



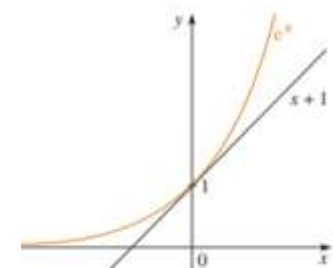
MATHS TERMINALE D

SUPPORT D'ACTIVITE DE LA CLASSE DE TERMINALE D

Support cours Terminale D (Août 2023)

- Des activités abordables
- Toutes les propriétés, remarques et définitions
- Quelques applications directes du cours

*J'excelle en
mathématiques*



PROGRAMME OFFICIELLE D'ETUDE DE LA CLASSE DE TERMINALE D

SITUATION D'APPRENTISSAGE(SA_1) : configuration de l'espace

Séquence 1 : Vecteurs de l'espace

Séquence 2 : Barycentre

Séquence 3 : Produit scalaire

Séquence 4 : Plans de l'espace

Séquence 5 : Droites de l'espace

Séquence 6 : Produit vectoriel

Séquence 7 : Système d'équations linéaires

SITUATION D'APPRENTISSAGE(SA_2) : Organisation des données

Séquence 1 : Les nombres complexes

Séquence 2 : Limite et continuité

Séquence 3 : Dérivabilité- Etudes de fonctions

Séquence 4: Primitives

Séquence 5: Fonction logarithme népérien

Séquence 6 : Fonction exponentielle népérienne

Séquence 7 : Calcul intégral

Séquence 8 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Séquence 9 : Probabilités

Séquence10 : Statistique

Séquence 11 : Suites numériques

SITUATION D'APPRENTISSAGE(SA_3) : LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Séquence : Application des nombres complexes aux transformations du plan



SITUATION D'APPRENTISSAGE N° 1 : CONFIGURATION DE L'ESPACE

SITUATION DE DEPART DE LA S.A N° 1

Texte : Le pont de Codji

Reliant les deux rives d'un fleuve, le pont réalisé par l'ingénieur PIKO est un chef d'œuvre que les pêcheurs contemplent chaque jour. Les travaux ont duré deux ans et une vingtaine de pêcheurs riverains ont été des ouvriers spécialisés en plongée. Sonon, l'un des ouvriers, a du plaisir à raconter à la jeune génération les longues journées de travail sur le chantier. L'ingénieur PIKO dirigeait simultanément tous les ateliers : il exigeait partout la précision dans les mesures et s'en assurait. La qualité du sol, la qualité du béton, les précisions du dosage, la forme et la qualité des poutres, l'implantation des piliers, le flux et le reflux du cours d'eau ; rien n'échappait au contrôle de l'ingénieur PIKO. Les travaux achevés, le pont fut livré à la circulation. Les riverains sont encore fiers de ce pont qui n'a rien perdu de sa solidité des décennies durant.

Sonon s'interroge encore aujourd'hui sur les méthodes et les procédés qui ont permis à l'ingénieur PIKO de réussir ce chef d'œuvre.



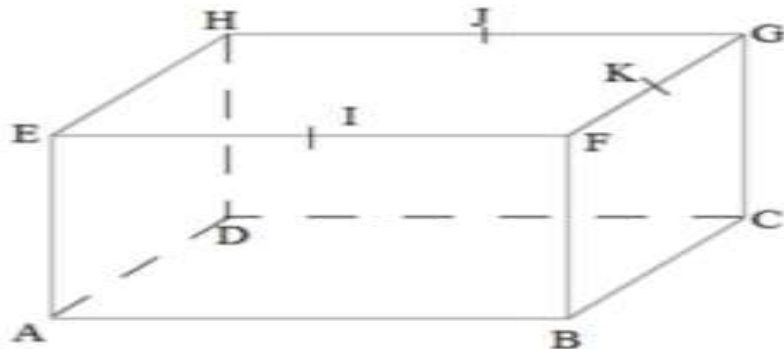
Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés
- Analyser chacun des problèmes
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème
- Améliorer au besoin ta production.

SEQUENCE N°1 : VECTEURS DANS L'ESPACE , REPERAGE D'UN POINT DE L'ESPACE.

Activité 1 : VECTEURS DANS L'ESPACE , REPERAGE D'UN POINT DE L'ESPACE.

Les piliers utilisés pour la construction du pont ont chacun pour fondation une grosse pierre en béton armé ayant la forme d'un cube représenté par la figure ci-dessous.



Paul, un apprenant en classe de $T^{le}D$, après avoir observé ce dessin, s'exclama : « On peut identifier des vecteurs colinéaires, coplanaires, orthogonaux et même y repérer la position de vecteurs puis de points de l'espace. »

Consigne 1 : Rappelle

En considérant le cube $ABCDEFGH$ représenté, indique :

1. deux vecteurs colinéaires ;
2. trois vecteurs coplanaires ;
3. deux vecteurs orthogonaux.

Stratégies de travail : TI : 5 mn TG : 5 mn et TC : 5mn

Consigne 2 : Définitions/Propriétés

ε désigne l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Rappelle les définitions/propriétés relatives aux :

1. vecteurs colinéaires
2. vecteurs coplanaires
3. bases de $\mathcal{W}$ et repères de ε .

Stratégies de travail : TI : 5 mn TG : 5 mn et TC : 5mn

Synthèse

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits colinéaires lorsque l'un d'eux est le vecteur nul ou bien lorsque les deux ont la même direction ; c'est-à-dire s'il existe un nombre réel λ tel que: $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ sont dits coplanaires si et seulement si les points A ; B ; C et D sont dans un même plan de l'espace.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si l'un au moins est une combinaison linéaire des deux autres.
- Un triplet de vecteurs non coplanaires est appelé une base de l'ensemble W des vecteurs de l'espace.
- On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$:
 - ❖ tout quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base. Dans ce cas, le repère est cartésien.
 - ❖ tout quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires. Dans ce cas, le repère est affine.
- Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}$. Il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ce triplet est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $M(x; y; z)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le triplet $(x; y; z)$ est aussi le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Consigne 3 : Consolidation des acquis

- 1) Ecris le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonctions des vecteurs de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH})$
- 2) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ relativement à la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH})$.
- 3) Détermine les coordonnées du milieu J du segment $[GH]$ dans le repère (A, B, D, E)

Stratégies de travail : TI : 10 mn TG : 7 mn et TC : 15 mn

SEQUENCE N°2 : BARYCENTRE DE N POINTS PONDERES ($N \in \mathbb{N}^*, N \geq 2$)

Activité 2 : Définition et propriétés

Sonon a observé un motocycliste se déplacer d'un point A d'une extrémité du pont pour se rendre à un point B de l'autre extrémité. Le mouvement de A vers B est rectiligne. Surpris par une panne d'essence, le motocycliste s'est arrêté en un point G vérifiant la relation $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Consigne 1 : Découverte du barycentre

1. Justifie que $(\alpha + \beta) \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. Montre que si la somme $\alpha + \beta$ est non nulle, alors le point G vérifiant l'égalité de la première question est unique.

Stratégies de travail : TI : 10 mn TG : 7 mn et TC : 5 mn

- Le point G vérifiant les conditions ci-dessus est appelé barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$ et $(A; \beta)$

Définition : Point pondéré

On appelle point pondéré tout couple $(A; \alpha)$ où A est un point et α un nombre réel.

Barycentre de n points pondérés

Définitions

- Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et A, B deux points de l'espace. On appelle barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , l'unique point G vérifiant la relation $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. On le note : $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
- Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (des nombres réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points de l'espace. On appelle barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ l'unique point G vérifiant : $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. On le note : $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

Isobarycentre

Définition

On appelle isobarycentre de n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace, le barycentre de ces n points affectés d'un même coefficient non nul.

Remarque

- G est isobarycentre de $A_1, A_2, \dots, A_n \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha) \dots, (A_n, \alpha)\}$. Donc l'isobarycentre est le barycentre des points affectés tous de même coefficient égal à 1
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .
- L'isobarycentre de quatre points A, B, C et D coplanaires (respectivement non coplanaires) est le centre du quadrilatère $ABCD$ (respectivement du tétraèdre $ABCD$)

Consigne 2 : Construction du barycentre de deux points

Soit deux points A et B .

- 1- Construis le point G , barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 3)$.
- 2- Construis le point G' , barycentre des points pondérés $(A; -1)$ et $(B; 3)$.

Stratégies de travail : TI : 10 mn TG : 5 mn et TC : 10 mn

Propriétés

Soit $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \dots, (A_n, \alpha_n)$, n points pondérés de l'espace

P₁ Construction du barycentre

✓ Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ alors $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1 A_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1 A_n}$$

P₂ Réduction de vecteurs

❖ Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ alors pour tout point M de l'espace on a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} \text{ ou } G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$$

❖ Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ alors le vecteur $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$ est indépendant du point M.

Consigne 3 : Propriétés du barycentre

On considère les points pondérés $(A; k\alpha)$; $(B; k\beta)$ et $(C; k\gamma)$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. On désigne par G et G_1 les barycentres respectifs de (A, α) , (B, β) , (C, γ) et (A, α) , (B, β) .

1. Traduis par une égalité vectorielle chacune des informations suivantes :

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\} \text{ et } G_1 = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}.$$

2. Démontre que si k est un réel différent de 0 alors G est le barycentre de $(A; k\alpha)$; $(B; k\beta)$ et $(C; k\gamma)$.

3. Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(G_1, \alpha + \beta)$, et (C, γ) .

Stratégies de travail : TI : 10 mn TG : 7 mn et TC : 15 mn

Propriétés

- Le barycentre de trois (ou n ,) points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha_1), (B, \alpha_2), \dots, (N, \alpha_n)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A, k\alpha_1), (B, k\alpha_2), \dots, (N, k\alpha_n)\}, k \neq 0$$

- Soit (A, α) ; (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si H est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) alors $\text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$. H est appelé **barycentre partiel**.

Propriété d'associativité

Le barycentre de n points pondérés $((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n))$ ne change pas lorsqu'on remplace p d'entre eux ($2 \leq p \leq n - 1$) dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre partiel affecté de cette somme c'est-à-dire si $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ et si

$$H = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_p, \alpha_p)\} \quad (2 \leq p \leq n-1) \text{ alors}$$

$$G = \text{bar}\{(H, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$$

H est appelé barycentre partiel des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_p, \alpha_p)$

Coordonnées du barycentre de n points pondérés

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots,$

(A_n, α_n) , alors les coordonnées du point G dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \dots + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \dots + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\ z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \end{cases}$$

Méthode

Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à conditions que cette somme soit différente de zéro.

Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G , on peut démontrer que G est à la fois barycentre des points I et J et barycentre des points K et L .

SEQUENCE N°3 : Produit scalaire**Activité 3-1** : Définitions et propriétés

Sonon déclare à Cossi : « L'ingénieur PIKO arrive même à estimer l'effort fourni par un ouvrier pour déplacer une charrette remplie de paquets de ciment ou de pierres cubiques en béton d'une position A à une position B ». Cossi informe que cela peut se faire en calculant le travail effectué par l'ouvrier.

Consigne 1 : Définition

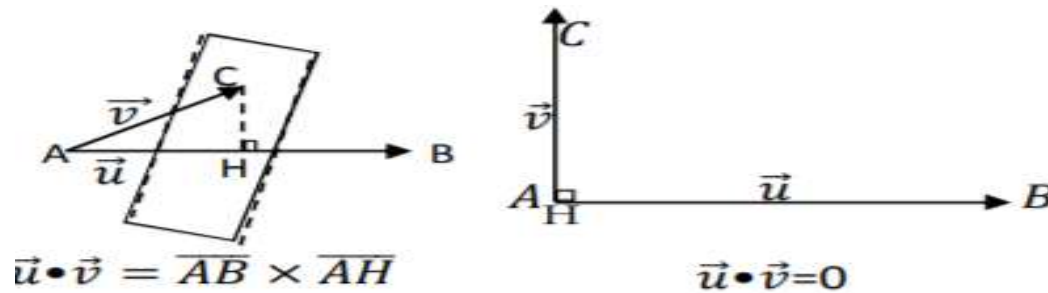
On désigne par $\vec{F}$ la force exercée par l'ouvrier pour déplacer la charrette du point A au point B et par θ l'angle que fait la force $\vec{F}$ avec l'horizontal.

1. Fais une figure.
2. Exprime en fonction de F , AB et θ le travail W effectué par l'ouvrier pour déplacer la charrette. Le travail W ainsi calculé est appelé produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)



Expression géométrique du produit scalaire

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathcal{W}$ On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Remarque

Soit A , B et C trois points distincts de l'espace

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})})$$

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathcal{W}$

On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Carré scalaire - norme d'un vecteur- vecteur unitaire

Définitions

- Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ ». On le note $\vec{u}^2$
On a : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, le nombre réel positif noté $\|\vec{u}\|$ défini par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

Remarque

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Consigne 2 : Définition

En considérant le cube $ABCDEFGH$ de la séquence 1, indique :

1. Deux vecteurs orthogonaux.

2. Un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan (ABC) .

■ Le vecteur indiqué en 2 est appelé vecteur normal au plan (ABC) .

Consigne 3 : Propriétés

Remplace, en utilisant uniquement les lettres, les pointillés par les expressions convenables pour en faire des propriétés :

- ▶ Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est ...a... à un vecteur directeur de l'autre.
- ▶ Deux droites sont ...b... si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.
- ▶ Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est un vecteur ...c... à ce plan.
- ▶ Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur ...d... de la droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.
- ▶ Deux plans sont ...e... si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.
- ▶ Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est ...f... à un vecteur normal à l'autre.

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Base orthonormée

On appelle base orthonormée de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace, toute base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

- Si l'espace est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si et seulement si

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases}$$

Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Dans une base orthonormée, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ est donnée par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Vecteur normal à un plan

Définition : On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Positions relative de droites et de plans

Propriétés

- Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
- Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal au plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal à l'autre.

Activité 3-2 : Utilisation du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-1; 1; -1)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(2; 1; 1)$.

Consigne : Application du produit scalaire

1- Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2- Détermine une valeur approchée, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Lieux géométriques dans l'espace

A et B sont deux points distincts de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$
- $MA = MB$ est le plan médiateur du segment $[AB]$ (le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB))
- $MA = k$ ($k > 0$) est la sphère de centre A et de rayon k .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Lieux géométriques dans le plan

A et B sont deux points du plan et $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs du plan. L'ensemble des points M du plan tels que :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0$ est la perpendiculaire en A à la droite de repère $(A ; \vec{u})$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

- $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- $MA = k$ ($k > 0$) est le cercle de centre A et de rayon k

SÉQUENCE 4 : Plan de l'espace

Activité 4-1 : Équation cartésienne d'un plan

Au cours des travaux, l'ingénieur PIKO avait invité Sonon et autres ouvriers à construire des contreplaqués. L'espace est muni d'un repère ; l'un des contreplaqués est assimilable au plan (P) passant par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$.

Consigne 1 : équation cartésienne d'un plan

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

1. Donne une caractérisation du plan (P) à partir des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.
2. Déduis-en une relation entre les coordonnées x, y et z d'un point quelconque M de (P) .

■ La relation obtenue est une **équation cartésienne** du plan (P) .

Equation cartésienne d'un plan

Définition : L'espace est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $a; b$ et c des nombres réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. On appelle équation cartésienne d'un plan (P) de l'espace toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un nombre réel donné. On note $(P) : ax + by + cz + d = 0$. Le triplet $(x; y; z)$ représente les coordonnées d'un point quelconque de (P)

Remarque

Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan (P) alors pour tout nombre réel k non nul, $k(ax + by + cz + d) = 0$ est aussi une équation cartésienne de (P) .

Propriété : L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Propriétés : L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a, b et c des nombres réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

Remarques : Lorsque le repère n'est pas orthonormé, le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ (n'est généralement pas un vecteur normal au plan

Pour un plan donné, on peut passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne et vice-versa.

Activité 4-2 : Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est muni d'un repère. Un autre contreplaqué est assimilable au plan (P) passant par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$. On dit que (P) est le plan de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Consigne 1 : Représentation paramétrique d'un plan.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

1. Donne une caractérisation vectorielle du plan (P) à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en complétant l'équivalence suivante :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \dots$$

2. Déduis-en les coordonnées x, y et z du point M de (P) en fonction de $b, c, a', b', c', x_0, y_0$, et z_0 et de deux paramètres réels

■ Le système obtenu est une représentation paramétrique du plan (P) .

