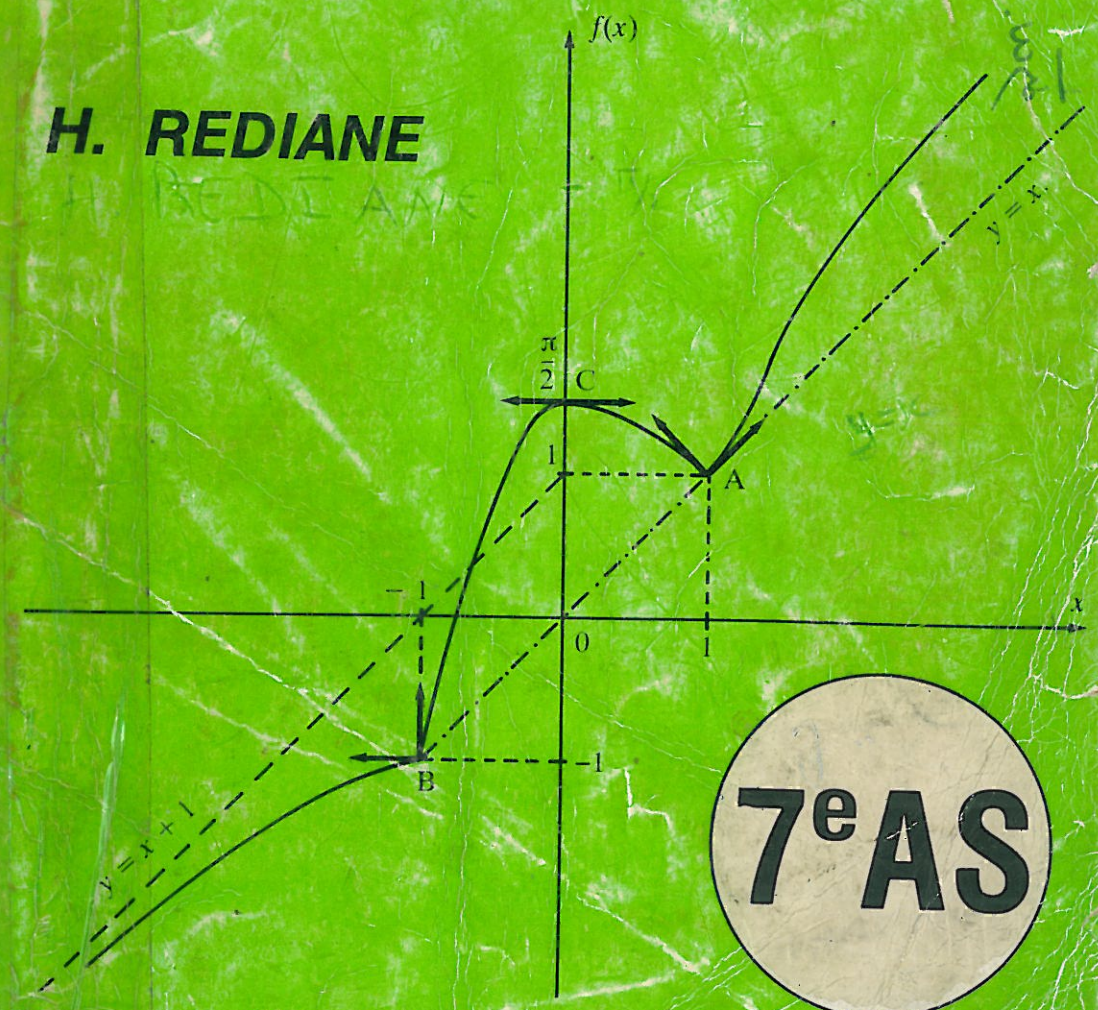


# MATHÉMATIQUES

## AU BAC MAROCAIN

Sciences expérimentales  
Exercices et problèmes résolus

H. REDIANE



**7<sup>e</sup> AS**

- $f(x) = x + 1 - e^{x+1}$  pour  $x \in ]-\infty, -1[$
- $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$  Arc cos  $x$  pour  $x \in ]-1, 1[$
- $f(x) = x + \text{Log}_2(x^3 - 3x + 3)$  pour  $x \in [1, +\infty[$

MATHÉMATIQUES 7<sup>e</sup>



**Sochepr**

Le stiel  
L'aveu

schneise  
au

vous  
être  
avoir  
aller

vous = Primal

*[Faint red stamp, illegible]*

*[Faint red stamp, illegible]*

Bibliothèque Municipale  
ARRIVÉE  
N° \_\_\_\_\_ B. M.  
SAFI le \_\_\_\_\_

Bibliothèque Municipale  
ARRIVÉE  
N° \_\_\_\_\_ B. M.  
SAFI le \_\_\_\_\_

# Les nombres complexes

## RAPPELS ET REMARQUES

Avant de faire les exercices, il faut d'abord bien lire et bien comprendre les rappels et les remarques suivantes :

1) La forme algébrique d'un nombre complexe est  $z = a + ib$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .  
Si  $z = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha \notin \mathbb{R}$  ou  $\beta \notin \mathbb{R}$  alors  $z = \alpha + i\beta$  n'est pas une forme algébrique de  $z$ .

Conséquence :

Si  $z = a + ib$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  alors le conjugué de  $z$  est  $\bar{z} = a - ib$ . Mais si  $z = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha \notin \mathbb{R}$  ou  $\beta \notin \mathbb{R}$  alors le conjugué de  $z$  est

$$\bar{z} = \bar{\alpha} - i\beta \text{ avec } \begin{cases} \bar{\alpha} = \text{le conjugué de } \alpha \\ \bar{\beta} = \text{le conjugué de } \beta. \end{cases}$$

Remarque :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} ; \text{ et } (\forall a \in \mathbb{R}) : \bar{a} = a.$$

De plus, pour tout réel  $a$ , le module de  $a$  est la valeur absolue de  $a$ . Par exemple :  $\overline{(-17)} = -17$  et  $|-17| = 17$ .

Autre remarque :

Soient  $a, b, c$  et  $d$ , des nombres réels avec  $c \neq 0$  ou  $d \neq 0$ . Pour trouver la forme algébrique de  $z = \frac{a+ib}{c+id}$  on écrit :

$$z = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$\text{Par exemple : } z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

2) Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $M(X, Y)$  l'image de  $z$  dans le plan complexe. Donc :  $z = X + iY$  avec  $X \in \mathbb{R}$  et  $Y \in \mathbb{R}$ .

On appelle argument de  $z$ , l'angle

$$(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \alpha + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

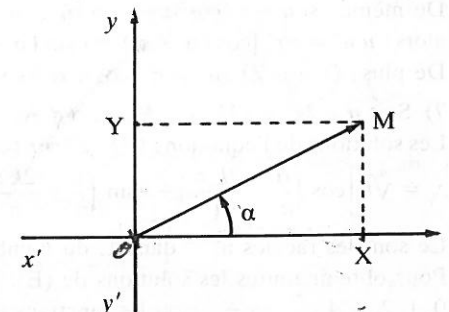
Et on a les équivalences suivantes :

$$\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow M \in oy \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Arg } z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow M \in oy' \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arg } z = 2k\pi \Leftrightarrow M \in ox \Leftrightarrow \begin{cases} X > 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Arg } z = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow M \in ox' \Leftrightarrow \begin{cases} X < 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$



cf. module

$U_{n+1} = k_{n+1} \times r$   
 $U_n = U_{n-1} \times r$

$f^n = C^n$

$P(BUC) \quad U = \{ \dots \}$

$$3) (\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}) : 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

4) La forme trigonométrique d'un nombre complexe est :

$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  avec  $r \in \mathbb{R}_+$  (donc  $r \geq 0$ ) et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si  $r < 0$ , alors la forme  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  n'est pas la forme trigonométrique de  $z$ ; sa forme trigonométrique est :

$$z = -r(-\cos \alpha - i \sin \alpha) = -r[\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi)] \text{ car } -r > 0.$$

De même : si  $r > 0$ , alors les formes trigonométriques de :

$$z_1 = r(\sin \alpha + i \cos \alpha)$$

$$z_3 = r(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$z_2 = r(-\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z_4 = r(-\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

sont respectivement :

$$z_1 = r \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]$$

$$z_3 = r [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]$$

$$z_2 = r [\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)]$$

$$z_4 = r [\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)]$$

Et par suite :  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = r$

$$\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$$

$$\text{Arg } z_3 = -\alpha + 2k\pi$$

$$\text{Arg } z_2 = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\text{Arg } z_4 = \pi + \alpha + 2k\pi$$

$$5) \cos \alpha + i \sin \alpha = \cos \alpha' + i \sin \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos \alpha' - i \sin \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi$$

$$-\cos \alpha + i \sin \alpha = -\cos \alpha' + i \sin \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi.$$

En plus :  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \cos \alpha + i \sin \alpha \neq 0$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha \neq 0$$

$$-\cos \alpha + i \sin \alpha \neq 0$$

$$\text{En effet : } \cos \alpha + i \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

et ce système n'a pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ .

Même démonstration pour  $\cos \alpha - i \sin \alpha$  et  $-\cos \alpha + i \sin \alpha$ .

6) Soient  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  et  $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$  avec  $r > 0$  et  $r' > 0$ .

On a :  $zz' = rr'[\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')]$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha')]$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) : z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

De même : si  $u = r(\cos \alpha - i \sin \alpha)$  et  $u' = r'(\cos \alpha' - i \sin \alpha')$

alors :  $uu' = rr'[\cos(\alpha + \alpha') - i \sin(\alpha + \alpha')]$

De plus :  $(\forall n \in \mathbb{Z}) : u^n = r^n (\cos n\alpha - i \sin n\alpha)$

7) Soit  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Les solutions de l'équation : (E) :  $z^n = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  sont les nombres complexes

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ce sont les racines  $n^{\text{èmes}}$  dans  $\mathbb{C}$  du nombre complexe  $u = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

Pour obtenir toutes les solutions de (E), il suffit de donner à  $k$  les valeurs :

0, 1, 2, 3, 4, ..., (n - 1) car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

2)  $Z$  réel  $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $y = 0$

Donc : l'ensemble des points M est :  $(x'ox) \cup (y'oy)$

avec  $(x'ox)$  l'axe des abscisses, et  $(y'oy)$  l'axe des ordonnées.

Mais l'origine O ne convient pas car  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

3)  $Z$  imaginaire pur  $\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x \\ Y \neq 0 \Leftrightarrow xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$

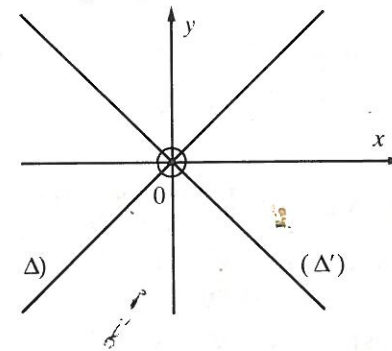
Donc : l'ensemble des points M est

$(\Delta) \cup (\Delta')$

avec  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$

et  $(\Delta')$  la droite d'équation  $y = -x$ .

Mais l'origine O ne convient pas car  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .



4)  $\text{Arg } Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \Leftrightarrow M \in (\Delta) \cup (\Delta') \\ Y > 0 \Leftrightarrow -2xy > 0 \Leftrightarrow xy < 0 \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ de signes contraires.} \end{cases}$

Donc seule convient la droite  $(\Delta') : y = -x$  privée du point O.

Par suite : l'ensemble des points M est la droite  $(\Delta') : y = -x$  privée du point O.

#### EXERCICE 4

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $M(x, y)$  l'image de  $z$  dans le plan complexe.

Soit  $Z = z - 2|z|^2 + 1$ . On pose  $Z = X + iY$  avec  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ .

1) Calculer X et Y en fonction de x et de y

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.

3) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.

4) En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait :  $\text{Arg } Z = -\frac{\pi}{2}$ .

#### Solutions

1)  $M(x, y)$  est l'image de  $z$  dans le plan complexe. Donc :  $z = x + iy$ .

D'où :  $Z = x + iy - 2(x^2 + y^2) + 1$

$$= (-2x^2 - 2y^2 + x + 1) + iy$$

Par suite :  $X = -2x^2 - 2y^2 + x + 1$  et  $Y = y$ .

2)  $Z$  réel  $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ .

Donc : l'ensemble des points M est l'axe des abscisses  $(x'ox)$ .

3)  $Z$  imaginaire pur  $\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0. \end{cases}$

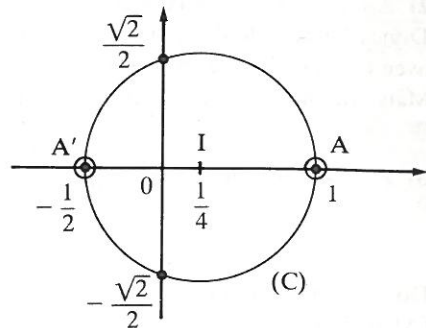
$$\text{Or : } X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} + y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + y^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$$

Par suite : l'ensemble des points M est le cercle (C) de centre I  $(\frac{1}{4}, 0)$

et de rayon  $R = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

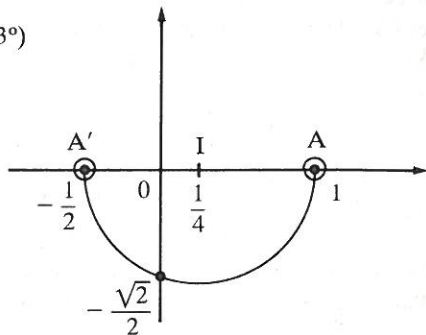
Les points A(1, 0) et A'  $(-\frac{1}{2}, 0)$  ne conviennent pas car  $y \neq 0$



4)  $\text{Arg} Z = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \Leftrightarrow M \in (C) \text{ du } 3^\circ \\ Y < 0 \Leftrightarrow y < 0 \end{cases}$

Donc : l'ensemble des points M est la partie du cercle (C) qui correspond à  $y < 0$

Les points A(1, 0) et A'  $(-\frac{1}{2}, 0)$  ne conviennent pas car  $y < 0$



### EXERCICE 5

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $M(x, y)$  l'image de  $z$  dans le plan complexe.

Soit  $Z = 2|\bar{z}|^2 + \bar{z} - \frac{i}{8}$

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z
- Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.
- En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait :  $\text{Arg} Z = -\frac{\pi}{2}$ .

### Solutions

1)  $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$ . De plus :  $|\bar{z}|^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$ .

Donc :  $Z = 2(x^2 + y^2) + x - iy - \frac{i}{8} = 2x^2 + 2y^2 + x - i(y + \frac{1}{8})$ .

D'où :  $\Re(Z) = 2x^2 + 2y^2 + x$  et  $\text{Im}(Z) = -(y + \frac{1}{8})$

2) Z réel  $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{8}$ .

L'ensemble des points M est donc la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -\frac{1}{8}$ .

3) Z imaginaire pur  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Re(Z) = 0 \\ \text{Im}(Z) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -\frac{1}{8} \end{cases}$

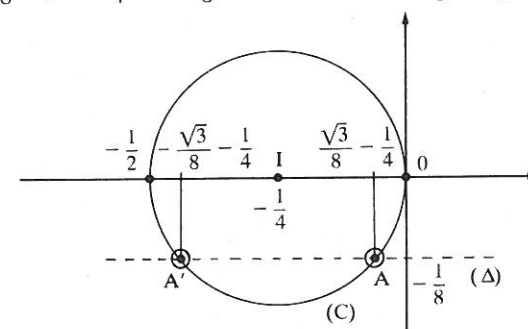
Or :  $\Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2} + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$

Donc : l'ensemble des points M est le cercle (C) de centre I  $(-\frac{1}{4}, 0)$  et de rayon  $R = \frac{1}{4}$ , privé de ses points d'intersection avec la droite ( $\Delta$ ) :  $y = -\frac{1}{8}$ .

Si  $y = -\frac{1}{8}$ , alors l'équation du cercle donne :  $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$

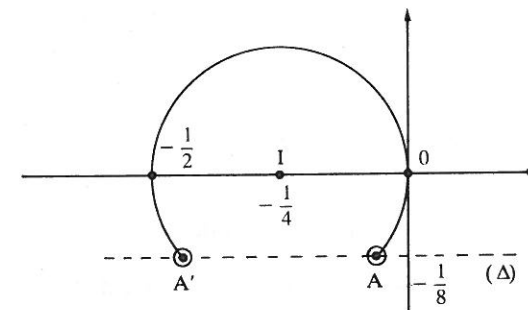
d'où :  $x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$  ou  $x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$  c'est-à-dire :  $x = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}$  ou  $x = -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}$ .



Par suite : les points qui ne conviennent pas sont :

A  $(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$  et A'  $(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$ .

4)  $\text{Arg} Z = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(Z) = 0 \Leftrightarrow M \in (C) \text{ du } 3^\circ \\ \text{Im}(Z) < 0 \Leftrightarrow y + \frac{1}{8} > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{1}{8} \end{cases}$



L'ensemble des points M est donc la partie du cercle (C) se trouvant strictement au-dessus de la droite ( $\Delta$ ) :  $y = -\frac{1}{8}$

Les points A et A' ne conviennent pas.

### EXERCICE 6

Soit  $Z = \frac{2i - z}{z + i - 1}$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $M(x, y)$  l'image de  $z$ .

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .
- 2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que  $Z$  soit réel.
- 3) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que  $Z$  soit imaginaire pur.
- 4) En déduire l'ensemble des points  $M$  tel que l'on ait :  $\text{Arg } Z = \frac{\pi}{2}$

### Solutions

1)  $Z$  est définie lorsque :  $z + i - 1 \neq 0$  c'est-à-dire  $z \neq 1 - i$ , d'où  $(x, y) \neq (1, -1)$ .  
Sous cette condition on a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2i - x - iy}{x + iy + i - 1} = \frac{i(2 - y) - x}{(x - 1) + i(y + 1)} = \frac{[i(2 - y) - x][(x - 1) - i(y + 1)]}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \\ &= \frac{i(2 - y)(x - 1) + (2 - y)(y + 1) - x(x - 1) + ix(y + 1)}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \\ &= \frac{(-y^2 - x^2 + x + y + 2) + i(y + 3x - 2)}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \Re(Z) = \frac{-y^2 - x^2 + x + y + 2}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(Z) = \frac{y + 3x - 2}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$$

2)  $Z$  réel  $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 2$

L'ensemble des points  $M$  est donc la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -3x + 2$

Or :  $(x, y) \neq (1, -1)$ . En plus : le couple  $(1, -1)$  vérifie l'équation de  $(\Delta)$ . Donc :  $A(1, -1) \in (\Delta)$ . Par suite : l'ensemble des points  $M$  est la droite  $(\Delta)$  privée du point  $A(1, -1)$ . (Voir schéma dans la question suivante.)

3)  $Z$  imaginaire pur  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Re(Z) = 0 \\ \text{Im}(Z) \neq 0 \end{cases}$

Or :  $\text{Im}(Z) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -3x + 2 \Leftrightarrow M \notin (\Delta)$ .

Et :  $\Re(Z) = 0 \Leftrightarrow -y^2 - x^2 + x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - x - y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \quad (\text{E}).$$

(E) est l'équation du cercle de centre  $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

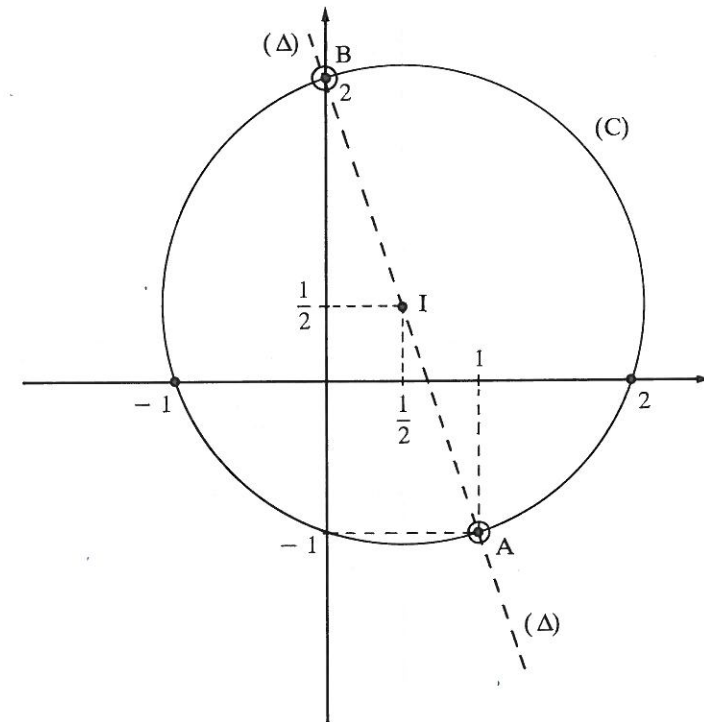
Par suite : l'ensemble des points  $M$  est donc ce cercle privé de ses points d'intersection avec  $(\Delta)$ .

D'autre part :  $(x, y) \neq (1, -1)$ . Mais le couple  $(1, -1)$  vérifie l'équation du cercle (C).

Donc :  $A(1, -1) \in (C)$ .

Par suite, ce point  $A(1, -1)$  est un point d'intersection de (C) et de  $(\Delta)$ .

En plus : la construction de (C) et de  $(\Delta)$  montre que le point  $B(0, 2)$  est aussi un point d'intersection de (C) et de  $(\Delta)$ .



Conclusion : L'ensemble des points  $M$  est le cercle (C) privé des points  $A(1, -1)$  et  $B(0, 2)$ .

Remarque :

Le couple  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  vérifie l'équation de  $(\Delta)$ . Donc :  $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in (\Delta)$ , c'est-à-dire que le centre  $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  du cercle (C) est un point de  $(\Delta)$ .

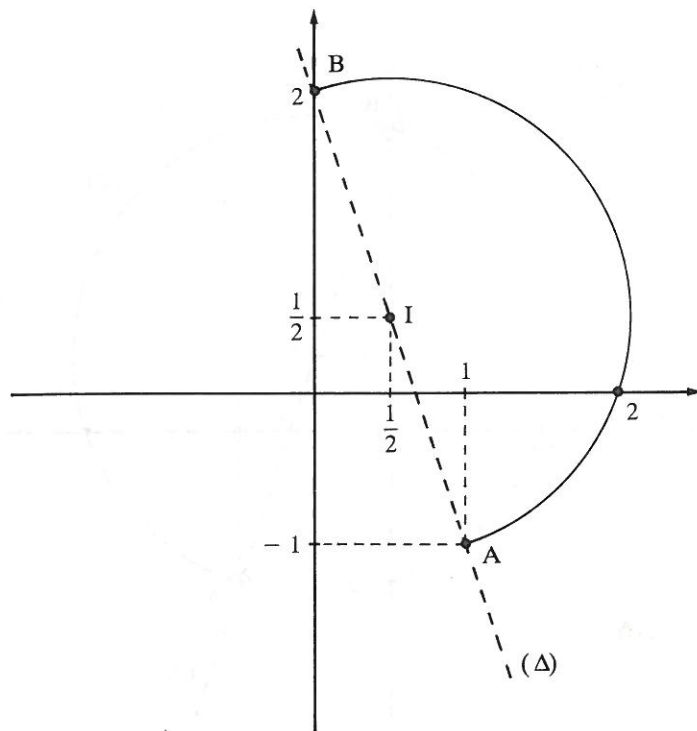
Autre remarque :

Avant de construire le cercle (C), il faut d'abord chercher ses points d'intersection avec les axes  $(x'ox)$  et  $(y'oy)$ .

En effet : Si  $x = 0$  alors on a : (E)  $\Rightarrow y = 2$  ou  $y = -1$

Si  $y = 0$  alors on a : (E)  $\Rightarrow x = 2$  ou  $x = -1$

$$4) \operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(Z) = 0 \Leftrightarrow M \in (C) \\ \operatorname{Im}(Z) > 0 \Leftrightarrow y > -3x + 2 \end{cases}$$



L'ensemble des points M est donc la partie du cercle (C) se trouvant strictement au dessus de (Δ).

Les points A(1, -1) et B(0, 2) ne conviennent pas.

### EXERCICE 7

1) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E):  $(1 - i)z^2 + (3i + 2)z + 1 + 4i = 0$

2) En déduire dans  $\mathbb{C}$  les solutions de l'équation:

$$(F): (1 + i)z^2 + (2 - 3i)z + 1 - 4i = 0$$

### Solutions

$$1) \Delta = (3i + 2)^2 - 4(1 - i)(1 + 4i) = -25 = i^2 25 = (5i)^2$$

L'équation (E) admet donc 2 solutions:

$$z' = \frac{-3i - 2 + 5i}{2(1 - i)} = \frac{2i - 2}{2 - 2i} = -1$$

$$z'' = \frac{-3i - 2 - 5i}{2(1 - i)} = \frac{-4i - 1}{1 - i} = \frac{(-4i - 1)(1 + i)}{2} = -\frac{1}{2}(3 + 5i)$$

$$2) \text{ Posons } Z = (1 + i)z^2 + (2 - 3i)z + 1 - 4i$$

$$\text{On a: } Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = 0$$

$$\text{Donc: } (F) \Leftrightarrow (1 - i)\bar{z}^2 + (2 + 3i)\bar{z} + 1 + 4i = 0 \quad (H)$$

Cette dernière équation (H) est du même type que (E) en remplaçant  $z$  par  $\bar{z}$ . Par conséquent, l'équation (H) admet, comme l'équation (E), deux solutions:

$$\bar{z}_1 = z' = -1 \quad \text{et} \quad \bar{z}_2 = z'' = -\frac{1}{2}(3 + 5i)$$

$$\text{D'où: } z_1 = \bar{z}' = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}'' = -\frac{1}{2}(3 - 5i).$$

Conclusion: l'équation (F) admet 2 solutions:

$$z_1 = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}(3 - 5i).$$

### EXERCICE 8

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $z^3 - 2iz^2 + (9i - 4)z + 11i - 3 = 0$

1) Montrer que cette équation admet une racine réelle  $z_0$ .

2) En déduire les autres solutions de (E).

3) En déduire enfin, dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation:

$$(F): z^2 + (1 - 2i)z - 11i - 3 = 0$$

### Solutions

1) Posons  $z_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ . Par suite,  $z_0$  est une solution de (E) si, et seulement si, on a:

$$\alpha^3 - 2i\alpha^2 + (9i - 4)\alpha + 11i - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3 - 4\alpha - 3) + i(-2\alpha^2 + 9\alpha + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha - 3 = 0 & (A) \\ -2\alpha^2 + 9\alpha + 11 = 0 & (B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha - 3 = 0 & (A) \\ -2\alpha^2 + 9\alpha + 11 = 0 & (B) \end{cases}$$

La valeur de  $\alpha$  cherchée doit vérifier les équations (A) et (B).

$$\text{Or: les solutions de (B) sont: } \alpha_1 = -1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{11}{2}.$$

Mais seule  $\alpha_1$  vérifie l'équation (A). Donc:  $z_0 = -1$ .

2)  $z_0 = -1$  est une solution de (E).

Par suite:  $(z + 1)$  divise  $f(z) = z^3 - 2iz^2 + (9i - 4)z + 11i - 3$

Donc: il existe des nombres complexes  $a, b, c$  tel que l'on ait:

$$f(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c). \text{ Déterminons } a, b, c.$$

$$\text{On a: } (z + 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (a + b)z^2 + (b + c)z + c$$

$$\text{D'où: } f(z) = az^3 + (a + b)z^2 + (b + c)z + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2i \\ b + c = 9i - 4 \\ c = 11i - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2i - 1 \\ c = 11i - 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc: (E)} \Leftrightarrow (z + 1)[z^2 - (1 + 2i)z + 11i - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_0 = -1 \\ z^2 - (1 + 2i)z + 11i - 3 = 0 & (H) \end{cases}$$

Cherchons les solutions de l'équation (H).

On a :  $\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(11i - 3) = -40i + 9$

Déterminons les racines carrées de  $\Delta$ .

Posons :  $(a + ib)^2 = -40i + 9$ . Donc : 
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ 2ab = -40 \Leftrightarrow ab = -20 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{1600 + 81} = 41 \end{cases}$$

D'où :  $2a^2 = 9 + 41 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$  ou  $a = -5$

Si  $a = 5$  alors  $b = \frac{-20}{5} = -4$

Si  $a = -5$  alors  $b = \frac{-20}{-5} = 4$

Donc :  $\Delta = (a + ib)^2 = (5 - 4i)^2$

Par conséquent : l'équation (H) admet 2 solutions :

$z_1 = \frac{1 + 2i + 5 - 4i}{2} = 3 - i$  et  $z_2 = \frac{1 + 2i - 5 + 4i}{2} = -2 + 3i$

Conclusion : Les solutions de (E) sont :  $\{z_0 = -1 ; z_1 = 3 - i ; z_2 = -2 + 3i\}$

3) Posons  $Z = z^2 - (1 - 2i)z - 11i - 3 = 0$

On a :  $Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = 0$

Donc : (F)  $\Leftrightarrow \bar{z}^2 - (1 + 2i)\bar{z} + 11i - 3 = 0$  (P)

Cette dernière équation (P) est du même type que (H) en remplaçant  $z$  par  $\bar{z}$ . Par conséquent, l'équation (P) admet, comme l'équation (H), deux solutions :

$\bar{z}' = z_1 = 3 - i$  et  $\bar{z}'' = z_2 = -2 + 3i$

D'où :  $z' = \bar{z}' = 3 + i$  et  $z'' = \bar{z}'' = -2 - 3i$

Conclusion : l'équation (F) admet 2 solutions :

$z' = 3 + i$  et  $z'' = -2 - 3i$

### EXERCICE 9

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 + 2iz^2 + (8 + 6i)z + 4(4i - 3) = 0$

1) Montrer que cette équation admet une racine imaginaire pure  $z_0$ .

2) En déduire les autres solutions de (E).

### Solutions

1) Posons  $z_0 = \alpha i$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Par suite :  $z_0 = \alpha i$  est une solution de (E) si, et seulement si, on a :

$(\alpha i)^3 + 2i(\alpha i)^2 + (8 + 6i)\alpha i + 4(4i - 3) = 0$   
 $\Leftrightarrow (-6\alpha - 12) + i(-\alpha^3 - 2\alpha^2 + 8\alpha + 16) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 8\alpha + 16 = 0 \end{cases}$  (A)

De plus : la valeur  $\alpha = -2$  vérifie bien l'équation (A).

Donc :  $z_0 = -2i$ .

2) Posons  $f(z) = z^3 + 2iz^2 + (8 + 6i)z + 4(4i - 3)$ .

$z_0 = -2i$  est une solution de l'équation (E) :  $f(z) = 0$ .

b)  $z_1 \bar{z}_2 = -64i \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| |\bar{z}_2| = |-64| |i| \Leftrightarrow |z_1| |z_2| = 64 \\ \text{Arg } z_1 + \text{Arg } \bar{z}_2 = \text{Arg}(-64) + \text{Arg } i + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} |\alpha| \sqrt{2} |\alpha|^4 = 64 \\ \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|^5 = \frac{4 \times 64}{\sqrt{2}} = 2 \times 64 \times \sqrt{2} = 128\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^5 \\ \pi + \text{Arg } \alpha + \frac{\pi}{4} - 4 \text{Arg } \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 2\sqrt{2} \text{ car } |\alpha| \geq 0 \\ -3 \text{Arg } \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 3 \text{Arg } \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \text{Arg } \alpha = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$

(on écrit toujours  $+ 2k\pi$  car  $k \in \mathbb{Z}$ ).

D'où :  $\alpha = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pour obtenir toutes les valeurs de  $\alpha$  il suffit de donner à  $k$  les valeurs 0, 1 et 2 car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

Par suite : les valeurs de  $\alpha$  sont :

$\alpha_0 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$   
 $= (\sqrt{3} + 1) - i(\sqrt{3} - 1)$ .

$\alpha_1 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$   
 $= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right]$   
 $= 2\sqrt{2} \left( -\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) = (1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1)$ .

