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Écrire la proportion correspondante.
- Calculer le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.
- Repérer un rapport égal à $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Écrire la proportion correspondante.

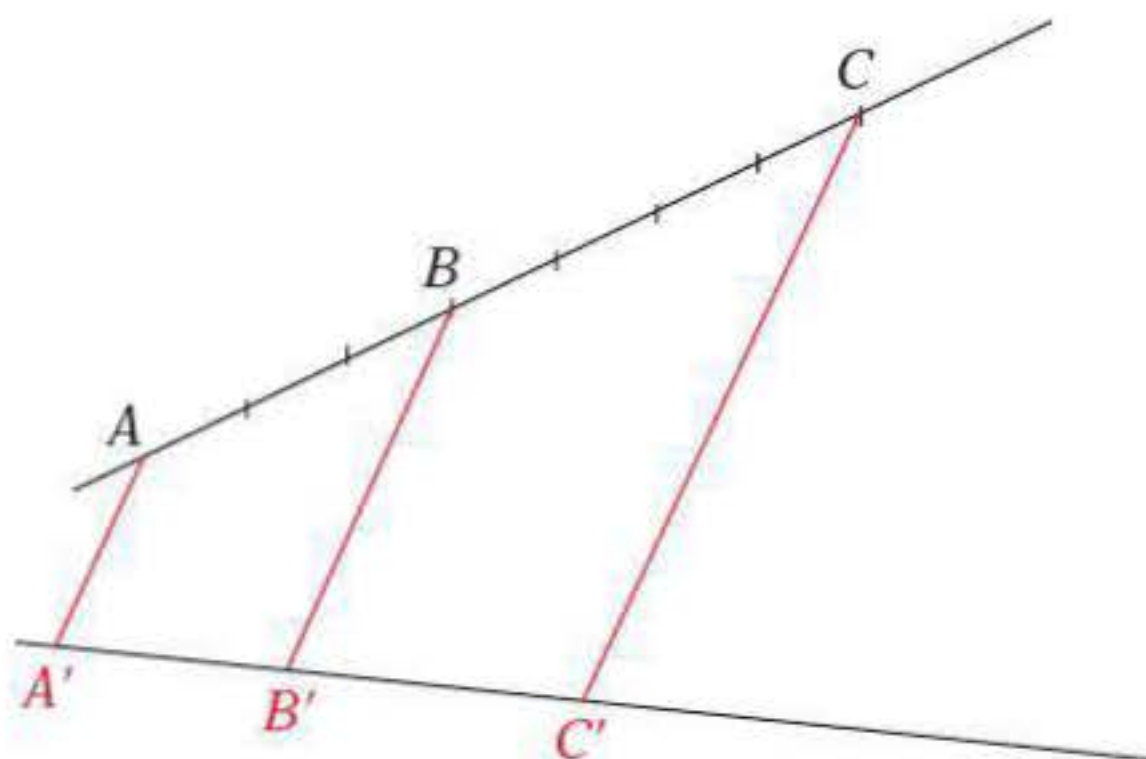


fig. 18

2. Dessiner et calculer

Soit un triangle OAB dans lequel $\overline{OA} = 6$ et $\overline{AB} = 3$. On place un point X sur \overline{OA} tel que $\overline{OX} = 5$. On construit la parallèle à AB passant par X , elle coupe OB en Y .

Réaliser un dessin qui corresponde aux données.

Calculer \overline{XY} . Citer la propriété utilisée.

3. Double configuration

Sur la fig. 19, les droites tracées en rouge sont parallèles entre elles et les droites tracées en vert aussi.

- Quels sont les triangles dont les longueurs sont proportionnelles ?
- Écrire quatre rapports égaux à $\frac{\overline{OA}}{\overline{OX}}$.

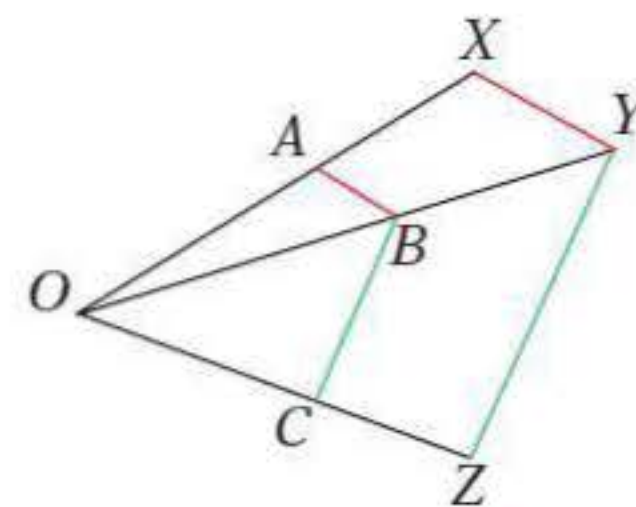


fig. 19

4. Rapports en série...

Sur la fig. 20, on a tracé $DE \parallel AC$ et $EF \parallel AB$. Compléter les égalités suivantes.

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\dots} = \frac{\overline{CE}}{\dots} = \frac{\overline{CF}}{\dots}$$

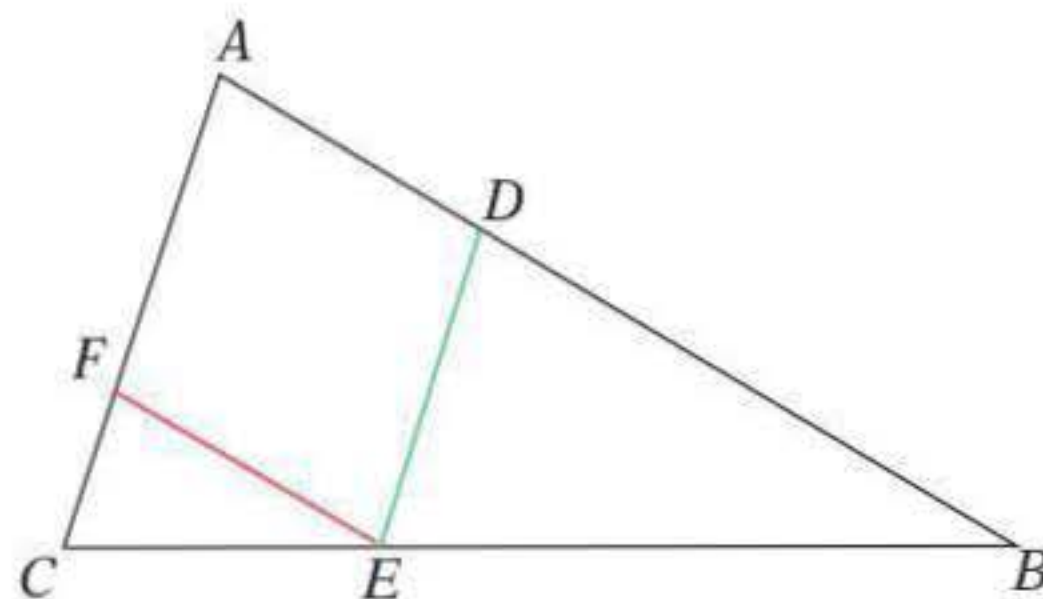


fig. 20

5. Vérifier si deux droites sont parallèles (exercice partiellement résolu)

En se référant aux notations de la fig. 21, vérifier si $AC \parallel BD$.

a. Lorsque $\overline{OB} = 11,25$ cm, $\overline{OC} = 4$ cm, $\overline{OA} = 5$ cm et $\overline{OD} = 9$ cm.

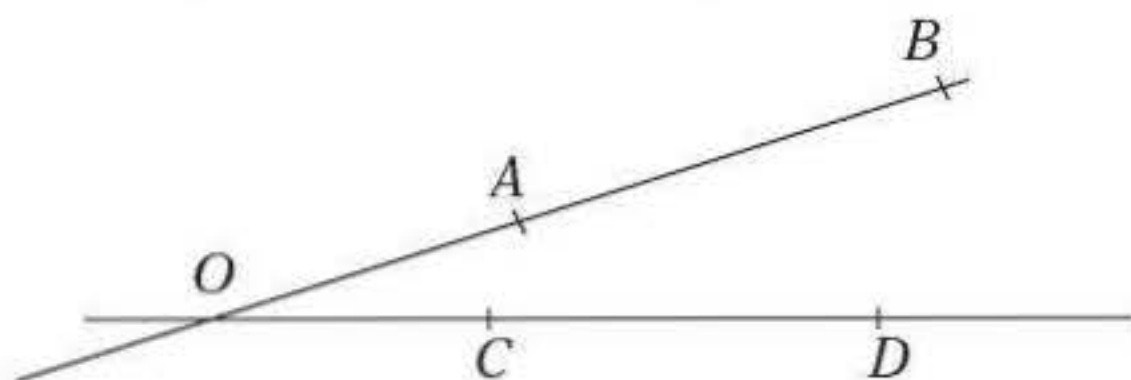


fig. 21

1) Ordre des points

Les points A et B d'une part et C et D d'autre part sont situés d'un même côté du point O.

2) Comparaison des rapports $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ et $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$;

$$\text{On a } \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{5}{11,25} = \frac{4}{9} \text{ et } \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{4}{9}.$$

3) Conclusion

Comme les points sont situés dans le même ordre et que les rapports $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ et $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ sont égaux, les droites AC et BD sont parallèles.

b. Lorsque $\overline{OB} = 12$ cm, $\overline{OC} = 4$ cm, $\overline{OA} = 5$ cm et $\overline{OD} = 11$ cm.

6. Une autre configuration

En se référant aux indications de la fig. 22, vérifier si $AC \parallel DB$.

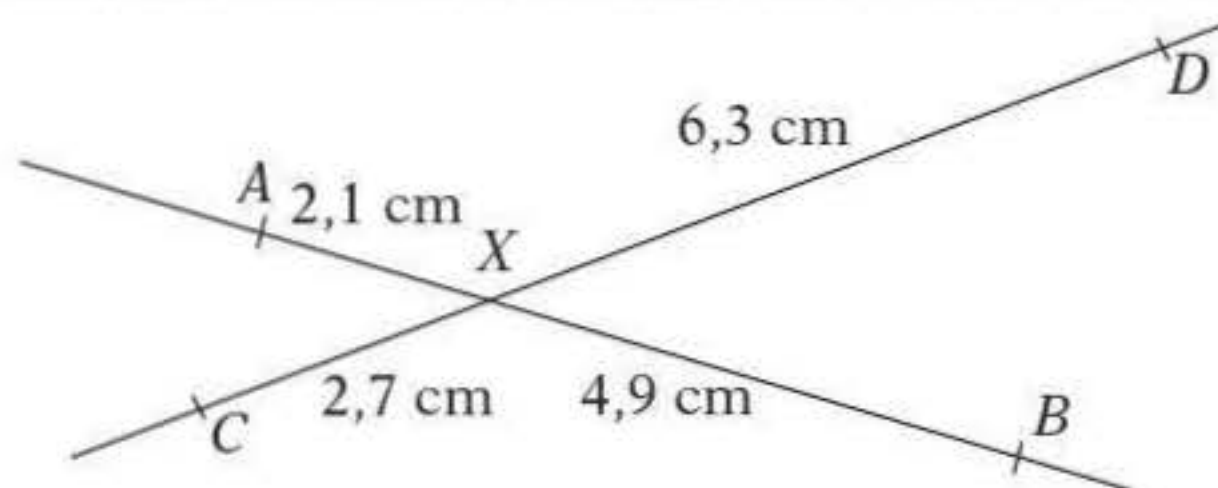


fig. 22

Appliquer une procédure

7. Dans un repère

Placer les points $A(1; 1)$ et $B(5; 6)$ dans un repère (mêmes unités sur les deux axes) et partager ce segment en trois parties égales. Déterminer les coordonnées des deux points de partage.

8. Les renseignements sont sur la figure

- a. D'après les renseignements donnés par la fig. 23, calculer \overline{XY} .
- b. D'après les renseignements donnés par la fig. 24, calculer \overline{ED} .
- c. Si $\overline{AA'} = 7,7$ cm (fig. 25), calculer $\overline{BB'}$.

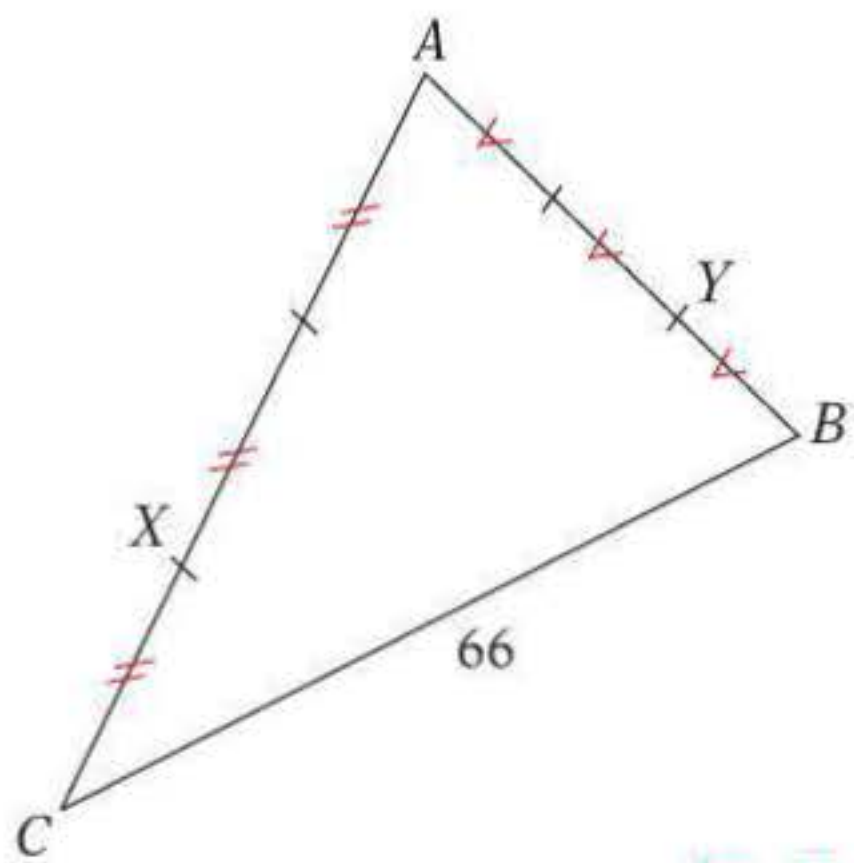


fig. 23

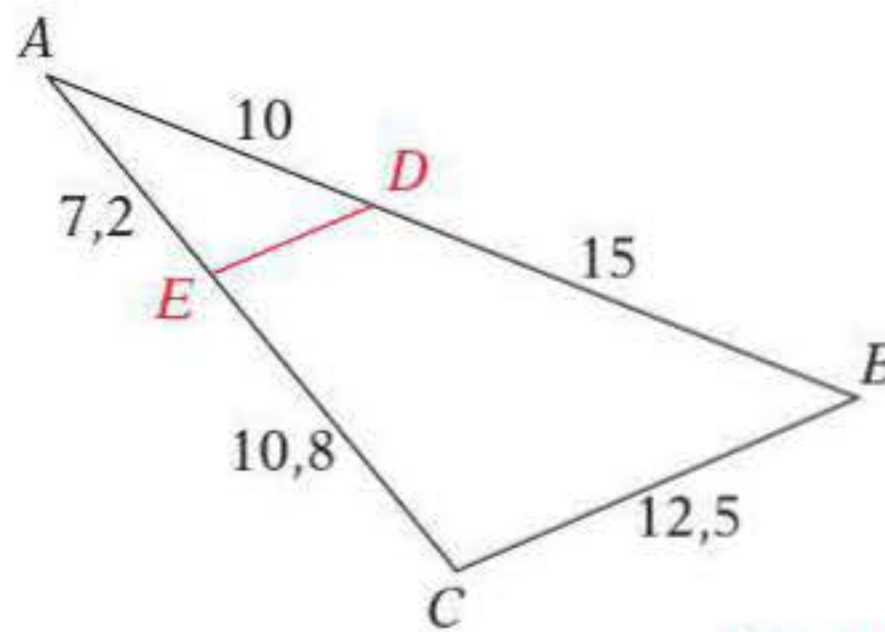


fig. 24

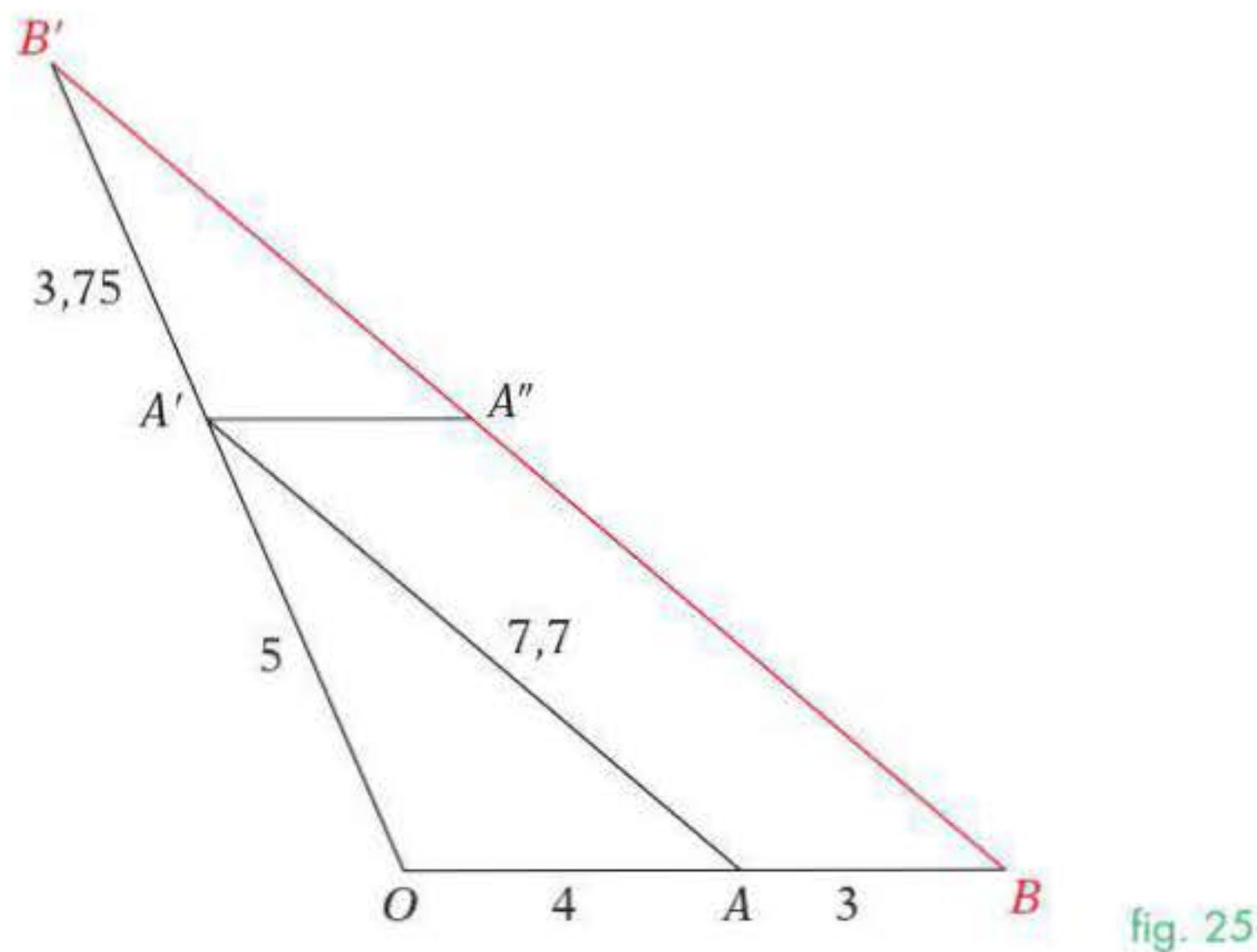


fig. 25

9. Trapèzes

- a. Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze, ses côtés non parallèles AD et BC se coupent en O . On donne $AB = 5$ cm, $OA = 4$ cm, $OB = 6$ cm et $CD = 7$ cm.

Calculer le périmètre du trapèze $ABCD$.

- b. Les diagonales RT et US d'un quadrilatère de sommets R , S , T et U se coupent en O . On donne $OR = 7$ cm, $OS = 4$ cm, $OT = 6,5$ cm et $OU = 10,5$ cm. Est-il possible (en modifiant éventuellement les angles formés par les diagonales) qu'un tel quadrilatère soit un trapèze ?

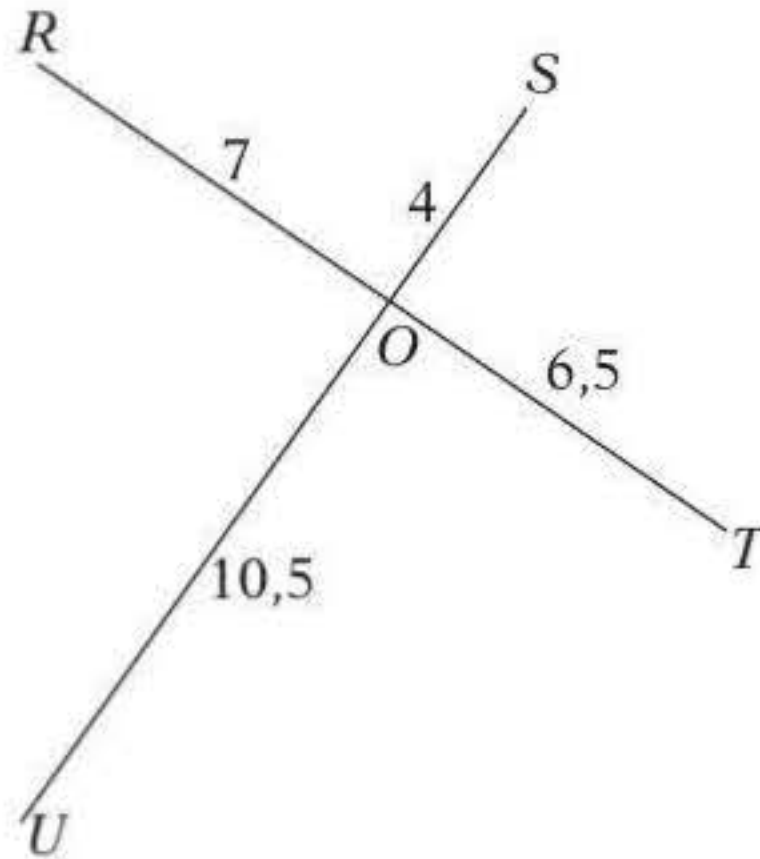


fig. 26

Résoudre un problème

10. La hauteur de Khéops

Vers 580 avant notre ère, Thalès de Milet entreprend un périple le long des côtes du Nil. Son objectif est de visiter le plateau de Gizeh et tenter de percer une partie des secrets des pyramides.

Il existe trois versions de la façon dont Thalès aurait mesuré la hauteur de la grande pyramide. L'une d'elles raconte que Thalès a planté son bâton dans l'ombre de la pyramide de façon à ce que l'extrémité de l'ombre du bâton soit sur l'ombre du sommet de la pyramide. Puis il aurait comparé l'ombre de ce bâton planté dans le sol avec l'ombre de la pyramide. Pour que l'on connaisse la longueur de la partie de l'ombre située à l'intérieur de la pyramide, il est nécessaire que le Soleil soit situé dans le plan formé par la hauteur de la pyramide et une médiane de sa base (fig. 27). Comme une face de la pyramide est orientée face au sud, cela arrive quand le Soleil est au zénith. Thalès a donc fait ses observations et ses mesures un jour d'hiver (pour que le Soleil ne soit pas trop haut et que l'ombre dépasse de la pyramide) et à midi juste.



Retrouver le calcul que Thalès a effectué pour déterminer la hauteur de la pyramide de Khéops sachant que :

- la hauteur du bâton qu'il a utilisé était de 110 cm,
- son ombre portée avait une longueur de 180 cm,
- la longueur de l'ombre portée de la pyramide (distance entre l'extrémité de l'ombre et le côté de la pyramide) était de 125 m,
- la base de la pyramide est un carré de 234 m de côté.

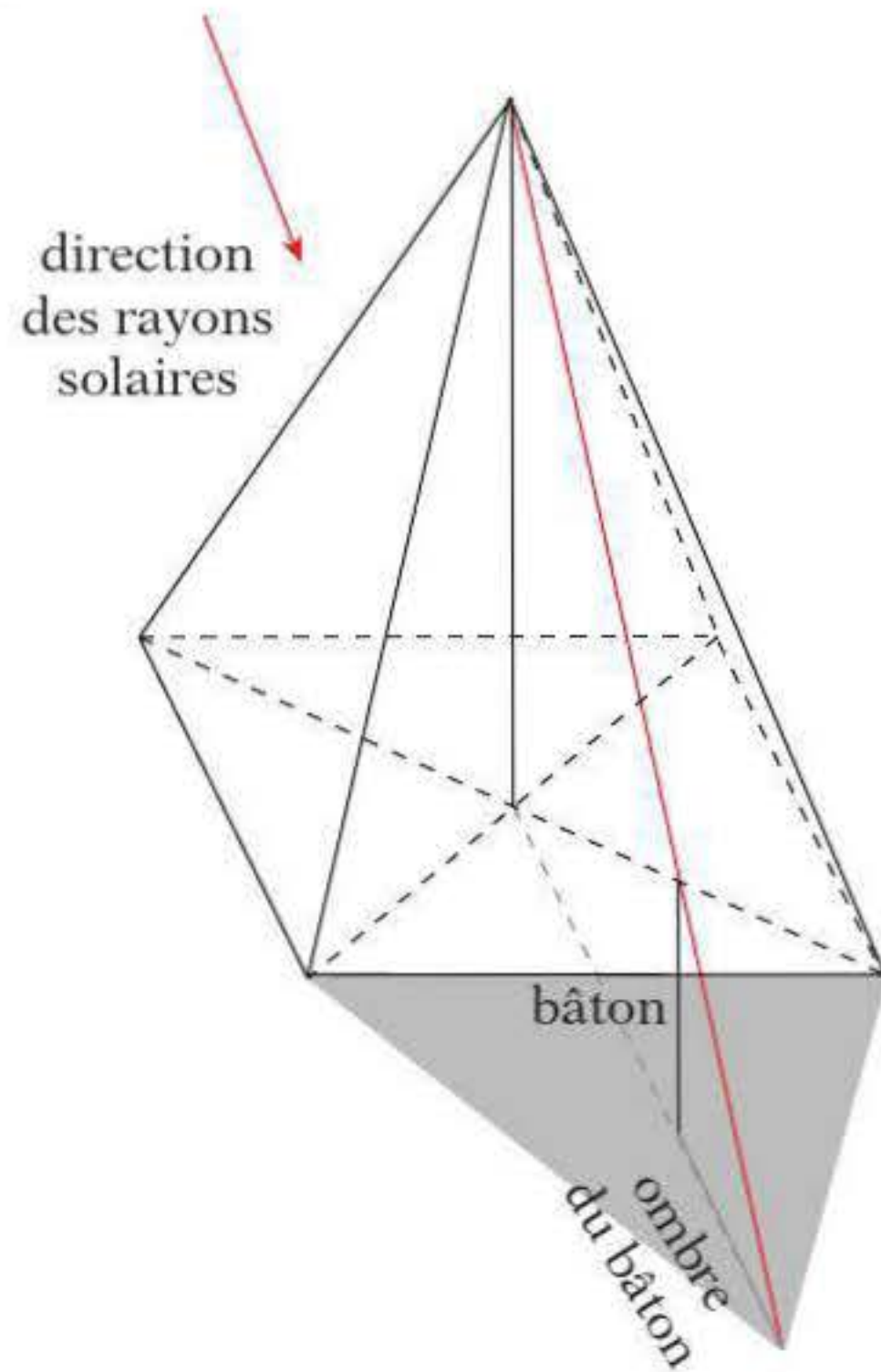


fig. 27

11. Comme Thalès

Adèle a calculé la hauteur d'un arbre en plaçant sa règle de 40 cm dans l'ombre de l'arbre. Elle l'a mise de façon à ce que l'ombre de l'extrémité de sa règle et celle du sommet de l'arbre coïncident. Puis elle a pris les mesures indiquées sur le schéma. Quelle est la hauteur de cet arbre ?

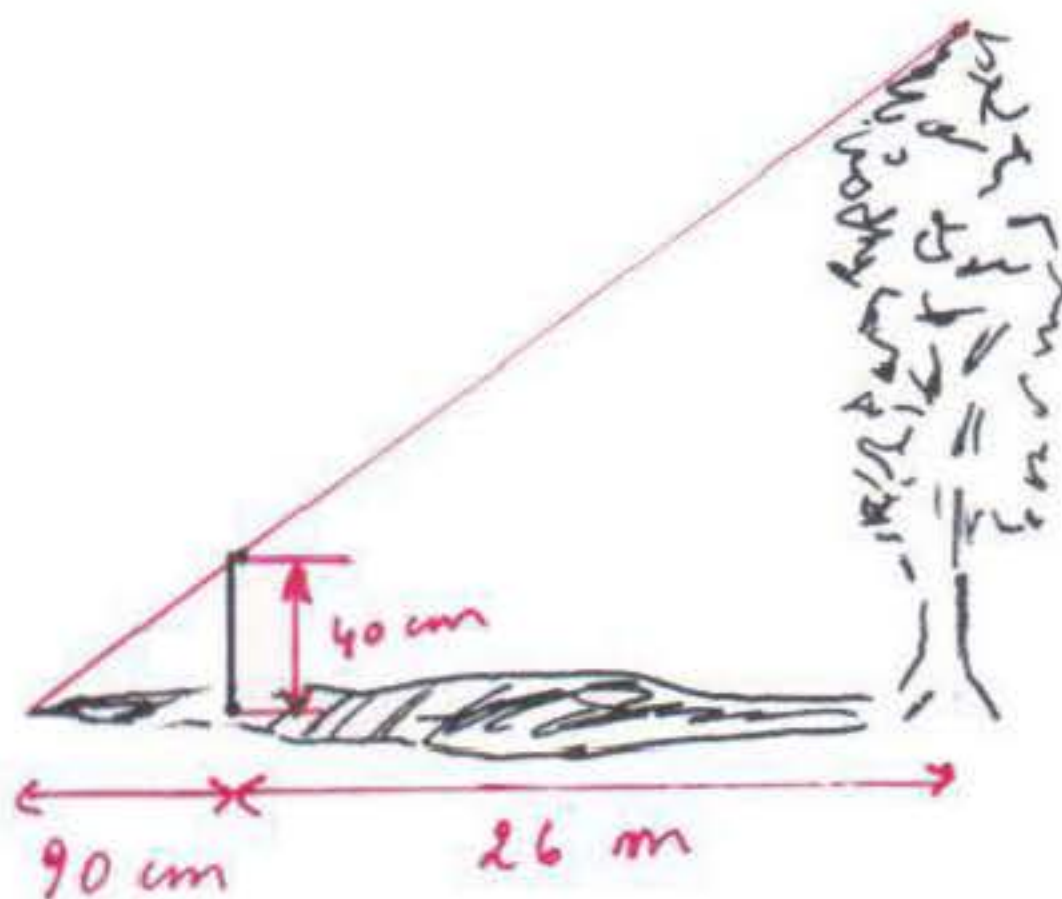


fig. 28

Pour aller plus loin

12. L'égouttoir

La fig. 29 indique les dimensions (en cm) d'un égouttoir. Lorsque l'on dépose une planche au-dessus, est-elle horizontale ?