Représentation paramétrique d'un plan

Définition :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs de (P) .

Le système
$$\begin{cases} x = x_0 + at + a't \\ y = y_0 + bt + b't \\ z = z_0 + ct + c't \end{cases}$$
 avec $(t; t') \in \mathbb{R}^2$ est appelé une représentation paramétrique du plan (P) .

Remarques : Si A, B et C sont trois points non alignés de l'espace alors

- $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC)
- $M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ (**C'est la caractérisation vectorielle du plan (ABC) de repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$**)

Pan défini par	A pour repère
Trois points non alignés A, B et C	$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
Une droite (D) de repère $(A; \vec{u})$ et un point $B (B \notin (D))$	$(A; \overrightarrow{AB}, \vec{u})$
Deux droites sécantes de repères $(A; \vec{u})$ et $(B; \vec{v})$	$(A; \vec{u}, \vec{v})$ ou $(B; \vec{u}, \vec{v})$
Deux droites strictement parallèles de repères $(A; \vec{u})$ et	$(A; \overrightarrow{AB}, \vec{v})$ et $(A; \vec{u}, \overrightarrow{AB})$

$(B; \vec{v})$	
----------------	--

Activité 4-3 : Équation cartésienne d'un plan à partir d'une de ses représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point $A(1; -1; 2)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ et $\vec{v} = -5\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$.

Consigne 1 : Equation cartésienne obtenue à partir de sa représentation paramétrique

1. Détermine une représentation paramétrique du plan de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.
2. Déduis-en une équation cartésienne de ce plan.

Activité 4-4 : Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne $(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 2)$ et $\vec{n}(-1; 2; 1)$.

Consigne 1 : Distance d'un point à un plan

- 1) Détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
- 2) a) Vérifie que le point B n'appartient pas au plan (P) .
 b) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H du point B sur le plan (P) .
 c) Déduis-en la distance du point B au plan (P) .

3) Calcule le nombre $\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

4) Propose une formule permettant de calculer la distance d'un point M à un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Distance d'un point à un plan

Propriétés :

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

❖ La distance du point M au plan (P) est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur (P) . On la note $d(M; (P))$

Et on a $d(M; (P)) = \frac{|\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} u.l$ avec $u.l$ l'unité de longueur

❖ Si le plan (P) a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors la distance du point

$M(x_0, y_0, z_0)$ au plan (P) est : $d(M; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} u.l$

SÉQUENCE 5 : Droite de l'espace

Activité 5-1 : Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

L'ingénieur PIKO a identifié que les deux rives du fleuve sont rectilignes. L'espace est muni d'un repère orthonormé ; l'une des rives est assimilable à une droite (D) passant par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$. On dit que (D) est la droite de repère $(A; \vec{u})$.

Consigne 1 : Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

1. Donne une caractérisation vectorielle de la droite (D) à partir des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ en complétant l'équivalence suivante : $M \in (D) \dots$
2. Déduis-en les coordonnées $x; y; z$ de M en fonction de a, b, c, x_0, y_0, z_0 et d'un paramètre réel.

■ Le système obtenu est une représentation paramétrique de la droite (D) .

Représentation paramétrique d'une droite

Définition :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (D) la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ avec $(t \in \mathbb{R})$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D)

Remarque : Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

- $(A, \vec{u})$ est un repère de la droite (D)
- $M \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

C'est la caractérisation vectorielle de la droite (D) de repère $(A, \vec{u})$.

Activité5-2 : Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point $A(1; -1; 2)$ et le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Consigne 1 : Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace

1. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) de repère $(A, \vec{u})$.
2. A partir de cette représentation paramétrique de la droite (D) , établis des relations entre les coordonnées x, y et z d'un point quelconque M de (D) .

■ La relation obtenue est un système d'équation cartésiennes de la droite (D).

Système d'équations cartésiennes d'une droite

Propriété Toute droite (D) de l'espace est l'intersection d'au moins deux plans sécants (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est appelé système d'équations cartésiennes de la droite (D).

Définition L'espace est muni d'un repère

Soit (D) est une droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ alors une représentation

paramétrique de la droite (D) est $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$; avec ($t \in \mathbb{R}$)

En éliminant t , on obtient un système d'équation cartésienne de la droite (D)

1^{er} cas : Si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ alors un système d'équations cartésiennes de la droite (D) est :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

2^{ème} cas : Si par exemple seul $a = 0$ alors un système d'équations cartésiennes de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

Les cas $b = 0$ ou $c = 0$ sont analogues

3^{ème} cas : Si par exemple $a = 0$ et $b = 0$ alors un système d'équations cartésiennes de la droite (D) est

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} (z \in \mathbb{R})$$

Les cas $b = 0$ et $c = 0$ ou $a = 0$ et $c = 0$ sont analogues

Séquence 6 : Produit vectoriel

Base orthonormée directe de $\mathcal{W}$ - repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$

Règle du bonhomme d'Ampère

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. soit O un point quelconque de l'espace et A, B, C les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Les physiciens imaginent un observateur (appelé "observateur d'Ampère") placé le long de la droite (OC) , les pieds en O , la tête du côté de C et regardant vers A . Lorsque le point B est à gauche de l'observateur, on dit que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe et le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct.



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **directe**

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **indirecte**

Orienté l'espace, c'est distinguer deux types de repères : les repères directs et les repères indirects.

Activité 6 : Produit vectoriel

Consigne 1 : Base directe et indirecte

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base directe de l'espace $\mathcal{W}$.

Précise si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte.

- a. $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$
- b. $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$
- c. $(\overrightarrow{FG} ; \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB})$
- d. $(\overrightarrow{EF} ; \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EH})$

6.2 Produit vectoriel de deux vecteurs

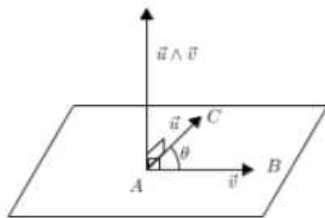
Définition : Produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté $\mathcal{W}$.

A, B, C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors :
 - Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
 - La base $(\vec{u} ; \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
 - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$ où θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



Consigne 2 : application de définition

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5\text{cm}$, $AC = 2\sqrt{3}\text{cm}$ et $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 15\text{cm}$.

1. Détermine mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. Construis le triangle ABC .

Propriétés du produit vectoriel

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathcal{W}$ et α un nombre réel. On a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Consigne 3 : Démonstration de propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ orienté et A, B, C, D quatre points de l'espace orienté.

1. Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Démontre que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
3. On suppose que les points A, B et C sont non alignés. Démontre que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
4. Démontre que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.
5. Démontre que les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) = 0$.

Propriétés

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace, ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Pour tous points A, B et C de l'espace, (A, B et C sont alignés) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- Pour tous points A, B et C non alignés ($\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$) de l'espace, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, ($\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$
- Pour tous points A, B, C et D de l'espace, (A, B, C et D sont coplanaires) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) = 0$.

Remarque :

$$ABCD \text{ est un tétraèdre} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \neq 0$$

Consigne 4 : Coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs et propriété.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$ orienté, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

- 1- Démontre que si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$ alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.
- 2- Démontre que le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$.

Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs

Propriété

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe alors :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \end{cases}$$

Propriété

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour triplets de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') , alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{On a : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Consigne 5 : Consolidation

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $(4; 6; 2)$, $N(2; 2; 6)$, $R(2; 3; 1)$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ et $\vec{v} = -5\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$.

1. Démontre que :

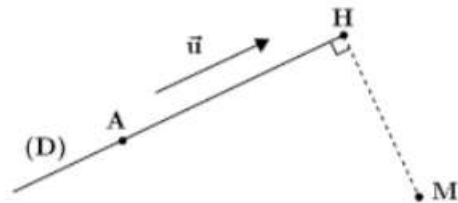
- a) les points M, N et R ne sont pas alignés.
- b) les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont coplanaires.
- 2. Soit $S(4; 7; 0)$ et (Δ) la droite de repère $(S; \vec{u})$
 - a) Démontre que (Δ) n'est pas parallèle au plan (MNR) .
 - b) Détermine les coordonnées du point d'intersection T de la droite (Δ) et du plan (MNR) .
- 3. On considère la droite (D) définie par : $x = 2$ et $y - 1 = z$.
 - a) Démontre que (Δ) et (D) sont non coplanaires.
 - b) Étudie la position relative de (D) et (MNR) .

Distance - aire – volume

Consigne 6 : Distance

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. A, B et C sont des points non alignés de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. Soit (D) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et (P) le plan déterminé par les points A, B et C . M est un point quelconque de l'espace.

- 1) Par définition la distance de M à (D) est MH où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .



En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$, démontre que :

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\| = MH \times \|\vec{u}\|$$

Déduis-en la distance du point M à la droite (D) .

2) On pose $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

a) Démontre que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v}$. (Tu pourras utiliser la propriété de Chasles: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$)

b) Démontre que $|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{v}| = HM \times \|\vec{v}\|$. En déduis que $MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} u.l$

c) Déduis que la distance du point M au plan (P) est : $d(M; (P)) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} u.l$

Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite de repère $(A; \vec{u})$. Pour tout point M de l'espace, la distance $d(M; (D))$ du point M à la droite (D) est: $d(M; (D)) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} u.l$ (unité de longueur)

Distance d'un point à un plan

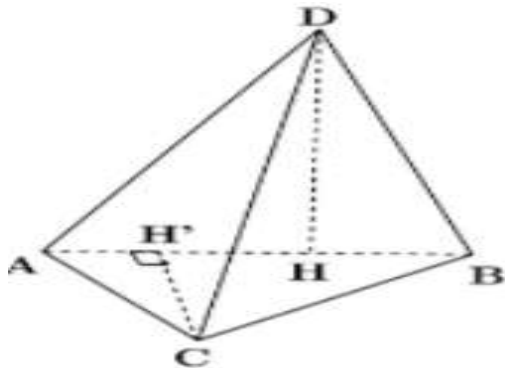
Soit (P) un plan passant par un point M et de vecteur normal $\vec{n}$. Pour tout M un point de l'espace. La distance $d(M; (P))$ du point M au plan (P) est donnée en unité de longueur par :

$$d(M, (P)) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \text{ u. l (unité de longueur)}$$

Consigne 7 : Volume

Soit un tétraèdre $ABCD$.

- 1) Démontre que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| \text{ u. } a$
- 2) Exprime DH en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$
- 3) Démontre que le volume du tétraèdre est : $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| \text{ u. } v$



L'aire d'un domaine triangulaire ABC

A, B et C étant trois points non alignés de l'espace, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| \text{ u. a (unité d'aire)}$$

Volume d'un tétraèdre $ABCD$

A, B, C et D étant quatre points non coplanaires de l'espace, le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCD$ est:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| \text{ u. v (unité de volume)}$$

Positions relatives de droites et plans de l'espace : Récapitulatif

Positions relatives de deux droites

Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de l'espace, de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$.

- ❖ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires soit $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- ❖ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ❖ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et si de plus :
 - ✓ $\overrightarrow{AB}, \vec{u},$ et $\vec{v}$ sont coplanaires alors les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de repère $(A, \vec{u})$ et $(\mathcal{P})$ un plan passant par B , de vecteur normal $\vec{n}$.

✓ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont parallèles lorsque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Si de plus :

❖ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$ alors $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.

❖ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ alors $(\mathcal{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.

✓ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants lorsque $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$.

✓ $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ($\vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}$).

Positions relatives de deux plans

Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par A , de vecteur normal $\vec{n}$ et $(\mathcal{P}')$ un plan passant par B , de vecteur normal $\vec{n}'$.

✓ $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Si de plus :

❖ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}' \neq 0$ alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles.

❖ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}' = 0$ alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus.

✓ $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

✓ $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont orthogonaux lorsque $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Lignes de niveau

Quelques lignes de niveau usuelles

A et B sont deux points donnés et $\vec{u}$ un vecteur non nul donné.

Ensemble des points M du plan tels que :	Ensemble des points M de l'espace tels que :
1. $AM = r, (r > 0)$ l'ensemble des points du plan tels $AM = r$ est le cercle de centre A et de rayon r	1. $AM = r, (r > 0)$ l'ensemble des points de l'espace tels $AM = r$ est la sphère de centre A et de rayon r
2. $AM = BM$ l'ensemble des points du plan tels $AM = BM$ est la médiatrice du segment $[AB]$	2. $AM = BM$ l'ensemble des points du plan tels $AM = BM$ est la plan médiateur du segment $[AB]$.
3. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$	3. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
4. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$	4. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$

	5. $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$
	6. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ l'ensemble des points du plan tels $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ est la droite (AB) Remarquons que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

SÉQUENCE 7 : Système d'équations linéaires

Activité 7 : Système d'équations linéaires.

Dansou se demande combien va-t-il dépensé s'il choisi de faire le sacrifice prescrit par le devin Gouton.

Consigne 1 : Application directe

Chez une vendeuse du marché d'Adjara, le citron est vendu à 50f un tas de 8 citrons, 25f un tas de 3 citrons et à 100f un tas de 20 citrons. La vendeuse dispose de 88 tas de citrons en tout, donnant exactement le nombre de citrons convenu pour le sacrifice et elle dit à Dansou qu'il doit payer 5825f.

- 1) Traduis ces informations par des équations mathématiques.
 - 2) Combien y-a-t-il de tas de 8 citrons, de 3 citrons et de 20 citrons chez la vendeuse ?
- Le système d'équation obtenu est appelé système d'équations linéaires.

Définitions

- Un système de p ($p \geq 2$) équations linéaires à n inconnues ($n \geq 2$) est tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des constantes réelles.

- Un système est échelonné si et seulement si $a_{ij} = 0$ où $1 \leq j < i$

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 5 \\ . + 2y + z = 2 \\ . + 2y + 8z = 2 \end{cases}$$

- Un système est triangulaire si et seulement si il est échelonné et le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 4y - z + t = 5 \\ x + 2y + z + 3t = 0 \\ -x + 2y + 8z - t = 0 \\ . + 2y + 8z - t = 2 \end{cases} \text{ est un système triangulaire.}$$

- Deux systèmes d'équations linéaires sont équivalents si et seulement si ils ont même ensemble de solution

Propriété

On transforme un système en un système équivalent si :

- On change, dans toutes les équations, dans l'ordre des inconnues sans changer les coefficients associés.
- On change deux lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

- On remplace une ligne L_i par une combinaison linéaire des lignes L_i et L_j ($L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$) ($\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}^*$).

Méthode de Pivot de Gauss

La méthode du Pivot de Gauss utilise les propriétés ci-dessus. Elle permet dans un premier temps, de transformer le système initial en un système équivalent échelonné ou triangulaire. Puis dans un second temps de résoudre le système obtenu.



SA₂ : Organisation des données

Situation de départ :

Texte : Les nombres dans le Fâ

Dansou est un brillant élève de terminale D. Cependant, à l'approche de son examen du baccalauréat, sa maman lui demande de consulter le Fâ, comme il est de coutume dans la famille à l'occasion des événements importants. Il se rend chez Gouton, un devin du Fâ. Pour réaliser la consultation, Gouton utilise quatre cauris dont les dos sont rognés. Après les rituels d'usage, il jette les quatre cauris sur la surface préparée pour la circonstance. Il obtient trois cauris fermés et un ouvert. Il reprend l'opération et obtient les quatre cauris fermés. Alors il annonce à Dansou qu'il lui faut beaucoup de sacrifices avant d'obtenir le baccalauréat. Il lui demande si le marché de Tokpa qui a une périodicité de quatre jours s'animera l'un des trois jours que durera la composition du baccalauréat et quel est, le cas échéant, le jour de la semaine qui correspondra à ce marché. Entre autres sacrifices, il lui demande de disposer de 1069 citrons qu'il amènera au marché d'Adjarra, conditionnés de la façon suivante : – avec sept citrons, il constitue un tas ; – avec sept tas, il constitue un filet ; – avec sept filets, il constitue un panier. Dansou,

pris de peur, décide d'aller consulter Adandé, un autre devin du Fâ. Adandé utilise également quatre cauris comme Gouton, après les rituels d'usage. Adandé jette ses quatre cauris une première fois. Il obtient deux cauris ouverts et deux cauris fermés. Il jette une deuxième fois les quatre cauris et en obtient trois ouverts et un fermé. Il dit alors à Dansou qu'au vu des signes obtenus, il réussira son baccalauréat avec une très bonne mention. Dansou se pose alors plusieurs questions. Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- ❖ Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- ❖ Analyser chacun des problèmes posés ;
- ❖ Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- ❖ Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- ❖ Améliorer au besoin ta production.