$\alpha_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$   
 $= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right]$   
 $= 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -2(1 + i)$

3) a)  $1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Donc :  $|u_1| = |1 - i| |\alpha| = \sqrt{2} |\alpha|$

$|u_2| = |i| \frac{2}{|\alpha|^2} = \frac{2}{|\alpha|^2}$

$\text{Arg } u_1 = \text{Arg}(1 + i) + \text{Arg } \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \text{Arg } \alpha + 2k\pi$

$\text{Arg } u_2 = \text{Arg } i + 2 \text{Arg} \left( \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \right) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arg } \alpha + 2k\pi$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } u_1 \bar{u}_2 = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |u_1| |\bar{u}_2| = |-1| \Leftrightarrow |u_1| |u_2| = 1 \\ \text{Arg } u_1 + \text{Arg } \bar{u}_2 = \text{Arg } (-1) + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} |\alpha| \frac{2}{|\alpha|^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{|\alpha|} = 1 \\ \text{Arg } u_1 - \text{Arg } u_1 = \pi + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 2\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{4} + \text{Arg } \alpha - \frac{\pi}{2} + 2 \text{Arg } \alpha = \pi + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 2\sqrt{2} \\ \text{Arg } \alpha = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \alpha = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Pour obtenir toutes les valeurs de  $\alpha$ , il suffit de donner à  $k$  les valeurs 0, 1 et 2 car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

Par suite : les valeurs de  $\alpha$  sont :

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (-\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 2 \quad (1 - i)
 \end{aligned}$$

$$4) \text{ a) } 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc: } |W_1| = |1 + i| |\alpha^2| = \sqrt{2} |\alpha|^2$$

$$|W_2| = |-4| |\alpha| = 4 |\alpha|$$

$$\text{Arg } W_1 = \text{Arg } (1 + i) + \text{Arg } (\alpha^2) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \text{Arg } \alpha + 2k\pi$$

$$\text{Arg } W_2 = \text{Arg } (-4) + \text{Arg } \alpha + 2k\pi = \pi + \text{Arg } \alpha + 2k\pi$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } W_1 = \bar{W}_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} |W_1| = |\bar{W}_2| \Leftrightarrow |W_1| = |W_2| \\ \text{Arg } W_1 = \text{Arg } \bar{W}_2 + 2k\pi \Leftrightarrow \text{Arg } W_1 = -\text{Arg } W_2 + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} |\alpha|^2 = 4 |\alpha| \Leftrightarrow \sqrt{2} |\alpha|^2 - 4 |\alpha| = 0 \\ \frac{\pi}{4} + 2 \text{Arg } \alpha = -\pi - \text{Arg } \alpha + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| (\sqrt{2} |\alpha| - 4) = 0 \\ 3 \text{Arg } \alpha = -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 0 \text{ ou } |\alpha| = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ \text{Arg } \alpha = -\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si  $|\alpha| = 0$  alors  $\alpha = 0$ .

$$\text{Si } |\alpha| = 2\sqrt{2} \text{ alors } \alpha = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour obtenir toutes les valeurs de  $\alpha$ , il suffit de donner à  $k$  les valeurs 0, 1 et 2. D'où :

$$\alpha_0 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right) = (\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\alpha_1 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2(1 + i)$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$$

Conclusion : L'ensemble des valeurs de  $\alpha$  est donc :  $\{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ .

### EXERCICE 13

$$1) \text{ a) Soit } z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}. \text{ Calculer } S = 1 + z + z^2 + \dots + z^6$$

b) En déduire les valeurs de :

$$\Sigma_1 = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} =$$

$$\Sigma_2 = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{10\pi}{7} + \sin \frac{12\pi}{7}$$

2) a) Soit  $A = \sin \frac{\pi}{4} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ . Calculer  $\frac{A}{1-A}$ .

b) Soit  $S_1 = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( 2 \frac{\pi}{4} \right) + \dots + \sin^{23} \left( \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( 23 \frac{\pi}{4} \right)$

$$S_2 = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 2 \frac{\pi}{4} \right) + \dots + \sin^{23} \left( \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 23 \frac{\pi}{4} \right)$$

Calculer  $S_1$  et  $S_2$ . En déduire la valeur de  $S_2 - S_1$ .

### Solutions

Rappelons que:  $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}) : 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

1) a)  $S = \frac{1 - z^7}{1 - z}$ . Mais:  $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ . D'où:  $S = 0$

b)  $\Sigma_1 + i \Sigma_2 = \left( \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) + \dots + \left( \cos \frac{12\pi}{7} + i \sin \frac{12\pi}{7} \right)$

$$= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = S - 1 = 0 - 1 = -1.$$

D'où:  $\Sigma_1 = -1$  et  $\Sigma_2 = 0$ .

2) a)  $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + i)$ .

Par suite:  $1 - A = 1 - \frac{1}{2} (1 + i) = \frac{1}{2} (1 - i)$ .

Donc:  $\frac{A}{1-A} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$ .

b)  $S_1 + i S_2 = A + A^2 + \dots + A^{23} = A(1 + A + A^2 + \dots + A^{22})$   
 $= A \frac{1 - A^{23}}{1 - A} = \frac{A}{1 - A} (1 - A^{23}) = i (1 - A^{23})$

Mais:  $A^{23} = \sin^{23} \left( \frac{\pi}{4} \right) \left[ \cos \frac{23\pi}{4} + i \sin \frac{23\pi}{4} \right]$   
 $= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{23} \left[ \cos \left( 6\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 6\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right]$   
 $= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{23} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$   
 $= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{23} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{24} (1 - i)$   
 $= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{24} (1 - i) = \frac{1}{2^{12}} (1 - i)$

Mais:  $2^4 = 16$  ;  $2^8 = 16 \times 16 = 256$  ;

Donc:  $2^{12} = 2^8 \times 2^4 = 256 \times 16 = 4096$

D'où:  $1 - A^{23} = 1 - \frac{1}{4096} (1 - i) = \frac{4095}{4096} + \frac{i}{4096}$

Par suite:  $S_1 + i S_2 = i (1 - A^{23}) = i \frac{4095}{4096} - \frac{1}{4096}$

Par conséquent:  $S_1 = -\frac{1}{4096}$  et  $S_2 = \frac{4095}{4096}$

Enfin:  $S_2 - S_1 = 1$ .

### Exercice 14

1) Soit  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ . Calculer  $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{46}$

2) Soit  $S_1 = \cos 2a + \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( 2a + 2 \frac{\pi}{6} \right) + \dots + \cos \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right)$

$$S_2 = \sin 2a + \sin \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( 2a + 2 \frac{\pi}{6} \right) + \dots + \sin \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right)$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $a$ .

3) Soit  $A = \cos^2 a + \cos^2 \left( a + \frac{\pi}{12} \right) + \cos^2 \left( a + 2 \frac{\pi}{12} \right) + \dots + \cos^2 \left( a + 46 \frac{\pi}{12} \right)$

$$B = \sin^2 a + \sin^2 \left( a + \frac{\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( a + 2 \frac{\pi}{12} \right) + \dots + \sin^2 \left( a + 46 \frac{\pi}{12} \right)$$

Calculer  $A$  et  $B$  en fonction de  $a$ . En déduire  $A + B$ .

### Solutions

1)  $S = \frac{1 - z^{47}}{1 - z}$ . Mais:  $z^{47} = \cos \frac{47\pi}{6} + i \sin \frac{47\pi}{6} = \cos \left( 8\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( 8\pi - \frac{\pi}{6} \right)$   
 $= \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$

A partir de ce résultat, il y a 2 méthodes pour calculer  $S$ .

*Méthode trigonométrique:*

$$S = \frac{1 - z^{47}}{1 - z} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right) + i 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right) - i 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}} = \left( \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right)^2$$

$$= \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right)^2 = \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)^2$$

$$= \cos \frac{10\pi}{12} + i \sin \frac{10\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

*Méthode algébrique*

$$S = \frac{1 - z^{47}}{1 - z} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}} = \frac{\left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)^2}{\left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\left( \frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) + i \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \left[ \left( \frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) + i \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] (2 + \sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$= -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
2) S_1 + i S_2 &= (\cos 2a + i \sin 2a) + \left[ \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \dots \\
&\quad \dots + \left[ \cos \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= (\cos 2a + i \sin 2a) + \left[ (\cos 2a + i \sin 2a) \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] + \dots \\
&\quad \dots + \left[ (\cos 2a + i \sin 2a) \left( \cos \frac{46\pi}{6} + i \sin \frac{46\pi}{6} \right) \right] \\
&= (\cos 2a + i \sin 2a) \left[ 1 + \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) + \dots + \left( \cos \frac{46\pi}{6} + i \sin \frac{46\pi}{6} \right) \right] \\
&= (\cos 2a + i \sin 2a) [1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{46}] \\
&= (\cos 2a + i \sin 2a) \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\
&= \cos \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$

D'où :  $S_1 = \cos \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right)$  et  $S_2 = \sin \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right)$

Remarque :

On pourra encore donner le résultat sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
S_1 + i S_2 &= (\cos 2a + i \sin 2a) [1 + z + z^2 + \dots + z^{46}] \\
&= (\cos 2a + i \sin 2a) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\
&= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2a - \frac{1}{2} \sin 2a \right) + i \left( \frac{1}{2} \cos 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2a \right)
\end{aligned}$$

D'où :  $S_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2a - \frac{1}{2} \sin 2a$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cos 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2a$$

$$\begin{aligned}
3) A &= \frac{1 + \cos 2a}{2} + \frac{1 + \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left( 2a + 2 \frac{\pi}{6} \right)}{2} + \dots + \frac{1 + \cos \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right)}{2} \\
&= \frac{47}{2} + \frac{1}{2} \left[ \cos 2a + \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( 2a + \frac{2\pi}{6} \right) + \dots + \cos \left( 2a + \frac{46\pi}{6} \right) \right] \\
&= \frac{47}{2} + \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} \left[ 47 + \cos \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right)}{2} + \frac{1 - \cos \left( 2a + 2 \frac{\pi}{6} \right)}{2} + \dots + \frac{1 - \cos \left( 2a + 46 \frac{\pi}{6} \right)}{2} \\
&= \frac{47}{2} - \frac{1}{2} \left[ \cos 2a + \cos \left( 2a + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( 2a + \frac{2\pi}{6} \right) + \dots + \cos \left( 2a + \frac{46\pi}{6} \right) \right] \\
&= \frac{47}{2} - \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} \left[ 47 - \cos \left( 2a + \frac{5\pi}{6} \right) \right].
\end{aligned}$$

Enfin :  $A + B = 47$  (Résultat facile à obtenir directement).

### EXERCICE 15

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2i \operatorname{tg} \alpha - \sin^2 \alpha = 0$   
avec  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ - \{0\}$

b) Déterminer le module et l'argument de chaque solution de (E).

2) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (F) :  $z^2 \operatorname{tg}^2 \theta - 2z \sin \theta + 1 = 0$   
avec  $\theta \in \left] 0, \pi \right[ - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

b) Déterminer le module et l'argument de chaque solution de (F).

### Solutions

1) a)  $\Delta' = -\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left( -\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 \right)$   
 $= \sin^2 \alpha \left( \frac{-1 + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha \left( \frac{-\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = -\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$   
 $= (i \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha)^2$ .

L'équation (E) admet donc 2 solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$z = i \operatorname{tg} \alpha + i \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = i \operatorname{tg} \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$z' = i \operatorname{tg} \alpha - i \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = i \operatorname{tg} \alpha (1 - \sin \alpha)$$

b) ( $\forall \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ - \{0\}$ ) :  $1 + \sin \alpha > 0$  et  $1 - \sin \alpha > 0$ .

Donc :  $|z| = |\operatorname{tg} \alpha| (1 + \sin \alpha)$  et  $|z'| = |\operatorname{tg} \alpha| (1 - \sin \alpha)$ .

Par suite :  $\operatorname{Arg} z$  et  $\operatorname{Arg} z'$  dépendent du signe de  $\operatorname{tg} \alpha$ .

— Si  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  alors  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ , donc  $\operatorname{tg} \alpha (1 + \sin \alpha) > 0$  et  $\operatorname{tg} \alpha (1 - \sin \alpha) > 0$  ;

et par conséquent :  $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z' = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

car  $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

— Si  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  alors  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , donc  $\operatorname{tg} \alpha (1 + \sin \alpha) < 0$  et  $\operatorname{tg} \alpha (1 - \sin \alpha) < 0$  ;  
et par conséquent :

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} i + \pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ a) } \Delta' &= \sin^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = \sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2\theta \left(1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) \\
 &= \sin^2\theta \left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}\right) = \sin^2\theta \left(\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = -\sin^2\theta \operatorname{tg}^2\theta \\
 &= (i \sin\theta \operatorname{tg}\theta)^2.
 \end{aligned}$$

L'équation (F) admet donc 2 solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{\sin\theta + i \sin\theta \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} (1 + i \operatorname{tg}\theta) \\
 &= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \left(\frac{\cos\theta + i \sin\theta}{\cos\theta}\right) = \operatorname{cotg}\theta (\cos\theta + i \sin\theta).
 \end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{\sin\theta - i \sin\theta \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \bar{z}_1 = \operatorname{cotg}\theta (\cos\theta - i \sin\theta).$$

b) Puisque  $z_2 = \bar{z}_1$ , il suffit de déterminer le module et l'argument de  $z_1$  et on déduit ensuite ceux de  $z_2$ .

Module et Argument de  $z_1$  :

On a :  $|z_1| = |\operatorname{cotg}\theta|$ . Mais  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

Donc :  $\operatorname{Arg} z_1$  dépend du signe de  $\operatorname{cotg}\theta$ .

Si  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  [alors  $\operatorname{cotg}\theta > 0$ , donc  $|z_1| = |\operatorname{cotg}\theta| = \operatorname{cotg}\theta$  et  $\operatorname{Arg} z_1 = \theta + 2k\pi$

Si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  [alors  $\operatorname{cotg}\theta < 0$ , donc  $|z_1| = |\operatorname{cotg}\theta| = -\operatorname{cotg}\theta$  et

$$\begin{aligned}
 \text{on peut écrire : } z_1 &= -\operatorname{cotg}\theta (-\cos\theta - i \sin\theta) \\
 &= -\operatorname{cotg}\theta [\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]
 \end{aligned}$$

et par suite :  $\operatorname{Arg} z_1 = \pi + \theta + 2k\pi$ .

Module et Argument de  $z_2$  :

$$z_2 = \bar{z}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = |\bar{z}_1| = |z_1| = |\operatorname{cotg}\theta| \\ \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \bar{z}_1 + 2k\pi = -\operatorname{Arg} z_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Donc : Si  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  [alors  $\operatorname{Arg} z_2 = -\operatorname{Arg} z_1 + 2k\pi = -\theta + 2k\pi$

Si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  [alors  $\operatorname{Arg} z_2 = -\operatorname{Arg} z_1 + 2k\pi = -\pi - \theta + 2k\pi$ .

### EXERCICE 16

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $Z = \bar{z} + 2|\bar{z}|^2 - 1$ .

1) On pose  $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Déterminer  $Z$  en fonction de  $\alpha$ , puis résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } Z = 0 & \text{c) } Z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \text{b) } Z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{d) } Z = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{array}$$

2) On pose  $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$  avec  $\alpha \in [0, 2\pi] - \{\pi\}$ .

a) Démontrer que :  $Z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \right]$ .

b) Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , le module et l'argument de  $Z$ .

c) En déduire, en fonction de  $\alpha$ , les racines carrées de  $Z$ .

3) a) Soit  $Z_1 = z + 2|\bar{z}|^2 - 1$ . Trouver une relation entre  $Z_1$  et  $Z$ .

b) On pose toujours  $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$  avec  $\alpha \in [0, 2\pi] - \{\pi\}$ .

En utilisant les résultats de la question b) du 2), déduire le module et l'argument de  $Z_1$  en fonction de  $\alpha$ , ainsi que la forme trigonométrique de  $Z_1$ .

### Solutions

1)  $Z = \cos\alpha - i \sin\alpha + 2 - 1 = (\cos\alpha + 1) - i \sin\alpha$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } Z = 0 &\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = -1 = \cos\pi + i \sin\pi \\
 &\Leftrightarrow \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = \cos\pi + i \sin\pi \\
 &\Leftrightarrow -\alpha = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

(on écrit toujours  $+ 2k\pi$  car  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
 Z = 0 &\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = -1 = \cos\pi + i \sin\pi \\
 &\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos(-\pi) - i \sin(-\pi) \\
 &\Leftrightarrow \alpha = -\pi + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } Z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\text{c) } Z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{d) } Z = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha - i \sin\alpha = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$2) a) Z = \cos \alpha - i \sin \alpha + 2 - 1 = (\cos \alpha + 1) - i \sin \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - i 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$b) |Z| = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|. \text{ Mais } \frac{\alpha}{2} \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2}, \pi \right]. \text{ Donc:}$$

$$\text{Si } \frac{\alpha}{2} \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ alors } \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ et par suite: } |Z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ et}$$

$$\text{Arg } Z = -\frac{\alpha}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Si } \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ alors } \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \text{ et par suite: } |Z| = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et on peut écrire: } Z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ -\cos \left( -\frac{\alpha}{2} \right) - i \sin \left( -\frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$= -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right]$$

$$\text{d'où: } \text{Arg } Z = -\frac{\alpha}{2} + \pi + 2k\pi.$$

Conclusion:

$$\text{Si } \alpha \in ]0, \pi[ \text{ alors } |Z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ et } \text{Arg } Z = -\frac{\alpha}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Si } \alpha \in ]\pi, 2\pi] \text{ alors } |Z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ et } \text{Arg } Z = -\frac{\alpha}{2} + \pi + 2k\pi.$$

c) D'après la question précédente b) on a:

Si  $\alpha \in [0, \pi[$  alors la forme trigonométrique de Z est

$$Z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{2} \right) \right];$$

Par suite: les racines carrées de Z sont:

$$Z_k = \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{2k\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{2k\pi}{2} \right) \right]$$

avec  $k = 0$  ou  $k = 1$ .

$$\text{D'où: } Z_0 = \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{4} \right) \right]$$

$$Z_1 = -Z_0$$

Si  $\alpha \in ]\pi, 2\pi]$  alors la forme trigonométrique de Z est:

$$Z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right]$$

Par suite: les racines carrées de Z sont:

$$Z'_k = \sqrt{-2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2} \right) \right]$$

avec  $k = 0$  ou  $k = 1$

$$\text{D'où: } Z'_0 = \sqrt{-2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$Z'_1 = -Z'_0$$

3) a) On sait que:  $|\bar{z}| = |z|$  et  $\bar{\bar{z}} = z$ .

Donc:  $Z_1 = \bar{Z}$  (c'est-à-dire  $Z_1$  est le conjugué de Z).

$$b) \text{ Par suite: } |Z_1| = |\bar{Z}| = |Z| = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$$

$$\text{Arg } Z_1 = \text{Arg } \bar{Z} + 2k\pi = -\text{Arg } Z + 2k\pi$$

$$\text{D'où: Si } \alpha \in [0, \pi[ \text{ alors } |Z_1| = |Z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et } \text{Arg } Z_1 = -\text{Arg } Z + 2k\pi = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Et: Si } \alpha \in ]\pi, 2\pi] \text{ alors } |Z_1| = |Z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{et } \text{Arg } Z_1 = -\text{Arg } Z + 2k\pi = \frac{\alpha}{2} - \pi + 2k\pi.$$

Par conséquent:

Si  $\alpha \in [0, \pi[$  alors la forme trigonométrique de  $Z_1$  est:

$$Z_1 = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Et si  $\alpha \in ]\pi, 2\pi]$  alors la forme trigonométrique de  $Z_1$  est:

$$Z_1 = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \pi \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \pi \right) \right]$$

## EXERCICE 17

1) Développer  $(1 + \sqrt{3})^2$

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , et par 2 méthodes différentes, l'équation:  
(E) :  $z^2 = 2(\sqrt{3} - i)$ .

3) En déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

## Solutions

1)  $(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})$ .

2) Méthode algébrique:

Posons  $z = x + iy$ . Donc: (E)  $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 2\sqrt{3} - 2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\sqrt{3} \\ 2xy = -2 \Leftrightarrow xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{12 + 4} = 4 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } 2x^2 = 2\sqrt{3} + 4 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3} + 2 = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{ou } x = -\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \text{ alors } y = -\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Si } x = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \text{ alors } y = -\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Les solutions de (E) sont donc : } z_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{et : } z_2 = -z_1$$

*Méthode trigonométrique :*

$$(E) \Leftrightarrow z^2 = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 4 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$z'_k = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \right) \right] \text{ avec } k = 0 \text{ ou } 1.$$

$$\text{D'où : } z'_0 = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z'_1 = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right] = 2 \left( -\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

3) Les solutions de (E) sont uniques. Donc  $z_1$  est égal à  $z'_0$  ou  $z'_1$ .

$$\text{Considérons } z_1. \text{ On a : } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} > 0 \text{ et } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} < 0.$$

$$\text{Or : } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ car } \frac{\pi}{12} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

Donc :  $z_1 = z'_0$ . D'où :

$$2 \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

### EXERCICE 18

1) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^3 - 1 = 0$

2) Montrer que  $z_0 = 3 - 2i$  est une solution de l'équation :  
(E) :  $z^3 + 46i + 9 = 0$

3) En déduire, dans  $\mathbb{C}$ , les autres solutions de (E).

### Solutions

1) *Méthode algébrique :*

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \Leftrightarrow z_0 = 1 \\ z^2 + z + 1 = 0 \text{ (H)} \end{cases}$$

Considérons l'équation (H). On a :  $\Delta = 1 - 4 = -3 = i^2 3 = (i\sqrt{3})^2$

Donc l'équation (H) admet 2 solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'équation :  $z^3 - 1 = 0$  admet donc 3 solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$z_0 = 1 ; z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Méthode trigonométrique :*

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}$$

D'où :  $z'_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$z'_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2)  $z_0$  est une solution de (E)  $\Leftrightarrow z_0^3 + 46i + 9 = 0$

$$\text{Or : } z_0^3 = (z - 2i)^3 = (3 - 2i)^2 (3 - 2i) = (9 - 4 - 12i)(3 - 2i) \\ = (5 - 12i)(3 - 2i) = 15 - 10i - 36i - 24 = -46i - 9$$

D'où :  $z_0^3 + 46i + 9 = 0$ . Par suite :  $z_0 = 3 - 2i$  est une solution de (E).

3) (E)  $\Leftrightarrow z^3 = -46i - 9 = z_0^3 \Leftrightarrow \left( \frac{z}{z_0} \right)^3 = 1$

$$\text{Posons : } Z = \frac{z}{z_0}. \text{ Donc : (E) } \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 = 1 \\ z = z_0 Z \end{cases}$$

D'après la question 1), les solutions de l'équation  $Z^3 = 1$  sont :

$$Z_0 = 1 ; Z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} ; Z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc : les solutions de (E) sont :

$$z''_0 = z_0 Z_0 = (3 - 2i) 1 = 3 - 2i$$

$$z''_1 = z_0 Z_1 = (3 - 2i) \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) + i \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

$$z''_2 = z_0 Z_2 = (3 - 2i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) + i \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

### EXERCICE 19

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation:  $z^4 - 1 = 0$
- Soit  $Z = 4(7 + 24i)$ . Montrer que  $z_0 = 3 + i$  est une racine 4<sup>e</sup> de  $Z$ .
- En déduire la résolution, dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation (E):  $z^4 - 4(7 + 24i) = 0$
- En déduire enfin, les solutions dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation (F):  $[\sqrt{2} + i]z^4 - 4(7 + 24i) = 0$

#### Solutions

##### 1) Méthode algébrique

$$z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1 \\ \text{ou} \\ z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i \end{cases}$$

Les solutions de l'équation  $z^4 - 1 = 0$  sont donc:  $\{1, -1, i, -i\}$

Méthode trigonométrique:

$$z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

D'où:  $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

2)  $z_0 = 3 + i$  est une racine 4<sup>e</sup> de  $Z \Leftrightarrow z_0^4 = Z$

$$\text{Or: } z_0^2 = 9 - 1 + 6i = 8 + 6i$$

$$\text{D'où: } z_0^4 = (8 + 6i)^2 = 64 - 36 + 96i = 28 + 96i = 4(7 + 24i) = Z$$

Donc:  $z_0 = 3 + i$  est une racine 4<sup>e</sup> de  $Z$ .

$$3) \text{ (E)} \Leftrightarrow z^4 = 4(7 + 24i) = z_0^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = 1 \\ u = \frac{z}{z_0} \Leftrightarrow z = z_0 u \end{cases}$$

D'après la question 1), les solutions de l'équation  $u^4 = 1$  sont:

$$1; -1; i; -i$$

Par suite: les solutions de (E) sont:

$$z_1' = z_0 \times 1 = (3 + i) \cdot 1 = 3 + i$$

$$z_2' = z_0 \times (-1) = (3 + i) \cdot (-1) = -3 - i$$

$$z_3' = z_0 \times i = (3 + i) \cdot i = -1 + 3i$$

$$z_4' = z_0 \times (-i) = (3 + i) \cdot (-i) = 1 - 3i$$

$$4) \text{ (F)} \Leftrightarrow \begin{cases} W^4 - 4(7 + 24i) = 0 \text{ (H)} \\ W = (\sqrt{2} + i)z \Leftrightarrow z = \frac{W}{\sqrt{2} + i} \end{cases}$$

D'après la question 3), les solutions de l'équation (H) sont:

$$W_1 = 3 + i; W_2 = -3 - i; W_3 = -1 + 3i; W_4 = 1 - 3i$$

Par suite: les solutions de (F) sont donc:

$$z_1'' = \frac{W_1}{\sqrt{2} + i} = \frac{(3 + i)(\sqrt{2} - i)}{2 + 1} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 1\right)$$

$$z_2'' = \frac{W_2}{\sqrt{2} + i} = \frac{(-3 - i)(\sqrt{2} - i)}{2 + 1} = \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) + i \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$z_3'' = \frac{W_3}{\sqrt{2} + i} = \frac{(-1 + 3i)(\sqrt{2} - i)}{2 + 1} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + i \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$z_4'' = \frac{W_4}{\sqrt{2} + i} = \frac{(1 - 3i)(\sqrt{2} - i)}{2 + 1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 1\right) - i \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)$$

### EXERCICE 20

1) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E):  $z^3 + 64i = 0$ .

2) En déduire, dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation:

$$\text{(F)}: [(\sqrt{3} - i)z]^3 + 64i = 0$$

#### Solutions

$$1) \text{ (E)} \Leftrightarrow z^3 = -64i = -64 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 64 \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 4^3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Donc: les solutions de (E) sont:

$$z_0 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

$$z_1 = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= 4 \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 4 \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) = -2(\sqrt{3} + i)$$

$$z_2 = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= 4 \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2(\sqrt{3} - i)$$

$$2) \text{ (F)} \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 + 64i = 0 \text{ (H)} \\ Z = (\sqrt{3} - i)z \Leftrightarrow z = \frac{Z}{\sqrt{3} - i} \end{cases}$$

D'après la question 1), les solutions de l'équation (H) sont:

$$Z_0 = 4i; Z_1 = -2(\sqrt{3} + i); Z_2 = 2(\sqrt{3} - i)$$

Par suite : les solutions de (F) sont :

$$z'_0 = \frac{Z_0}{\sqrt{3}-i} = \frac{4i(\sqrt{3}+i)}{4} = i(\sqrt{3}+i) = -1+i\sqrt{3}$$

$$z'_1 = \frac{Z_1}{\sqrt{3}-i} = \frac{-2(\sqrt{3}+i)^2}{4} = -1-i\sqrt{3}$$

$$z'_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{3}-i} = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}-i} = 2$$

### EXERCICE 21 :

Résoudre sur  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes :

- (E) :  $z^4 = 64i(\sqrt{3}+2i)^4$  (on donne :  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$  et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ )
- (F) :  $(2-iz)^3 - 8(iz+1)^3 = 0$
- (A) :  $(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$
- (B) :  $\left(\frac{2i-z}{z+i-1}\right)^3 + \left(\frac{2i-z}{z+i-1}\right)^2 + \frac{2i-z}{z+i-1} + 1 = 0$

### Solutions

$$1) (E) \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{3}+2i}\right)^4 = 64i = 64\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z^4 = (2\sqrt{2})^4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) & (H) \\ Z = \frac{z}{\sqrt{3}+2i} \Leftrightarrow z = (\sqrt{3}+2i)Z \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (H) sont :

$$Z_k = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right] \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

C'est-à-dire :

$$Z_0 = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$

$$Z_1 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( -\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) = (1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}+1)$$

$$Z_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) \right] = -Z_0$$

$$Z_3 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \pi\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \pi\right) \right] = -Z_1$$

Par suite : les solutions de (E) sont :

$$z_0 = (\sqrt{3}+2i)Z_0 = (5-\sqrt{3}) + i(5+\sqrt{3})$$

$$z_1 = (\sqrt{3}+2i)Z_1 = (-5-\sqrt{3}) + i(5-\sqrt{3})$$

$$z_2 = (\sqrt{3}+2i)Z_2 = (\sqrt{3}+2i)(-Z_0) = -z_0$$

$$z_3 = (\sqrt{3}+2i)Z_3 = (\sqrt{3}+2i)(-Z_1) = -z_1$$

$$2) (F) \Leftrightarrow (2-iz)^3 = 8(iz+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-iz}{1+iz}\right)^3 = 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0) = 2^3(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 = 2^3(\cos 0 + i \sin 0) & (H) \\ Z = \frac{2-iz}{1+iz} \Leftrightarrow iz = \frac{2-Z}{Z+1} \Leftrightarrow z = -i \frac{2-Z}{Z+1} = i \frac{Z-2}{Z+1} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (H) sont :

$$Z_k = 2 \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

C'est-à-dire :

$$Z_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$$

$$Z_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left[ \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 2 \left( -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left[ \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 2 \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}$$

Par suite : les solutions de (F) sont :

$$z_0 = i \frac{2-2}{2+1} = 0$$

$$z_1 = i \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}+1} = i \frac{-3+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = i \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}+1} = i \frac{-3-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + i$$

$$3) (A) \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z^4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) & (H) \\ Z = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-1} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (H) sont :

$$Z_k = \sqrt{2} \left[ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) \right] \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

C'est-à-dire :

$$Z_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = \sqrt{2} \left( -\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} \right) = -1 + i$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = -Z_0 = -1 - i$$

$$Z_3 = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \\ = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi \right) \right] = -Z_1 = 1 - i$$

Par suite : les solutions de (A) sont :

$$z_0 = \frac{1+i+1}{1+i-1} = \frac{2+i}{i} = -i(2+i) = 1-2i$$

$$z_1 = \frac{-1+i+1}{-1+i-1} = \frac{i}{i-2} = \frac{-i}{2-i} = \frac{-i(2+i)}{5} = \frac{1-2i}{5}$$

$$z_2 = \frac{-1-i+1}{-1-i-1} = \frac{-i}{-2-i} = \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{5} = \frac{1+2i}{5}$$

$$z_3 = \frac{1-i+1}{1-i-1} = \frac{2-i}{-i} = i(2-i) = 1+2i$$

$$4) (B) \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{Z^4 - 1}{Z - 1} = 0 \text{ avec } Z \neq 1 \\ Z = \frac{2i - z}{z + i - 1} \Leftrightarrow z = \frac{2i - Z(i-1)}{Z+1} \text{ avec } Z \neq -1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Z^4 - 1 = 0 \text{ avec } Z \neq 1 \text{ et } Z \neq -1 \\ z = \frac{2i - Z(i-1)}{Z+1} \end{cases} \end{cases}$$

Mais :  $Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z = 1$  ou  $Z = -1$  ou  $Z = i$  ou  $Z = -i$   
Les solutions qui conviennent sont donc :  $Z = i$  ou  $Z = -i$

Par suite : les solutions de (B) sont :

$$z_1 = \frac{2i - i(i-1)}{i+1} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{2} = 2+i$$

$$z_2 = \frac{2i + i(i-1)}{-i+1} = \frac{3i-1}{1-i} = \frac{(3i-1)(1+i)}{2} = i-2$$

Remarque : l'équation (B) exige :  $z + i - 1 \neq 0$  c'est-à-dire  $z \neq 1 - i$   
Donc les 2 solutions  $z_1$  et  $z_2$  conviennent.

## EXERCICE 22

1) Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation :

$$(E) : z^3 - 16(1-i) = 0.$$

2) En déduire la forme algébrique des solutions de cette équation.

## Solutions

$$1) (E) \Leftrightarrow z^3 = 16(1-i) = 16\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 16\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (2\sqrt{2})^3 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]$$

avec  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Donc : les solutions de (E) sont :

$$z_0 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -2(1+i)$$

2) On a déjà déterminé  $z_2$  sous forme algébrique.

Or :  $z_2$  est une solution de (E).

Donc :  $z_2^3 - 16(1-i) = 0$  c'est-à-dire :  $z_2^3 = 16(1-i)$ .

Par conséquent : (E)  $\Leftrightarrow z^3 = z_2^3$

$$\text{Mais on a : } z^3 = z_2^3 \Leftrightarrow \left( \frac{z}{z_2} \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 = 1 \\ Z = \frac{z}{z_2} \Leftrightarrow z = Z z_2. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation :  $Z^3 = 1$  sont les racines cubiques de 1 dans  $\mathbb{C}$ . Ces racines cubiques ont été déterminées dans un exercice déjà résolu avec une méthode algébrique et avec une méthode trigonométrique ; et ce sont :

$$Z_0 = 1 ; Z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} ; Z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent : les solutions de (E) sont :

$$z'_0 = Z_0 z_2 = -2(1+i)$$

$$z'_1 = Z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})$$

$$z'_2 = Z_2 z_2 = (1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1).$$

Remarque :  $z'_0 = z_2$ . En plus :  $\cos \frac{\pi}{12} > 0$  et  $\sin \frac{\pi}{12} > 0$ .

Donc :  $z'_1 = z_0$  et  $z'_2 = z_1$ . Et par conséquent :

$$\text{l'égalité } z'_1 = z_0 \text{ donne : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{De même : } z'_2 = z_1 \text{ donne : } \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

### EXERCICE 23

- Développer  $(1 + 2i)^4$ .
- En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E) :  $z^4 + 7 + 24i = 0$ .
- En déduire enfin les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (F) :  $z^4 + 7 - 24i = 0$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (A) :  $u^2 + 14u + 625 = 0$ .
- En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (B) :  $z^8 + 14z^4 + 625 = 0$ .