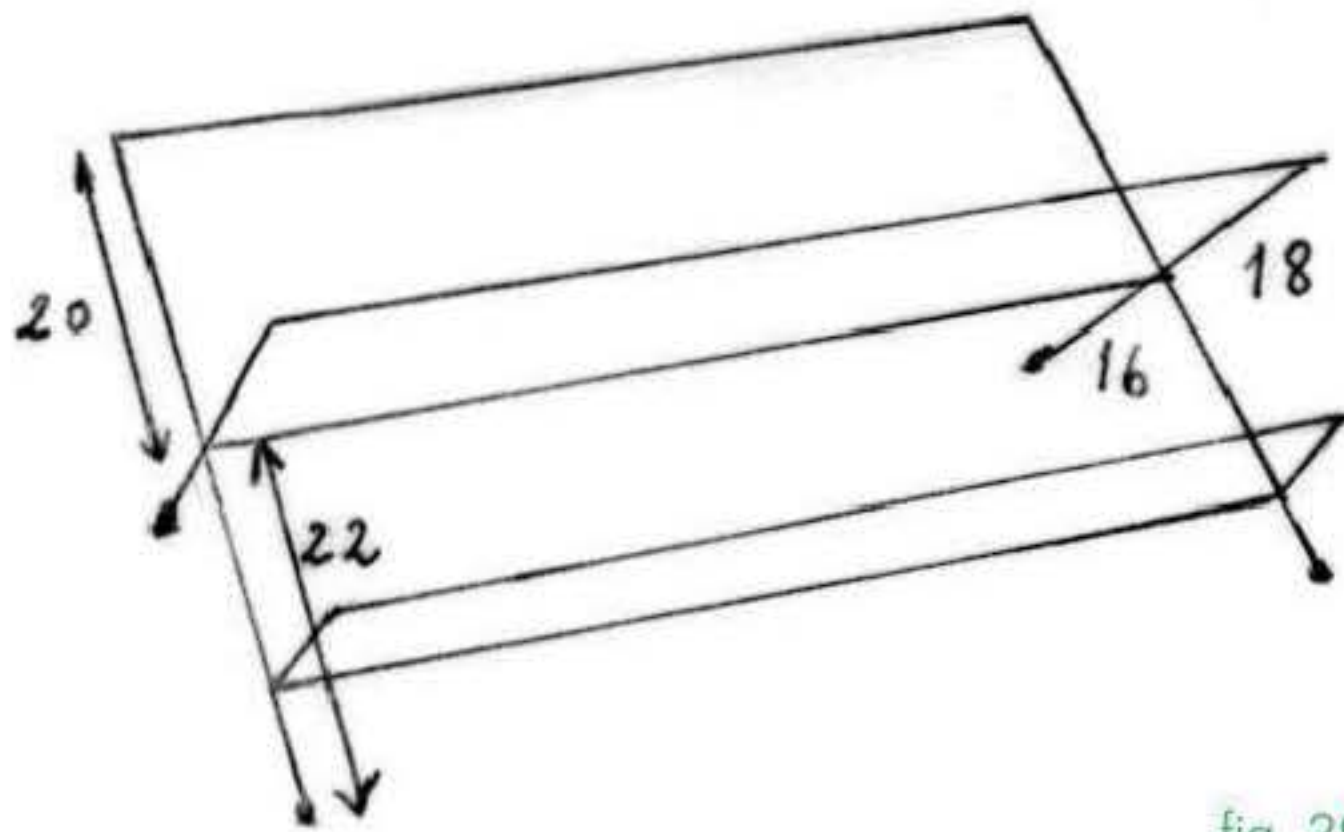


fig. 29



fig. 30

13. La table à repasser

Léa observe une table à repasser.

Pour changer la hauteur de la table, elle doit modifier, au dos de la table, l'écart entre les deux points d'ancrage des deux pieds. Elle voit qu'en même temps la distance entre les pieds se modifie. Elle prend quelques mesures et les porte sur un schéma (fig. 31).

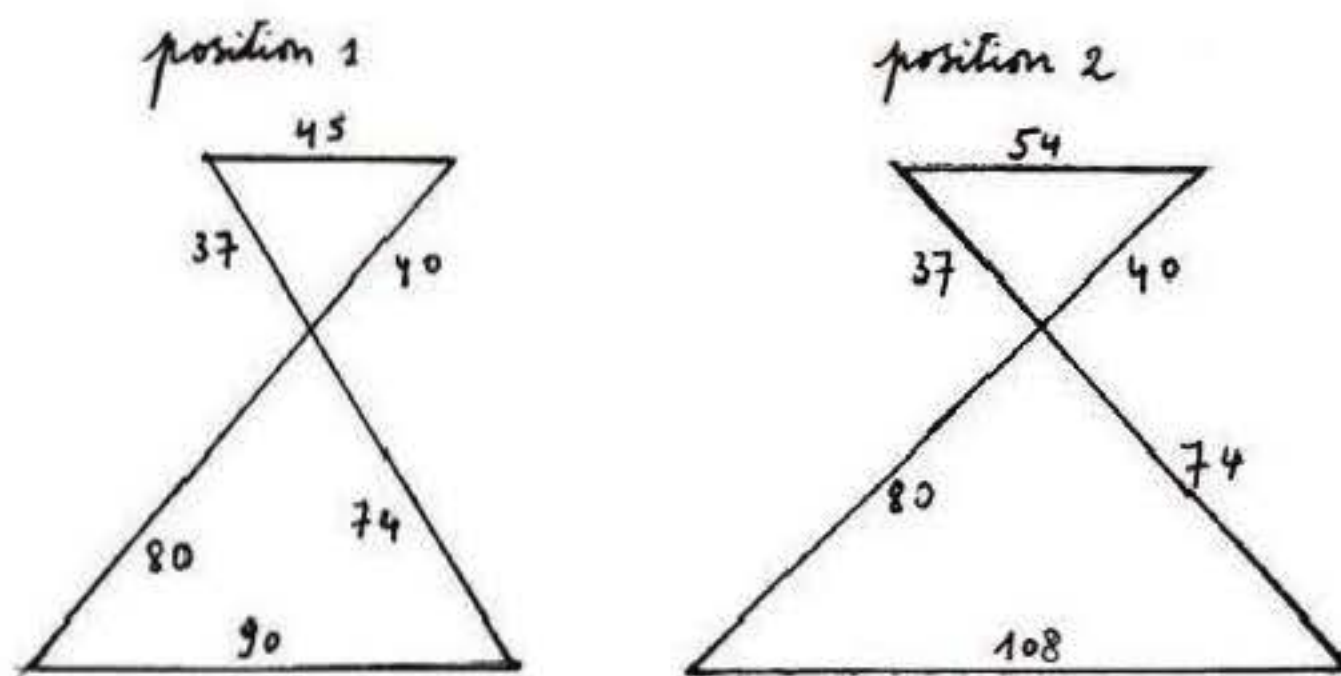


fig. 31

Elle constate que :

- les pieds se coupent entre eux dans un rapport de 1 à 2,
- l'écart entre les points d'ancrage sous la table vaut la moitié de la distance entre les pieds.

Léa pense que, dans toutes les positions de cette table, le rapport entre « écart des points d'ancrage » et « distance entre les pieds » reste le même.



fig. 32

- a. Construire un trapèze dont la petite base est la moitié de la grande, tracer les diagonales et vérifier la conjecture de Léa.
- b. Dans un trapèze, les diagonales se coupent-elles toujours dans le rapport des bases ? Justifier la réponse.

14. Prendre la moitié pour partager en trois !

Dans la fig. 33, les points E et F sont les milieux de deux côtés opposés du parallélogramme $ABCD$. On relie E à D et F à B .

- a. Démontrer que DE est parallèle à FB .

Indication

Montrer d'abord que les triangles AED et CFB sont isométriques et repérer des angles de même amplitude qui ont la position d'angles correspondants.

- b. $[AC]$ est partagé en trois parties par ces parallèles. Montrer que ces segments ont même longueur.

Indication

Envisager deux configurations de Thalès : l'une dans le triangle BAH , l'autre dans le triangle DCG .

- c. Tracer un nouveau parallélogramme $RSTU$. Placer deux points A et B qui partagent le côté $[RS]$ en trois parties égales. Placer de même les points C et D sur le côté $[UT]$.

Faire une construction analogue à la précédente pour partager une des diagonales en quatre parties égales.

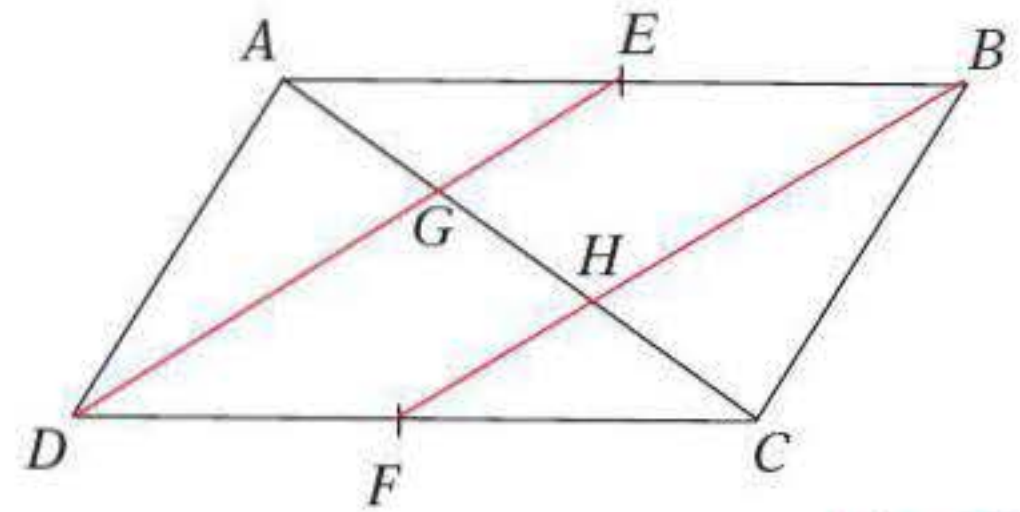


fig. 33

15. Configuration de Thalès ?

Vérifier si la fig. 34 est une configuration de Thalès. Si c'est le cas, calculer \overline{ED} .

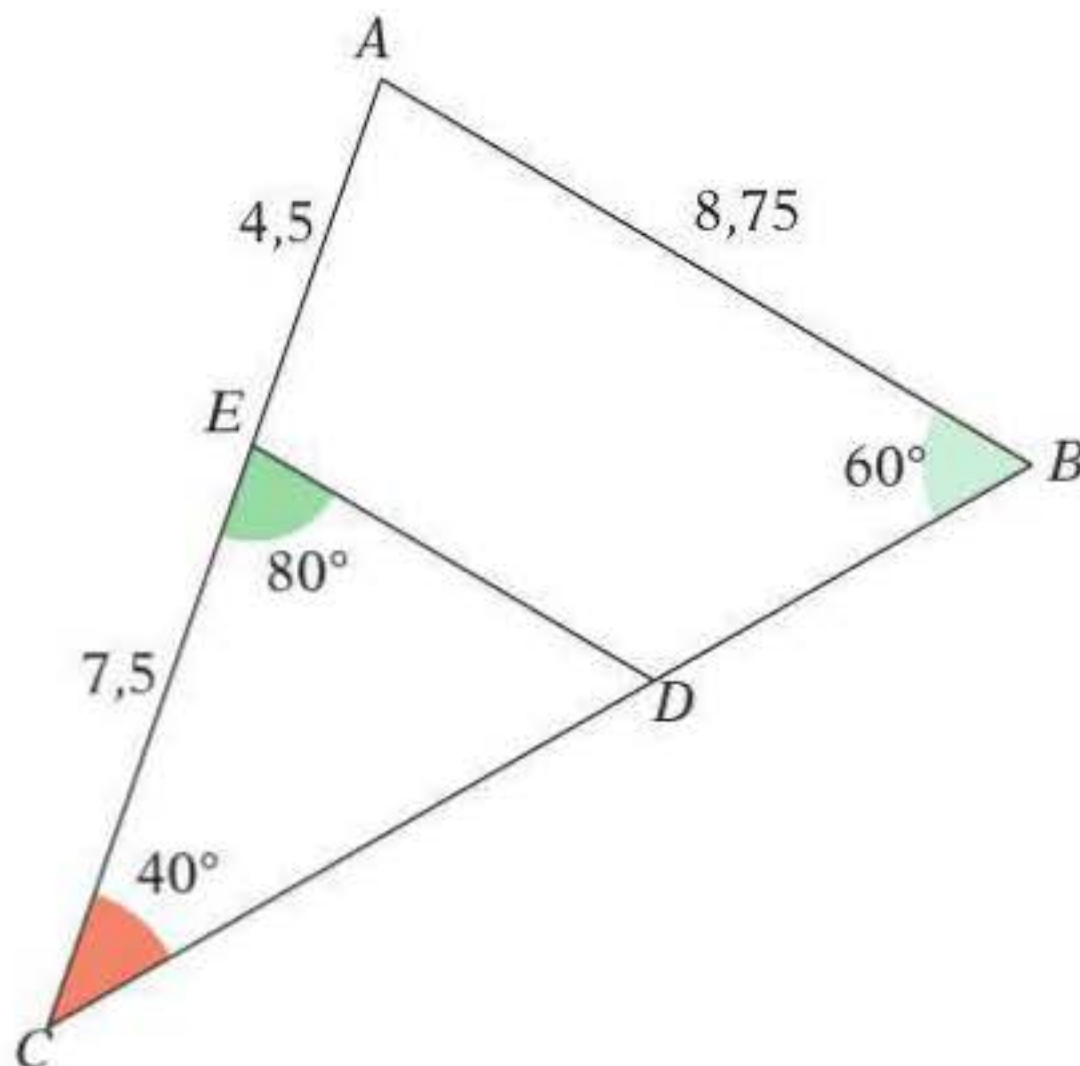


fig. 34

16. Les droites sont-elles parallèles ?

Dans la fig 35, \overline{AB} et \overline{AC} sont les diamètres de deux cercles tangents. On donne :

$$\overline{AB} = 13 \text{ cm} \quad \overline{BD} = 6,6 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 18,2 \text{ cm} \quad \overline{CF} = 5,6 \text{ cm}$$

Les droites DB et EC sont-elles parallèles ? Si c'est le cas, calculer \overline{BG} et \overline{CE} .

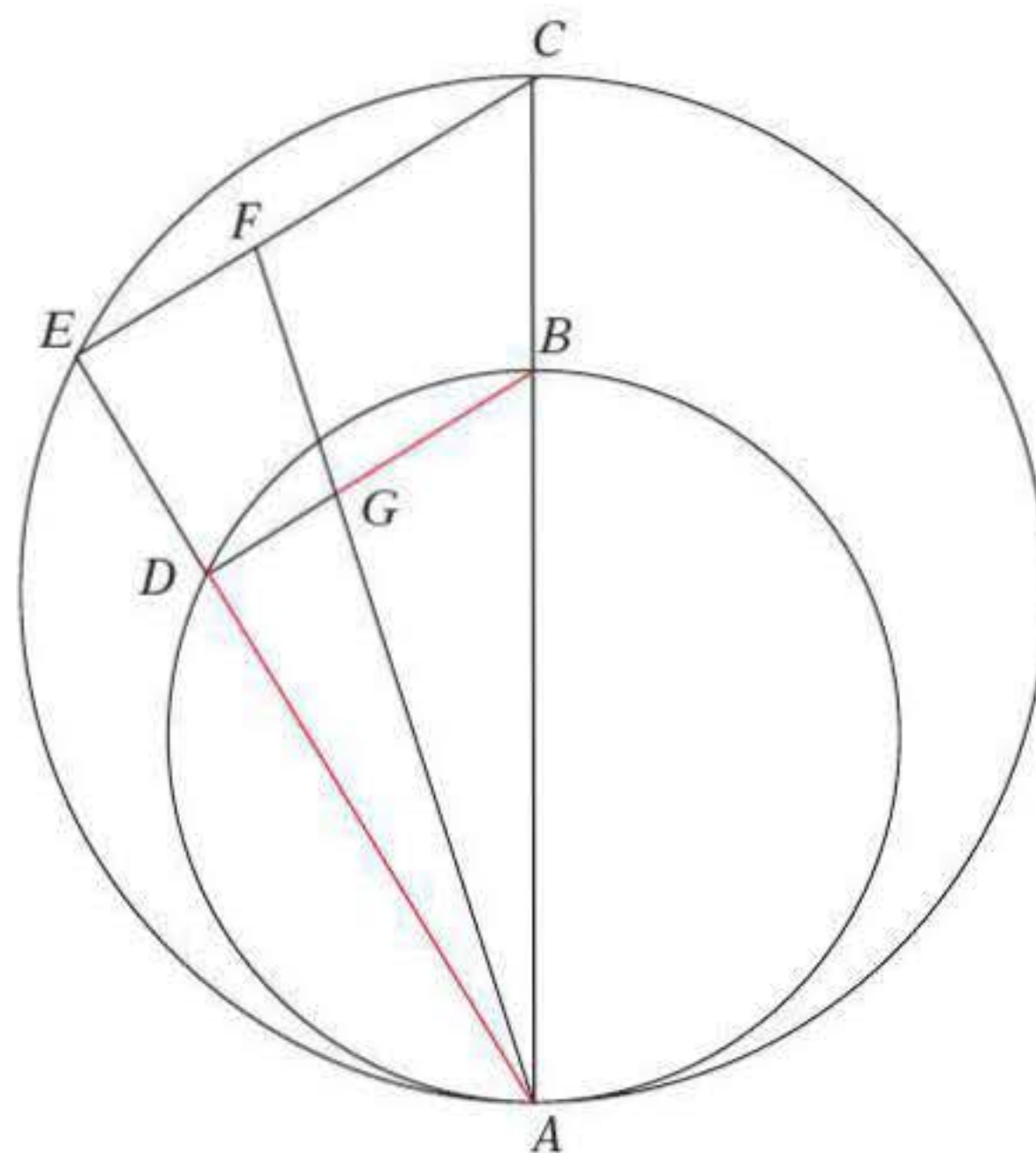


fig. 35

17. La largeur du canal

Gabrielle calcule la largeur w d'un canal en procédant comme sur la fig. 36. Elle part du point C , perpendiculairement à la berge et mesure les distances \overline{DC} , \overline{DB} et \overline{BE} . En E , elle se trouve juste en face d'un pylône et repère le point E . Elle sait donc que AE est perpendiculaire à la berge. Ensuite elle utilise ses connaissances géométriques...

D'après ses estimations, quelle est la largeur du canal ?

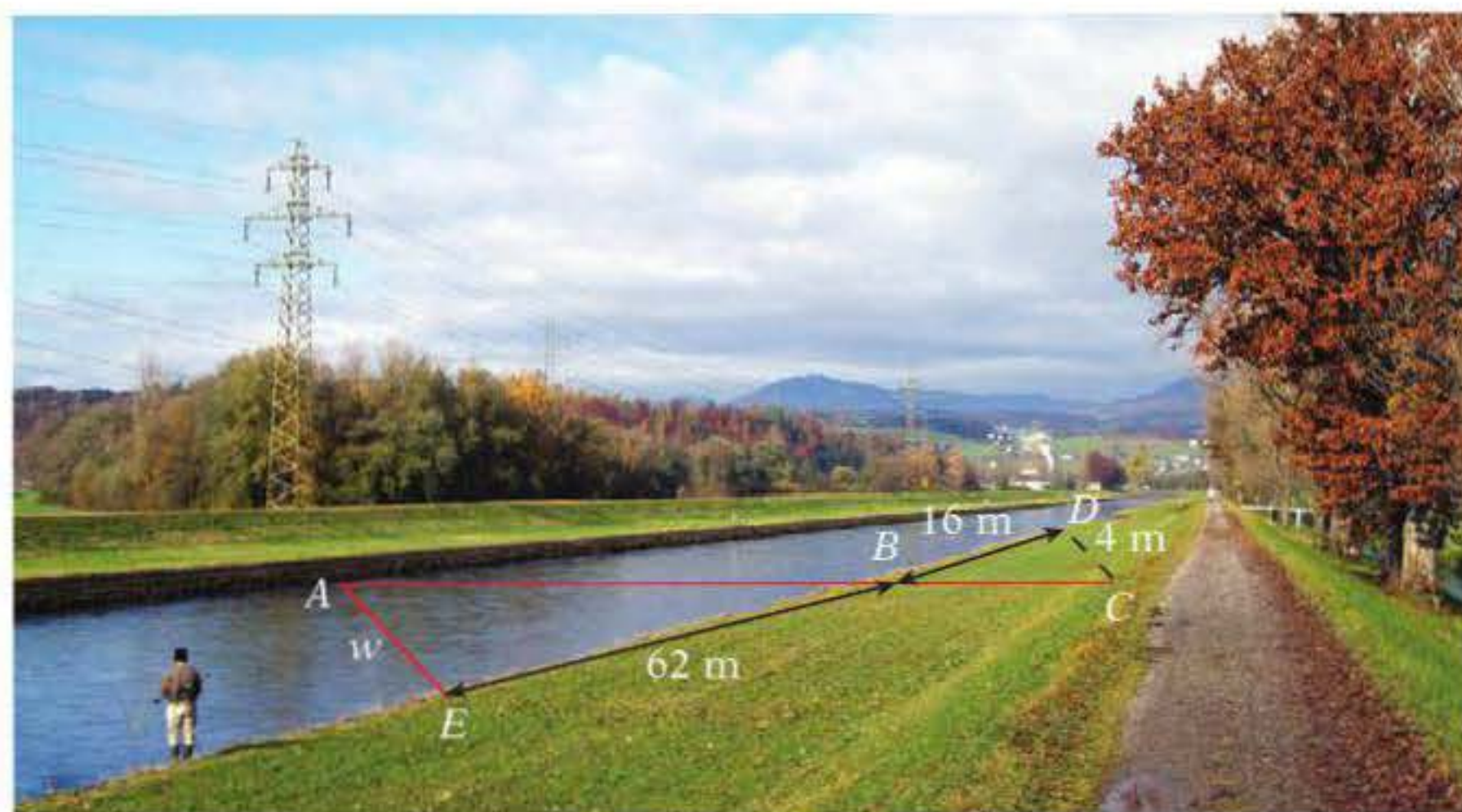


fig. 36

10 figures semblables

On obtient une figure semblable à une figure donnée en enchaînant isométries et agrandissements (ou réductions). Ce que nous avons appris à propos des isométries et des configurations de Thalès sera donc mobilisé ici.

Tout comme les cas d'isométrie, les **cas de similitude des triangles** s'avèrent très efficaces pour explorer et démontrer des propriétés du triangle rectangle, de la tangente à un cercle, découvrir le rectangle d'or... Au passage, nous nous intéresserons à la **moyenne proportionnelle de deux nombres**.

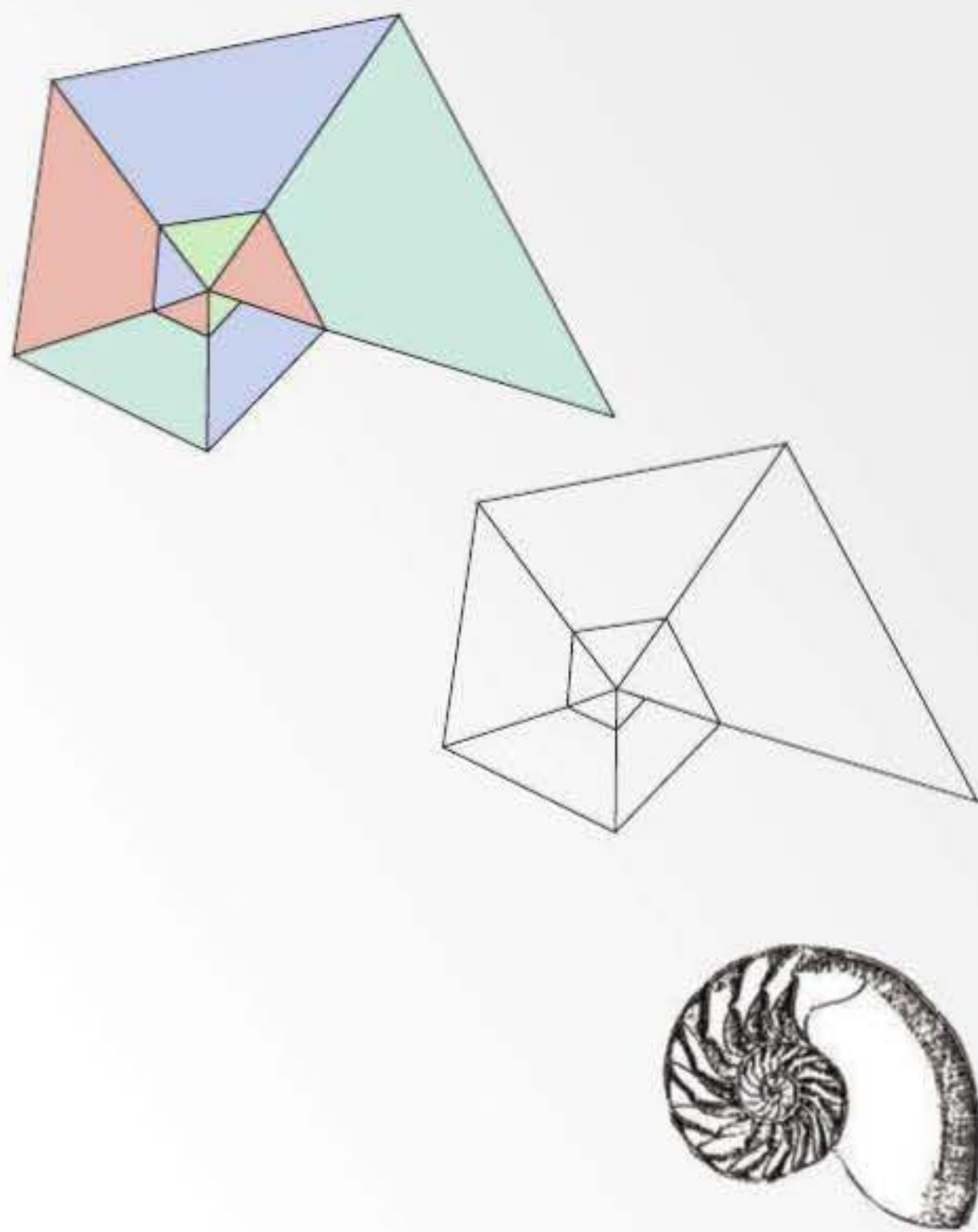


fig. 1

*Les coquillages engendrent chaque année une nouvelle section.
Ceci fait, ils sont semblables à ce qu'ils étaient l'année précédente.*

1. De Thalès à la similitude

Pour construire la **fig. 2**, on part de deux droites perpendiculaires, on choisit un point A sur l'une d'elles et on trace un segment qui forme avec $[OA$ un angle de $21,8^\circ$. On recommence la même construction dans le même sens avec la demi-droite $[OB$ et la demi-droite $[OC$. Trois triangles apparaissent.

a. Ces triangles ont-ils leurs angles de même amplitude ? Ont-ils leurs côtés proportionnels ?

b. Si $\overline{AB} = 84 \text{ mm}$ et $\overline{BC} = 33,6 \text{ mm}$, que vaut \overline{CD} ?

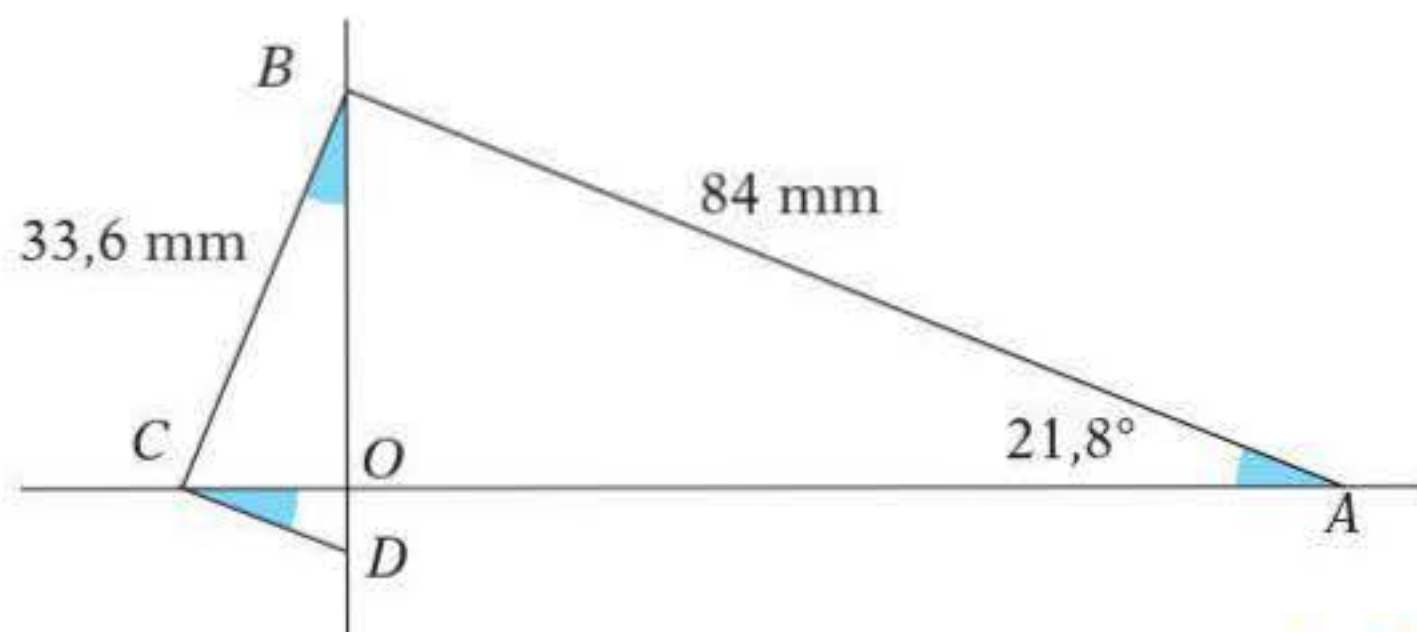


fig. 2

Indication

Pour comparer les différents triangles qui forment cette spirale, on applique une rotation de 90° à l'ensemble de la figure (**fig. 3**). On observe alors les configurations de Thalès obtenues.

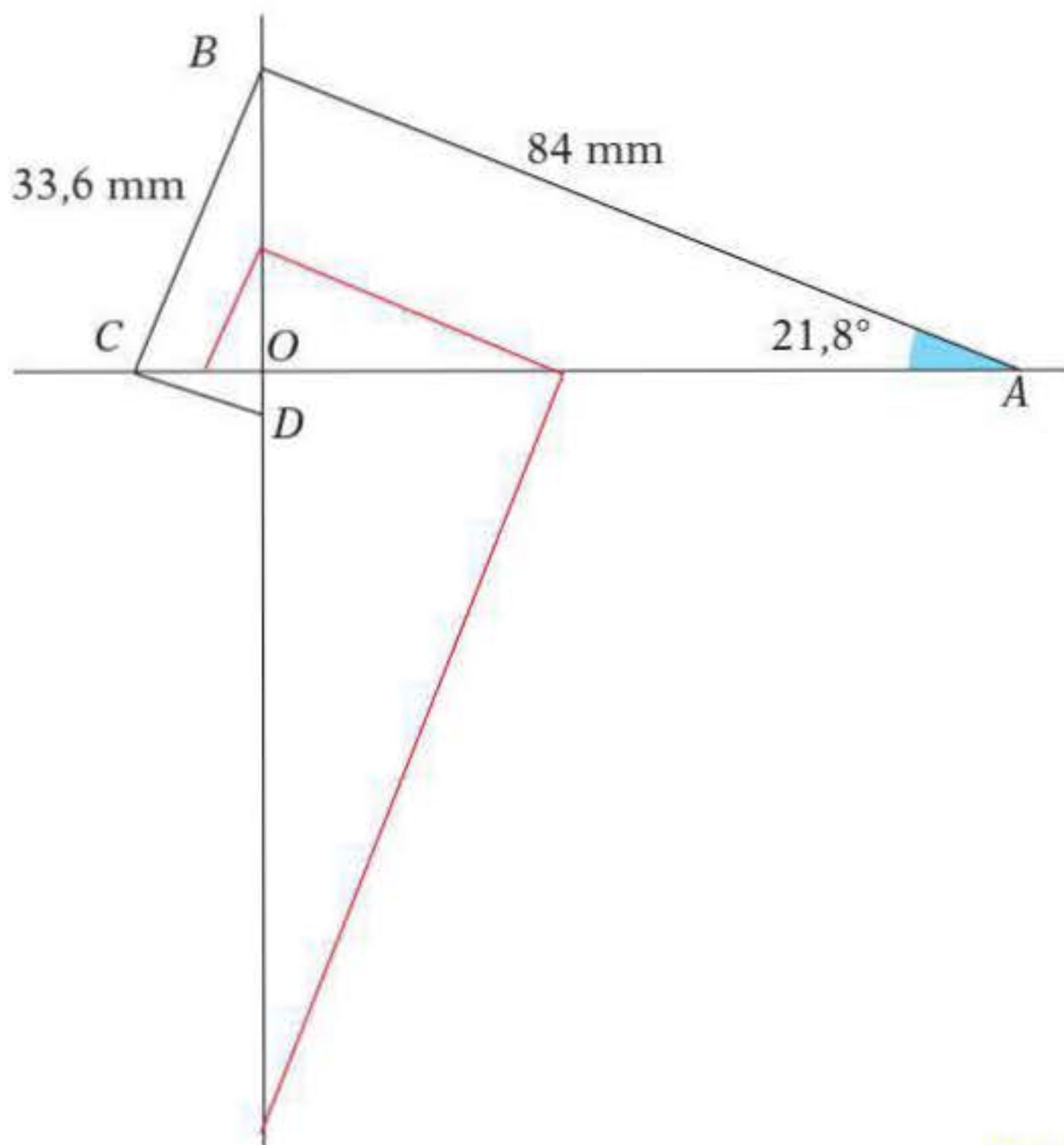


fig. 3

Les triangles OAB , OBC et OCD sont appelés « **triangles semblables** ». Leur coefficient de proportionnalité est appelé « **rapport de similitude** ».

2. Rectangles semblables

Pour obtenir un rectangle « plus grand » que le rectangle $ABCD$ dont la longueur est 4 cm et la largeur 3 cm, Alex utilise une méthode et Carla une autre.

Méthode d'Alex

Il part des médianes et les prolonge chaque fois d'un centimètre et trace les parallèles aux côtés (fig. 5).