INTRODUCTION

1. Lis le texte de la situation de départ puis dégage les groupes de mots qui montrent que :
 - a) Dansou est curieux ;
 - b) Dansou est troublé.

2. Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ par rapport aux nombres

SÉQUENCE 1 : Les nombres complexes

Activité 1-1: Forme algébrique d'un nombre complexe

Pendant la consultation, Gouton a prononcé une parole incantatoire qui se traduit par : « Peut-on trouver deux nombres a et b de somme 6 et de produit 10 ? »

Consigne 1 : Définition

1. Écris l'équation (E) du second degré vérifiée par a et b .
2. Justifie que l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
3. En posant $i^2 = -1$, propose les solutions de l'équation (E) en fonction de i .

■ Les solutions de l'équation (E) sont appelées des **nombres complexes**.

Définition : Nombres complexes

- On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$ et a et b sont des nombres réels et i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Notation et vocabulaire

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z .
- Le nombre réel a est appelé partie réelle de z et notée $Re(z)$.
- Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z et notée $Im(z)$.

La forme algébrique d'un nombre complexe z est alors $z = Re(z) + iIm(z)$.

Si $b = 0$ alors $z = a$, z est un nombre réel ; tout nombre réel est un nombre complexe

Si $a = 0$ alors $z = ib$; le nombre complexe z est dit imaginaire. L'ensemble des nombres complexes imaginaires est noté $i\mathbb{R}$

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $z = ib$; le nombre complexe z est dit imaginaire pur. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$.

Consigne 2 : Démonstration de propriété

Conjugué d'un nombre complexe et propriétés

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes. On a $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

1. Utilise cette propriété pour démontrer la propriété ci-dessous : Pour tout nombre complexe z , $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

2. On donne les nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (a, b, a', b' sont des nombres réels)

a. Calcule $+z'$, $z \times z'$ et z^2 (On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$).

b. On suppose que $z \neq 0$. Calcule $(a + ib)(a - ib)$ et vérifie que $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$

Écris en fonction de a et b la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$

c. Démontre que $z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)$.

d. Calcule $(1 + i)^5$

3. Le nombre complexe $a - ib$ est appelé **conjugué** de $z = a + ib$ et est noté $\bar{z}$. soit deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et n un entier relatif.

a) Calcule $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ puis complète :

➤ $z + \dots = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = \dots$

➤ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = \dots$

➤ $z \in \dots \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ et $z \neq 0$

➤ Calcule $\bar{\bar{z}}$, $-\bar{z}$, $z\bar{z}$

b) Vérifie que $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ ($z \neq 0$) et que $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ ($z \neq 0$)

c) Démontre que $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ avec ($z \neq 0$) et n un entier relatif

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
- $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- z est imaginaire (respectivement imaginaire pur) si et seulement si : $\bar{z} = -z$ respectivement ($\bar{z} = -z$ et $z \neq 0$)
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{-z} = -\bar{z}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- Si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- Si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- Si $z \neq 0$, alors $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle conjugué de z , le nombre complexe noté $\bar{z}$, (lire z barre) défini par : $\bar{z} = a - ib$

Si $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) alors on a

$$\triangleright z\bar{z} = a^2 + b^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$$

$$\triangleright z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$$

$$\triangleright z - \bar{z} = 2ib = 2Im(z)$$

Opérations dans $\mathbb{C}$

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec (a, b, a', b' des nombres réels).

- La somme de z et z' est le nombre complexe $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- Le produit de z et z' est le nombre complexe $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- Si $z \neq 0$, l'inverse de z est le nombre complexe : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$
- Si $z \neq 0$, le quotient de z' par z est le nombre complexe : $\frac{z'}{z} = \frac{aa' + bb'}{a^2+b^2} + i \frac{ab' - a'b}{a^2+b^2}$

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes.

$P_1)$ ($zz' = 0$) si et seulement si ($z = 0$ ou $z' = 0$).

$P_2)$ Soit u et v deux nombres complexes et n un nombre entier naturel non nul. On a : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k u^{n-k} v^k$ (C'est la formule du binôme de Newton)

Dans le calcul de proche en proche des valeurs de $\mathbb{C}_n^k (0 \leq k \leq n)$, on utilise la disposition suivante : $\mathbb{C}_{n-1}^{k-1} + \mathbb{C}_{n-1}^k = \mathbb{C}_n^k$ et on dresse ainsi le tableau ci-dessous appelé Triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Consigne 3 : Module d'un nombre complexe et propriétés

Définition

On appelle module d'un nombre complexe z , le nombre réel positif ou nul $\sqrt{z \times \bar{z}}$. Il est noté $|z|$. Ainsi, $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

1. Complète l'information ci-après :

Si $z = x + iy$, alors $|z| = \dots$

2. Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif. Démontre que :

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

3. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

4. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$

5. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

6. $|z^n| = |z|^n$

7. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module d'un nombre complexe z , le nombre réel positif ou nul $\sqrt{z \times \bar{z}}$. Il est noté $|z|$. Ainsi, $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

Si $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Interprétation géométrique du module

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

- Pour tout point M d'affixe z . On a : $OM = |z|$
- Si A et B sont deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
4. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$
5. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z \neq 0)$

$$6. |z^n| = |z|^n$$

$$7. |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Consigne 4 : Interprétation géométrique et recherche d'ensemble de point

Information

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout nombre complexe $z = x + iy$ est associé le point $M(x; y)$ appelé image de z et à tout point $M(x; y)$ est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de $(x; y)$. De même, au nombre complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur $\vec{u}(x; y)$. $\vec{u}$ est appelé vecteur image de z et z est appelé affixe de $\vec{u}$.

1. Soit $M(x; y)$ un point du plan d'affixe z . Compare OM et $|z|$.
2. M et M' sont deux points du plan d'affixes respectives z et z' . Compare MM' et $|z - z'|$.
3. A, B et C sont les points d'affixes respectives $2 - i$, $1 + 2i$ et $-2 - i$.
 - a) Détermine l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $|z - (2 - i)| = 1$.
 - b) Détermine l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que $|z - (1 + 2i)| = |z + (2 + i)|$.
- 4- M et M' sont deux points du plan d'affixes respectives z et z' .
 - a) Détermine l'affixe du milieu du segment $[MM']$.
 - b) Détermine l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \lambda)$.

Activité 1-2 Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe

Consigne 1 : Forme trigonométrique et exponentielle

Définitions Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère un point M d'affixe $z = x + iy (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ distinct de O et on désigne par θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1; \widehat{OM})$.

1. a) Détermine x et y en fonction de $|z|$, $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

b) Déduis-en que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

■ Cette écriture est la forme trigonométrique de z . Le nombre θ est appelé argument de z et est noté $\arg z$.

2. On pose $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ (lire exponentielle $i\theta$).

Donne une nouvelle écriture de .

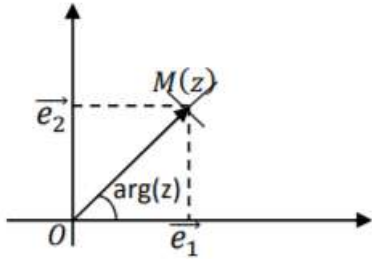
■ Cette écriture est la forme exponentielle de z .

Argument d'un nombre complexe non nul

Définitions

- Soit z un nombre complexe non nul de point-image M dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle argument de z , toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1; \widehat{OM})$. On le note $\arg z$.

- On appelle argument principal de z , la mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1; \widehat{\vec{OM}})$ appartenant à l'intervalle $] - \pi; \pi]$. [On le note $\text{Arg}(z)$. On a $\text{Arg}(z) = (z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



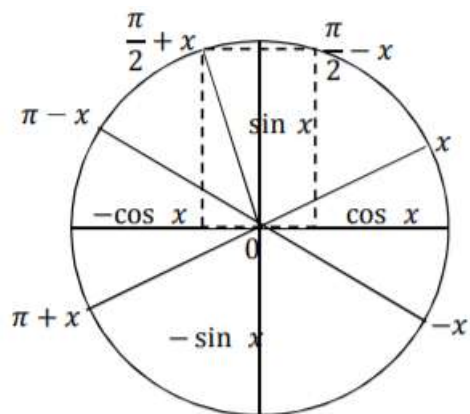
Propriété : Si z est un nombre complexe de forme $(z = a + ib \text{ } (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ et un argument de z est θ .

Alors θ vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

Remarque

Cercle trigonométrique



Lignes trigonométriques usuelles

$x(\text{en radian})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Rappels de quelques formules trigonométriques

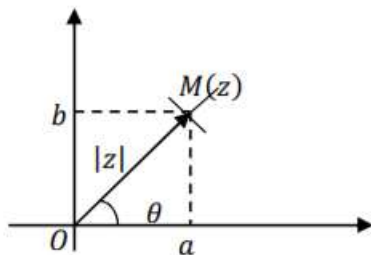
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition Tout nombre complexe z non nul dont un argument est θ peut s'écrire sous la forme :
 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Cette écriture de z est appelée forme trigonométrique de z .



Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition

- Pour tout nombre réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- Tout nombre complexe z non nul dont un argument est θ peut s'écrire sous la forme : $z = |z|e^{i\theta}$

Cette écriture de z est appelée forme exponentielle de z .

Remarque : Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument donc il n'a ni forme trigonométrique ni forme exponentielle

Consigne 2 : Propriétés- linéarisation

1. On considère les nombres complexes $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ (r et r' étant des réels positifs) et n un entier relatif.

a) Démontre que $z = z'$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Écris sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $-z, \bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{z}{z'}$ et z^n

c) Complète alors les égalités :

➤ $\arg(-z) = \dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ $\arg(zz') = \arg(z) + \dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ $\arg(\bar{z}) = -\dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \dots - \dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ $\arg(z^n) = \dots + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

➤ Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n , $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \dots$

■ Cette dernière égalité est appelée **formule de Moivre**.

2. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec θ et θ' des nombres réels, $r > 0$ et $r' > 0$. Soit n un entier relatif. Écris sous forme exponentielle les nombres complexes $-z, zz', \bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{z}{z'}$ et z^n

3. Démontre les égalités : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

■ Ces égalités sont appelées **formules d'Euler**.

4. Utilise les formules d'Euler pour linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$ et $\cos^3 x \sin^2 x$.
5. Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ ou $\cos^n x \sin^n x$, c'est transformer chacune de ces expressions en une somme de cosinus ou de sinus de multiples de x . Par exemple, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$.

Propriétés Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n un nombre entier relatif.

- 1) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
- 2) $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 3) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 4) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 5) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 6) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- 7) $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Remarque

- z réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Propriétés : **Forme trigonométrique**

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ; θ un argument de z et θ' un argument de z' et n un nombre entier relatif.

$$1) zz' = |z| \times |z'| [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$2) -z = |z| [\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$$

$$3) \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

$$4) \bar{z} = |z| [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

$$5) \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

$$6) z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Propriétés : **Forme exponentielle**

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ; θ un argument de z et θ' un argument de z' et n un nombre entier relatif

On a :

$$1) zz' = |z| \times |z'| e^{i(\theta + \theta')}$$

$$2) -z = |z| e^{i(\pi + \theta)}$$

$$3) \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$$

$$4) \bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

$$5) \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$6) z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

Propriété : Formule de Moivre

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n , on a : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Remarques :

- Pour linéariser les polynômes trigonométriques, on utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton.
- Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\cos^n(n\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n \quad \sin^n(n\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

$$\text{Aussi } \cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{et } \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

$$\text{Donc } 2\cos(n\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} \quad \text{et } 2i\sin(n\theta) = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$$

Consigne 3 : Consolidation des acquis

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = z_1 z_2$ et $z_4 = \frac{z_2}{z_1}$

- 1) Écris z_4 sous forme algébrique
- 2)
 - a) Écris les formes trigonométrique et exponentielle de chacun des complexes z_1 et z_2 .
 - b) Déduis les formes trigonométrique et exponentielle de z_1^{11} , z_3 et z_4
- 3) Déduis, des questions précédentes, les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 4) Détermine les entiers naturels n tels que z_2^n soit un réel positif
- 5) On pose $z_5 = \sqrt{2} + z_1$ et $z_6 = 2 - z_2$. Détermine les formes exponentielles de z_5 et z_6

Consigne 4 : Racine carrée - racine nième

1. $az^2 + bz + c = 0$ est une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont le discriminant est $\Delta = 3 - 4i$.

On se propose de déterminer les nombres complexes δ tels que $\delta^2 = \Delta$.

- a) En posant $z = x + iy$, x et y étant des nombres réels, justifie que x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

b) Déduis-en les nombres complexes δ_1 et δ_2 dont le carré donne Δ .

■ Les nombres complexes δ_1 et δ_2 sont appelés racines carrées de Δ .

2. Soit $Z = re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul ($r > 0$) et n un entier naturel ($n \geq 2$).

Information

L'écriture $\sqrt[n]{r}$ se lit "racine n ième de r ". C'est l'unique réel positif ou nul dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est r .

Ainsi, $(\sqrt[n]{r})^n = r$. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 0 \\ 2^3 = 8 \end{cases}$

Calcule $(\sqrt[n]{r}[e^{i(\frac{\alpha+2k\pi}{n})}]^n$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

■ Ces nombres complexes sont les racines n ièmes de .

Racine carrée d'un nombre complexe

Définition :

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z , tout nombre complexe u tel que : $u^2 = z$

Propriété

$\delta = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) est une racine carrée d'un nombre complexe Δ si et seulement si :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \operatorname{Re}(\Delta) \\ a^2 + b^2 = |\Delta| \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) \end{cases}$$

Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$ toute équation d'inconnue z de la forme: $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

Propriété

Soit l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées de Δ

$P_1)$ Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$

$P_2)$ Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 telles que : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Méthode de résolution d'une équation du 2nd degré

Pour résoudre l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$, on peut procéder comme suit

- Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Déterminer une racine carrée δ de Δ
- déterminer les solutions

Propriété

Si $P(z)$ est un polynôme de degré $n (n \geq 3)$ et z_0 est une racine de $P(z)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré $n - 1$ tel que :

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

Racines nième d'un nombre complexe

Définitions

Pour tout nombre entier naturel n , avec $(n \geq 3)$, on appelle racine $n - ième$ d'un nombre complexe z , tout nombre complexe u tel que : $u^n = z$

Propriétés

Soit $z = re^{i\theta} \in (r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R})$ un nombre complexe non nul et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

P₁) Le nombre z admet n racines n – ième z_k définies par :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

P₂) Pour ($n \geq 3$) les points images de ces racines n – ièmes sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscriptibles dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$ où O désigne l'origine du repère choisi dans le plan complexe.

Consigne 5 : Configurations planes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D ($A \neq B$ et $C \neq D$)

1) Exprime en fonction de $(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB})$ et $(\vec{e}_1; \overrightarrow{CD})$ l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$.

2) Déduis-en que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

3) Précise la configuration présentée par les quatre points lorsque $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ et lorsque $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

Nombres complexes et configurations du plan

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan

$$1) \text{mes}(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$3) A, B \text{ et } C \text{ sont alignés si et seulement si } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

$$4) (AB) \perp (CD) \text{ si et seulement si } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

$$5) ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \text{ si et seulement si } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi \text{ avec } b \in \mathbb{R}^*$$

$$6) ABC \text{ isocèle en } A \text{ si et seulement si } |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

Remarque

Si $\hat{A} = \alpha$ avec $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ alors

$$ABC \text{ est triangle isocèle en } A \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$$

$$7) ABC \text{ est triangle isocèle rectangle en } A \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$$

$$8) ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

9) Points cocycliques

A, B, C et D sont cocycliques (appartiennent à un même cercle) $\Leftrightarrow \frac{\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}}{\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}} \in \mathbb{R}^*$

Remarques

- Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{z_{AB}} = \overrightarrow{z_{DC}}$
- Un quadrilatère $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{z_{AB}} = \overrightarrow{z_{DC}} \\ \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \in i\mathbb{R}^* \end{cases}$
- Un quadrilatère $ABCD$ est un carré si et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{z_{AB}} = \overrightarrow{z_{DC}} \\ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \end{cases}$
- Un quadrilatère $ABCD$ est un losange si et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{z_{AB}} = \overrightarrow{z_{DC}} \\ |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \end{cases}$
- Un quadrilatère $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

Activités de consolidation et ou de remédiation

Consigne 6 : Consolidation

- 1) (a) Détermine les racines cubiques z_0, z_1 et z_2 du nombre complexe $Z = 1$.
 (b) On désigne par A, B et C les points images respectives de z_0, z_1 et z_2 . Écris z_0, z_1 et z_2 sous forme algébrique et vérifie que le triangle ABC est équilatéral.