#### Solutions

- $$(1 + 2i)^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$$

$$(1 + 2i)^4 = (-3 + 4i)^2 = 9 - 16 - 24i = -7 - 24i.$$
- $$(E) \Leftrightarrow z^4 = -7 - 24i \Leftrightarrow z^4 = (1 + 2i)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{1 + 2i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^4 = 1 \\ Z = \frac{z}{1 + 2i} \end{cases} \Leftrightarrow z = Z(1 + 2i).$$

Les solutions de l'équation  $Z^4 = 1$  sont les racines 4<sup>e</sup> de 1 dans  $\mathbb{C}$ . Ces racines ont été déterminées dans un exercice déjà résolu avec une méthode algébrique et avec une méthode trigonométrique; et ce sont :

$$Z_0 = 1; Z_1 = -1; Z_2 = i; Z_3 = -i.$$

Par suite : les solutions de (E) sont :

$$z_0 = 1(1 + 2i) = 1 + 2i$$

$$z_1 = (-1)(1 + 2i) = -1 - 2i$$

$$z_2 = i(1 + 2i) = -2 + i$$

$$z_3 = (-i)(1 + 2i) = 2 - i$$

- Posons  $W = z^4 + 7 - 24i$ .

On sait que :  $W = 0 \Leftrightarrow \bar{W} = 0$

Donc : (F)  $\Leftrightarrow \bar{z}^4 + 7 + 24i = 0$  (H).

Cette équation (H) est du même type que l'équation (E) en remplaçant  $z$  par  $\bar{z}$ .

D'après la question 2), les solutions de l'équation (H) sont donc :

$$\bar{z}'_0 = 1 + 2i; \bar{z}'_1 = -1 - 2i; \bar{z}'_2 = -2 + i; \bar{z}'_3 = 2 - i$$

Par conséquent : les solutions de (F) sont :

$$z'_0 = 1 - 2i; z'_1 = -1 + 2i; z'_2 = -2 - i; z'_3 = 2 + i$$

- $\Delta' = 49 - 625 = -576 = (i24)^2$

L'équation (A) admet donc 2 solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$u_1 = -7 - 24i \quad \text{et} \quad u_2 = -7 + 24i$$

- (B)  $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 14u + 625 = 0 \text{ (A) déjà résolu en 4)} \\ u = z^4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -7 - 24i \quad \text{ou} \quad u = -7 + 24i \\ u = z^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z^4 = -7 - 24i \quad \text{ou} \quad z^4 = -7 + 24i$$

$$\Leftrightarrow z^4 + 7 + 24i = 0 \quad \text{ou} \quad z^4 + 7 - 24i = 0 \Leftrightarrow (E) \text{ ou } (F).$$

Les solutions de (B) sont donc les solutions de (E) et de (F) qui sont déjà résolues en 2) et 3).

Par suite : les solutions de (B) sont :

$$z_0 = 1 + 2i; z_1 = -1 - 2i; z_2 = -2 + i; z_3 = 2 - i$$

$$z'_0 = 1 - 2i; z'_1 = -1 + 2i; z'_2 = -2 - i; z'_3 = 2 + i$$

### EXERCICE 24

1) Soit  $f(z) = z^2 - (\sqrt{3} + 9i)z - 8(1 - i\sqrt{3})$  avec  $z \in \mathbb{C}$ .  
Calculer  $f(8i)$ . En déduire les solutions de l'équation  $f(z) = 0$ .

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^6 - (\sqrt{3} + 9i)z^3 - 8(1 - i\sqrt{3}) = 0$ .

#### Solutions

- $$f(8i) = (8i)^2 - (\sqrt{3} + 9i)8i - 8(1 - i\sqrt{3})$$

$$= -64 - 8i\sqrt{3} + 72 - 8 + 8i\sqrt{3} = 0$$

Par suite :  $z_1 = 8i$  est une solution de l'équation  $f(z) = 0$ .

Or :  $f(z) = 0$  est une équation du second degré dans  $\mathbb{C}$ ; elle admet donc toujours 2 solutions. Soit  $z_2$  l'autre solution.

On a :  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = \sqrt{3} + 9i$

D'où :  $z_2 = \sqrt{3} + 9i - z_1 = \sqrt{3} + 9i - 8i = \sqrt{3} + i$

- (E)  $\Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - (\sqrt{3} + 9i)Z - 8(1 - i\sqrt{3}) = 0 \quad (H) \\ Z = z^3 \end{cases}$

L'équation (H) n'est autre que l'équation  $f(z) = 0$  du 1) en remplaçant  $z$  par  $Z$ .

Par suite : les solutions de (H) sont :  $Z' = 8i$  et  $Z'' = \sqrt{3} + i$

Mais :  $z^3 = Z$ . Donc : les solutions de (E) sont les racines cubiques de  $Z'$  et de  $Z''$ .

Or :  $Z' = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$  et  $Z'' = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ .

Par conséquent : les racines cubiques de  $Z'$  sont :

$$z'_k = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right] \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

c'est-à-dire :

$$z'_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z'_1 = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left( -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z'_2 = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

De même : les racines cubiques de  $Z''$  sont :

$$z''_k = \sqrt[3]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right] \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

c'est-à-dire :

$$z''_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right)$$

$$z''_1 = \sqrt[3]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right)$$

$$z''_2 = \sqrt[3]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right)$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\{z'_0, z'_1, z'_2, z''_0, z''_1, z''_2\}.$$

### EXERCICE 25

Soit  $z = \sqrt{2}(1 + i)$ .

- 1) a) Calculer la somme  $S_{10}$  des racines  $10^{\text{e}}$  de 1 dans  $\mathbb{C}$ .  
b) En déduire la somme  $\Sigma_{10}$  des racines  $10^{\text{e}}$  de  $z$ .
- 2) On pose  $u_n = z^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
a) Mettre  $u_n$  sous forme trigonométrique.  
b) Déterminer la forme trigonométrique du produit  $W_n = u_0 u_1 u_2 \dots u_n$ .  
(on admet que :  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ )  
c) En déduire enfin que :  $W_{10} = 2^{54} \bar{z}$
- 3) On pose  $V_n = \frac{u_n}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
a) Donner la forme trigonométrique de  $V_n$ .  
b) Démontrer que  $V_{n+8} = V_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
c) En déduire, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, toutes les valeurs possibles de  $V_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .  
d) D'après la forme trigonométrique de  $V_n$ , dites encore comment trouver toutes les valeurs possibles de  $V_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$  (on ne demande pas d'effectuer les calculs).  
e) D'une manière générale, pour quelles valeurs de  $n$ ,  $V_n$  est réel.

#### Solutions

1) a) Les racines  $10^{\text{e}}$  de 1 dans  $\mathbb{C}$  sont :

$$\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{10} + i \sin \frac{2k\pi}{10} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

$$= \left( \cos \frac{2\pi}{10} + i \sin \frac{2\pi}{10} \right)^k = \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)^k = \alpha_1^k$$

Donc :  $S_{10} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_9$

$$= 1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_1^9 = \frac{1 - \alpha_1^{10}}{1 - \alpha_1}$$

Mais :  $\alpha_1^{10} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ .

D'où :  $S_{10} = \frac{1-1}{1-\alpha_1} = 0$  car  $\alpha_1 \neq 1$ .

b)  $z = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Les racines  $10^{\text{e}}$  de  $z$  sont donc :

$$z_k = {}^{10}\sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{40} + \frac{2k\pi}{10} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{40} + \frac{2k\pi}{10} \right) \right] \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

$$= {}^{10}\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{40} + i \sin \frac{\pi}{40} \right) \left( \cos \frac{2k\pi}{10} + i \sin \frac{2k\pi}{10} \right)$$

$$= {}^{10}\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{40} + i \sin \frac{\pi}{40} \right) \alpha_k$$

Donc :  $\Sigma_{10} = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_9$

$$= {}^{10}\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{40} + i \sin \frac{\pi}{40} \right) (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_9).$$

$$= {}^{10}\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{40} + i \sin \frac{\pi}{40} \right) (0) = 0.$$

2) a)  $U_n = z^n = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$

b)  $W_n = u_0 u_1 u_2 \dots u_n = z z^2 z^3 \dots z^n$  car  $z^0 = 1$   
 $= z^{1+2+3+\dots+n} = z^{\frac{n(n+1)}{2}}$   
 $= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[ \cos n(n+1) \frac{\pi}{8} + i \sin n(n+1) \frac{\pi}{8} \right]$

c) Donc :  $W_{10} = 2^{55} \left( \cos \frac{55\pi}{4} + i \sin \frac{55\pi}{4} \right)$   
 $= 2^{55} \left[ \cos \left( 14\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 14\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right]$   
 $= 2^{55} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$   
 $= 2^{55} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{54} \sqrt{2} (1 - i) = 2^{54} \bar{z}$

3) a)  $V_n = \frac{u_n}{2^n} = \frac{2^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)}{2^n} = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$

Autre méthode :  $V_n = \frac{U_n}{2^n} = \frac{z^n}{2^n} = \left( \frac{z}{2} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$   
 $= \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$

b)  $V_{n+8} = \frac{z^{n+8}}{2^{n+8}} = \left( \frac{z}{2} \right)^{n+8} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+8}$   
 $= \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{n+8} = \cos (n+8) \frac{\pi}{4} + i \sin (n+8) \frac{\pi}{4}$   
 $= \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \left( \cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right)$   
 $= \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$   
 $= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = V_n$

Ou encore :

$$V_{n+8} = \cos (n+8) \frac{\pi}{4} + i \sin (n+8) \frac{\pi}{4}$$

$$= \cos \left( \frac{n\pi}{4} + 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{n\pi}{4} + 2\pi \right)$$

$$= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = V_n$$

- c)  $V_{n+8} = V_n$ . Donc : les valeurs possibles de  $V_n$  sont :  
 $\{V_0, V_1, V_2, \dots, V_7\}$  car  $V_8 = V_0, V_9 = V_1, \dots$

Et on a :

$$V_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$V_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$V_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$V_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_6 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$V_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ = \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d)  $V_n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = \cos \frac{n2\pi}{8} + i \sin \frac{n2\pi}{8}$

Donc : pour obtenir toutes les valeurs possibles de  $V_n$ , il suffit de donner à  $n$  les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

D'où : les valeurs possibles de  $V_n$  sont :  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_7$  déjà cherchées en c).

e)  $V_n$  réel  $\Leftrightarrow \sin \frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k$  avec  $k \in \mathbb{N}$

# Les suites de nombres réels et les suites de nombres complexes

## RAPPEL

### I. SUITE ARITHMÉTIQUE :

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ , et  $(u_n)_{n \in I}$  une suite de nombres réels.

Alors  $(u_n)_{n \in I}$  est dite arithmétique si, et seulement si, il existe  $r \in \mathbb{R}^*$  tel que :  
 $(\forall n \in I) : u_{n+1} = u_n + r$ .

$r$  est appelé la raison de la suite arithmétique  $(u_n)_{n \in I}$ .

Et dans ce cas on a les formules suivantes :

$$r = u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} = \dots = u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$

$$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_p + (n-p)r \text{ avec } p < n.$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$$

Trois nombres réels  $a, b, c$  forment une progression arithmétique si et seulement si on a :  $a + c = 2b$ .

### II. SUITE GÉOMÉTRIQUE :

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ , et  $(u_n)_{n \in I}$  une suite de nombres réels.

Alors  $(u_n)_{n \in I}$  est dite géométrique si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$  tel que :  
 $(\forall n \in I) : u_{n+1} = k u_n$

$k$  est appelé la raison de la suite géométrique  $(u_n)_{n \in I}$ .

Et dans ce cas on a les formules suivantes :

$$k = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \dots = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0}$$

$$u_n = u_0 k^n = u_1 k^{n-1} = u_p k^{n-p} \text{ avec } p < n.$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

$$u_{n+1} u_{n-1} = u_n^2$$

Trois nombres réels  $a, b, c$  forment une progression géométrique si, et seulement si, on a :  $ac = b^2$ .

Remarque :

Les suites géométriques de nombres complexes se définissent comme les suites géométriques de nombres réels, avec  $u_n \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C}$ .

### III. PROPRIÉTÉS :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite de nombres réels. On a les équivalences suivantes :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ majorée} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{I}) : u_n \leq \alpha$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ minorée} \Leftrightarrow (\exists B \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{I}) : B \leq u_n$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ bornée} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ majorée et minorée} \\ \Leftrightarrow (\exists \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{I}) : \beta \leq u_n \leq \alpha$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ stationnaire} \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{I}) : u_n = u_p \text{ pour tout } n \geq p.$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ convergente} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}.$$

### IV. ÉTUDE DE LA SUITE $(a^n)$ , AVEC $a \in \mathbb{R}^*$ :

$$\text{Si } a \in ]1, +\infty[ \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

$$\text{Si } a \in ]-1, 1[ \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Si  $a = 1$  alors la suite  $(a^n)$  est une suite constante et prend la valeur 1.

Si  $a = -1$  alors la suite  $(a^n)$  est une suite alternée et prend la valeur 1 ou  $-1$ .

Si  $a \in ]-\infty, -1[$ , alors  $(a^n) = (-1)^n (-a)^n$  avec  $-a > 1$  et par conséquent  $a^n$  n'a pas de limite.

Conclusion :  $(a^n)$  converge  $\Leftrightarrow a \in ]-1, 1[$ .

### EXERCICE 1 :

Déterminer la raison  $r$ , et le terme  $u_3$  d'une suite arithmétique  $(u_n)$  dans chacun des cas suivants :

1)  $u_0 = 4$  et  $u_{24} = 100$

2)  $u_1 = 2$ ,  $u_n = 38$  et  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 260$

3)  $u_0 = 2$  et  $\frac{u_9}{u_4} = 2$

4)  $u_3 + u_4 + u_5 = 6$  et  $u_6 + u_7 + u_8 = 33$

5)  $u_0 = 1$ ,  $u_1^2 + u_3^2 = 20$  et  $(u_n)$  croissante.

6)  $u_0 + u_1 = 2$ ,  $u_0 u_1 = 8$  et  $(u_n)$  décroissante.

### Solutions :

1)  $u_{24} = u_0 + 24r \Leftrightarrow 100 = 4 + 24r \Leftrightarrow r = 4$

Par suite :  $u_3 = u_0 + 3r = 4 + 12 = 16$ .

2)  $S_n = n \frac{u_1 + u_n}{2} \Leftrightarrow 260 = n \frac{2 + 38}{2} \Leftrightarrow n = 13$

Donc :  $u_{13} = 38$ . Or :  $u_{13} = u_1 + 12r \Leftrightarrow 38 = 2 + 12r \Leftrightarrow r = 3$ .

Par conséquent :  $u_3 = u_1 + 2r = 2 + 6 = 8$ .

3)  $\frac{u_9}{u_4} = 2 \Leftrightarrow \frac{u_0 + 9r}{u_0 + 4r} = 2 \Leftrightarrow \frac{2 + 9r}{2 + 4r} = 2 \Leftrightarrow 2 + 9r = 4 + 8r \Leftrightarrow r = 2$

D'où :  $u_3 = u_0 + 3r = 2 + 6 = 8$ .

4)  $u_3 + u_5 = 2u_4$  et  $u_6 + u_8 = 2u_7$ .

Donc :  $u_3 + u_4 + u_5 = 6 \Leftrightarrow 3u_4 = 6 \Leftrightarrow u_4 = 2$ .

Et :  $u_6 + u_7 + u_8 = 33 \Leftrightarrow 3u_7 = 33 \Leftrightarrow u_7 = 11$ .

Mais :  $u_7 = u_4 + 3r \Leftrightarrow 11 = 2 + 3r \Leftrightarrow r = 3$ .

D'où :  $u_3 = u_4 - r = 2 - 3 = -1$ .

5)  $u_1^2 + u_3^2 = 20 \Leftrightarrow (u_0 + r)^2 + (u_0 + 3r)^2 = 20$

$$\Leftrightarrow (1+r)^2 + (1+3r)^2 = 20 \Leftrightarrow 10r^2 + 8r - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5r^2 + 4r - 9 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = -\frac{9}{5}$$

Mais  $(u_n)$  est croissante ; donc :  $r > 0$ .

Par conséquent : la raison est  $r = 1$ .

D'où :  $u_3 = u_0 + 3r = 1 + 3 = 4$ .

6)  $u_0$  et  $u_1$  sont solutions de l'équation (E) :  $X^2 - 2X - 8 = 0$ .

Cette équation admet 2 solutions :  $X = 4$  ou  $X = -2$ .

Or :  $(u_n)$  est décroissante. Donc :  $u_0 > u_1$ .

Par conséquent :  $u_0 = 4$  et  $u_1 = -2$ .

La raison est  $r = u_1 - u_0 = -2 - 4 = -6$ .

Enfin :  $u_3 = u_0 + 3r = 4 - 18 = -14$ .

### EXERCICE 2 :

Soit  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par :

$$\{ u_0 = 0 ; W_0 = a \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \}$$

$$\{ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = a + u_n \text{ et } W_{n+1} = -a + W_n \}$$

On pose :  $s_n = u_n + W_n$  et  $d_n = u_n - W_n$ .

1) Etudier la suite  $(s_n)$ . En déduire la valeur de  $s_n$ .

2) Etudier la suite  $(d_n)$ . Cette suite est-elle croissante ou décroissante ?

Déterminer  $d_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

3) En déduire les expressions de  $u_n$  et de  $W_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

Etudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ . Conclusion.

### Solutions :

1)  $s_{n+1} = u_{n+1} + W_{n+1} = a + u_n - a + W_n = u_n + W_n = s_n$ .

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : s_{n+1} = s_n$ .

D'où :  $(s_n)$  est une suite constante.

Et on a :  $s_n = s_{n-1} = s_{n-2} = \dots = s_1 = s_0 = u_0 + W_0 = a$ .

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : s_n = a$ .

2)  $d_{n+1} = u_{n+1} - W_{n+1} = a + u_n + a - W_n = 2a + d_n$

Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : d_{n+1} = 2a + d_n$ .

D'où :  $(d_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 2a$ .

Si  $a > 0$ , alors  $r > 0$  et la suite  $(d_n)$  sera croissante.

Si  $a < 0$ , alors  $r < 0$  et la suite  $(d_n)$  sera décroissante.

Enfin :  $d_n = d_0 + nr = -a + 2na = a(2n - 1)$ .

$$\begin{cases} 3) u_n + W_n = s_n = a \\ u_n - W_n = d_n = a(2n - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n = a + a(2n - 1) = 2an \\ \Rightarrow u_n = an \end{cases}$$

Par conséquent :  $W_n = a - u_n = a - an = a(1 - n)$ .

$$\text{Enfin : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} an = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Et : } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a(1 - n) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Conclusion :  $(\forall a \in \mathbb{R}^*)$ ,  $(u_n)$  et  $(W_n)$  ne convergent pas.

### EXERCICE 3

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : u_n = 2a u_{n-1} - b u_{n-2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : W_n = \alpha^n u_n \end{cases}$$

1) Déterminer  $b$  et  $\alpha$  en fonction de  $a$  pour que l'on ait :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : W_{n+1} - W_n = W_n - W_{n-1}.$$

2) On pose :  $b = a^2$  et  $\alpha = \frac{1}{a}$ .

Soit  $T_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$  et  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

i) Déterminer  $W_n$ ,  $u_n$  et  $T_n$  en fonction de  $a$  et de  $n$  sachant que :  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 2a$ .

j) Déterminer  $W_n$ ,  $u_n$ ,  $T_n$  et  $S_n$  en fonction de  $a$  et  $n$  sachant que :  $u_0 = 1$  et  $u_1 = a$  avec  $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ .

### Solutions :

$$\begin{aligned} 1) \quad W_n - W_{n-1} &= \alpha^n u_n - \alpha^{n-1} u_{n-1} \\ W_{n+1} - W_n &= \alpha^{n+1} u_{n+1} - \alpha^n u_n \\ &= \alpha^{n+1} (2a u_n - b u_{n-1}) - \alpha^n u_n \\ &= \alpha^{n+1} 2a u_n - \alpha^{n+1} b u_{n-1} - \alpha^n u_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : W_{n+1} - W_n &= W_n - W_{n-1} \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2\alpha^n u_n (\alpha a - 1) - \alpha^{n-1} u_{n-1} (b\alpha^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a - 1 = 0 \\ b\alpha^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{a} \\ b = \frac{1}{\alpha^2} = a^2 \end{cases}$$

2) i)  $b = a^2$  et  $\alpha = \frac{1}{a}$ . Ce sont les valeurs trouvées dans la question 1).

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : W_{n+1} - W_n = W_n - W_{n-1}.$$

$$\text{Par conséquent : } W_{n+1} - W_n = W_n - W_{n-1} = \dots = W_1 - W_0 = 2a.$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) : W_{n+1} = W_n + 2a.$$

Par conséquent :  $(W_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 2a$ .

$$\text{Donc : } W_n = W_0 + nr = 2an.$$

$$\text{En plus : } W_n = \frac{1}{a^n} u_n \Leftrightarrow u_n = a^n W_n = 2na^{n+1}.$$

$$\text{Enfin : } T_n = (n+1) \frac{W_0 + W_n}{2} = (n+1) \frac{2an}{2} = an(n+1).$$

j) Encore :  $b = a^2$  et  $\alpha = \frac{1}{a}$ .

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : W_{n+1} - W_n = W_n - W_{n-1}.$$

$$\text{Par conséquent : } W_{n+1} - W_n = W_n - W_{n-1} = \dots = W_1 - W_0 = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) : W_{n+1} = W_n.$$

Par conséquent :  $(W_n)$  est une suite constante.

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) : W_n = W_{n-1} = \dots = W_1 = W_0 = 1.$$

$$\text{En plus : } W_n = \frac{1}{a^n} u_n \Leftrightarrow u_n = a^n W_n = a^n.$$

$$\text{Enfin : } T_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

### EXERCICE 4 :

Déterminer la raison  $k$  et le terme  $u_3$  d'une suite géométrique  $(u_n)$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $u_0 = 3$  et  $u_5 = -96$
- 2)  $(u_n)$  croissante,  $u_1 = 3$  et  $u_5 = 48$
- 3)  $(u_n)$  décroissante,  $u_4 - 16u_8 = 0$  et  $u_2 = 4$
- 4)  $u_4 + 8u_7 = 0$  et  $u_5 = 3$
- 5)  $(u_n)$  croissante ;  $u_5 = 2$  et  $u_5 + u_6 + u_7 = 14$
- 6)  $u_1 > u_0$  ;  $u_0 + u_1 = -2$  et  $u_0 u_1 = -3$
- 7)  $u_0 u_1 u_2 = -8$  et  $u_3 u_4 u_5 = 128\sqrt{2}$
- 8)  $u_0 u_1 u_2 = -8$  ;  $u_4 u_5 u_6 = -512$  et  $(u_n)$  est une suite alternée.

### Solutions :

$$1) \quad u_5 = u_0 k^5 \Leftrightarrow k^5 = \frac{u_5}{u_0} = \frac{-96}{3} = -32 = (-2)^5 \Leftrightarrow k = -2$$

$$\text{D'où : } u_3 = u_0 k^3 = 3(-2)^3 = -24$$

$$2) \quad u_5 = u_1 k^4 \Leftrightarrow k^4 = \frac{u_5}{u_1} = \frac{48}{3} = 16 \Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = -2$$

Mais  $(u_n)$  croissante. Donc :  $k > 1$ . D'où :  $k = 2$

$$\text{Par conséquent : } u_3 = u_1 k^2 = 3 \times 4 = 12$$

$$3) \quad u_4 - 16u_8 = 0 \Leftrightarrow u_4 = 16u_8 \Leftrightarrow u_8 = \frac{1}{16} u_4.$$

$$\text{Mais : } u_8 = u_4 k^4. \text{ Donc : } k^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \text{ ou } k = -\frac{1}{2}.$$

Mais  $(u_n)$  décroissante. D'où :  $k \in ]0, 1[$ . Par conséquent :  $k = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Enfin : } u_3 = k u_2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\begin{aligned} 4) \quad u_4 + 8u_7 = 0 &\Leftrightarrow u_4 + 8u_4 k^3 = 0 \Leftrightarrow u_4 (1 + 8k^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 8k^3 = 0 \text{ car } u_4 \neq 0 \text{ car } (u_n) \text{ géométrique.} \\ &\Leftrightarrow k^3 = -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } u_3 = \frac{u_5}{k^2} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

$$5) \quad u_5 + u_6 + u_7 = 14 \Leftrightarrow u_6 + u_7 = 12. \quad (E)$$

$$\text{Mais : } u_6 = k u_5 = 2k \text{ et } u_7 = u_5 k^2 = 2k^2$$

$$\text{D'où : } (E) \Leftrightarrow 2k + 2k^2 = 12 \Leftrightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = -3$$

Mais :  $(u_n)$  croissante. Donc :  $k > 1$ . D'où :  $k = 2$ .

$$\text{Enfin : } u_3 = \frac{u_5}{k^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6)  $u_0$  et  $u_1$  sont solutions de l'équation: (E):  $X^2 + 2X - 3 = 0$ .  
 Cette équation admet 2 solutions:  $X_1 = 1$  et  $X_2 = -3$ .  
 Mais:  $u_1 > u_0$ . D'où:  $u_0 = -3$  et  $u_1 = 1$ .  
 Donc:  $k = \frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{3}$ . Et:  $u_3 = u_1 k^2 = \frac{1}{9}$ .

7)  $u_0 u_1 u_2 = -8 \Leftrightarrow u_1^3 = -8 \Leftrightarrow u_1 = -2$   
 $u_3 u_4 u_5 = 128\sqrt{2} \Leftrightarrow u_4^3 = 128\sqrt{2} \Leftrightarrow u_4 = 4\sqrt{2}$   
 Mais:  $u_4 = u_1 k^3 \Leftrightarrow k^3 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{4\sqrt{2}}{-2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -\sqrt{2}$ .  
 Enfin:  $u_3 = \frac{u_4}{k} = \frac{4\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -4$ .

Ou encore:  $u_3 = u_1 k^2 = -2 \times 2 = -4$

8)  $u_0 u_1 u_2 = -8 \Leftrightarrow u_1^3 = -8 \Leftrightarrow u_1 = -2$   
 $u_4 u_5 u_6 = -512 \Leftrightarrow u_5^3 = -512 = (-8)^3 \Leftrightarrow u_5 = -8$

Mais:  $u_5 = u_1 k^4 \Leftrightarrow k^4 = \frac{u_5}{u_1} = \frac{-8}{-2} = 4 \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$  ou  $k = -\sqrt{2}$

Or:  $(u_n)$  est une suite alternée, c'est-à-dire un terme positif et un terme négatif, c'est-à-dire encore  $u_{n+1}$  et  $u_n$  sont des signes contraires.  
 Donc:  $k < 0$ . Par conséquent:  $k = -\sqrt{2}$ .  
 Enfin:  $u_3 = u_1 k^2 = -2 \times 2 = -4$ .

### EXERCICE 5:

Soient  $a$  et  $b$  des réels donnés. Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies

$$\text{par: } \begin{cases} u_0 = 1; W_0 = 3 \\ u_{n+1} = a u_n + b W_n \\ W_{n+1} = b u_n + a W_n \end{cases}$$

On pose:  $x_n = u_n + W_n$   
 $y_n = u_n - W_n$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la suite  $(x_n)$  soit géométrique de raison 8 et que la suite  $(y_n)$  soit géométrique de raison 2.

Pour ces valeurs trouvées de  $a$  et  $b$ , calculer en fonction de  $n$ :

- 1)  $u_n$  et  $W_n$
- 2)  $s_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$   
 $t_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$
- 3)  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
 $T_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$

### Solutions:

$$x_{n+1} = u_{n+1} + W_{n+1} = a u_n + b W_n + b u_n + a W_n = (a+b) u_n + (a+b) W_n \\ = (a+b) (u_n + W_n) = (a+b) x_n$$

Donc:  $(x_n)$  est une suite géométrique de raison  $a+b$ .

D'où:  $a+b = 8$ .

$$\text{De même: } y_{n+1} = u_{n+1} - W_{n+1} = a u_n + b W_n - b u_n - a W_n \\ = (a-b) u_n + (b-a) W_n = (a-b) (u_n - W_n) = (a-b) y_n$$

Donc:  $(y_n)$  est une suite géométrique de raison  $a-b$ .

D'où:  $a-b = 2$ .

Conclusion: on a:  $\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5 \text{ et } b=3$ .

$$1) \begin{cases} x_n = u_n + W_n \\ y_n = u_n - W_n \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ et } W_n = \frac{x_n - y_n}{2}$$

Mais:  $x_n = x_0 8^n = 4(8^n)$

Et:  $y_n = y_0 2^n = -2(2^n)$

$$\text{D'où: } u_n = \frac{4(8^n) - 2(2^n)}{2} = 2 \times 8^n - 2^n$$

$$\text{Et: } W_n = \frac{4(8^n) + 2(2^n)}{2} = 2 \times 8^n + 2^n$$

$$2) s_n = x_0 \frac{1-8^{n+1}}{1-8} = \frac{4}{7} (8^{n+1} - 1)$$

$$t_n = y_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2(1-2^{n+1})$$

$$3) s_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ = u_0 + W_0 + u_1 + W_1 + \dots + u_n + W_n = S_n + T_n$$

$$t_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n \\ = u_0 - W_0 + u_1 - W_1 + \dots + u_n - W_n = S_n - T_n$$

$$\text{D'où: } \begin{cases} S_n + T_n = s_n \\ S_n - T_n = t_n \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{s_n + t_n}{2} \text{ et } T_n = \frac{s_n - t_n}{2}$$

$$\text{Par conséquent: } S_n = \frac{2}{7} 8^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{5}{7}$$

$$T_n = \frac{2}{7} 8^{n+1} + 2^{n+1} - \frac{9}{7}$$

### EXERCICE 6:

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par:

$$\begin{cases} u_0 = 0; W_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 4a^{n+1} - a u_{n-1} \text{ et } W_n = 2a^{n+1} \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $u_n - W_n$  en fonction de  $u_{n-1} - W_{n-1}$
- 2) En déduire l'expression de  $u_n - W_n$  en fonction de  $a$  et  $n$
- 3) En déduire enfin l'expression de  $u_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  pour  $a \in ]-1, 1[ - \{0\}$ .

### Solutions:

$$1) u_n - W_n = 4a^{n+1} - a u_{n-1} - 2a^{n+1} \\ = 2a^{n+1} - a u_{n-1} = a(W_{n-1} - u_{n-1}).$$

$$\text{Donc: } (\forall n \in \mathbb{N}^*): u_n - W_n = -a(u_{n-1} - W_{n-1}).$$

2) Si on pose  $T_n = u_n - W_n$  alors on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*): T_n = -a T_{n-1}$$

Donc  $(T_n)$  est une suite géométrique de raison  $(-a)$ .

$$\text{D'où: } T_n = T_0 (-a)^n = -a(-a)^n = (-a)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion: } u_n - W_n = (-a)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad u_n &= W_n + (-a)^{n+1} = 2a^{n+1} + (-a)^{n+1} \\
 &= 2a^{n+1} + (-1)^{n+1}a^{n+1} = a^{n+1}(2 + (-1)^{n+1}) \\
 &= \begin{cases} 3a^{n+1} & \text{si } n \text{ est impair} \\ a^{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \\
 \text{D'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha a^{n+1} \text{ avec } \alpha = 3 \text{ ou } 1 \\
 &= 0 \text{ pour } a \in ]-1, 1[ - \{0\}
 \end{aligned}$$

**EXERCICE 7:**

Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0 ; u_1 = a^2 \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\} \\
 u_n &= b u_{n-1} - a^2 u_{n-2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \\
 W_n &= u_n - u_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

1) Déterminer  $b$  en fonction de  $a$  pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique ; et préciser alors sa raison.

2) On suppose :  $b = a^2 + 1$ . Déterminer alors  $W_n$  et  $u_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Conclusion.

**Solutions :**

$$\begin{aligned}
 1) \quad W_{n+1} &= u_{n+1} - u_n = b u_n - a^2 u_{n-1} - u_n \\
 &= (b - 1) u_n - a^2 u_{n-1} \\
 &= (b - 1) \left( u_n - \frac{a^2}{b - 1} u_{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

Pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique, il suffit que l'on ait :

$$\frac{a^2}{b - 1} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b - 1 \Leftrightarrow b = a^2 + 1.$$

Et dans ce cas : on a :  $W_{n+1} = a^2 (u_n - u_{n-1}) = a^2 W_n$ .

Conclusion : Si  $b = a^2 + 1$  alors la suite  $(W_n)$  est géométrique de raison  $k = a^2$ .

*Autre méthode :*

$$\begin{aligned}
 W_{n+1} &= u_{n+1} - u_n = b u_n - a^2 u_{n-1} - u_n = (b - 1) u_n - a^2 u_{n-1} \\
 \text{Or: } (W_n) &\text{ est géométrique } \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^*) : W_{n+1} = k W_n = k(u_n - u_{n-1})
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } (b - 1) u_n - a^2 u_{n-1} = k u_n - k u_{n-1}$$

$$\text{C'est-à-dire: } (b - 1 - k) u_n + (k - a^2) u_{n-1} = 0$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{cases} b - 1 - k = 0 \\ k - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a^2 \\ b = 1 + k = 1 + a^2. \end{cases}$$

2)  $b = a^2 + 1$  ; c'est la valeur trouvée dans la question 1).