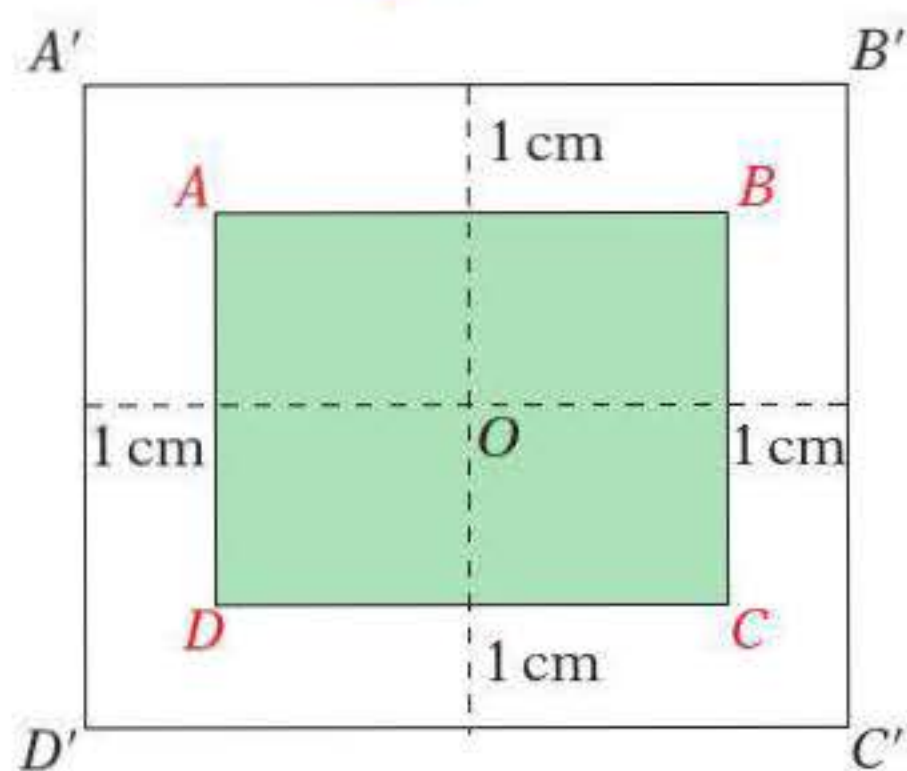


fig. 5

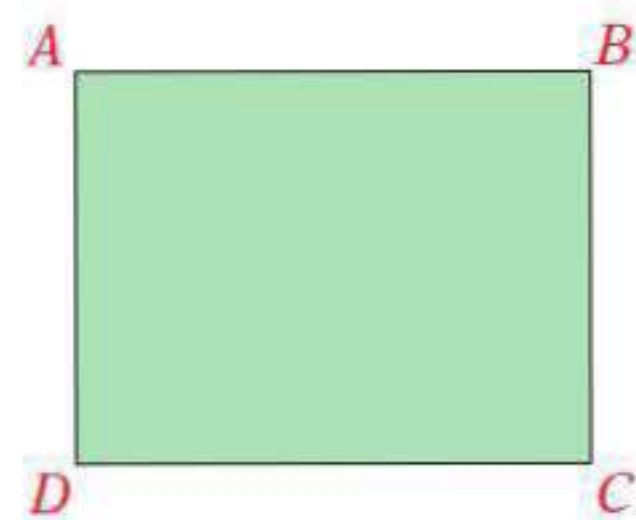


fig. 4

- Calculer les dimensions du rectangle $A'B'C'D'$.
- Les côtés du rectangles $A'B'C'D'$ sont-ils proportionnels aux côtés du rectangle $ABCD$?

Méthode de Carla

Elle part des diagonales et les prolonge chaque fois d'un centimètre (fig. 6).

- Calculer \overline{OB} et $\overline{OB''}$.
- Vérifier que BC est parallèle à $B''C''$.
- Utiliser les propriétés de la configuration de Thalès pour calculer $\overline{B''C''}$ et $\overline{A''B''}$.
- Calculer le coefficient de forme de chaque rectangle (c'est le rapport $\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$).

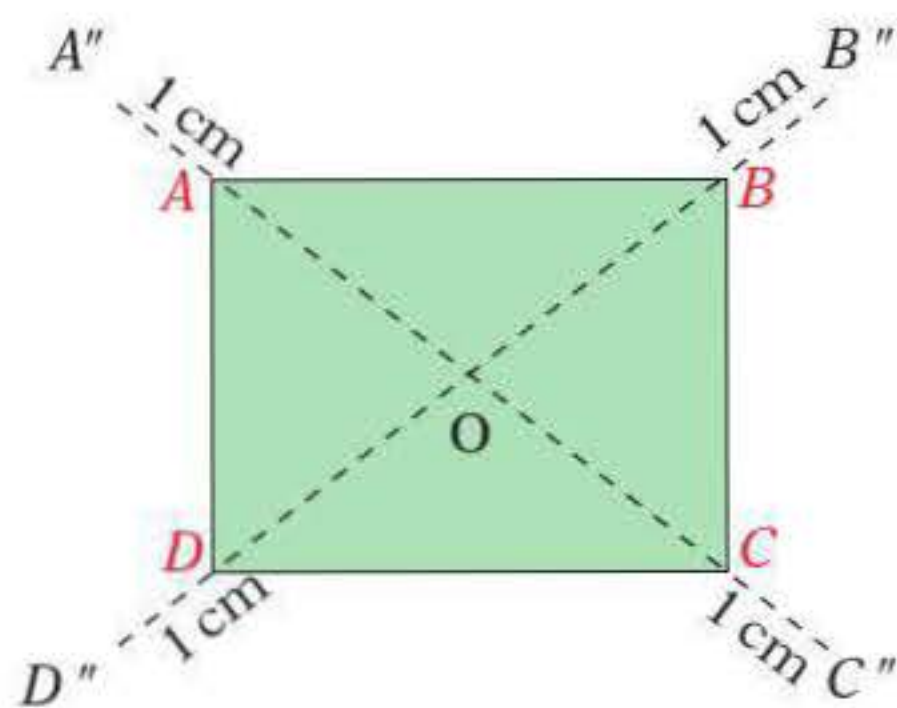


fig. 6

3. Cas de similitude des triangles

Les six mesures relatives au triangle de la fig. 7 sont fournies.

- Déterminer un ensemble de données (le minimum) qui permet de construire un triangle semblable au triangle ABC .
- Construire le triangle qui correspond à ces données.
- Trouver un autre ensemble de données qui détermine un triangle semblable au triangle ABC . Y a-t-il un troisième ensemble possible ?

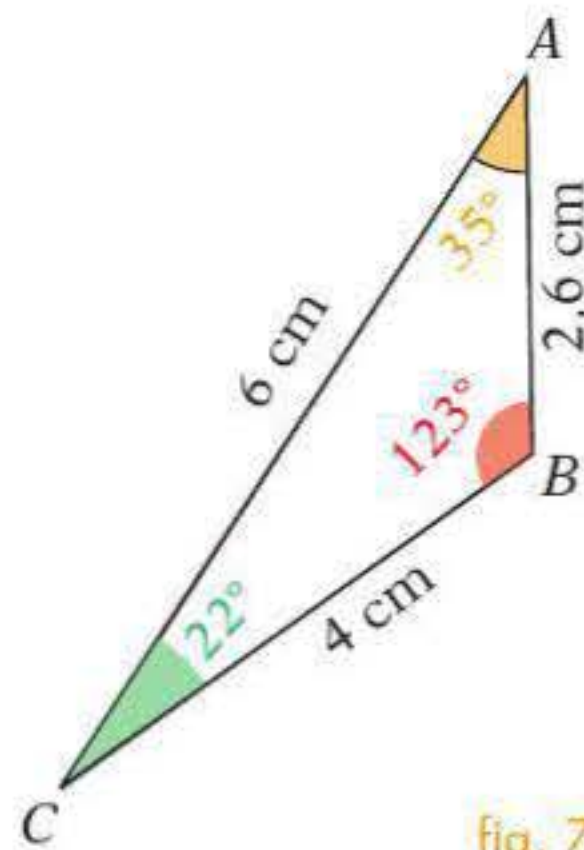


fig. 7

4. Agrandir une photo

Cécile veut commander un agrandissement d'une photo qu'elle a prise lors du concours de hip-hop auquel elle a participé. Elle a trouvé sur Internet le tarif suivant.

	Dimensions	Prix
Format n° 1 (fig. 8)	30 × 40	6,5 €
Format n° 2 (fig. 9)	40 × 53	11,5 €

- Les deux formats correspondent-ils à des rectangles semblables ? Si c'est le cas, quel est le rapport de similitude (ici le rapport format n° 2/format n° 1) ? Arrondir le résultat au dixième près.
- Les prix sont-ils proportionnels
 - aux longueurs ?
 - aux largeurs ?
 - aux aires des rectangles ?
 Arrondir les résultats au dixième près.
- Quel est le rapport entre le rapport des aires et le rapport de similitude ?
- En supposant que le mode de calcul est le même que précédemment, calculer le prix d'une photo de format 53 × 70 ?

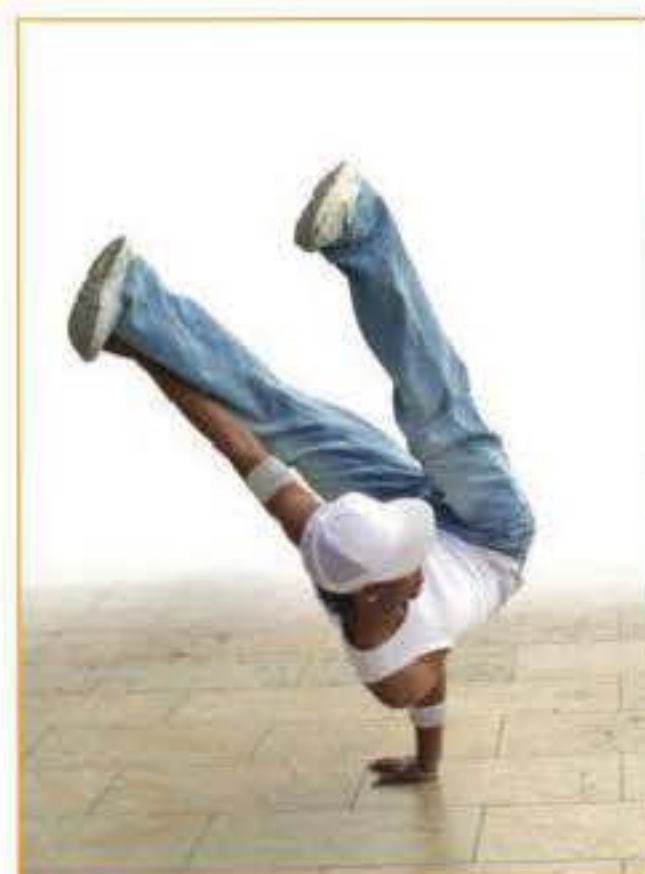


fig. 8

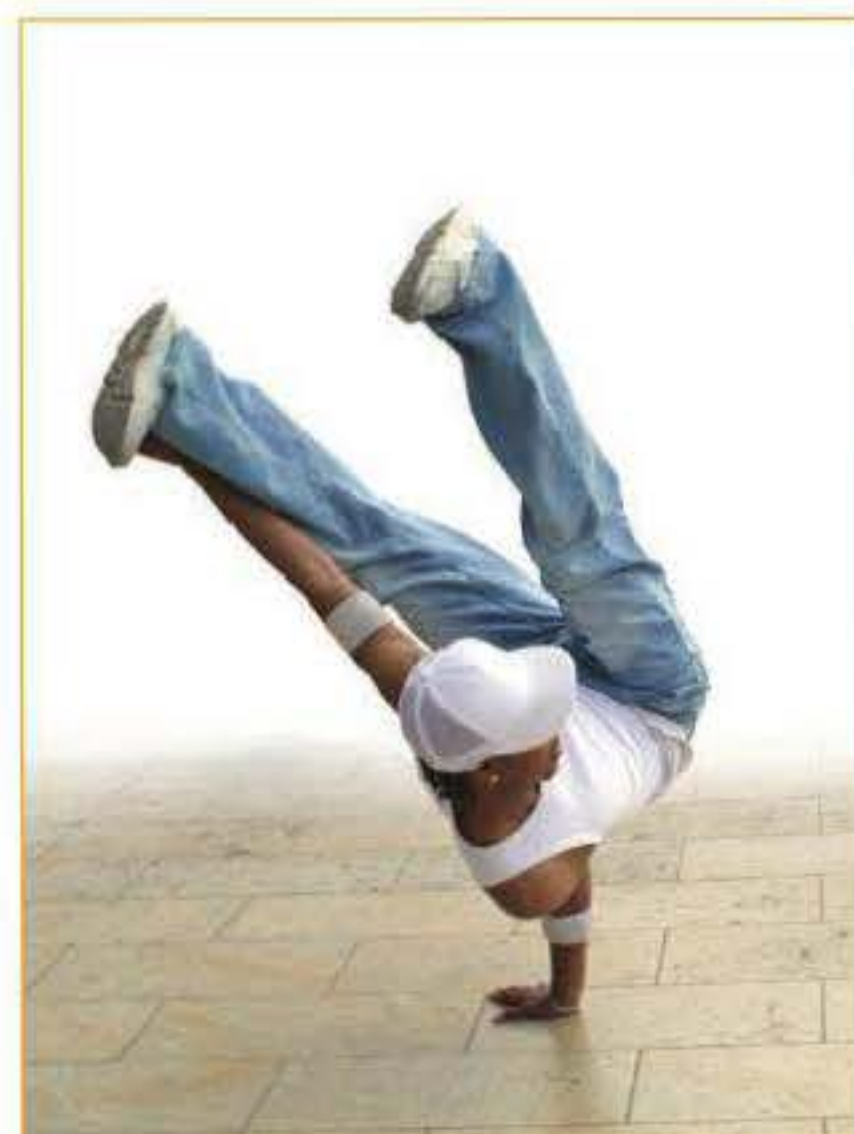


fig. 9

Synthèses 1 à 4
Exercices 1 à 14
et 18, 19
Fiches 39 et 40

5. La hauteur du triangle rectangle

Le côté d'un carré qui a la même aire qu'un rectangle est un segment dont la mesure est située entre celle de la largeur et celle de la longueur du rectangle.

Ainsi, le côté du carré qui a la même aire qu'un rectangle de 4 sur 9 est 6, le côté du carré qui a la même aire qu'un rectangle de 20 sur 5 est 10, le côté du carré qui a la même aire qu'un rectangle de 7 sur 10 est $\sqrt{70}$.

La mesure de ce côté est une « moyenne » entre les deux dimensions du rectangle. Mais attention, ce n'est pas la demi-somme habituelle (la moyenne arithmétique) ! C'est la racine carré du produit de deux nombres. Cette racine est appelée **moyenne géométrique**. On la retrouve dans beaucoup de figures. Voici un exemple.

Quand on représente trois nombres dont l'un est la moyenne géométrique des deux autres comme sur la fig. 11, on détermine un triangle qui semble être un triangle rectangle. Est-ce exact ?

- Explorer cette propriété pour d'autres triplets de nombres dont l'un est la moyenne géométrique des deux autres.
- Démontrer que dans tout triangle rectangle la hauteur est la moyenne géométrique entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Indication

Après avoir écrit l'hypothèse et la thèse, exprimer la relation entre les trois nombres (la thèse) sous la forme d'une proportion. Repérer ensuite deux triangles dont les côtés figurent dans cette proportion et montrer qu'ils sont semblables.

- Démontrer que si la hauteur d'un triangle est la moyenne géométrique entre les segments qu'elle détermine sur les côtés du triangle, alors ce triangle est rectangle.

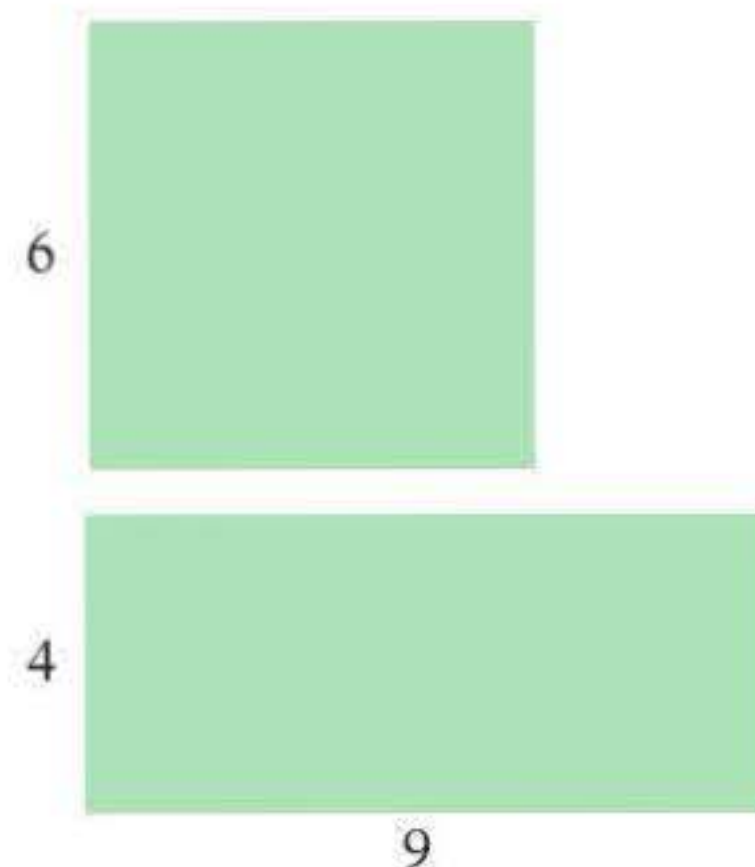


fig. 10

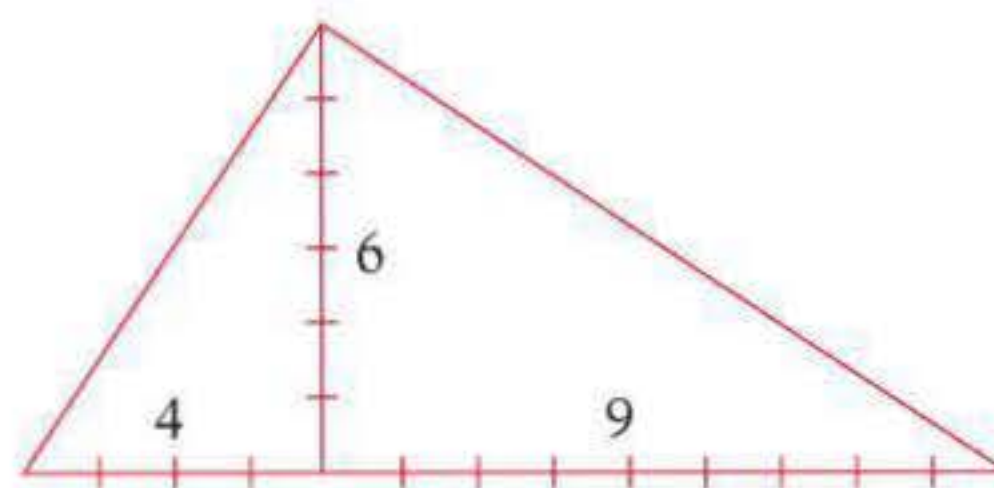
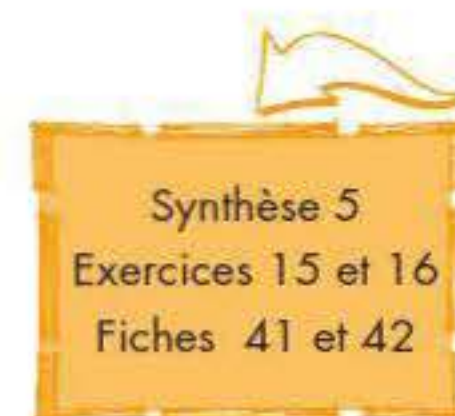


fig. 11



1. Comment reconnaître des polygones semblables ?

Pour reconnaître deux polygones semblables, on examine si l'agrandissement ou la réduction de l'un est isométrique à l'autre.

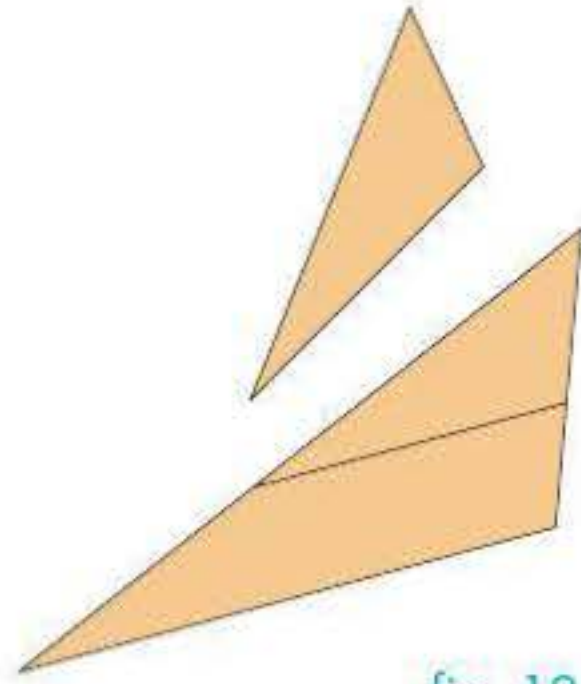


fig. 12

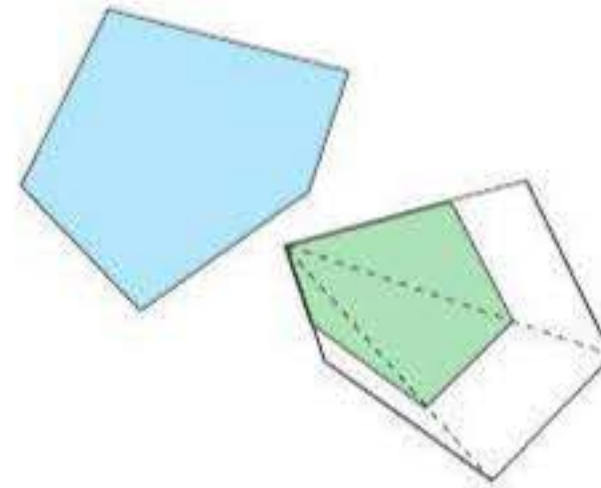


fig. 13

2. Comment vérifier si deux polygones sont semblables ?

Pour s'assurer que deux polygones sont semblables, il faut vérifier si leurs angles homologues ont même amplitude et si le rapport entre deux côtés homologues est chaque fois le même.

Exemples et contre exemples

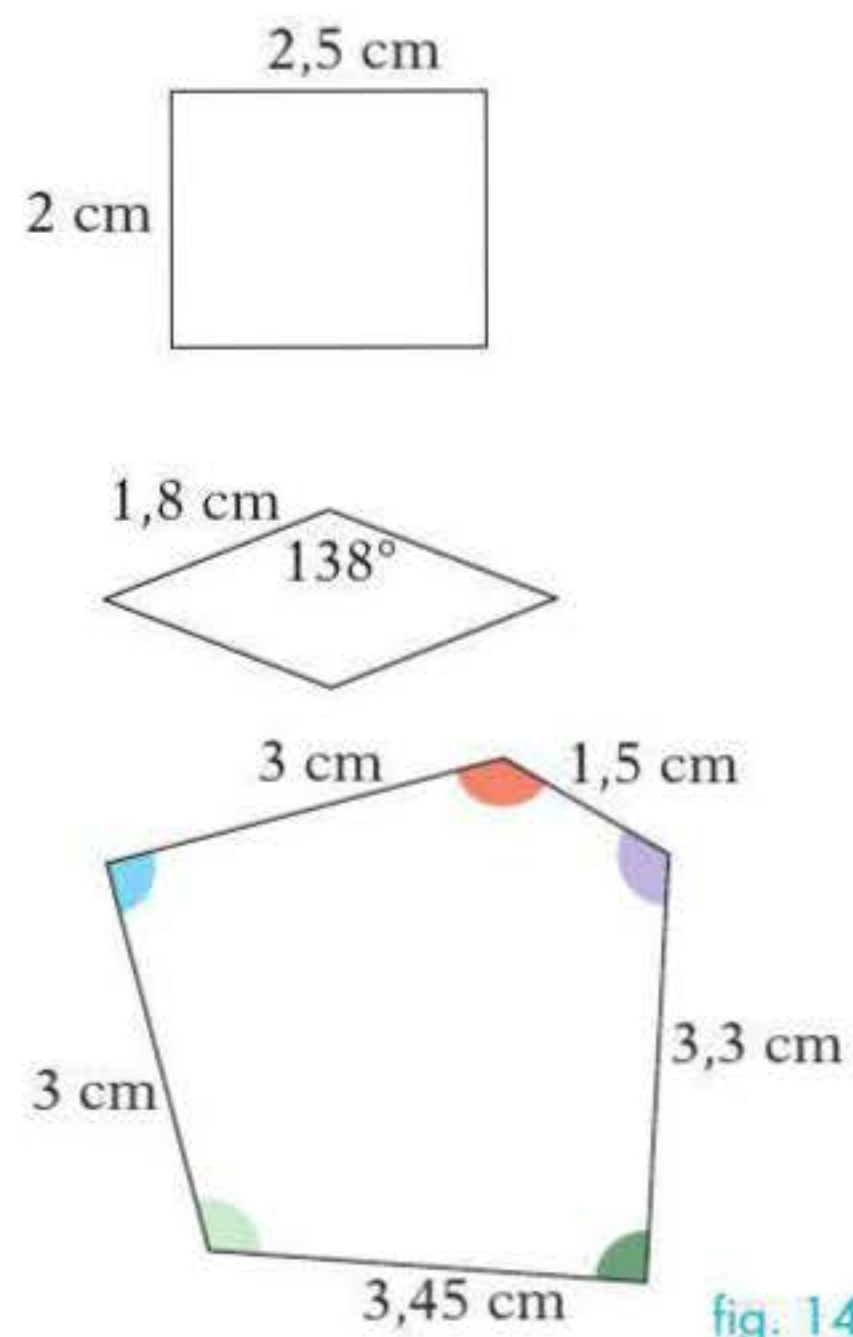
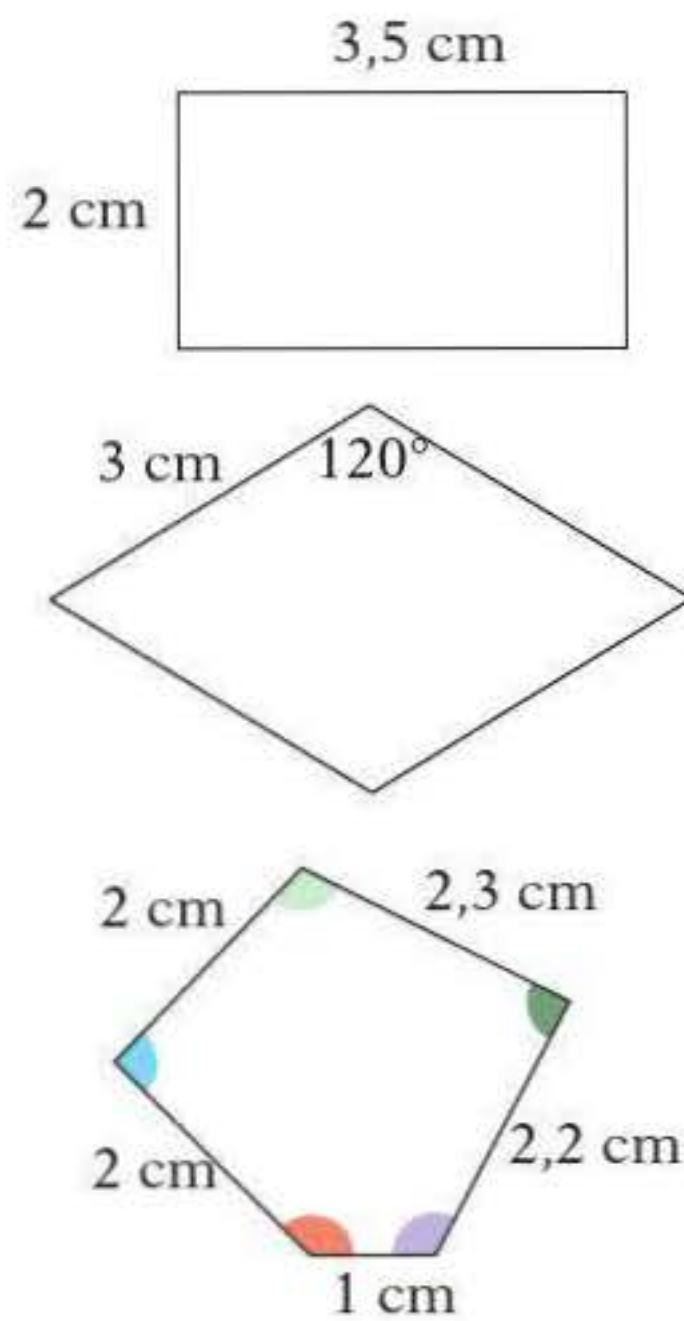


fig. 14

Dans la fig. 14,

- les deux rectangles ont leurs angles de même amplitude mais leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels. Ils ne sont pas semblables ;
- les deux losanges ont leurs côtés proportionnels mais les angles homologues n'ont pas même amplitude. Ils ne sont pas semblables ;
- les deux pentagones ont leurs angles deux à deux de même amplitude et leurs côtés homologues proportionnels. Ils sont semblables.

Énoncé 10.1

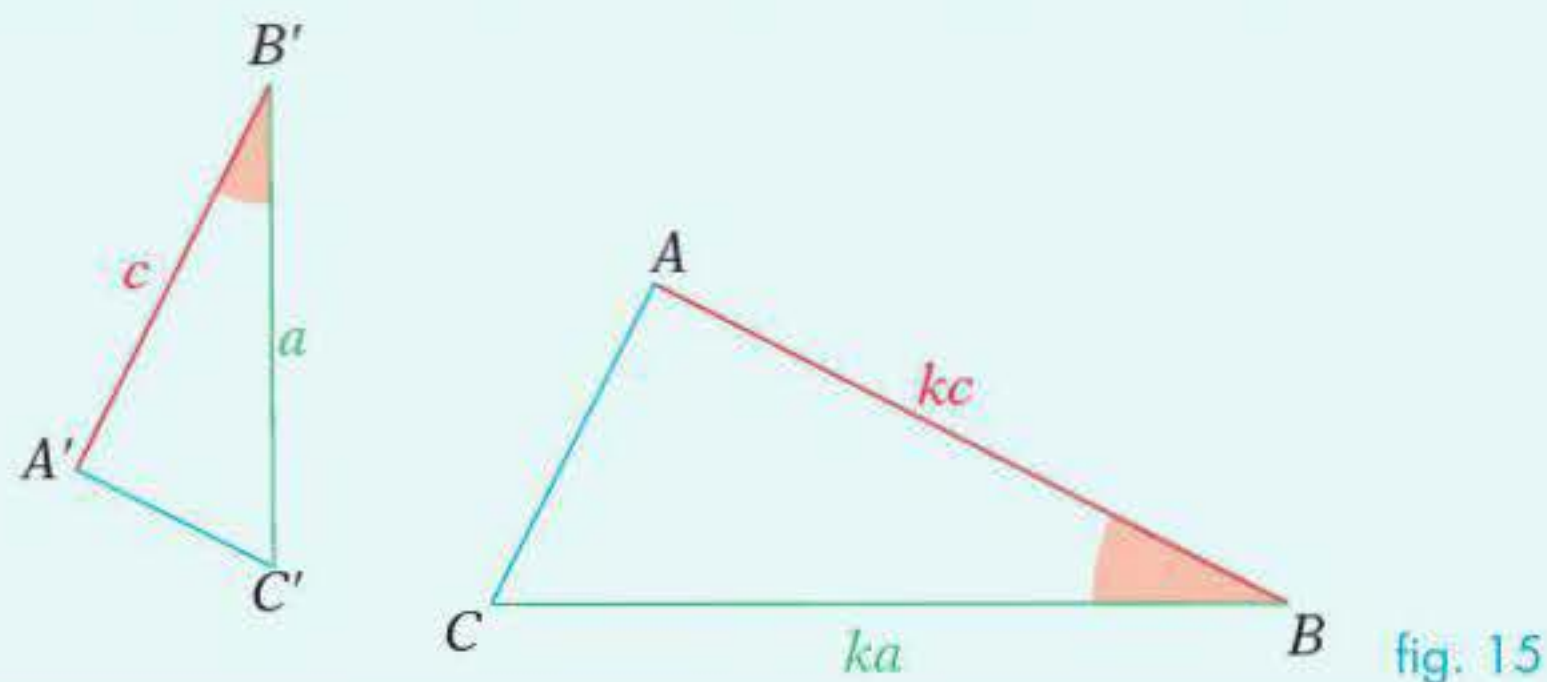
Deux polygones sont appelés **polygones semblables** lorsqu'ils ont leurs côtés homologues respectivement proportionnels et leurs angles homologues respectivement de même amplitude.

3. Quels sont les cas de similitude des triangles ?

Les deux premiers cas de similitude des triangles sont « à l'échelle près » les mêmes que les cas d'isométrie. Le troisième est plus surprenant.