- 2) a) Détermine les racines quatrièmes z_0, z_1, z_2 et z_3 du nombre complexe $Z = -4$.
b) On désigne par E, F, G et H les points images respectives de z_0, z_1, z_2 et z_3 . Écris z_0, z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique et vérifie que quadrilatère $EFGH$ est un carré.

SEQUENCE 2: LIMITES ET CONTINUITÉ

Activité 2 : Limites et continuité

Dansou sait que, pour un BAC D, il aura à étudier des fonctions. Pour une bonne préparation, il a commencé par s'entraîner sur les limites et continuités sur les fonctions. Tu vas te mettre sur les pas de Dansou à travers les consignes qui suivent.

2.3.1 Limites

Consigne 1 : Limites

Calcule chacune des limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 3x - 1); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 + 4x - 1); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x^2 + 4x - 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 1}{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 1}{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - 1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2};$$

Consigne 2 : **Approfondissement**

Calcule chacune des limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 3} + 2x); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$$

Propriétés de comparaison

Rappels : Soit n un entier naturel non nul

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ avec $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- Si n est pair alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

- Si n est impair alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Limites trigonométriques

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limite en l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

Propriétés :

P_1) La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

P_2) La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est égale à la limite en l'infini du quotient du monôme de plus haut degré de P par le monôme de plus haut degré de Q

Remarque :

Les formes déterminées sont :

$$<<\frac{\textit{Infini}}{\textit{Réel}} = \textit{Infini}>> \textit{IRI}$$

$$<<\frac{\textit{zéro}}{\textit{Réel} \neq 0} = \textit{zéro}>> \textit{ORO}$$

$$<<\frac{\textit{Réel} \neq 0}{\textit{zéro}} = \textit{Infini}>> \textit{ROI}$$

$$<<\frac{\textit{Réel}}{\textit{Infini}} = \textit{zéro}>> \textit{RIO}$$

On retient ces formes à l'aide de la phrase : « IRI ORO est le ROI de RIO »

Remarque

Les cas d'indéterminations sont au nombre de quatre que voici :

$$\infty - \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$$

Pour lever ces indéterminations, on peut :

- faire usages des limites remarquables
- factoriser puis simplifier dans le cas d'une fonction rationnelle
- utiliser l'expression conjuguée dans le cas d'une fonction irrationnelle
- factoriser ou développer l'expression de la fonction selon le cas
- utiliser les règles de calculs ou les règles de comparaison de limites
- faire usage du développement limité au voisinage de 0

Propriétés de comparaison de limites

Soit f une fonction

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Consigne 3 : Utilisation de propriété

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2 \sin x$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$.

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Consigne 4 : Utilisation de propriété

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$.

1) Montrer que pour tout $x \geq 2, |f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Consigne 5 : Utilisation de propriété

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2+1}$

1) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{x}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2+1}$.

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1}$.

3) Que peux-tu dire de la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Limites d'une composée de fonctions

Propriété

$g \circ f$ est la composée d'une fonction f par une fonction g , a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$ a, b et l sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Remarque

Pour tout nombre réel a , les résultats de la propriété précédente sont valables pour les cas de limites à gauche et à droite en a .

Consigne 6 : Utilisation de propriété

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$.

Soit les fonctions g et h définies par $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

- 1) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et que $f(x) = goh(x)$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 3) Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Théorème des gendarmes

- S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur $]a; +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- S'il existe un nombre réel l , une fonction g et un intervalle $]a; +\infty[$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]a; +\infty[, |f(x) - l| \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Remarque

On a des propriétés analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0

Limite en l'infini d'une fonction minorée, majorée

Propriété :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un élément ou une borne de I .

P₁) Si f est minorée sur I et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$

P₂) Si f est majorée sur I et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = -\infty$

Limite d'une fonction croissante et bornée

Propriété

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a; b[$ ($a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$).

- Si f est majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .
- Si f est non majorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b .
- Si f est minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .
- Si f est non minorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a .

Prolongement par continuité

Consigne 7 : Prolongement par continuité

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1}$

1) Détermine le domaine de définition D de la fonction f

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Démontre que g est continue en 1

Prolongement par continuité

Propriété-Définition Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel tels que $a \notin D_f$ et que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l (l \in \mathbb{R})$ alors la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$ est continue en a et est appelée le prolongement par continuité de f en a .

Continuité en un point

Définition

Une fonction f est continue en un point x_0 lorsque f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité à gauche et à droite

Définition

- Une fonction f est continue à gauche en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ x < x_0 = f(x_0) \end{aligned}$$

- Une fonction f est continue à droite en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ $x > x_0$

- f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0 c'est-à-dire f est définie en x_0 et
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$
- est définie en x_0 et $x \rightarrow x_0 = x \rightarrow x_0 = f(x_0)$
- $$x < x_0 \quad x > x_0$$

Continuité sur un intervalle

Propriétés

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

- ❖ Si f et g sont continues sur I , alors les fonctions $f + g$; fg ; kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- ❖ Si g est continue sur I et ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{1}{g}$ est continue sur I .
- ❖ Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- ❖ Si f est continue sur I et $f \geq 0$ sur I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .
- ❖ Si f est continue sur I et g est continue sur un intervalle contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

Propriété

- ❖ Si f est une fonction continue sur un intervalle J alors $f(J)$ est un intervalle.

❖ Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$) alors il existe deux nombres réels m et M ($m < M$) tels que $f([a; b]) = [m; M]$.

Remarque

On ne dit pas qu'une fonction est continue sur une réunion d'intervalles mais on dit plutôt que la fonction est continue sur chacun des intervalles de cette réunion ou bien que la fonction est continue en tout élément de cette réunion

Consigne 8 : Continuité sur un intervalle

Démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

a) $f: x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

b) $f: x \mapsto |2x - 5|$

c) $f: x \mapsto \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + 1}$

d) $f: x \mapsto \sqrt{\tan^2 x + 1}$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Consigne 9 : Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$

1. Etudier la continuité de f sur $[1; +\infty[$.
2. Justifier que $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq -2$.
3. Démontrer que tout élément β de $[-2; +\infty[$ a un antécédent α dans $[1; +\infty[$.
4. En déduire l'image par f de l'intervalle $[1; +\infty[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . Tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent c par f compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Preuve

Soit f une fonction continue sur K , a et b deux éléments de K

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < k < f(b)$

$$f(a) < k < f(b) \Rightarrow a < f^{-1}(k) < b$$

$$\Rightarrow a < c < b \text{ car } f^{-1}(k) = c$$

D'où le résultat

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .

- S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ dans K admet au moins une solution appartenant à $]a; b[$.
- Si f ne s'annule pas sur K alors f garde un signe constant sur K .

Preuve

Soit f une fonction continue sur intervalle K .

- ❖ Supposons qu'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et f est une fonction continue sur $]a; b[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution appartenant à $]a; b[$. D'où le résultat.
- ❖ Supposons que f ne s'annule pas sur K . $0 \notin f(K)$ alors $\forall y \in f(K)$, on a $y < 0$ ou bien $y > 0$ car $f(K)$ est un intervalle. Or $\forall x \in K, f(x) \in f(K)$ alors $\forall x \in K, f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$. D'où le résultat.

Remarque : Si f ne s'annule pas sur un intervalle K et a et b deux nombres réels éléments de K . Pour prouver que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$), il suffit de prouver que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Consigne 10 : Existence de solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + \frac{2}{27}$.

- 1) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; -\frac{1}{3}]$.
- 2) Démontre que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; +\infty[$.
- 3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors le sens de variation de f sur $[a; b]$ est celui de f sur $]a; b[$.

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**Propriété**

a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. f est une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b .

Intervalle K	f est continue et strictement croissante sur K	f est continue et strictement décroissante sur K
$[a; b]$	$f(K) = [f(a); f(b)]$	$f(K) = [f(b); f(a)]$

$[a; b[$	$f(K)$ $= [f(a); \lim_{x \rightarrow b <} f(x)[$	$f(K)$ $=] \lim_{x \rightarrow b <} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$f(K)$ $=] \lim_{x \rightarrow a >} f(x); f(b)]$	$f(K)$ $= [f(b); \lim_{x \rightarrow a >} f(x)[$
$]a; b[$	$f(K)$ $=] \lim_{x \rightarrow a >} f(x); \lim_{x \rightarrow b <} f(x)[$	$f(K)$ $=] \lim_{x \rightarrow b <} f(x); \lim_{x \rightarrow a >} f(x)[$

Consigne 11 : Application directe

Déterminer $f(K)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + x - 2$, $K = [-2; 3]$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $K = [0; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ sur $K = \mathbb{R}$

Propriétés

a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et (E) l'équation $f(x) = 0$.

- ❖ Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation (E) admet au moins une solution dans $[a; b]$.
- ❖ Si de plus f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors l'équation (E) admet une solution unique dans $[a; b]$.

Consigne 12 : Application directe de propriété

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans K .

- 1) $(E): x^4 - 3x = 1, K =]1; 2[$
- 2) $(E): \cos x = x, K = \mathbb{R}$

Bijection et fonction réciproque

Propriété

Soit K un intervalle non vide, f une fonction numérique définie sur K et g une fonction définie de K dans $f(K)$ telle que pour tout $x \in K, g(x) = f(x)$. Si f est continue et strictement monotone sur K , alors g est bijective et g^{-1} varie dans le même sens que g (sens de variation).

Preuve La fonction g ainsi définie est une application. soit $y \in f(K)$.

Démontrons que $g(x) = y$ admet une solution unique dans K . f est continue et strictement monotone sur K alors $\forall y \in f(K), \exists ! x \in K$ tel que $f(x) = y$. Or $\forall x \in K, g(x) = f(x)$ donc $\exists ! x \in K / g(x) = y$. D'où l'équation $g(x) = y$ admet une solution unique dans K . Par suite, g est une bijection.

Consigne 13 : Consolidation

- 1) Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \tan x$ définie de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ vers $\mathbb{R}$ est une bijection.
- 2) Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de g^{-1} est symétrique à celle de g par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction racine n-ième

Consigne 14 : Fonction racine n-ième

n est un entier naturel ($n \geq 2$). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$.

- 1) Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.
- 2) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$

Fonction racine n-ième

Définition

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On appelle fonction racine n-ième la bijection réciproque de la fonction g_n définie par :

$$g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n$$

- L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée :

$$\diamond \sqrt[n]{x} \text{ ou } x^{\frac{1}{n}} \text{ pour } n > 2$$

$$\diamond \sqrt{x} \text{ ou } x^{\frac{1}{2}}$$

Propriétés

Soit x et y deux nombres réels positifs et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

- $(\sqrt[n]{x})^n = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$
- $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$

Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif.

Définition : Soit p un nombre entier relatif, q un nombre entier naturel non nul et x un nombre réel

strictement positif. On appelle puissance d'exposant $\frac{p}{q}$ de x et on note $x^{\frac{p}{q}}$ le nombre défini par $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$

L'égalité précédente peut s'écrire $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Propriétés : Soit r et r' deux nombres rationnels non nuls, x et y deux nombres réels strictement positifs.

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $x^r \times y^r = (xy)^r$
- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

SEQUENCE 3 : Dérivabilité- Etudes de fonctions

DERIVATION

ACTIVITE 3 : Dérivation

Consigne 1 : Dérivabilité en un point

Soit la fonction f définie par $(x) = |x^2 - 4|$.

1) Calcule le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$ et donne une interprétation géométrique du nombre dérivé.

2) Étudie la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

Interprétation géométrique du nombre dérivé

Définition

f est une fonction de courbe représentative (C) . Le nombre dérivé de f en un point x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) de f en x_0 .

Point anguleux

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0 et (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère. Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ de (C) est un point anguleux lorsque (C) admet en M_0 deux demi-tangentes de supports distincts.

Points d'inflexion

Définition

f est une fonction de courbe représentative (C) , M_0 un point de (C) d'abscisse x_0 . M_0 est un point d'inflexion lorsque la tangente à (C) en M_0 traverse (C) . C'est le cas lorsque $f'(x)$ s'annule sans changer de signe et c'est aussi le cas lorsque $f''(x)$ s'annule et change de signe.

Demi-tangentes verticales

Propriété

Soit f une fonction de courbe représentative (C) définie et continue sur un intervalle K contenant x_0 .

Lorsque la limite à gauche ou à droite en x_0 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, la courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point $M_0(x_0; f(x_0))$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0 <} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0 <} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0 >} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0 >} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors une équation de cette tangente est $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$

Consigne 2 : Dérivabilité et interprétation géométrique

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} \text{ si } x \in]-\infty; 1] \\ x-1-\sqrt{x-1} \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$

1. Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f

2. Étudie la dérivabilité de f en 1.
3. Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle K si elle est dérivable en tout point de K

Propriétés

Une fonction dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle.

Fonctions dérivées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit f une fonction n fois dérivable. On appelle dérivée seconde de f , la fonction dérivée de la fonction f' . On note f'' ou $f^{(2)}$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$. On définit de même la dérivée troisième de f notée f''' ou $f^{(3)}$ ou $\frac{d^3 f}{dx^3}$ et la dérivée n -ième de f notée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$

Consigne 3 : Points d'inflexion

Soit la fonction $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^4 - 2x^2$$

Étudie les points d'inflexion de la représentation graphique de .

Développement limité d'ordre , $n \in \{1; 2; 3\}$

Définition

Soit f une fonction n -fois dérivable sur un intervalle contenant 0. Pour tout x voisin de 0, on a :

- $f(x) = f(0) + x f'(0) + x \varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
- $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2 \varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.
- $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + x^3 \varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$. C'est le développement limité d'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.

Consigne 4 : Développement limité et application

1. Donne le développement limité d'ordre 2 de la fonction $f(x) = \cos x$ au voisinage de 0.
2. Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sin x$ au voisinage de 0.
3. Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

Dérivation de la composée de deux fonctions

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K , g une fonction dérivable sur intervalle contenant $f(K)$.
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur K et on a : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

Consigne 5 : Dérivée de fonction trigonométrique

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Étudie la dérivabilité de f sur son ensemble de définition puis calcule $f'(x)$.

Propriété

Soit f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur un intervalle K telle que
 $\forall x \in K; f'(x) \neq 0$

Soit g l'application définie de K dans $f(K)$ par $g(x) = f(x)$. La bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $f(K)$ et on a :

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}} = \frac{1}{g'[g^{-1}]}$$

L'ensemble de dérivabilité de g^{-1} est $\{x \in f(K) / g'[g^{-1}] \neq 0\}$ ou $f(K) - \{f(x) / f'(x) = 0\}$

Autrement dit, g^{-1} est dérivable sur l'ensemble $f(K)$ privé des images dont l'antécédent annule la dérivée première f' .

Consigne 6 : Application sur la dérivée de la bijection réciproque

Soit la fonction $f : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [1; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

1) Démontre que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

2) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Théorème des inégalités des accroissements finis

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a < b$). S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Consigne 7 : Inégalités des accroissements finis

Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 dans $[1; 2]$.

2. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontrer que $\forall x \in [1; 2]$,
 $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - x_0|$.

Études de fonctions

Parité – Périodicité

Définition

Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et D son domaine de définition.

