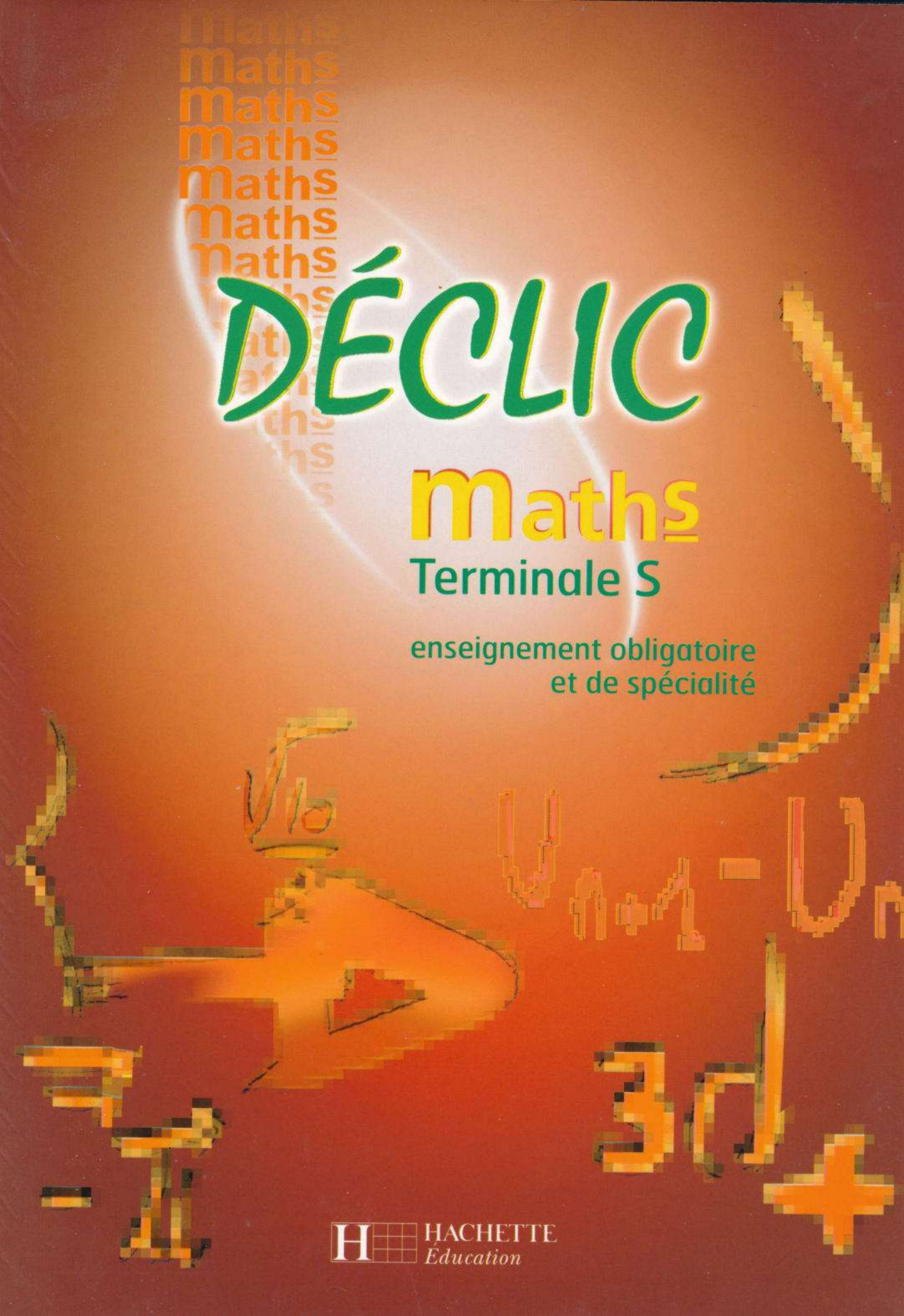
DÉCLIC

Maths

Terminale S

enseignement obligatoire
et de spécialité



HACHETTE
Education

DÉCLIC

Maths

Terminale S

enseignement obligatoire
et de spécialité

Jean-Paul BELTRAMONE
IA-IPR au Rectorat de Créteil

Claude FELLONEAU
IA-IPR au Rectorat de Bordeaux

Jean-Pierre GALANDRIN
Professeur au lycée Marcel Pagnol d'Athis-Mons

Sylvie LE FOULGOCQ
Professeur au lycée J.-P. Timbaud de Brétigny-sur-Orge

Lydia MISSET
Professeur au lycée J.-B. Corot de Savigny-sur-Orge

Claude TALAMONI
Professeur au lycée Voillaume d'Aulnay-sous-Bois

HACHETTE
Éducation

Présentation du manuel

Nous avons voulu donner aux élèves tous les atouts pour assimiler les connaissances de Terminale S et réussir à l'épreuve du Baccalauréat. Mais aussi nous avons à cœur de leur faire acquérir une démarche scientifique à travers l'activité mathématique, la pratique de la rigueur, ... et ce, sans négliger l'apprentissage des techniques. Cet ouvrage s'adresse aussi bien aux élèves qui désirent poursuivre des études scientifiques ultérieures qu'à ceux qui n'ont pas un tel objectif mais souhaitent néanmoins acquérir une culture scientifique.

Dans la ligne de la collection, et pour aller dans le sens des programmes actuels, une large place est donnée à l'emploi des calculatrices, des logiciels, comme GEOPLANW et GEOSPACW, et des tableurs.

Le programme obligatoire de Terminale S présente des nouveautés, surtout dans les approches. Nous avons choisi de le séparer en trois parties distinctes : analyse (7 chapitres), probabilités (2 chapitres) et géométrie (3 chapitres dont les nombres complexes).
L'enseignement de spécialité est traité sur 4 chapitres supplémentaires.
Compte tenu de la richesse de chacun de ces chapitres, un choix pédagogique semble nécessaire.

Des **formulaires** mettent à disposition les principales formules du cours de Terminale (ils n'ont pas pour ambition d'être un formulaire « type Bac »), ainsi qu'une aide pour retrouver rapidement une instruction lors de l'emploi de calculatrices.

Un **index** détaillé permet d'accéder facilement à la richesse du contenu de cet ouvrage.

Structure d'un chapitre

Des **activités** diversifiées proposant :

– un aspect culturel ;

– une approche à l'aide des TICE ;

– une mise en place des notions abordées dans le chapitre, les commentaires du programme officiel étant rigoureusement suivis, tout en laissant au professeur le choix de son approche.

Un **cours,** linéaire et bien balisé, écrit dans un langage simple :

– pour comprendre la démarche scientifique, préciser le statut des objets mathématiques, différenciant définitions, propriétés et théorèmes (suivis de leur démonstration ou indiqués comme admis) ;

– pour retenir les notions au travers d'exemples.

Des **exercices résolus**, complets et rédigés, accompagnés d'une méthodologie afin d'acquérir les savoir-faire indispensables.

La majorité des chapitres proposent un exercice résolu de type BAC, avec analyse de l'énoncé.

Des **travaux dirigés**, riches, traitant toutes les modalités de mise en œuvre indiquées dans le programme, mais aussi des situations pluridisciplinaires ou des problèmes de synthèse.

Une **page de synthèse**, pour une meilleure mémorisation des connaissances et des savoir-faire essentiels, véritables fiches pour réviser l'épreuve du Bac.

Des **exercices**, très nombreux, ordonnés suivant la progression du cours, afin de favoriser la pratique au fur et à mesure de son avancement. Chaque rubrique commence par un Vrai-Faux, test sur l'acquis des notions.

Le degré de difficulté des exercices est signalé par des étoiles ; les exercices dont le numéro est sur fond blanc sont corrigés en fin d'ouvrage.

Des problèmes permettent d'approfondir l'étude de certaines notions, de compléter les travaux dirigés ou de travailler sur des sujets transversaux.

En vous remerciant pour votre confiance, nous espérons que ce manuel soit tout à la fois un guide compréhensible, accessible au plus grand nombre, et un outil rigoureux.

Les Auteurs

Sommaire

Présentation du manuel 3

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

1 Fonctions – Variations et continuité

Activités 8
1 Rappels sur la dérivation 10
2 Variations d'une fonction 12
3 Continuité 13
4 Propriétés des fonctions continues 14
Exercices résolus 15
Travaux dirigés 17
Synthèse 22
Exercices et problèmes 23

2 Limites de suites et de fonctions

Activités 34
1 Limites de suites 37
2 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction 38
3 Limite en un réel a d'une fonction 40
4 Limites et ordre 41
5 Limites et opérations 42
6 Théorème des valeurs intermédiaires sur I ouvert 43
Exercices résolus 44
Travaux dirigés 47
Synthèse 50
Exercices et problèmes 51

3 Dérivées et primitives

Activités 62
1 Compléments sur la dérivation 64
2 Primitives 66
Exercices résolus 68
Travaux dirigés 71
Synthèse 76
Exercices et problèmes 77

4 Fonction exponentielle

Activités 90
1 Fonctions vérifiant $f' = kf$ 92
2 Étude de la fonction exponentielle 94
3 Équation différentielle $y' = ay + b$ 96
Exercices résolus 97
Travaux dirigés 100
Synthèse 105
Exercices et problèmes 106

5 Fonctions logarithme et exponentielle

Activités 116
1 Fonction ln 118
2 Étude de ln 119
3 Dérivées et primitives 122
4 Puissance d'un réel strictement positif 122
Exercices résolus 124
Travaux dirigés 127
Synthèse 131
Exercices et problèmes 132

6 Suites et récurrence

Activités 146
1 Récurrence 149
2 Comportement d'une suite numérique 150
3 Suites adjacentes 152
4 Convergence des suites monotones 153
Exercices résolus 154
Travaux dirigés 156
Synthèse 160
Exercices et problèmes 161

Sommaire

7 Intégration

Activités 170
1 Notion d'intégrale pour une fonction positive..... 173
2 Intégrale d'une fonction de signe quelconque 174
3 Intégrale et primitive..... 175
4 Propriétés de l'intégrale 176
5 Intégration par parties 178
Exercices résolus..... 179
Travaux dirigés 182
Synthèse 186
Exercices et problèmes 187

8 Probabilités conditionnelles

Activités 204
1 Probabilité conditionnelle..... 206
2 Événements indépendants..... 207
3 Variables aléatoires indépendantes 208
4 Formules des probabilités totales 209
5 Expériences répétées..... 210
Exercices résolus..... 211
Travaux dirigés 214
Synthèse 217
Exercices et problèmes 218

9 Lois de probabilité

Activités 228
1 Exemples de dénombrement... 232
2 Factorielle d'un entier naturel.. 233
3 Combinaisons 233
4 Loi de BERNOULLI – Loi binomiale 236
5 Exemples de lois de probabilités continues 237
Exercices résolus..... 239
Travaux dirigés 241
Synthèse 244
Exercices et problèmes 245

10 Nombres complexes

Activités 256
1 Représentation 258
2 Calculer avec les nombres complexes..... 260
3 Équations du second degré à coefficients réels 262
4 Module et arguments 263
5 Nombres complexes et géométrie 266
Exercices résolus 268
Travaux dirigés..... 271
Synthèse..... 273
Exercices et problèmes..... 274

11 Orthogonalité – Produit scalaire

Activités..... 290
1 Produit scalaire dans le plan.... 294
2 Distance d'un point à une droite dans le plan..... 295
3 Produit scalaire dans l'espace .. 296
4 Orthogonalité dans l'espace.... 297
5 Équation cartésienne d'un plan . 298
Exercices résolus 299
Travaux dirigés..... 301
Synthèse..... 304
Exercices et problèmes..... 305

12 Droites et plans

Activités..... 316
1 Droites de l'espace..... 320
2 Plans de l'espace 322
3 Systèmes et intersections de plans..... 324
Exercices résolus 326
Travaux dirigés..... 329
Synthèse..... 333
Exercices et problèmes..... 334

Sommaire

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

13 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Activités 342
1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ 346
2 Nombres premiers 347
3 Décomposition d'un entier. 348
4 Division euclidienne 349
5 Congruences. 350
Exercices résolus 352
Travaux dirigés 354
Synthèse 357
Exercices et problèmes 358

14 PGCD-PPCM

Activités. 366
1 Diviseurs communs à deux entiers naturels 368
2 PGCD de deux entiers relatifs . . 370
3 Nombres premiers entre eux . . . 372
4 PPCM de deux entiers relatifs . . 374
Exercices résolus 376
Travaux dirigés 380
Synthèse 386
Exercices et problèmes 387

15 Similitudes planes

Activités. 398
1 Similitudes. 402
2 Similitudes directes 404
3 Forme réduite d'une similitude directe. 406
4 Étude des similitudes quelconques 408
5 Propriétés géométriques des similitudes 410
Exercices résolus 412
Travaux dirigés 418
Synthèse 421
Exercices et problèmes 422