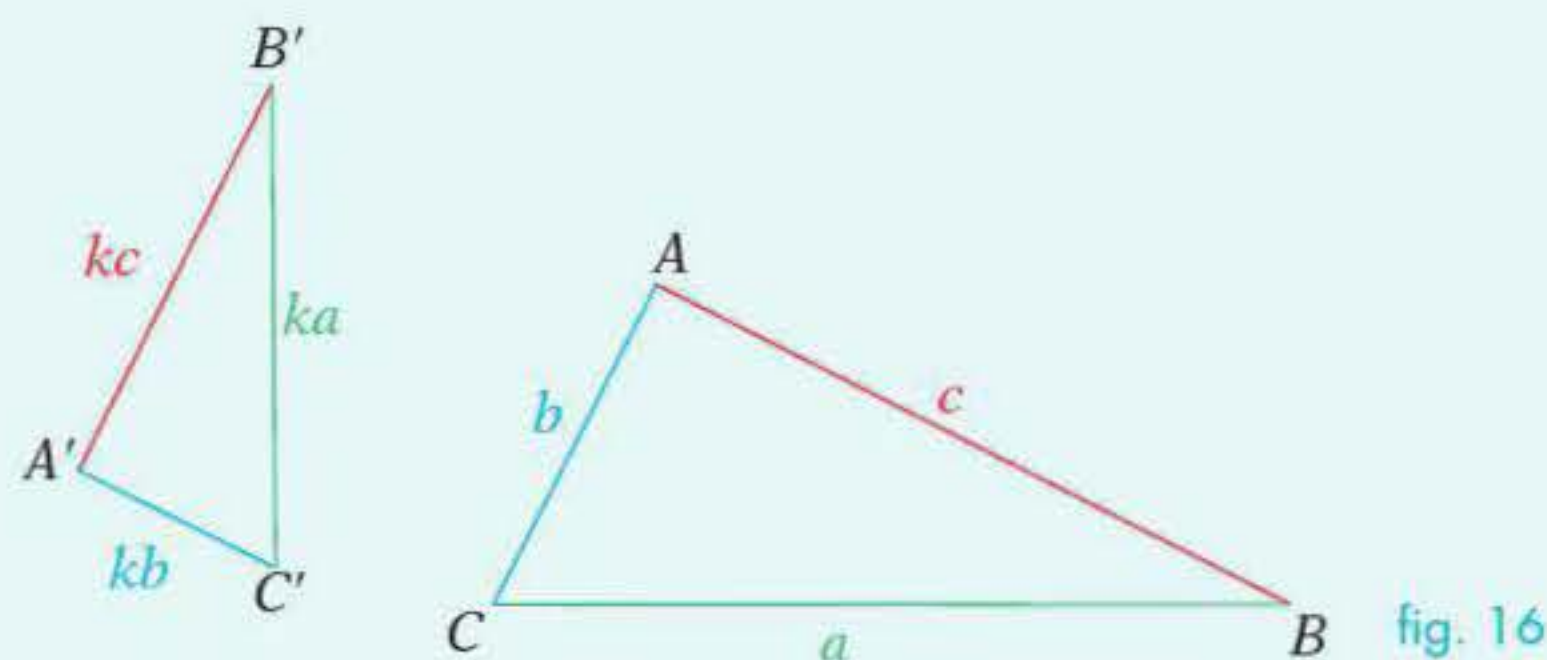
Énoncé 10.2

Si deux triangles ont respectivement un angle de même amplitude et si les côtés adjacents à cet angle sont proportionnels, alors ces triangles sont semblables.



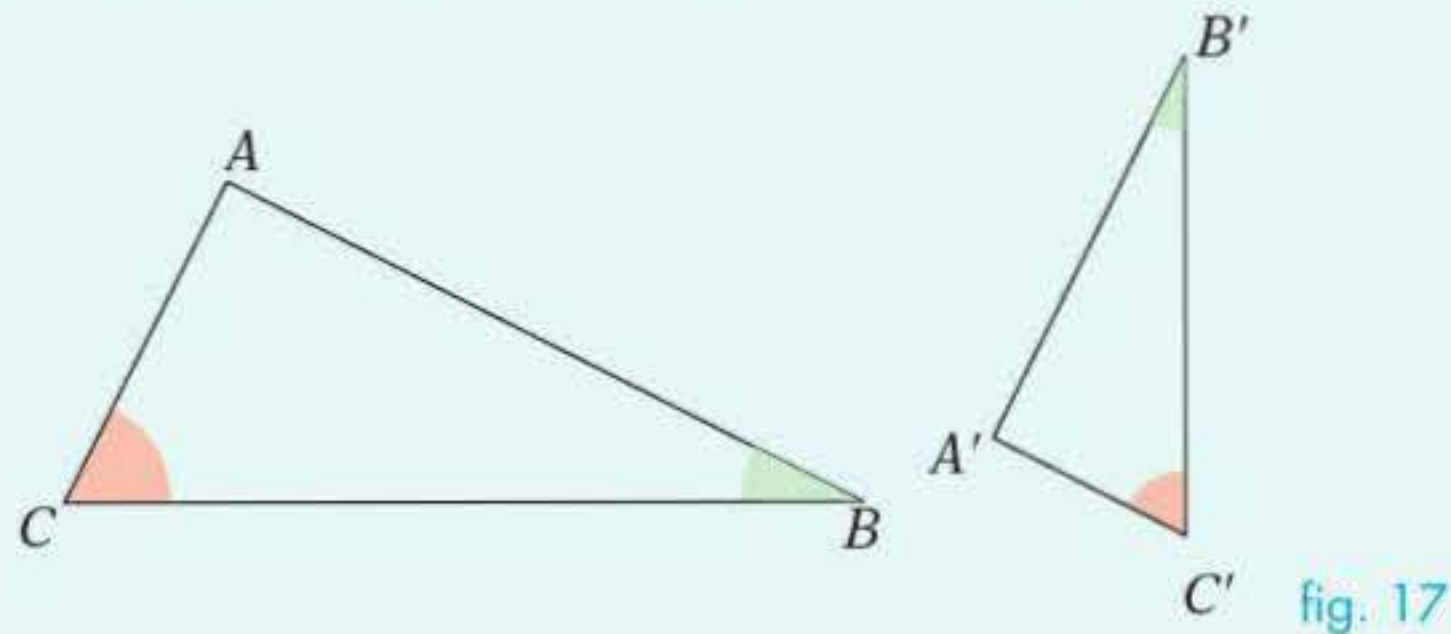
Énoncé 10.3

Si deux triangles ont respectivement leurs trois côtés proportionnels, ils sont semblables.



Énoncé 10.4

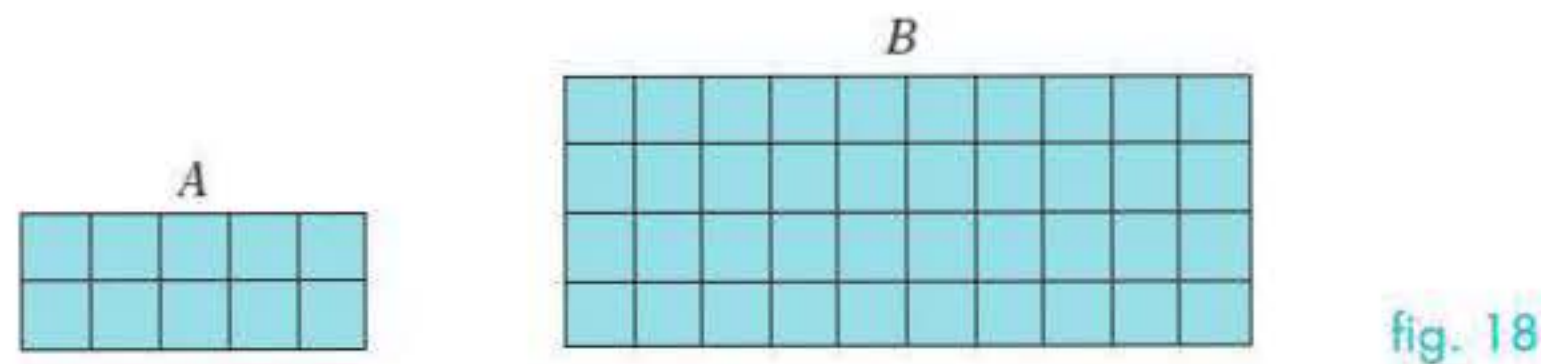
Si deux triangles ont respectivement deux angles de même amplitude, ils sont semblables.



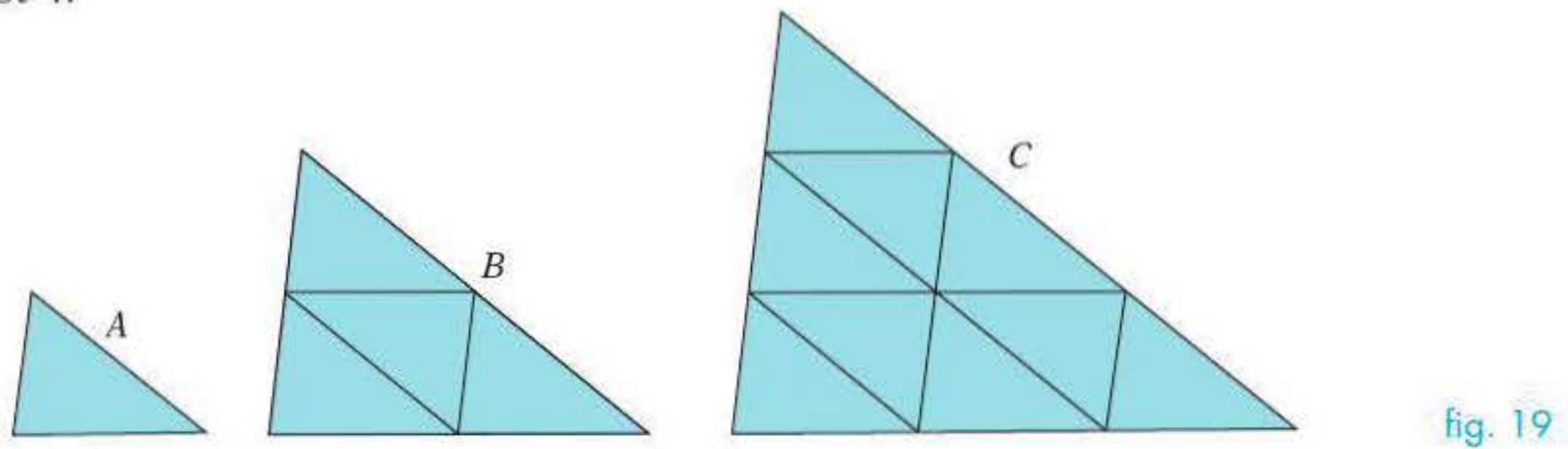
Deux angles suffisent pour reconnaître ou justifier une similitude ; cependant, si l'on veut déterminer le rapport de similitude, il faut connaître les mesures respectives d'un segment de la figure et de son homologue.

4. Quelle est la relation entre le rapport de similitude et le rapport entre les aires ?

Exemples



Le rapport de similitude qui envoie le rectangle A sur le rectangle B est 2. Le rapport de leurs aires est 4.



Le rapport de similitude qui envoie le triangle A sur le triangle B est 2. Le rapport de leurs aires est 4.

Le rapport de similitude qui envoie le triangle A sur le triangle C est 3. Le rapport de leurs aires est 9.

Le rapport de similitude qui envoie le triangle A sur le triangle C est 1,5. Le rapport de leurs aires est $1,5^2 = 2,25$.

Énoncé 10.5

Le rapport entre les aires de deux figures semblables est le carré de leur rapport de similitude.

5. Qu'est-ce qu'une moyenne géométrique ?

Exemple

La mesure du côté du carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle de 4 cm sur 6 cm est la racine carrée de 36, soit 6 cm.

Le nombre 6 est la **moyenne géométrique** des nombres 4 et 9 (voir fig. 11).

La formule qui permet de calculer le côté c d'un carré qui a la même aire qu'un rectangle de longueur a et de largeur b est $c^2 = a \cdot b$.

Ainsi, le côté du carré est la moyenne géométrique entre les dimensions d'un rectangle de même aire.

6. Comment écrire l'égalité $c^2 = a \cdot b$ sous forme de proportion ?

La moyenne géométrique c entre a et b est aussi appelée **moyenne proportionnelle** entre a et b . Cette expression vient de ce que la proportion $\frac{c}{a} = \frac{b}{c}$ est directement déduite de l'égalité $c^2 = a \cdot b$.

Énoncé 10.6

La moyenne géométrique entre deux nombres positifs est la racine carrée positive du produit de ces nombres.

7. Quels énoncés retenir à propos de la moyenne géométrique ?

Énoncé 10.7

Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Cela signifie, avec les notations de la fig. 20, que

$$h^2 = a \cdot b.$$

La démonstration a été faite lors de l'exploration.

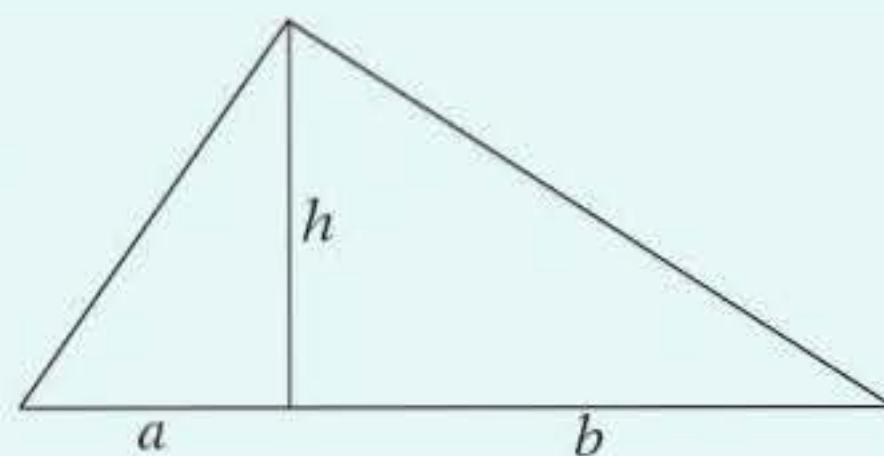


fig. 20

Énoncé 10.8

Si la hauteur relative au plus grand côté d'un triangle est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, alors ce triangle est rectangle.

La démonstration a été faite lors de l'exploration.

Énoncé 10.9

Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse. Cela signifie, avec les notations de la fig. 21, que

$$\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CB}.$$

La démonstration est proposée dans les exercices.

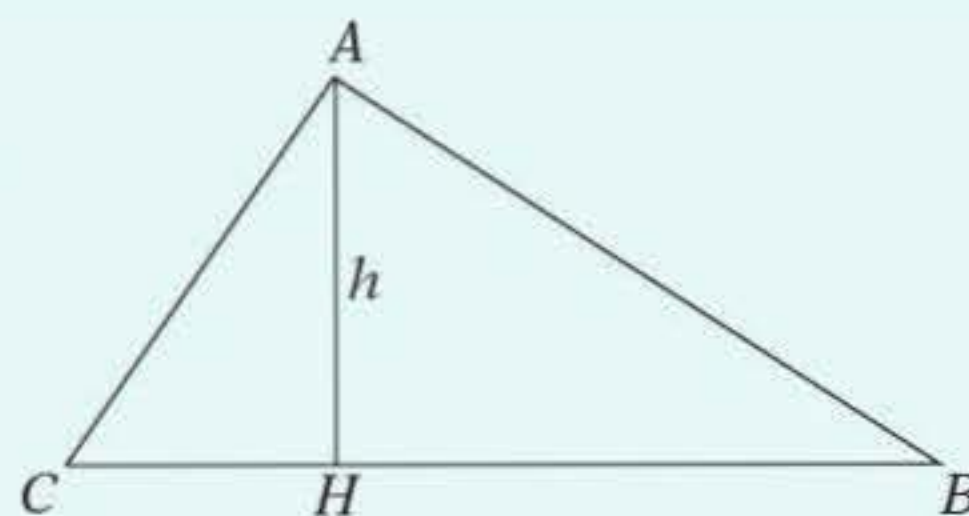


fig. 21

Énoncé 10.10

Si par un point extérieur on mène une tangente et une sécante à un cercle, la tangente limitée à son point de contact avec le cercle est moyenne proportionnelle entre les segments déterminés par les intersections de la sécante issue avec ce cercle. Cela signifie, avec les notations de la fig. 22, que

$$\overline{XC}^2 = \overline{XB} \cdot \overline{XA}.$$

La démonstration est proposée dans les exercices.

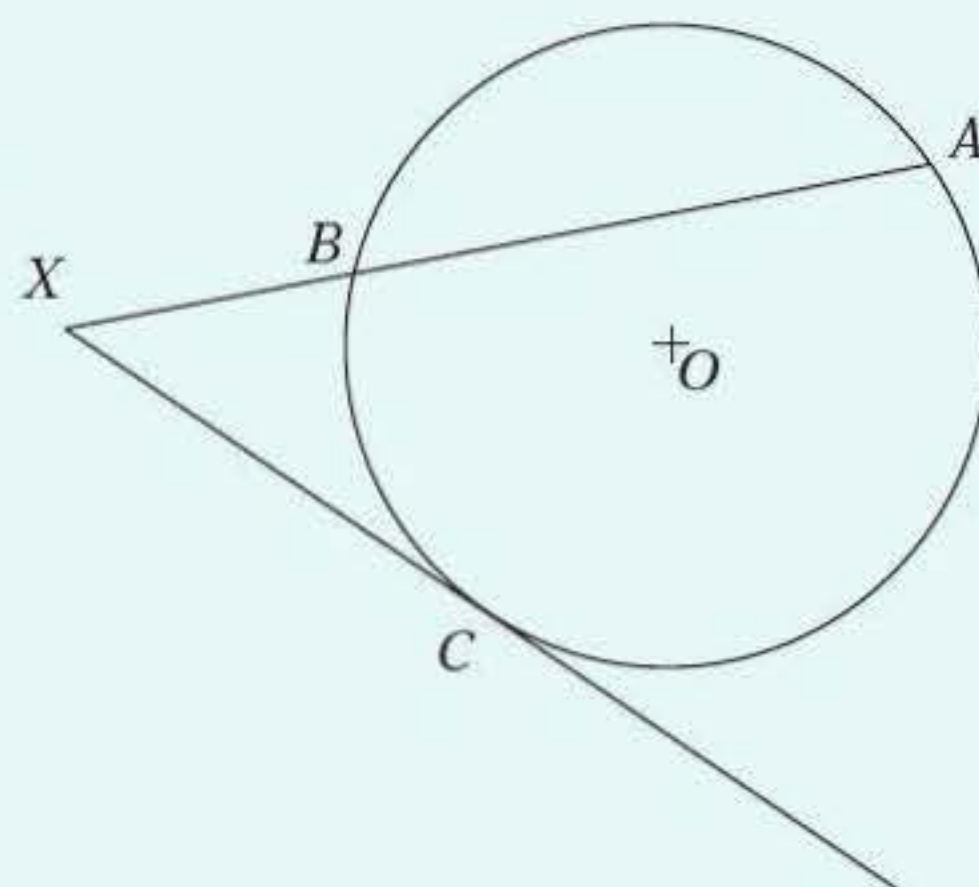


fig. 22

Expliciter les savoirs et les procédures

1. Un réseau de triangles

Sur la fig. 23, on a tracé des parallèles aux côtés du triangle ABC . Les parallèles sont équidistantes entre elles dans chacune des directions.

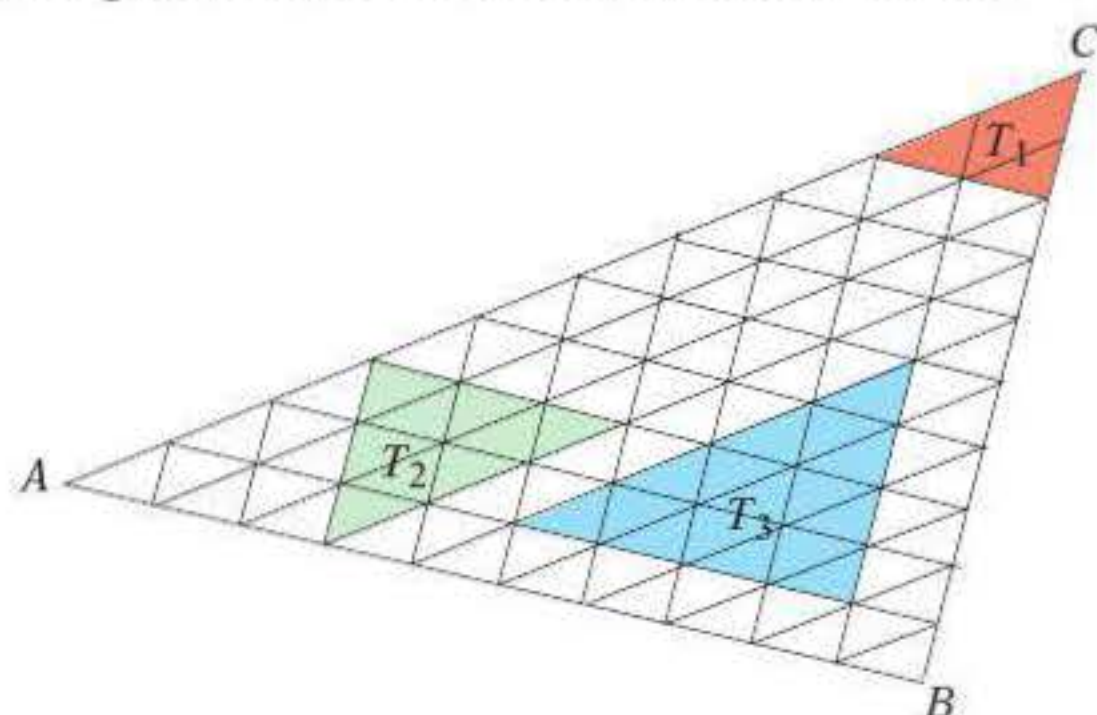


fig. 23

- Les trois côtés du triangle T_1 sont-ils proportionnels à ceux du triangle ABC ? Si oui, quel est le rapport d'agrandissement ?
- Le triangle T_1 et le triangle ABC ont-ils deux à deux des angles de même amplitude ? Justifier.
- T_2 et ABC sont-ils semblables ? Si c'est le cas, déterminer leur rapport de similitude (agrandissement).
- ABC et T_3 sont-ils semblables ? Si c'est le cas, déterminer leur rapport de similitude (réduction).
- T_2 et T_3 sont-ils semblables ? Si c'est le cas, déterminer leur rapport de similitude (agrandissement).

2. Sur une trame de triangles

Parmi les figures ci-dessous, quelles sont celles qui sont semblables ? Justifier.

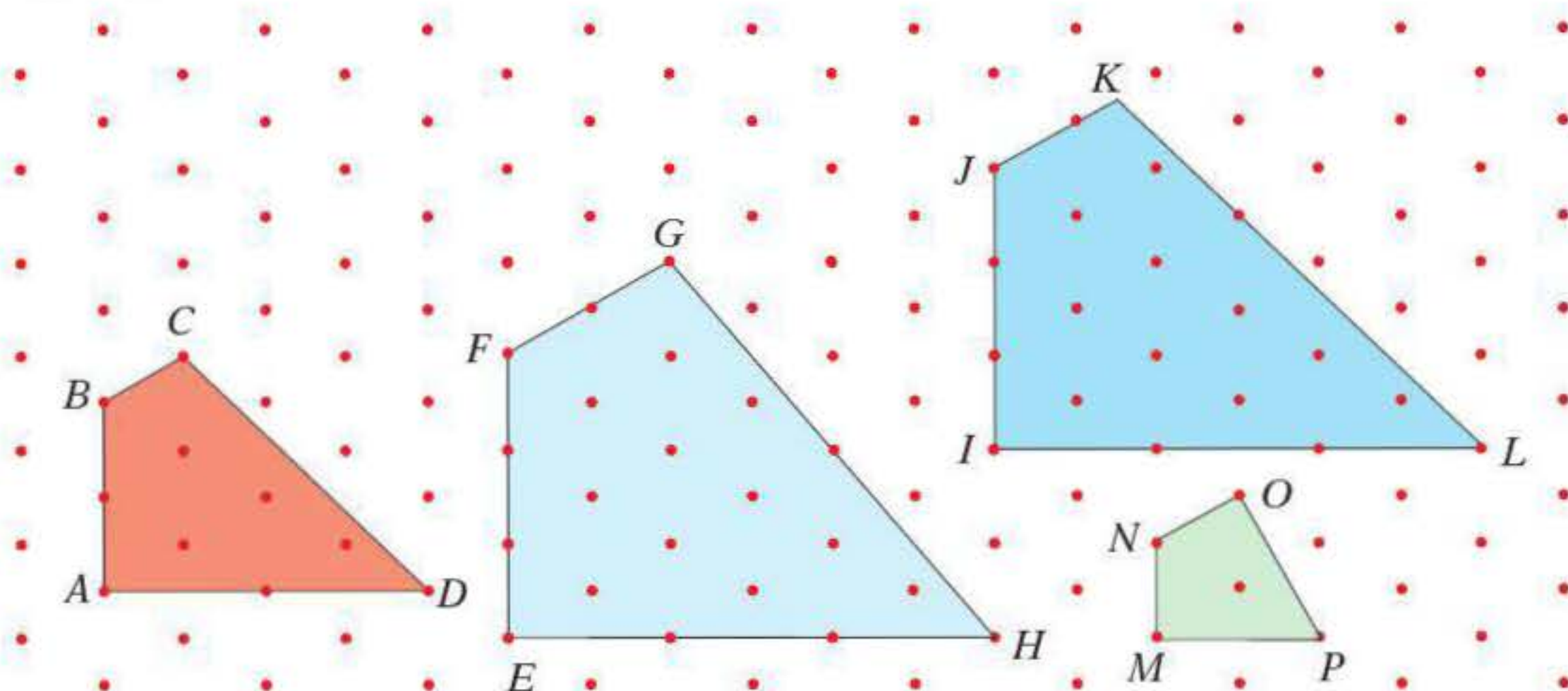


fig. 24

3. Vrai ou faux ?

Répondre par vrai ou faux, justifier.

- a. Si on augmente chacun des côtés d'un triangle scalène d'un centimètre, on obtient un triangle semblable.
- b. Si on augmente chacun des côtés d'un triangle équilatéral d'un centimètre, on obtient un triangle semblable.
- c. Un losange dont les diagonales mesurent respectivement 6 cm et 8 cm est semblable à un losange dont les diagonales mesurent 8 cm et 10 cm.
- d. Tous les carrés sont semblables.

4. De bonnes conditions

À quelles conditions deux rectangles sont-ils semblables ? Deux losanges ? Deux parallélogrammes ?

Appliquer une procédure

5. D'une similitude à l'autre

Les triangles T_1, T_2, T_3, T_4 sont semblables.

Voici les mesures de certains côtés des triangles de la fig. 25.

$\overline{a_1} = 10$	$\overline{b_1} = \dots$	$\overline{c_1} = \dots$
$\overline{a_2} = 12,5$	$\overline{b_2} = 26,25$	$\overline{c_2} = \dots$
$\overline{a_3} = \dots$	$\overline{b_3} = 32,8125$	$\overline{c_3} = 25,78125$
$\overline{a_4} = \dots$	$\overline{b_4} = \dots$	$\overline{c_4} = 32,2265625$

- a. Calculer les mesures des autres côtés.
- b. Si cela est possible avec les données fournies, calculer le rapport $\frac{\text{aire } T_3}{\text{aire } T_1}$.

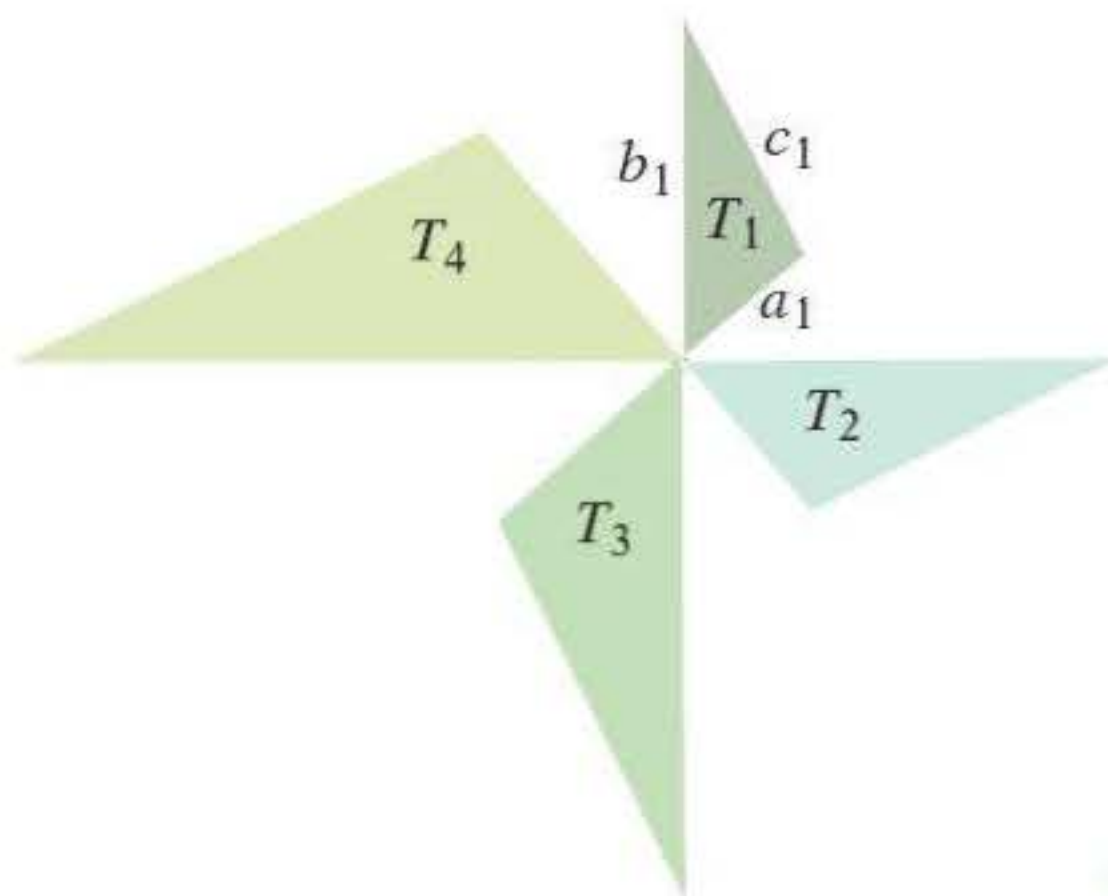


fig. 25

6. Deux caisses

Les parallélépipèdes de la fig. 26 sont semblables.

- Calculer la profondeur du bleu et la hauteur du vert.
- Par quel nombre faut-il multiplier le volume du plus petit pour obtenir celui du plus grand ?

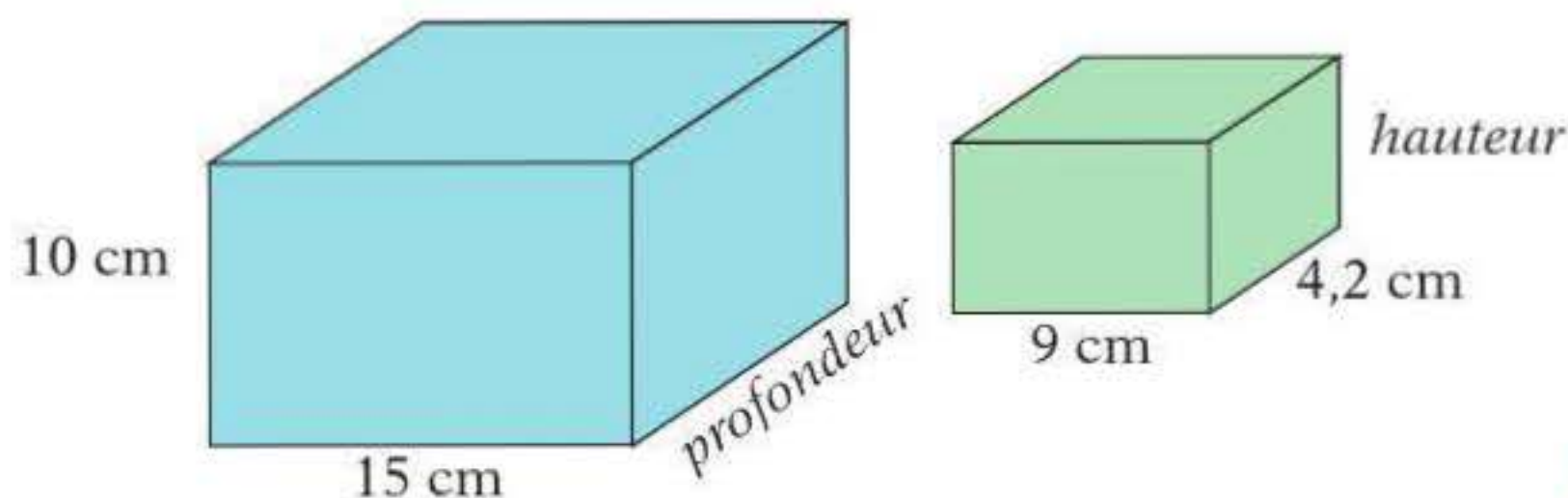


fig. 26

7. Deux cônes

Deux cônes sont emboîtés comme sur la fig. 27.