- f est paire si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
- f est périodique de période T si et seulement si $\forall x \in D, (x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

Remarque

- Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ ont pour période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ a pour période $T = \frac{\pi}{|a|}$

Consigne 8 : Période et parité

1. Étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{7+x^2}{3x^2-2}$

c) $f(x) = |x-2| + |x+2|$

d) $f(x) = \sin 2x \cos x$

e) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{5 - 2 \cos x}$

2. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est périodique de période p .

a) $f(x) = \sin^2 x, p = \pi$

b) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}; p = 2\pi$

3. Donner une période de la fonction, dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = \cos \frac{x}{3}$

b) $f(x) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$

c) $f(x) = \sin x + \sin 2x$

Les éléments de symétrie

Définition

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(x_0; y_0)$ un point du plan et (Δ) la droite d'équation $x = a$.

- On dit que le $A(x_0; y_0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $\forall x \in D_f$, $(2x_0 - x) \in D_f$ et $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$.
- On pose $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
 - On obtient une fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$.
 - On étudie la parité de la fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$
 - Si Y est impaire alors le point $A(x_0; y_0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$.
 - On dit que la droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$ si et seulement si $\forall x \in D_f$, $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
 - Si la fonction $Y = f(X + a)$ est paire alors la droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

Remarque

Un ensemble est dit symétrique par rapport à zéro (0) si chaque élément de cet ensemble a encore son opposé dans cet ensemble.

Consigne 9 : Centre et axe de symétrie

Soit les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$.

1. Montre que le point $\Omega(1; 2)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction .

2. Démontre que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction .

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

- Si f est une fonction paire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(O; \vec{j})$ sur D_f .
- Si f est une fonction impaire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre O sur D_f .
- Si f est périodique de période , on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$
- Si f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(S; \vec{j})$ avec $S(a; 0)$.
- Si f admet le point $\Omega(a; b)$ pour centre de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre $\Omega(a; b)$.

En résumé, si f est paire ou impaire et périodique de période , on peut réduire son domaine

d'étude à l'intervalle $D = D_f \cap [0; +\infty[\cap [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ ou $D = D_f \cap]-\infty; 0] \cap [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Branches infinies

Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.

Asymptote verticale

Propriété

x_0 étant un nombre réel, lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_{0<}} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_{0>}} f(x) = \infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Asymptote horizontale

Propriété

b étant un nombre réel, lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini $(+\infty$ ou $-\infty)$.

Asymptote oblique

Propriétés

❖ Soit (Δ) la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$) lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que la droite (Δ) est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini $(+\infty$ ou $-\infty)$.

❖ Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ ($b \in \mathbb{R}$), on dit que la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

Branches paraboliques

Propriété

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$

Position relative d'une courbe par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax + b$

Propriétés

Soit I une partie du domaine de définition de la fonction .

- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) < 0$ alors on dit que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle I .
- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) > 0$ alors on dit que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est en dessus de la droite (D) sur l'intervalle I .
- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) = 0$ alors on dit que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) se coupent en un point d'abscisse x_0

Tangente à une courbe

Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en un point a de I alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente au point d'abscisse a d'équation $= f'(a)(x - a) + f(a)$.

Consigne 10 : Consolidation

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x(x+1)}$

1. Détermine le domaine de définition D_f de .
2. Étudie la dérivabilité de f sur D_f et détermine $f'(x)$.

3. Étudie les variations de f .

4. Construis la courbe de f . (On précisera une équation des demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 0)

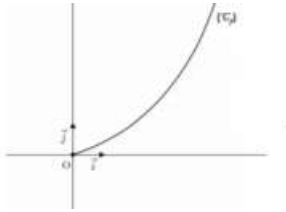
Propriétés

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI)
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI)
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale de centre O .
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) avec $y \geq 0$
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ se déduit de celle de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI) avec $x \geq 0$

Consigne 11 : Tracé des courbes de courbes à partir d'autres courbes.

Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.



Construire les courbes des fonctions ci-dessous :

$$f(-x) ; -f(x) ; -f(-x) ; |f(x)| \text{ et } f(|x|)$$

SEQUENCE 4 : Primitives

Activité 4-1: Définition et propriétés

Prisca, une camarade de classe de Dansou l'interroge en ces termes : « Dansou , on sait partir d'une fonction dérivable u pour exprimer sa dérivée u' . Mais pour une fonction f donnée, existerait-il une règle permettant de déterminer une fonction F dont la dérivée est f ? ». « C'est bien la notion de primitive d'une fonction », informe Dansou. En classe de première, le professeur en avait parlé pendant la période où tu étais absente aux cours

Consigne 1 : Définition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

1) Trouve une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et ayant pour dérivée .

2) Trouve la forme générale des fonctions F .

■ Les fonctions F sont appelées primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Consigne 2 : Propriétés

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur .

1. a) Démontre que $F + k$ (k est une fonction constante sur) est aussi une primitive de F sur I .
 b) Démontre que toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$ où k est une fonction constante sur I
2. Parmi les primitives de la fonction f donnée dans la consigne 1 , trouve la (ou les) primitive (s) F de f vérifiant $F(-2) = 3$.

Activité 4-2 : Détermination de primitives

Prisca, étant informée de la notion de primitive, veut déterminer les primitives de quelques fonctions.

Consigne 1 : Primitives de fonctions usuelles et autres

1. Présente les primitives de quelques fonctions usuelles et leurs ensembles de validité.

2. Soit f et g deux fonctions . F une primitive de f et G une primitive de . En utilisant les résultats des opérations sur les fonctions dérivables, donne une primitive de chacune des fonctions : $f + g$,
 $Fg + fG$, $f' \times f^n$ ($n \in \mathbb{N}$) , $\frac{f'}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$, $f' \times f^r$ ($r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$) , $\frac{f'}{\sqrt{f}}$ et $f' \times g' \circ f$.

Consigne 2 : Consolidation des acquis

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes sur les ensembles E :

1. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + x - 1$ et $E = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 3x(x^3 + 4)^2$ et $E = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sin x \cos^3 x$ et $E = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^4}$ $E =] -\frac{1}{3}; 1[$

5. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ et $E =] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

SEQUENCE 5: Fonction logarithme népérien

Activité 5-1 : Fonction logarithme népérien

Définition et propriétés

Dansou est impressionné par la vitesse à laquelle les deux devins ont lancé les quatre cauris. A son retour, il évalue la vitesse de l'un des cauris à $v(t) = \frac{1}{t}$ ($t > 0$) où t est le temps exprimé en seconde. Il veut étudier la position du cauris en fonction du temps.

Consigne 1 : Définition et conséquences

1. Justifie que la fonction v admet des primitives sur $]0; +\infty[$ et déduis-en qu'il en existe une et une seule sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $t = 1$ s
2. On admet que le domaine de définition de la fonction $\ln$ est $D =]0; +\infty[$.
 - a) Justifie que la fonction $\ln$ est dérivable et continue sur D .
 - b) Détermine le sens de variation de la fonction $\ln$ sur D
3. En remarquant de plus que $\ln 1 = 0$, recopie et complète les équivalences suivantes :
 - a) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow \dots$
 - b) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow \dots$
 - c) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln a < 0 \Leftrightarrow \dots$
 - d) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln a > 0 \Leftrightarrow \dots$

Consigne 2 : Propriétés

Définition On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est notée " $\ln$ ".

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I

- 1) a- Justifie que la dérivée de $\ln \circ u$ est $\frac{u'}{u}$
 b) On suppose que u ne s'annule pas sur I . Démontre que $\ln \circ |u|$ est dérivable sur I et on a $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.
 c) Déduis une primitive sur I de $\frac{u'}{u}$.
- 2) Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $F(x) = \ln(ax)$
 - a) Démontre que F est une primitive sur $\mathbb{R}^*_+$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
 - b) Déduis-en que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$
 - c) Démontre la propriété : $\forall (x; y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
 - d) Démontre les propriétés :
 - $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
 - $\forall (x; y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
 - $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \forall m \in \mathbb{Z}, \ln x^m = m \ln x$
 - $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \forall r \in \mathbb{Q}, \ln x^r = r \ln x$

Activité5-2 : Représentation graphique et limites remarquables

Dansou veut tracer la courbe représentative de la fonction logarithme népérien mais a éprouvé quelques difficultés pour la détermination de limites relatives à cette fonction.

Consigne 1 : Représentation graphique de la fonction $\ln$

1) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$. Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

2) Soit $g: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$

a) Étudie le sens de variation de g .

b) Démontre que : $\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) Justifie que la courbe représentative de la fonction **$\ln$** admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses aux voisinages de $+\infty$

3)

a) Dresse le tableau de variation de la fonction .

b) Justifie que l'équation $\ln x = 1$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$.

c) Construis la courbe représentative de la fonction **$\ln$** .

Information Cette solution est notée e . C'est le nombre d'Euler et on a : $e \approx 2,718$.

Consigne 2 : Limites remarquables de la fonction $\ln$

- a) 1 a) Détermine $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
- b) Déduis-en que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (Tu pourras poser $X = \frac{1}{x}$)
- b) c) Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0$ avec ($r \in \mathbb{Q}_+^*$)
 (Tu pourras poser $X = x^r$)

Activité 5-3 : Approfondissement

Dansou désire approfondir ses connaissances sur la fonction logarithme népérien.

Consigne

1. Écris plus simplement les nombres :

$$A = 3 \ln 2 - \ln 16 + \ln 4 \text{ et } B = \ln(\sqrt{2} - 1)^5 + \ln(\sqrt{2} + 1)^5$$

2. Résous les équations et inéquations suivantes :

$$(E): \ln(x + 2) = \ln(3 - x)$$

$$(I_1): \ln(2x - 5) \geq 0$$

$$(I_2): \ln(x + 1) + \ln(2x - 1) < \ln 2$$

3. Pour chacune des fonctions ci-dessous, détermine le domaine de définition D_f puis calcule les limites de f aux bornes de D_f .

$$\text{a) } f(x) = x + 1 - \ln x$$

$$\text{b) } f(x) = \ln(|x - 2|)$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1 - \ln x}{x - 1}$$

$$\text{d) } f(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

SEQUENCE 6 : Fonction exponentielle népérienne

Activité 6-1 : Propriétés fondamentales

Dansou est maintenant convaincu de l'existence de la fonction $\ln$. Il a même démontré dans ce chapitre que cette fonction est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et admet donc une bijection réciproque.

Il s'intéresse de ce fait à l'étude de cette bijection réciproque

Consigne 1 : Définition

Soit F la bijection réciproque de la fonction $\ln$.

1. Précise l'ensemble de définition de F puis dresse son tableau de variation.
2. Déduis-en le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x .

Exploitation des résultats

La fonction F est appelée fonction exponentielle népérienne qu'on note ***exp***.

Définition

La fonction exponentielle népérienne notée est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0 ; +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x > 0$
- $\forall x \in]0; +\infty[, \exp[\ln x] = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln [\exp x] = x.$
- La fonction ***exp*** est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall r \in \mathbb{Q}, r = \ln e^r) \Leftrightarrow \exp r = e^r$
- On étend cette propriété sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x = e^x$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \text{ on a :}$
 - $(e^x = e^y) \Leftrightarrow x = y$
 - $(e^x < e^y) \Leftrightarrow x < y$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ et } \forall r \in \mathbb{Q}, \text{ on a :}$

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Consigne 2 : Consolidation

1. Écris plus simplement :

$$A = e^{6 \ln 7} \times [\ln(e^{-3})]^5$$

$$B = e^{4 \ln 2 + \ln 3}$$

$$C = e^{x + \ln x} \times \frac{e^{x-1}}{e^2} \times \ln(e^3) \times 2 \ln(e^x)$$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : e^{-2x+3} = 5$$

$$(E_4) : 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 3 = 0$$

$$(E_2) : 4e^{3-4x} + 1 = 0$$

$$(I_1) : e^{2x+1} - 4 \geq 0$$

$$(E_3) : 2e^{4x} - 5e^{2x} + 3 = 0$$

$$(I_2) : e^{1-3x} < 2$$

Dérivée et primitive de fonctions comportant exp

Activité 6-2 : Dérivée et primitive de fonctions comportant *exp*

Consignes 1 : Propriétés

1. Justifie que la fonction **exp** est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calcule $\exp'(x)$ pour tout réel x .
2. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K
 - a) Démontre que la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur K
 - b) Calcule $(\exp \circ u)'(x)$ pour tout nombre réel x élément de K
 - c) Déduis-en une primitive sur K de la fonction $u' \cdot \exp \circ u$

Propriétés

- La fonction **exp** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp x$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur K et on a :

$$\forall x \in K, (\exp \circ u)' = u'(x) \cdot \exp \circ u(x).$$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors la fonction $\exp \circ u$ est une primitive de la fonction $u' \cdot \exp \circ u$ sur K .

Consigne 2 : Consolidation

1. Détermine la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$$f(x) = e^{1-5x} + 5e^{-x} + 2e^x \text{ et } g(x) = e^{\frac{-2x+3}{2x+1}}$$

2. Détermine une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = e^{-2x+3}$

Limites usuelles de la fonction exp

Activité 6-3 : Limites usuelles de la fonction *exp*

Consigne 1 : Propriétés

1) A partir du tableau de variation de la fonction ***exp***, donne les limites aux bornes de son ensemble de définition

2) En posant $X = e^x$, calcule chacune des limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

3) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

Propriétés : Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

Consigne 2 : Consolidation

Calcule chacune des limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 4) ; B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} ; C = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{2}{x} - 5}$$

Consigne 3 : Réinvestissement

À partir de la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de la fonction $\ln$, construis la courbe représentative ($\mathcal{C}'$) de la fonction $\exp$.

Fonction exponentielle-Fonction puissance

Activité 6-4 : Puissance de a d'exposant α

Définition : Puissance de a d'exposant α

Soit a un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque. On appelle **puissance de a d'exposant α** , le nombre réel noté a^α défini par $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$. a^α se lit : « a exposant α ».

Propriétés

➤ Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre réel α , on a : $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$

➤ Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , pour tous nombres réels α et β , on a :

$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta} ; a^\alpha \times b^\alpha = (a \times b)^\alpha ; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} ; \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha ; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

Activité 6-5 : Fonction exponentielle de base a

Définition : Fonction exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction notée $\exp_a$ définie par :

$$\begin{aligned} \exp_a: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a = a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

Consigne 1 : Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif

1. Étudie suivants les valeurs de a , les variations de la fonction $\exp_a$
2. Démonstre que pour tout réel a strictement positif et différent de 1, $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés

a est un nombre réel strictement positif , différent de 1 ; α et β deux nombres réels.

- ❖ Si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ Si $a > 1$, $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ La fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- ❖ $(a^\alpha = a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha = \beta)$
- ❖ Si $0 < a < 1$, alors : $(a^\alpha < a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha > \beta)$
- ❖ Si $a > 1$ alors : $(a^\alpha < a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha < \beta)$

Consigne 2 : Représentation graphique de la fonction $\exp_a$

On désigne par $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de la fonction $\exp_a$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

1. Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_a)$ suivant les valeurs de a .
2. Construis la courbe $(\mathcal{C}_a)$ suivant les valeurs de a .

Définition : Fonction puissance

Fonction puissance

Soit α un nombre réel. On appelle fonction puissance d'exposant α , l'application définie par :

$$\begin{aligned} f_\alpha: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{aligned}$$

Consigne 3 : Propriétés

Soit α un nombre réel non nul. Étudie les variations de la fonction f_α suivant les valeurs de α

Propriétés

α est un nombre réel non nul ; a et b deux nombres réels strictement positifs.

- ❖ Si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ❖ Si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ❖ La fonction f_α est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- ❖ $(a^\alpha = b^\alpha) \Leftrightarrow (a = b)$
- ❖ Si $\alpha < 0$, alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Leftrightarrow (a > b)$
- ❖ Si $\alpha > 0$, alors $(a^\alpha < b^\alpha) \Leftrightarrow (a < b)$

Propriété

A est un nombre réel non nul

- La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{ on a } f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$
- Si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K alors la fonction g_α est dérivable sur K et on a : $x \in K, (g^\alpha)'(x) = \alpha g'(x) g^{\alpha-1}(x)$
 - ❖ α est un nombre réel différent de -1 .
- Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$.
- Si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K , alors une primitive sur K de la fonction $g' g^\alpha$ est la fonction $\frac{1}{\alpha+1} g^{\alpha+1}$.