16 Sections planes de surfaces

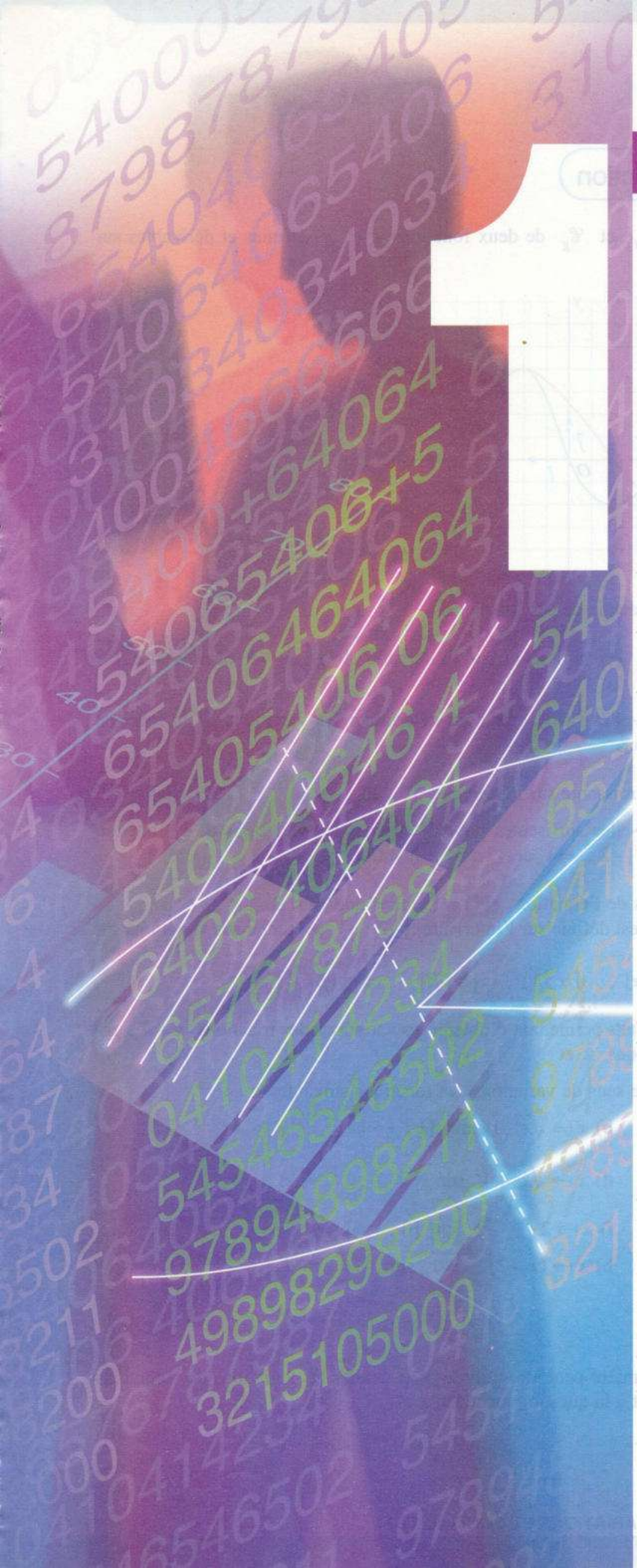
Activités 436
1 Section par des plans parallèles aux plans de coordonnées 440
2 Surfaces d'équation $z = f(x\,;\,y)$ – Lignes de niveau 440
3 Quelques surfaces particulières . 441
Exercices résolus. 442
Travaux dirigés 444
Exercices et problèmes 445

Corrigés des exercices 451

Programme. 471

Index 475

Formulaires 477



CHAPITRE

1

Fonctions – Variations et continuité

Rappels sur la dérivation p. 10

- connaître la définition du nombre dérivé en a et faire le lien avec la tangente
- savoir calculer la dérivée d'une fonction en utilisant les formules

Variations d'une fonction p. 12

- étudier les variations à l'aide des opérations
- utiliser la fonction dérivée

Continuité p. 13

- donner une idée intuitive de la continuité d'une fonction sur un intervalle

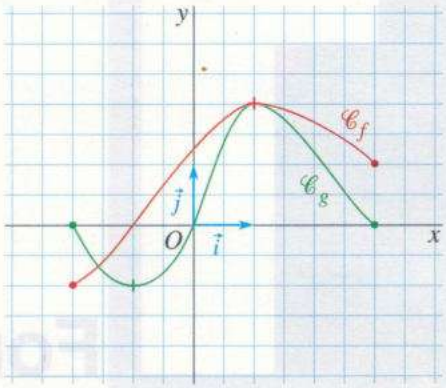
Propriétés des fonctions continues p. 14

- connaître le théorème des valeurs intermédiaires et savoir l'appliquer à la résolution approchée d'équations

activités

1 Variations d'une fonction

On a tracé les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies et dérivables sur l'intervalle $[-2\,;3]$.



1 Dresser le tableau des variations de chacune de ces fonctions.

2 **a)** En déduire que la fonction $f+g$ est croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1\,;3]$.

b) Les informations dont on dispose sont-elles suffisantes pour déterminer les variations de la fonction $f+g$ sur l'intervalle $[-2\,;-1]$? Justifier.

3 **a)** Démontrer que la fonction fg est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Les informations dont on dispose sont-elles suffisantes pour déterminer les variations de la fonction fg sur chacun des intervalles $[-1\,;0]$, $[-2\,;-1]$ et $[1\,;3]$? Justifier.

4 On appelle α et β les deux solutions de l'équation $g(x)=1$ telles que $\alpha<\beta$.
Vérifier que la fonction composée $f\circ g$ est définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ et étudier ses variations sur chacun des intervalles :

$$[-2\,;-1]\,,\quad [-1\,;\alpha]\,,\quad [\alpha\,;1]\,,\quad [1\,;\beta]\quad\text{et}\quad [\beta\,;3]\,.$$

5 Faire une synthèse des principaux résultats permettant d'obtenir les variations des fonctions $u+v$, uv et $u\circ v$ à partir des variations des fonctions u et v.
Ces propriétés permettent-elles d'étudier le sens de variations des fonctions suivantes ?

a) $x\mapsto 1-\dfrac{2}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

b) $x\mapsto \sqrt{x-1}$ sur $[1\,;+\infty[$;

c) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$;

d) $x\mapsto \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$;

e) $x\mapsto 2x^2+\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$;

f) $x\mapsto 2x^2-\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$;

g) $x\mapsto x^2\sqrt{x-1}$ sur $[1\,;+\infty[$;

h) $x\mapsto (x-2)\sqrt{x+1}$ sur $[-1\,;+\infty[$;

i) $x\mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

6 Quelle notion étudiée en classe de Première peut être utilisée pour étudier les variations des fonctions pour lesquelles on a répondu négativement à la question précédente ?
Déterminer les variations de ces fonctions.

2 Images d'intervalles

Une étude algébrique

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$.

1 Visualiser la courbe représentative de f à l'écran d'une calculatrice.
Lire l'ensemble des images des réels appartenant à l'intervalle $[-2\,;3]$ par la fonction f.
Cet ensemble est appelé l'**image par f** de l'intervalle $[-2\,;3]$ et noté $f([-2\,;3])$.

2 Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$ et en déduire l'inclusion :
$f([-2\,;3]) \subset [0\,;4]$.

3 Soit m un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;4]$.

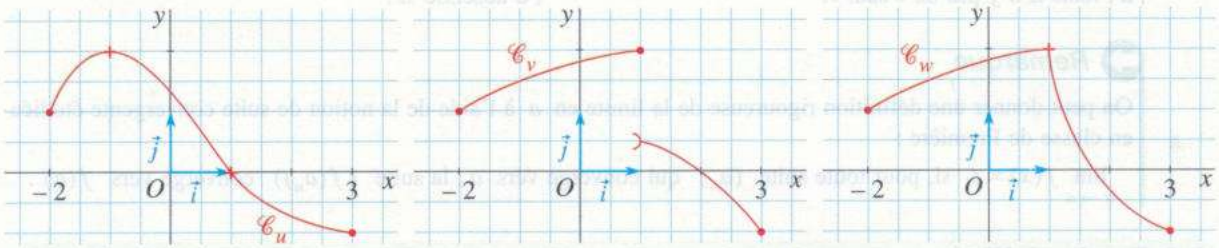
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x^2}{x+3}=m$ et démontrer que le réel $\dfrac{m-\sqrt{m^2+12m}}{2}$ appartient à l'intervalle $[-2\,;3]$.

b) En déduire l'inclusion $[0\,;4] \subset f([-2\,;3])$.

On peut donc conclure que $f([-2\,;3])=[0\,;4]$ puisque, d'après **2**, tout réel de l'ensemble $f([-2\,;3])$ appartient à l'intervalle $[0\,;4]$, et d'après **3** **b)**, tout réel de l'intervalle $[0\,;4]$ appartient à l'ensemble $f([-2\,;3])$.

Une étude graphique

Sur les graphiques ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormal, les courbes représentatives de trois fonctions u, v et w définies sur l'intervalle $[-2\,;3]$.



1 Par lecture graphique, déterminer les ensembles $u([-2\,;3])$, $v([-2\,;3])$ et $w([-2\,;3])$.

2 On peut observer que les images de l'intervalle $[-2\,;3]$ par les fonctions u et w sont des intervalles, mais qu'il n'en est pas de même pour la fonction v.
À quelle particularité de la courbe ce phénomène est-il dû ?

3 Choisir un réel a strictement inférieur à $u(1)$ et un réel b strictement supérieur à $u(1)$.
À l'aide du graphique, représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble K des réels x dont l'image par u appartient à l'intervalle ouvert $J=]a\,;b[$.
Existe-t-il un intervalle ouvert qui contient 1 et qui est inclus dans K ?
Comme a et b peuvent être choisis aussi proches qu'on le souhaite de 1, cela signifie que $u(x)$ est aussi proche de $u(1)$ qu'on le souhaite pour toutes les valeurs x suffisamment proche de 1. On dit que :

« lorsque x tend vers 1, $u(x)$ tend vers $u(1)$ » et on écrit $\lim\limits_{x \to 1} u(x)=u(1)$.

4 En est-il de même pour les fonctions v et w en 1 ?

1 Rappels sur la dérivation

Dans tout ce chapitre, on ne considère que des intervalles qui ne sont pas réduits à une valeur et des fonctions f dont l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles non réduits à une valeur.
En classe de Première, la notion de dérivée a été introduite à l'aide de la notion de limite basée sur l'intuition.

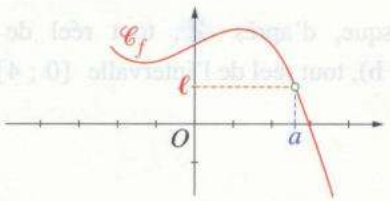
1.1 Limite en a

Soit a un réel de $\mathscr{D}_f$ ou une borne de $\mathscr{D}_f$ et ℓ un réel quelconque. Dire :

« $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a »

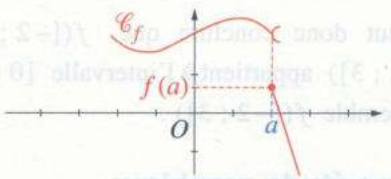
signifie que les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de ℓ qu'on le souhaite dès que x est suffisamment proche de a.
On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple



f n'est pas définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
La courbe présente un « trou » au point d'abscisse a, mais il n'y pas de « saut ».

Contre-exemple



f est définie en a, mais n'admet pas de limite en a.
La courbe présente un « saut » au point d'abscisse a.

Remarque

On peut donner une définition rigoureuse de la limite en a à l'aide de la notion de suite convergente étudiée en classe de Première :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si, pour toute suite (a_n) qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.

1.2 Dérivabilité en a et tangente

définition

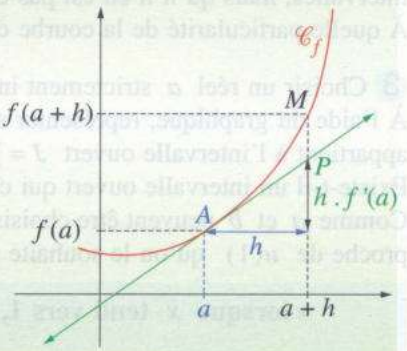
Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et a un réel de $\mathscr{D}_f$.

• f est dérivable en a si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

La limite de ce quotient est alors notée $f'(a)$ et appelée **le nombre dérivé de f en a :**

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

• Si f est dérivable en a, le réel $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;\,f(a))$.



Voir Exercices 1 à 9 et 16 à 24

1.3 Fonction dérivée

définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
L'ensemble $\mathscr{D}_{f'}$ des réels a de $\mathscr{D}_f$ tels que f est dérivable en a est appelé l'**ensemble de dérivabilité de f**.
La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$, d'ensemble de définition $\mathscr{D}_{f'}$, est la fonction dérivée de f.

Remarque

Dérivées successives : la dérivée de la fonction f' est appelée **dérivée seconde** de f et notée f''.
La dérivée de la fonction f'' est appelée la **dérivée troisième** de f et notée $f^{(3)}$.
Plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 3$, la dérivée de la fonction $f^{(n)}$ est notée $f^{(n+1)}$.