Donc : la suite  $(W_n)$  est géométrique de raison  $k = a^2$ .

$$\text{D'où: } W_n = W_1 k^{n-1} = (u_1 - u_0) (a^2)^{n-1} = (a^2)^n = a^{2n}$$

D'autre part : on a :

$$W_n = u_n - u_{n-1}$$

$$W_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$W_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_2 = u_2 - u_1$$

$$W_1 = u_1 - u_0$$

La somme membre à membre donne :

$$u_n - u_0 = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

$$= W_1 \frac{1 - k^n}{1 - k} = a^2 \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2}$$

$$\text{Conclusion: } u_n = a^2 \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2} \text{ car } u_0 = 0$$

$$\text{Enfin, si } a \in ]-1, 1[ - \{0\} \text{ alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a^2}{1 - a^2}$$

$$\text{Et si } a \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \text{ alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Conclusion : Les suites  $(u_n)$  et  $(W_n)$  convergent seulement pour  $a \in ]-1, 1[ - \{0\}$ .

**EXERCICE 8:**

Soit  $(u_n)$  une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{a + u_n}{1 + a u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$

2) Soit  $(W_n)$  la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : W_n = \frac{u_n - b}{u_n + b} \text{ avec } b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Déterminer  $b$  pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique ; et préciser alors sa raison en fonction de  $a$ .

3) On pose :  $a = 3$  et  $b = 1$ .

a) Déterminer alors  $W_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

b) En déduire aussi  $u_n$  en fonction de  $n$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

c) Déterminer  $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$  en fonction de  $n$ .

4) On suppose  $a$  quelconque dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $b = 1$ . Déterminer alors  $W_n$ ,  $u_n$  et  $S_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

**Solutions :**

$$1) \quad u_0 = a > 0 ; u_1 = \frac{a + u_0}{1 + a u_0} = \frac{2a}{1 + a^2} > 0 \text{ car } a > 0$$

$$\text{Supposons } u_n > 0. \text{ On a: } u_{n+1} = \frac{a + u_n}{1 + a u_n} > 0 \text{ car } a > 0 \text{ et } u_n > 0.$$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .

$$\begin{aligned}
 2) \quad W_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - b}{u_{n+1} + b} = \frac{\frac{a + u_n}{1 + a u_n} - b}{\frac{a + u_n}{1 + a u_n} + b} = \frac{a + u_n - b - b a u_n}{a + u_n + b + b a u_n} \\
 &= \frac{(1 - b a) u_n + a - b}{(1 + b a) u_n + a + b} = \frac{1 - b a}{1 + b a} \frac{u_n + \frac{a - b}{1 - b a}}{u_n + \frac{a + b}{1 + b a}}
 \end{aligned}$$

$$(W_n) \text{ géométrique } \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^* - \{1\}) : W_{n+1} = k W_n = k \frac{u_n - b}{u_n + b}$$

Par conséquent, pour que  $(W_n)$  soit géométrique il suffit que l'on ait :

$$\begin{cases} \frac{a-b}{1-ba} = -b \Leftrightarrow a-b = -b + b^2a \Leftrightarrow a(b^2-1) = 0 \\ \frac{a+b}{1+ba} = b \Leftrightarrow a+b = b + b^2a \Leftrightarrow a(b^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a(b^2-1) = 0 \Leftrightarrow b^2-1 = 0 \text{ car } a \neq 0 \\ \Leftrightarrow b = 1 \text{ car } b > 0$$

Conclusion : Si  $b = 1$  alors  $(W_n)$  est géométrique de raison  $k = \frac{1-a}{1+a}$

Autre méthode :

$$\text{On a vu que } W_{n+1} = \frac{(1-ba)u_n + a - b}{(1+ba)u_n + a + b}$$

$$\text{Or : } (W_n) \text{ géométrique } \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^* - \{1\}) : W_{n+1} = k W_n = \frac{k u_n - k b}{u_n + b}$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{(1-ba)u_n + a - b}{(1+ba)u_n + a + b} = \frac{k u_n - k b}{u_n + b}$$

$$\text{C'est-à-dire : } [(1-ba)u_n + a - b](u_n + b) = [(1+ba)u_n + a + b](k u_n - k b) \\ \Leftrightarrow (1-ba)u_n^2 + a(1-b^2)u_n + b(a-b) = (1+ba)k u_n^2 + k a(1-b^2)u_n - k b(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-ba = (1+ba)k \Leftrightarrow k = \frac{1-ba}{1+ba} \\ a(1-b^2) = k a(1-b^2) \Leftrightarrow a(1-k)(1-b^2) = 0 \\ b(a-b) = -k b(a+b) \Leftrightarrow k = \frac{b-a}{b+a} \end{cases}$$

Considérons la 2<sup>ème</sup> équation. On sait que :  $a \neq 0$ ,  $k \neq 1$  et  $b > 0$ .

Donc la 2<sup>e</sup> équation est équivalente à :  $b = 1$

Et par conséquent, la 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> équations donnent alors :  $k = \frac{1-a}{1+a}$

3)  $a = 3$  et  $b = 1$ . Donc  $(W_n)$  est géométrique de raison  $k = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$

$$\text{a) : } W_n = W_0 k^n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ car } W_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{a-1}{a+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } W_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n W_n + W_n = u_n - 1 \\ \Leftrightarrow u_n(W_n - 1) = -W_n - 1 \\ \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + W_n}{1 - W_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{c) : } S_n = W_0 \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

4)  $a$  quelconque dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $b = 1$  Donc  $(W_n)$  est géométrique de raison  $k = \frac{1-a}{1+a}$

et de 1<sup>er</sup> terme  $W_0 = \frac{a-1}{a+1} = -k$ .

$$\text{D'où : } W_n = W_0 k^n = -k k^n = -k^{n+1} = -\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}$$

$$u_n = \frac{1 + W_n}{1 - W_n} = \frac{1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}$$

$$S_n = W_0 \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = \frac{a-1}{2a} \left[1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right]$$

### EXERCICE 9 :

Soit  $a \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}$ . Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$U_n = n a^{2n-2} \text{ et } W_n = \frac{n}{a^{2n+1}}$$

$$\text{Soit } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ T_n = W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} + W_n$$

- 1) Calculer  $S_n - a^2 S_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ . En déduire  $S_n$
- 2) Calculer  $a^2 T_n - T_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ . En déduire  $T_n$ .
- 3) En déduire enfin, en fonction de  $a$  et  $n$ , les expressions de :

$$A_n = 2 + 2 \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 3 \left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) + \dots + n \left(a^{2n-2} + \frac{1}{a^{2n-2}}\right)$$

$$B_n = 2 \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + 3 \left(a^4 - \frac{1}{a^4}\right) + \dots + n \left(a^{2n-2} - \frac{1}{a^{2n-2}}\right)$$

### Solutions :

$$\text{1) } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ = 1 + 2a^2 + 3a^4 + \dots + (n-1)a^{2n-4} + n a^{2n-2} \\ a^2 S_n = a^2 + 2a^4 + 3a^6 + \dots + (n-1)a^{2n-2} + n a^{2n}$$

$$\text{Donc : } S_n - a^2 S_n = 1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2} - n a^{2n} \\ = [1 + a^2 + (a^2)^2 + \dots + (a^2)^{n-1}] - n a^{2n} \\ = \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2} - n a^{2n}$$

$$\text{Mais : } S_n - a^2 S_n = S_n (1 - a^2). \text{ Donc : } S_n = \frac{1 - a^{2n}}{(1 - a^2)^2} - \frac{n a^{2n}}{1 - a^2}$$

$$\text{2) } T_n = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_{n-1} + W_n \\ = \frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^5} + \frac{3}{a^7} + \dots + \frac{n-1}{a^{2n-1}} + \frac{n}{a^{2n+1}}$$

$$\text{Donc : } a^2 T_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^5} + \dots + \frac{n}{a^{2n-1}}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où: } a^2 T_n - T_n &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots + \frac{1}{a^{2n-1}} - \frac{n}{a^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2n-2}} \right] - \frac{n}{a^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-1} \right] - \frac{n}{a^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{a} \frac{1 - \left(\frac{1}{a^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{a^2}} - \frac{n}{a^{2n+1}} \\
&= a \frac{1 - \frac{1}{a^{2n}}}{a^2 - 1} - \frac{n}{a^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Mais:  $a^2 T_n - T_n = (a^2 - 1) T_n$ .

Donc:  $T_n = a \frac{1 - \frac{1}{a^{2n}}}{(a^2 - 1)^2} - \frac{n}{(a^2 - 1) a^{2n+1}}$

$$\begin{aligned}
3) A_n &= 2 + 2a^2 + \frac{2}{a^2} + 3a^4 + \frac{3}{a^4} + \dots + n a^{2n-2} + \frac{n}{a^{2n-2}} \\
&= (1 + 2a^2 + 3a^4 + \dots + n a^{2n-2}) + \left(1 + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^4} + \dots + \frac{n}{a^{2n-2}}\right) \\
&= S_n + a^3 T_n = \frac{1 + a^4 - a^{2n} - a^{4-2n}}{(1 - a^2)^2} - \frac{n(a^{2n} - a^{2-2n})}{1 - a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= 2a^2 - \frac{2}{a^2} + 3a^4 - \frac{3}{a^4} + \dots + n a^{2n-2} - \frac{n}{a^{2n-2}} \\
&= (2a^2 + 3a^4 + \dots + n a^{2n-2}) - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^4} + \dots + \frac{n}{a^{2n-2}}\right) \\
&= (S_n - 1) - (a^3 T_n - 1) = S_n - a^3 T_n \\
&= \frac{1 - a^4 - a^{2n} + a^{4-2n}}{(a^2 - 1)^2} + \frac{n(a^{2n} + a^{2-2n})}{a^2 - 1}
\end{aligned}$$

**EXERCICE 10:**

Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites définies par:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 ; u_1 = -a \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \\
u_n &= 2a^2 u_{n-2} - a u_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \\
W_n &= u_n - a u_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

- 1) Démontrer que  $(W_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison en fonction de  $a$ .
- 2) Déterminer alors  $W_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .
- 3) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ .

**Solutions:**

$$\begin{aligned}
1) W_{n+1} &= u_{n+1} - a u_n = 2a^2 u_{n-1} - a u_n - a u_n \\
&= 2a^2 u_{n-1} - 2a u_n = -2a(u_n - a u_{n-1}) \\
&= -2a W_n
\end{aligned}$$

Donc:  $(W_n)$  est une suite géométrique de raison  $k = -2a$ .

$$\begin{aligned}
2) W_n &= W_1 k^{n-1} = -2a (-2a)^{n-1} = (-2a)^n \\
3) u_n - a u_{n-1} &= (-2a)^n \\
u_{n-1} - a u_{n-2} &= (-2a)^{n-1} \\
u_{n-2} - a u_{n-3} &= (-2a)^{n-2} \\
&\dots \\
u_2 - a u_1 &= (-2a)^2 \\
u_1 - a u_0 &= -2a
\end{aligned}$$

Pour que la somme membre à membre se simplifie et donne  $u_n$ , il faut multiplier les termes de chaque équation par un coefficient bien déterminé. En effet, ce système est équivalent au système suivant:

$$\begin{aligned}
u_n - a u_{n-1} &= (-2a)^n = (-2)^n a^n \\
a u_{n-1} - a^2 u_{n-2} &= a(-2a)^{n-1} = (-2)^{n-1} a^n \\
a^2 u_{n-2} - a^3 u_{n-3} &= a^2(-2a)^{n-2} = (-2)^{n-2} a^n \\
&\dots \\
a^{n-2} u_2 - a^{n-1} u_1 &= a^{n-2} (-2a)^2 = (-2)^2 a^n \\
a^{n-1} u_1 - a^n u_0 &= a^{n-1} (-2a) = (-2) a^n
\end{aligned}$$

La somme membre à membre se simplifie maintenant et donne:

$$\begin{aligned}
u_n - a^n u_0 &= a^n [(-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^n] \\
\text{D'où: } u_n - a^n &= -2a^n [1 + (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{n-1}] \\
&= -2a^n \frac{1 - (-2)^n}{1 + 2} = -\frac{2}{3} a^n [1 - (-2)^n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc: } u_n &= a^n - \frac{2}{3} a^n [1 - (-2)^n] \\
&= \frac{a^n}{3} [1 - (-2)^{n+1}]
\end{aligned}$$

**EXERCICE 11:**

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(W_n)$  définies par:

$$u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = 0$$

$$u_n = b(u_{n-1} + u_{n-2}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$W_n = a^n (u_n - u_{n-1}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et avec } a \in \mathbb{R}^*$$

- 1) Déterminer  $b$  pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique; et préciser alors sa raison en fonction de  $a$ .
- 2) On suppose  $b = \frac{1}{2}$ . Déterminer alors  $W_n$  et  $u_n$  en fonction de  $a$  et  $n$ . En déduire

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Conclusion.

**Solutions:**

$$\begin{aligned}
1) W_{n+1} &= a^{n+1} (u_{n+1} - u_n) = a^{n+1} (b u_n + b u_{n-1} - u_n) \\
&= a^{n+1} [(b-1) u_n + b u_{n-1}].
\end{aligned}$$

Or: la suite  $(W_n)$  est géométrique si et seulement si il existe  $k$  appartenant à  $\mathbb{R}^* - \{1\}$  tel que l'on ait:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : W_{n+1} = k W_n = k a^n (u_n - u_{n-1}).$$

$$\text{D'où: } a^{n+1} [(b-1) u_n + b u_{n-1}] = k a^n (u_n - u_{n-1})$$

Ce qui donne :

$$a[(b-1)u_n + b u_{n-1}] = k(u_n - u_{n-1}) \text{ car } a \neq 0$$

C'est-à-dire encore : ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$a(b-1)u_n + ab u_{n-1} = k u_n - k u_{n-1}$$

$$D'où : \begin{cases} a(b-1) = k \\ ab = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(b-1) = -ab \\ k = -ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-1 = -b \text{ car } a \neq 0 \\ k = -ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2}a \end{cases}$$

Conclusion :  $(W_n)$  est géométrique si, et seulement si,  $b = \frac{1}{2}$ . Et dans ce cas sa raison

$$\text{est } k = -\frac{1}{2}a.$$

2)  $b = \frac{1}{2}$ . C'est la valeur trouvée dans la 1<sup>ère</sup> question.

Donc :  $(W_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}a$ .

$$D'où : W_n = W_1 k^{n-1} = -\frac{1}{2}a \left(-\frac{1}{2}a\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}a\right)^n$$

Pour déterminer  $u_n$ , considérons le système suivant :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{W_n}{a^n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n a^n}{a^n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$u_{n-1} - u_{n-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

.....

$$u_2 - u_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_1 - u_0 = -\frac{1}{2}$$

La somme membre à membre se simplifie et donne :

$$\begin{aligned} u_n - u_0 &= \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \left( 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{6}$ . La suite  $(u_n)$  est convergente.

## EXERCICE 12 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par la relation :

$$(E) : (\forall n \in \mathbb{N}) : 5u_{n+1} = 4u_n + 1.$$

Soit  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

1) On suppose  $u_0 = 1$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . En déduire  $u_n$ . Conclusion ?

2) On suppose  $u_0 = 2$ . Soit  $(W_n)$  la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : W_n = u_n + a \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Déterminer  $a$  pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique et préciser alors sa raison.

En déduire  $W_n$ ,  $u_n$  et  $S_n$  en fonction de  $n$ .

3) On suppose  $u_0 = 2$ . Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $k$  tel que l'on ait :

$$u_{n+1} - \alpha = k(u_n - \alpha). \text{ En déduire une autre méthode pour calculer } u_n.$$

4) On suppose  $u_0 = 2$ . En utilisant seulement la relation (E) qui s'écrit aussi :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) : u_{p+1} = \frac{4}{5}u_p + \frac{1}{5}, \text{ et en donnant à } p \text{ les valeurs } (n-1), (n-2), \dots, 1, 0,$$

déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Solutions :

$$1) u_0 = 1 ; u_1 = \frac{4}{5}u_0 + \frac{1}{5} = 1 ; u_2 = \frac{4}{5}u_1 + \frac{1}{5} = 1.$$

$$\text{Supposons } u_n = 1. \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1$ .

Donc :  $(u_n)$  est une suite constante.

$$2) W_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5} + a.$$

Or :  $(W_n)$  est géométrique  $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^* - \{1\}) : W_{n+1} = k W_n$

$$D'où : \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5} + a = k u_n + k a \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cette égalité est équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{4}{5} = k \\ \frac{1}{5} + a = k a = \frac{4}{5}a \Leftrightarrow a = -1 \end{cases}$$

Conclusion : la suite  $(W_n)$  est géométrique si et seulement si  $a = -1$  ; et dans ce cas,

sa raison est  $k = \frac{4}{5}$

$$W_n = W_0 k^n = (u_0 - 1) \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$W_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = W_n + 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1.$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= W_0 + 1 + W_1 + 1 + W_2 + 1 + \dots + W_n + 1.$$

$$= (n+1) + (W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n)$$

$$= (n+1) + \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = (n+1) + 5 \left( 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \right)$$

$$= 6 + n - 5 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = 6 + n - 4 \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3) u_{n+1} - \alpha = k(u_n - \alpha) \Leftrightarrow \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5} - \alpha = k u_n - k \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} = k \\ \frac{1}{5} - \alpha = -k\alpha = -\frac{4}{5}\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 1 = \frac{4}{5}(u_n - 1)$ .

A partir de cette formule il y a 2 méthodes pour déterminer  $u_n$ .

1<sup>ère</sup> méthode :

Posons :  $V_n = u_n - 1$ . Donc :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_{n+1} = \frac{4}{5}V_n$ .

D'où :  $(V_n)$  est géométrique de raison  $\frac{4}{5}$ .

Par conséquent :  $V_n = V_0 \left(\frac{4}{5}\right)^n = (u_0 - 1) \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Mais :  $V_n = u_n - 1$ . Donc :  $u_n = V_n + 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1$ .

2<sup>e</sup> méthode :

$$u_n - 1 = \frac{4}{5}(u_{n-1} - 1)$$

$$u_{n-1} - 1 = \frac{4}{5}(u_{n-2} - 1)$$

$$u_{n-2} - 1 = \frac{4}{5}(u_{n-3} - 1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_2 - 1 = \frac{4}{5}(u_1 - 1)$$

$$u_1 - 1 = \frac{4}{5}(u_0 - 1)$$

Le produit membre à membre se simplifie et donne :

$$u_n - 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n (u_0 - 1) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1.$$

$$4) u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$$

$$u_{n-1} = \frac{4}{5}u_{n-2} + \frac{1}{5}$$

$$u_{n-2} = \frac{4}{5}u_{n-3} + \frac{1}{5}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_2 = \frac{4}{5}u_1 + \frac{1}{5}$$

$$u_1 = \frac{4}{5}u_0 + \frac{1}{5}$$

Pour que la somme membre à membre se simplifie et donne  $u_n$ , il faut multiplier les termes de chaque équation par un coefficient bien déterminé. En effet, ce système est équivalent au système suivant :

$$u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5}u_{n-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 u_{n-2} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 u_{n-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 u_{n-3} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} u_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} u_1 + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} u_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^n u_0 + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

La somme membre à membre se simplifie et donne :

$$u_n = \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right] + \left(\frac{4}{5}\right)^n u_0$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}} + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ car } u_0 = 2$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1.$$

**EXERCICE 13 :**

On considère trois nombres complexes :

$$z_1 = -3i ; z_2 = \sqrt{3} - i ; z_3 = \frac{2}{3}(\sqrt{3} + i).$$

1) Démontrer que  $z_1, z_2$  et  $z_3$  pris dans cet ordre, constituent les 3 premiers termes d'une suite géométrique de nombres complexes  $(u_n)$  dont on déterminera le 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et la raison  $k$ .

2) Calculer le 17<sup>e</sup> terme (donner le résultat final sous forme algébrique  $a + ib$  avec  $a$  et  $b$  des réels).

3) a) Ecrire le terme général  $u_n$  de cette suite.

b) En déduire  $n$  tel que  $u_n$  soit imaginaire pur

c) En déduire aussi  $|u_n|$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|$

**Solutions :**

$$1) z_1 z_3 = -3i \frac{2}{3}(\sqrt{3} + i) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$z_2^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 1 - 2i\sqrt{3} = 2 - 2i\sqrt{3}$$

Donc :  $z_1 z_3 = z_2^2$ . Par conséquent :  $z_1, z_2$  et  $z_3$  pris dans cet ordre constituent les 3 premiers termes d'une suite géométrique de nombres complexes de 1<sup>er</sup> terme

$$u_0 = z_1 = -3i \text{ et de raison } k = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3} - i}{-3i} = \frac{i(\sqrt{3} - i)}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{3}$$

2) Puisque le 1<sup>er</sup> terme est  $u_0$ , alors le 17<sup>e</sup> terme est :

$$\begin{aligned} u_{16} &= u_0 k^{16} = -3i \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{3} \right)^{16} = -3i \left[ \frac{2}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^{16} \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left( \cos \frac{16\pi}{3} + i \sin \frac{16\pi}{3} \right) \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left[ \cos \left( 4\pi + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( 4\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^{16} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \frac{2}{3} \right)^{15} (i - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } u_n &= u_0 k^n = -3i \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{3} \right)^n = -3i \left[ \frac{2}{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^n \\ &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right). \\ &= -3 \left( \frac{2}{3} \right)^n \left( i \cos \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Donc : } u_n \text{ imaginaire pur} &\Leftrightarrow \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi \\ &\Leftrightarrow n = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ car } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } u_n &= -3i \left( \frac{2}{3} \right)^n \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ &= -3 \left( \frac{2}{3} \right)^n \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left( \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ &= -3 \left( \frac{2}{3} \right)^n \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{3} \right) \right] \\ &= 3 \left( \frac{2}{3} \right)^n \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{n\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{n\pi}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |u_n| = 3 \left( \frac{2}{3} \right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 3 \times 0 = 0$$

#### EXERCICE 14 :

On considère 3 nombres complexes :

$$a = i\sqrt{3}; b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i); N = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in ]0, \pi[.$$

- Déterminer  $r$  et  $\theta$  pour que les 3 nombres complexes  $a$ ,  $N$  et  $b$  soient dans cet ordre les 3 premiers termes d'une suite géométrique de nombres complexes  $(u_n)$ . En déduire la raison  $k$  de cette suite.
- Déterminer le module et l'argument de  $u_n$ .
- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $u_n$  est réel ?

#### Solutions :

1) Il faut et il suffit que  $a$ ,  $N$ ,  $b$  vérifient la relation suivante :  $N^2 = ab$ .

$$\begin{aligned} \text{Or : } ab &= \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 3 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } N^2 = ab &\Leftrightarrow r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 3 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 3 \Leftrightarrow r = \sqrt{3} \text{ car } r > 0 \\ 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Mais :  $\theta \in ]0, \pi[$ . Donc :  $\theta = \frac{5\pi}{12}$ .

$$\text{Conclusion : } r = \sqrt{3}; \theta = \frac{5\pi}{12}; N = \sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

La raison de cette suite est :

$$\begin{aligned} k = \frac{N}{a} &= \frac{\sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)}{\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \cos \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) u_n &= u_0 k^n = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left[ \cos \left( -\frac{n\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{n\pi}{12} \right) \right] \text{ car } u_0 = a. \\ &= \sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{12} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |u_n| = \sqrt{3} \text{ et } \text{Arg } u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{12} + 2k\pi$$

$$3) u_n \text{ réel} \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{12} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow n = 6 - 12k$$

avec  $k \in (\mathbb{Z}_-)$  c'est-à-dire  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \leq 0$  car  $n \in \mathbb{N}$ .

#### EXERCICE 15 :

Soit  $\alpha = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $(u_n)$  une suite dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{3} - i \\ u_{n+1} = \alpha u_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Ecrire  $\alpha$  sous forme trigonométrique. En déduire  $\alpha^3$ .

2) a) Ecrire  $u_{n+3}$  en fonction de  $u_n$  et  $\alpha$ .

En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+3} = u_n$ .

b) En déduire enfin, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, toutes les valeurs possibles de  $u_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .

3) En calculant  $(u_n)$  sous forme trigonométrique, dites encore comment trouver toutes les valeurs possibles de  $u_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .

4) Soit  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Calculer  $S_2$  et  $S_3$ .

- 5) a) Démontrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_{n+3} = S_n$   
 b) En déduire, sous forme algébrique, toutes les valeurs possibles de  $S_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .  
 c) Donner les valeurs de  $S_{14}$ ,  $S_{16}$  et  $S_{21}$

**Solutions :**

1)  $\alpha = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

Donc :  $\alpha^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

- 2) a)  $(u_n)$  est une suite géométrique de nombres complexes de raison  $\alpha$ .  
 D'une manière générale, si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $k$  alors :  
 $(\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}) : u_n = u_p k^{n-p}$ .  
 Donc :  $u_{n+3} = u_n \alpha^3 = u_n$  car  $\alpha^3 = 1$ .

- b)  $u_{n+3} = u_n$ . Les valeurs possibles de  $u_n$  sont donc :  $u_0, u_1$  et  $u_2$   
 car  $u_3 = u_0, u_4 = u_1, u_5 = u_2, u_6 = u_0, \dots$

Et on a :  $u_0 = \sqrt{3} - i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$   
 $= 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$   
 $: u_1 = \alpha u_0 = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$   
 $= 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$   
 $: u_2 = \alpha u_1 = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$   
 $= 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i$

- 3)  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\alpha$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$ .

Donc :  $u_n = u_0 \alpha^n = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] \left( \cos \frac{n2\pi}{3} + i \sin \frac{n2\pi}{3} \right)$   
 $= 2 \left[ \cos \left( \frac{n2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{n2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$

Pour obtenir toutes les valeurs possibles de  $u_n$  lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ , il suffit de donner à  $n$  les valeurs : 0, 1 et 2 car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

Par conséquent : les valeurs possibles de  $u_n$  sont :  $u_0, u_1$  et  $u_2$  qui sont déjà calculées dans la question précédente.

- 4)  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\alpha$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$ .

Donc :  $S_2 = u_0 \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0$

$S_3 = u_0 \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - \alpha^3 \alpha}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} = u_0 = \sqrt{3} - i$

- 5) a) D'une manière générale, puisque  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\alpha$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$ , on a :

$(\forall p \in \mathbb{N}) : S_p = u_0 \frac{1 - \alpha^{p+1}}{1 - \alpha}$ . Donc :

$S_{n+3} = u_0 \frac{1 - \alpha^{n+4}}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - \alpha^3 \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = S_n$

- b)  $S_{n+3} = S_n$ . Lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ , les valeurs possibles de  $S_n$  sont donc :  $S_0, S_1$  et  $S_2$  car  $S_3 = S_0, S_4 = S_1, S_5 = S_2, \dots$

Et on a :  $S_0 = u_0 = \sqrt{3} - i$

$S_1 = u_0 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha} = u_0 (1 + \alpha) = (\sqrt{3} - i) \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} + i$

$S_2 = u_0 \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha} = u_0 \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0$ .

Conclusion : L'ensemble des valeurs possibles de  $S_n$ , lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ , est :  $\{S_0 = \sqrt{3} - i ; S_1 = \sqrt{3} + i ; S_2 = 0\}$ .

- c)  $S_{n+3} = S_n$ . Donc :  $(\forall p \in \mathbb{N}^*) : S_{3p} = S_0 ; S_{3p+1} = S_1 ; S_{3p+2} = S_2$ .

D'où :  $S_{14} = S_2 = 0$  car  $14 = (3 \times 4) + 2$

$S_{16} = S_1 = \sqrt{3} + i$  car  $16 = (3 \times 5) + 1$

$S_{21} = S_0 = \sqrt{3} - i$  car  $21 = 3 \times 7$

**EXERCICE 16 :**

Soient  $a = \frac{3}{4} + i \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$  et  $b = -\frac{1}{4} + i \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ .

Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites de nombres complexes définies par :

$u_0 = \frac{1}{4} - i \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \right) ; W_0 = \frac{1}{4} - i \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \right)$

$u_{n+1} = a u_n + b W_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$

$W_{n+1} = b u_n + a W_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose :  $x_n = u_n + W_n$  et  $y_n = u_n - W_n$ .

- Calculer  $a + b$  et  $a - b$
- Montrer que  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont des suites géométriques.
- Déterminer  $u_n$  et  $W_n$  sous forme algébrique.
- Calculer :  $s_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$   
 $: t_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$
- En déduire :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
 $: T_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$

**Solutions :**

1)  $a + b = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} ; a - b = 1 + i$

2)  $x_{n+1} = u_{n+1} + W_{n+1} = a u_n + b W_n + b u_n + a W_n$   
 $= (a + b) u_n + (a + b) W_n = (a + b) (u_n + W_n)$   
 $= (a + b) x_n = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x_n$

Donc  $(x_n)$  est une suite géométrique de nombres complexes de raison  $k_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

De même :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= u_{n+1} - W_{n+1} = a u_n + b W_n - b u_n - a W_n \\ &= (a - b) u_n - (a - b) W_n = (a - b) (u_n - W_n) \\ &= (a - b) y_n = (1 + i) y_n \end{aligned}$$

Donc  $(y_n)$  est une suite géométrique de nombres complexes de raison  $k_2 = 1 + i$

$$\begin{aligned} 3) \quad \left. \begin{aligned} x_n &= u_n + W_n \\ y_n &= u_n - W_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 u_n = x_n + y_n \Rightarrow u_n = \frac{x_n + y_n}{2} \\ \text{et } W_n &= \frac{x_n - y_n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais : } x_n &= x_0 k_1^n = (u_0 + W_0) k_1^n = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } y_n &= y_0 k_2^n = (u_0 - W_0) k_2^n = -i (1 + i)^n \\ &= -i (1 + i) (1 + i)^{n-1} = (1 - i) (1 + i)^{n-1} \\ &= (1 - i) (1 + i) (1 + i)^{n-2} = 2 (1 + i)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } u_n = \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + (1 + i)^{n-2}$$

$$W_n = \frac{x_n - y_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - (1 + i)^{n-2}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad s_n &= x_0 \frac{1 - k_1^{n+1}}{1 - k_1} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = 1 - \cos(n+1) \frac{\pi}{3} - i \sin(n+1) \frac{\pi}{3} \\ t_n &= y_0 \frac{1 - k_2^{n+1}}{1 - k_2} = -i \frac{1 - (1+i)^{n+1}}{-i} = 1 - (1+i)^{n+1} \\ &= 1 - (\sqrt{2})^{n+1} \left[ \cos(n+1) \frac{\pi}{4} + i \sin(n+1) \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad s_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_0 + W_0 + u_1 + W_1 + u_2 + W_2 + \dots + u_n + W_n \\ &= (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n) = S_n + T_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } t_n &= y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n \\ &= (u_0 - W_0) + (u_1 - W_1) + (u_2 - W_2) + \dots + (u_n - W_n) \\ &= (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n) \\ &= S_n - T_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \left. \begin{aligned} s_n &= S_n + T_n \\ t_n &= S_n - T_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_n = \frac{s_n + t_n}{2} \text{ et } T_n = \frac{s_n - t_n}{2}$$

$$\text{D'où : } S_n = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} (1 + i)^{n+1}$$

$$T_n = \frac{1}{2} (1 + i)^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

### EXERCICE 17 :

Soient  $(u_n)$  et  $(W_n)$  deux suites dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 u_n - \sqrt{3} W_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ W_{n+1} = \sqrt{3} u_n + 3 W_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit  $(x_n)$  une suite dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n = u_n - i W_n$

1) Montrer que  $(x_n)$  est une suite géométrique et préciser alors sa raison.

2) On suppose  $u_0 = \sqrt{3}$  et  $W_0 = 3$ .

Déterminer  $x_n$  sous forme trigonométrique. En déduire  $u_n$  et  $W_n$ .

3) On suppose  $u_0 = \sqrt{3}$  et  $W_0 = -2$

Calculer  $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$T_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

### Solutions :

$$\begin{aligned} 1) \quad x_{n+1} &= u_{n+1} - i W_{n+1} = 3 u_n - \sqrt{3} W_n - i (\sqrt{3} u_n + 3 W_n) \\ &= (3 - i \sqrt{3}) u_n - (\sqrt{3} + i 3) W_n \\ &= (3 - i \sqrt{3}) u_n - (-i \sqrt{3} + 3) i W_n \\ &= (3 - i \sqrt{3}) (u_n - i W_n) = (3 - i \sqrt{3}) x_n \end{aligned}$$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_{n+1} = (3 - i \sqrt{3}) x_n$

Donc  $(x_n)$  est une suite géométrique de nombres complexes de raison  $k = 3 - i \sqrt{3}$ .