- Déterminer le rayon r du plus petit des deux.
- Déterminer le rapport entre l'aire du grand disque et celle du petit.
- Déterminer le rapport entre le volume du petit cône et celui du grand.

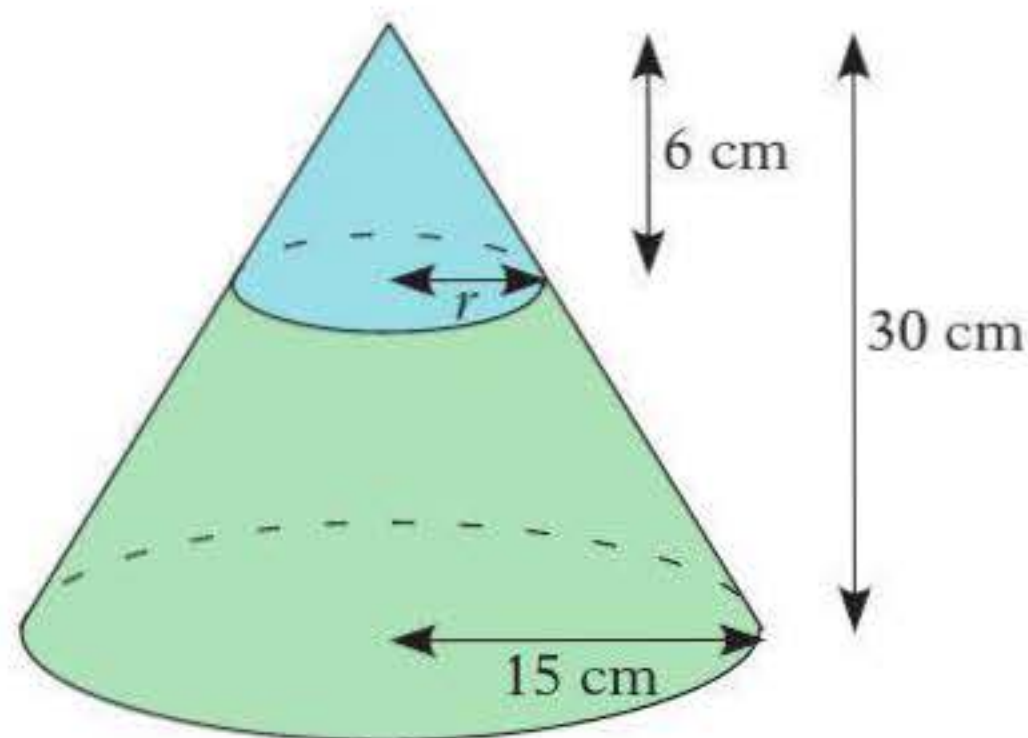


fig. 27

Résoudre un problème

8. De milieu en milieu

Vrai ou faux ?

- Un triangle est semblable à celui qui a pour sommets les milieux de ses trois côtés.
- Un quadrilatère est semblable à celui qui a pour sommets les milieux de ses quatre côtés.
- Si on joint les milieux des côtés d'un quadrilatère, on obtient un parallélogramme.

9. Dans un repère

Placer six points dans un repère.

$A(2; 2)$ $B(0; 6)$ $C(8; 4)$

$A'(0; -2)$ $B'(1; -4)$ $C'(-3; -3)$.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont-ils semblables ?

10. Agrandir à partir d'un point

a. Dans certains logiciels de dessin, lorsque l'on « tire » en prenant l'un des sommets d'un rectangle comme poignée, le sommet se déplace dans la direction de la diagonale du rectangle pour déterminer un nouveau rectangle.

Ce nouveau rectangle est-il semblable au premier ?

b. Adèle prolonge les diagonales et les médianes du rectangle $ABCD$ d'un tiers de leur longueur comme sur la fig. 29.

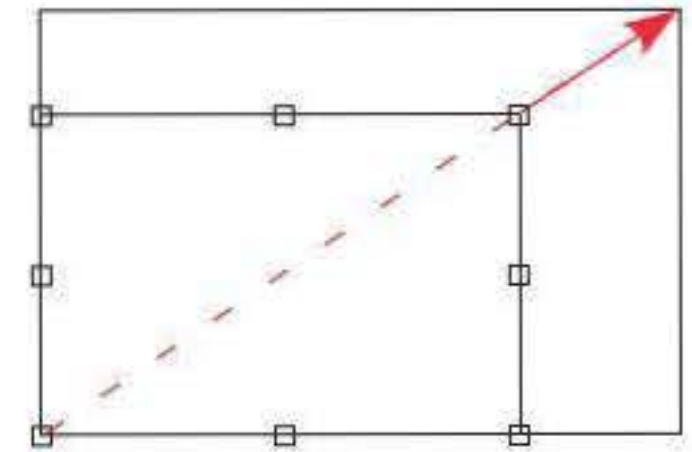


fig. 28

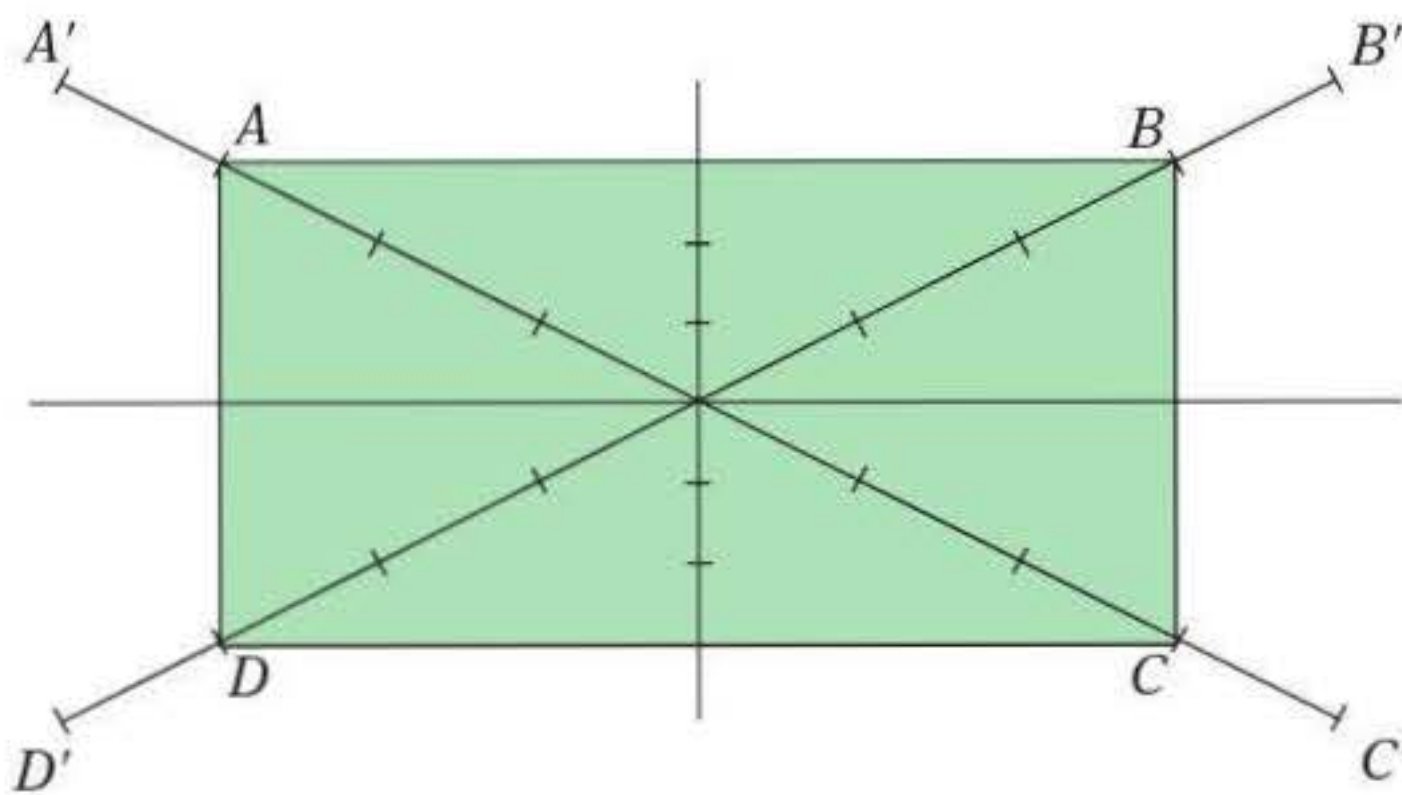


fig. 29

Le quadrilatère obtenu est-il semblable au quadrilatère $ABCD$? Justifier.

c. Théo choisit un point quelconque qu'il relie à chacun des sommets du rectangle $ABCD$ (voir fig. 30). Comme Adèle, il porte sur chacune de ces demi-droites le tiers de la distance du sommet au point choisi.

Le quadrilatère obtenu est-il semblable au quadrilatère $ABCD$? Justifier.

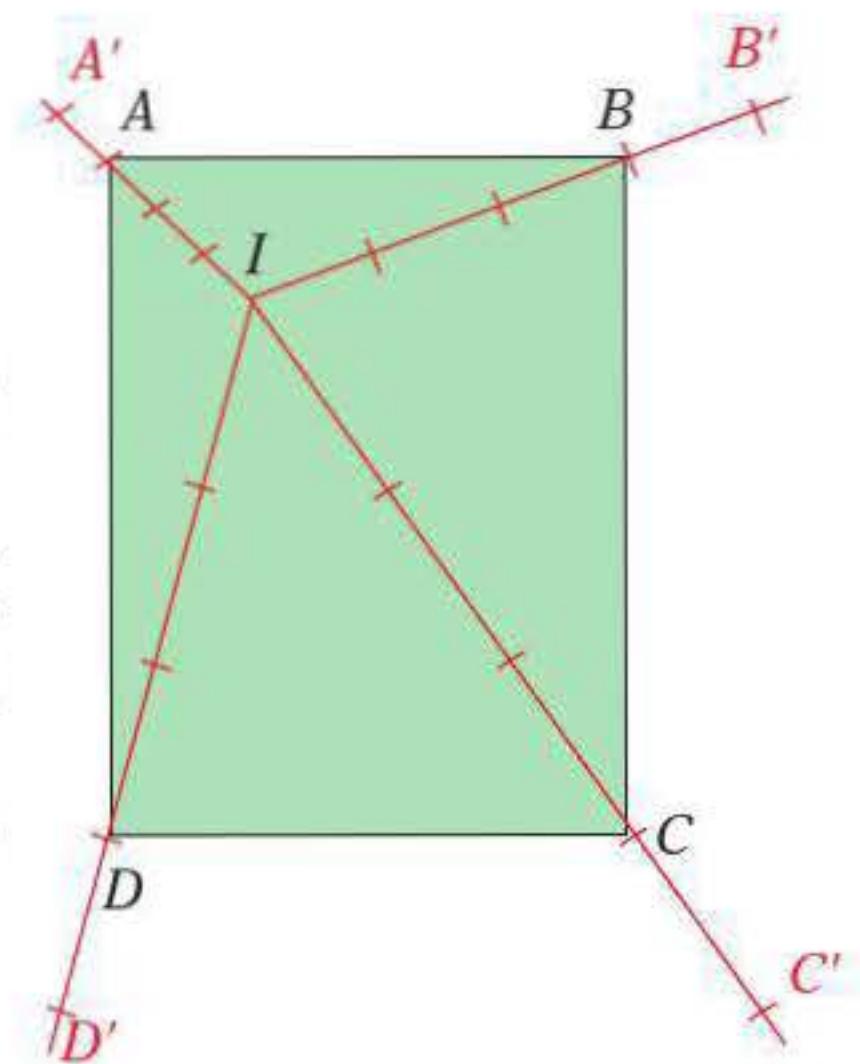


fig. 30

11. La médiane d'un triangle

Démontrer que dans un triangle, la médiane correspondant à un côté partage en deux parties égales les parallèles à ce côté limitées aux deux autres.

Indication

Utiliser les deux paires de triangles qui ont la médiane comme côté commun. Prouver qu'ils sont semblables. Écrire les rapports de similitude et utiliser la propriété : si deux fractions égales ont même dénominateur, alors les numérateurs sont égaux.

12. Comparer les aires

Soit un triangle de 45 cm^2 . Si l'on trace aux deux tiers de la hauteur (à partir du sommet), une parallèle à la base, quelle est l'aire du triangle ainsi formé ?

13. Démontrer et calculer

Dans la fig. 31, on a : $\overline{AB} = \overline{BC}$ et $\overline{AD} = \overline{AC}$.

- Démontrer que les triangles ABC et DAC sont semblables.
- Utiliser cette similitude pour calculer \overline{AC} si $\overline{BD} = 0,7 \text{ m}$ et $\overline{BC} = 0,9 \text{ m}$.

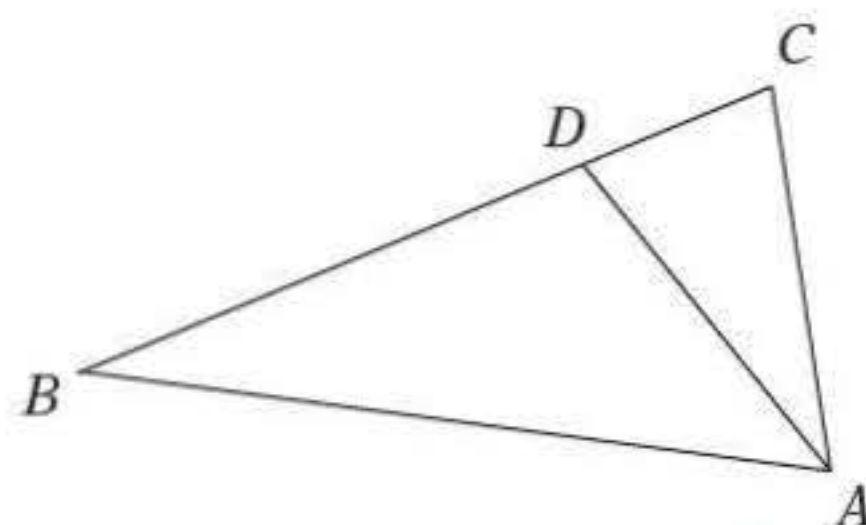


fig. 31

14. Une spirale de triangles

On part d'une étoile de trois demi-droites qui forment entre elles des angles de même amplitude.

Sur la première, on place un point A .

Sur la seconde, on place B tel que $\overline{OB} = \frac{\overline{OA}}{2}$.

Le point C est sur la troisième avec $\overline{OC} = \frac{\overline{OB}}{2}$.

De même D sur $[OA]$ est tel que $\overline{OD} = \frac{\overline{OC}}{2}$.

- Si $\overline{AB} = 243 \text{ mm}$, quelle est la mesure de \overline{DC} ? Justifier.
- Si on plaçait un point E sur $[OB]$ tel que $\overline{OE} = \frac{\overline{OD}}{2}$, la droite DE serait-elle parallèle à AB ? Explorer, démontrer.
- Quel est le rapport de l'aire du triangle ODE à celle du triangle OAB ?

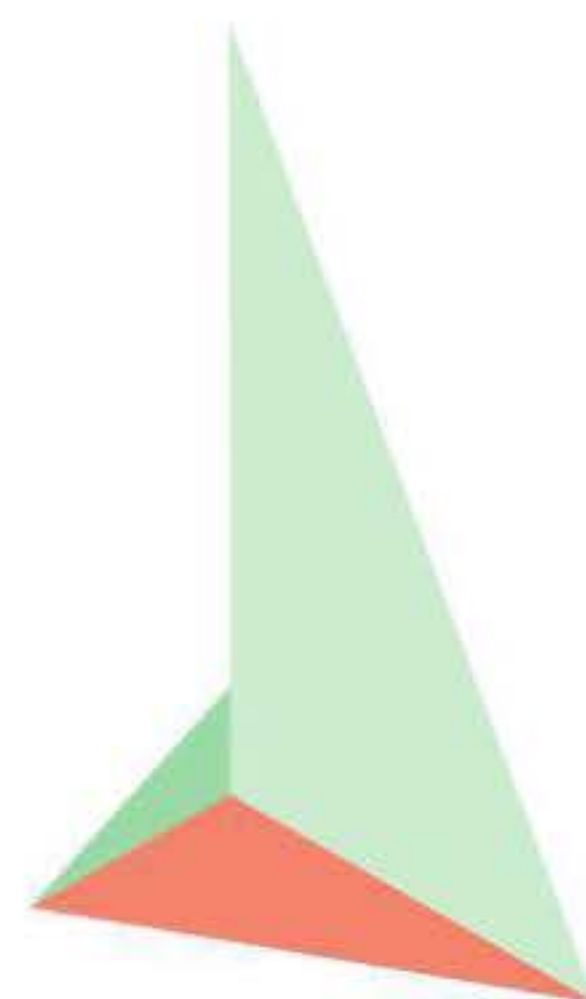


fig. 32

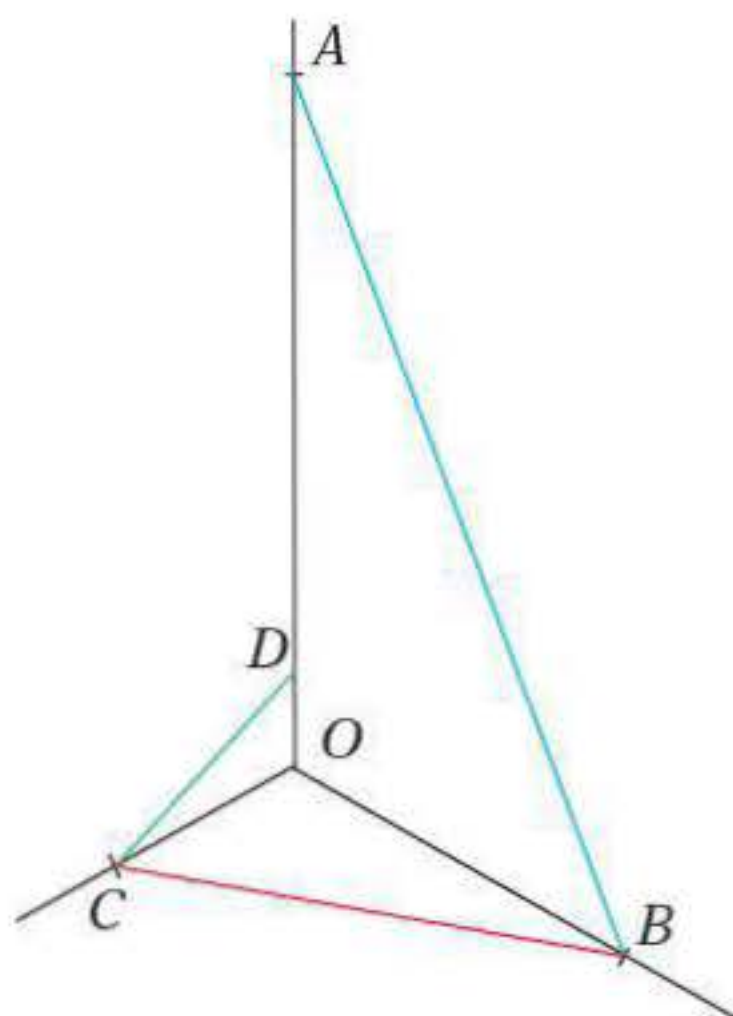


fig. 33

Pour aller plus loin

15. Les trois hauteurs d'un triangle

Construire les trois hauteurs d'un triangle rectangle, d'un triangle isocèle, d'un triangle scalène acutangle et d'un triangle scalène obtusangle.

Formuler une conjecture puis la démontrer.

Indication

Partir d'un triangle scalène et mener les parallèles aux côtés passant chacune par un sommet de ce triangle. Montrer ensuite que les hauteurs du premier triangle sont les médiatrices du second.

16. Retour du triangle rectangle !

Démontrer que, dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse.

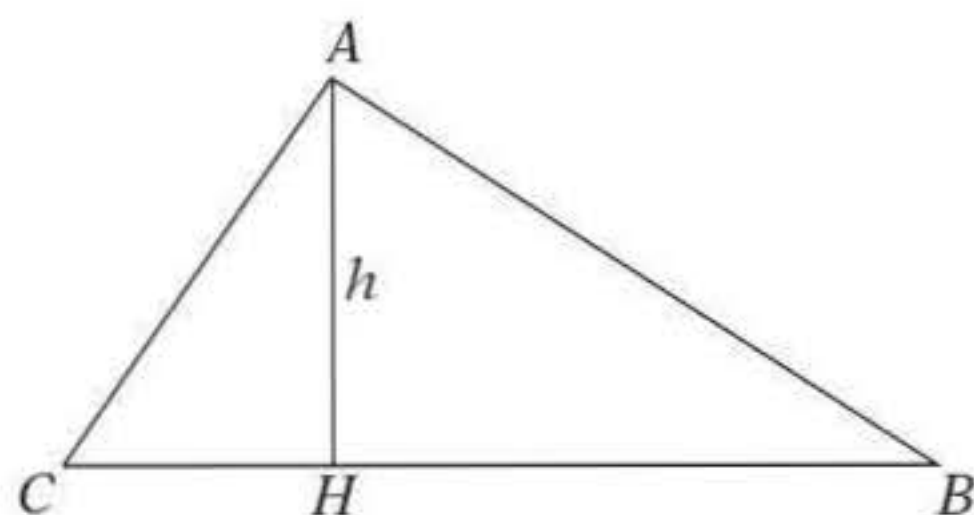


fig. 34

$$\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CB}$$

17. Deux sécantes

Soit deux droites sécantes en X (voir fig. 35 et 36). La première coupe un cercle de centre O en A et en B . La seconde en C et en D . Montrer que $\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}$.

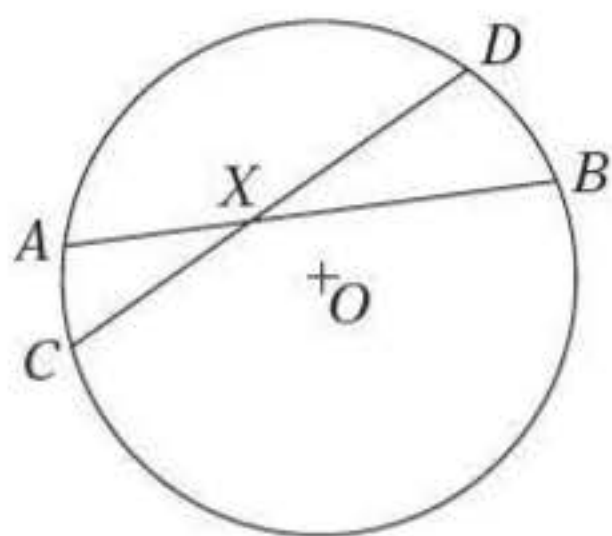


fig. 35

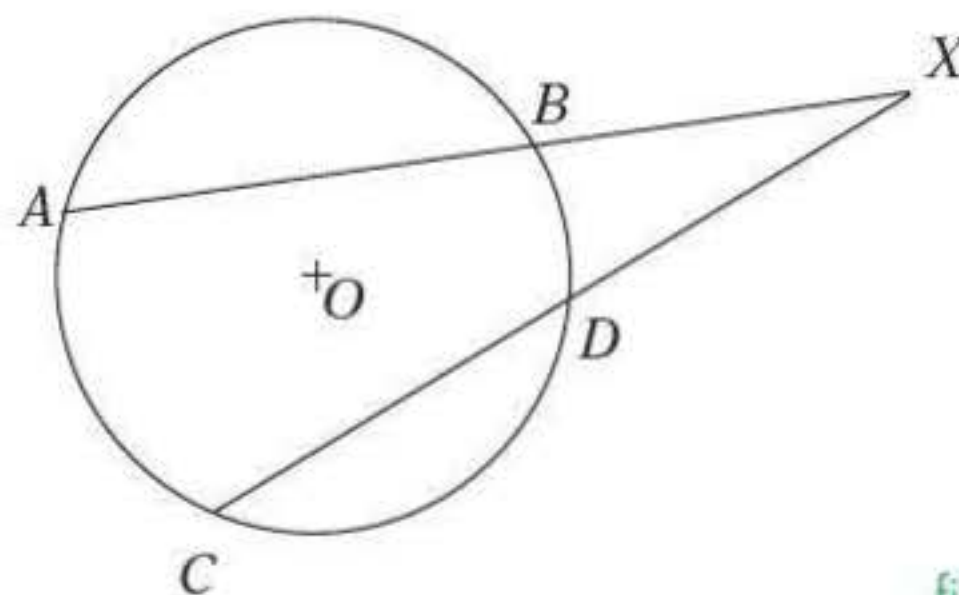


fig. 36

18. Une tangente et une sécante

Par un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante à ce cercle. Démontrer que la tangente, limitée à son point de contact avec le cercle, est moyenne proportionnelle entre les deux segments déterminés par l'intersection de la sécante avec le cercle.

Indication

Démontrer d'abord que la propriété est vraie pour une sécante qui passe par le centre du cercle, puis utiliser la propriété précédente (ex. 17) pour généraliser.

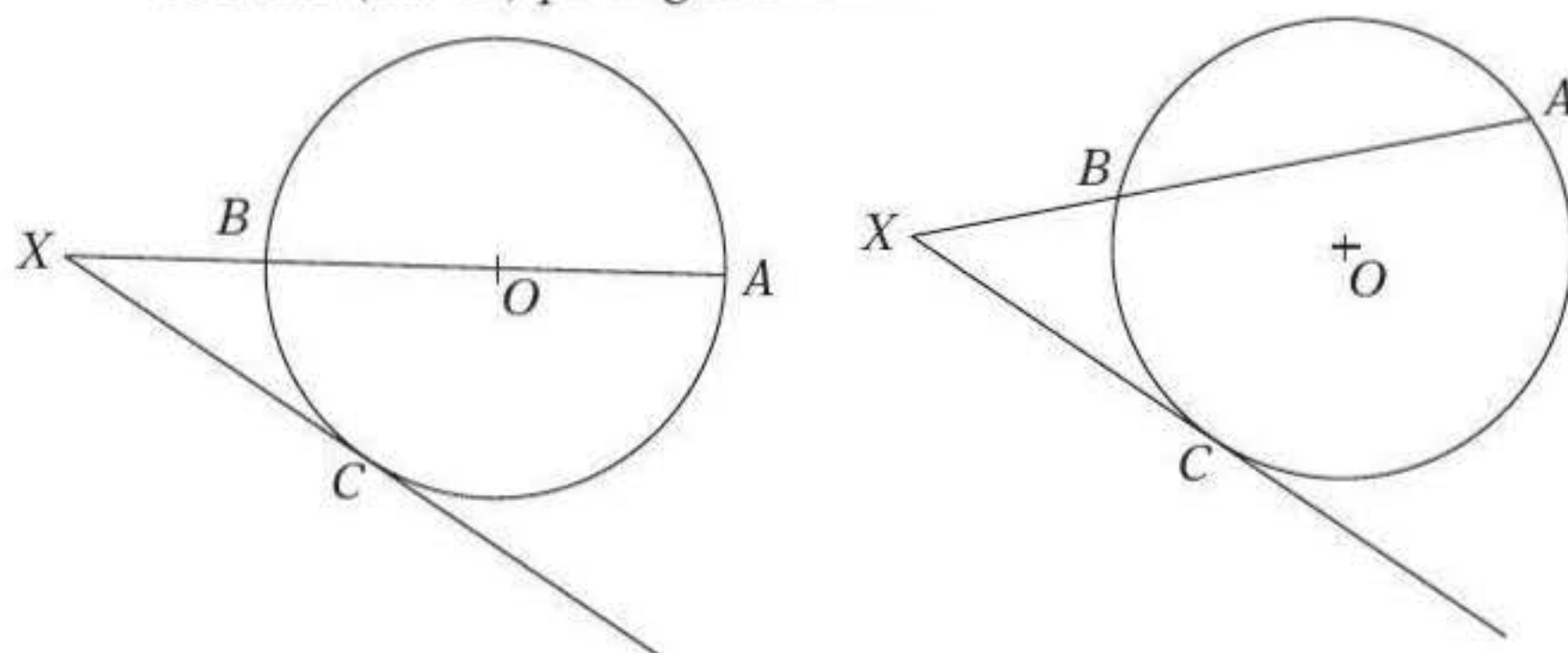


fig. 37

19. Chapeau !

Un cylindre d'un rayon de 10 cm peut être introduit dans un cône comme sur la fig. 38. La hauteur du cône est de 24 cm. Le rayon de sa base est 16 cm. Quelle est la hauteur du cylindre ?

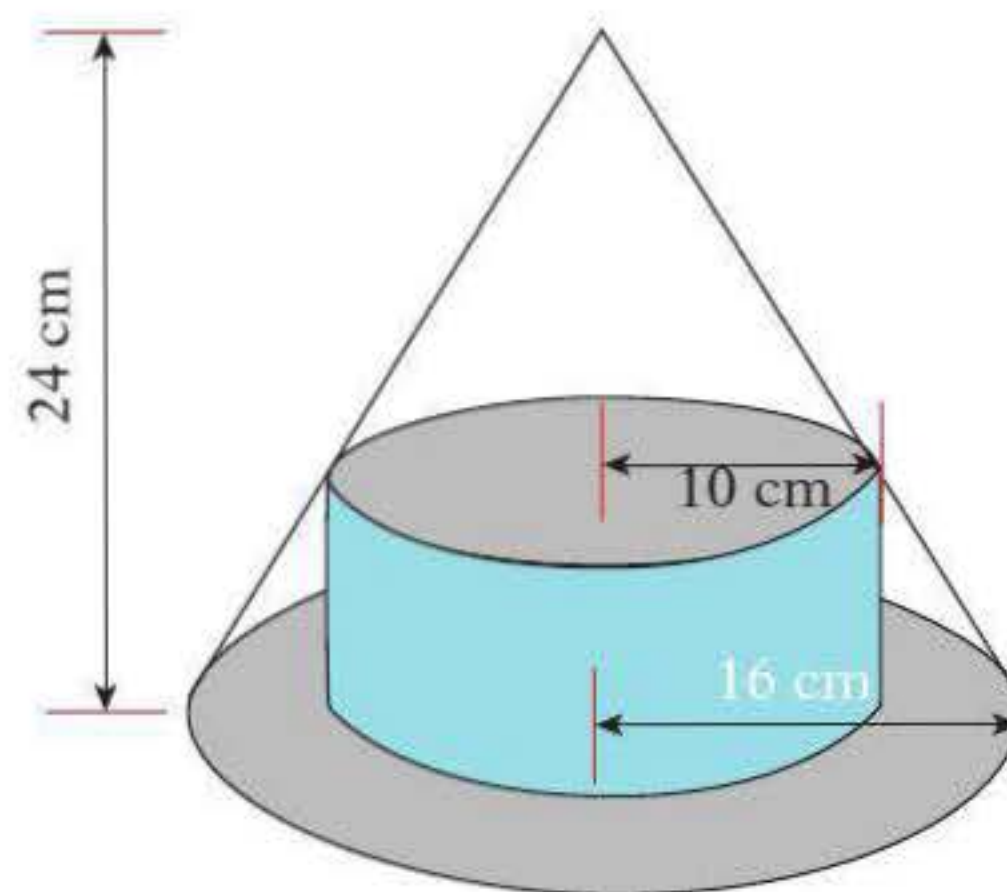


fig. 38

20. La piscine

Après entretien, on remplit à nouveau une piscine de 6 m sur 20 m. La fig. 39 en donne une vue de profil. Quelle est la surface d'eau lorsque, dans la grande profondeur, l'eau a atteint 2 m de haut ?