1.4 Dérivées des fonctions usuelles

fonction f	$\mathscr{D}_f$	fonction dérivée f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$x \mapsto ax+b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\,;\,1\}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 2$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	$x \mapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 2$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

Exemples

Sur $\mathbb{R}^*$, si $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, alors $f'(x) = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ et si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, alors $f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

1.5 Formules de dérivation

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

formules	conditions de validité
$(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$	sur l'intervalle I
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	sur tout intervalle J, inclus dans I, sur lequel la fonction v ne s'annule pas
si $f(x) = u(ax+b)$, alors $f'(x) = a \times u'(ax+b)$	pour tout réel x tel que $ax+b \in I$

Exemple

Voir Exercices 10 à 15

Soit la fonction $f : x \mapsto (2x+1)^3\sqrt{x}$. La fonction $x \mapsto (2x+1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto 2 \times 3\,(2x+1)^2$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Donc la fonction $f : x \mapsto (2x+1)^3\sqrt{x}$, définie sur $[0\,;+\infty[$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 6\,(2x+1)^2\sqrt{x} + (2x+1)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x+1)^2(14x+1)}{2\sqrt{x}}.$$

f n'est pas dérivable en 0, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

2 Variations d'une fonction

2.1 Rappels

• Une fonction croissante sur un intervalle I est une fonction qui conserve l'ordre ; les images sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents :

pour tous les réels a et b de I, $a \leqslant b$ entraîne $f(a) \leqslant f(b)$.

• Une fonction décroissante sur un intervalle I est une fonction qui inverse l'ordre ; les images sont toujours rangées dans l'ordre inverse de celui de leurs antécédents :

pour tous les réels a et b de I, $a \leqslant b$ entraîne $f(a) \geqslant f(b)$.

2.2 Sens de variation et opérations — propriétés

• Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

Si f et g ont le **même sens de variation** sur I, alors la fonction $f+g$ a aussi ce **même sens de variation** sur I.

Si f et g sont **croissantes et positives** sur I, alors la fonction fg est **croissante** sur I.

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J, et g une fonction définie sur l'intervalle J.

Si f et g ont le **même sens de variation**, l'une sur I et l'autre sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est **croissante** sur I.

Si f et g ont **des sens de variation contraires**, l'une sur I et l'autre sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Exemples

Voir Exercices 25 à 32

• La fonction affine $x \mapsto 1-x$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ et prend ses valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
Donc la composée $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$.
Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc la composée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est croissante sur $]-\infty\,;\,1[$.

• La fonction $x \mapsto (x+2)\sqrt{x}$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit des fonctions $x \mapsto x+2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ qui sont toutes les deux croissantes et positives sur $[0\,;\,+\infty[$.

2.3 Dérivée et variations — théorèmes admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si la fonction dérivée f' est nulle sur l'intervalle I, alors la fonction f est constante sur cet intervalle.
• Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle I, alors la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
• Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur l'intervalle I, alors la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Voir Exercices 33 à 46

3 Notion de continuité

Continuité — définitions

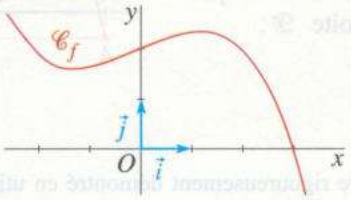
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

• Soit a un réel de I.

La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

• La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout réel a de I.

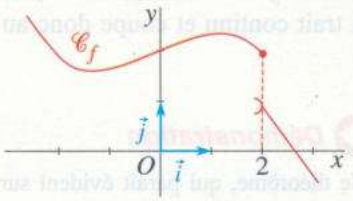
Exemples



Sur l'intervalle $[-2\,;3]$, **on peut tracer la courbe de f sans lever le crayon.**

Elle ne présente pas de « saut ».

f est **continue** sur l'intervalle $[-2\,;3]$.



On ne peut pas tracer la courbe de f sans lever le crayon.

f n'est pas continue sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

La courbe présente un « saut » au point d'abscisse 2.

f n'est pas continue en 2, elle est **discontinue** en 2.

Remarque

Sur le second graphique, f est continue sur l'intervalle $[-2\,;2]$, car la courbe de la restriction de f à cet intervalle peut être tracée sans lever le crayon. Pourtant, f n'est pas continue en 2.

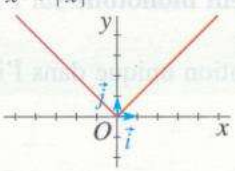
Exemples

Voir Exercices 47 et 48

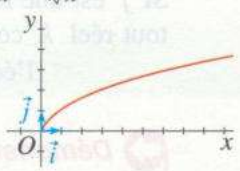
• Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle : ce résultat se démontre aisément en utilisant la définition du nombre dérivé.

• Certaines fonctions sont continues sur leur intervalle de définition sans y être dérivables.

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0. La courbe n'a pas de tangente en O.



La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0. La courbe a une tangente « verticale » en O.

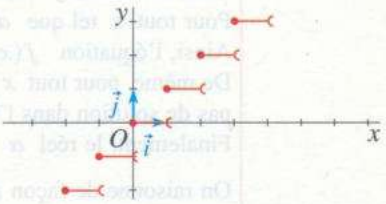


• On peut démontrer que toute fonction construite à partir des fonctions polynômes, de la fonction racine carrée et des fonctions trigonométriques par addition, multiplication ou composition, est continue sur tout intervalle où elle est définie.

• **La fonction partie entière E**

Pour tout réel x, $E(x)$ est l'unique entier relatif n tel que : $n \leqslant x < n+1$.

La fonction E est discontinue en tout entier relatif a.



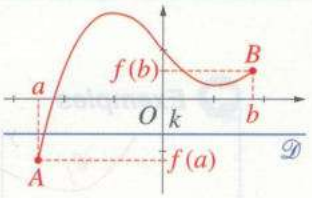
4 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Interprétation graphique

Comme k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ sont situés de part et d'autre de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=k$.
Comme f est continue sur I, la courbe relie les points A et B par un trait continu et coupe donc au moins une fois la droite $\mathscr{D}$.



Démonstration

Ce théorème, qui paraît évident sur un graphique, peut être rigoureusement démontré en utilisant des suites adjacentes.

Voir Chapitre 6

Ce théorème est très utile pour démontrer qu'une équation a au moins une solution dans un intervalle.

Exemple

Soit l'équation $x^5+2x-1=0$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^5+2x-1$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, on vérifie facilement que $f(0)=-1$ et $f(1)=2$.
Le réel 0 étant compris entre -1 et 2, il existe au moins un réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c)=0$.
Ainsi, l'équation $x^5+2x-1=0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. On parle aussi de « zéros » de la fonction f.

4.2 Corollaire

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Démonstration

Voir Exercices 49 à 62

• L'**existence d'une solution** α découle du théorème des valeurs intermédiaires. On a alors $f(\alpha)=k$.

• L'**unicité de la solution** α découle de la stricte monotonie de la fonction f.

Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a\,;b]$

Pour tout x tel que $a\leqslant x<\alpha$, on a $f(x)<f(\alpha)$; donc $f(x)<k$.
Ainsi, l'équation $f(x)=k$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[a\,;\alpha[$.
De même, pour tout x tel que $\alpha<x\leqslant b$, on a $f(\alpha)<f(x)$; donc $k<f(x)$ et l'équation $f(x)=k$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]\alpha\,;b]$.
Finalement, le réel α est l'unique solution de l'équation $f(x)=k$ dans l'intervalle $[a\,;b]$.

On raisonne de façon analogue dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.

1 Résolution approchée d'une équation

Soit l'équation $x = 2\cos x$ dans $\mathbb{R}$.

1° En remarquant que la fonction cosinus est bornée, démontrer que cette équation n'a pas de solution à l'extérieur de l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

2° Trouver le nombre de solutions de cette équation dans $[-2\,;\,2]$.

3° Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} des éventuelles solutions.

Voir Exercices 52 à 62

• Méthode

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction continue sur I : on détermine le **tableau des variations** de f sur I et on l'exploite pour dénombrer les solutions en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

On trouve ensuite un **encadrement de chaque solution** à l'aide de la calculatrice.

1° Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; donc :

$$-2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2\ .$$

Si x n'est pas dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$, alors x est différent de $2\cos x$.

Ainsi, l'équation $x = 2\cos x$ n'a pas de solution à l'extérieur de l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

2° Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ par $f(x) = x - 2\cos x$.

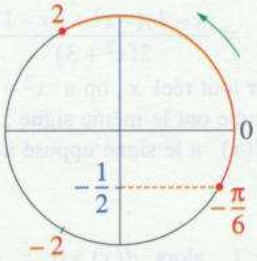
La fonction f est dérivable sur $[-2\,;\,2]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout x dans $[-2\,;\,2]$, on a :

$$f'(x) = 1 + 2\sin x\ .$$

Pour x dans $[-2\,;\,2]$, on a :

$$f'(x) > 0 \iff 1 + 2\sin x > 0$$
$$\iff \sin x > -\frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{\pi}{6} < x \leqslant 2\ .$$

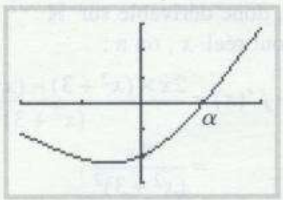


On en déduit le signe de f' et le tableau des variations de f, avec, à 10^{-2} près :

$$f(-2) = -2 - 2\cos 2 \approx -1{,}17\ ,$$
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \approx -2{,}26$$
et $\quad f(2) = 2 - 2\cos 2 \approx 2{,}83\ .$

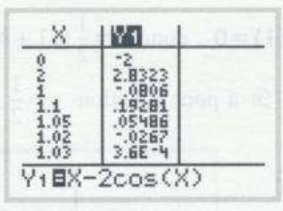
x	-2		$-\frac{\pi}{6}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	↘	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	↗	$f(2)$

D'après ce tableau des variations, on peut conclure que sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$, f s'annule exactement une fois en un réel α compris entre $-\frac{\pi}{6}$ et 2.



Ainsi, $x = 2\cos x$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3° Pour trouver un encadrement de α, on peut procéder par encadrements successifs.



À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$f(1{,}02) < 0 \quad \text{et} \quad f(1{,}03) > 0\ ;$$

on a donc $1{,}02 < \alpha < 1{,}03$,

car f est croissante sur $[1{,}02\,;\,1{,}03]$.

exercices résolus

BAC

2 Courbe et tangente en un point

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}$ en A.
Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

Analyse de l'énoncé

• Il s'agit de déterminer une équation de la tangente à la courbe en un de ses points.
• On doit ensuite étudier la position relative de deux courbes.

Voir Exercices 16 à 24

• Méthode

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

• Pour déterminer la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse a :
on calcule le nombre dérivé $f'(a)$ qui est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$,
puis on détermine l'ordonnée à l'origine à l'aide des coordonnées du point A.
On peut aussi écrire directement l'équation sous la forme $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

• Pour étudier la position relative de deux courbes d'équations respectives $y=f(x)$ et $y=g(x)$, on étudie le signe de la différence $d(x)=f(x)-g(x)$.

• La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a :

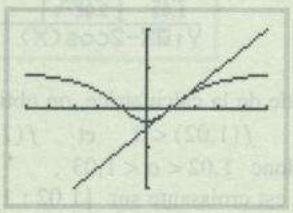
$$f'(x)=\frac{2x\times(x^2+3)-(x^2-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{8x}{(x^2+3)^2}.$$

Donc $f'(1)=\frac{1}{2}$ et la tangente $\mathscr{D}$ a une équation de la forme :

$$y=\frac{1}{2}x+b\ ,\quad \text{avec } b \text{ réel.}$$

Or $f(1)=0$, donc $0=\frac{1}{2}\times 1+b$, soit $b=-\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\mathscr{D}$ a pour équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.



• On étudie le signe de la différence :

$$d(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right).$$

On obtient :

$$d(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}-\frac{x-1}{2}$$
$$=\frac{2(x-1)(x+1)-(x-1)(x^2+3)}{2(x^2+3)}$$
$$=\frac{(x-1)(-x^2+2x-1)}{2(x^2+3)}=-\frac{(x-1)^3}{2(x^2+3)}.$$

Or, pour tout réel x, on a $x^2+3>0$ et un nombre et son cube ont le même signe ;
donc $d(x)$ a le signe opposé à celui de $(x-1)$.

Ainsi :

– si $x<1$, alors $d(x)>0$:
la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la droite $\mathscr{D}$;

– si $x>1$, alors $d(x)<0$:
la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite $\mathscr{D}$.

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ se coupent au point $A(1\ ;0)$.

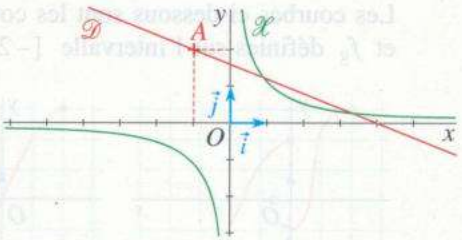
1 Problème d'intersection

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et une droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(-1\,;2)$ qui coupe l'axe des ordonnées.