2) Rappelons que l'on a aussi :

$$(\cos \alpha - i \sin \alpha) (\cos \alpha' - i \sin \alpha') = \cos(\alpha + \alpha') - i \sin(\alpha + \alpha')$$

$$\text{et } (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = \cos n \alpha - i \sin n \alpha.$$

D'autre part, puisque  $(x_n)$  est une suite géométrique de nombres complexes de raison  $k = 3 - i \sqrt{3}$ , alors on a :

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 k^n = (u_0 - i W_0) k^n = (\sqrt{3} - i 3) (3 - i \sqrt{3})^n \\ &= 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2\sqrt{3})^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) (2\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}\right) \\ &= (2\sqrt{3})^{n+1} \left[ \cos(n+2) \frac{\pi}{6} - i \sin(n+2) \frac{\pi}{6} \right] \end{aligned}$$

Mais :  $x_n = u_n - i W_n$

$$\text{Donc : } u_n = (2\sqrt{3})^{n+1} \cos(n+2) \frac{\pi}{6}$$

$$\text{et : } W_n = (2\sqrt{3})^{n+1} \sin(n+2) \frac{\pi}{6}$$

$$3) \quad s_n = x_0 \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = (u_0 - i W_0) \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}$$

$$= (\sqrt{3} + 2i) \frac{1 - (3 - i \sqrt{3})^{n+1}}{-2 + i \sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 2i) (-2 - i \sqrt{3}) \frac{1 - (3 - i \sqrt{3})^{n+1}}{4 + 3}$$

$$= -i + i (3 - i \sqrt{3})^{n+1}$$

$$= -i + i (2\sqrt{3})^{n+1} \left[ \cos(n+1) \frac{\pi}{6} - i \sin(n+1) \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= i \left[ -1 + (2\sqrt{3})^{n+1} \cos(n+1) \frac{\pi}{6} \right] + (2\sqrt{3})^{n+1} \sin(n+1) \frac{\pi}{6}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} s_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ &= (u_0 - i W_0) + (u_1 - i W_1) + (u_2 - i W_2) + \dots + (u_n - i W_n) \\ &= (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) - i (W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n) \\ &= S_n - i T_n. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } S_n = (2\sqrt{3})^{n+1} \sin(n+1) \frac{\pi}{6}$$

$$T_n = 1 - (2\sqrt{3})^{n+1} \cos(n+1) \frac{\pi}{6}$$

### EXERCICE 18 :

Soit  $(u_n)$  une suite dans  $\mathbb{C}$  définie par son 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et par la relation :

$$(E) : (\forall n \in \mathbb{N}) : (1+i)u_{n+1} = u_n + 1 + i$$

1) On suppose  $u_0 = 1 - i$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . En déduire  $u_n$ . Conclusion ?

2) On suppose  $u_0 = 2 - i$ . Soit  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

Soit  $(W_n)$  une suite dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : W_n = u_n + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

a) Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(W_n)$  soit géométrique ; et préciser alors sa raison.

b) On pose  $\alpha = i - 1$ . Calculer alors  $W_n, u_n$  et  $S_n$ .

3) On suppose  $u_0 = 2 - i$ . Déterminer les complexes  $k$  et  $d$  tels que l'on ait :

$$u_{n+1} - d = k(u_n - d). \text{ En déduire une autre méthode pour calculer } u_n.$$

4) On suppose  $u_0 = 2 - i$ . En utilisant seulement la relation (E) qui s'écrit aussi :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) : u_{p+1} = \frac{1-i}{2}u_p + 1, \text{ et en donnant à } p \text{ les valeurs :}$$

$(n-1), (n-2), \dots, 1, 0$ , déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Solutions :

$$\begin{aligned} 1) \quad u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+i} + 1. \text{ Donc : } u_1 = \frac{u_0}{1+i} + 1 = \frac{1-i}{1+i} + 1 = \frac{(1-i)^2}{2} + 1 \\ &= \frac{1-1-2i}{2} + 1 = 1-i = u_0 \end{aligned}$$

$$\text{De même : } u_2 = \frac{u_1}{1+i} + 1 = \frac{1-i}{1+i} + 1 = 1-i = u_0$$

Supposons :  $u_n = 1 - i$ .

$$\text{Donc : } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+i} + 1 = \frac{1-i}{1+i} + 1 = 1-i$$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 - i$ .

Par conséquent,  $(u_n)$  est une suite stationnaire.

$$2) \quad a) \quad W_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{u_n}{1+i} + 1 + \alpha = \frac{1-i}{2}u_n + 1 + \alpha$$

Mais :  $(W_n)$  sera géométrique si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  tel que l'on ait :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : W_{n+1} = k W_n = k u_n + k \alpha$$

D'où :  $\frac{1-i}{2}u_n + 1 + \alpha = k u_n + k \alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-i}{2} = k \\ 1 + \alpha = k \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha(k-1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{k-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1-i}{2} \\ \alpha = \frac{1}{k-1} = \frac{2}{-1-i} = -1+i \end{cases}$$

Conclusion :  $(W_n)$  est géométrique si et seulement si  $\alpha = -1 + i$ .

Et dans ce cas la raison de  $(W_n)$  est  $k = \frac{1-i}{2}$

b)  $\alpha = i - 1$ . C'est la valeur trouvée en a). Donc  $(W_n)$  est géométrique de raison

$$k = \frac{1-i}{2} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } W_0 = u_0 + \alpha = 2 - i + i - 1 = 1$$

$$\text{Donc : } W_n = W_0 k^n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\text{Et : } u_n = W_n - \alpha = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$$

Enfin :  $S_n = (W_0 - \alpha) + (W_1 - \alpha) + \dots + (W_n - \alpha)$

$$= (W_0 + W_1 + \dots + W_n) - (n+1)\alpha$$

$$= W_0 \frac{1-k^{n+1}}{1-k} - (n+1)\alpha$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1-i}{2}} - (n+1)(i-1)$$

$$= (1-i) \left[ n + 2 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^n \right]$$

$$3) \quad u_{n+1} - d = k(u_n - d) \Leftrightarrow \frac{1-i}{2}u_n + 1 - d = k u_n - kd$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-i}{2} = k \\ 1 - d = -kd \Leftrightarrow d = \frac{1}{1-k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1-i}{2} \\ d = \frac{1}{1 - \frac{1-i}{2}} = \frac{2}{1+i} = 1-i \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - (1-i) = \frac{1-i}{2}(u_n - (1-i))$$

Pour calculer  $u_n$ , il y a 2 méthodes :

1<sup>ère</sup> méthode :

Posons  $V_n = u_n - d$ . Donc :  $V_{n+1} = k V_n$ .

D'où :  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $k$ .

$$\text{Par conséquent : } V_n = V_0 k^n = (u_0 - d) \left(\frac{1-i}{2}\right)^n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n$$

$$\text{On en déduit : } u_n = V_n + d = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$$

2<sup>e</sup> méthode :

Considérons le système suivant :

$$U_n - d = k(U_{n-1} - d)$$

$$U_{n-1} - d = k(U_{n-2} - d)$$

$$U_{n-2} - d = k(U_{n-3} - d)$$

$$\dots$$

$$U_2 - d = k(U_1 - d)$$

$$U_1 - d = k(U_0 - d)$$

Le produit membre à membre se simplifie et donne :

$$U_n - d = k^n (U_0 - d) \Leftrightarrow U_n = k^n (U_0 - d) + d \\ = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$$

$$4) U_n = \frac{1-i}{2} U_{n-1} + 1$$

$$U_{n-1} = \frac{1-i}{2} U_{n-2} + 1$$

$$U_{n-2} = \frac{1-i}{2} U_{n-3} + 1$$

$$\dots \\ U_2 = \frac{1-i}{2} U_1 + 1$$

$$U_1 = \frac{1-i}{2} U_0 + 1$$

Pour que la somme membre à membre se simplifie et donne  $U_n$ , il faut multiplier les termes de chaque équation par un coefficient bien choisi. En effet, ce système est équivalent au système suivant :

$$U_n = \frac{1-i}{2} U_{n-1} + 1$$

$$\frac{1-i}{2} U_{n-1} = \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 U_{n-2} + \frac{1-i}{2}$$

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 U_{n-2} = \left(\frac{1-i}{2}\right)^3 U_{n-3} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-2} U_2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-1} U_1 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-2}$$

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-1} U_1 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n U_0 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-1}$$

La somme membre à membre se simplifie et donne :

$$U_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n U_0 + \left[1 + \frac{1-i}{2} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^n (2-i) + \frac{1 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^n}{1 - \frac{1-i}{2}}$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^n (2-i) + (1-i) \left[1 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right]$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^n (2-i) - (1-i) \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$$

# Fonctions générales

Notation :

$D_f$  = le domaine de définition de  $f$

$(C_f)$  = la courbe représentative de  $f$

Par convention on note :  $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

:  $(-\infty)(-\infty) = +\infty$

:  $(-1)(+\infty) = -\infty$

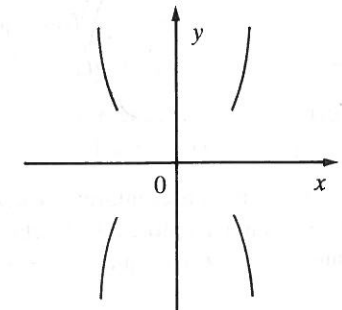
## RAPPELS

1) Etude des branches infinies de la courbe représentative  $(C_f)$  d'une fonction  $f$  :

Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , alors on cherche  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Plusieurs cas se présentent :

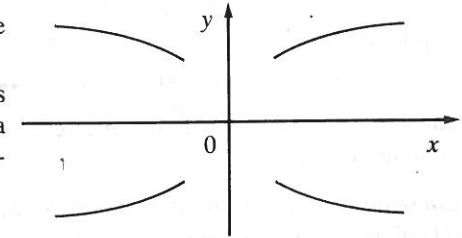
1<sup>er</sup> cas :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  ; on dit que la

courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées. La courbe  $(C_f)$  prend l'une des 4 formes suivantes :



2<sup>e</sup> cas :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ; on dit que la courbe

$(C_f)$  admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. La courbe  $(C_f)$  aura l'une des 4 formes suivantes :

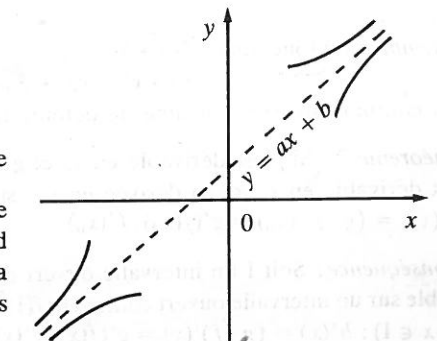


3<sup>e</sup> cas :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ . Dans ce cas

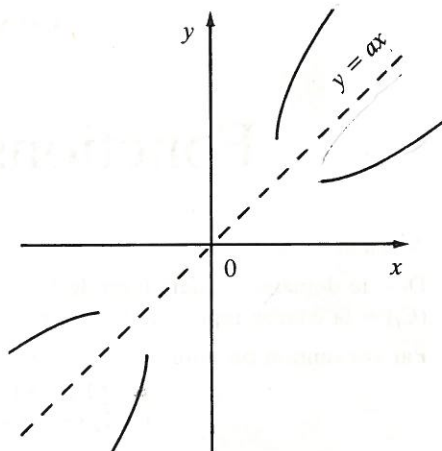
on cherche  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$ .

— Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$ , on dit que

la courbe  $(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (ou quand  $x \rightarrow -\infty$ ). La courbe  $(C_f)$  aura l'une des 4 formes suivantes :



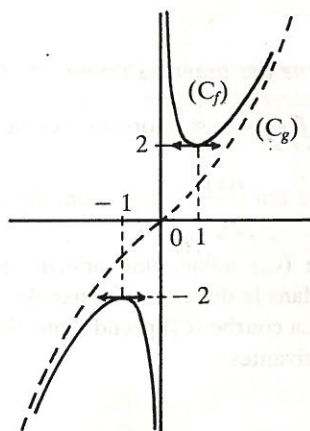
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - ax] = \pm \infty$ , on dit que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation  $y = ax$ . La courbe  $(C_f)$  aura l'une de 4 formes suivantes :



## 2) Généralisation de la notion d'asymptote :

Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , on dit que la courbe  $(C_g)$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (ou quand  $x \rightarrow -\infty$ ). Par exemple :  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$  et  $g(x) = x^3$ . (voir schéma).
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = \lambda \in \mathbb{R}^*$ , on dit que la courbe représentative de  $h(x) = g(x) + \lambda$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (ou quand  $x \rightarrow -\infty$ ).



## 3) Continuité et dérivabilité des fonctions composées :

Soit  $h : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$x_0 \mapsto y_0 = f(x_0) \mapsto g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$

**Théorème 1 :** Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  est continue en  $y_0 = f(x_0)$  alors  $h = g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

**Conséquence :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $f(I)$  alors  $h = g \circ f$  est continue sur  $I$ .

**Exemple :** La fonction  $h : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3 \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

est continue sur son domaine de définition  $D_h = ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ .

**Théorème 2 :** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  alors  $h = g \circ f$  est dérivable en  $x_0$ , et sa dérivée en  $x_0$  est :

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

**Conséquence :** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $g$  est dérivable sur un intervalle ouvert contenant  $f(I)$  alors  $h = g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\forall x \in I) : h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$ .

**Exemple 1 :** Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f^n$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^n)' = n f^{n-1} f'$ .

**Exemple 2 :** Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{f^n}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\frac{1}{f^n})' = -\frac{nf'}{f^{n+1}}$ .

En particulier :  $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$

**Exemple 3 :** Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  alors  $\sqrt{f}$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ . Par exemple, la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$  est continue sur son domaine de définition  $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ , mais dérivable sur  $]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$ .

## 4) Continuité et dérivabilité des fonctions réciproques :

**Théorème 1 :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  alors  $f$  est une bijection de  $[a, b]$  sur  $[f(a), f(b)]$ , et sa fonction réciproque :  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$  est continue et strictement monotone sur  $[f(a), f(b)]$  et variant dans le même sens que  $f$ .

$$\text{Et on a : } \begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in [f(a), f(b)] \end{cases}.$$

En plus : les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  dans un même repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

**Exemple 1 :**  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} ; f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$   
 $x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \text{Arc sin } x$

**Exemple 2 :**  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} ; f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$   
 $x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \text{Arc cos } x$

**Exemple 3 :**  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} ; f^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 \quad x \mapsto \sqrt{x}$

**Conséquence :**

- Si  $(C_f)$  admet au point  $A(x_0, y_0)$  une tangente parallèle à  $y'y$  d'équation  $x = a$  alors  $(C_{f^{-1}})$  admet au point  $B(y_0, x_0)$  une tangente parallèle à  $x'x$  d'équation  $y = a$ . Même propriété si on permute  $y'y$  et  $x'x$ .
- Si  $(C_f)$  admet une asymptote parallèle à  $y'y$  d'équation  $x = a$  alors  $(C_{f^{-1}})$  admet une asymptote parallèle à  $x'x$  d'équation  $y = a$ . Même propriété si on permute  $y'y$  et  $x'x$ .
- Si  $(C_f)$  admet au point  $A(x_0, y_0)$  une tangente d'équation  $y = ax + b$ , alors  $(C_{f^{-1}})$  admet au point  $B(y_0, x_0)$  une tangente d'équation  $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ .
- Si  $(C_f)$  admet une asymptote d'équation  $y = ax + b$  alors  $(C_{f^{-1}})$  admet une asymptote d'équation  $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ .
- Si  $(C_f)$  admet un point d'inflexion (ou un centre de symétrie)  $A(x_0, y_0)$ , alors  $(C_{f^{-1}})$  admet un point d'inflexion (ou un centre de symétrie)  $B(y_0, x_0)$ .

Remarque :

Le théorème 1 précédent et sa conséquence sont encore vrais si on a :  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $a$  peut être égal à  $-\infty$ , et  $b$  peut être égal à  $+\infty$ ; il suffit de remplacer  $]f(a), f(b)[$  par  $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$ .

Exemple :  $f: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}; f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$   
 $x \mapsto \text{tg } x \quad x \mapsto \text{Arctg } x$

**Théorème 2 :** Soit  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone sur  $]a, b[$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in ]a, b[$  et  $f'(x_0) \neq 0$  alors sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0) \in ]f(a), f(b)[$

et on a :  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Conséquence :

Si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]f(a), f(b)[$  et on a :

$(\forall x \in ]f(a), f(b)[) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$  avec  $y = f^{-1}(x)$ .

Remarque :

Le théorème 2 et sa conséquence sont encore vrais si on a :  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $a$  peut être égal à  $-\infty$ , et  $b$  peut être égal à  $+\infty$ ; il suffit de remplacer  $]f(a), f(b)[$  par  $] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$

**5) Relation entre continuité et dérivabilité**

Soit  $f$  une fonction quelconque et  $x_0 \in D_f$ . On a :

$f$  dérivable en  $x_0 \Rightarrow f$  continue en  $x_0$ .

Donc :  $f$  non continue en  $x_0 \Rightarrow f$  non dérivable en  $x_0$ .

Mais :  $f$  continue en  $x_0 \not\Rightarrow f$  dérivable en  $x_0$ .

Si  $f$  est continue en  $x_0$ , on cherche si  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

Pour cette raison, dans l'étude d'une fonction, on fait la continuité avant la dérivabilité.

**PROBLÈME 1**

Soit  $f$  définie par :  $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$ .

- 1) Déterminer  $D_f$ ; calculer  $f'(x)$  et étudier son signe.
- 2) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $-2$  et en  $2$ ; et interpréter géométriquement chaque résultat.
- 3) Déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- 4) a) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ . Conclusion.  
 b) Calculer  $f'(0)$ . Conclusion.  
 c) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.

**Solutions**

1)  $D_f = [-2, 2]$ ;  $f$  est dérivable sur  $] -2, 2[$ .

$(\forall x \in ] -2, 2[) : f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Si  $x \in [0, 2[$  alors  $f'(x) > 0$

Si  $x \in ] -2, 0[$  alors  $f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}$ .

Son signe est celui de  $\sqrt{4-x^2} + x = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}-x} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}-x}$ .

Mais  $(\forall x \in ] -2, 0[) : \sqrt{4-x^2}-x > 0$ .

Donc si  $x \in ] -2, 0[$  alors le signe de  $f'(x)$  est celui de  $2-x^2$ .

D'où : pour  $x \in ] -2, 0[$  on a :  $\begin{array}{c|ccc} x & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \end{array}$

Conclusion :  $\begin{array}{c|ccc} x & -2 & -\sqrt{2} & 2 \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \end{array}$

2°  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x - \sqrt{4-x^2} + 2}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left( \frac{x+2}{x+2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2} \right)$   
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left( 1 - \frac{4-x^2}{(x+2)\sqrt{4-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left( 1 - \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = -\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $-2$ , mais la courbe  $(C_f)$  admet à droite du point  $A(-2, -2)$  une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

De même on a :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x - \sqrt{4-x^2} - 2}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( \frac{x-2}{x-2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \right)$   
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( 1 - \frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( 1 + \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = +\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en  $2$ , mais la courbe  $(C_f)$  admet à gauche du point  $B(2, 2)$  une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque :

Pour étudier  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ , au lieu de multiplier le numérateur et le

dénominateur par  $\sqrt{4-x^2}$  comme on a fait dans la démonstration précédente, on pourra utiliser la méthode suivante :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(x+2)^2}}$  car  $x+2 > 0$  pour  $x > -2$ .  
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \sqrt{\frac{4-x^2}{(x+2)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = +\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{-\sqrt{(x-2)^2}}$  car  $x-2 < 0$  pour  $x < 2$ .

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} - \sqrt{\frac{4-x^2}{(x-2)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} - \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = -\infty$$

3) x	-2	$-\sqrt{2}$	2
f'(x)	$-\infty$	-	0 + + $\infty$
f(x)	-2	$-2\sqrt{2}$	2

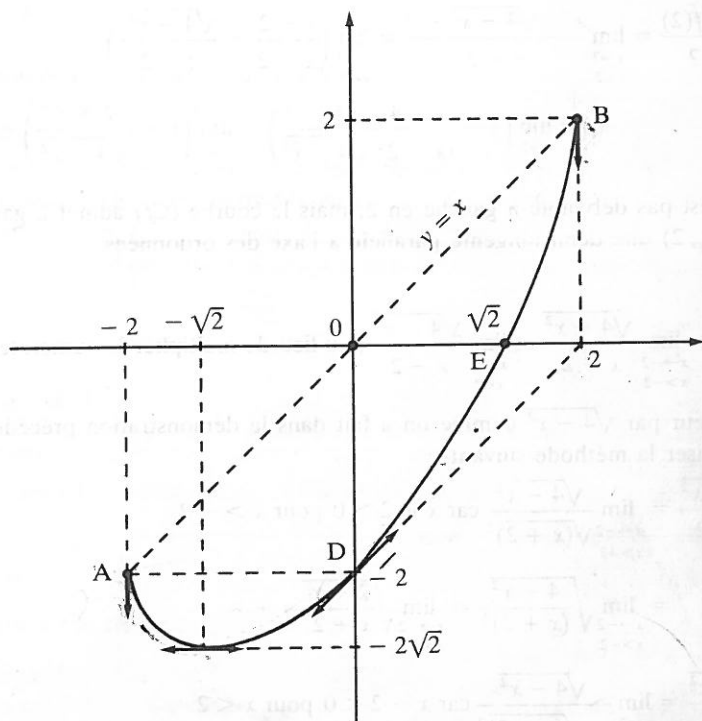
4) a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, 2] \\ x^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Conclusion: la courbe (Cf) coupe l'axe des abscisses en un seul point E ( $\sqrt{2}, 0$ ).

b)  $f'(0) = 1$ ; donc la courbe (Cf) admet au point D (0, -2) une tangente de pente 1. Cette tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x$  appelée 1<sup>re</sup> bissectrice.

c) La courbe (Cf) est la suivante:



## PROBLÈME 2

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .  
Calculer la dérivée  $f'(x)$  et étudier son signe.
- Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-2$  et en  $2$ ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- Déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- Etudier les branches infinies de  $(Cf)$ ; puis construire  $(Cf)$ .
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[2, +\infty[$ . Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ . Construire  $(Cg)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un même repère orthonormé.
- Calculer:  $g^{-1}(-2)$ ;  $g^{-1}(-1)$ ;  $(g^{-1})'(-1)$ .
- Déterminer l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

### Solutions

1) Le domaine de définition de  $f$  est  $Df = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .  
 $f$  est dérivable sur  $]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[ = D'$ .

$$(\forall x \in D') : f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1.$$

Si  $x \in ]-\infty, -2[$ , alors  $f'(x) < 0$ .

Si  $x \in ]2, +\infty[$ , alors on a:  $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ; son signe est celui de

$$x - \sqrt{x^2 - 4} = \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} > 0 \text{ car } x \in ]2, +\infty[.$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} - 1 \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left[ \frac{x^2 - 4}{(x + 2)\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left[ \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \right] = -\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en  $-2$ , mais la courbe  $(Cf)$  admet au point A(-2, 2) une demi tangente à gauche parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\text{De même: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} - 1 \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left[ \frac{x^2 - 4}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left( \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \right) = +\infty.$$

Donc:  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $2$ , mais la courbe  $(Cf)$  admet à droite au point B(2, -2) une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0.$$

Donc:

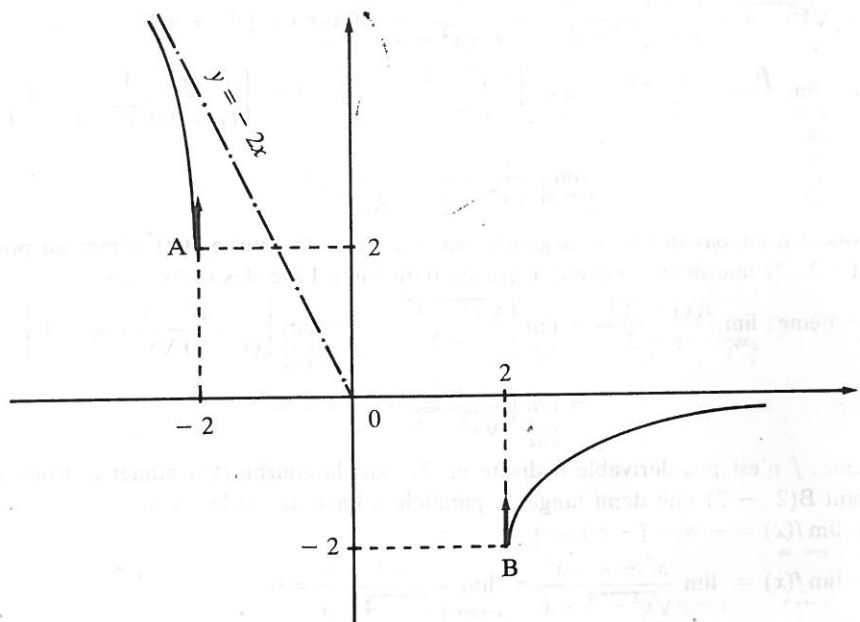
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f'(x)	-	$-\infty$	$+\infty$	+
f(x)	$+\infty$	2	-2	0

$$\begin{aligned}
 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} - 1 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} - 1 \right] \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Enfin: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = 0^-.
 \end{aligned}$$

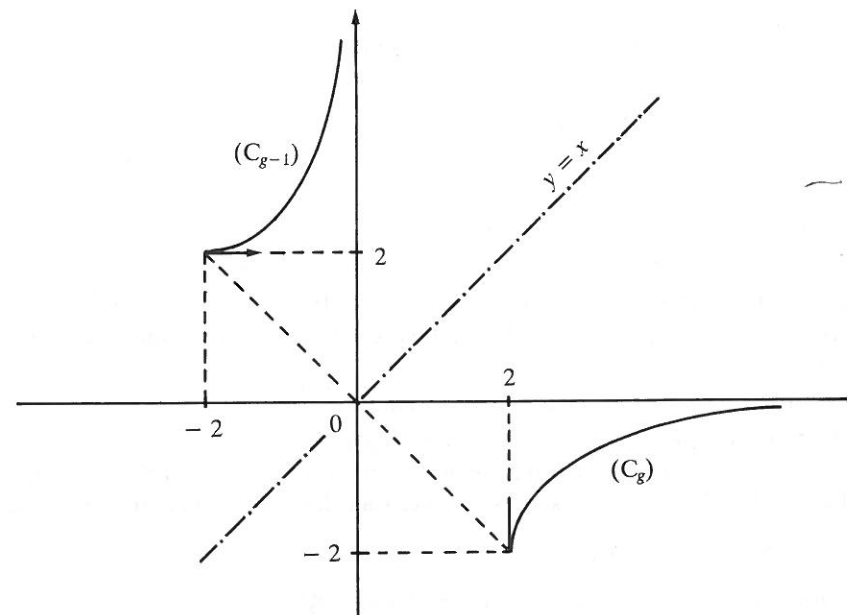
Conclusion : La courbe  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une asymptote oblique d'équation  $y = -2x$ . En plus, au voisinage de  $-\infty$ ,  $(C_f)$  est située au dessous de cette asymptote.

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ . Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En plus, au voisinage de  $+\infty$ ,  $(C_f)$  est située au dessous de cet axe.



5) D'après le tableau de variation de  $f$ , on voit que  $g$  est continue et strictement croissante de  $[2, +\infty[$  vers  $[-2, 0[$ . Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1} : [-2, 0[ \rightarrow [2, +\infty[$ .

La courbe  $(C_{g^{-1}})$  se déduit de la courbe  $(C_g)$  dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .



$$\begin{aligned}
 6) g^{-1}(-2) = y &\Leftrightarrow -2 = g(y) \Leftrightarrow -2 = f(y) \\
 \text{Or: } f(y) = -2 &\Leftrightarrow y = 2 \text{ (d'après le tableau de variation de } f).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De même: } g^{-1}(-1) = y &\Leftrightarrow -1 = g(y) = f(y) = \sqrt{y^2 - 4} - y \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 4} = y - 1 \Leftrightarrow y^2 - 4 = (y - 1)^2 \text{ car } y \geq 2. \\
 &\Leftrightarrow y^2 - 4 = y^2 + 1 - 2y \Leftrightarrow 2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } g^{-1}(-1) = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Enfin: } (g^{-1})'(-1) = \frac{1}{g'(y)} \text{ avec } y = g^{-1}(-1) = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Donc: } g'(y) = g'\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{25}{4} - 4}} - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{D'où: } (g^{-1})'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$7) \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in [-2, 0[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in [2, +\infty[ \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or: } x = g(y) &\Leftrightarrow x = f(y) = \sqrt{y^2 - 4} - y \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 4} = x + y \\
 &\Leftrightarrow y^2 - 4 = (x + y)^2 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 - 4}{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } (\forall x \in [-2, 0[: g^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x}.$$

### PROBLÈME 3

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x}{x^2+1} - x & \text{pour } x \in ]-\infty, 0] \\ f_2(x) = \sqrt{x^2+2x} + x & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$

- 1)  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 0$  ?
- 2) a) Calculer la dérivée  $f'(x)$ .  
b)  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = 0$  ?
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$ .
- 5) Préciser la position de  $(C_f)$  par rapport à ses asymptotes.
- 6) Etudier les points d'inflexion et la concavité de  $(C_f)$ .
- 7) Pour  $x \in ]-\infty, 0]$ , déterminer le point où  $(C_f)$  admet une tangente de coefficient directeur  $-1$ .
- 8) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 9) Montrer que  $f_1$  admet une fonction réciproque  $f_1^{-1}$ .  
Construire  $(C_{f_1})$  et  $(C_{f_1^{-1}})$  dans un même repère orthonormé et préciser le point d'inflexion de  $(C_{f_1^{-1}})$  ainsi que son asymptote. Calculer enfin le nombre dérivé de  $f_1^{-1}$  en  $\frac{1}{2}$  c'est-à-dire  $(f_1^{-1})'(\frac{1}{2})$ .
- 10) Montrer que  $f_2$  admet une fonction réciproque  $f_2^{-1}$ .  
Déterminer l'expression de  $f_2^{-1}(x)$ .

### Solutions

- 1)  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $D_1 = ]-\infty, 0]$ .  
 $f_2$  est définie sur  $] -\infty, -2] \cup ]0, +\infty[$  et en particulier sur  $D_2 = ]0, +\infty[$ .  
Donc :  $D_f = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ .  
 $f_1$  est continue en  $x_0 = 0$  ; donc  $f$  est continue à gauche en  $x_0 = 0$  et  $f(0) = f_1(0) = 0$ .  
En plus :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+2x} + x) = 0 = f(0)$ .  
D'où :  $f$  est continue aussi à droite en  $x_0 = 0$ .  
Conclusion :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ .
- 2) a)  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $] -\infty, 0]$ .  
 $f_2$  est dérivable sur  $] -\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ .  
Donc :  $f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - 1 & \text{pour } x \in ]-\infty, 0] \\ f_2'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} + 1 & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$   
b) Par suite :  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 0$  et on a :  $f_1'(0) = f_1'(0) = 1 - 1 = 0$ .  
D'autre part on a :  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 = +\infty$   
Donc :  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 0$ , mais  $(C_f)$  admet au point  $A(0, 0)$  une demi tangente à droite parallèle à l'axe des ordonnées  $y'y$ .

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$$

Signe de  $f'(x)$  : ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ ) :  $f_2'(x) > 0$ . De même on a :  
( $\forall x \in ]-\infty, 0]$ ) :  $f_1'(x) = \frac{1-x^2 - (x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ .

D'où :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \text{ en plus : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} - 1 = -1 ;$$

$$\text{Enfin : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f_1(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

Donc : la droite d'équation  $y = -x$  est une asymptote à  $(C_f)$  quand  $x \rightarrow -\infty$ .  
De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ; en plus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + 1 \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 \right) = 2$  ; enfin :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$$

Donc : la droite d'équation  $y = 2x + 1$  est une asymptote à  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5) Pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ ,  $(C_f)$  admet une asymptote d'équation  $y = -x$ . En plus on a :

$$(\forall x \in ]-\infty, 0]) : f(x) + x = \frac{x}{x^2+1} < 0 \text{ car } x < 0$$

Donc : sur  $] -\infty, 0[$ ,  $(C_f)$  est au dessous de son asymptote  $y = -x$ .

De même : pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ ,  $(C_f)$  admet une asymptote d'équation  $y = 2x + 1$ . En plus on a :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) : f(x) - (2x + 1) = \sqrt{x^2+2x} - (x + 1) = \frac{x^2+2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + (x+1)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x} + x + 1} < 0 \text{ car } x > 0$$

Donc : sur  $]0, +\infty[$   $(C_f)$  est encore au dessous de son asymptote  $y = 2x + 1$ .

$$6) f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0] \\ f_2''(x) = \frac{-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

( $\forall x \in ]0, +\infty[$ ) :  $f_2''(x) < 0$ .

Le signe de  $f_1''(x)$  est :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$
$x^2-3$	$+$	$0$	$-$
$f_1''(x)$	$-$	$0$	$+$

D'où :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$0$	$+$	$-$

Par suite :  $f_1'(x)$  s'annule en changeant de signe seulement en un seul point  $x_0 = -\sqrt{3}$ .  
Donc :  $(C_f)$  admet un seul point d'inflexion I  $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$

avec  $f(-\sqrt{3}) = f_1(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,3$ .

En plus : sur  $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, +\infty[$ , la concavité de  $(C_f)$  est tournée vers les  $y$  négatifs.

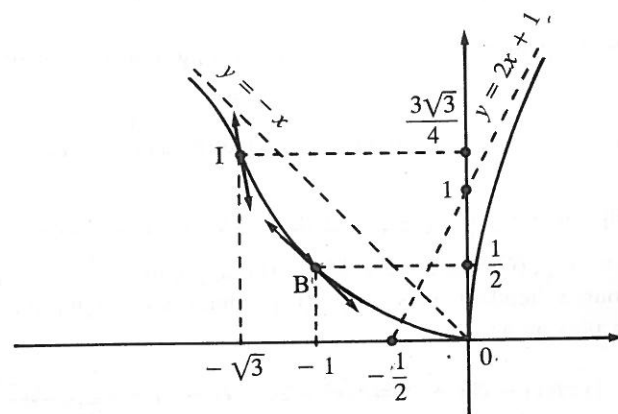
Et : sur  $[-\sqrt{3}, 0]$ , la concavité de  $(C_f)$  est tournée vers les  $y$  positifs.

7) Pour  $x \in ]-\infty, 0]$  on a :

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow f_1'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ car } x \leq 0.$$

Donc : sur  $]-\infty, 0]$ ,  $(C_f)$  admet une tangente de coefficient directeur  $-1$  au point  $B(-1, f(-1))$  avec  $f(-1) = f_1(-1) = \frac{1}{2}$ .