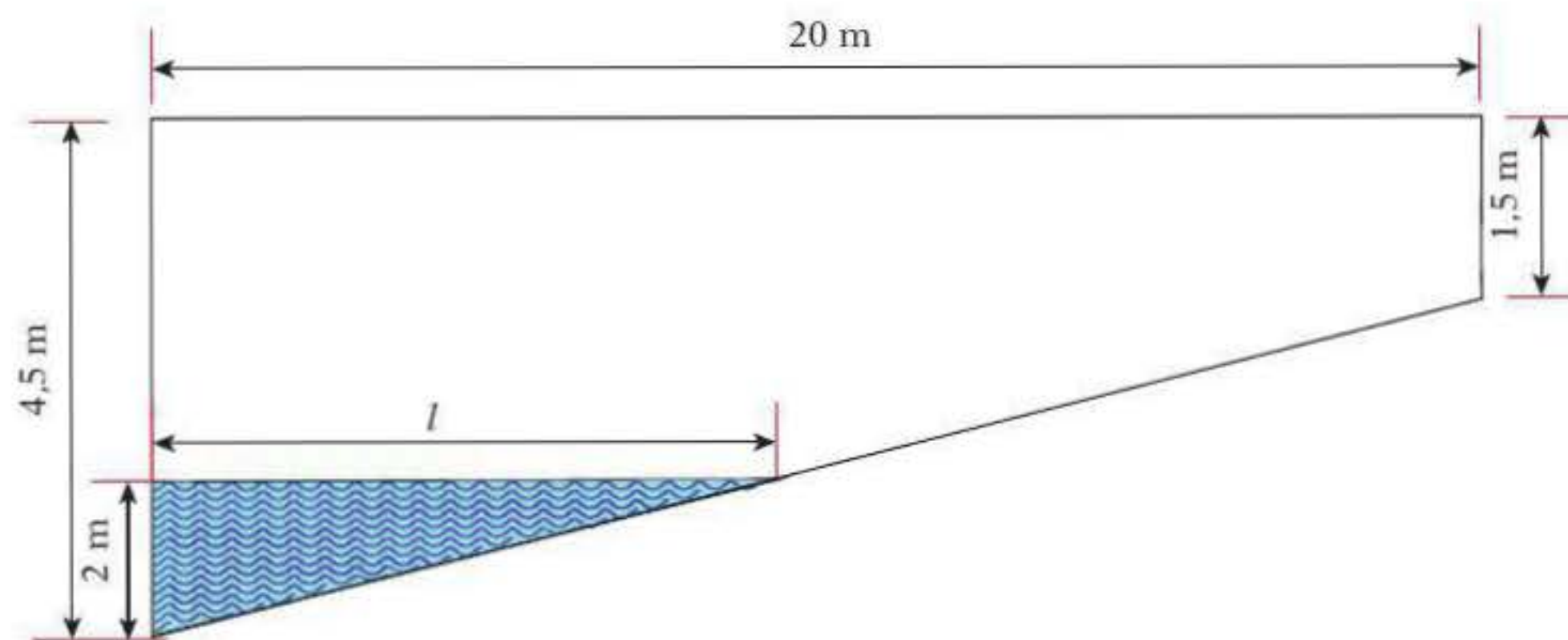


fig. 39

21. Construire un rectangle d'or

En partant d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit vaut la moitié de l'autre et en portant l'hypoténuse dans le prolongement du petit côté (fig. 40), on détermine un segment de longueur b . Le rectangle de dimensions a et b est un rectangle d'or.

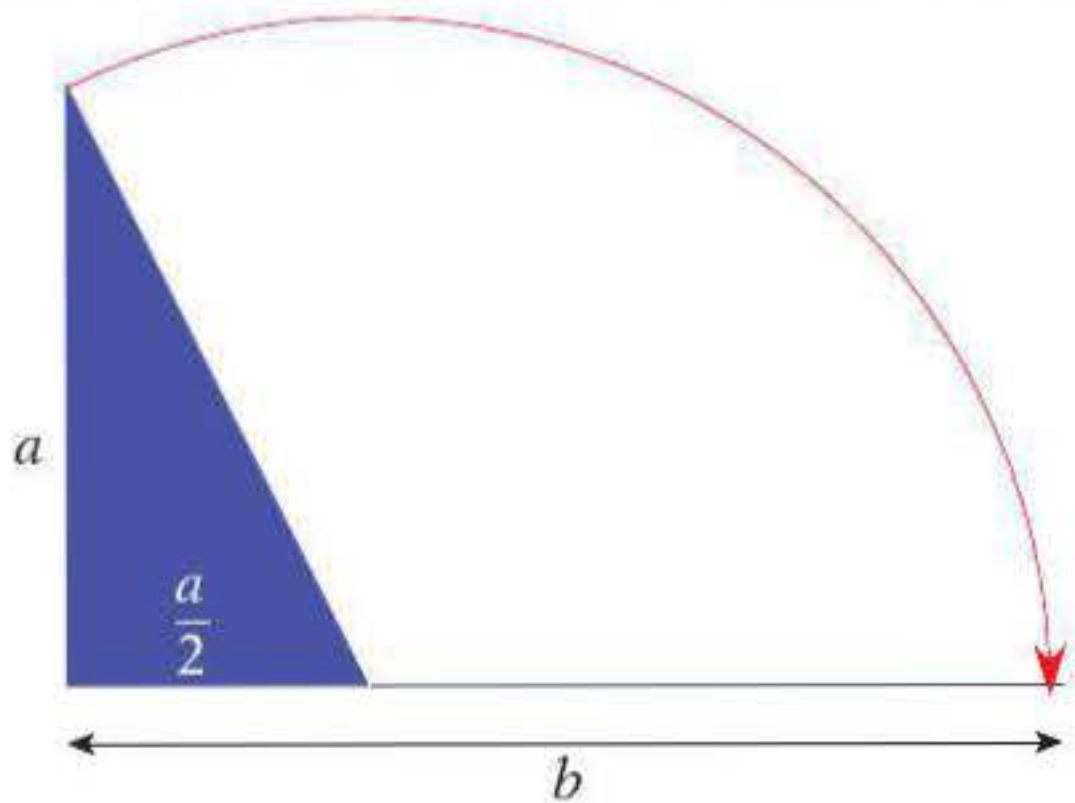


fig. 40

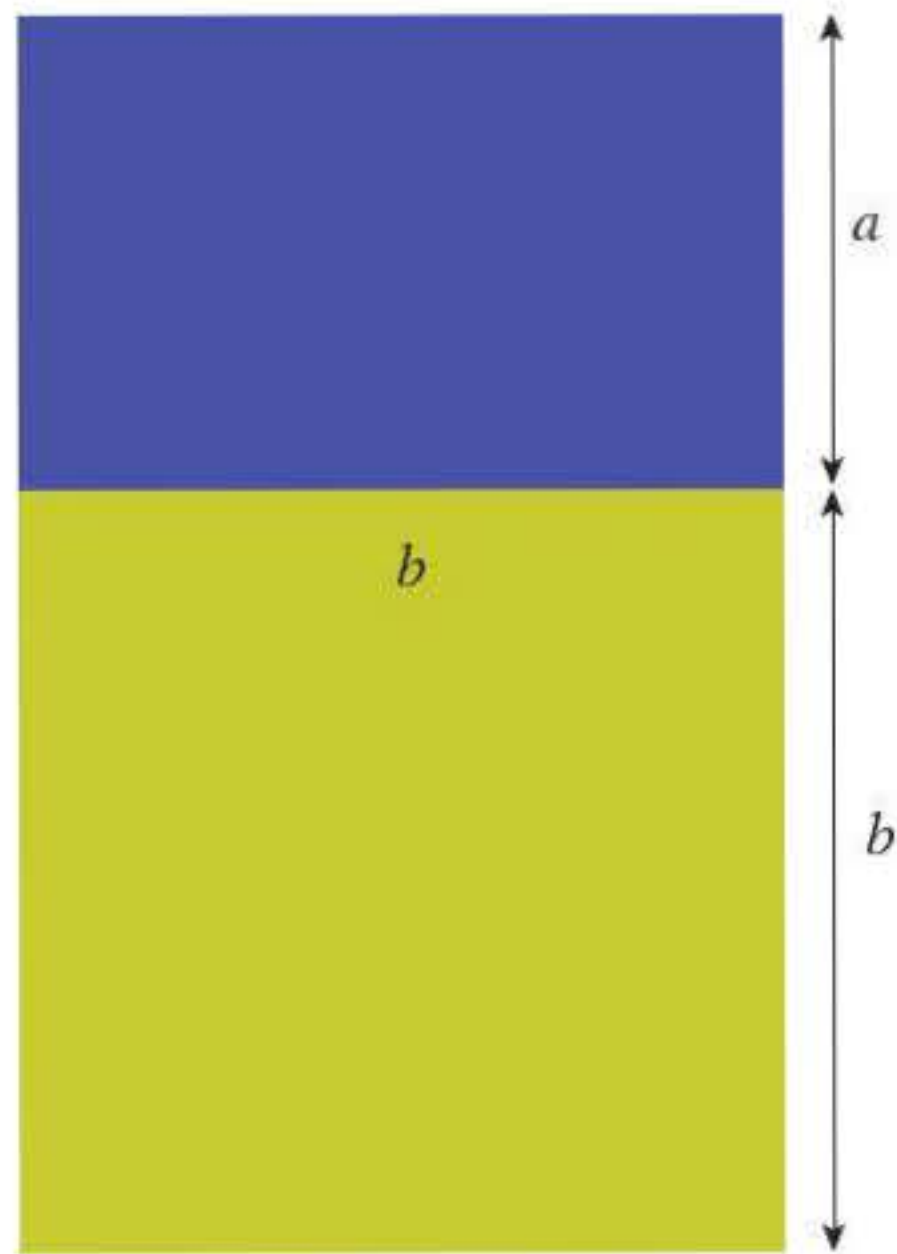
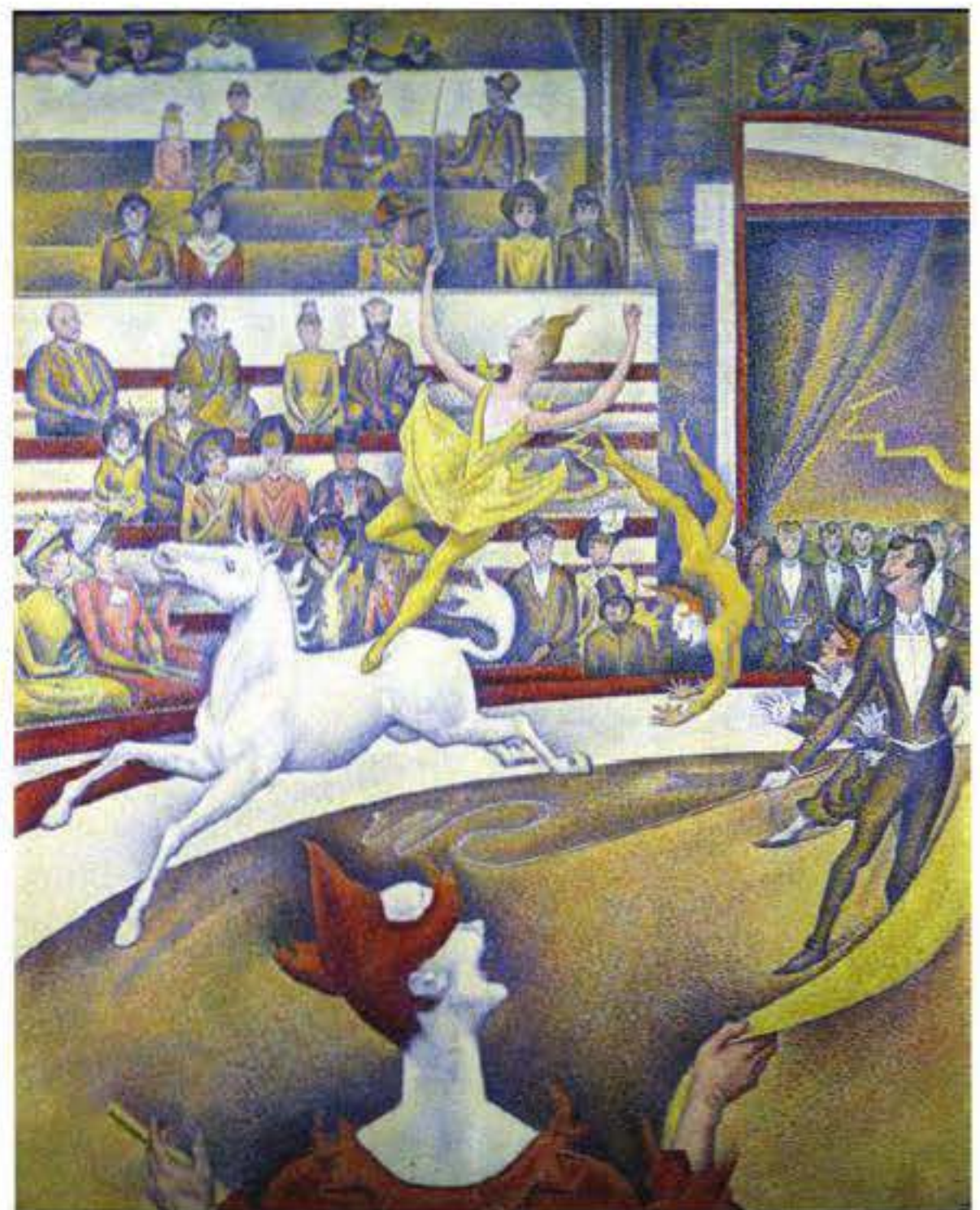


fig. 41

- Calculer b en fonction de a .
- Construire un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 dm.
- Le coefficient de forme de ces rectangles (le rapport $\frac{b}{a}$) est le « nombre d'or », souvent désigné par la lettre φ . Déterminer la valeur exacte de φ , puis une valeur approchée par défaut au millième près.
- Montrer que si l'on accole un carré de côté b (fig. 41) à un rectangle d'or, le rectangle obtenu est aussi un rectangle d'or.

Le nombre d'or serait connu depuis la nuit des temps. On le trouve au cœur de la pyramide de Khéops, sur les façades des temples grecs, dans les cathédrales gothiques, chez les peintres du début du vingtième siècle. Il aurait été transmis par les pythagoriciens comme un secret universel et immuable. Chez les Grecs, il était considéré comme un rapport entre deux segments et n'avait pas le statut de « nombre » : pour eux, seuls les entiers sont des nombres.

Certains tableaux ont été conçus selon les règles de la « divine proportion » (expression datant de 1509 et attribuée à Léonard de Vinci). Ainsi, dans le tableau Le Cirque, Georges Seurat aurait utilisé le rapport doré pour disposer différentes parties.



Le Cirque (1891), Seurat, Paris, Musée d'Orsay.

fig. 42

11

trigonométrie du triangle rectangle

Nous avons vu que la relation de Pythagore dans le triangle rectangle permet de calculer la longueur d'un côté en fonction des autres. Avec la trigonométrie, on articule mesures d'angles et mesures de longueurs.

Le mot trigonométrie vient du grec *trigone* (« triangle ») et *metria* (« mesure »). Dans l'Encyclopédie (1751), d'Alembert définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ». C'est la démarche qui sera suivie dans ce chapitre.

Pourtant, à ses débuts, la trigonométrie n'était pas un outil de calcul du triangle mais du cercle. Les Anciens s'intéressaient aux mouvements du Soleil et des astres et, deux mille ans avant notre ère, les babyloniens ont établi des **tables de données astronomiques**. À ce stade, la trigonométrie était une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers, elle était indissociable de l'astronomie. On sait que la numération des Babyloniens est sexagésimale (en base 60) et que les Grecs ont utilisé leurs tables d'astronomie. D'où le partage du cercle en 360 degrés !

Au fil du temps, la trigonométrie est devenue la science des arpenteurs, des géomètres, des navigateurs et des astronomes. Elle est utilisée en mécanique, en architecture, en physique, en géologie...

À l'issue de ce chapitre, chacun sera à même de résoudre quelques problèmes proches de ceux qui se posent dans la réalité.



Astrolabe

Cet instrument d'astronomie permet de mesurer un angle de visée dans un plan horizontal (l'azimut) et dans un plan vertical (la hauteur).

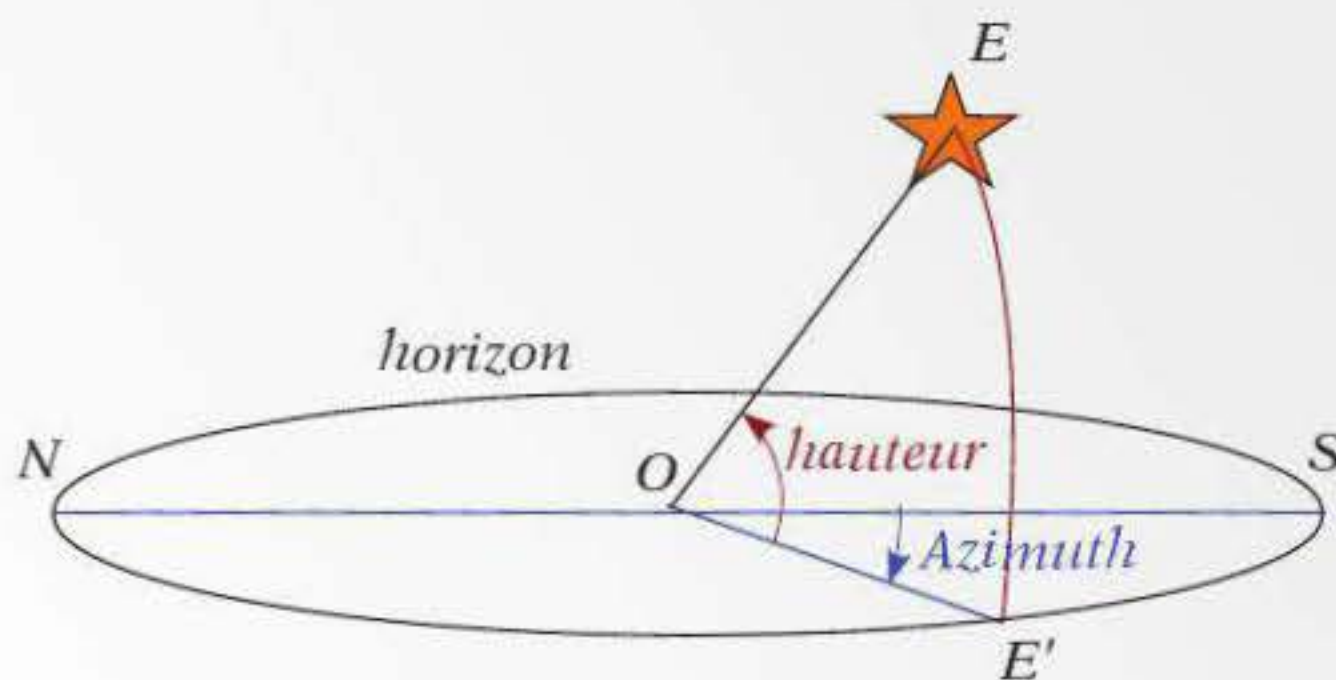


fig. 1

1. Le cosinus

Le Soleil étant très éloigné de la Terre, on considère que les rayons qui nous parviennent sont parallèles.

La projection orthogonale est une modélisation de l'ombre au soleil lorsque les rayons du soleil sont perpendiculaires au plan dans lequel se forme l'ombre.

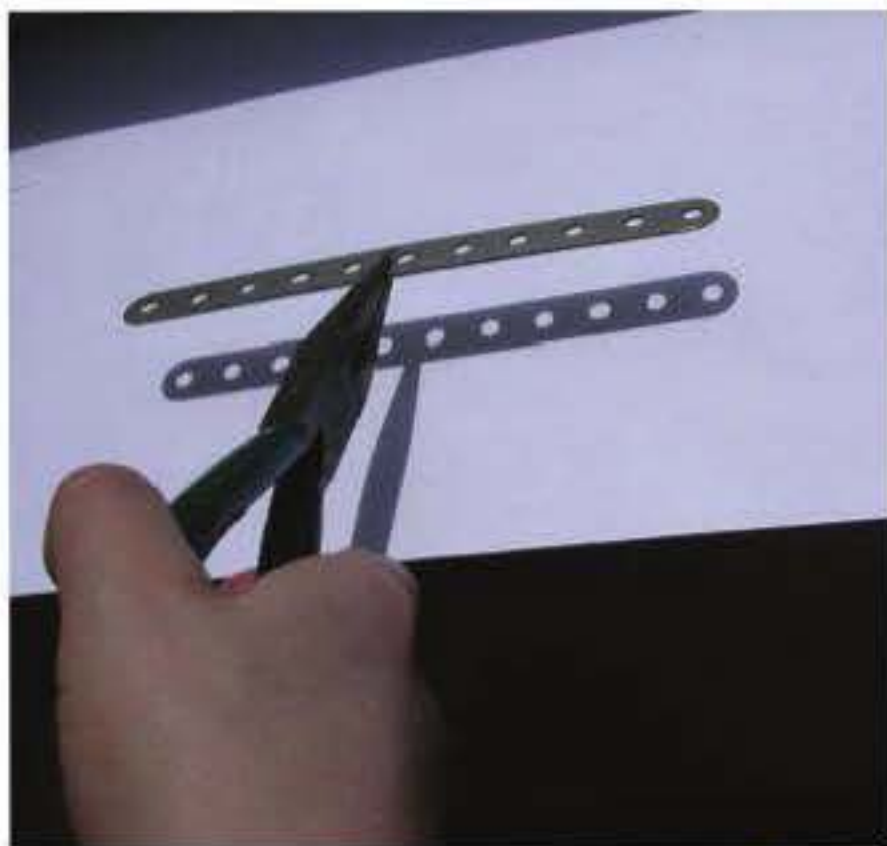


fig. 2

La tige est parallèle au plan de projection, son image a la même mesure.

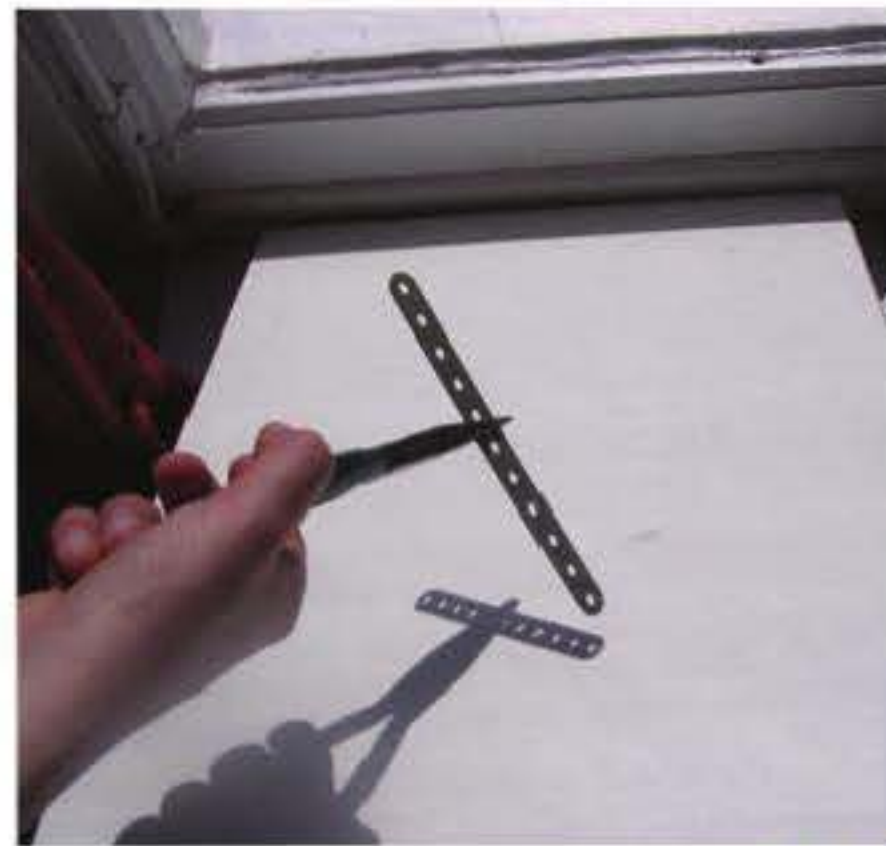


fig. 3

La tige est inclinée par rapport au plan de projection, son image est plus courte.

Répondre aux questions suivantes, sachant que le plan de projection est placé perpendiculairement aux rayons du soleil.

- a. Comment Rémi doit-il placer la tige pour que la longueur de l'ombre soit la moitié de celle de la tige ?

Indications

Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit vaut la moitié de l'hypoténuse.

- b. Si l'inclinaison est de 35° , le rapport entre une tige et son ombre est approximativement 0,8. Quelle est la mesure de l'ombre d'une tige de 32 cm ?
- c. Dans un triangle rectangle, on appelle **cosinus d'un angle aigu** le rapport entre le côté adjacent à cet angle et l'hypoténuse : $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ (fig. 4).

Ce rapport entre côté adjacent et hypoténuse est le même pour tous les triangles rectangles ayant un angle aigu de même amplitude car ces triangles sont semblables.

Construire un triangle équilatéral, tracer sa hauteur et se servir de cette figure pour calculer $\cos 60^\circ$. Construire ensuite un triangle rectangle isocèle et se servir de cette figure pour calculer $\cos 45^\circ$.

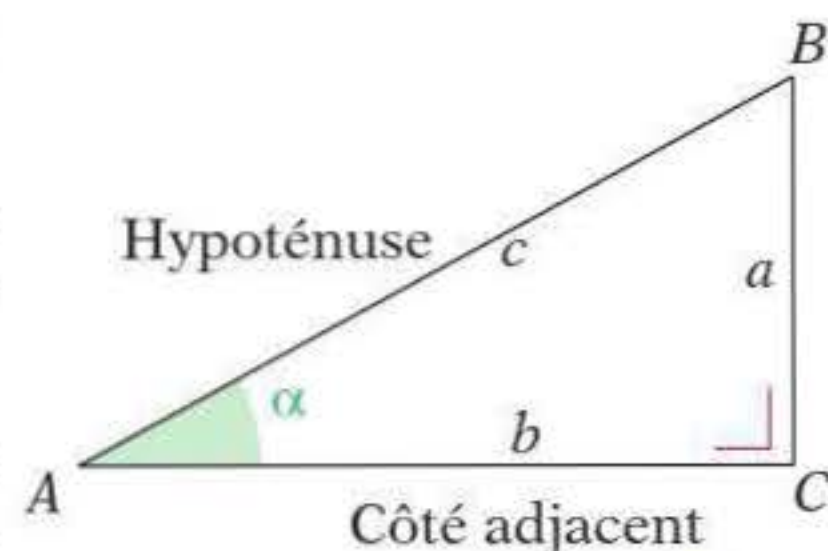


fig. 4

- d. Utiliser la calculatrice pour calculer l'ombre au soleil d'une tige de 45 cm formant avec le plan de projection un angle de 20° , de 40° , de 80° .

2. Le sinus

Dans un triangle rectangle, on appelle sinus d'un angle aigu le rapport entre le côté opposé à cet angle et l'hypoténuse : $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ (fig. 5).

- a. Construire un triangle équilatéral, tracer sa hauteur et se servir de cette figure pour calculer $\sin 60^\circ$. Construire ensuite un triangle rectangle isocèle et se servir de cette figure pour calculer $\sin 45^\circ$.

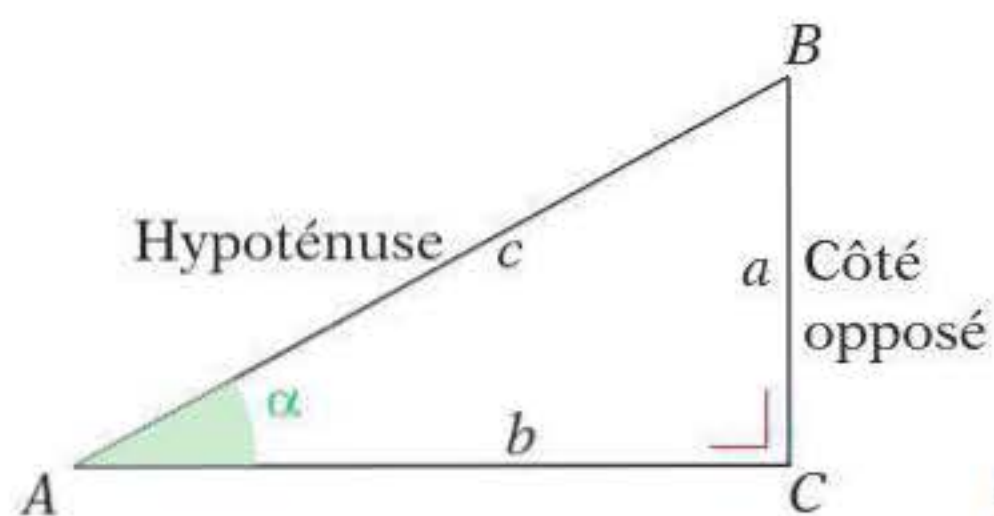


fig. 5

- b. Utiliser une calculatrice pour calculer la hauteur d'un escalier d'embarquement sachant qu'il mesure 580 cm et que son inclinaison par rapport au sol est de 32° .



3. La tangente

On sait que la longueur de l'ombre d'un objet sur le sol varie selon l'angle d'élévation du soleil (angle entre la direction du soleil et l'horizontale du lieu).

- a. Quelle est l'angle d'élévation du soleil lorsque l'objet est placé verticalement et que l'ombre est égale à la hauteur de l'objet ?

Indication

Construire un triangle rectangle isocèle.

- b. Dans un triangle rectangle, on appelle tangente d'un angle aigu le rapport entre le côté opposé à cet angle et le côté adjacent : $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ (fig. 6).

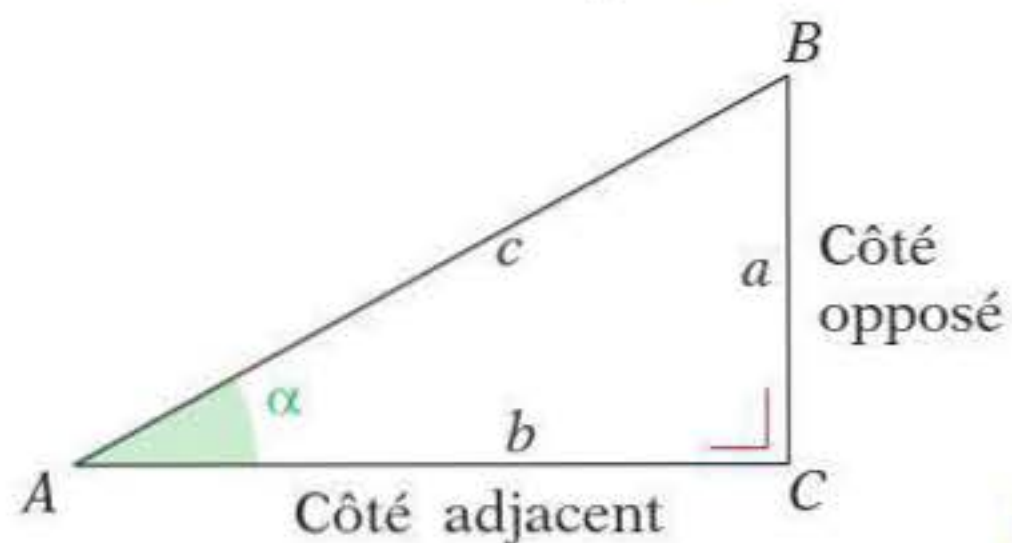


fig. 6



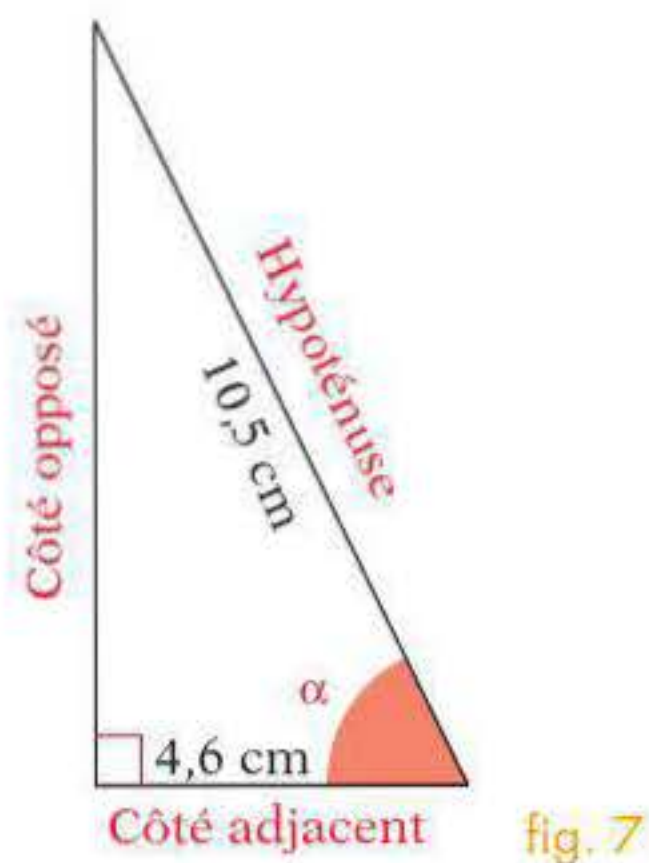
Vérifier la réponse donnée en **a** en utilisant la fonction **TAN** de la calculatrice.

- c.** Construire un triangle équilatéral, tracer sa hauteur et se servir de cette figure pour calculer $\tan 60^\circ$.
- d.** Si le soleil est incliné à 50° par rapport à l'horizon, quelle est la hauteur d'un arbre dont l'ombre mesure 4 m ?



4. Déterminer un angle

- a.** Calculer $\sin 40^\circ$, garder le résultat sur l'écran puis utiliser la fonction \sin^{-1} (ou la fonction INV). Commenter le résultat.
- b.** Si $\sin \alpha = 0,89$, quelle est la séquence calculatrice qui permet de déterminer l'angle α ?
- c.** Pour calculer l'amplitude de l'angle α (fig. 7),
 - choisir le rapport trigonométrique qui fait intervenir le côté adjacent et l'hypoténuse,
 - écrire la séquence calculatrice,
 - calculer l'amplitude.