On se propose d'étudier le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{H}$.

On appelle a le coefficient directeur de $\mathscr{D}$.



1.1 Méthode graphique

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{H}$ en son point M_0 d'abscisse x_0, réel fixé. Trouver les valeurs x_0 pour lesquelles A appartient à cette tangente.
En déduire les valeurs de a pour lesquelles la droite $\mathscr{D}$ est tangente à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

2. En utilisant le graphique, répondre au problème posé.

1.2 Méthode algébrique

1. Démontrer que $\mathscr{D}$ a pour équation $y=ax+2+a$ et en déduire que le problème se ramène au dénombrement des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2+(2+a)x-1=0$.

2. En étudiant le signe du discriminant de cette équation, retrouver les résultats précédents.

2 Dérivée et calculatrice

Avec une calculatrice, l'instruction **nderiv(** ou d/dx permet d'obtenir une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un réel x.

• **Sur T.I.** : Y2=nderiv(Y1 , X , X) • **Sur Casio** : Y2=d/dx(Y1 , X)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

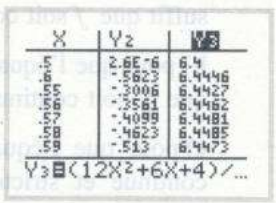
Deux élèves ont calculé la dérivée :

l'un a trouvé $f'(x)=\dfrac{12x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$ et l'autre $f'(x)=\dfrac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}$.

Qui peut avoir raison ?

Entrer $f(x)$ en Y1, la première réponse en Y3 et la seconde en Y4.
Comparer les tableaux de valeurs de Y2, Y3 et Y4 et conclure.



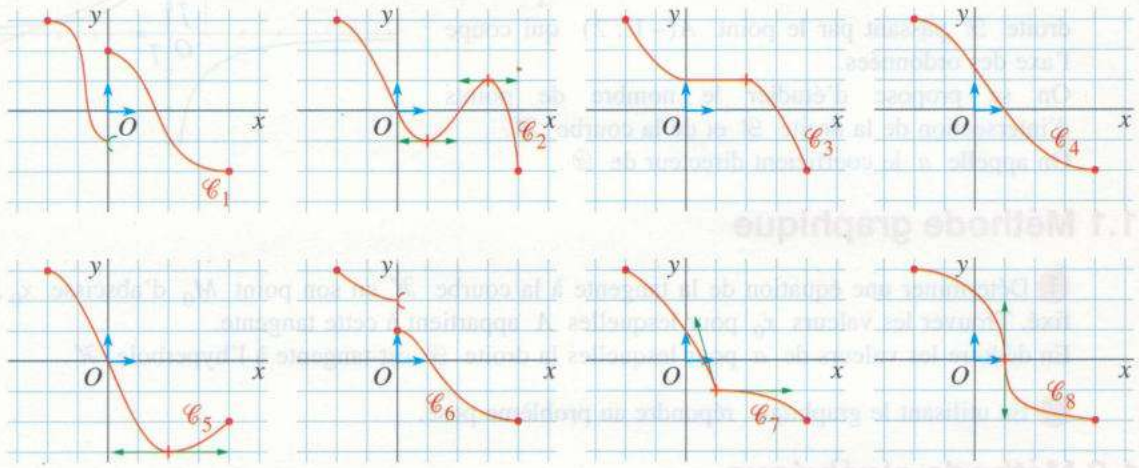


2. Calculer les dérivées des fonctions f suivantes et **vérifier** à l'aide de la calculatrice.

a) $f(x)=2x\sqrt{x+1}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{4x}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{x^2}$; **d)** $f(x)=x-3+\dfrac{2}{x+3}$.

3 Équation et continuité

Les courbes ci-dessous sont les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 et f_8 définies sur l'intervalle $[-2\,;4]$.



1 Par simple lecture graphique, compléter le tableau suivant par VRAI ou FAUX.

fonction	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f est monotone sur $[-2\,;4]$								
f est strictement monotone sur $[-2\,;4]$								
f est continue sur $[-2\,;4]$								
l'image de $[-2\,;4]$ par f est un intervalle								
l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[-2\,;4]$								

2 Soit f une fonction définie sur $[-2\,;4]$ et k un réel compris entre $f(-2)$ et $f(4)$.
À l'aide du tableau et des graphiques, vérifier les propositions suivantes :

a) pour que l'équation $f(x)=k$ admette au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;4]$, il suffit que f soit continue sur $[-2\,;4]$;

b) pour que l'équation $f(x)=k$ admette une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;4]$, il suffit que f soit continue et strictement monotone sur $[-2\,;4]$;

c) pour que l'équation $f(x)=0$ ait une unique solution dans $[-2\,;4]$, il suffit que f soit continue et strictement monotone sur $[-2\,;4]$ et que $f(-2)$ et $f(4)$ soient de signes contraires.

3 À l'aide du tableau, montrer que ces conditions ne sont pas des conditions nécessaires.

4 Utilisation d'une fonction auxiliaire

L'étude des variations d'une fonction repose en général sur l'étude du signe de sa dérivée.

Pour certaines fonctions, ce signe ne peut pas être obtenu directement et découle de l'étude des variations d'une fonction auxiliaire.

4.1 Exemple

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de -3, par $f(x) = x^2 - \dfrac{9}{x+3}$.

1 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et démontrer que, pour tout réel x différent de -3, le réel $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 + 12x^2 + 18x + 9$.

2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 18x + 9$.

a) Visualiser la représentation de la fonction g à l'écran de la calculatrice et émettre des conjectures sur le nombre de « zéros » de g et sur le signe de g.

b) Déterminer le tableau des variations de la fonction g.

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle a dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

d) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

3 Déduire des questions précédentes le tableau des variations de la fonction f.

4.2 Application

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormal et A le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
On se propose de déterminer l'abscisse b du point B de la courbe $\mathscr{P}$ qui est le plus proche de A.
Dans ce but, pour tout réel x, on pose $f(x) = AM^2$, où M est un point mobile de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse x.

1 Pour tout réel x, exprimer $f(x)$ en fonction de x. Puis étudier les variations de la fonction f en utilisant une méthode analogue à celle de l'exemple ci-dessus.

2 Conclure et donner un encadrement de b d'amplitude 10^{-2}.

4.3 Pour aller plus loin

On reprend la situation précédente et on cherche à déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la distance $d = AB = \sqrt{f(b)}$.

1 Expliquer pourquoi l'étude précédente ne permet pas d'obtenir un encadrement de d.

2 En remarquant que $f'(b) = 0$, démontrer que $d = \sqrt{\dfrac{1}{2}b^2 - \dfrac{3}{2}b + 1}$.

3 Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1}$ sur l'intervalle $[0{,}58\ ;\ 0{,}59]$ et conclure.

Voir Problème 63

5 Approximations des solutions d'une équation $f(x) = k$

Soit l'équation $x^3 + x = 3$ d'inconnue réelle x.

En utilisant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$, démontrer que cette équation admet une unique solution réelle que l'on notera α.
On peut alors utiliser diverses méthodes pour en obtenir des valeurs approchées à la précision souhaitée.

5.1 Méthode de dichotomie

1 **a)** À l'aide des variations de f, justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.

b) En calculant l'image par f du centre de l'intervalle $[1 ; 2]$, déterminer un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2}$.

c) Reprendre la question précédente en remplaçant 1 et 2 par les bornes de l'encadrement de α que l'on vient d'obtenir. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

d) Par ce processus, à chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2.
Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu au bout de n étapes ? Cette méthode permet-elle d'obtenir des valeurs approchées de α aussi précises que possible ? Justifier.

2 Le programme ci-dessous permet d'obtenir un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = k$ lorsque f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

sur TI 83	commentaires	sur Casio Graph 25
PROGRAM:DICHO		DICHO
:Prompt A,B,K,N	• entrées de a, b, k et n	"A"?→A↵ "B"?→B↵ "K"?→K↵ "N"?→N↵
:Y1(A)→C	• calcul de $c = f(a)$	A→X:Y1→C↵
:While((B-A)>10^-N)	• boucle : tant que la longueur de l'intervalle $[a ; b]$ est supérieure à 10^{-n}	While(B-A)>10^-N↵
:(A+B)/2→X	– calculer l'image y de $x = \frac{a+b}{2}$	(A+B)÷2→X↵
:Y1(X)→Y		Y1→Y↵
:If(K-Y)*(K-C)<0	– si k est entre c et y ;	If(K-Y)×(K-C)<0↵
:Then	alors remplacer b par $\frac{a+b}{2}$	Then X→B↵
:X→B		
:Else	sinon remplacer a par $\frac{a+b}{2}$	Else X→A↵
:X→A		
:End:End	fin de boucle	IfEnd↵ WhileEnd↵
:Pause {A,B}	• afficher a et b	A◢ B◢ Stop↵

Taper ce programme dans la calculatrice et l'utiliser pour déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près en entrant la fonction f dans Y1.

5.2 Méthode du balayage

On sait que $1 < \alpha < 2$ et $f(1) < 3$.

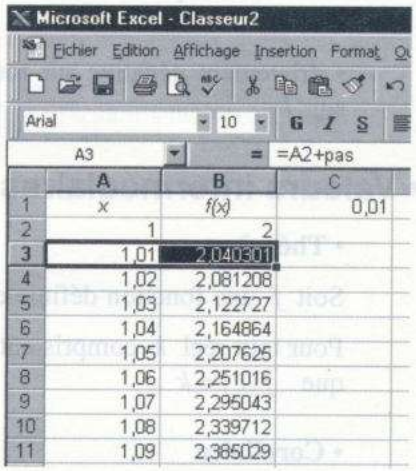
1 Compléter le tableau suivant :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$											

En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

2 On peut aussi utiliser un tableur pour obtenir directement un encadrement plus précis.
Par exemple, si on souhaite un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, on place 1 dans la cellule A2 et 0,01 dans la cellule C1, on tape la formule =A1+C1 dans la cellule A2, on sélectionne cette cellule, puis on recopie la formule jusqu'à la cellule A102 ; on tape ensuite la formule =A2^3+A2 (calcul de $f(x)$) dans la cellule B2, on sélectionne cette cellule et on recopie jusqu'à la cellule B102.

En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.



	A	B	C
1	x	$f(x)$	0,01
2	1	2	
3	1,01	2,040301	
4	1,02	2,081208	
5	1,03	2,122727	
6	1,04	2,164864	
7	1,05	2,207625	
8	1,06	2,251016	
9	1,07	2,295043	
10	1,08	2,339712	
11	1,09	2,385029	

3 En réalité, il n'est pas utile de calculer toutes les images et on peut s'arrêter dès que $f(x) > 3$. En utilisant cette remarque, faire un programme sur calculatrice permettant d'obtenir l'approximation décimale d'ordre n par excès de la solution d'une équation $f(x) = k$, où f est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Utiliser ce programme pour déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

5.3 Applications

Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes dans l'intervalle considéré et donner une valeur approchée à 10^{-6} de chacune d'elles.

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ sur $[-3\,;\,3]$; **b)** $x^4 - 2x - 1 = 0$ sur $[-3\,;\,3]$;

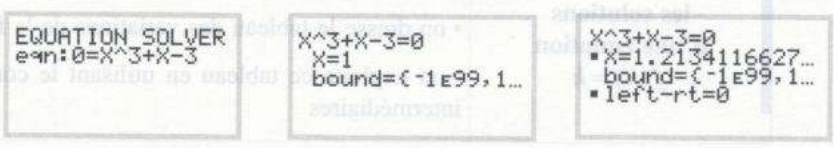
c) $x = 3 \sin x$ sur $\mathbb{R}$; **d)** $x^2 = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Certaines calculatrices disposent d'un « solveur » qui donne une valeur approchée des solutions éventuelles d'une équation.
Par exemple, sur TI-82 ou 83, pour obtenir une valeur approchée de la solution α de l'équation $x^3 + x = 3$, qui peut s'écrire $x^3 + x - 3 = 0$, on peut procéder ainsi :

MATH **0 : solver...** ENTER, puis donner une valeur approchée de la solution (on peut aussi donner un intervalle) et ALPHA ENTER.

On obtient les écrans ci-contre, et une valeur approchée de la solution.



Faire le point

• Variations d'une fonction dérivable sur un intervalle I

Si la **fonction dérivée** f' est :

• nulle sur tout l'intervalle I, alors la fonction f est constante sur I ;

• strictement positive sur tout l'intervalle I, alors la fonction f est strictement croissante sur I ;

• strictement négative sur tout l'intervalle I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

• Valeurs intermédiaires

• Théorème

Soit f une fonction définie et **continue sur un intervalle** I et a et b deux réels dans I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

• Corollaire

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone sur l'intervalle** $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ a une **solution unique** dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

savoir	comment faire ?
déterminer la dérivée d'une fonction f	• justifier la dérivabilité en reconnaissant en f la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions dérivables et appliquer les formules de calcul • si on ne peut pas les appliquer en un réel a de $\mathscr{D}_f$, déterminer : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
déterminer la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a	• calculer $f'(a)$ • T passe par $A(a\,;\,f(a))$ et a pour coefficient directeur $f'(a)$
dénombrer les solutions d'une équation $f(x)=k$	dans certains cas particuliers (second degré, par exemple), on peut la résoudre, sinon : • on dresse le tableau des variations de la fonction f • on exploite ce tableau en utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

1 Dérivation

1 Vrai – Faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si f est une fonction dérivable en 2, alors le quotient :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers 2.