Propriétés : Limites usuelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Si $\alpha > 0$ alors :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

Si $\alpha < 0$ alors :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

❖ On a également



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 ; \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

Séquence 7 : Calcul intégral

Activité 7-1 : Notion d'intégrale d'une fonction sur un intervalle

Prisca a montré à Dansou, un coupon de pagne qui a une forme irrégulière. Elle demande à Dansou s'il y a une méthode de calcul de l'aire de la surface du coupon. « Tu poses trop de questions difficiles », répond Dansou.

Consigne 1 : Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I , F_1 et F_2 deux primitives de f sur I . Vérifie que $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$

■ Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie. Il est appelé intégral de a à b de f

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I . On appelle intégrale de a à b de f , le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I . On note : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Consigne 2 : Consolidation

Calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (2x + 1)dx ; J = \int_1^e \frac{1}{x} dx \text{ et } K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx$$

Consigne 3 : Interprétation graphique

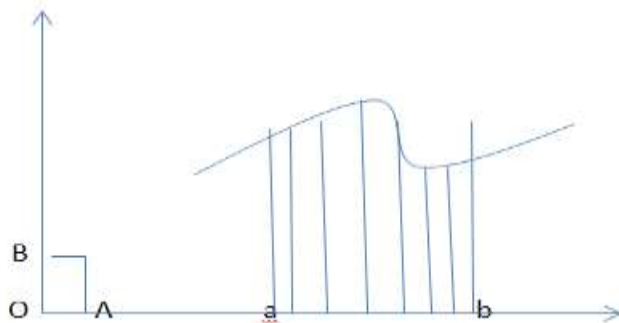
On considère la fonction $f: x \mapsto -x + 2$

1. Trace la représentation graphique (Δ) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1cm.
2. a) Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par (Δ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$.
b) Compare $\mathcal{A}$ et $\int_1^2 f(x)dx$

Interprétation graphique de l'intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, A, B) , le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'unité d'aire notée $u.a$ est l'aire du rectangle construit sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$.

On a : $u.a = OA \times OB$

Activité 7-2 Propriétés fondamentales de l'intégrale

Dansou est préoccupé par les logiques régissant le calcul intégral.

Consigne 1 : Relation de Chasles et linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b et c des éléments de I et α un réel. Démontrez que :

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I .

♦ Pour tout éléments a et b de I , on a : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

♦ **Linéarité de l'intégrale**

Pour tout éléments a et b de I et pour tout réel α , on a : $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
 et $\int_a^b \alpha f(x) = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Relation de Chasles pour les intégrales

Pour tout éléments a, b et c de I , on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Consigne 2 : Signe de l'intégrale d'une fonction de signe constant

A) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

1. Démontre que si $f \geq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Démontre que si $f \leq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
3. Si $f \leq g$ sur I , quel est le signe de $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \quad \forall x \in I$?

Donne, dans ce cas, l'interprétation graphique de $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Signe de l'intégrale

❖ Si f est positive sur I , alors pour tout élément a et b de I tels que $a \leq b$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

❖ Si f est négative sur I , alors pour tout élément a et b de I tels que $a \leq b$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

Comparaison

❖ Si $f \leq g$ sur I , alors pour tout élément a et b de I tels que $a \leq b$, on a : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

❖ Si $f \geq g$ sur I , alors pour tout élément a et b de I tels que $a \leq b$, on a : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Consigne 3 : Valeur moyenne d'une fonction, propriété de la moyenne

Définition : La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) est le réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Démontre que s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

B) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \ln(1 + x^2)$

1. Calcule la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.

C) a) Donne un encadrement de $\ln(1 + x^2)$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

c) Dédus un encadrement du nombre $\int_1^2 g(t)dt$

Inégalité de la moyenne

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

■ Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout éléments x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

■ Si M est un nombre réel tel que pour tout éléments x de $[a; b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b - a|$.

Activité 7-3 : Méthodes particulières d'intégration

Dansou raconte à Prisca : « Hier soir, j'ai eu de difficultés pour calculer l'intégrale d'une fonction f que j'ai pu décomposer en un produit de deux autres fonctions. » Prisca répond : « J'ai appris qu'il y a une méthode de calcul ; il suffit de connaître une primitive de l'une des fonctions apparues dans la décomposition. »

Consigne 1 : Intégration par parties

A) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I .

1. Complète l'égalité : $(uv)' = \dots + \dots$

2. Dédus-en que : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_b^a - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

B) Utilise l'intégration par parties pour calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 te^t dt \quad J = \int_1^e \ln t dt \quad K = \int_0^1 t\sqrt{t+1} dt$$

Propriété : Formule de l'intégration par parties

u et v étant deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$; si les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur $[a; b]$ alors : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Consigne 2 : Intégration de fonctions paires, impaires et périodiques

A)

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire ; a un réel. Justifie que :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire ; a un réel. Justifie que :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos 2x$

a) Trouve la période T de f .

b) Compare $\int_a^{a+T} f(x)dx$ et $\int_0^T f(x)dx$

B) Calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x + x^2)dx, J = \int_{-2}^2 x \ln(1 + x^2)dx \text{ et } K = \int_1^{1+\frac{\pi}{2}} \cos(4x)dx$$

Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction périodique

- Si f est une fonction paire et continue sur un intervalle contenant les réels 0 et a alors :

$$\blacksquare \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

$$\blacksquare \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Si f est une fonction paire et continue sur un intervalle contenant les réels 0 et a alors :

- Si f est une fonction impaire et continue sur un intervalle contenant les réels 0 et a alors :

$$\blacksquare \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

$$\blacksquare \int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx$$

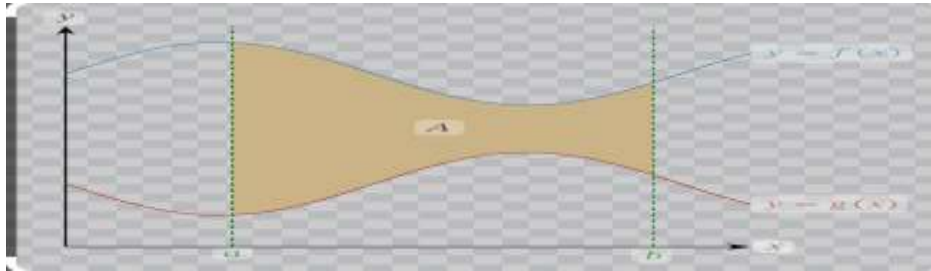
- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T , alors pour tout élément a de $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Calcul d'aire

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) telles que pour tout x élément de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$. L'aire A du domaine du plan délimité par les courbes (C_f) et (C_g) , représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal du plan et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $A = \left[\int_a^b (f(x) - g(x))dx \right] u.a$



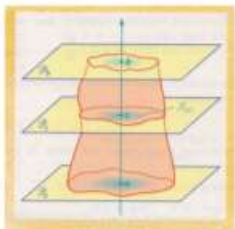
Application

On donne $g(x) = 2x^2$. Calcule l'aire du domaine délimité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 4$. L'unité graphique est $3cm$.

Calcul de volume

Propriétés

Soit un solide de l'espace délimité par les plans (P_a) et (P_b) d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ ($a < b$)



On note V le volume de ce solide et $S(t)$ l'aire de la section du solide par le plan (P_t) d'équation $z = t$ ($a \leq t \leq b$)

Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur $[a; b]$ alors, $(V = \int_a^b S(t) dt)$ u. v

L'espace étant muni d'un repère orthogonal $(O; I; J; K)$, l'unité de volume noté $u.v$ est le volume du parallélépipède construit à partir des points $O; I; J$ et K .

Propriété

Soit f une fonction de courbe représentative (C) . Le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de (C) limitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$(V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx) u.v.$$

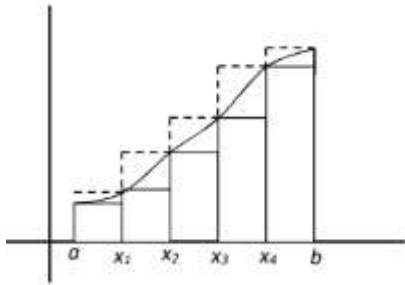
Valeur approchée d'une intégrale

Il n'est pas toujours possible de trouver une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ donc on ne peut pas calculer la valeur exacte de $\int_a^b f(x)dx$. A défaut de connaître la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on peut déterminer une valeur approchée de A . Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer des valeurs approchées d'une intégrale dont la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes

Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, (C) sa courbe représentative et soit

$$A = \int_a^b f(x)dx .$$



Pour calculer une valeur approchée de A par la méthode des rectangles :

- On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités : $a = x_0$;
 $b = x_n$ et $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n} \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- On calcule la somme r_n des aires des petits rectangles, qui sont situés en dessous de la courbe (en traits pleins sur la figure).

$$r_n = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

- On calcule la somme R_n des aires des grands rectangles, qui sont ceux obtenus en complétant les petits rectangles par des traits en pointillés

$$R_n = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

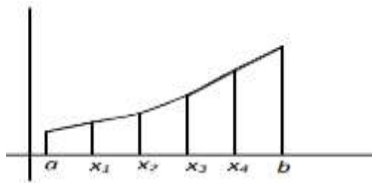
- Une valeur approchée de $A = \int_a^b f(x) dx$ est $\frac{r_n + R_n}{2}$ à $\frac{|R_n - r_n|}{2}$ près.

Remarque

- ▶ Toute valeur S telle que $r_n \leq S \leq R_n$ est une valeur approchée de l'intégrale $A = \int_a^b f(x)dx$.
- ▶ Si f est croissante sur $[a; b]$ alors $r_n \leq A \leq R_n$
- ▶ Si f est décroissante sur $[a; b]$ alors $R_n \leq A \leq r_n$

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$; (C) sa courbe représentative et soit $A = \int_a^b f(x)dx$.



Pour calculer une valeur approchée de A par la méthode des trapèzes :

- ❖ On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités : $a = x_0$;
 $b = x_n$ et $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n} \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

❖ La somme des aires des trapèzes construits à partir de la subdivision de l'intervalle $[a; b]$ est une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

On a donc : $\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

Consigne 3 : Fonction définie par une intégrale

A) Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a . Démontre que la fonction F définie de I vers $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive sur I de la fonction f qui prend la valeur 0 en a .

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère la fonction , de représentation

graphique (C), définie par $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$

1) a- Donne le domaine de définition de f puis indique, sans calculer, $f(0)$.

b- Etudie le sens de variation de f .

2) a- Démontre que pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^x) - \ln 2$.

b-Achève l'étude des variations de f

3) a- Justifie que pour tout réel x , $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x}) - \ln 2$

4) Construis (C) dans le repère (O, I, J) .

Séquence 8 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Activité 8-1 : Définition et différents types

Dansou, par curiosité, s'est donné pour tâche de déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde soit le double de sa dérivée première. Prisca, l'ayant vu à la tâche, veut aussi déterminer une dont la dérivée première soit égale à la dérivée seconde.

Consigne 1 : Définition

1. Trouve toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = x + 2$.
2. Trouve toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f''(x) = 2x - 3$.
3. Trouve une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f''(x)$

Les équations ci-dessus ont pour inconnues des fonctions. On y trouve une ou des dérivées successives de ces fonctions. On les appelle des **équations différentielles**.

Equation différentielle

Définition

On appelle équation différentielle toute équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées de la fonction inconnue.

Vocabulaire et notation

- Généralement la fonction inconnue est notée y et ses dérivées successives $y', y'', \dots$
- L'ordre le plus élevé des dérivées successives de la fonction inconnue est l'ordre de l'équation différentielle.
- Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est appelée solution (ou intégrale) sur I de cette équation différentielle.
- Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle sur un intervalle ouvert I , c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation différentielle.

Equations de la forme $y' = f(x)$

Soit f une fonction continue sur intervalle I . Résoudre sur I , l'équation différentielle $y' = f(x)$ (consiste à déterminer les primitives de f sur I).

Consigne 2 : Équations différentielles du type $ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$)

A) Soit (E) l'équation différentielle $ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$).

1. Vérifie que les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont solutions de (E) .
2. Soit f une solution de (E) .

- a) Vérifie que la fonction g définie par $g(x) = e^{\frac{b}{a}x} f(x)$ est une fonction constante.
- b) Détermine alors les fonctions f solutions de (E) .

B)

1) Résous les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): 2y' - 3y = 0.$$

$$(E_2): y' + 2y = 0.$$

2) Détermine la solution h de (E_2) telle que $h(0) = -1$.

Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constant sans second membre, toute équation de la forme $ay' + by = 0$, où a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$

Propriété

a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$

1. les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto ke^{-\frac{b}{a}x}, k \in \mathbb{R}$$

2. Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0

Consigne 3 : Équations différentielles du type $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$)

A) Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$).

Démontre que la fonction u définie par $u(x) = e^{rx}$ ($r \in \mathbb{R}$) est solution de (E) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

B) Résous les équations différentielles :

$$(E_1): y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$(E_2): 2y'' + y' - 3y = 0$$

$$(E_3): 4y'' - 4y' + y = 0$$

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Définitions

- ❖ On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.
- ❖ On appelle équation caractéristique associée à l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, l'équation du second degré
- ❖ $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue complexe r .

Propriétés

a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$. Soit $(E): ay'' + by' + cy = 0$ et $(E_r): ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) . Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_r) .

- Si $\Delta = 0$ alors (E_r) admet une solution double $r_0 = -\frac{b}{2a}$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto (Ax + B)e^{r_0x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors (E_r) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} : Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$ alors (E_r) admet deux solutions complexes conjuguées $(\alpha - i\beta)$ et $(\alpha + i\beta)$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} : x \mapsto (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

Activité 8-2 : Approfondissement

Dansou désire approfondir ses connaissances sur les équations différentielles.

Consigne 1 : Application

On considère les équations différentielles :

$$(E): y'' + 4y' = 3 \cos x \text{ et } (E'): y'' + 4y = 0$$

1. Détermine le réel a tel que la fonction g définie par $g(x) = a \cos x$ soit solution de (E)
2. Montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement $(f - g)$ est solution de (E') .
3. Donne la solution générale de (E') puis en déduis celle de (E) .
4. Détermine la solution particulière h de (E) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$

SEQUENCE 9 : Probabilités

Activité 9-1 : Vocabulaire, définition et propriétés

Dansou informe en ces termes : « Avant de me rendre chez le devin Gouton, j'ai jeté un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et j'ai obtenu un numéro pair. Si le numéro obtenu était impair, je me serais rendu chez le devin Adandé en premier. »

Consigne 1 : Vocabulaire probabiliste

1. a) Peut-on prévoir avec certitude le résultat de ce jet de dé ?
b) Écris l'ensemble E de tous les résultats possibles.
2. On désigne par A et B les sous-ensembles suivants :

A : « Obtenir un numéro pair » ;

B : « Obtenir un numéro premier »

a) Écris en extension les ensembles A et B .

b) Détermine les ensembles suivants : $A \cap B$; $A \cup B$ et C_E^A .

■ L'expérience réalisée par Dansou est dite aléatoire. L'ensemble E est appelé l'univers et les sous-ensembles A et B sont appelés des événements de E .

Expérience aléatoire, éventualité, univers

Définition

- ✱ On appelle expérience aléatoire ou épreuve toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude l'issue d'un résultat mais dont on peut connaître tous les résultats possibles.
- ✱ Tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité.
- ✱ L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers associé à cette expérience aléatoire et est souvent noté Ω

Événements

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- ✱ On appelle événement de Ω , tout sous-ensemble de Ω .

- ✱ On dit qu'un événement A de Ω est réalisé lorsque le résultat de l'expérience aléatoire appartient à A .
- ✱ Tout événement qui est toujours réalisé est appelé événement certain.

Exemple : Ω est un événement certain

- ✱ Tout événement qui n'est jamais réalisé est appelé événement impossible.

Exemple : L'ensemble vide ϕ est un événement impossible.

- ✱ Tout événement constitué d'une seule éventualité est appelé événement élémentaire.

Langage des événements :

<u>Evènement</u>	<u>Ensemble</u>	<u>Notation</u>
Univers	Ensemble Ω	Ω
Evènement	Partie de Ω	$A (A \subset \Omega)$
Eventualité	Élément de Ω	$\omega (\omega \in \Omega)$
Evènement élémentaire	Singleton	$\{\omega\} (\omega \in \Omega)$
Evènement certain	Partie pleine	Ω
Evènement impossible	Partie vide	ϕ
Evènement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Evènement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Evènement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\bar{A} = C_{\Omega}^A (A \subset \Omega)$

Evènement A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \phi$
------------------------------------	-------------------------------	-------------------

Consigne 2 : Définitions et propriétés

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application p de $P(\Omega)$ vers $[0; 1]$ qui, à tout événement A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω ; A et B deux événements de Ω .