8) La courbe  $(C_f)$  est la suivante :



9) D'après le tableau de variation de  $f$  on a :

$x$	$-\infty$	$0$
$f_1(x)$	$+\infty$	$0$

Donc :  $f_1$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$ .  
Par conséquent,  $f$  est une bijection de  $]-\infty, 0]$  vers  $[0, +\infty[$ .  
Sa réciproque  $f_1^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, 0]$  est aussi continue et strictement décroissante. La courbe représentative  $(C_{f_1^{-1}})$  de  $f_1^{-1}$  se déduit de  $(C_f)$  dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

Donc : la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-2)^2} & \text{pour } x \in \Delta_1 \\ f_2'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & \text{pour } x \in \Delta_2. \end{cases}$$

Par conséquent :  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0 = 0$  et on a :

$$f'_g(0) = f_1'(0) = 0 \text{ et } f'_d(0) = f_2'(0) = 1 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = 0$  car  $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ .

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}} = 1$$

Ou encore :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{1-0} = 1$

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$

Enfin :  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f_1(x)$ . Pour étudier cette limite, il faut connaître le signe de  $\sqrt{x^2+1}-2$  dans un voisinage de  $-\sqrt{3}$ .

$$\text{En effet : on a } \sqrt{x^2+1}-2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 2 \Leftrightarrow x^2+1 > 4 \Leftrightarrow x^2 > 3 \\ \Leftrightarrow x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3}.$$

D'où :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\sqrt{x^2+1}-2$	$+$	$0$	$0$	$+$

Ou encore :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2+1}-2 = \frac{x^2+1-4}{\sqrt{x^2+1}+2} = \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+1}+2}$  qui a le signe de  $x^2-3$  et on obtient le même tableau de signe.

Doù :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3}}} f_1(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}-2 = 0_+$

Et :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x > -\sqrt{3}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x > -\sqrt{3}}} f_1(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}-2 = 0_-$

Signe de  $f'(x)$  :  $f_1'(x) \geq 0$  car  $x \in ]-\infty, 0]$   
 $f_2'(x) > 0$  car  $x \in [0, +\infty[$

D'où :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3}}} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\sqrt{3} \\ x > -\sqrt{3}}} f(x) = -\infty$ ; donc: la droite d'équation  $x = -\sqrt{3}$

est asymptote à  $(C_f)$  par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

De même:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ; par suite: la droite d'équation  $y = 1$  est une asymptote à

$(C_f)$  quand  $x \rightarrow -\infty$ .

D'autre part:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{2}{x\sqrt{x^2+1}} \right] = 1 + 0 - 0 = 1$$

car:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$

ou encore:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$

Enfin:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_2(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \right\} = +\infty$

Conclusion:  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation  $y = x$ .

5) a)  $u(1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$ ; donc:  $u(x)$  est divisible par  $x - 1$ .

Après division on trouve:  $u(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

Après division on trouve:  $u(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

Considérons l'équation:  $x^2 + 2x + 3 = 0$ . On a:  $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$ .

D'où:  $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 2x + 3 > 0$ .

Par suite:  $u(x)$  a le signe de  $x - 1$ :

$x$	0	1	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

b)  $(\forall x \in [0, +\infty[): f(x) - x = f_2(x) - x = \sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} =$

$$\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1} - 2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+1)(x^2+1) - 4}{(\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1} + 2)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{u(x)}{(\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1} + 2)\sqrt{x^2+1}}$$

qui est du signe de  $u(x)$ .

D'où:

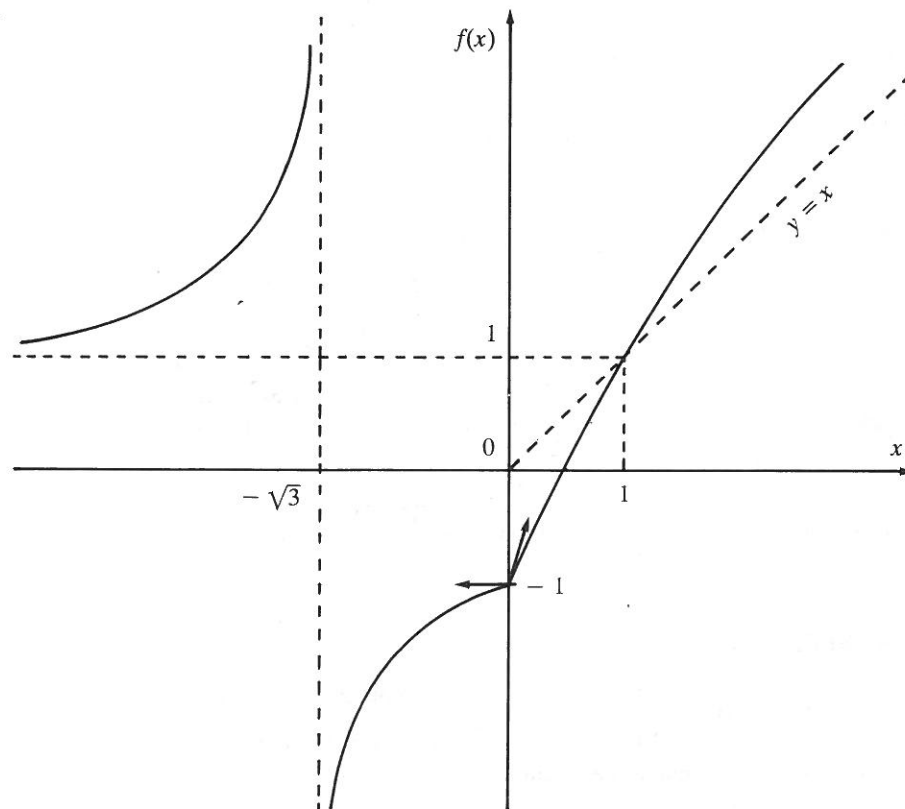
$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

Conclusion:  $(C_f)$  coupe cette droite seulement au point  $A(1, 1)$ .

Sur  $[0, 1]$ ,  $(C_f)$  est au dessous de cette droite.

Et sur  $[1, +\infty[$ ,  $(C_f)$  est au dessus de cette droite.

6) La courbe représentative de  $f$  est la suivante:



7) D'après le tableau de variation de  $f$  on a:

$x$	$-\sqrt{3}$	$0$
$g(x)$	$-\infty$	$1$

Donc:  $g$  est continue et strictement croissante sur  $] -\sqrt{3}, 0]$ .

Par conséquent:  $g$  est une bijection de  $] -\sqrt{3}, 0]$  vers  $] -\infty, -1]$ .

Sa réciproque  $g^{-1}: ] -\infty, -1] \rightarrow ] -\sqrt{3}, 0]$  est aussi continue et strictement croissante. La courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de  $g^{-1}$  se déduit de  $(C_g)$  dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

Enfin:  $(g^{-1})'(-3) = \frac{1}{g'(y)}$  avec  $y = g^{-1}(-3)$ .

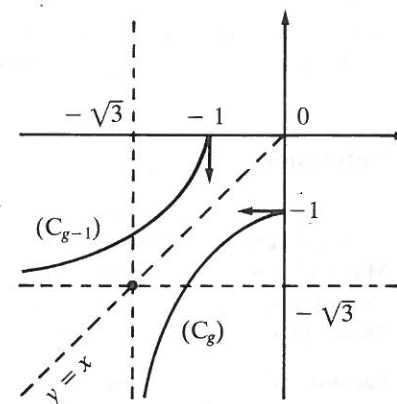
Or:  $y = g^{-1}(-3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = g(y) \\ y \in ] -\sqrt{3}, 0]. \end{cases}$

Mais:  $-3 = g(y) \Leftrightarrow -3 = f_1(y) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}-2}$

$\Leftrightarrow -3\sqrt{y^2+1} + 6 = \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow 6 = 4\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y^2 + 1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$  car  $y \in ] -\sqrt{3}, 0]$ .



Cette solution convient car  $-\frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1,118$  et  $-\sqrt{3} \approx -1,732$

$$D'où: g'(y) = g' \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = f_1' \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Conclusion: } (g^{-1})'(-3) = \frac{3}{8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{40}$$

$$8) \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in ]-\infty, -1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in ]-\sqrt{3}, 0] \end{cases}$$

Pour  $x \in ]-\infty, -1]$  et  $y \in ]-\sqrt{3}, 0]$  on a:

$$x = g(y) \Leftrightarrow x = f_1(y) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}-2} \Leftrightarrow x\sqrt{y^2+1} - 2x = \sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{y^2+1} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = \frac{2x}{x-1} \Leftrightarrow y^2+1 = \frac{4x^2}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4x^2}{(x-1)^2} - 1 = \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3x^2+2x-1}}{|x-1|}$$

car  $y$  est négatif. D'où:  $y = \frac{\sqrt{3x^2+2x-1}}{x-1}$  car  $x \in ]-\infty, -1]$

$$\text{Conclusion: } (\forall x \in ]-\infty, -1]): g^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2x-1}}{x-1}$$

## PROBLÈME 5

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x} \text{ pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f_2(x) = x\sqrt{x^4+8x} \text{ pour } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

$f$  est-elle continue en  $x_0 = 0$  ?

2)  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = 0$  ?

3) Calculer la dérivée  $f'(x)$  et étudier son signe.

4) Étudier les variations de  $f$ .

5) Étudier les branches infinies de  $(C_f)$ .

6) Étudier sur  $]-\infty, 0[$  la position de  $(C_f)$  par rapport à son asymptote.

7) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^3]$ . Conclusion.

8) Soit  $g$  définie par  $g(x) = x^3 + 4$ . Étudier sur  $[0, +\infty[$  la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(C_g)$ .

9) Calculer  $g(1)$  et  $f(1)$ . Construire, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(C_g)$  pour  $x \in [0, +\infty[$ . Construire enfin dans ce même repère la courbe  $(C_f)$ .

## Solutions

1)  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et en particulier sur  $]-\infty, 0[ = D_1$

$f_2$  est définie lorsque:  $x^4 + 8x \geq 0$ .

Mais:  $x^4 + 8x = x(x^3 + 8) = x(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ .

Considérons l'équation  $x^2 - 2x + 4 = 0$ . On a:  $\Delta' = 1 - 4 = -3 < 0$ .

Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 - 2x + 4 > 0$ .

Par suite:  $x^4 + 8x$  a le signe de  $x(x+2)$  c'est-à-dire:  $\begin{array}{c} -2 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$

Par conséquent:  $f_2$  est définie sur  $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$  et en particulier sur  $[0, +\infty[ = D_2$ .

Conclusion:  $Df = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ .

D'autre part:  $f_2$  est continue sur  $[0, +\infty[$ ; par suite:  $f$  est continue à droite en  $x_0 = 0$  et  $f(0) = f_2(0) = 0$ .

$$\text{En plus: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^4+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1} + 1} = f(0)$$

Donc:  $f$  est continue aussi à gauche en  $x_0 = 0$ .

Conclusion:  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ .

2) Zéro est une borne du domaine de définition de  $f_1$  et du domaine de définition de  $f_2$ . On étudie la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$  par:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1 - 1}{x^2(\sqrt{x^4+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1} + 1} = \frac{0}{2} = 0 = f'_g(0). \end{aligned}$$

De même:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+8x}}{x} = 0 = f'_d(0).$$

Conclusion:  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  car  $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ ; et on a donc:  $f'(0) = 0$ .

3)  $f_1$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$ ;  $f_2$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$D'où: f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = \frac{x^4 - 1 + \sqrt{x^4+1}}{x^2 \sqrt{x^4+1}} \text{ pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f'_2(x) = \frac{3x(x^3+4)}{\sqrt{x^4+8x}} \text{ pour } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

$(\forall x \in ]0, +\infty[): f'_2(x) > 0$ .

Mais  $f'_1(x)$  a le signe de  $x^4 - 1 + \sqrt{x^4+1} = x^4 + (\sqrt{x^4+1} - 1)$

$$\text{Or: } \sqrt{x^4+1} - 1 = \frac{x^4 + 1 - 1}{\sqrt{x^4+1} + 1} = \frac{x^4}{\sqrt{x^4+1} + 1} > 0 \text{ car } x \in ]-\infty, 0[.$$

D'où:  $(\forall x \in ]-\infty, 0[): f'_1(x) > 0$ .

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty (1) = -\infty. \end{aligned}$$

De même:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ .

D'où:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en plus : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - (x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1 - (x^2 + 1)^2}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 0_+ \end{aligned}$$

Conclusion : la droite d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $(C_f)$  quand  $x \rightarrow -\infty$  ; et au voisinage de  $-\infty$ ,  $(C_f)$  se trouve au dessus de cette asymptote.

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 + 8x} = +\infty$$

Conclusion :  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe  $y'y$ .

$$\begin{aligned} 6) (\forall x \in ]-\infty, 0[) : f(x) - x &= f_1(x) - x = \frac{\sqrt{x^4 + 1} - (x^2 + 1)}{x} = \frac{x^4 + 1 - (x^2 + 1)^2}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 + 1)} \\ &= \frac{-2x^2}{x(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 + 1)} > 0 \text{ car } x < 0. \end{aligned}$$

Conclusion : sur  $]-\infty, 0[$ ,  $(C_f)$  se trouve au dessus de son asymptote oblique d'équation  $y = x$ .

$$\begin{aligned} 7) (\forall x \in ]0, +\infty[) , f(x) - x^3 &= x\sqrt{x^4 + 8x} - x^3 = \frac{x^2(x^4 + 8x) - x^6}{x\sqrt{x^4 + 8x} + x^3} \\ &= \frac{8x^3}{x\sqrt{x^4 + 8x} + x^3} = \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{8}{x^3}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^3] = \frac{8}{2} = 4.$$

Conclusion : pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ ,  $(C_f)$  est asymptote à la courbe représentative de  $g(x) = x^3 + 4$ .

$$\begin{aligned} 8) (\forall x \in [0, +\infty[) : f(x) - g(x) &= x\sqrt{x^4 + 8x} - (x^3 + 4) = \frac{x^2(x^4 + 8x) - (x^3 + 4)^2}{x\sqrt{x^4 + 8x} + x^3 + 4} \\ &= \frac{-16}{x\sqrt{x^4 + 8x} + x^3 + 4} < 0 \text{ car } x \in [0, +\infty[ \end{aligned}$$

Conclusion : sur  $[0, +\infty[$ ,  $(C_f)$  se trouve au dessous de  $(C_g)$ .

9)  $g(1) = 5$ . Donc :  $(C_g)$  passe par le point A (1,5).

$f(1) = f_2(1) = 3$ . Donc :  $(C_f)$  passe par le point B (1,3).

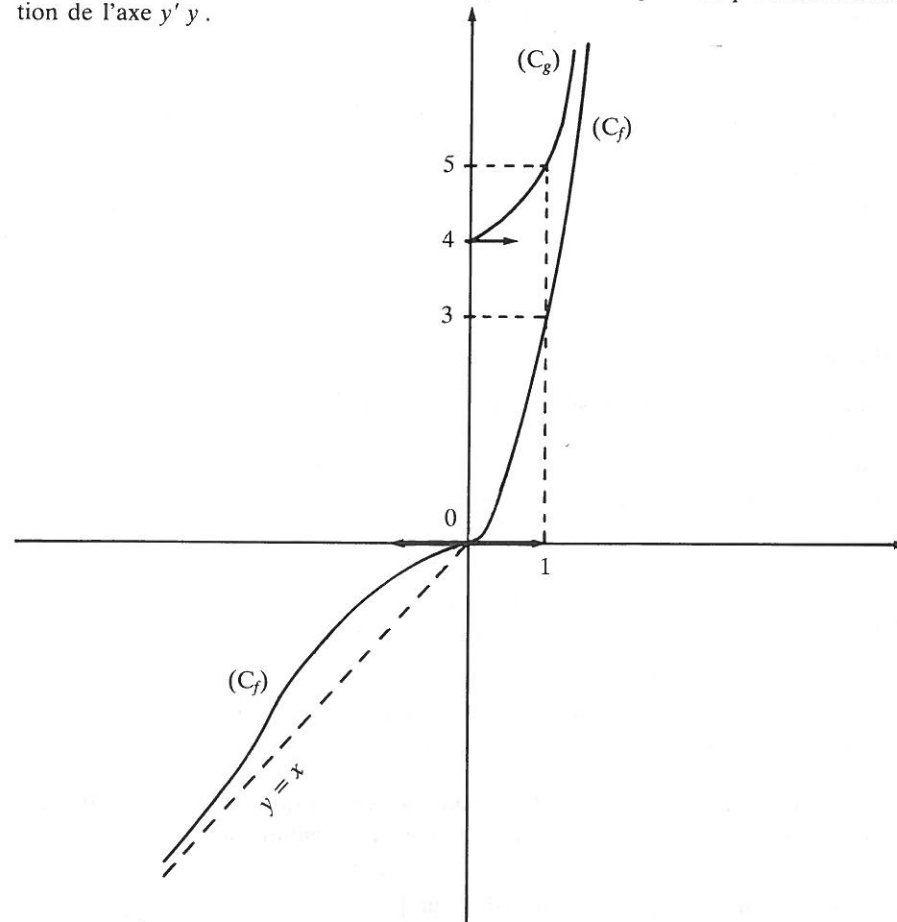
Etude de  $g$  :  $(\forall x \in [0, +\infty[) : g'(x) = 3x^2 > 0$ .

Donc :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	4	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 + \frac{4}{x} \right) = +\infty$$

Donc :  $(C_g)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe  $y'y$ .



### PROBLÈME 6 :

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{x^2 + 4} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0] \\ \frac{\sqrt{x^2 + 7x + 1}}{\sqrt{x}} - 1 & \text{pour } x \in ]0, +\infty[. \end{cases}$

- Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .  
 $f$  est-elle continue en  $x_0 = 0$  ?
- Calculer la dérivée  $f'(x)$  ;  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = 0$  ?
- Étudier le signe de  $f'(x)$  et les variations de  $f$ .
- Étudier les branches infinies de  $(C_f)$ .

5) Soit  $g$  définie par  $\begin{cases} g(x) = x^2 - x \\ x \in ]-\infty, \frac{1}{2}] \end{cases}$

Sur  $]-\infty, 0[$ , étudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(C_g)$ .

Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$ . Conclusion.

6) Soit  $h$  définie par  $h(x) = \sqrt{x} - 1$ .  
 Sur  $]0, +\infty[$ , étudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(C_h)$ .  
 Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ . Conclusion.

7) Étudier les variations de  $g$  sur  $]-\infty, \frac{1}{2}]$  et les variations de  $h$  sur  $]0, +\infty[$ .

8) Construire  $(C_g)$ ,  $(C_h)$  et  $(C_f)$  dans un même repère orthonormé.

9) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ . Déterminer l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

### Solutions

1)  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $] -\infty, 0] = D_1$ .

$f_2$  est définie pour  $x^2 + 7x + 1 \geq 0$  et  $x > 0$ .

Considérons l'équation  $x^2 + 7x + 1 = 0$ . On a:  $\Delta = 49 - 4 = 45$ .

Donc: cette équation admet 2 solutions:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{45}}{2} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-7 - \sqrt{45}}{2} < 0.$$

$$\text{D'où: } \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & x_2 & x_1 & 0 & +\infty \\ \hline x^2 + 7x + 1 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

Donc:  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : x^2 + 7x + 1 > 0$ .

Par conséquent  $f_2$  est définie sur  $]0, +\infty[ = D_2$ .

Conclusion:  $D_f = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ .

D'autre part:

$f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ; par suite,  $f$  est continue à gauche en  $x_0 = 0$  et  $f(0) = f_1(0) = 2$ .

Mais:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$ . Donc:  $f$  n'est pas continue à droite en  $x_0 = 0$ .

2)  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $] -\infty, 0]$ .

$f_2$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\text{Donc: } f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = \frac{x(2\sqrt{x^2+4}+1)}{\sqrt{x^2+4}} \text{ pour } x \in ]-\infty, 0] \\ f'_2(x) = \frac{x^2-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^2+7x+1}} \text{ pour } x \in ]0, +\infty[. \end{cases}$$

Par suite:  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 0$  et  $f'_g(0) = f'_1(0) = 0$

Mais  $f$  n'est pas continue à droite en  $x_0 = 0$ ; donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 0$ .

3)  $f'_1(x)$  a le signe de  $x$ ; d'où:  $f'_1(x) < 0$  pour  $x \in ]-\infty, 0]$ .

$f'_2(x)$  a le signe de  $x^2 - 1$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ ; d'où:  $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & +\infty \\ \hline f'_2(x) & - & 0 & + \end{array}$

D'autre part:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\right) = +\infty$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{De même: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline f'(x) & - & 0 & - & 0 & + \\ \hline f(x) & +\infty & & +\infty & & +\infty \end{array}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \right) = -\infty$$

Par suite:  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées  $y'y$ .

$$\text{De même: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Par conséquent:  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses  $x'x$ .

$$\begin{aligned} 5) (\forall x \in ]-\infty, 0]) : f(x) - g(x) &= f_1(x) - g(x) = \sqrt{x^2+4} + x = \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} > 0 \text{ car } -x \geq 0. \end{aligned}$$

Donc: sur  $] -\infty, 0]$ ,  $(C_f)$  se trouve au dessus de  $(C_g)$ .

$$\text{D'autre part: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = 0.$$

Par suite: pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ ,  $(C_f)$  est asymptote à  $(C_g)$ .

$$\begin{aligned} 6) (\forall x \in ]0, +\infty]) : f(x) - h(x) &= f_2(x) - h(x) = \frac{\sqrt{x^2+7x+1}-x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2+7x+1-x^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+7x+1}+x)} \\ &= \frac{7x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+7x+1}+x)} > 0 \text{ car } x > 0. \end{aligned}$$

Donc: sur  $]0, +\infty[$ ,  $(C_f)$  se trouve au dessus de  $(C_h)$ .

$$\text{D'autre part: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2+7x+1}+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0.$$

Par suite: pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ ,  $(C_f)$  est située au dessus de  $(C_h)$ .

7)  $(\forall x \in ]-\infty, \frac{1}{2}[) : g'(x) = 2x - 1$ . Donc :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	$-$	$0$
$g(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$

$(\forall x \in ]0, +\infty[) : h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Donc :

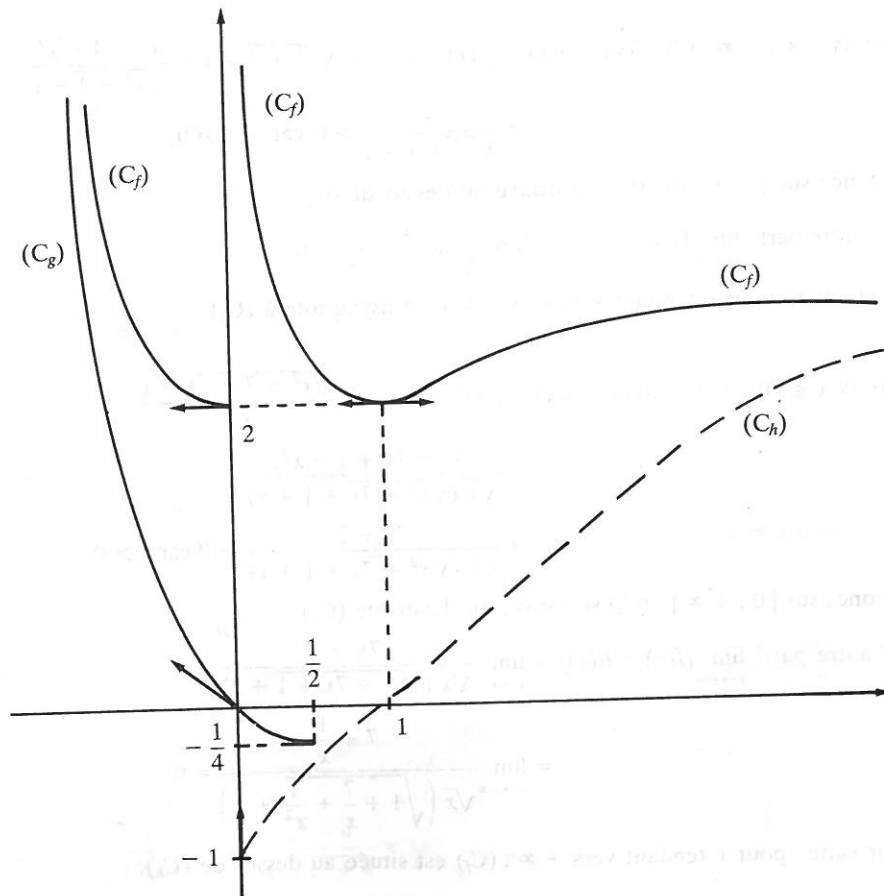
$x$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$	$+\infty$	$+$
$h(x)$	$-1$	$+\infty$

En plus :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ .

Par conséquent :  $h$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 0$  mais  $(C_h)$  admet au point  $A(0, -1)$  une demi tangente à droite parallèle à l'axe  $y'y$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = +\infty$  ; donc :  $(C_g)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe  $y'y$ .

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) = 0$ . Donc :  $(C_h)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe  $x'x$ .



9) D'après la question 7) on a :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$
$g(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$

Par suite :  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty, \frac{1}{2}[$  vers  $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ .

Elle admet donc une fonction réciproque  $g^{-1} : ]-\frac{1}{4}, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, \frac{1}{2}[$  qui est aussi

continue et strictement décroissante. Et on a :

$$\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in ]-\frac{1}{4}, +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y - x = 0 \\ y \in ]-\infty, \frac{1}{2}[ \end{cases}$$

$$\Delta = 1 + 4x \geq 0. \text{ Mais } x \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x \geq -1 \Leftrightarrow 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

Par suite : l'équation  $y^2 - y - x = 0$  admet 2 solutions :

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{4x + 1}}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ (donc } y_1 \text{ ne convient pas car } y \leq \frac{1}{2} \text{)}$$

$$y_2 = \frac{1 - \sqrt{4x + 1}}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ (donc } y_2 \text{ convient car } y \leq \frac{1}{2} \text{)}$$

$$\text{Conclusion : } (\forall x \in ]-\frac{1}{4}, +\infty[) : g^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{4x + 1}}{2}$$

### PROBLÈME 7 ✕

Soit  $f$  définie par :  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4x}$

1) Étudier les variations de  $f$ .

2) Étudier les branches infinies de  $(C_f)$ .

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 - 2x)]$ . Conclusion ?

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x^2 + 2x)]$ . Conclusion ?

5) On pose :  $g(x) = x^2 - 2x - 2$  et  $h(x) = -x^2 + 2x + 2$

Tracer d'abord la courbe  $(C_g)$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

En déduire ensuite la courbe  $(C_h)$  dans le même repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

Tracer enfin la courbe  $(C_f)$  dans le même repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Solutions

1)  $D_f = ]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ ;  $f$  est continue sur son  $D_f$  et dérivable sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 4, +\infty [ = D'$ .

$$(\forall x \in D') : f'(x) = \frac{2(x^2 - 3x)}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

Il reste à étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 0 et à droite en 4. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - 4x} = 0. \text{ Donc } f \text{ est dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x \sqrt{x^2 - 4x}}{x - 4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x(x^2 - 4x)}{(x - 4)\sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 4, mais la courbe  $(C_f)$  admet à droite du point  $A(4, 0)$  une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

D'autre part :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc :

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$0$	$+\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$ . Donc la courbe  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$ . Donc la courbe  $(C_f)$  admet encore, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 - 2x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sqrt{x^2 - 4x} - (x^2 - 2x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x^2 - 4x) - (x^2 - 2x)^2}{x \sqrt{x^2 - 4x} + (x^2 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2}{x \sqrt{x^2 - 4x} + (x^2 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1 - \frac{2}{x}} = \frac{-4}{2} = -2. \end{aligned}$$

Donc, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , la courbe  $(C_f)$  est asymptote à la courbe de  $g(x) = x^2 - 2x - 2$

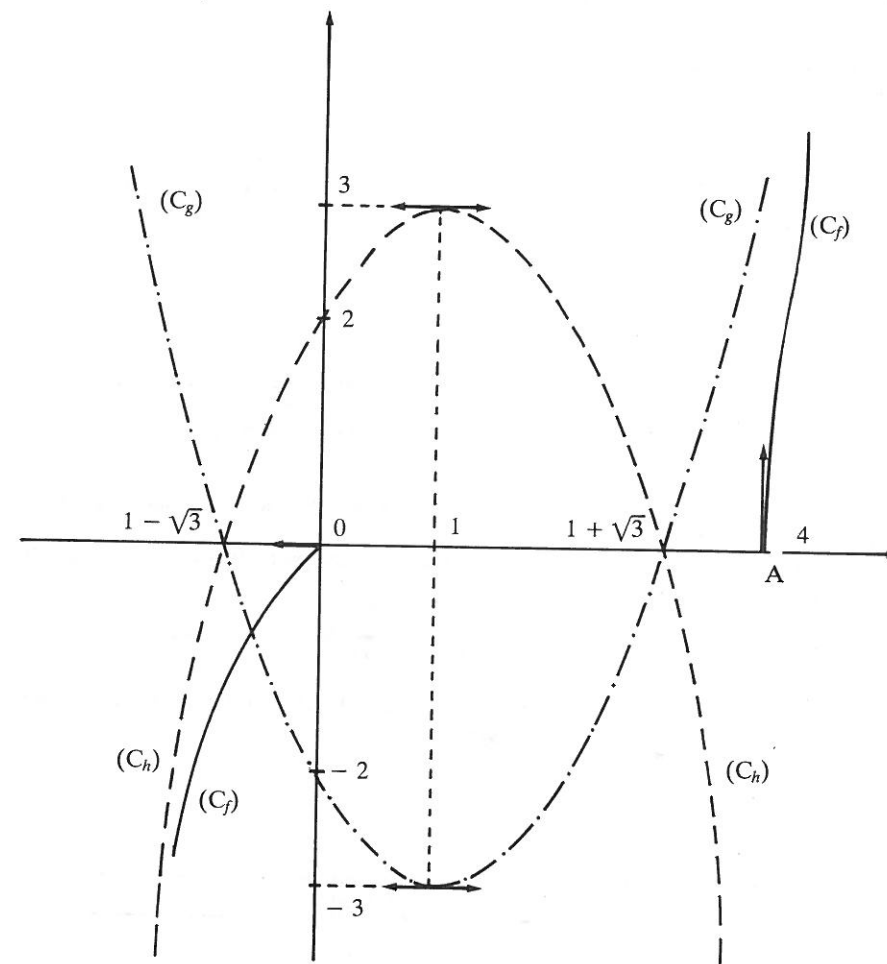
$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x^2 + 2x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x \sqrt{x^2 - 4x} - (-x^2 + 2x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(x^2 - 4x) - (-x^2 + 2x)^2}{x \sqrt{x^2 - 4x} + (-x^2 + 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{x \sqrt{x^2 - 4x} + (-x^2 + 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{-\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + (-1 + \frac{2}{x})} = \frac{-4}{-2} = 2. \end{aligned}$$

Donc, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , la courbe  $(C_f)$  est asymptote à la courbe de  $h(x) = -x^2 + 2x + 2$ .

5)  $D_g = \mathbb{R}$ ;  $(\forall x \in D_g) : g'(x) = 2x - 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

Donc :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-3$	$+\infty$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ . Donc  $(C_g)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

De même :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$ . Donc  $(C_g)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

On trace  $(C_g)$ . Puis on remarque que :  $D_h = \mathbb{R} = D_g$ . Et  $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = -g(x)$ . Donc  $(C_h)$  se déduit de  $(C_g)$  dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

### PROBLÈME 8

Soit  $f$  définie par  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x}$ .

- Déterminer  $D_f$  et calculer  $f'(x)$ .
- Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en 2 ; interpréter géométriquement chaque résultat.
- Déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- Etudier les branches infinies de  $(C_f)$ .
- Préciser les points d'intersection de  $(C_f)$  et de la droite d'équation  $y = x$ . On donne  $\sqrt{2} \approx 1,414$ . Construire  $(C_f)$ .
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty, 0]$ . Montrer que  $g$  est une bijection de  $]-\infty, 0]$  sur un intervalle que l'on déterminera. Soit  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$ .
  - Donner les valeurs de  $g^{-1}(0)$  et de  $g^{-1}(1 - \sqrt{2})$ .
  - Construire  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un même repère orthonormé.
- Soit  $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3$ . Calculer  $h(-1)$ . En déduire les valeurs de  $g^{-1}(-\sqrt{3})$  et  $(g^{-1})'(-\sqrt{3})$ .

### Solutions

1)  $D_f = ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  ;  $f$  est continue sur son  $D_f$ , et dérivable sur  $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ = D'$ . Et on a :  $(\forall x \in D') : f'(x) = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - 2x} = 0$ . Donc  $f$  est dérivable à gauche en 0 et  $f'_g(0) = 0$ . Par suite la courbe  $(C_f)$  admet à gauche du point 0 une demi tangente portée par l'axe des abscisses.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x(x^2 - 2x)}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}} = +\infty.$$

Donc,  $f$  n'est pas dérivable à droite en 2, mais la courbe  $(C_f)$  admet à droite du point A(2, 0) une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times \infty = +\infty$ .