2° La dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^3-2x+\frac{2}{x^2}$$

est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f'(x)=\frac{3x^5-2x^3+4}{x^3}\ .$$

3° Les fonctions définies, pour tout réel différent de -1, par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x(x-1)}{x+1}$$

ont la même fonction dérivée.

4° La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(2x+3)$ est la fonction $x \mapsto -\sin(2x+3)$.

5° La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction :

$$x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses, Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

1° La tangente à la courbe d'équation $y=x^2+3x-1$ au point $A(1\ ;3)$ a pour équation $y=5x-2$.

2° La tangente à la courbe d'équation $y=x-\frac{1}{x}$ au point $B(1\ ;0)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

3° Les courbes d'équations :

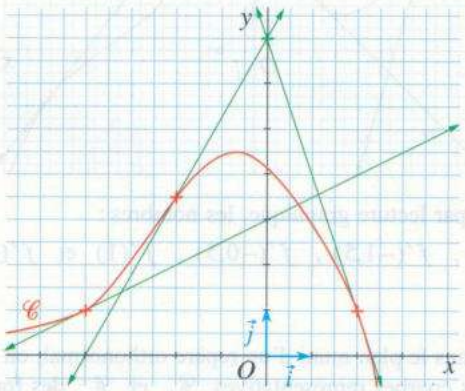
$$y=(x+1)\sqrt{x} \quad \text{et} \quad y=x^3+\frac{1}{x}$$

ont la même tangente au point $C(1\ ;2)$.

4° La tangente à la courbe d'équation $y=\sqrt{3x+1}$ au point $C(1\ ;2)$ passe par le point $D(-3\ ;-1)$.

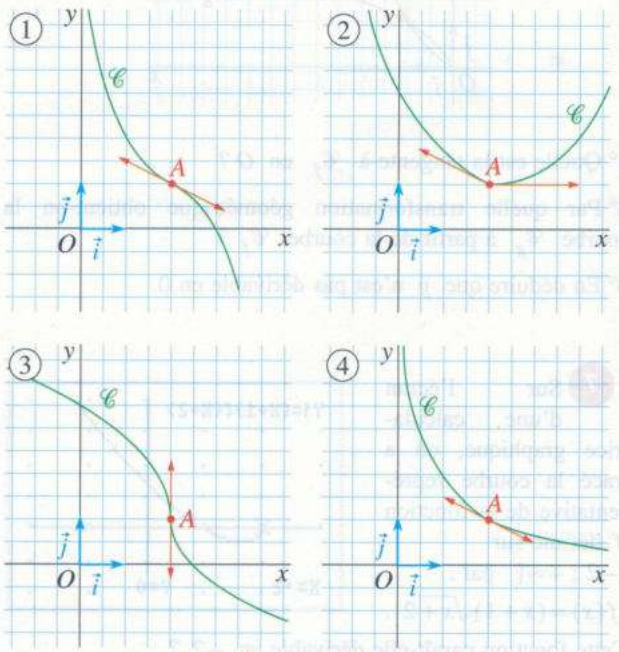
2 Lecture d'un nombre dérivé

3 Les droites tracées sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=f(x)$.



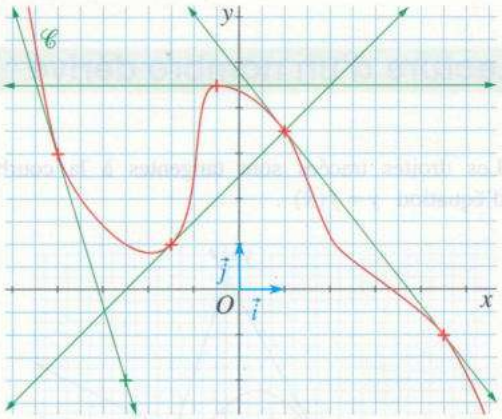
Donner, par lecture graphique, les nombres $f'(-4)$, $f'(-2)$ et $f'(2)$.

4 Dans chacun des cas suivants, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;3]$.



La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Justifier.

5 Les droites tracées sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$.

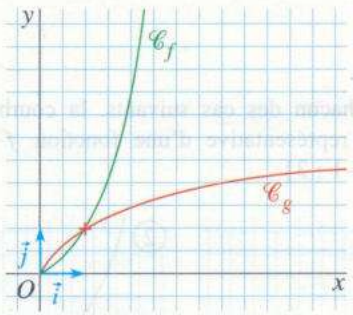


Donner, par lecture graphique, les nombres :

$f'(-4)$, $f'(-1{,}5)$, $f'(-0{,}5)$, $f'(1)$ et $f'(4{,}5)$.

6 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on a tracé les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x} .$$



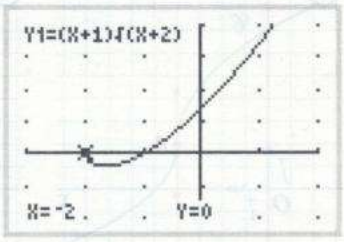
1° Quelle est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O ?

2° Par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$?

3° En déduire que g n'est pas dérivable en 0.

7 Sur l'écran d'une calculatrice graphique, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2 ; +\infty[$ par :

$f(x) = (x+1)\sqrt{x+2}$.

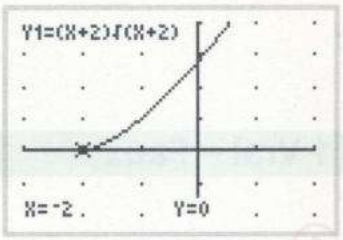


Cette fonction paraît-elle dérivable en -2 ?

Justifier la réponse par un calcul.

8 Même exercice avec la fonction f définie sur $[-2 ; +\infty[$ par :

$f(x) = (x+2)\sqrt{x+2}$.



9 ★ 1° Soit f une fonction dérivable en a ; démontrer que le quotient :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

Remarque

La fonction NDERIV(de la calculatrice est bâtie sur ce modèle.

2° Démontrer que la réciproque est fausse en prenant $f(x) = |x|$ et $a = 0$.

3 Calculs de dérivées

Pour les exercices 10 *à* 13, *calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, après avoir précisé son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité.*

10 1° $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$; 2° $f : x \mapsto 2x^3 - \dfrac{5}{x^2}$;

3° $f : x \mapsto (2x+1)^3$; 4° $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{3x-1}$.

11 1° $f : x \mapsto \dfrac{3x}{x+1} + \sqrt{x}$; 2° $f : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x}$;

3° $f : x \mapsto (3x-1)^4 (1-x)^3$; 4° $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x^2+2}$.

12 1° $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x^2 - 3x + 1}$; 2° $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{3x-2}}{2x+3}$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-1)^3}$; 4° $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{1-x}}{x+1}$.

13 1° $f : x \mapsto (2 + \cos x) \sin x$; 2° $f : x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$;

3° $f : x \mapsto \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 4° $f : x \mapsto \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

5° $f : x \mapsto \sin^2 x \cos x$; 6° $f : x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{2 - \sin x}$.

4 Dérivées successives

Dans les exercices 14 *et* 15, *déterminer les dérivées successives* f', f'', $f^{(3)}$ *et* $f^{(4)}$ *des fonctions.*

14 1° $f : x \mapsto 5x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - 6$ sur $\mathbb{R}$.

2° $f : x \mapsto x^5 + 2x^3 - x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

3° $f : x \mapsto (3x+1)^4$ sur $\mathbb{R}$.

15 1° $f : x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

2° $f : x \mapsto \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

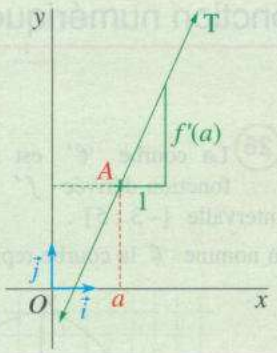
3° $f : x \mapsto \frac{3x+1}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x+2}$.)

5 Tangentes à une courbe

Nombre dérivé et tangente

Le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a.
Pour tracer une tangente, il suffit de connaître le point $A(a\,;\,f(a))$ et le coefficient directeur $f'(a)$.



16 Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1° Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x dans $]-1\,;+\infty[$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}.$$

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en remarquant qu'elle s'obtient à partir de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ par une transformation géométrique simple que l'on précisera.

2° Après avoir déterminé la fonction dérivée f' de f, tracer les tangentes à $\mathscr{C}$ en ses points d'abscisses respectives :

$$-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1 \text{ et } 4.$$

17 Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a donnée :

1° $f : x \mapsto \sqrt{2x-3}$; $a = 2$.

2° $f : x \mapsto (3x^2+1)(x+3)^2$; $a = -2$.

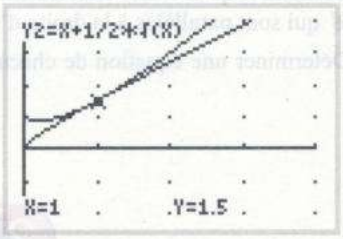
3° $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$; $a = 1$.

4° $f : x \mapsto \cos 2x$; $a = \frac{\pi}{4}$.

18 Sur l'écran d'une calculatrice, les courbes d'équation :

$$y = \frac{2x^2+1}{x+1}$$

et $y = x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

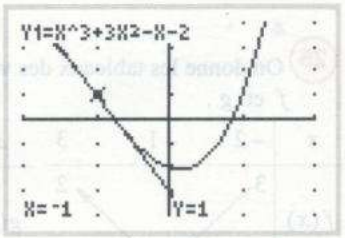


semblent se couper en un point d'abscisse 1 et avoir la même tangente en ce point.
Cette observation est-elle correcte ? Justifier.

19 Sur l'écran d'une calculatrice, on a visualisé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$

et la tangente T à cette courbe en son point d'abscisse $a = -1$.

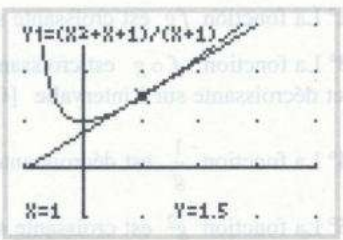


Justifier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

20 Même exercice avec la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

et $a = 1$.



21 Dans le plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^3+x^2+\frac{3}{2}x+1\ .$$

1° Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

2° Démontrer qu'il existe exactement une autre tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à la droite T.

En déterminer une équation.

22 ★ Dans le plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie, pour tout réel x différent de $-\frac{1}{2}$, par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2x+1}\ .$$

Démontrer qu'il existe exactement deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ qui sont parallèles à la droite d'équation $4x-9y+1=0$.

Déterminer une équation de chacune de ces droites.

23 ★ Dans le plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\sqrt{2x-1}\ .$$

Démontrer qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ et passe par l'origine.

Déterminer une équation de cette droite.

24 ★★ Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x)=\cos 2x\ .$$

1° Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.

2° Déterminer les points A et B de l'axe des ordonnées par lesquels passent deux tangentes à $\mathscr{C}$ perpendiculaires entre elles.

2 Variations d'une fonction numérique

1 Vrai – Faux

25 On donne les tableaux des variations de deux fonctions f et g.

x	-2		-1		3
$f(x)$	3	↘	0	↗	2

x	-2		0		1		3
$g(x)$	-1	↗	2	↘	-1	↗	0

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction $f+g$ est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

2° La fonction fg est croissante sur l'intervalle $[1\,;3]$.

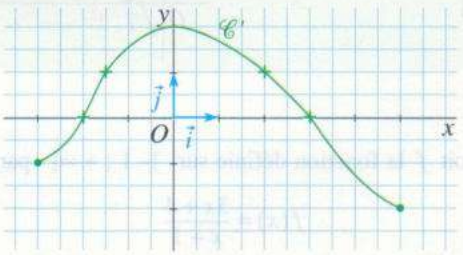
3° La fonction $f\circ g$ est croissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

4° La fonction $\frac{1}{g}$ est décroissante sur l'intervalle $[1\,;3[$.

5° La fonction g^2 est croissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$.

26 La courbe $\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

On nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.



Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction f admet un minimum relatif en -2.

2° La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;5]$.

3° Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $-\frac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.

4° La fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$ est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

2 Fonctions composées

27 Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x) = x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$;

$g(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1 ; +\infty[$.

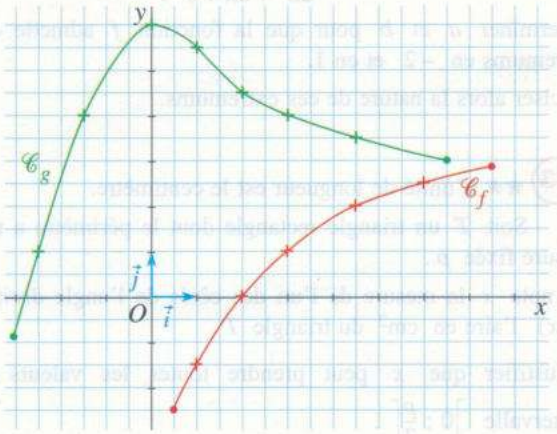
Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction $g \circ f$ et déterminer les variations de cette fonction sur chacun des intervalles constituant l'ensemble D.