- d.** Peu de temps après le décollage, un avion atteint une hauteur de 2,1 km. Arrivé à cette hauteur, il parcourt une distance au sol de 8 km (cette distance est la projection orthogonale sur le sol de la trajectoire de l'avion).

Quel est l'angle de montée ?

Indication

Réaliser un schéma de la situation, y porter les données et l'inconnue.

- e.** Déterminer l'amplitude de l'angle aigu formé par la droite d'équation $y = 3x$ avec l'axe Ox .



1. Comment construire l'image d'un point par une projection orthogonale ?

Pour construire P' image de P sur d par la projection orthogonale, on trace par le point P une perpendiculaire à d . Le point P' est le point cherché.

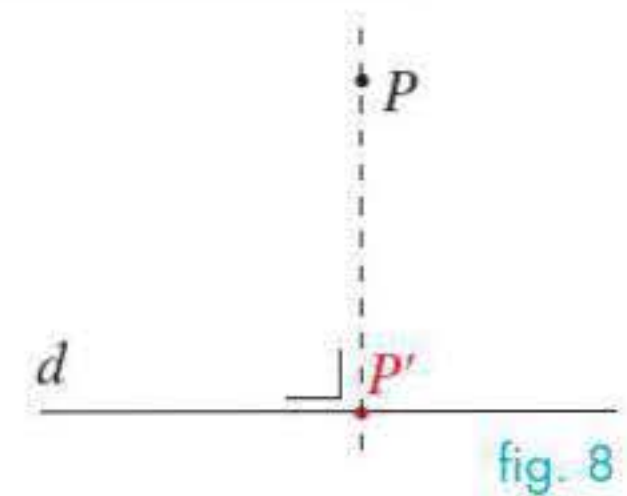


fig. 8

2. Quelles sont les propriétés de la projection orthogonale ?

Sur la fig. 9, on peut voir que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{8}{3}$ et que $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{8}{3}$. D'où on tire :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \quad (1).$$

Cette proportion correspond à la propriété fondamentale : la projection orthogonale conserve les rapports entre segments.

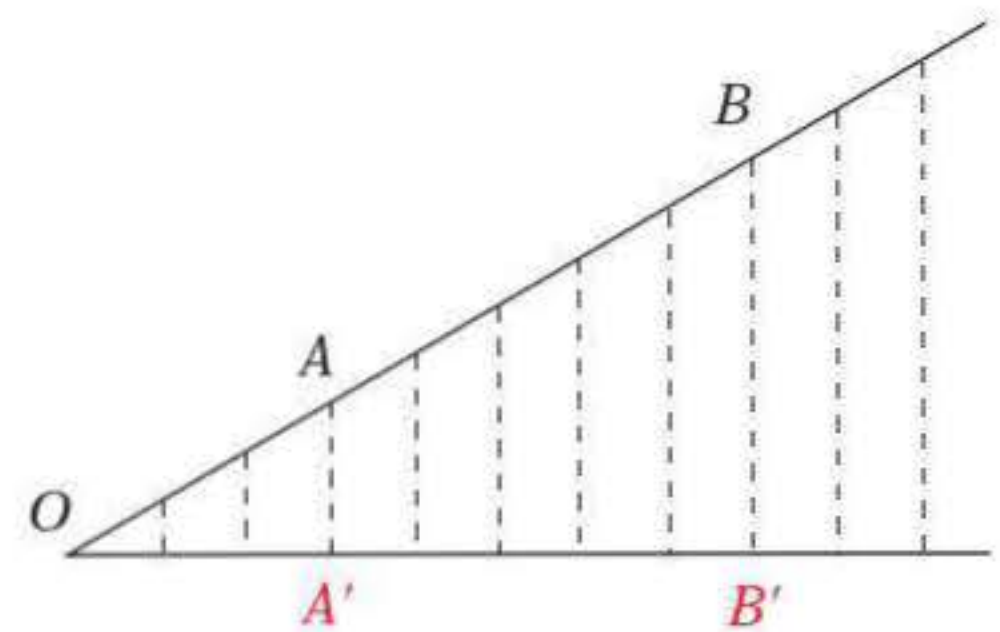


fig. 9

3. Comment calculer la réduction de longueur opérée par une projection orthogonale ?

Après avoir échangé les extrêmes dans la proportion (1), on a une nouvelle proportion :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}.$$

Le rapport $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ est le coefficient de projection. Ce coefficient est appelé **cosinus de l'angle α** . On a

$$\cos \alpha = \frac{\text{longueur de l'image du segment}}{\text{longueur du segment}}$$

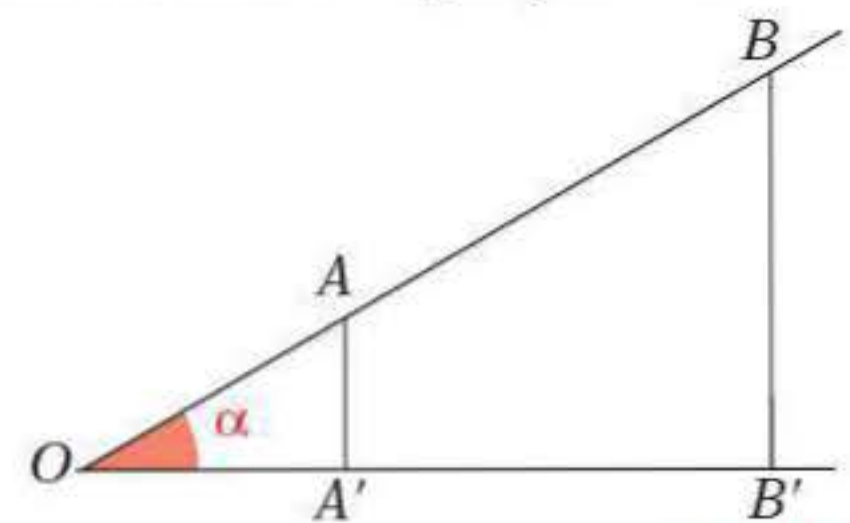


fig. 10

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

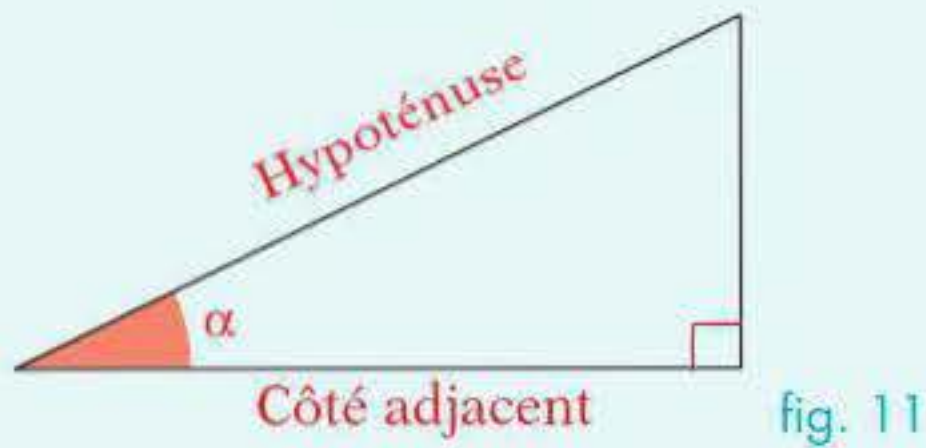
4. Dans un triangle rectangle, comment écrire les rapports trigonométriques d'un angle aigu ?

LE COSINUS

Énoncé 11.1

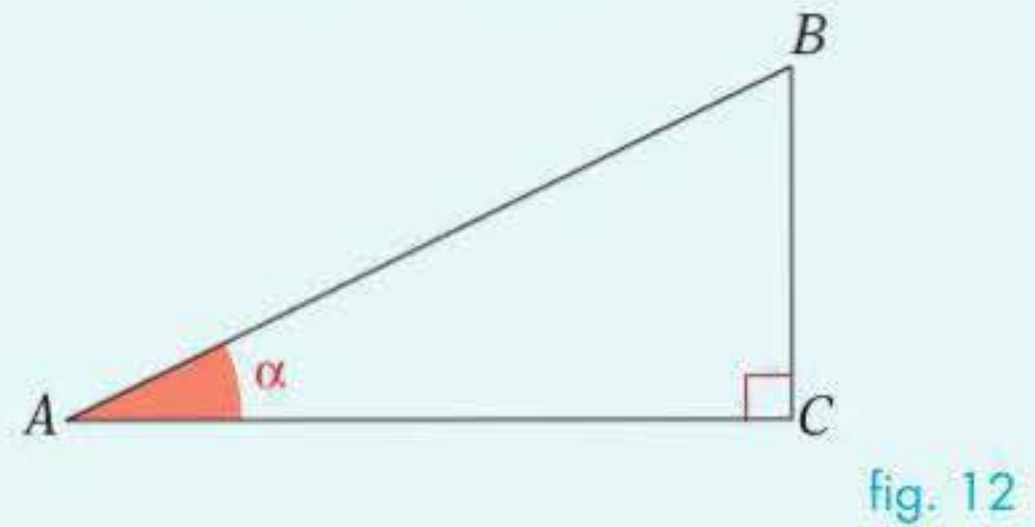
Le cosinus d'un angle α est le rapport

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$



Dans le triangle ABC ,

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

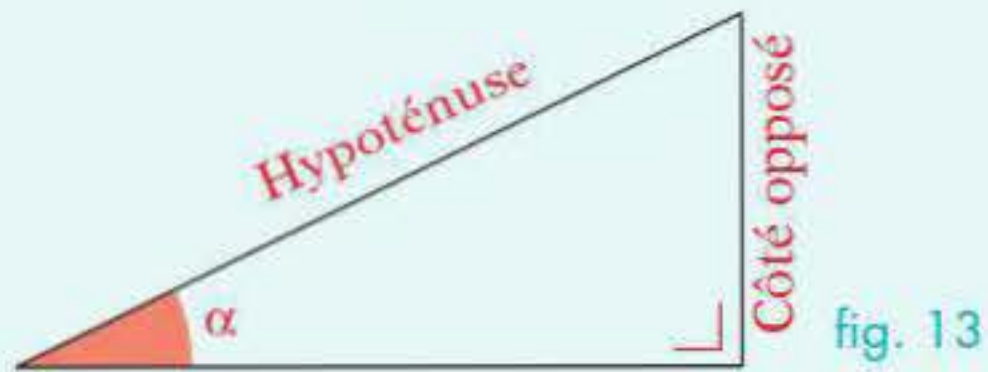


LE SINUS

Énoncé 11.2

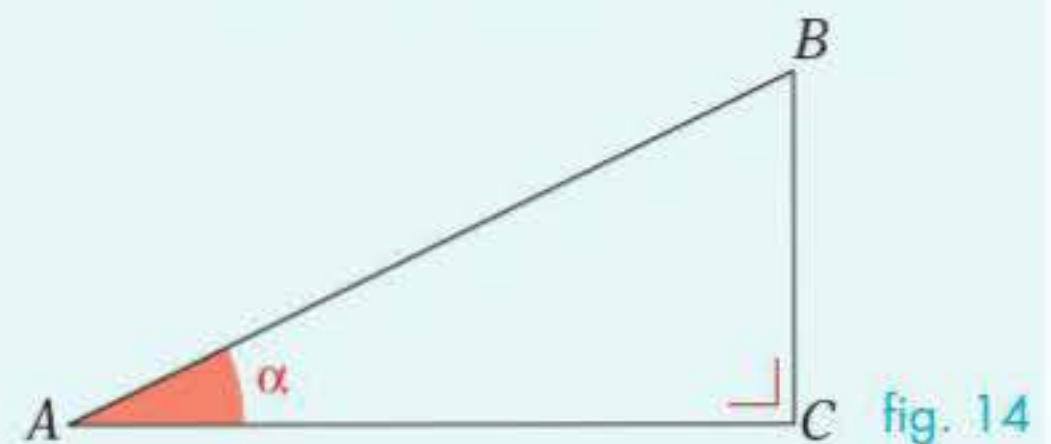
Le sinus d'un angle α est le rapport

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$



Dans le triangle ABC ,

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sin \alpha$$

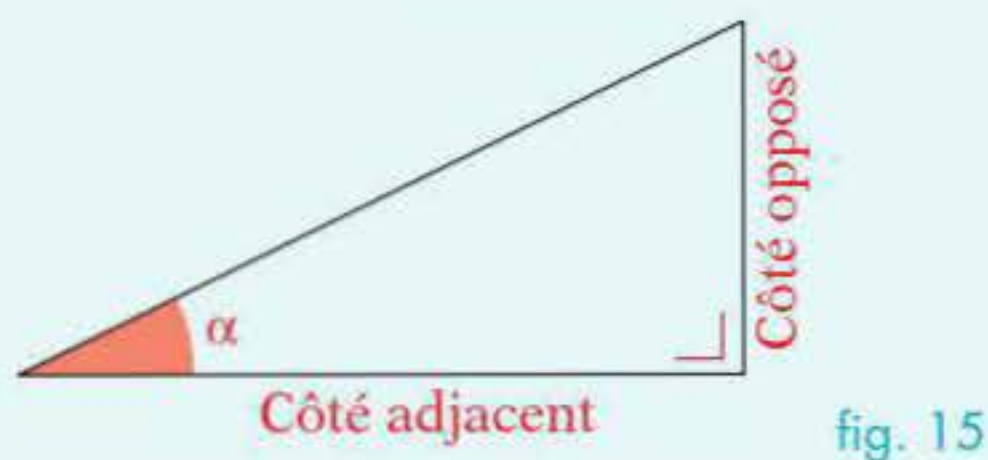


LA TANGENTE

Énoncé 11.3

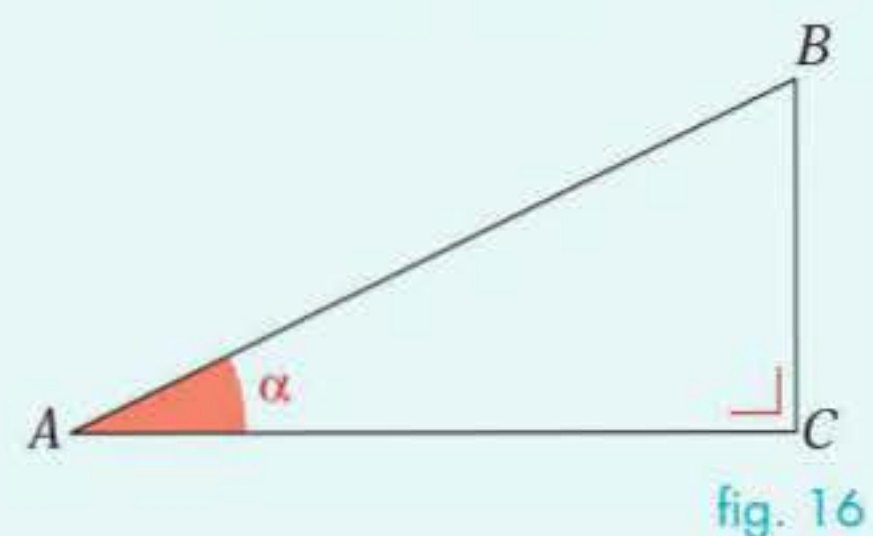
La tangente d'un angle α est le rapport

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$$



Dans le triangle ABC ,

$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \tan \alpha$$



En se référant aux propriétés du triangle équilatéral, nous avons établi lors de l'exploration que :

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

En se référant aux propriétés du triangle isocèle rectangle, nous avons établi lors de l'exploration que :

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

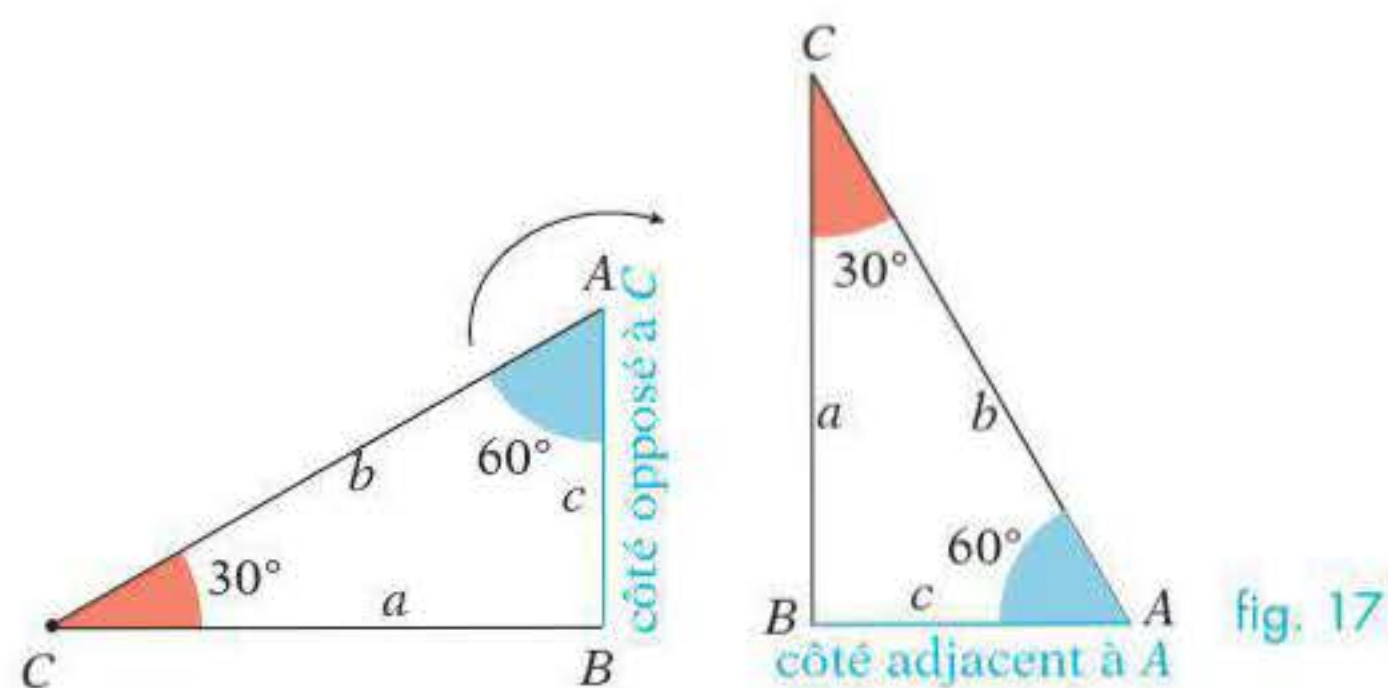
5. Quelle est la relation entre le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle ?

Énoncé 11.4

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au cosinus de l'autre angle aigu.

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha).$$

Exemple



$$\sin 30^\circ = \frac{c}{b},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{c}{b}$$

$$\text{Donc } \sin 30^\circ = \cos 60^\circ.$$

Conséquence pour les nombres trigonométriques particuliers :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Sinus et cosinus d'un angle aigu peuvent-ils prendre n'importe quelle valeur ?

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté. Les nombres trigonométriques sinus et cosinus sont donc des rapports dont les dénominateurs sont plus grands que les numérateurs. On sait que les fractions correspondantes sont plus petites que 1. Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont donc des nombres inférieurs à 1.

7. Comment déterminer le nombre trigonométrique qui correspond à un angle donné ?

Pour calculer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle donné avec une calculatrice, on vérifie d'abord si la calculatrice est en « mode degré ».

Selon la calculatrice, on frappe d'abord la touche de fonction (sin, cos ou tan) puis la mesure de l'angle dans cet ordre ou inversement.

Exemple

Pour calculer le cosinus de 38° , on utilise l'une ou l'autre séquence :

COS	38	=
ou		
38	COS	

8. Comment déterminer l'amplitude d'un angle aigu dont on connaît un nombre trigonométrique ?

Pour déterminer l'amplitude de l'angle aigu dont on donne le sinus, le cosinus ou la tangente, on vérifie d'abord si la calculatrice est en « mode degré ».

Selon la calculatrice, on utilise :

- les touches \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tan^{-1} ;
- la touche réciproque de la fonction (2ND ou INS ou SHIFT).

Exemple

Pour calculer l'amplitude de l'angle dont le cosinus est 0,6, on utilise l'une ou l'autre séquence :

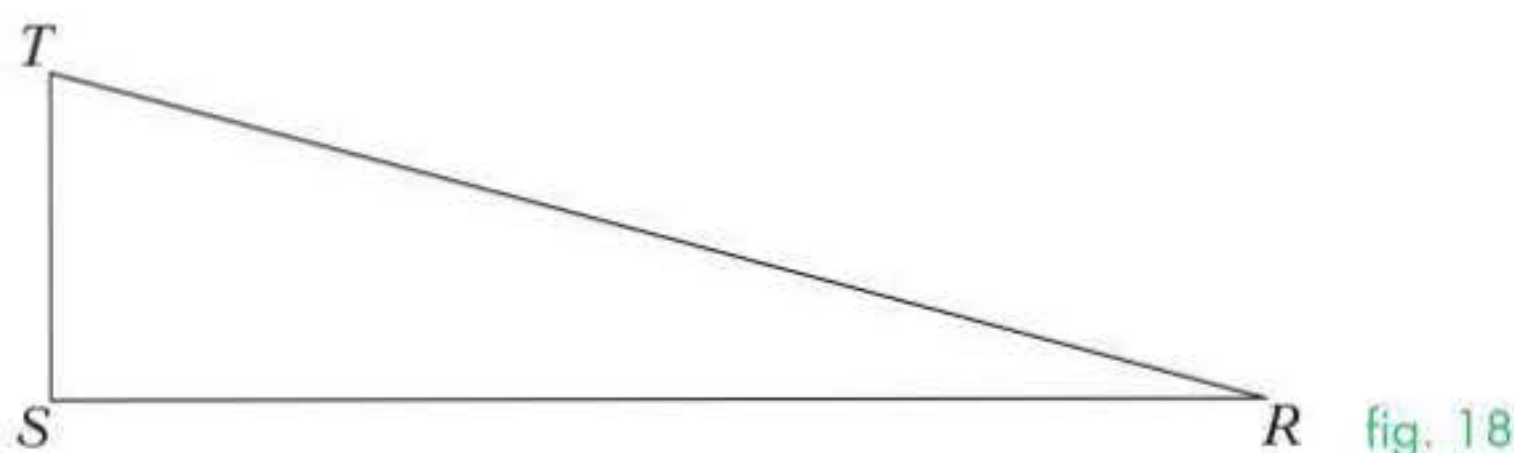
\cos^{-1}	0,6	=
ou		
INV	COS	0,6



Expliciter les savoirs et les procédures

1. QCM

Pour chaque ligne du tableau, choisir parmi les réponses **a**, **b**, **c** la (ou les) affirmations justes.



		a.	b.	c.
1)	Dans le triangle RST , rectangle en S	$[RS]$ est le côté adjacent à l'angle R	$[RS]$ est le côté opposé à l'angle R	$[RS]$ est le côté opposé à l'angle T
2)	Le cosinus de l'angle R est	$\frac{\overline{TS}}{\overline{TR}}$	$\frac{\overline{TR}}{\overline{RS}}$	$\frac{\overline{RS}}{\overline{TR}}$
3)	Si $R = 14^\circ$, alors $\cos \hat{R} \approx$	1,24	0,97	0,24
4)	Le sinus de l'angle R est	$\frac{\overline{TS}}{\overline{TR}}$	$\frac{\overline{TR}}{\overline{RS}}$	$\frac{\overline{TR}}{\overline{RS}}$
5)	Si $\hat{T} = 76^\circ$, alors $\sin \hat{T} \approx$	2,4	0,97	0,24
6)	La tangente de l'angle R est	$\frac{\overline{TS}}{\overline{RS}}$	$\frac{\overline{RS}}{\overline{TS}}$	$\frac{\overline{TR}}{\overline{TS}}$
7)	Si $\hat{T} = 76^\circ$, alors $\tan \hat{T} \approx$	1,24	4,01	0,25

2. Possible ou pas ?

Rémi et Olivier inventent des exercices et échangent leurs questions.

Voici le questionnaire de Rémi.

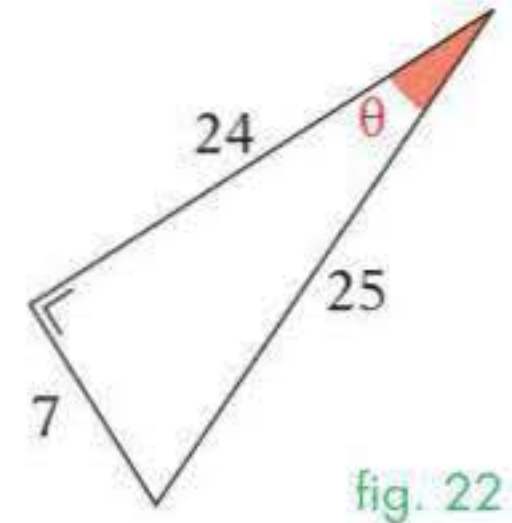
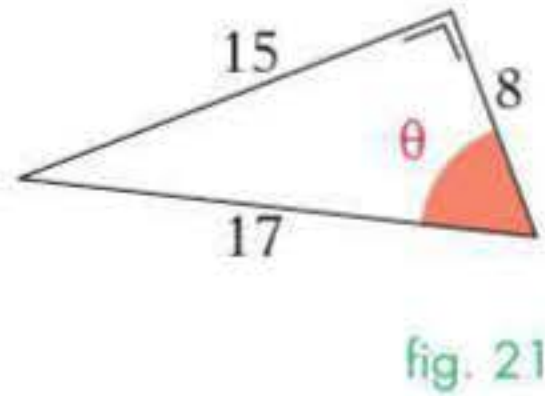
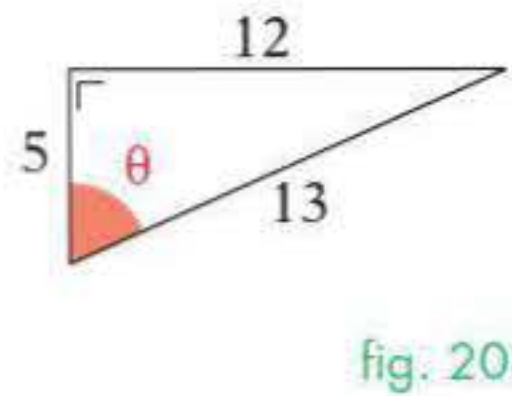
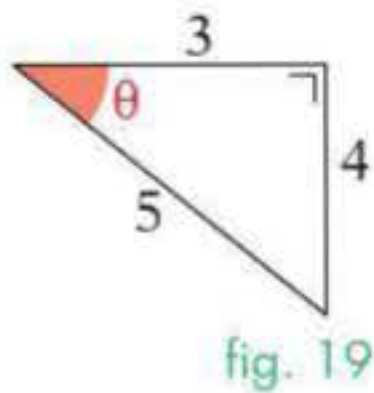
Calculer α .

- a.** $\sin \alpha = 0,85$
- b.** $\sin \alpha = 85^\circ$
- c.** $\sin \alpha = 8,5$
- d.** $\cos \alpha = 0,9$
- e.** $\cos \alpha = 1,01$
- f.** $\tan \alpha = 1,1$
- g.** $\tan \alpha = 107$

Avant de faire les calculs, Olivier lui dit : « Plusieurs exercices sont impossibles. » Lesquels et pourquoi ?

3. Sous forme de fraction

- Écrire $\sin \theta$ sous forme de fraction.
- Écrire $\tan \theta$ sous forme de fraction.



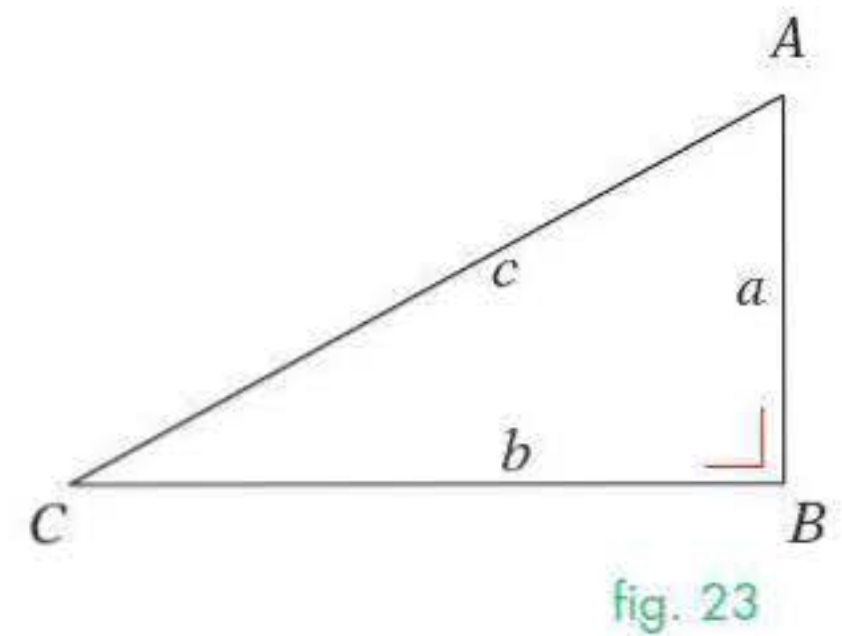
4. Démontrer

- Démontrer que dans le triangle ABC rectangle en B , on a :

$$\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \tan \hat{A}$$

- Démontrer que dans le triangle ABC rectangle en B , on a :

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

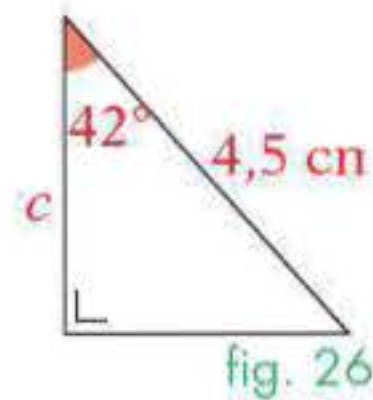
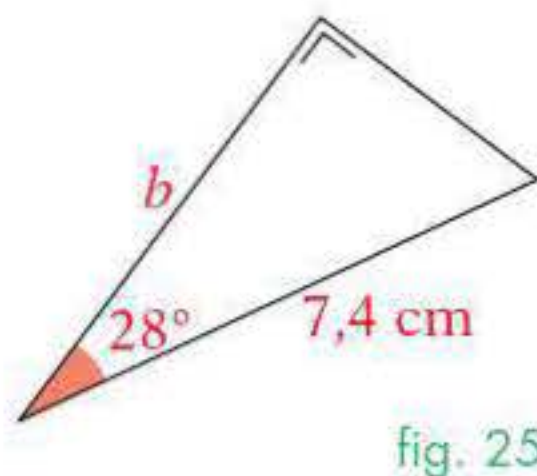
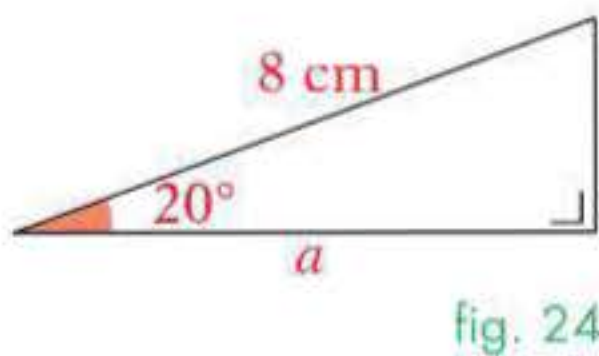


Appliquer une procédure

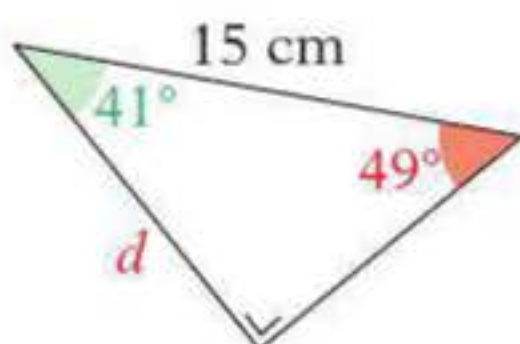
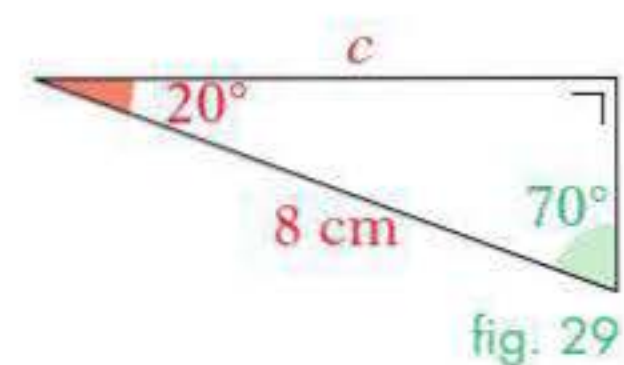
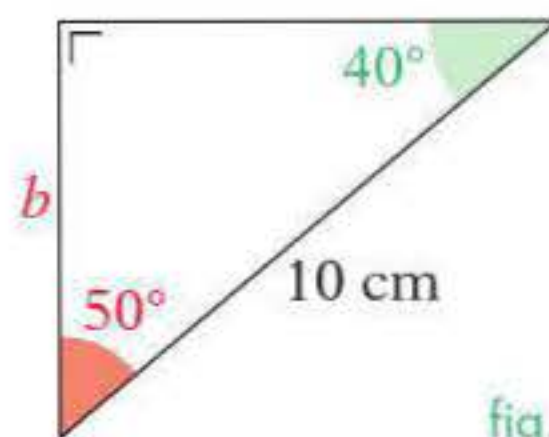
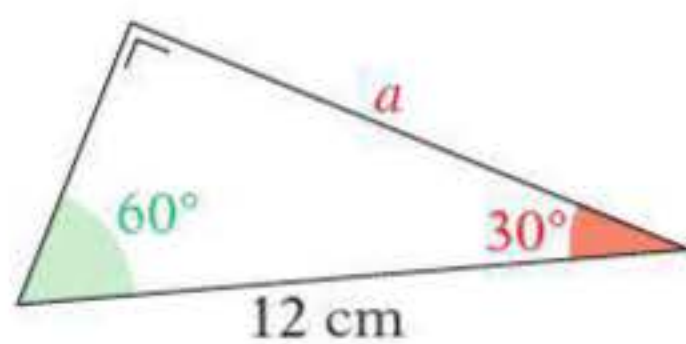
5. Au millimètre près

Calculer (au millimètre près) la longueur des côtés représentés par une lettre.