Donc :

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	0	$+\infty$

Le tableau de variation est complété par des flèches indiquant l'augmentation ou la diminution de la fonction. Une zone hachurée est visible entre  $x=0$  et  $x=2$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$ . Donc la courbe  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$ . Donc la courbe  $(C_f)$  admet encore, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

5) Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation :  $f(x) = x$ .  
Or :  $f(x) = x \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2 - 2x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 = 0$ .  
Mais :  $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$  ou  $x = 1 - \sqrt{2}$ .

Conclusion : il y a donc 3 points d'intersection :

B( $1 + \sqrt{2}$ ,  $1 + \sqrt{2}$ ) ; B'( $1 - \sqrt{2}$ ,  $1 - \sqrt{2}$ ) ; et l'origine 0 des axes.

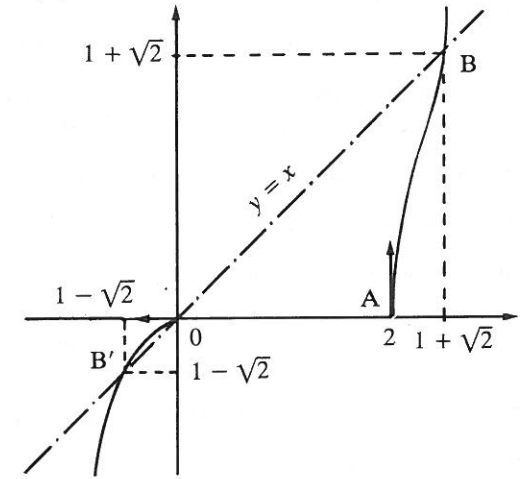
6) D'après le tableau de variation de  $f$  on voit que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty, 0]$ .

En plus on a :

$$g(]-\infty, 0]) = ]-\infty, 0].$$

Donc  $g$  est une bijection de

$$]-\infty, 0] \text{ sur } ]-\infty, 0].$$

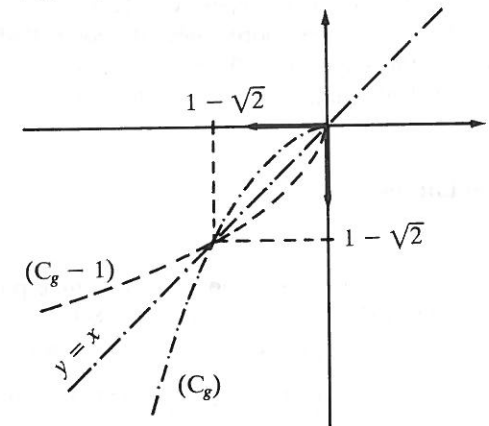


$$a) g^{-1}(0) = y \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = g(y) = f(y) \\ y \in ]-\infty, 0] \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$g^{-1}(1 - \sqrt{2}) = y \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} = g(y) = f(y) \Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{2} \text{ (voir la courbe } (C_f)\text{)}.$$

b) La courbe  $(C_g)$  n'est autre que la courbe  $(C_f)$  pour  $x \in ]-\infty, 0]$ .

La courbe  $(C_{g^{-1}})$  se déduit de la courbe  $(C_g)$  dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .



7)  $h(-1) = 1 + 2 - 3 = 0$ .

$$g^{-1}(-\sqrt{3}) = y \Leftrightarrow -\sqrt{3} = g(y) = f(y) = y\sqrt{y^2 - 2y} \Leftrightarrow 3 = y^2(y^2 - 2y) \Leftrightarrow y^4 - 2y^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow h(y) = 0$$

Or :  $h(-1) = 0$ . Donc  $y = -1$  est une solution de cette équation. Cette solution convient car  $y \in ]-\infty, 0)$ . D'autre part,  $g^{-1}$  est une bijection. Donc la solution  $y = -1$  est unique. D'où :  $g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ .

Enfin :  $(g^{-1})'(-\sqrt{3}) = \frac{1}{g'(y)}$  avec  $y = g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ .

$$D'où : (g^{-1})'(-\sqrt{3}) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\frac{5}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

### PROBLÈME 9

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1 - x + \sqrt{-x} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f_2(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$

- 1) Déterminer  $D_f$ .
- 2) Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ , et en particulier au point  $x_0 = 0$ .
- 3) Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ , et en particulier au point  $x_0 = 0$ . Interpréter géométriquement la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ .
- 4) Étudier les limites de  $f$  et les branches infinies de  $(C_f)$ .
- 5) Déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- 6) a) Étudier le signe de  $f'(x)$ .  
b) En déduire l'étude de la concavité de  $(C_f)$ .  
c) En déduire aussi que  $(C_f)$  admet un seul point d'inflexion I.  
d) Déterminer l'équation de la tangente à  $(C_f)$  en ce point I.
- 7) Pour  $x \in ]-\infty, 0[$ , déterminer le signe de  $f(x) + x$ . Conclusion?
- 8) Tracer la courbe  $(C_f)$ .
- 9) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, 4[$ .  
a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ ; construire la courbe  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère que  $(C_f)$ .  
b) Donner les coordonnées du point d'inflexion  $w$  de  $(C_{g^{-1}})$  et l'équation de la tangente à  $(C_{g^{-1}})$  en ce point  $w$ .  
c) Déterminer l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

### Solutions

1)  $D_{f_1} = ]-\infty, 0[$ .

$D_{f_2} = [0, +\infty[ - \{4\}$ ; donc  $f_2$  est définie pour tout  $x \in ]0, +\infty[ - \{4\}$ .

Par suite:  $D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ - \{4\} = \mathbb{R} - \{4\}$ .

Et on a:  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1 - x + \sqrt{-x} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f_2(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ - \{4\} \end{cases}$

2)  $f_1$  est continue sur son  $D_{f_1} = ]-\infty, 0[$ .

$f_2$  est continue sur son  $D_{f_2} = [0, +\infty[ - \{4\}$  et en particulier sur  $]0, +\infty[ - \{4\}$ .

Donc:  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^* - \{4\}$ .

Il reste à étudier la continuité de  $f$  en 0. En effet:

$f_1$  est continue à gauche en 0; donc  $f$  est continue à gauche en 0.

D'autre part:  $f(0) = f_1(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \frac{2}{2} = 1 = f(0)$ .

Donc  $f$  est continue aussi à droite en 0.

Par suite:  $f$  est continue en 0.

Conclusion:  $f$  est continue sur son  $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$ .

3)  $f_1$  est dérivable sur  $] - \infty, 0 [$ .

$f_2$  est dérivable sur  $] 0, + \infty [ - \{4\}$ .

Donc:  $f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = -1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f'_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2} & \text{pour } x \in ]0, +\infty[ - \{4\} \end{cases}$

Il reste à étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

$f$  est continue à gauche et à droite en 0. Donc on cherche si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 0.

On a:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_1(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -1 + \frac{\sqrt{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -1 - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = -\infty$

Donc:  $f$  n'est pas dérivable à gauche en 0, mais la courbe  $(C_f)$  admet à gauche du point  $A(0, 1)$  une demi tangente portée par l'axe des ordonnées.

De même:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_2(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x(2 - \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})} = +\infty$

Donc:  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0, mais la courbe  $(C_f)$  admet à droite du point  $A(0, 1)$  une demi tangente portée par l'axe des ordonnées.

Conclusion:  $f$  n'est pas dérivable en 0. Et par suite, elle est dérivable seulement sur  $\mathbb{R}^* - \{4\}$ .

4)  $D_f = ]-\infty, 4[ \cup ]4, +\infty[$ . On a donc 4 limites à chercher.

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f_2(x) = +\infty$ ; donc la droite d'équation  $x = 4$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers 4 (avec  $x < 4$ ).

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f_2(x) = -\infty$ ; donc la droite d'équation  $x = 4$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers 4 (avec  $x > 4$ ).

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$ ; en plus:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - 1 + \frac{\sqrt{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = -1$

Et:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt{-x}) = +\infty$ .

Donc la courbe  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $-\infty$ , une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation  $y = -x$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1}{\frac{2}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$ .

Donc la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5)  $(\forall x \in ]-\infty, 0[ : f'_1(x) < 0$

$(\forall x \in ]0, +\infty[-\{4\} : f'_2(x) > 0.$

Donc:

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$1$	$+\infty$	$-\infty$

6) a)  $f''(x) = \begin{cases} f''_1(x) = \frac{1}{4x\sqrt{-x}} & \text{pour } x \in ]-\infty, 0[ \\ f''_2(x) = \frac{3\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^3} & \text{pour } x \in ]0, +\infty[-\{4\}. \end{cases}$

$(\forall x \in ]-\infty, 0[ : f''_1(x) > 0.$

Mais le signe de  $f''_2(x)$  est celui de  $\frac{3\sqrt{x}-2}{2-\sqrt{x}}$

On a donc:

$x$	$0$	$\frac{4}{9}$	$4$	$+\infty$
$3\sqrt{x}-2$	$-$	$0$	$+$	$+$
$2-\sqrt{x}$	$+$	$+$	$0$	$-$
$f''_2(x)$	$-$	$0$	$+$	$-$

Par suite on a:

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{4}{9}$	$4$	$+\infty$		
$f''(x)$	$-$	$  $	$-$	$0$	$+$	$  $	$-$

b) La concavité de la courbe  $(C_f)$  est donc tournée vers les  $y$  négatifs pour  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, \frac{4}{9}[ \cup ]4, +\infty[$ , et vers les  $y$  positifs pour  $x \in ]\frac{4}{9}, 4[$

c) On remarque que  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe seulement au point  $x_0 = \frac{4}{9}$ . Donc la courbe  $(C_f)$  admet un seul point d'inflexion  $I(\frac{4}{9}, f(\frac{4}{9}))$  c'est-à-dire  $I(\frac{4}{9}, 2)$ .

d) L'équation de la tangente à  $(C_f)$  en ce point  $I$  est:

$$y = f\left(\frac{4}{9}\right) + \left(x - \frac{4}{9}\right) f'\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$\text{Mais: } f\left(\frac{4}{9}\right) = 2 \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{4}{9}\right) = f'_2\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{2}{\frac{2}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{27}{16}$$

$$\text{Donc: } y = 2 + \left(x - \frac{4}{9}\right) \frac{27}{16} = \frac{27}{16}x + \frac{5}{4}$$

7) Pour  $x \in ]-\infty, 0[$ ,  $f(x) + x = f_1(x) + x = 1 + \sqrt{-x} > 0.$

Donc pour  $x \in ]-\infty, 0[$ , la courbe  $(C_f)$  est située au-dessus de la droite d'équation  $y = -x$ .

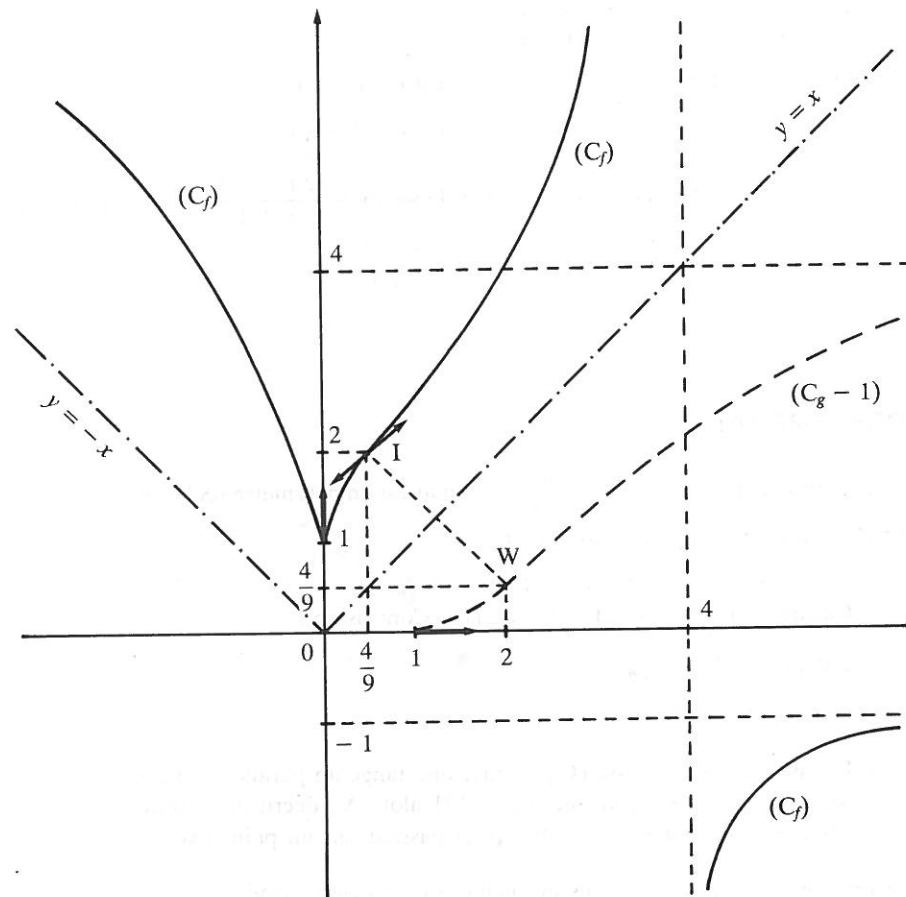
8) Pour bien préciser la courbe  $(C_f)$ , déterminons quelques points particuliers:

$$x = -1 \Rightarrow y = f_1(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f_2(1) = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

Donc la courbe  $(C_f)$  passe par les 2 points:  $E(-1, 3)$  et  $F(1, 3)$ .

D'où la courbe  $(C_f)$ :



9) a) D'après le tableau de variation de  $f$ , on voit que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 4[$ . En plus:  $g([0, 4]) = [1, +\infty[$ .

Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}: [1, +\infty[ \rightarrow [0, 4[$ .

La courbe  $(C_{g^{-1}})$  de  $g^{-1}$  se déduit de la courbe  $(C_g)$  par une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . (voir la courbe  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère que  $(C_f)$ ).

b) Le point d'inflexion W de  $(C_{g^{-1}})$  est le symétrique du point  $I\left(\frac{4}{9}, 2\right)$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . Donc on a :  $W\left(2, \frac{4}{9}\right)$ .  
De même la tangente à  $(C_{g^{-1}})$  au point d'inflexion W est la symétrique de la tangente  $y = \frac{27}{16}x + \frac{5}{4}$  par rapport à la 1<sup>ère</sup> bissectrice. Donc l'équation de la tangente à  $(C_{g^{-1}})$  au point d'inflexion W est  $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$  avec  $a = \frac{27}{16}$  et  $b = \frac{5}{4}$ .  
c'est-à-dire  $y = \frac{16}{27}x - \frac{20}{27}$ .

c)  $\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in [1, +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in [0, 4[ \end{cases}$   
Or :  $x = g(y) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = f_2(y)$  car  $y \in [0, 4[$ .  
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{y}}{2 - \sqrt{y}} \Leftrightarrow 2x - x\sqrt{y} = 2 + \sqrt{y}$   
 $\Leftrightarrow 2(x-1) = \sqrt{y}(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{2(x-1)}{x+1} \Leftrightarrow y = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$   
Donc :  $(\forall x \in [1, +\infty[ : g^{-1}(x) = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

### PROBLÈME 10 :

Soit  $f_m$  définie par  $f_m(x) = \frac{2x^2 + mx + 2}{(x+1)^2}$  où  $m$  est un paramètre réel différent de 4.

Soit  $(C_m)$  la courbe représentative de  $f_m$ .

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de  $f_m$ .  
Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ . Conclusion?  
b) Calculer la dérivée  $f'_m(x)$ .
- 2) Étudier les variations de  $f_m$ .
- 3) a) Préciser le point  $A_m$  où  $(C_m)$  admet une tangente parallèle à l'axe  $x'x$ .  
Montrer que lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R} - \{4\}$  alors  $A_m$  décrit une droite.  
b) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe.
- 4) Construire  $(C_{-4})$  et  $(C_8)$  dans un même repère orthonormé.  
Préciser les points où  $(C_8)$  coupe l'axe  $x'x$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f_8$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ . Construire  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un même repère orthonormé.
- 6) Calculer le nombre dérivé de  $g^{-1}$  en  $\frac{5}{2}$ , c'est-à-dire  $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$ .
- 7) Déterminer l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

### Solutions :

1) a)  $f_m$  est définie lorsque :  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ . D'où :  $Df_m = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + mx + 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Conclusion : la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à toutes les courbes  $(C_m)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et quand  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\text{b) } (\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) : f'_m(x) = \frac{(4-m)(x-1)}{(x+1)^3}$$

2) Le signe de  $f'_m(x)$  dépend du signe de  $4 - m$ .

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow -1} f_m(x) = \frac{4-m}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2}$$

qui dépend aussi du signe de  $4 - m$  car  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0_+$ .

Par conséquent, le tableau de variation de  $f_m$  dépend du signe de  $4 - m$ .

1<sup>er</sup> cas :  $4 - m > 0$  c'est-à-dire  $m < 4$

Dans ce cas  $f'_m(x)$  a le signe de  $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-1}{-0+}$

$$\text{En plus : } \lim_{x \rightarrow -1} f_m(x) = \frac{4-m}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2} = +\infty$$

D'où :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'_m(x)$		+	-	0	+
$f_m(x)$		$+\infty$	$+\infty$	$1 + \frac{m}{4}$	$2$

2<sup>e</sup> cas :  $4 - m < 0$  c'est-à-dire  $m > 4$ .

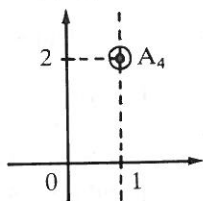
Dans ce cas  $f'_m(x)$  a le signe contraire de celui de  $\frac{x-1}{x+1}$ .

$$\text{En plus : } \lim_{x \rightarrow -1} f_m(x) = \frac{4-m}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2} = -\infty \text{ car } 4 - m < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0_+$$

D'où :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'_m(x)$		-	+	0	-
$f_m(x)$	$2$	$-\infty$	$1 + \frac{4}{m}$	$2$	

- 3) a) Dans les 2 cas,  $f'_m(x)$  s'annule en  $x_0 = 1$ . Par conséquent,  $(C_m)$  admet une tangente parallèle à l'axe  $x'x$  au point  $A_m\left(1, 1 + \frac{m}{4}\right)$ .  
L'abscisse de  $A_m$  est 1 (donc indépendant de  $m$ ). Par suite, lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R} - \{4\}$  alors  $A_m$  décrit la droite d'équation  $x = 1$  privée du point  $A_4(1, 2)$ .



- b) Soit  $I(x_0, y_0)$  ce point fixe cherché. Soit  $m$  et  $m'$  deux réels quelconques appartenant à  $\mathbb{R} - \{4\}$  avec  $m \neq m'$ .

$$(C_m) \text{ et } (C_{m'}) \text{ passent par } I(x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{2x_0^2 + mx_0 + 2}{(x_0 + 1)^2} \\ \text{et } y_0 = \frac{2x_0^2 + m'x_0 + 2}{(x_0 + 1)^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \frac{2x_0^2 + mx_0 + 2}{(x_0 + 1)^2} = \frac{2x_0^2 + m'x_0 + 2}{(x_0 + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 + mx_0 + 2 = 2x_0^2 + m'x_0 + 2$$

$$\Leftrightarrow mx_0 = m'x_0 \Leftrightarrow (m - m')x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ car } m \neq m'.$$

Le point fixe cherché est donc  $I(0, f_m(0))$  avec  $f_m(0) = 2$ .

Conclusion : toutes les courbes  $(C_m)$  passent par le point fixe  $I(0, 2)$ .

- 4) D'après la question 2) on a immédiatement :

à partir du 1<sup>er</sup> cas :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'_{-4}(x)$	+			
$f_{-4}(x)$		$+\infty$	$+\infty$	$2$

$\begin{array}{c} \nearrow \\ 2 \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \searrow \\ 0 \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \nearrow \\ 2 \end{array}$

à partir du 2<sup>e</sup> cas :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'_8(x)$	-		$0$	-
$f_8(x)$	$2$	$-\infty$	$3$	$2$

$\begin{array}{c} \searrow \\ -\infty \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \nearrow \\ 3 \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \searrow \\ 2 \end{array}$

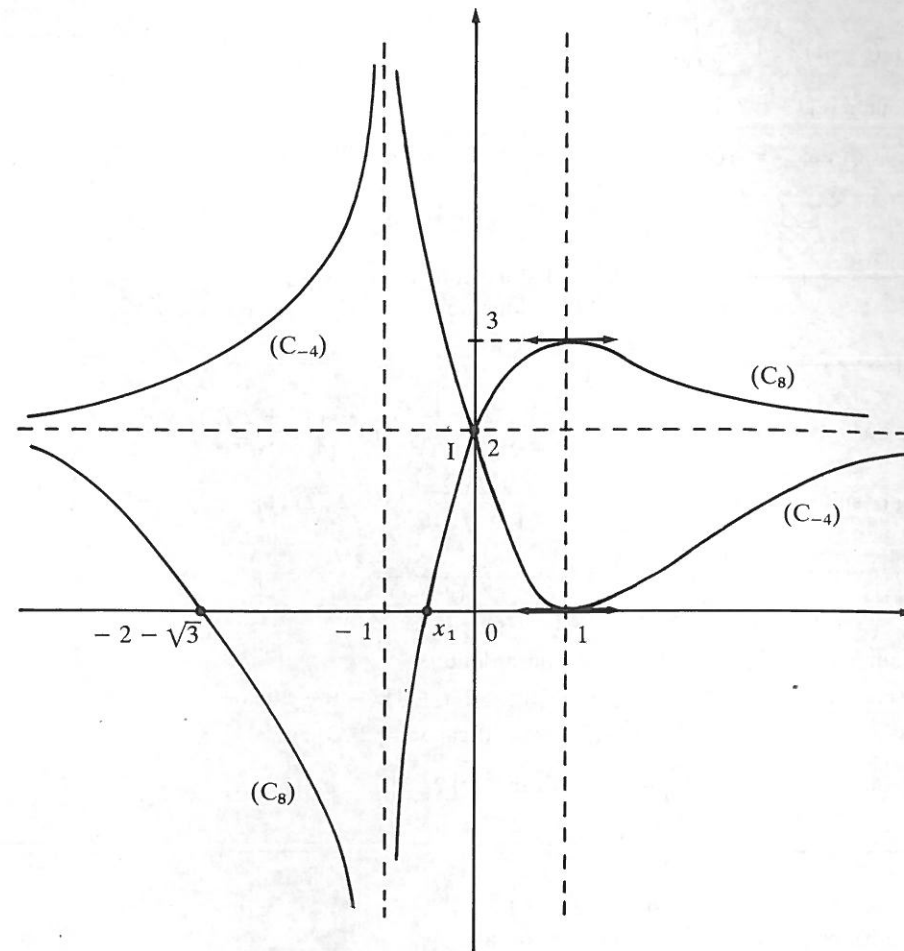
Les abscisses des points d'intersection de  $(C_8)$  et de l'axe  $x'x$  sont les solutions de l'équation :

$$f_8(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0.$$

On a :  $\Delta' = 4 - 1 = 3$  ; cette équation admet donc 2 solutions :

$$x_1 = -2 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = -2 - \sqrt{3} \text{ avec } \sqrt{3} \approx 1,732.$$

Rappelons que  $(C_{-4})$  et  $(C_8)$  doivent passer par le point fixe  $I(0, 2)$ .



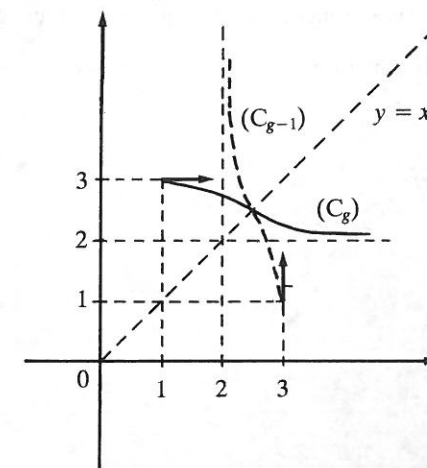
- 5) D'après le tableau de variation de  $f_8$  on a :

$x$	$1$	$+\infty$
$g(x)$	$3$	$2$

Donc :  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$  vers  $]2, 3]$ .

Elle admet donc une fonction réciproque  $g^{-1} : ]2, 3] \rightarrow [1, +\infty[$  qui est aussi continue et strictement décroissante.

La courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de  $g^{-1}$  se déduit de  $(C_g)$  dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .



$$6) (g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'(y)} \text{ avec } y = g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = g(y) \\ y \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

Pour  $y \in [1, +\infty[$  on a :

$$\frac{5}{2} = g(y) \Leftrightarrow \frac{5}{2} = f_8(y) = \frac{2y^2 + 8y + 2}{(y+1)^2} \Leftrightarrow 2y^2 + 8y + 2 = \frac{5}{2}(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - 3y + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 1 = 0.$$

$\Delta' = 9 - 1 = 8$  ;  $y = 3 + 2\sqrt{2} > 1$  donc convient car  $y \in [1, +\infty[$ .  
ou  $y = 3 - 2\sqrt{2} < 1$  donc ne convient pas car  $y \in [1, +\infty[$ .

$$\text{Mais : } g'(y) = f_8'(y) = \frac{-4(y-1)}{(y+1)^2}.$$

$$\text{D'où : } g'(y) = g'(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{-4(3 + 2\sqrt{2} - 1)}{(3 + 2\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{-4(2 + 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})^2} = \frac{-(1 + \sqrt{2})}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$\text{Par suite : } (g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'(y)} = -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2}.$$

$$7) \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in ]2, 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) = f_8(y) = \frac{2y^2 + 8y + 2}{(y+1)^2} \\ y \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

Pour  $x \in ]2, 3]$  et  $y \in [1, +\infty[$  on a donc :

$$x(y+1)^2 = 2y^2 + 8y + 2 \Leftrightarrow (x-2)y^2 + 2(x-4)y + x-2 = 0.$$

$$\Delta' = (x-4)^2 - (x-2)^2 = 4(3-x) \geq 0 \text{ car } x \in ]2, 3].$$

$$\text{D'où : } y_1 = \frac{4-x + 2\sqrt{3-x}}{x-2} > 0 \text{ car } x \in ]2, 3].$$

$$y_2 = \frac{4-x - 2\sqrt{3-x}}{x-2}$$

Mais :  $y \in [1, +\infty[$  c'est-à-dire  $y \geq 1$ .

Vérifions si on a :  $y_1 \geq 1$ . En effet on a :

$$y_1 \geq 1 \Leftrightarrow 4-x + 2\sqrt{3-x} \geq x-2 \text{ (car } x-2 > 0 \text{ puisque } x \in ]2, 3]).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} \geq x-3 \text{ vraie } \forall x \in ]2, 3] \text{ car } \sqrt{3-x} \geq 0 \text{ et } x-3 \leq 0.$$

Par conséquent  $y_1$  convient car  $y_1 \geq 1$ .

Mais la fonction réciproque est unique. Donc  $y_2$  ne convient pas.

$$\text{Et par suite : } (\forall x \in ]2, 3]) : g^{-1}(x) = \frac{4-x + 2\sqrt{3-x}}{x-2}$$

# Fonctions : Arcsinus Arccosinus Arctangente

Notation :

$D_f$  = le domaine de définition de  $f$

$D_E$  = le domaine d'étude de  $f$

$(C_f)$  = la courbe représentative de  $f$

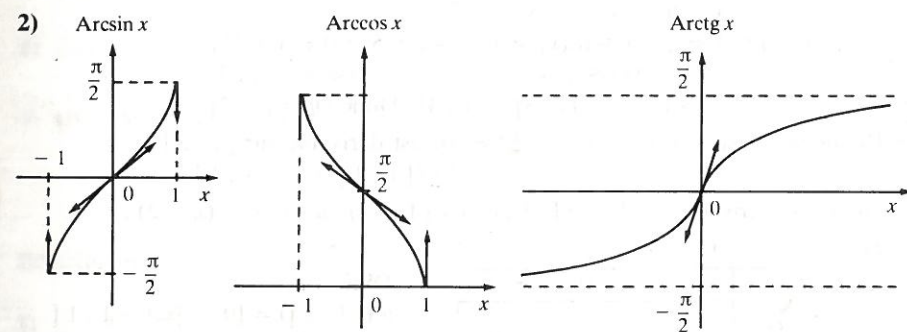
$P(f)$  = la période de  $f$

## RAPPELS

$$1) \begin{cases} t = \text{Arcsin } x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \text{Arccos } x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \text{Arctg } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{tg } t \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$



- 3)  $(\forall x \in [-1, 1]) : \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin } x$   
 $(\forall x \in [-1, 1]) : \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos } x$   
 $(\forall x \in \mathbb{R}) : \text{Arctg}(-x) = -\text{Arctg } x.$

$$\begin{array}{lll}
4) \text{ Arcsin } 0 = 0 & \text{Arccos } 0 = \frac{\pi}{2} & \text{Arctg } 0 = 0 \\
\text{Arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} & \text{Arccos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} & \text{Arctg } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \\
\text{Arcsin } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} & \text{Arccos } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} & \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4} \\
\text{Arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} & \text{Arccos } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} & \text{Arctg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \\
\text{Arcsin } 1 = \frac{\pi}{2} & \text{Arccos } 1 = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctg } x = \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

$$5) (\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) : \text{Arctg}(\text{tg } x) = x$$

$$(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) : \text{Arcsin}(\sin x) = x$$

$$(\forall x \in [0, \pi]) : \text{Arccos}(\cos x) = x$$

$$6) (\forall x \in \mathbb{R}) : \text{tg}(\text{Arctg } x) = x$$

$$(\forall x \in [-1, 1]) : \sin(\text{Arcsin } x) = x \text{ et } \cos(\text{Arccos } x) = x$$

$$: \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } \cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$7) (\forall x \in ]-1, 1[) : (\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } (\text{Arccos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\text{Arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$8) \text{ Soit } f(x) = \text{Arcsin } u(x) \text{ et } g(x) = \text{Arccos } u(x). \text{ On a :}$$

$$f \text{ (ou } g) \text{ est définie lorsque : } \begin{cases} u \text{ est définie} \\ \text{et } -1 \leq u(x) \leq 1 \end{cases}$$

$$f \text{ (ou } g) \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur } ]a, b[ \\ \text{et } u(]a, b[) \subset ]-1, 1[. \end{cases}$$

$$\text{Et dans ce cas : } (\forall x \in ]a, b[) : f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} \text{ et } g'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

Exemple : Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de  $f(x) = \text{Arcsin}(x-2)^2$ .

Solution : Posons  $u(x) = (x-2)^2$ ;  $D_u = \mathbb{R}$ ; donc  $f$  est définie lorsque :

$$-1 \leq u(x) \leq 1. \text{ Or on a :}$$

$$-1 \leq u(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq u(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \\ u(x) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3]. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap [1, 3] = [1, 3]. \text{ Donc } D_f = [1, 3].$$

$$\text{De même : } f \text{ est dérivable sur } ]1, 3[ \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur } ]1, 3[ \\ u(]1, 3[) \subset ]-1, 1[. \end{cases}$$

$$\text{Or : } u \text{ est dérivable sur } ]1, 3[. \text{ Et } (\forall x \in ]1, 3[) : u'(x) = 2(x-2).$$

Donc : $x$	1	2	3
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	1		1

$$D'ou : \text{ on a : } u(]1, 3[) = [0, 1[ \subset ]-1, 1[$$

Par conséquent :  $f$  est dérivable sur  $]1, 3[$ .

$$\text{Et : } (\forall x \in ]1, 3[) : f'(x) = \frac{2(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^4}}$$

$$9) \text{ Soit } h(x) = \text{Arctg } u(x). \text{ On a :}$$

$h$  est définie lorsque  $u$  est définie; donc :  $D_h = D_u$ .

$h$  est dérivable sur  $]a, b[$  lorsque  $u$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

$$\text{Et dans ce cas : } (\forall x \in ]a, b[) : h'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Exemple : Soit  $h(x) = \text{Arctg } \sqrt{4-x^2}$ . On a :

$$u(x) = \sqrt{4-x^2}; D_h = D_u = [-2, 2].$$

D'autre part :  $u$  est dérivable sur  $] -2, 2 [$ .