28 Même exercice avec les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \sqrt{3-x}$ sur $]-\infty ; 3]$

$g(x) = \dfrac{5}{x+1}$ sur $]-1 ; +\infty[$.

29 Les fonctions f et g sont données par leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$ et étudier ses variations.

30 1° Étudier les variations et le signe de la fonction :

$x \mapsto 4x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2° En déduire les variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2-1}$ sur chacun des intervalles où elle est définie.

31 1° Étudier les variations et le signe de la fonction :

$x \mapsto x^2 + 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2° En déduire les variations de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x-3}$ sur chacun des intervalles où elle est définie.

32 Dans chacun des cas suivants, écrire la fonction f sous la forme d'une composée de fonctions usuelles et en déduire ses variations.

1° $f : x \mapsto (x-1)^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

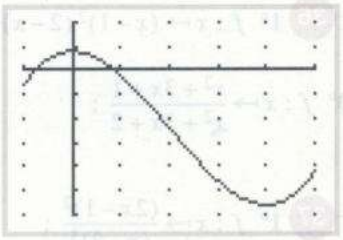
2° $f : x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x+1}$ sur $]-\infty ; -1[$.

3° $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2} - 1$ sur $\mathbb{R}$.

4° $f : x \mapsto (x+2)^3 - 3$ sur $\mathbb{R}$.

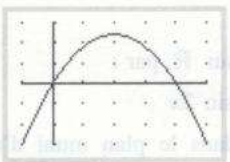
3 Avec la fonction dérivée

33 On a visualisé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1 ; 4]$.

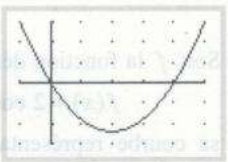


Parmi les courbes représentées ci-dessous, l'une d'elles est celle de la fonction dérivée f' de f.
Déterminer laquelle.

a)



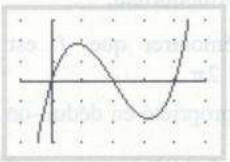
b)



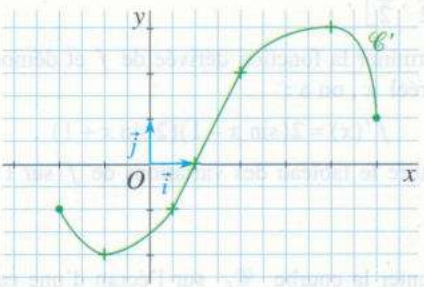
c)



d)



34 Soit f une fonction dérivable sur $[-2 ; 5]$.
On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée de f.



1° Ces informations permettent-elles de comparer les réels suivants :

a) $f(-2)$ et $f(5)$; b) $f(-1)$ et $f(0)$;

c) $f(2)$ et $f(3)$.

2° Déterminer le sens de variation de la fonction :

$x \mapsto f(x) - x + 3$.

Dans les exercices 35 à 37, étudier les variations de la fonction f après avoir précisé son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité.

35 1° $f : x \mapsto 2x + 1 + \dfrac{1}{2x}$; 2° $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x}$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$; 4° $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2x-3}}$.

36 1° $f : x \mapsto (x-1)^2(2-x)^3$; 2° $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^3}$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+2}$; 4° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x-2)}$.

37 1° $f : x \mapsto \dfrac{(2x-1)^2}{(x-2)^3}$; 2° $f : x \mapsto (x+1)^2\sqrt{x}$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$; 4° $f : x \mapsto x^2\sqrt{x+5}$.

38 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x - \sin 2x$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° a) Démontrer que f est une fonction périodique, de période 2π.

Quelle propriété en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

b) Pour h réel, comparer $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un élément de symétrie que l'on précisera.

c) En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2° a) Déterminer la fonction dérivée de f et démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 2(\sin x - 1)(2\sin x + 1) .$$

b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3° Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'écran d'une calculatrice et vérifier les résultats obtenus aux questions précédentes.

39 Étudier les variations de la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} .$$

4 Extremums

40 Déterminer les extremums de la fonction définie sur $[-2 ; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 1 .$$

41 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$ par :

$$f(x) = \frac{x+a}{x(x+1)} , \quad \text{où } a \text{ est un réel fixé.}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a, la fonction f admet-elle un extremum en -2 ?

Préciser s'il s'agit alors d'un maximum ou d'un minimum.

42 ★ Soit a et b deux réels et f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4x+a}{2x^2+ax+b} .$$

Déterminer a et b pour que la fonction f admette des extremums en -2 et en 1.

Préciser alors la nature de ces extremums.

43 ★★ L'unité de longueur est le centimètre.

Soit T un triangle rectangle dont le périmètre a une mesure fixée p.

On note x la mesure de l'un des côtés de l'angle droit et $\mathscr{A}(x)$ l'aire en cm^2 du triangle T.

1° Justifier que x peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $\left]0 ; \frac{p}{2}\right[$.

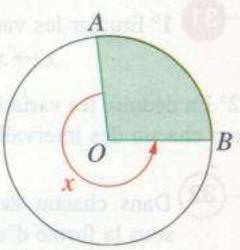
2° Exprimer la mesure du second côté de l'angle droit en fonction de p et x, puis en déduire que :

$$\mathscr{A}(x) = \frac{px(p-2x)}{4(p-x)} .$$

3° Déterminer, en fonction de p, les dimensions du triangle T pour que son aire soit maximale.

44 **Construire le plus grand cône**

On découpe un secteur angulaire d'angle au centre O dans un disque de carton.

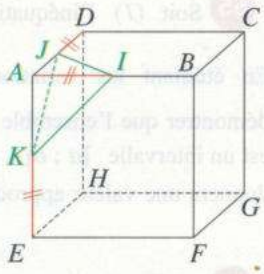


On enlève la partie colorée et on colle bord à bord les rayons $[OA]$ et $[OB]$.

On fabrique ainsi un cône de révolution.

Trouver x pour que le volume de ce cône soit maximal.

45 *ABCDEFGH* est un cube de 5 cm d'arête.



À tout point I du segment $[AB]$, on associe le point J du segment $[AD]$ et le point K du segment $[AE]$ tels que :

$AI = DJ = EK$.

On veut déterminer la position de I pour laquelle le volume du tétraèdre $AIJK$ est maximal.

On pose $x = AI$ et on note $V(x)$ le volume, en cm^3, du tétraèdre $AIJK$.

1° Préciser l'ensemble des valeurs prises par x et démontrer que $V(x) = \frac{1}{6}x(5-x)^2$.

2° Déterminer la fonction dérivée de la fonction V.

En déduire le tableau des variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;5]$.

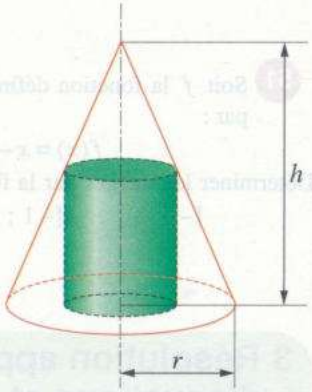
3° Conclure.

46 ★★ Parmi tous les cylindres inscrits dans un cône droit (rayon du cercle de base r, hauteur du cône h), quel est celui :

a) de volume maximal ;

b) de surface totale maximale.

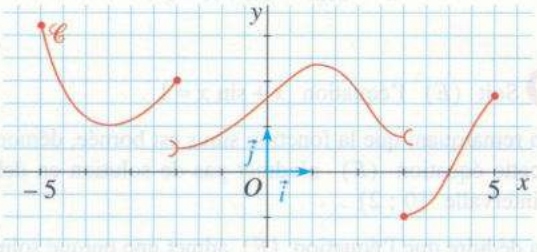
(D'après École polytechnique féminine)



3 Fonctions continues

1 Vrai – Faux

47 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$.



Par lecture graphique, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ?

1° La fonction f est discontinue en 3.

2° La fonction f est continue en -1.

3° La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

4° La fonction f est continue sur l'intervalle $]-2\,;2]$.

5° La fonction f est continue sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

48 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° L'équation $(x^3+2)x^2 = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

2° Pour tout réel k dans $[-2\,;5]$, l'équation $x^3 + 1 = k - x^2$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-2\,;2]$.

3° L'image de l'intervalle $[-1\,;1]$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$ est l'intervalle $[f(-1)\,;f(1)]$.

4° Si l'image de l'intervalle $[-1\,;1]$ par une fonction g est un intervalle, alors g est continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

2 Images d'intervalles par une fonction

49 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-3\,;2]$ dont le tableau des variations est :

x	-3		-2		1		2
$f(x)$	2	↘	-1	↗	1	↘	0

Déterminer les images par la fonction f des intervalles :

$[-2\,;1]$, $[-2\,;2]$ et $[-3\,;0]$.

50 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2+3}\ .$$

Déterminer les images par la fonction f des intervalles :

$[-4\ ;\ 4]$, $[-1\ ;\ 3]$ et $[0\ ;\ 4]$.

51 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=x-3\sqrt{x+5}\ .$$

Déterminer les images par la fonction f des intervalles :

$[-5\ ;\ 0]$, $[-1\ ;\ 3]$ et $[0\ ;\ 4]$.

3 Résolution approchée d'équations et d'inéquations

52 Soit f une fonction définie et continue sur $[-3\ ;\ 4]$ dont le tableau des variations est :

x	-3		0		1		2		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

1° Dénombrer les solutions des équations suivantes :

a) $f(x)=3$; **b)** $f(x)=0$; **c)** $f(x)=-2$.

2° Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>1$.

Dans les exercices 53 *et* 54, *dénombrer les solutions des équations suivantes dans l'intervalle* I *et en donner un encadrement d'amplitude* 10^{-2} .

53 **1°** $x^3+5x=2$, $I=[0\ ;\ 1]$.

2° $x^5-5x+1=0$, $I=[-2\ ;\ 2]$.

3° $x+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{9}{2}$, $I=[1\ ;\ 4]$.

54 **1°** $2x\sqrt{x+2}=-1$, $I=[-2\ ;\ +\infty[$.

2° $x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=2$, $I=[-1\ ;\ 1]$.

3° $\cos 2x=x$, $I=\mathbb{R}$.

55 Soit (I) l'inéquation $x^3+\dfrac{3}{x}<5$.

En étudiant les variations de la fonction $x\mapsto x^3+\dfrac{3}{x}$, démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est un intervalle $]a\ ;\ b[$, où a et b sont deux réels dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

56 En s'inspirant de la méthode utilisée dans l'*Exercice* 55, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$4x^3-3x<\frac{1}{2}\ .$$

57 Soit λ un réel strictement positif.

Déterminer, suivant les valeurs du paramètre λ , le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\lambda]$ de l'équation :

$$x^3-3\lambda^2x+2=0\ .$$

58 Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x)=x^3+x^2-x+1\ .$$

Déterminer, suivant les valeurs du paramètre λ , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\lambda$.

59 ★ Déterminer, selon les valeurs du réel λ , le nombre de solutions de l'équation suivante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$$x^3-3\lambda x^2-3x+\lambda=0\ .$$

60 Soit (E) l'équation $x+\sin x=1$.

1° En remarquant que la fonction sinus est bornée, démontrer que cette équation (E) n'admet pas de solution en dehors de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

2° En déduire que l'équation (E) admet une unique solution réelle dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

61 Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

1° $x+\cos x=1$. **2°** $x^2=\sin x$.

62 ★ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[0\ ;\ 1]$.

4 Problèmes

63 Utilisation d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de 1, par :

$$f(x)=\frac{x+1}{x^3-1}\ .$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

1° Démontrer que, pour tout réel x différent de 1 :

$$f'(x)=\frac{P(x)}{(x^3-1)^2}\ ,$$

où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.

2° Étudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.

3° En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.

4° a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\ ;-1)$.

b) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

5° Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse -1.

6° Vérifier les résultats obtenus précédemment en visualisant à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ et les tangentes étudiées.

64 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par a un réel de I et par T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(a\ ;f(a))$.

Pour tout réel x de I, on note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et P le point de T d'abscisse x.

1° Justifier que $\overrightarrow{PM}=d(x)\,\vec{j}$, où :

$$d(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)\ .$$

2° Dans cette question, on suppose que la fonction f'', dérivée seconde de f, est positive ou nulle sur l'intervalle I.

a) Étudier les variations de la fonction d sur l'intervalle I.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de toutes ses tangentes.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est une **fonction convexe**.

3° Étudier de façon analogue la position de la courbe par rapport à ses tangentes dans le cas où la fonction f'' est négative ou nulle sur l'intervalle I.

4° On suppose dans cette question que :

si $x\in I$ et $x\leqslant a$, alors $f''(x)\leqslant 0$;
si $x\in I$ et $x\geqslant a$, alors $f''(x)\geqslant 0$.