1. Vérifie que $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
2. On suppose que $A \subset B$. Démontre que $p(A) \leq p(B)$.
3. Démontre que : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
4. Soit $\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$

Une probabilité p sur Ω est bien définie lorsqu'on connaît la probabilité de chacun des événements élémentaires de Ω .

Définition

- On dit que 2 événements A et B sont équiprobables lorsque $p(A) = p(B)$.
- Les situations d'équiprobabilité sont reconnues à travers les expressions :

- dé équilibré, dé parfait, dé non pipé, dé non truqué ;
- boules lisses, boules indiscernables au toucher ;
- tirage ou choix au hasard ;
- etc ...

On suppose que les événements élémentaires de Ω sont équiprobables.

- a. Calcule la probabilité d'un événement élémentaire.
- b. Soit A un événement de Ω de cardinal k . Justifie que $p(A) = \frac{k}{n}$

Consigne 3 : Consolidation

- I. Deux lignes téléphoniques L_1 et L_2 aboutissent à un standard. On considère les événements :

A : « La ligne L_1 est occupée »

B : « La ligne L_2 est occupée »

On donne les probabilités : $p(A) = 0,7$; $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,4$.

Calcule la probabilité de chacun des événements :

C : « L_1 est occupée ou L_2 est occupée »

D : « L_1 est libre et L_2 est libre. »

E : « L_1 est occupée et L_1 est libre . »

- II. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 2 rouges, 3 jaunes et 5 vertes

1. On tire une boule de l'urne. Calcule la probabilité des événements :

A_1 : « La boule tirée est rouge. »

B_1 : « La boule tirée est verte ou jaune. »

2. On tire simultanément 2 boules de l'urne. Calcule la probabilité des événements :

A_2 : « Obtenir 2 boules vertes. »

B_2 : « Obtenir 2 boules de même couleur. »

C_2 : « Obtenir 2 boules de couleurs différentes. »

3. On tire 3 boules l'une après l'autre et sans remise. Calcule la probabilité des événements :

A_3 : « Obtenir le tirage vert-jaune-rouge dans cet ordre. »

B_3 : « Obtenir 3 boules de même couleur. »

III. On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note p_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i .

1. Le dé est truqué de sorte que :

-les numéros de même parité ont la même probabilité d'apparaître ;

-un numéro pair a deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.

a) Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro.

b) Déduis-en la probabilité des événements :

A : « Obtenir un carré parfait . »

B : « Obtenir un nombre premier. ».

2. Le dé est truqué de sorte que $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ sont dans cet ordre, des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{20}$.

a) Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro.

b) Déduis-en la probabilité des événements :

C : « Obtenir un nombre pair . »

D : « Obtenir un multiple de 3. »

Activité 9-2 Probabilité conditionnelle et Événements indépendants

Dansou informe à nouveau : « Pendant les vacances dernières, j'ai assisté à un jeu intéressant dans une entreprise qui emploie 500 personnes. » Impatiente, Prisca lui pose plusieurs questions : De quel jeu s'agit-il ? Comment l'entreprise exploite ses employés ? Sont-ils tous du même sexe ?

Consigne 1 : Probabilité conditionnelle

Parmi les 500 personnes employées par l'entreprise, on compte 350 Hommes dont 125 pratiquent un sport et 150 femmes dont 50 pratiquent un sport. On choisit au hasard une personne de cette entreprise et on considère les événements :

H : « La personne choisie est un homme » ;

S : « La personne choisie pratique un sport » .

1. Calcule $p(H)$, $p(S)$ et $p(H \cap S)$.
2. (a) Sachant que la personne choisie est un homme, quelle est la probabilité p qu'elle pratique un sport ?
 c) Compare p et $\frac{p(H \cap S)}{p(H)}$.

■ Le réel p est appelé **probabilité de S sachant H** ou **probabilité conditionnelle de S par rapport à H** .

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω , A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'évènement A réalisé, le nombre noté $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ défini par : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

$p_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A »

Propriété : Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$ C'est la formule des probabilités composées.

Remarque

$$p_B(A) + p_B(\bar{A}) = 1$$

Propriété : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et p une probabilité définie sur Ω .

Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) forment un système complet d'événements de l'univers Ω c'est-à-dire

- $B_i \neq \emptyset \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ (non vides)
- $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ (deux à deux incompatibles)
- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ (Leur union donne Ω) alors pour tout événement A de Ω on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^n p_{B_i}(A) \times p(B_i)$$

C'est la formule des probabilités totales.

Consigne 2 : Propriété

Soit Ω un univers, p une probabilité définie sur Ω et A un événement de Ω .

Justifie que pour tout événement B de Ω , on a : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

Consigne 3 : Consolidation des acquis.

- I. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune 3 boules vertes et 2 jaunes. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2 . Calcule la probabilité de tirer 2 boules vertes.

- II. Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un client potentiel qui achète de téléviseur et de magnétoscope. Des études faites, il ressort que :
- la probabilité pour qu'il achète un téléviseur est 60% ;
 - la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est 40% ;
 - la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté un téléviseur est 20%.

On considère les événements :

T : « Le client a acheté un téléviseur » ;

M : « Le client a acheté un magnétoscope » .

1. Traduis les données ci-dessus par un arbre pondéré.
2. Calcule la probabilité que le client achète un téléviseur et un magnétoscope.
3. Calcule la probabilité que le client achète un magnétoscope.
4. Le client a acheté un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Consigne 4 : Événements indépendants

Le jeu auquel Dansou a assisté consiste à jeter deux dés équilibrés D_1 et D_2 dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le jeu est gagné si l'un des événements suivants se réalise :

A : « le numéro sorti sur D_1 est 2 » ;

B : « La somme des numéros sortis est 7 »

1. Calcule la probabilité des événements A , B et $A \cap B$.
2. Compare $p(A \cap B)$ et $p(A) \times p(B)$.

■ Les événements A et B sont dits indépendants.

Événements indépendants

Définition :

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω et A et B deux événements de Ω . On dit que A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Propriétés Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω , A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont deux événements indépendants ;
- $p_B(A) = p(A)$
- $p_A(B) = p(B)$

Remarque : Deux événements de probabilités toutes non nulles sont indépendants si et seulement si la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation ou la non réalisation de l'autre.

Propriété Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Si deux événements A et B sont indépendants alors :

- A et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et B sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Consigne 5 : Propriété

A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω sur lequel une probabilité p est définie. On suppose que $p(A) \neq 0$.

1. Démontre que $P_A(B) = p(B)$.
2. Démontre que A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Activité 9-3 Variable aléatoire réelle et Loi binomiale

Dansou a participé à un nouveau jeu dont la règle est différente de celle du jeu assisté dans l'entreprise.

Consigne 1 : Variable aléatoire réelle

Pour le nouveau jeu, le joueur jette un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ce jeu obéit à la règle suivante :

- ♦ Si 1 sort, on gagne 10 points
- ♦ Si 2 ou 5 sort, on gagne 5 points
- ♦ 3 sort, on perd 10 points

- ♦ 4 sort, on ne gagne ni ne perd ;
- ♦ Si 6 sort, on gagne 15 points.

On définit ainsi une application de l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ dans $\mathbb{R}$.

■ Une telle application est appelée variable aléatoire réelle

1. Donne la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. On note X la variable aléatoire réelle définie ci-dessus.
 - a) Détermine $X(\Omega)$.
 - b) Soit x_i un élément de $X(\Omega)$. On note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i » et p_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

Reproduis et complète le tableau ci-après :

$x_i \in X(\Omega)$	-10	0	5	10	15	Total
p_i						

■ Ce tableau définit la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle .

- c) Définis la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X .
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $(X \leq x)$ l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à x ». Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ telle que $F(x) = p(X \leq x)$.

■ F est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire réelle .

- a) Définis la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X .

- b) Détermine $F(X)$ suivant les valeurs de x .
- c) Construis la représentation graphique de F .
- 4. (a) Calcule le réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum x_i p_i;$$

(b) X étant une variable aléatoire réelle, X^2 l'est aussi. Calcule $E(X^2)$.

c) Calcule les réels $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Variable Aléatoire Réelle : VAR

Définitions

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- ♦ On appelle variable aléatoire réelle toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- ♦ L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est appelé univers image de Ω par X (ou univers image de X) et est noté $X(\Omega)$.

Loi de probabilité

Définition Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω et X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

- ❖ On appelle loi de probabilité de X , l'application de $X(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui à tout nombre réel x_i de $X(\Omega)$ associe la probabilité $p(X = x_i)$ de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque

- ✱ Il est commode de représenter la loi de probabilité d'une variable aléatoire X par un tableau de la forme

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$

- ✱ La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être aussi représentée par un diagramme en bâtons

Fonction de répartition

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω et X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$

- ✱ On appelle fonction de répartition de X l'application F de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ définie pour tout nombre réel x par : $F(X) = p(X \leq x) = \sum p(X = x_i)_{x_i \leq x}$

Propriété : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω et X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et F la fonction de répartition de X alors

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in]-\infty; x_1[\\ p(X = x_1) & \text{Si } x \in [x_1; x_2[\\ p(X = x_1) + p(X = x_2) & \text{Si } x \in [x_2; x_3[\\ \dots & \dots \\ \sum_{x_i \leq x_n} p(X = x_i) & = 1 \text{ Si } x \in [x_n; +\infty[\end{cases}$$

Conséquence : F est une fonction croissante en escalier

Espérance mathématique, variance, écart-type

Définitions : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, p une probabilité définie sur Ω une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$.

❖ On appelle espérance mathématique de X le nombre réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n [x_i \times p(X = x_i)]$$

❖ On appelle variance de X , le nombre réel positif $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$$

❖ En pratique on utilise la formule : $V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(X = x_i) - [E(X)]^2$ appelée **Formule de König**

❖ On appelle écart-type de X , le nombre réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Interprétation de l'espérance mathématique $E(X)$ en terme de jeu

- Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est avantageux pour le joueur
- Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux pour le joueur
- Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est dit équitable

Consigne 2 : Epreuve et schéma de Bernoulli et loi binomiale

On jette une pièce de monnaie et on observe le côté visible.

1. Combien de résultats possibles peut-on avoir ?
2. Présente les résultats possibles lorsque cette pièce est jetée 3 fois de suite dans les mêmes conditions.

Consigne 3 : Propriété

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter 5 fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir face est $p = \frac{3}{5}$.

- 1) Détermine la probabilité d'obtenir a face dans chacun des cas suivants :

1^{er} cas : $a = 0$

2^{ème} cas : $a = 1$

3^{ème} cas : $a = 2$

2) Compare chacun des résultats à $C_5^a p^a (1 - p)^{5-a}$

Epreuve de Bernoulli**Définition**

- On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve pour laquelle il n'y a que deux résultats possibles l'un appelé « SUCCÈS » et noté S et l'autre appelé « ÉCHEC » et noté E ou $\bar{S}$.
- Si la probabilité du « SUCCÈS » est p alors la probabilité de « l'ÉCHEC » est $1 - p$
- La probabilité p du SUCCÈS est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

Schéma de Bernoulli

Définition On appelle schéma de Bernoulli une suite (répétition) de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Le nombre n d'épreuves de Bernoulli et la probabilité p de l'événement « SUCCÈS » sont appelés les paramètres du schéma de Bernoulli

Propriété : Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . La probabilité d'obtenir exactement k « SUCCÈS » ($0 \leq k \leq n$) au cours de ces n épreuves est : $p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

Définition : Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Associons à ce schéma de Bernoulli la variable aléatoire réelle X égale au nombre de « SUCCÈS » obtenus au cours des n épreuves.

► L'univers image de X est : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$

La loi de probabilité de X est définie par : $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}, p(X = k) = C_n^p p^k (1 - p)^{n-k}$

Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p .

■ L'espérance mathématique de X est donnée par : $E(X) = np$

■ La variance $V(X)$ de X est donnée par : $V(X) = np(1 - p)$

■ L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$

Consigne 4 : Consolidation des acquis

Une étude statistique dans un pays des noirs a montré que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est 20%. Un couple de ce pays a mis au monde 3 enfants sans jumeaux.

- 1) Quelle est la probabilité, pour ce couple, d'avoir 2 garçons ?
- 2) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de garçons que le couple a mis au monde sur les 3 enfants.
 - a) Détermine la loi de probabilité de X .
 - b) Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 3) Un autre couple a mis au monde n enfants sans jumeaux (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).
 - a) Calcule la probabilité d'avoir au moins un garçon sur les n enfants.
 - b) Détermine le plus petit entier naturel n_0 pour que la probabilité d'avoir au moins un garçon sur les n enfants soit supérieur à 0,99 .

SEQUENCE 10: Statistique

Activité 10 : Statistique

On a relevé les notes sur 20 en maths (x_i) et en PCT (y_j) de 10 apprenants de la classe de Dansou. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

x_i	8	3	2	8	9	11	5	8	6	9
y_j	7	5	1	7	10	13	4	6	6	8

On désigne par X le caractère « note en maths » et par Y le caractère « note en PCT »

Consigne 1 : Séries marginales, nuage de points, point moyen, covariance

1. a) Dresse le tableau des effectifs du caractère X et celui du caractère .

b) Calcule les moyennes $\bar{x}$ de X et $\bar{y}$ de .

c) Calcule la variance de chacune des variables statistiques X et .

■ Les séries $(x_i ; n_i)$ et $(y_j ; n_j)$ dégagées en 1-a°) sont appelées les séries marginales de la série double (X; Y).

2. a) Reproduis et complète le tableau ci-après qui est aussi celui de la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$.

$x_i \backslash y_j$	2	3	5	6	8	9	11	Total
1								
4								
5								
6								
7								

8								
10								
13								
Total								

b) Représente, dans un repère orthogonal, les points $M_{ij} (x_i ; y_j)$.

■ L'ensemble des points M_{ij} représentés est appelé le **nuage des points** associés à la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$.

c) Place à côté de chaque point M_{ij} , son effectif.

■ On dit qu'on a représenté le nuage par des points pondérés. Si on représente le même nuage en remplaçant les points M_{ij} par des disques de diamètres proportionnels aux effectifs n_{ij} , on dit qu'on a représenté le nuage par des tâches

d) Place sur la même figure le point $G(\bar{x}; \bar{y})$.

■ Le point G est appelé point moyen du nuage des points associés à la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$.

3) Calcule le réel $cov(X; Y) = \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{N} - \bar{x} \bar{y}$

■ Ce réel est appelé covariance de la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$

Série statistique à deux variables

On recueille simultanément chez chaque individu i d'une population deux valeurs quantitatives x_i et y_i de deux caractères x et y respectivement.

Tableau linéaire

- Les différentes données recueillies peuvent être présentées dans un tableau de la forme :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Un tel tableau est appelé tableau linéaire statistique à deux variables. Désignons par E l'ensemble des valeurs prises par x et par F celles prises par y .

Définitions

- ✱ Pour tout x_i élément de E et pour tout y_j élément de F , on appelle effectif du couple de modalités $(x_i; y_j)$, le nombre n_{ij} d'individus ayant x_i pour valeur du caractère x et y_j pour valeur du caractère y .
- ✱ La fréquence f_{ij} du couple de modalités $(x_i; y_j)$ est définie en pourcentage par : $f_{ij} = \frac{n_{ij} \times 100}{n}$ où n désigne l'effectif total de la population.
- ✱ La correspondance qui, à tout couple de modalités $(x_i; y_j)$, associe son effectif f_{ij} est appelée série statistique double ou série statistique à deux variables. Elle est notée $(x; y)$ ou $(x_i; y_j; n_{ij})$

Nuage de points associés à une série double

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs. On appelle nuage de points associés à cette série double, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ d'effectif non nul représentés dans un repère orthogonal du plan

Remarque

On peut représenter le nuage de points par un ensemble de point pondérés c'est-à-dire dans le plan muni d'un repère orthogonal, on représente les points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ et on indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij} .