Donc :  $h$  est dérivable sur  $] -2, 2 [$ .

$$\text{Et : } (\forall x \in ]-2, 2[) : h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{(5-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$10) \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}; \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}; \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

$$D'où : \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

$$D'autre part : \text{ on a : } \frac{1}{\text{tg } \theta} = \text{cotg } \theta = \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

$$\text{Enfin : } \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \theta}; \sin^2 \theta = \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}$$

$$\boxed{\text{tg } 2\theta = \frac{2 \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}}; \sin 2\theta = \frac{2 \text{tg } \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}; \cos 2\theta = \frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}$$

### EXERCICE 1 :

Résoudre les équations suivantes :

$$1) \text{ (E) : } \text{Arctg } x = 2 \text{ Arctg } \frac{1}{2} \left( \text{poser } \alpha = \text{Arctg } \frac{1}{2} \right).$$

$$2) \text{ (F) : } \text{Arctg } x = \frac{\pi}{4} + 2 \text{ Arctg } \frac{1}{4} \left( \text{poser } \alpha = \text{Arctg } \frac{1}{4} \right).$$

$$3) \text{ (H) : } \text{Arccos } x = 2 \text{ Arcsin } \frac{1}{3} \left( \text{poser } \alpha = \text{Arcsin } \frac{1}{3} \right).$$

$$4) \text{ (A) : } \text{Arcsin } x = 2 \text{ Arccos } \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \text{poser } \alpha = \text{Arccos } \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

$$5) \text{ (B) : } \text{Arccos } x = \text{Arccos } \frac{\sqrt{3}}{3} - \text{Arccos } \frac{1}{3} \left( \text{poser } \alpha = \text{Arccos } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \beta = \text{Arccos } \frac{1}{3} \right).$$

### Solutions :

$$1) \alpha = \text{Arctg } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{tg } \alpha$$

$$\text{Donc : (E) } \Leftrightarrow \text{Arctg } x = 2\alpha \Leftrightarrow x = \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$2) \alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \operatorname{tg} \alpha .$$

$$\text{Donc : (F)} \Leftrightarrow \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{4} + 2\alpha \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$\text{Mais : } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15} .$$

$$\text{Par suite : } x = \frac{1 + \frac{8}{15}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{23}{7} .$$

$$3) \alpha = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \sin \alpha .$$

L'équation (H) exige  $x \in [-1, 1]$ . Sous cette condition on a :

$$\text{(H)} \Leftrightarrow \operatorname{Arccos} x = 2\alpha \Leftrightarrow x = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left( \frac{1}{9} \right) = \frac{7}{9} .$$

Cette valeur convient car  $\frac{7}{9} \in [-1, 1]$ .

$$4) \alpha = \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \alpha .$$

L'équation (A) exige  $x \in [-1, 1]$ . Sous cette condition on a :

$$\text{(A)} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin} x = 2\alpha \Leftrightarrow x = \sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha .$$

$$\text{Mais : } \sin \alpha = \sin \left( \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ou encore : } \frac{\sqrt{3}}{3} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left] \operatorname{Arccos} 1, \operatorname{Arccos} 0 [=] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Donc : } x = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} . \text{ Cette valeur convient car } \frac{2\sqrt{2}}{3} \in [-1, 1] .$$

$$5) \alpha = \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \alpha$$

$$\beta = \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \cos \beta$$

L'équation (B) exige :  $x \in [-1, 1]$ . Sous cette condition on a :

$$\text{(B)} \Leftrightarrow \operatorname{Arc} \cos x = \alpha - \beta \Leftrightarrow x = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mais : } \sin \alpha = \sin \left( \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \text{Et : } \sin \beta = \sin \left( \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} \right) = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ou encore : } \frac{\sqrt{3}}{3} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left] \operatorname{Arccos} 1, \operatorname{Arccos} 0 [=] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \text{Et : } \frac{1}{3} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \beta = \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} \in \left] \operatorname{Arccos} 1, \operatorname{Arccos} 0 [=] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \Rightarrow \sin \beta > 0 \Leftrightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Par conséquent : } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{9} . \text{ Cette valeur convient car } \frac{5\sqrt{3}}{9} \in [-1, 1] .$$

## EXERCICE 2

$$1) \text{ Démontrer l'égalité : } \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctg} \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left( \text{poser } \alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} \text{ et } \beta = \operatorname{Arctg} \frac{2}{3} \text{ et calculer } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \right)$$

$$2) \text{ Démontrer l'égalité : } \operatorname{Arccos} \frac{5}{13} + \operatorname{Arccos} \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left( \text{poser } \alpha = \operatorname{Arccos} \frac{5}{13} \text{ et } \beta = \operatorname{Arccos} \frac{12}{13} \text{ et calculer } \cos(\alpha + \beta) \right)$$

## Solutions

$$1) \alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\beta = \operatorname{Arctg} \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\text{Donc : } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5} \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{1 - \frac{2}{15}} = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} .$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} .$$

$$\text{Mais : } \frac{1}{5} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} \in \left] \operatorname{Arctg} 0, \operatorname{Arctg} 1 [=] 0, \frac{\pi}{4} \right[$$

$$\text{Et : } \frac{2}{3} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \beta = \operatorname{Arctg} \frac{2}{3} \in \left] \operatorname{Arctg} 0, \operatorname{Arctg} 1 [=] 0, \frac{\pi}{4} \right[$$

$$\text{Donc : } \alpha + \beta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

Par suite : la seule valeur qui convient est  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  (obtenu pour  $k = 0$ ) car pour les autres valeurs de  $k$  on obtient  $\alpha + \beta \notin \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

$$2) \alpha = \text{Arccos} \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{5}{13} = \cos \alpha$$

$$\beta = \text{Arccos} \frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{12}{13} = \cos \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \frac{12}{13} - \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \\ &= \frac{60}{169} - \sqrt{\frac{144}{169}} \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{60}{169} - \frac{12}{13} \frac{5}{13} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Mais: } \frac{5}{13} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \alpha = \text{Arccos} \frac{5}{13} \in ]\text{Arccos } 1, \text{Arccos } 0[ = ]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Et: } \frac{12}{13} \in ]0, 1[ \Leftrightarrow \beta = \text{Arccos} \frac{12}{13} \in ]\text{Arccos } 1, \text{Arccos } 0[ = ]0, \frac{\pi}{2}[$$

Donc:  $\alpha + \beta \in ]0, \pi[$ .

Par suite: la seule valeur qui convient est  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  (obtenu pour  $k = 0$ ) car pour les autres valeurs de  $k$  on obtient  $\alpha + \beta \notin ]0, \pi[$ .

### EXERCICE 3:

Résoudre les équations suivantes:

1) (E):  $2 \text{Arccos } x = \text{Arccos}(2x^2 - 1)$  (poser  $x = \cos \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ )

2) (F):  $\frac{\pi}{2} - 2 \text{Arcsin } x = \text{Arcsin}(1 - 2x^2)$  (poser  $x = \sin \theta$  avec  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ )

3) (H):  $\frac{\pi}{2} - 2 \text{Arccos } x = \text{Arccos } 2x \sqrt{1 - x^2}$  (poser  $x = \cos \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ ).

### Solutions:

1) L'équation (E) exige:  $x \in [-1, 1]$  et  $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$ .

$$\text{Or: } -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ 2x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Par conséquent: l'équation (E) exige:  $x \in [-1, 1] \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$ .

Sous cette condition on a:

$$(E) \Leftrightarrow 2 \text{Arccos}(\cos \theta) = \text{Arccos}(2 \cos^2 \theta - 1) \Leftrightarrow 2\theta = \text{Arccos}(\cos 2\theta)$$

$$\Leftrightarrow 2\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \cos \theta \in \left[\cos \frac{\pi}{2}, \cos 0\right] = [0, 1].$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'intervalle  $[0, 1]$  car  $[0, 1] \subset [-1, 1]$ .

2) L'équation (F) exige:  $x \in [-1, 1]$  et  $-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1$ .

$$\text{Or: } -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2(1 - x^2) \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \\ \text{et} \\ 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par conséquent: l'équation (F) exige:  $x \in [-1, 1] \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$ .

Sous cette condition on a:

$$(F) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arcsin}(\sin \theta) = \text{Arcsin}(1 - 2 \sin^2 \theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \text{Arcsin} \cos 2\theta \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \text{Arcsin} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -2\theta \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow 2\theta \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin \theta \in \left[\sin 0, \sin \frac{\pi}{2}\right] = [0, 1].$$

L'ensemble des solutions de (F) est donc l'intervalle  $[0, 1]$  car  $[0, 1] \subset [-1, 1]$ .

3) L'équation (H) exige:  $x \in [-1, 1]$  et  $-1 \leq 2x \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ .

Posons:  $u(x) = 2x \sqrt{1 - x^2}$ . On a:  $D_u = [-1, 1]$ .

$$(\forall x \in ]-1, 1[ : u'(x) = \frac{2(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Donc:	$x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	$u'(x)$	-	0	+	0	-
	$u(x)$	0		1		0

D'où:

$$(\forall x \in [-1, 1]) : u(x) \in [-1, 1]$$

Par conséquent: l'équation (H) exige:  $x \in [-1, 1]$ .

Sous cette condition on a:

$$(H) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arccos} \cos \theta = \text{Arccos}(2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta})$$

Mais:  $\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = \sin \theta$  car  $\sin \theta > 0$  car  $\theta \in [0, \pi]$ .

$$\text{Donc: } (H) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \text{Arccos}(2 \cos \theta \sin \theta) = \text{Arccos}(\sin 2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \text{Arccos} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow -2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Mais: l'équation (H) exige  $x \in [-1, 1]$  donc  $\theta = \text{Arccos } x \in [0, \pi]$ .

$$\text{D'où: } (H) \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x = \cos \theta \in \left[\cos \frac{\pi}{4}, \cos 0\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

L'ensemble des solutions de (H) est donc l'intervalle  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

car  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \subset [-1, 1]$ .

### EXERCICE 4:

Résoudre les équations suivantes:

- 1) (E):  $2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2}$  (poser  $x = \operatorname{tg} \theta$  avec  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \left\{ \pm \frac{\pi}{4} \right\}$ )  
 2) (F):  $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctg} x = \operatorname{Arctg} \frac{1-x^2}{2x}$  (poser  $x = \operatorname{tg} \theta$  avec  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$ )

#### Solutions:

1) L'équation (E) exige:  $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$  et  $x \neq 1$ ;

$$\text{Donc } \theta = \operatorname{Arctg} x \neq \begin{cases} \operatorname{Arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Sous cette condition on a:

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 2 \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} \theta) = \operatorname{Arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} \Leftrightarrow 2\theta = \operatorname{Arctg} \operatorname{tg} 2\theta \Leftrightarrow 2\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ &\Leftrightarrow \theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} \theta \in \left] \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right[ = ]-1, 1[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'intervalle  $] -1, 1 [$ .

2) L'équation (F) exige:  $x \neq 0$ ; donc  $x = \operatorname{Arctg} \theta \neq \operatorname{Arctg} 0 = 0$ .

Sous cette condition on a:

$$\begin{aligned} (F) &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctg} \operatorname{tg} \theta = \operatorname{Arctg} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \operatorname{tg} \theta} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\operatorname{tg} 2\theta} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta = \operatorname{Arctg} \operatorname{cotg} \theta = \operatorname{Arctg} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ &\Leftrightarrow -2\theta \in \left] -\pi, 0 \right[ \Leftrightarrow 2\theta \in ]0, \pi[ \Leftrightarrow \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ &\Leftrightarrow x = \operatorname{tg} \theta \in ] \operatorname{tg} 0, \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \theta [= ]0, +\infty[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (F) est donc l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

### EXERCICE 5:

1) Calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$ .

2) Soit  $u(x) = 3x - 4x^3$ . Calculer  $u(-1)$ ,  $u(0)$  et  $u(1)$ .

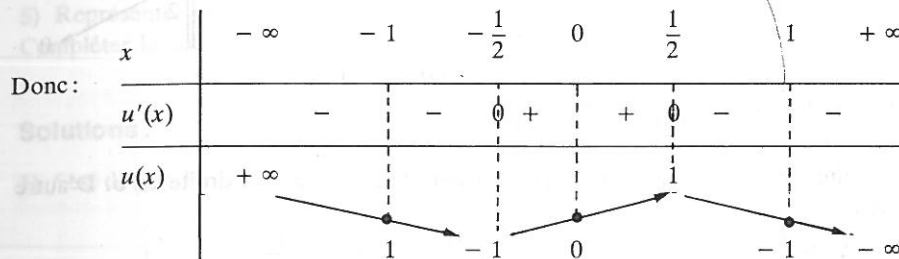
Étudier les variations de  $u$ . En déduire le domaine de définition de  $f(x) = \operatorname{Arc} \cos(3x - 4x^3)$ .

3) Résoudre l'équation (E):  $\pi - 3 \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos}(3x - 4x^3)$ . (Poser  $x = \cos \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ ).

### Solutions:

$$\begin{aligned} 1) \cos^3 x &= \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \sin x (2 \sin x \cos x) \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) u(-1) &= -3 + 4 = 1; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 3 - 4 = -1 \\ D_u &= \mathbb{R}; \quad (\forall x \in \mathbb{R}) : u'(x) = 3 - 12x^2 = 3(1 - 4x^2). \end{aligned}$$



D'autre part:  $f$  est définie lorsque:  $-1 \leq u(x) \leq 1$ .

Or: d'après le tableau de variation de  $u$  on a:

$$-1 \leq u(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ - Donc: } D_f = [-1, 1]$$

3) L'équation (E) exige:  $\begin{cases} x \in [-1, 1] \text{ et} \\ -1 \leq u(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ voir 2).} \end{cases}$

Donc: l'équation (E) exige:  $x \in [-1, 1]$ . Sous cette condition on a:

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \pi - 3 \operatorname{Arccos} \cos \theta = \operatorname{Arccos}(3 \cos \theta - 4 \cos^3 \theta) \\ &\Leftrightarrow \pi - 3\theta = \operatorname{Arccos}(-\cos 3\theta) = \pi - \operatorname{Arccos} \cos 3\theta \\ &\Leftrightarrow 3\theta = \operatorname{Arccos} \cos 3\theta \Leftrightarrow 3\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ &\Leftrightarrow x = \cos \theta \in \left[\cos \frac{\pi}{3}, \cos 0\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  car  $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset [-1, 1]$ .

### EXERCICE 6

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ .

1) Étudier les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

2) Soit  $g$  définie par  $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in ]0, +\infty[ \\ g(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Que représente  $g$  par rapport à  $f$ ? En posant  $t = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ .

Conclusion.

3) Tracer la courbe  $(C_g)$ . En déduire la courbe  $(C_f)$  sur  $]0, +\infty[$ . Compléter  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

### Solutions

1)  $D_f = \mathbb{R}^*$ ;  $f$  est impaire; il suffit donc d'étudier  $f$  sur  $D_E = ]0, +\infty[$ .

$$(\forall x \in D_E) : f'(x) = \frac{-1}{x^2 + 1} < 0; \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{Arctg } u = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0_+} \text{Arctg } u = 0.$$

Donc :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	0

2)  $g$  est définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in ]0, +\infty[ \\ g(0) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) \end{cases}$$

Par suite, sur  $D_E$ ,  $g$  est le prolongement par continuité de  $f$  à droite en  $o$ . D'autre part on a :

$$\begin{cases} t = \text{Arctg } \frac{1}{x} \\ x \in ]0, +\infty[ \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in ]0, +\infty[ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \text{tg } t \Leftrightarrow x = \frac{1}{\text{tg } t} \\ t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\text{tg } t}} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\text{cotg } t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - t)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{h}{\text{tg } h} \right) = -1 \text{ (avec } h = t - \frac{\pi}{2} \text{)}$$

Conclusion :  $g$  est dérivable à droite en  $o$  et  $g'_d(o) = -1$ . Par suite, la courbe  $(C_g)$

admet à droite du point  $A(0, \frac{\pi}{2})$  une demi tangente de pente  $-1$  et d'équation :

$$y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

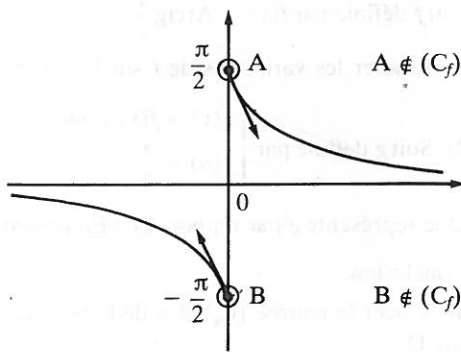
3) D'après le tableau de variation de  $f$  on a :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-1	-
$g(x)$	$\frac{\pi}{2}$	0

On trace donc la courbe  $(C_g)$ . Puis on déduit la courbe  $(C_f)$  sur  $]0, +\infty[$  car cette courbe  $(C_f)$  n'est autre que la courbe  $(C_g)$  privée du point  $A(0, \frac{\pi}{2})$ .

Enfin on complète  $(C_f)$  sur  $\mathbb{R}^*$  par symétrie par rapport à l'origine  $o$  car  $f$  est impaire.

Donc les points  $A(0, \frac{\pi}{2})$  et  $B(0, -\frac{\pi}{2})$  n'appartiennent pas à  $(C_f)$ .



### EXERCICE 7 :

Soit  $f(x) = \text{Arccos } \frac{1}{x}$ .

- Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- Calculer  $f(-x)$  en fonction de  $f(x)$ . Conclusion.
- Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .
- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 (poser  $t = \text{Arccos } \frac{1}{x}$ ).
- Représenter graphiquement  $f$  sur  $]1, +\infty[$ . Compléter la courbe  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

### Solutions :

1)  $f$  est définie lorsque :  $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ .

$$\text{Or : } -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \\ \frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[ = D_1 \\ x \in ]-\infty, -1] \cup ]0, +\infty[ = D_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in D_1 \cap D_2 = ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[.$$

Donc :  $D_f = ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$ .

2)  $f(-x) = \text{Arccos}(-\frac{1}{x}) = \pi - \text{Arccos} \frac{1}{x} = \pi - f(x)$ .

Donc :  $(\forall x \in D_f), -x \in D_f$  et  $f(-x) = \pi - f(x)$ .

Par suite : le point  $I(0, \frac{\pi}{2})$  est un centre de symétrie pour la courbe de  $f$ .

3) Posons  $u(x) = \frac{1}{x}$ . On a :

$f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[ \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur } ]1, +\infty[ \\ u(]1, +\infty[) \subset ]-1, 1[ \end{cases}$

Or  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et en particulier sur  $]1, +\infty[$ . En plus, on a :

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0; \text{ donc}$$

$x$	1	$+\infty$
$u'(x)$		-
$u(x)$	1	0

Par suite :  $u(]1, +\infty[) = ]0, 1[ \subset ]-1, 1[$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ .

$$(\forall x \in ]1, +\infty[) : f'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} > 0$$

$$4) \begin{cases} t = \text{Arccos } \frac{1}{x} \\ x \in ]1, +\infty[ \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in ]0, 1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \cos t \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos t} \\ t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{t}{\frac{1}{\cos t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{t}{1 - \cos t} \cos t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{t}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \cos t = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\frac{t}{2} \cos t}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}}$$

$$= 1 \times +\infty = +\infty$$

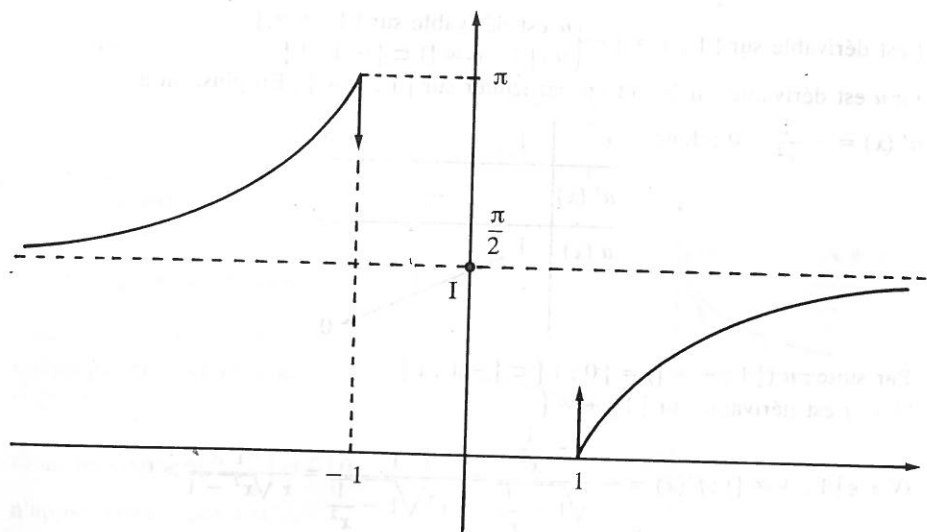
Par suite :  $f$  n'est pas dérivable à droite en 1, mais la courbe  $(C_f)$  admet à droite du point A  $(1, 0)$  une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0, u > 0} \text{Arccos } u = \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$x$	$I$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$
$f(x)$	$0$	$\frac{\pi}{2}$

On trace  $(C_f)$  sur  $]1, +\infty[$ . Puis on complète  $(C_f)$  sur  $D_f$  par symétrie par rapport au point I  $(0, \frac{\pi}{2})$ .



### EXERCICE 8

Soit  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{Arctg } x$ .

1) Démontrer que  $\lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \left( \frac{t}{\cos t} - \frac{\pi}{2} \text{tg } t \right) = -1$  (poser  $t = \frac{\pi}{2} - h$ ).

2) a) Déterminer  $D_f$  et  $D_E$ ; et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Soit a cette limite.

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$  (poser  $t = \text{Arctg } x$  et utiliser la question 1))

3) Représenter graphiquement  $f$  sur  $D_E$ .

Compléter la courbe  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

### Solutions

$$1) \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \left( \frac{t}{\cos t} - \frac{\pi}{2} \text{tg } t \right) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} - h}{\cos(\frac{\pi}{2} - h)} - \frac{\pi}{2} \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - h \right) \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} - h}{\sin h} - \frac{\pi}{2} \text{cotg } h \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin h} - \frac{h}{\sin h} - \frac{\pi \cos h}{2 \sin h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin h} (1 - \cos h) - \frac{h}{\sin h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} \left( 2 \sin^2 \left( \frac{h}{2} \right) \right) - \frac{h}{\sin h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \left[ \frac{\pi}{2} \text{tg } \frac{h}{2} - \frac{h}{\sin h} \right] = \frac{\pi}{2} \times 0 - 1 = -1$$

2) a)  $D_f = \mathbb{R}$ ;  $f$  est impaire; donc  $D_E = [0, +\infty[$ ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctg } x = +\infty \times \frac{\pi}{2} = +\infty$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \text{Arctg } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \text{Arctg } x = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

c)  $\begin{cases} t = \text{Arctg } x \\ x \in [0, +\infty[ \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} x = \text{tg } t \\ t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right[ \end{cases}$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{\pi}{2} x \right] = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \left[ \sqrt{\text{tg}^2 t + 1} t - \frac{\pi}{2} \text{tg } t \right]$$

Mais:  $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ . En plus  $\cos t > 0$  pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Par suite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{\pi}{2}x \right] = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \left( \frac{t}{\cos t} - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} t \right) = -1$  (voir 1°).

Conclusion: La courbe  $(C_f)$  admet, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , une asymptote oblique d'équation  $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ .

$$\begin{aligned} 3) (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \operatorname{Arctg} x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+x^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{Arctg} x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x \operatorname{Arctg} x + 1) \end{aligned}$$

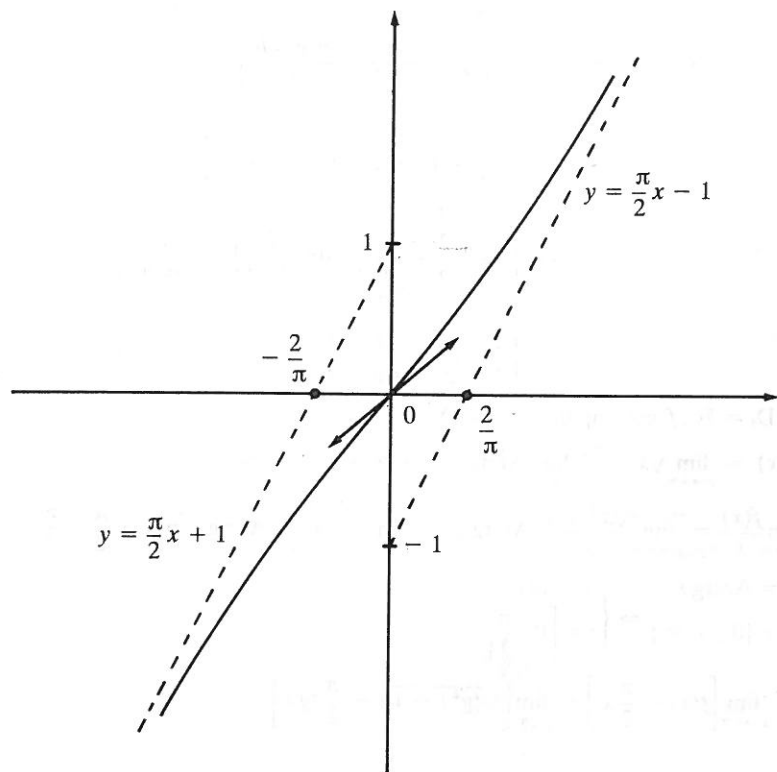
Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) > 0$  car  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \operatorname{Arctg} x \geq 0$

D'où:

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	1	+
$f(x)$	0	$+\infty$

On trace  $(C_f)$  pour  $x \in [0, +\infty[$

Puis on complète  $(C_f)$  sur  $\mathbb{R}$  par symétrie par rapport à l'origine 0 car  $f$  est impaire.



Remarque: on pourra étudier la concavité de cette courbe. En effet,

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}} (x \operatorname{Arctg} x + 1) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \left( \operatorname{Arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} (x \operatorname{Arctg} x + 1) + \frac{\operatorname{Arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{-x^2 \operatorname{Arctg} x - x + (x^2+1) \operatorname{Arctg} x + x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\operatorname{Arctg} x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \text{ Son signe est celui de } \operatorname{Arctg} x. \end{aligned}$$

Donc:

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Par suite, la courbe  $(C_f)$  admet un seul point d'inflexion  $A(0, f(0)) = A(0, 0)$ .

En plus: pour  $x \in ]-\infty, 0[$  la concavité de  $(C_f)$  est tournée vers les  $y$  négatifs; et elle est tournée vers les  $y$  positifs pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

### EXERCICE 9

Soit  $f(x) = x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arccos} x$ .

1) Déterminer  $D_f$ .

2) En posant  $t = \operatorname{Arccos} x$ , démontrer que:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \operatorname{Arccos} x = 2$ .

En déduire la valeur de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

3) Étudier la dérivabilité de  $f$  sur son  $D_f$ .

4) Déterminer l'équation de la demi tangente à  $(C_f)$  au point  $B(1, 1)$ .

5) Déterminer le tableau de variation de  $f$  et construire  $(C_f)$ .

[préciser bien  $(C_f)$  aux points  $A(-1, -1)$ ,  $E(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $B(1, 1)$ .]

### Solutions

1)  $\sqrt{1-x^2}$  est définie pour  $x \in [-1, 1]$ .

$\operatorname{Arccos} x$  est définie pour  $x \in [-1, 1]$

Par suite:  $D_f = [-1, 1]$ .

2)  $\begin{cases} t = \operatorname{Arccos} x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\text{Donc: } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)}} = \left| \cotg \frac{t}{2} \right| = \left| \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right|$$

Par suite :  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \operatorname{Arccos} x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|\operatorname{tg} \frac{t}{2}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{t}{t} = 2$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arccos} x - 1}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x-1}{x-1} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} \operatorname{Arccos} x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} \operatorname{Arccos} x \right] \text{ car } 1-x > 0 \text{ pour } x < 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}} \operatorname{Arccos} x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \operatorname{Arccos} x \right] = 1 - 2 = -1$$

3)  $\sqrt{1-x^2}$  et  $\operatorname{Arccos} x$  sont dérivables sur  $] -1, 1[$ .  
Par suite,  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ .

$$(\forall x \in ] -1, 1[) : f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arccos} x + \sqrt{1-x^2} \left( \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arccos} x.$$

En plus : on a vu dans la question 2) que :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$

Donc :  $f$  est dérivable à gauche en 1 et  $f'_g(1) = -1$ .

Enfin on a :  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arccos} x + 1}{x + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{x+1}{x+1} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} \operatorname{Arccos} x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1-x^2}{(x+1)^2}} \operatorname{Arccos} x \right] \text{ car } x+1 > 0 \text{ pour } x > -1$$

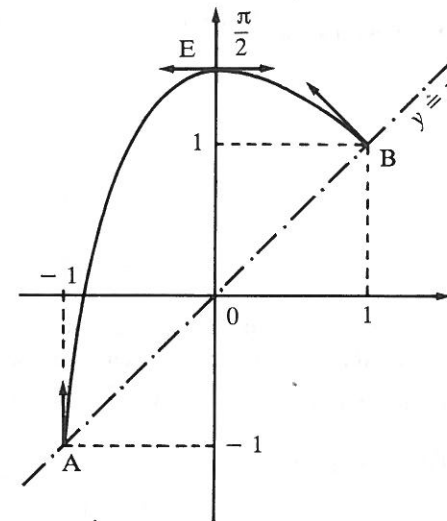
$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \operatorname{Arccos} x \right] = 1 + \infty \times \pi = +\infty$$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $-1$ .

4) L'équation de la demi-tangente à  $(C_f)$  au point  $B(1, 1)$  est :  
 $y = f(1) + (x-1)f'_g(1) = 1 + (x-1)(-1) = -x + 2$ . Cette demi-tangente est de pente  $-1$ , donc parallèle à la 2<sup>e</sup> bissectrice.

5)

$x$	$-1$	$0$	$1$
$-x$	$+$	$0$	$-$
$\sqrt{1-x^2}$	$+$	$+$	
$\operatorname{Arccos} x$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$0$	$- -1$
$f(x)$	$-1$	$\frac{\pi}{2}$	$1$



Précision de  $(C_f)$  au point  $A(-1, -1)$  : on a vu que :  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ .

Donc  $(C_f)$  admet à droite du point  $A(-1, -1)$  une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

### EXERCICE 10

Soit  $f(x) = \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ . On admet que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$

- Déterminer  $D_f$  et  $D_E$ .
- Etudier les variations de  $f$  sur  $D_E$ .
- Préciser la courbe  $(C_f)$  au voisinage du point  $B(0, \frac{\pi}{2})$ .
- Construire  $(C_f)$  sur  $D_E$ . Compléter  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

### Solutions

1)  $f$  est définie lorsque :  $1-x^2 \geq 0$  et  $x \neq 0$ .

Donc :  $D_f = ] -1, 0[ \cup ] 0, 1[$ .

$f$  est impaire. Par suite :  $D_E = ] 0, 1[$ .

2)  $f$  est dérivable sur  $] 0, 1[$ .

$$(\forall x \in ] 0, 1[) : f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

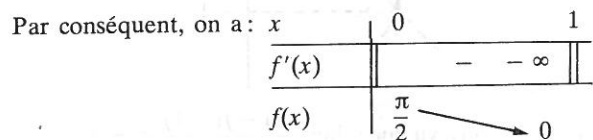
$$= - \left[ \frac{x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} \right]$$

Par suite :  $(\forall x \in ] 0, 1[) : f'(x) < 0$ .

$$\begin{aligned} \text{En plus on a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \text{ car } 1-x > 0 \text{ pour } x < 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) = -\infty \times \frac{\pi}{4} = -\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en 1, mais la courbe  $(C_f)$  admet à gauche du point  $A(1, 0)$  une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\text{Enfin on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x^2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} u = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ . Pour préciser la courbe  $(C_f)$  à droite du point  $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , il faut chercher la tangente à  $(C_f)$  à droite de ce point.

Or  $0 \notin D_f$ . Pour cela, considérons sur  $]0, 1]$  le prolongement par continuité  $g$  de  $f$  à droite en 0. On a :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in ]0, 1] \\ g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1 \text{ par hypothèse.}$$

Donc  $g$  est dérivable à droite en 0 et  $g'_d(0) = -1$ .

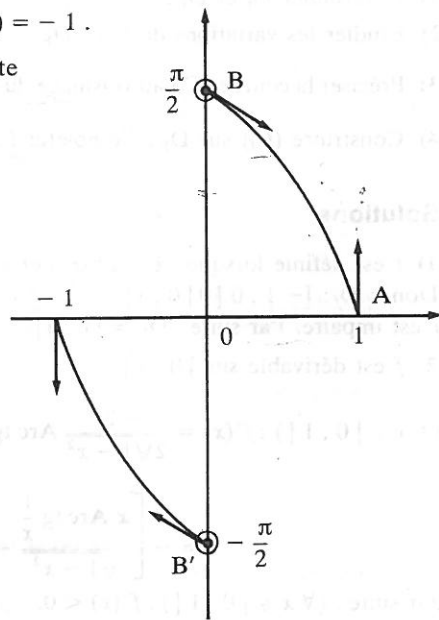
Par conséquent la courbe  $(C_g)$  admet à droite du point  $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  une demi-tangente de pente  $-1$  et d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(0) + (x - 0)g'_d(0) = \frac{\pi}{2} + x(-1) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4) Sur  $]0, 1]$ , la courbe  $(C_f)$  n'est autre que la courbe  $(C_g)$  privée du point  $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Il suffit donc de construire  $(C_g)$  et d'éliminer ce point B. On complète ensuite  $(C_f)$  sur  $D_f$  par symétrie par rapport à l'origine O.

Donc les points B et  $B'$  n'appartiennent pas à  $(C_f)$ .



## EXERCICE 11

Soit  $f(x) = \operatorname{Arc} \sin(2x^2 - 1)$ .

- Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\operatorname{Arc} \sin x - \frac{\pi}{2}}{x - 1}$
- Déterminer  $D_f$  et  $D_E$
- Pour  $x \in D_E$ , poser  $\alpha = \operatorname{Arc} \sin x$  et simplifier  $f(x)$ .
- Étudier les variations de  $f$  sur  $D_E$ .
- Préciser  $(C_f)$  aux points  $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  et  $E\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ .

Construire  $(C_f)$  sur  $D_E$ . Compléter  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

## Solutions

- 1) Posons  $t = \operatorname{Arc} \sin x$ . On a donc :  $\begin{cases} t = \operatorname{Arc} \sin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\operatorname{Arc} \sin x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} &= \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\sin t - 1} = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - 1} = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\cos h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{-2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\frac{h}{2}}{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} = -1 \times (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\operatorname{Arc} \sin x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} &= \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\sin t - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right) - 1} \text{ avec } h = t - \frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\cos h - 1} \text{ car } \sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-h)\right) = \cos(-h) = \cos h. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{-2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} = -1 \times (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$