Démontrer que le point A est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire que la courbe $\mathscr{C}$ « traverse » la tangente T au point A.

5° Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^4+4x+1$.

b) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-9x^2+1$.

c) f est définie sur $[-1\ ;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x+1}$.

65 ★

Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

1° Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x-1)\sqrt{2x}\ .$$

Étudier les variations de cette fonction f et tracer la portion $\mathscr{C}_1$ de sa courbe représentative correspondant aux valeurs de x telles que $0\leqslant x\leqslant 2$.

2° Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

$$y^2-2x(x-1)^2=0 \quad \text{avec } x\in[0\ ;2]\ .$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et d'une courbe $\mathscr{C}_2$, que l'on tracera, déduite de $\mathscr{C}_1$ par une transformation du plan $\mathscr{P}$.

Préciser les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et à la droite Δ d'équation $y=x$.

3° Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation :

$$(y^2+4x^2)^2-4x^2(x^2+1)^2=0\ ,$$

avec $x\in[-2\ ;2]$.

Montrer que Γ est la réunion de $\mathscr{C}$ et d'une courbe $\mathscr{C}'$, transformée de $\mathscr{C}$ dans une symétrie que l'on précisera.

Tracer Γ sur une figure distincte de la figure utilisée pour **1°** et **2°**.

4° On considère enfin l'ensemble Γ' des points M de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation :

$$(x^2+4y^2)^2-4y^2(y^2+1)^2=0\ ,$$

avec $y \in [-2\ ;\ 2]$.

Montrer que Γ' se déduit de Γ par une symétrie que l'on précisera.

66 Optimisation

Soit $\mathscr{C}$ un demi-cercle de centre O, de rayon 1 et d'extrémités I et K.

Pour tout point M du demi-cercle $\mathscr{C}$, on note H le projeté orthogonal de M sur (IK) et $\mathscr{A}$ l'aire du triangle IHM.

Le but du problème est d'étudier l'aire $\mathscr{A}$ suivant la position du point M.

A. Avec des coordonnées

On considère le repère orthonormal $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ où J est le point d'intersection de la médiatrice de $[IK]$ avec le demi-cercle $\mathscr{C}$.

On note x l'abscisse du point M et on pose $\mathscr{A}=f(x)$.

1° Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

2° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$g(x)=(1-x)^3(1+x)\ .$$

a) Dresser le tableau des variations de la fonction g.

b) En déduire le tableau des variations de la fonction f.

3° **a)** Pour quelle position du point M, l'aire $\mathscr{A}$ est-elle maximale ?

Quelle est la valeur de ce maximum ?

b) Démontrer qu'il existe une position M_0 de M, différente de J, telle que l'aire $\mathscr{A}$ soit égale à celle du triangle OIJ. On donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse x_0 de M_0.

B. Avec un angle

On désigne par α la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

1° Démontrer que $\mathscr{A}=\dfrac{1}{4}(2\sin\alpha-\sin 2\alpha)$.

2° Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par :

$$h(t)=2\sin t-\sin 2t\ .$$

a) Démontrer que, pour tout réel t dans $[0\ ;\ \pi]$, on a :

$$h'(t)=2(1-\cos t)(1+2\cos t)\ .$$

b) En déduire le tableau des variations de la fonction h.

3° Retrouver les résultats de la *Question* **A. 3°** en utilisant la fonction h.

67 ★ Lieu géométrique

Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$, par :

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1° Étudier les variations de la fonction f.

2° Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}\ .$$

En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+2$.

3° Déterminer l'abscisse du point J de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite $\mathscr{D}$, puis une équation de cette tangente T.

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et les droites $\mathscr{D}$ et T.

5° À l'aide du graphique, étudier, suivant les valeurs du paramètre p, le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x)=x+p\ .$$

Préciser l'ensemble D des valeurs de p pour lesquelles cette équation admet deux solutions distinctes.

6° Lorsque la droite Δ d'équation $y=x+p$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en deux points M et N, on note P le milieu de $[MN]$.

On s'intéresse au lieu géométrique du point P.

a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection M et N sont les solutions de l'équation :

$$(E)\qquad (p-2)x^2+(1-2p)x+p=0\ .$$

b) En déduire que l'abscisse du point P est $x_P=1+\dfrac{3}{2p-4}$

et démontrer que P appartient à la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation :

$$y=x+2+\frac{3}{2(x-1)}\ .$$

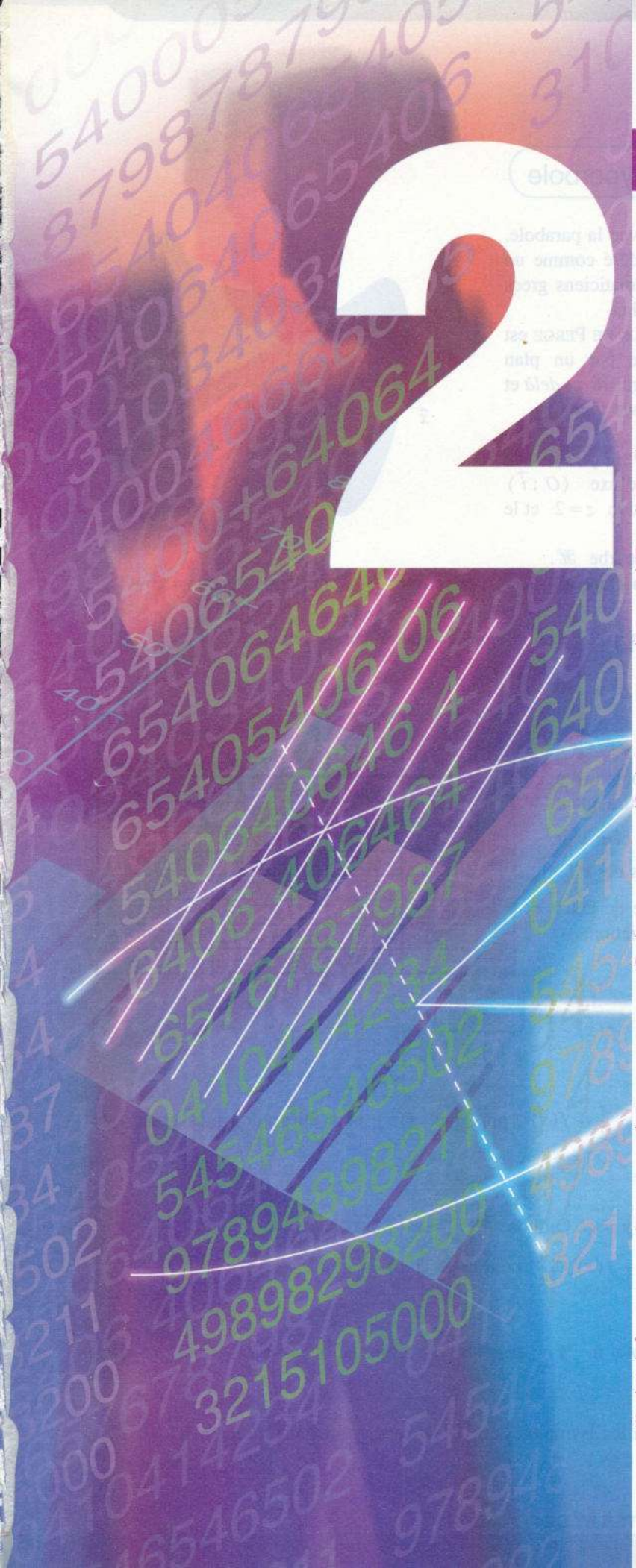
c) Quel est l'ensemble décrit par x_P lorsque p décrit D ?

d) Étudier les variations de la fonction g définie, pour tout réel $x \neq 1$, par :

$$g(x)=x+2+\frac{3}{2(x-1)}$$

et tracer la courbe $\mathscr{C}'$.

Préciser la partie de la courbe $\mathscr{C}'$ décrite par le point P lorsque la droite Δ prend toutes les positions possibles.



CHAPITRE

2

Limites de suites et de fonctions

Limites de suites p. 37

- connaître les différents comportements possibles d'une suite en $+\infty$

Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction p. 38

- étudier le comportement asymptotique d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Limite en un réel a d'une fonction p. 40

- étudier le comportement d'une fonction lorsque x tend vers a et déterminer une asymptote verticale

Limites et ordre p. 41

- utiliser les théorèmes de comparaison

Limites et opérations p. 42

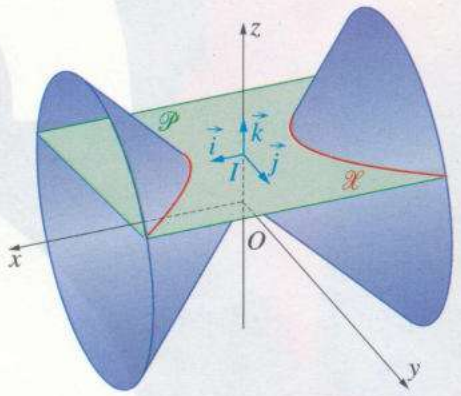
- calculer des limites de sommes, de produits, de quotients et de composées

Théorème des valeurs intermédiaires sur I ouvert p. 43

- utiliser ce théorème sur un intervalle ouvert pour résoudre une équation

1 Asymptotes d'une hyperbole

L'hyperbole est une des trois **coniques** (avec la parabole, et l'ellipse dont le cercle peut être considéré comme un cas particulier) découvertes par les mathématiciens grecs en tant qu'intersection d'un cône par un plan.
L'hyperbole, nommée ainsi par APOLLONIUS DE PERGE est la courbe obtenue en coupant un cône par un plan parallèle à son axe. (Étymologie : *hyper* signifie *au-delà* et *ballein* signifie *lancer, jeter au-delà de toute limite.*)



Dans l'espace rapporté au repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le cône de sommet O et d'axe $(O\,;\vec{i})$ d'équation $y^2+z^2=x^2$, le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z=2$ et le point $I(0\,;0\,;2)$.
La section du cône par le plan $\mathscr{P}$ est la courbe $\mathscr{H}$.
Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $(I\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{H}$ a pour équation $y^2=x^2-4$.

1 Démontrer que la courbe $\mathscr{H}$ admet les axes de coordonnées comme axe de symétrie.

2 On appelle f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

a) En observant les résultats ci-contre obtenus à l'aide d'un tableur quelles conjectures émettre quant à l'ordre des nombres $f(x)$, x et $\frac{x}{2}$, et à leur comportement pour les « grandes » valeurs de x ?

b) En considérant f comme la composée de deux fonctions usuelles, donner son sens de variation.

	A	B	C	D
1	x	x/2	rac(x^2-4)	x-rac(x^2-4)
2	100	50	99,979998	0,020002
3	200	100	199,99	0,01000025
4	300	150	299,993333	0,00666674
5	400	200	399,995	0,00500003
6	500	250	499,996	0,00400002
7	600	300	599,996667	0,00333334
8	700	350	699,997143	0,00285715
9	800	400	799,9975	0,0025

3 **a)** Vérifier que, pour tout réel $x\geqslant 2$, $f(x)-\frac{x}{2}=\dfrac{3x^2-16}{4\left(\sqrt{x^2-4}+\frac{x}{2}\right)}$.

b) En déduire que, pour tout réel $x\geqslant 3$, $\frac{x}{2}\leqslant f(x)$, puis que $f(x)$ peut être rendu plus grand que n'importe quel réel A. On dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

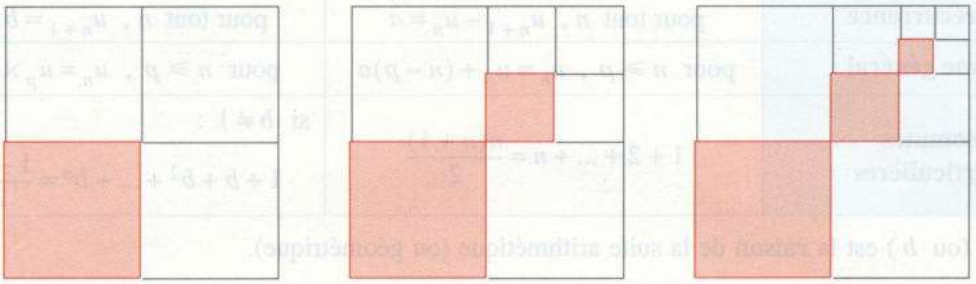
4 On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$. On pose $d(x)=x-f(x)$.
Calculer $x-f(x)$ et montrer que $0\leqslant x-f(x)\leqslant\frac{4}{x}$ pour $x\in[2\,;+\infty[$.
Interpréter géométriquement $d(x)$.

On dit que **la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$**, comme le précise D'ALEMBERT dans l'*Encyclopédie méthodique* (1784).

5 En utilisant les symétries de $\mathscr{H}$, donner les asymptotes de $\mathscr{H}$ et la construire dans le repère $(I\,;\vec{i},\vec{j})$.