Série 1



Série 2



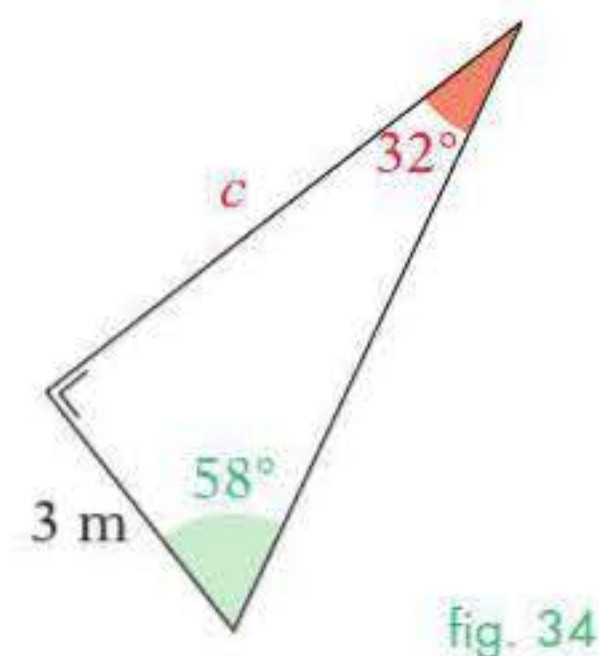
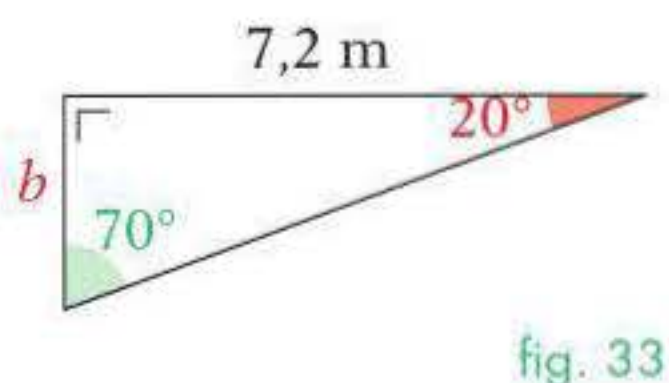
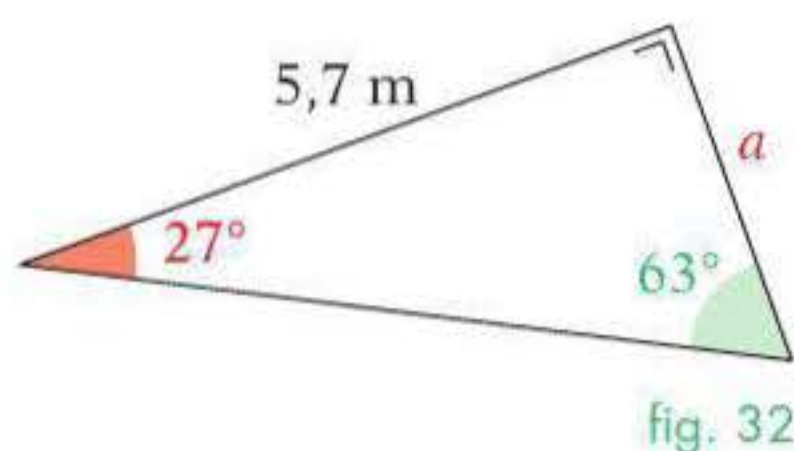
6. Nombres trigonométriques

Utiliser une calculatrice pour déterminer, au millième près, les nombres trigonométriques suivants.

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a. $\sin 45^\circ$ | e. $\cos 10^\circ$ | i. $\cos 30^\circ$ |
| b. $\sin 60^\circ$ | f. $\sin 80^\circ$ | j. $\cos 15^\circ$ |
| c. $\sin 30^\circ$ | g. $\sin 40^\circ$ | k. $\cos 40^\circ$ |
| d. $\cos 20^\circ$ | h. $\sin 70^\circ$ | l. $\sin 10^\circ$ |

7. On ne connaît pas l'hypoténuse

Calculer, au centimètre près, la longueur des côtés représentés par une lettre.

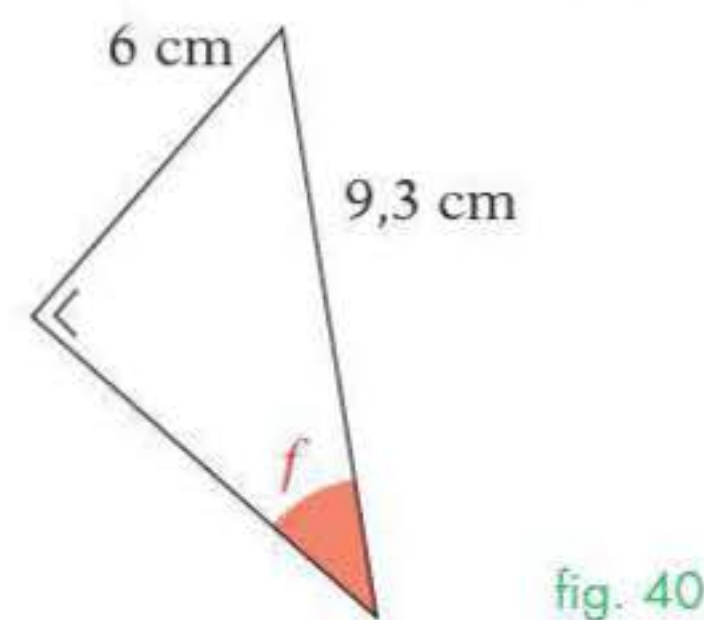
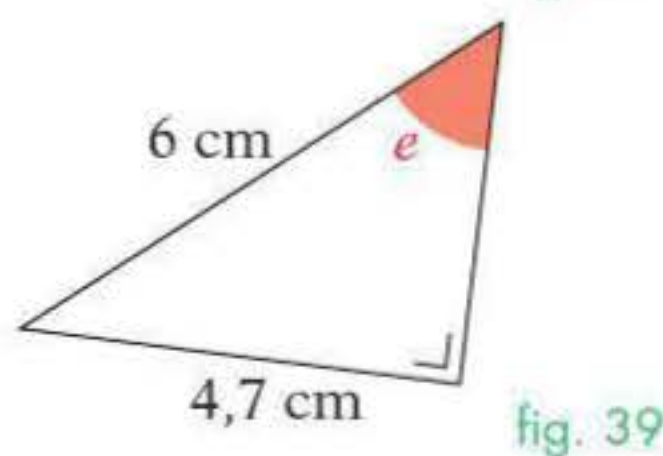
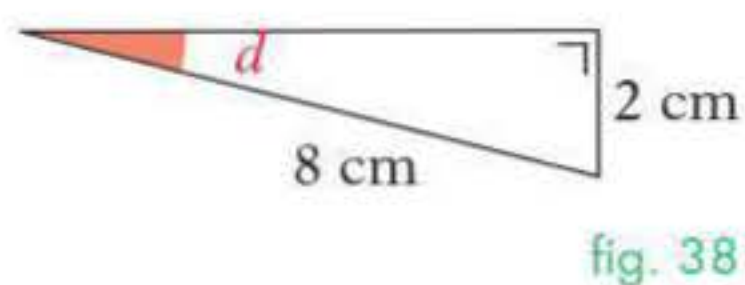
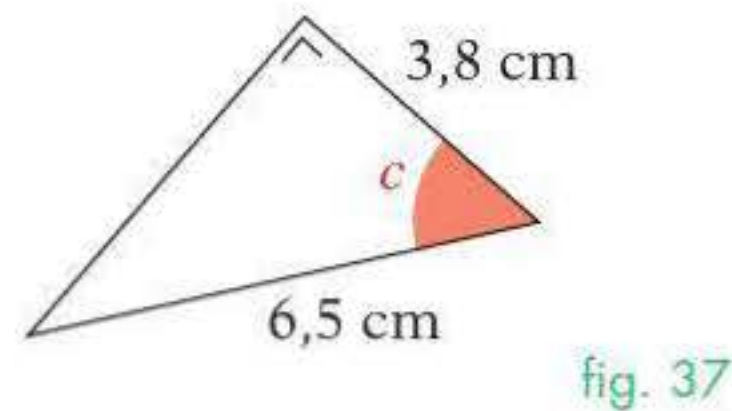
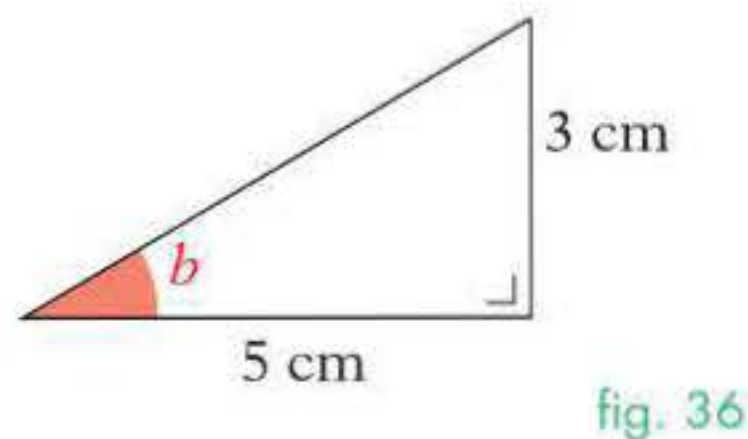
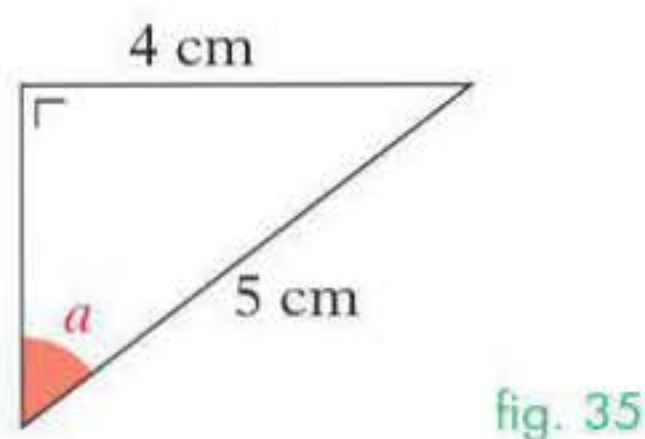


8. En série...

a. Déterminer l'angle α à un centième de degré près.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin \alpha = 0,25882$ | 5) $\cos \alpha = 0,5$ | 9) $\tan \alpha = 0,5$ |
| 2) $\sin \alpha = 0,99985$ | 6) $\cos \alpha = 0,71934$ | 10) $\tan \alpha = 2$ |
| 3) $\sin \alpha = 0,71934$ | 7) $\tan \alpha = 1,03555$ | 11) $\tan \alpha = 10$ |
| 4) $\cos \alpha = 0,25882$ | 8) $\tan \alpha = 1$ | 12) $\tan \alpha = 0,1$ |

b. Déterminer (au degré près) les angles indiqués.



9. Pente d'une droite, angle d'inclinaison (exercice partiellement résolu)

Quelle est l'inclinaison¹ de la droite d'équation $y = -0,5x + 3$ avec l'axe Ox ?

Cette inclinaison est la même que celle de la droite d'équation $y = -0,5x$ (fig. 41).

On se réfère donc au triangle rectangle OAA' . Dans ce triangle, le rapport entre le côté opposé à l'angle \hat{O} et le côté adjacent est 0,5. On utilise la formule

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}.$$

On calcule ensuite $\tan^{-1} 0,5 = \alpha$.

On trouve $\alpha \approx 26,57^\circ$.

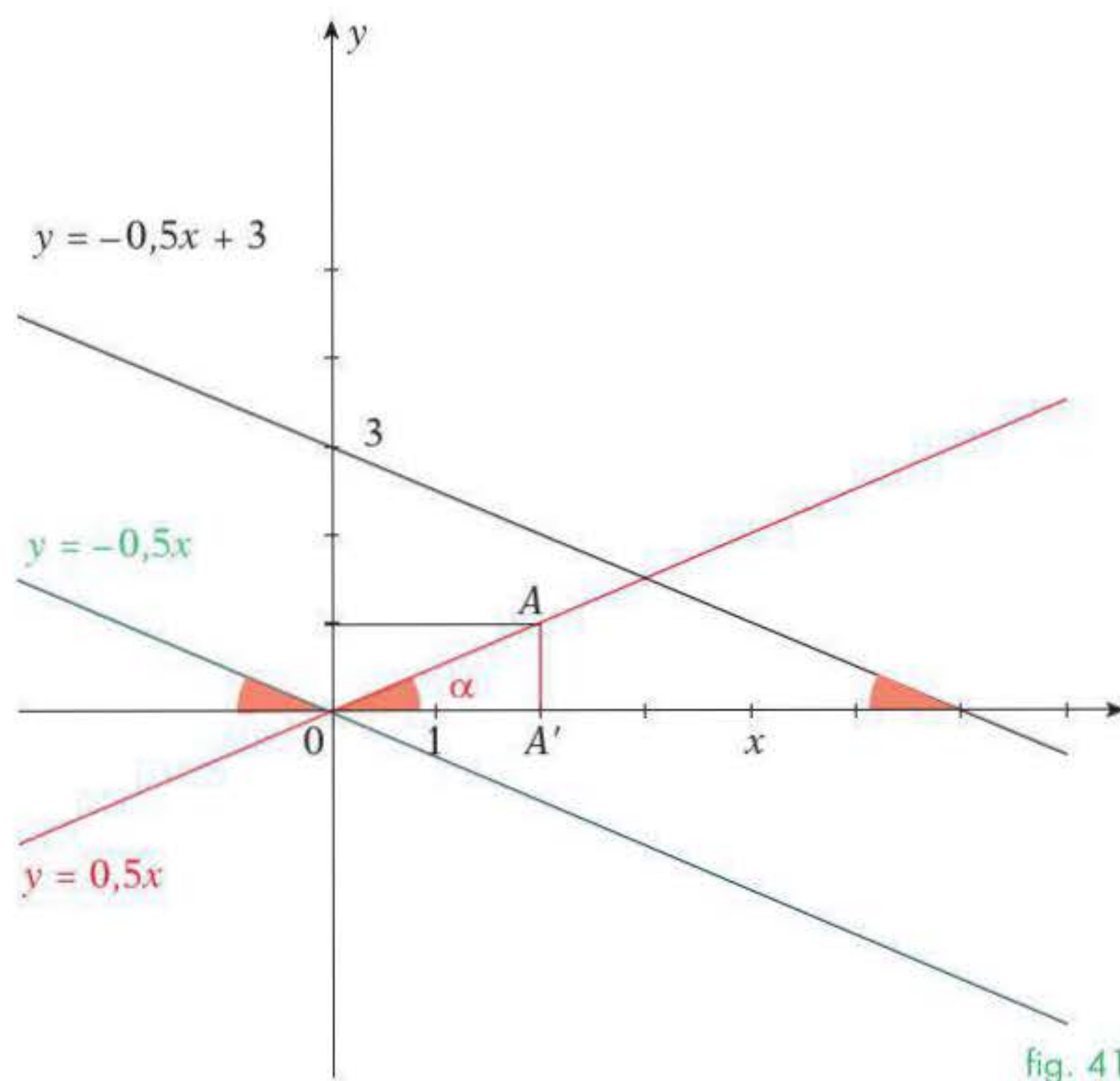


fig. 41

Quelle est l'inclinaison des droites suivantes par rapport à l'axe des abscisses ?

- On donne l'équation de la droite $y = 2x + 3$.
- On donne l'équation de la droite $y = 2x - 3$.
- On donne l'équation de la droite $y = -2x + 3$.

1. Nous entendons par « inclinaison » la **valeur absolue** de l'amplitude de l'angle aigu formé par la droite et l'axe des abscisses.

Résoudre un problème

10. La hauteur de l'escalator

Calculer la différence de niveau que l'on franchit en utilisant l'escalator sachant que l'inclinaison par rapport au sol est de 35° et que l'escalator a une longueur de 12 mètres.

Indication

Réaliser un schéma de la situation, y porter les données et l'inconnue.



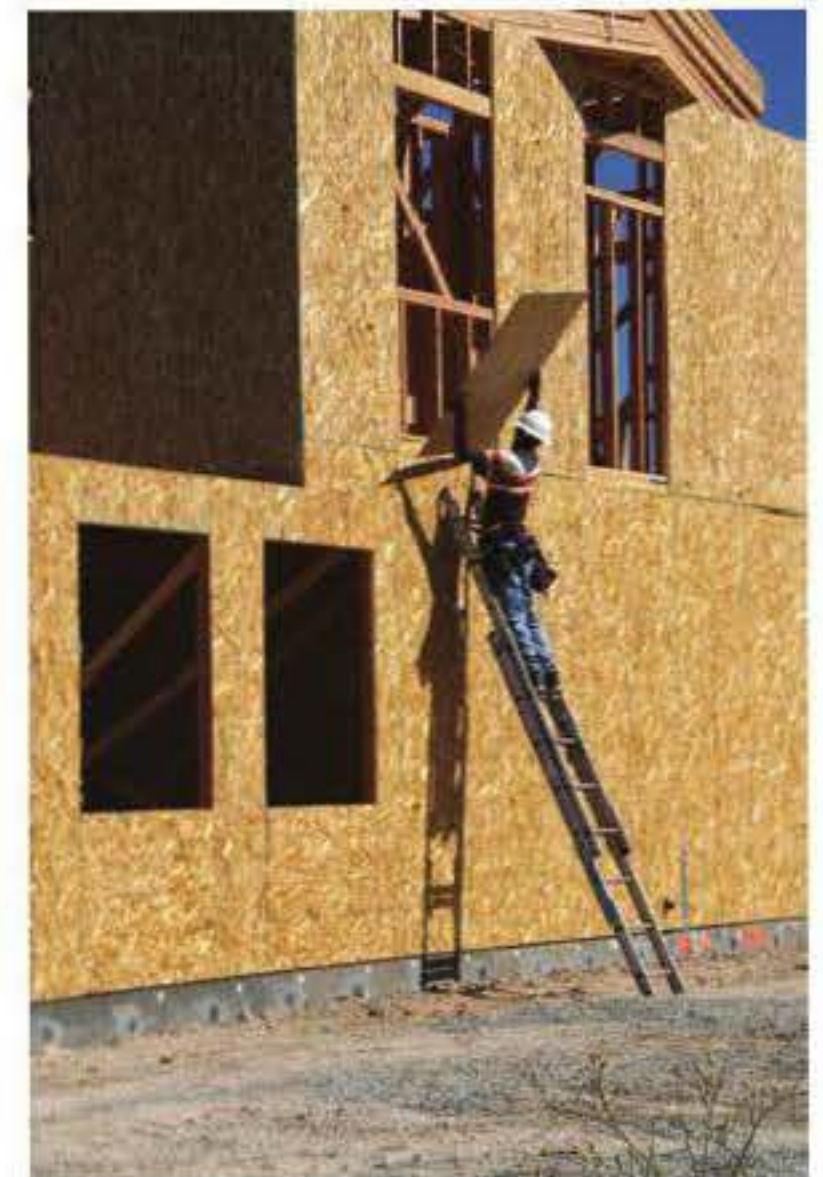
11. L'échelle

La distance du pied de l'échelle au mur, mesurée sur le sol, est 1,5 m. L'inclinaison de l'échelle par rapport au mur est de 16° .

À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur ? (c'est la longueur de la projection orthogonale de l'échelle sur le mur).

Indication

Réaliser un schéma de la situation et y porter les données et l'inconnue.



12. Radar

Un avion situé à 1017 mètres d'altitude est repéré par un radar dont le capteur est à 17 mètres au-dessus du sol. L'angle d'élévation de l'avion (angle formé par la ligne de visée radar-avion et l'horizontale du lieu) est de 25° .

Quelle est la distance entre le radar et l'avion (il ne s'agit pas ici de la distance au sol) ?

Indication

Réaliser un schéma de la situation et y porter les données et l'inconnue.



13. Hélicoptère médical

Un hélicoptère quitte sa base et suit un cap de 220° pour embarquer un blessé (fig. 42). L'hôpital est situé à 16 km à l'est de l'endroit de l'accident et est exactement au sud de la base.

Quelle est la distance que l'hélicoptère doit parcourir pour rentrer à sa base après avoir déposé le blessé à l'hôpital ?

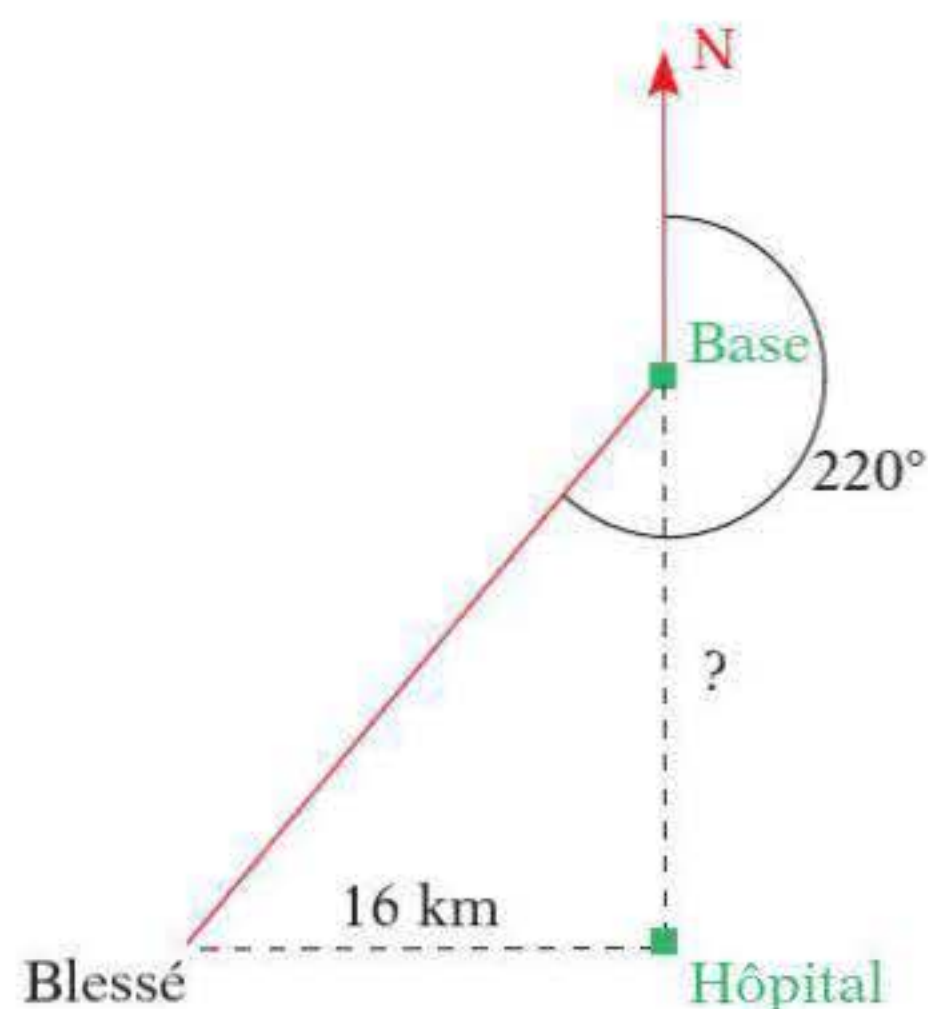


fig. 42

14. Décollage

Quand un avion décolle, son ascension passe par plusieurs étapes successives. Les angles de montée varient selon les types d'avions et leur chargement. Voici un schéma (il ne respecte pas les mesures) qui montre un exemple de montée en deux étapes.

La première selon un angle de montée de 15° , la seconde selon un angle de 7° .

- a. Calculer l'altitude en B si l'on sait que l'avion a couvert une distance au sol de 20 km. Donner la réponse au mètre près.
- b. Après la seconde étape, son altitude est de 10 668 m. Calculer la distance au sol lorsque l'avion atteint cette altitude de croisière. Donner la réponse au mètre près.

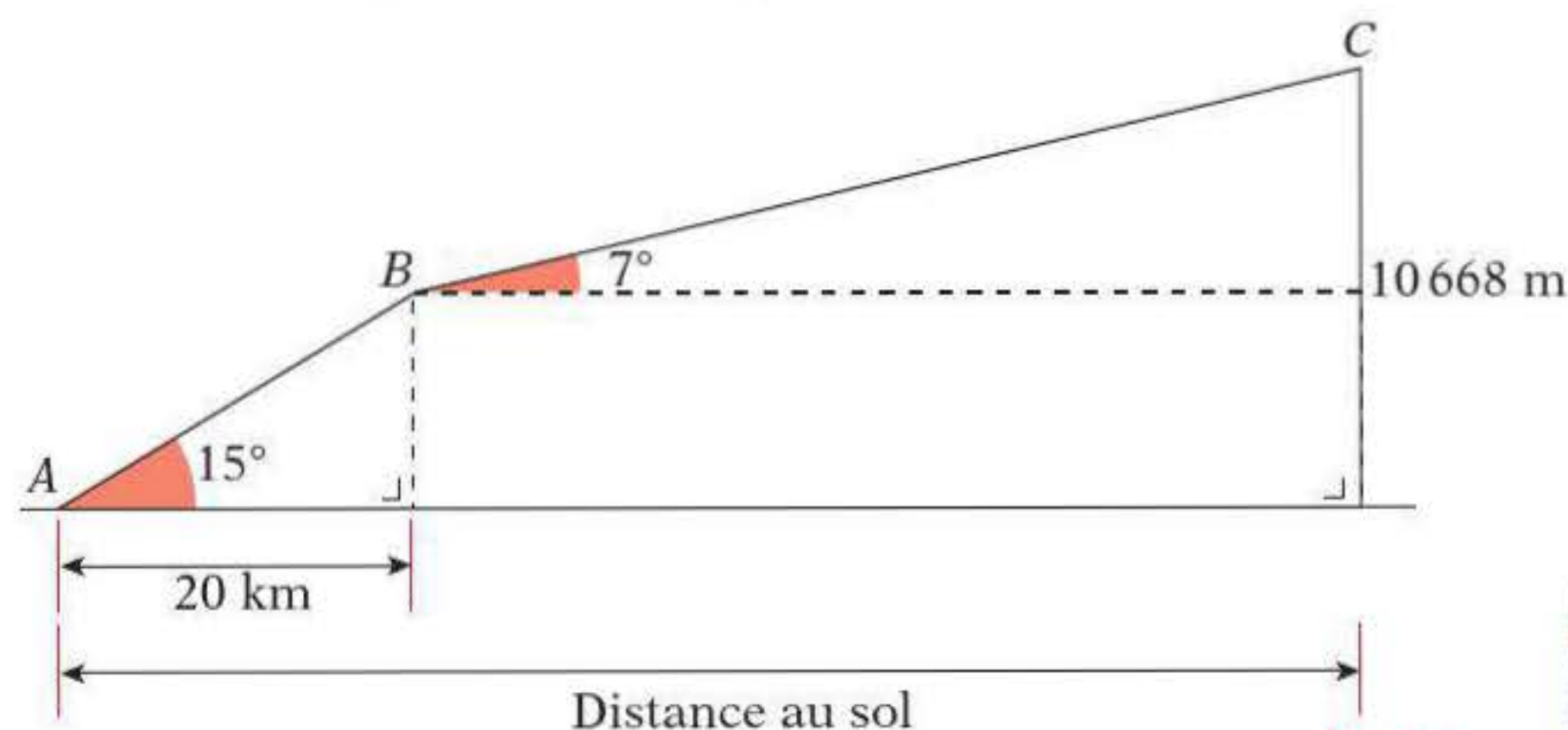


fig. 43

15. La tour de Pise

On sait que le sommet de la tour de Pise s'écarte de la verticale de 5,23 m.

Cette tour a une hauteur de 54,56 m (flèche rouge sur la fig. 44). Calculer l'angle aigu qu'elle forme par rapport à la verticale.



fig. 44

16. Cap 055

Un bateau quitte le port en suivant un cap de 055° . Après une journée de navigation, il a parcouru 39 km. Quelle est la distance franchie par rapport à la direction Est ?

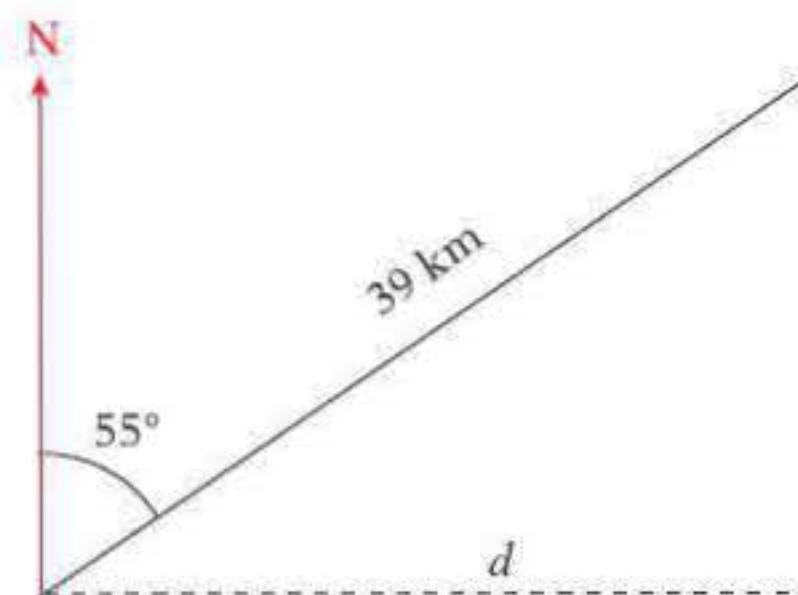


fig. 45

Boussole de navigation.
Le cap est repéré par un nombre positif compris entre 0 et 360.

17. Ils reviennent au port

Deux bateaux naviguent en direction d'un même port. Le premier se trouve à 5,6 km à l'est du port et le second se trouve à 2,7 km au sud du premier bateau.

- Quel est le cap du second bateau ?
- À quelle distance du port se trouve ce second bateau ?

18. Pente et déclivité

Sur un site Internet donnant quelques conseils aux cyclistes qui grimpent en montagne¹, on rappelle les définitions utiles pour caractériser l'inclinaison d'une route.

Pente
Voici un rappel des définitions utiles pour caractériser l'inclinaison d'une route.

Pente et déclivité

d = distance parcourue (mesurée sur la route)
 y = dénivellation
 x = distance horizontale = $\sqrt{d^2 - y^2}$

pente = $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{d^2 - y^2}}$

déclivité = $\sin \alpha = \frac{y}{d}$

Pour des petites valeurs de α ($\leq 10^\circ$), la pente et la déclivité coïncident (si on arrondit à la première décimale (i.e. en pourmille)).

1. <http://www.ulb.ac.be/di/ssd/ldoyen/e/pente.html>

Utiliser ces renseignements pour répondre aux questions suivantes.

- a. Déterminer la pente d'un tronçon de route qui couvre une distance de 765 m. La fig. 46 montre que les points de départ et d'arrivée sont chacun sur une courbe de niveau. Leur distance est tracée en rouge.



fig. 46

- b. Un panneau routier indique une descente dangereuse (fig. 47). En voyant ce panneau, l'automobiliste pense : si je parcours 100 m sur cette route, je descends de 12 m. Que représente le quotient $12/100$ avec cette interprétation ? Calculer l'arrondi au centième de degré près de la mesure de l'angle d'inclinaison correspondant à cette interprétation.



fig. 47

- c. Calculer l'angle d'inclinaison qui correspond à une **pente** de 12 %.

Les deux mesures d'inclinaison sont-elles les mêmes ? L'interprétation de l'automobiliste donne-t-elle cependant une bonne approximation de la pente ?