Point moyen du nuage de points

Soit $(x; y)$ une série statistique à deux caractères quantitatifs d'effectif total N . On appelle point moyen du nuage de points associés à cette série le point de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ désigne la moyenne de la série marginale $(x_i; n_i)$ et $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ la moyenne de la série marginale $(y_i; n_j)$

Covariance d'une série statistique double

Définition On appelle covariance de la série statistique double $(x; y)$ d'effectif total N , le nombre noté $cov(x, y)$ et défini par $cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

On démontre que $cov(x, y) = [\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i] - \bar{x} \bar{y}$

Variance On appelle variance de la série $(x_i; n_i)$ d'effectif total N le nombre réel positif noté $V(x)$ tel que :
 $V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ Ou encore $V(x) = [\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i^2] - \bar{x}^2$ (formule de Koenig)

Ecart-type On appelle écart-type de la série $(x_i; n_i)$ d'effectif total N , le nombre réel noté $\sigma(X)$ ou σ_x tel que $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : On définit de la même façon la variance $V(y)$ et l'écart-type σ_y de la série $(y_j; n_j)$

Consigne 2 : Ajustement linéaire, coefficient de corrélation linéaire

On considère la série statistique double définie ci-dessus.

1. Répartis les observations en deux groupes E_1 et E_2 : E_1 est l'ensemble des cinq premières observations et E_2 celui des cinq dernières observations.
2. a) Détermine les points moyens G_1 et G_2 des groupes E_1 et E_2 respectivement.
 b) Détermine une équation cartésienne de la droite $(G_1 G_2)$.

■ La droite $(G_1 G_2)$ est appelée droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer

3. Calcule les réels suivants :

$$a = \frac{cov(X;Y)}{V(X)} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad \text{et} \quad r = \frac{cov(X;Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$$

- La droite (D) : $y = ax + b$ est celle de régression de y en x ; elle est appelée **droite de d'ajustement linéaire** par la méthode des moindres carrés ordinaires Le coefficient r est appelé coefficient de corrélation linéaire.

Ajustement affine d'une série statistique double

Ajuster une série statistique double, c'est substituer à son nuage de points (donc aux effectifs observés) une courbe qui passe par le plus près possible des points du nuage et dont on peut déterminer une équation. Cette courbe est appelée **courbe d'ajustement**. Lorsque la courbe d'ajustement est une droite, l'ajustement est dit affine ou linéaire.

- ◆ Une première méthode d'ajustement aux données consiste à tracer la courbe que l'observateur estime être la plus proche des points du nuage
- ◆ Une deuxième méthode est celle des moyennes discontinues de Mayer

Ajustement linéaire par la méthode de Mayer La méthode d'ajustement des moyennes discontinues de Mayer consiste à :

- ❖ partager le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux dans l'ordre où les points se présentent (Et si le nombre de points du nuage est impair alors on met indifféremment le point central dans l'une ou l'autre des parties)
- ❖ et à déterminer les points moyens G_1 et G_2 respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.
- ❖ déterminer l'équation de la droite $(G_1 G_2)$ appelée droite de Mayer.

❖ Une troisième méthode est celle des moindres carrés ordinaires

Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires

Soit $(x; y)$ une série statistique double tel que $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$

- On appelle droite de régression de y en x , la droite d'ajustement linéaire de cette série statistique qui passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ et de coefficient directeur $a = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(x)}$
- Une équation de cette droite est : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$
- On appelle droite de régression de x en y , la droite d'ajustement linéaire de cette série statistique qui passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ et d'équation $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

L'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer une équation de l'une ou l'autre de ces deux droites régression

Coefficient de corrélation linéaire

Définition : On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série double à caractères quantitatifs x et y , le nombre réel noté r tel que : $r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$ avec $V(x) \neq 0$; $V(y) \neq 0$

Il fournit une mesure de la validité des approximations.

Remarque Pour une série statistique double $(x; y)$ donnée, la covariance $cov(x; y)$, le coefficient de corrélation r et les coefficients directeurs a et a' des droites de régression ont tous le même signe.

Interprétation du coefficient de corrélation r .

Propriété

r étant le coefficient de corrélation linéaire, on a toujours $|r| \leq 1$.

- Si $|r| = 1$ alors tous les points du nuage sont alignés. Dans ce cas on dit que l'ajustement est parfait ou bien qu'il y a une parfaite corrélation entre les deux caractères de la série double. Les résultats obtenus sont fiables.
- Si $0,87 \leq |r| \leq 1$, on dit qu'il y a une forte (ou bonne) corrélation linéaire entre les variables. Les résultats obtenus sont encore fiables et un ajustement linéaire est possible
- Si $|r| < 0,87$ alors on dit que la corrélation est lâche (ou faible ou mauvaise). Les résultats obtenus dans ce cas ne sont pas fiables.
- Si $|r|$ est voisine de 0 alors on dit qu'il y a indépendance linéaire entre les deux caractères de la série double. Les résultats dans ce cas ne sont pas fiables

Consigne 3 : Consolidation des acquis

Lors d'un test, les notes obtenues par 4 candidats aux épreuves de chant et de musique sont indiquées dans le tableau suivant :

Musique (x_i)	α	3	6	9
Chant (y_i)	2	4	5	β

On informe que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\bar{x} = 5$ et $\bar{y} = 4,5$.

- 1) Détermine les notes α et β .
- 2) Calcule le coefficient de corrélation linéaire de cette série puis interprète le résultat obtenu.
- 3) Détermine l'équation de la droite de régression de y en x .
- 4) Les études statistiques ont montré que l'échantillon des 4 candidats choisis est représentatif de la population formée par les candidats à ce test
 - a) Justifie que, pour ce test, on peut estimer la note de chant d'un candidat quelconque dont la note de musique est connue.
 - b) Évalue la note de chant du candidat Paul sachant qu'il a obtenu la note 7,5 en musique.

SEQUENCE 11 : Suites numériques

Activité 11 : Suites numériques

Raisonnement par récurrence

Définition

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné. Il se fait en deux étapes :

1 ère étape : On démontre que la proposition $P(n)$ est vraie pour le premier rang n_0 de n .

2 ème étape : On suppose que pour tout entier naturel $k(k \geq n_0)$, $P(k)$ est vraie et on démontre que $P(k+1)$ est vraie puis conclure.

Consigne 1 : Raisonnement par récurrence

1. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

Généralités sur les suites**Définition**

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple : Soit la suite U définie se note (U_n) .

L'image d'un entier naturel n se note U_n au lieu de $U_{(n)}$.

U_n est appelé terme général de la suite (U_n) ou terme de rang n .

Il y a deux manières de définir une suite :

- On définit les suites par une formule explicite : C'est le cas de la suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Exemple : $U_n = \frac{n^2-1}{2n+5}$ on a $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+5}$

- On définit les suites par une formule de récurrence : C'est le cas de la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3 U_n - 2, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Propriété

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$
- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
- (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée

Consigne 2 : Application

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{3n}{n+1}$

Étudie si (U_n) est majorée, minorée ou bornée

Suites monotones(Sens de variation)**Propriété**

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- Si $\forall n \in I, U_n \leq U_{n+1}$ alors (U_n) est croissante sur I
- Si $\forall n \in I, U_n \geq U_{n+1}$ alors (U_n) est décroissante sur I
- Si $\forall n \in I, U_n = U_{n+1}$ alors (U_n) est constante sur I
- (U_n) est stationnaire sur I lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang

Consigne 3

Soit les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $\begin{cases} V_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n^2 + V_n + 1 \end{cases}$

Étudier le sens de variation de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

Remarque

- Si la suite (U_n) est telle que $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique alors (U_n) et n ont même sens de variation.
- Si la suite (U_n) est définie par une formule de récurrence, on utilise le raisonnement par récurrence pour étudier sa monotonie.

Suites arithmétiques - suites géométriques

Suites arithmétiques

Définition

Une suite arithmétique (U_n) est définie par récurrence par son premier terme U_p et la relation $U_{n+1} = U_n + r$, pour tout entier naturel $n \geq p$ (r est une constante réelle). Le nombre réel r est appelé la raison de la suite (U_n) .

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$$

(U_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme -1 .

Propriété

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_p et de raison r .

- Pour tout entier naturel $n \geq p$, $U_n = U_p + r(n - p)$.

C'est l'expression du terme général de la suite (U_n) .

- $\sum_{k=p}^n U_k = \frac{(n-p+1)}{2} (U_n + U_p)$. C'est la somme de n termes consécutifs de la suite (U_n) .

Suites géométriques

Définition

Une suite géométrique (U_n) est définie par récurrence par son premier terme U_p et la relation $U_{n+1} = q \times U_n$, pour tout entier naturel $n \geq p$ (q est une constante réelle). Le nombre réel q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = -2U_n \end{cases}$$

(U_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $\frac{5}{4}$

Propriétés

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p

- Pour tout entier naturel $n \geq p$, $U_n = U_p \times q^{n-p}$
C'est l'expression du terme général de la suite (U_n) .

- $\sum_{k=p}^n U_k = U_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ Si $q \neq 1$. C'est la somme des n termes consécutifs de la suite (U_n) .
- $\sum_{k=p}^n U_k = nU_p$ Si $q = 1$

Propriété caractéristique

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$.
- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

Limite de la suite géométrique (q^n)

Propriété

Soit q un nombre réel strictement positif

- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Suites convergentes - suites divergentes

Définition

Une suite (U_n) est dite convergente si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ avec $(l \in \mathbb{R})$

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Consigne 4 : Convergence de suite

Soit la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{e^n}{-n+e^n}$

Etudie la convergence de la suite (U_n)

Limites des suites convergentes

Propriété

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.

Propriétés : Propriété de comparaison

Soit (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suites numériques

- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ avec $(l \in \mathbb{R})$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l'$ avec $(l' \in \mathbb{R})$ alors $l \leq l'$

- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n \leq W_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$
- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - l| \leq V_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

Limite d'une suite de type $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique

Propriété

Si la suite (U_n) est telle que $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

Limite d'une suite de type $V_n = f(U_n)$

Soit f une fonction et continue sur un intervalle I et (U_n) une suite à valeurs dans I .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$

Limite d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (U_n) une suite à valeurs dans I définie par sa formule de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$

Si (U_n) converge vers l alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans I .

Limites des suites divergentes**Propriété**

- Toute suite décroissante et non minorée est divergente
- Toute suite croissante et non majorée est divergente.

Propriétés : Propriété de comparaison

Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques.

- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait $U_n \geq V_n$ et
 si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- S'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait $U_n \leq V_n$ et
 si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

Croissances comparées

Propriété

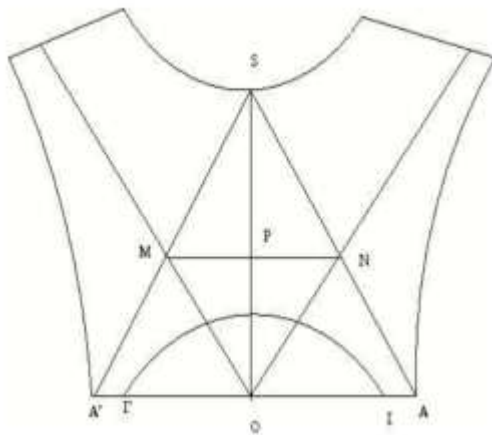
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$

- Si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$
- Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$

SA_3 : LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ : La coupe d'une tenue

Codjo est un élève en classe terminale. Son frère aîné Adotévi, un étudiant, l'envoie chez son couturier pour la confection d'un gilet. Il dessine la coupe du gilet sur une feuille de papier et la lui remet avec le tissu. Impressionné, Codjo désire savoir les principes mathématiques ayant guidé son frère dans la réalisation de ce dessin.



Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

**SEQUENCE 1 : Applications des nombres complexes
aux transformations du plan**

Écriture complexe d'une transformation plane

Activité 1 : Transformations du plan

Après avoir exploré le plan précédent, Codjo reconnaît plusieurs transformations du plan et décide d'en savoir plus.

Translation

Consigne 1 : Translation

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

■ On dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et on note : $t_{\vec{u}}(M) = M'$

1) On suppose que M a pour affixe z ; M' pour affixe z' et $\vec{u}$ pour affixe ω .

Exprime z' en fonction de z et ω .

2) On pose $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$; $\omega = a + ib$ avec $x; y; x'; y'; a; b$ des réels

Exprime x' et y' en fonction de x et y

Définition (Translation) : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriétés : (Écriture complexe d'une translation)

- La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe $z' = z + b$.
- Réciproquement, toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = z + b$; ($b \in \mathbb{C}$) est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

Homothétie

Consigne 2 : Homothétie

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

On dit que M' est l'image de M par h et on note $h(M) = M'$

1. On suppose que M a pour affixe z ; M' pour affixe z' et Ω pour affixe ω . Exprime z' en fonction de z ; k et ω .

On pose $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$; $\omega = a + ib$ avec $x; y; x'; y'; a; b$ des réels

Détermine l'expression analytique de h .

Définition : (Homothétie) Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k , l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Propriétés (Écriture complexe d'une homothétie)

- ❖ L'homothétie h de centre Ω et de rapport k a pour écriture complexe $z' = kz + (1 - k)z_\Omega$
- ❖ Réciproquement, toute transformation F du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ est une homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport a .

Consigne 3: Consolidation

On considère les points $A(-1 + i)$ $B(2 - i)$ du plan complexe

- 1) Donne l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$

- 2) On considère l'homothétie h de centre A et de rapport -3
- Donne l'écriture complexe de h
 - Détermine l'image C du point B par h
 - Détermine l'antécédent D du point $E(-i)$ par h
 - Détermine l'expression analytique de h
- 3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation cartésienne $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Détermine une équation cartésienne de l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par h .

Rotation

Consigne4 : Rotation

La rotation r de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan

associe le point M' tel que:
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M', \text{ si } \Omega \neq M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \widehat{\theta} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

- On suppose que M a pour affixe z ; M' pour affixe z' et Ω pour affixe ω . Détermine l'écriture complexe de .

Définition (Rotation)

Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ , l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que:

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M', \text{ si } \Omega \neq M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \widehat{\theta} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Propriétés (Écriture complexe d'une rotation)

- ❖ La rotation de centre Ω et d'angle θ a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_{\Omega}$
- ❖ Réciproquement, toute transformation F du plan d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + b$; $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est une rotation de centre Ω d'affixe $z_{\Omega} = \frac{b}{1 - e^{i\theta}}$ et d'angle θ .

Consigne de consolidation:

On considère les points $A(-1 + i)$ et $B(2 - i)$ du plan complexe.

- 1) Donne l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 2) Détermine l'image C du point B par r

Définition (Similitudes planes directes)

- On appelle similitude plane de rapport k , toute transformation du plan telle que pour tout point M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = k MN$
- On appelle similitude plane directe, toute similitude plane qui conserve l'orientation des angles

Propriétés

- ❖ Toute similitude plane directe de rapport $k(k > 0)$ a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $|a| = k$ et $b \in \mathbb{C}$.
- ❖ Réciproquement, toute écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est celle d'une similitude plane directe f de rapport $|a|$.
 - Si $a = 1$, alors f est translation dont le vecteur a pour affixe b
Si de plus $b = 0$, alors f est l'application identique du plan.
 - Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors f est l'homothétie dont les éléments caractéristiques sont les suivants :
 - Son centre est l'unique point invariant d'affixe $\frac{b}{1-a}$
 - Son rapport est égal à a .
 - Si $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors f est la composée commutative de la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, d'angle un argument de a et de l'homothétie de même centre Ω et de rapport $|a|$.
Les éléments caractéristiques de f dans ce cas sont : Ω ; $\arg(a)$; et $|a|$

Remarques

- L'écriture complexe d'une similitude plane directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k est :
 $z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})z_\Omega$
- Si s_1 et s_2 sont deux similitudes planes directes d'angles respectifs θ_1 et θ_2 et de rapports respectifs k_1 et k_2 , alors $s_1 \circ s_2$ est une similitude plane directe d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et de rapport $k_1 k_2$

- L'image d'un cercle ($\mathcal{C}$) de centre A et de rayon r par une similitude plane directe s de rapport k est un cercle de centre A' tel que $A' = s(A)$ et de rayon $r' = kr$.
- Si s est une similitude plane directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k , s^{-1} est aussi une similitude de même nature, de même centre, d'angle $-\theta$ et de rapport $\frac{1}{k}$.