2 Visualisation d'une suite

On considère un carré de côté 1.
On partage ce carré en quatre carrés isométriques et on colorie le carré situé en bas à gauche (étape 1).
On recommence ce procédé avec le carré situé en haut à droite (étape 2) et ainsi de suite.
On appelle u_n l'aire de la surface totale colorée au bout de la n-ième étape.

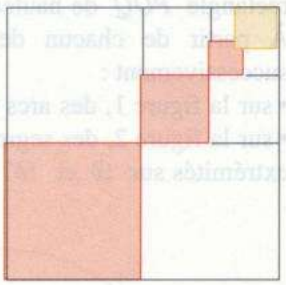


Étape 1 Étape 2 Étape 3

1 **a)** Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Vérifier géométriquement que la suite (u_n) est bornée et croissante.

c) Conjecturer géométriquement la limite de la suite (u_n).



2 On considère un carré (en jaune sur la figure) d'aire $\varepsilon > 0$.
Vérifier géométriquement qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $\left]\frac{1}{3} - \varepsilon\ ;\ \frac{1}{3}\right[$.

3 ARCHIMÈDE a rencontré le problème en cherchant à déterminer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
Pour résoudre le problème, il utilise l'identité, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3 \times 4^{n-1}}.$$

a) Prouver cette identité.

b) On considère la suite (u_n) définie précédemment.
En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, que :

$$u_n + \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3}.$$

c) Retrouver algébriquement les résultats de la question **2**.

ARCHIMÈDE, comme les mathématiciens de l'Antiquité, refusait le « passage à l'infini » ; il concluait en posant :

$$\ell = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots,$$

puis en prouvant que les hypothèses $\ell < \frac{1}{3}$ et $\ell > \frac{1}{3}$ sont toutes deux absurdes.

3 Suites arithmétique ou géométrique

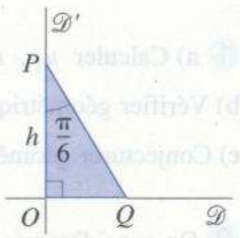
Rappels

	suite arithmétique	suite géométrique
relation de récurrence	il existe un réel a tel que : pour tout n, $u_{n+1} - u_n = a$	il existe un réel b tel que : pour tout n, $u_{n+1} = b \times u_n$
terme général	pour $n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n-p)a$	pour $n \geqslant p$, $u_n = u_p \times b^{n-p}$
sommes particulières	$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	si $b \neq 1$: $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Le réel a (ou b) est la **raison** de la suite arithmétique (ou géométrique).

Application

On considère un triangle équilatéral ABC de côté d, avec $d > 0$, et le triangle rectangle POQ de hauteur $OP = h$, décrit sur la figure ci-contre.
À partir de chacun de ces triangles, on construit une spirale en traçant successivement :
• sur la figure 1, des arcs de cercle $\mathscr{C}_n$ de centre A, B ou C ;
• sur la figure 2, des segments, chacun perpendiculaire au précédent et ayant leurs extrémités sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.



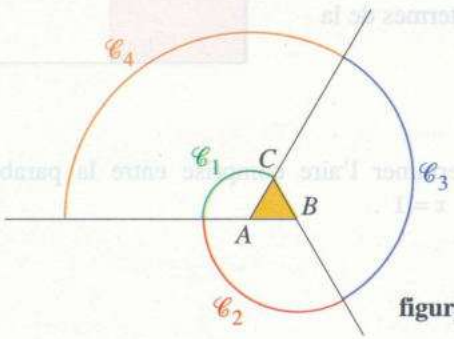


figure 1

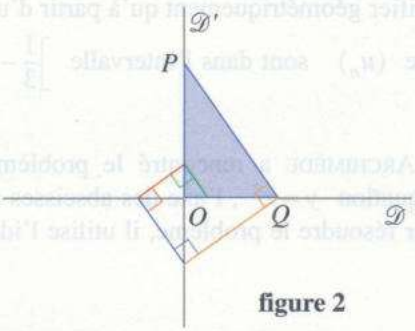


figure 2

Pour $n \geqslant 1$, on note r_n le rayon de l'arc de cercle $\mathscr{C}_n$, ℓ_n sa longueur et p_n la longueur du n-ième segment tracé sur la figure 2.

1 **a)** Justifier que la suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$ est arithmétique.

b) Pour $n \geqslant 1$, exprimer ℓ_n en fonction de r_n. En déduire que la suite $(\ell_n)_{n \geqslant 1}$ est arithmétique.

2 Montrer que la suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique.

3 Pour $n \geqslant 1$, on pose $L_n = \sum_{k=1}^{n} \ell_k$ et $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

a) Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres L_n et P_n.

b) Exprimer L_n en fonction de n et de d, et P_n en fonction de n et de h.

c) En déduire la limite de L_n et celle de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Limites de suites

La définition de la limite d'une suite a été donnée en classe de Première.

1.1 Rappels

Pour une suite numérique (u_n), il y a quatre possibilités :

- soit **la suite (u_n) converge vers un réel ℓ**, ce qui signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p ;
- soit **la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$**, ce qui signifie que tout intervalle ouvert du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p ;
- soit **la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$**, ce qui signifie que tout intervalle ouvert du type $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p ;
- soit **la suite (u_n) n'admet pas de limite.**

Voir Exercices 2 à 5

Lorsque la suite (u_n) admet une limite, cette limite est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim (u_n)$.

1.2 Suite croissante non majorée — propriété

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

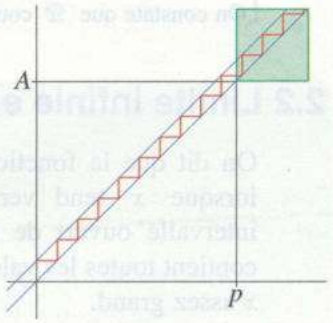
Démonstration

La suite (u_n) n'étant pas majorée, pour tout réel $A>0$, il existe un entier p tel que $u_p > A$.
La suite (u_n) est croissante, donc, pour tout entier $n \geqslant p$, on a $u_n \geqslant u_p$; d'où $u_n > A$.
Ainsi, à partir du rang p, les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]A\,;+\infty[$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty .$$

Exemple

Soit r un réel strictement positif. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 0 et de raison r.
Pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n = r$ qui est positif. La suite (u_n) est croissante.
Pour tout entier n, on a $u_n = nr$, donc la suite (u_n) n'est pas majorée puisque, pour tout réel positif A, il existe un entier p supérieur à $\dfrac{A}{r}$ tel que $u_n \geqslant A$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



1.3 Limite d'une suite géométrique — rappels

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 q^n$ et le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ résulte des résultats suivants :

- si $|q|<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;
- si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$;
- si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Voir Exercices 11 à 13

2 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction

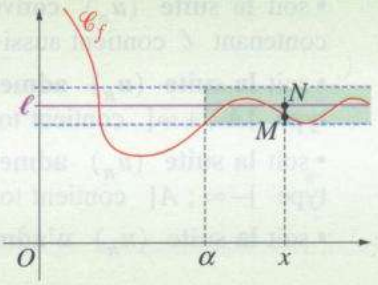
Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $[r\,;+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère cartésien.

2.1 Limite finie en $+\infty$ — définition

Soit ℓ un nombre réel.

Dire que $f(x)$ admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x assez grand.

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=\ell$.



La droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Voir Exercices 15 et 16

Remarques

- Si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-\ell)=0$; graphiquement, cela signifie que la distance MN, entre les points $M(x\,;f(x))$ et $N(x\,;\ell)$, tend vers 0 .

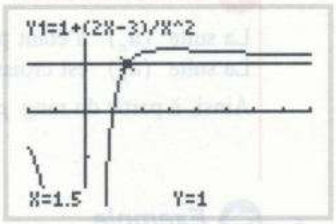
Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{2x-3}{x^2}$.

Sa courbe $\mathscr{C}_f$, donnée ci-contre, est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

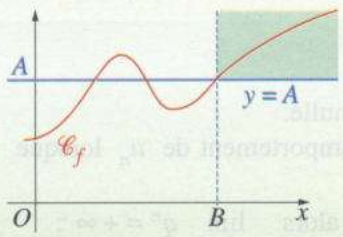
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

On constate que $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}_f$ en $A(1{,}5\,;1)$.



2.2 Limite infinie en $+\infty$ — définition

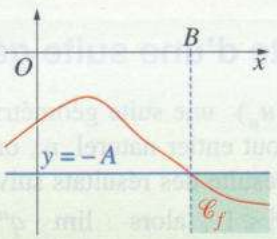
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$, pour tout x assez grand.



Si $x>B$, alors $f(x)>A$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;-A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$, pour tout x assez grand.



Si $x>B$, alors $f(x)<-A$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$.

2.3 Asymptote oblique

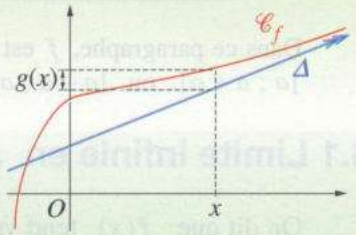
définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]r\,;+\infty[$ et a et b deux réels donnés.

Si, pour tout x dans I, on a :

$$f(x) = ax + b + g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \ ,$$

alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

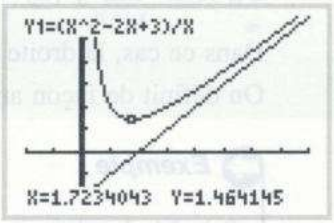


Exemple

Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x}$.

Pour tout réel $x > 2$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x}$.

En posant $g(x) = \dfrac{3}{x}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; donc la droite Δ, d'équation $y = x - 2$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



Soit les points $M(x\,;f(x))$ et $N(x\,;x-2)$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On a :

$$\overrightarrow{NM} = (f(x) - g(x))\,\vec{j} = \frac{3}{x}\,\vec{j} \ .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, MN tend vers 0.

De plus, pour $x > 0$, on obtient $\dfrac{3}{x} > 0$, donc le point M est situé au-dessus du point N.

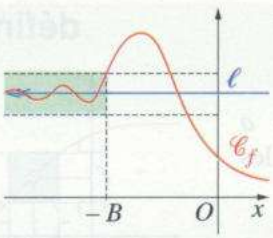
Ainsi, pour $x > 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote Δ.

2.4 Limites en $-\infty$ d'une fonction numérique

On suppose que l'ensemble de définition de la fonction f contient un intervalle de la forme $]-\infty\,;r[$.

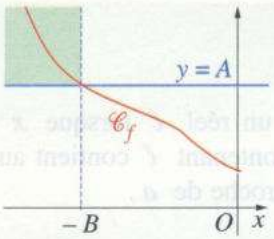
On définit, de la même manière que précédemment, la limite de la fonction f en $-\infty$.

f a pour limite ℓ en $-\infty$



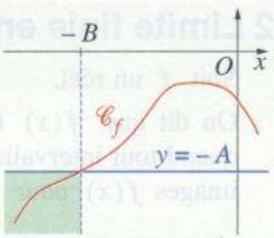
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Par exemple, l'interprétation du premier graphique conduit à la définition suivante :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ signifie que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient aussi toutes les images $f(x)$ de tous les réels x inférieurs à une certaine valeur (dépendant du choix de l'intervalle I).

La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

3 Limite en un réel a d'une fonction

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]a\,;\,a+\alpha[$ ou $]a-\alpha\,;\,a[$, avec $\alpha>0$.

3.1 Limite infinie en a

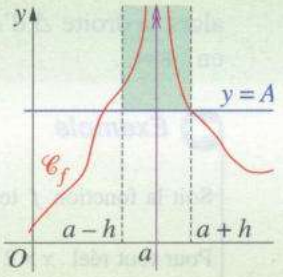
définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les images $f(x)$ pour x assez proche de a .

On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=+\infty$.

Dans ce cas, la droite d'équation $x=a$ est **asymptote** à $\mathscr{C}_f$.

On définit de façon analogue « f a pour limite $-\infty$ en a ».

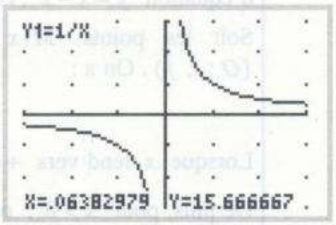


Exemple

• Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$, avec $A>0$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez proche de 0, en particulier dès que $0<x<\dfrac{1}{A}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. On écrit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$.



• Soit g la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ définie sur $]-\infty\,;\,0[$.

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,;-A[$, avec $A>0$, contient tous les réels $g(x)$ dès que x est assez proche de 0, en particulier dès que $-\dfrac{1}{A}<x<0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$. On écrit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$.

• Ainsi la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ admet une **limite à gauche** en 0 égale à $-\infty$ et une **limite à droite** en 0 égale à $+\infty$.

Voir Exercice 19

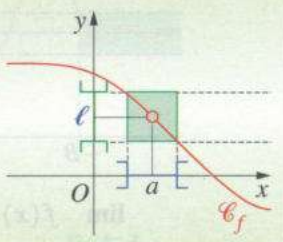
3.2 Limite finie en a

définition

Soit ℓ un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers un réel ℓ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les images $f(x)$ pour x assez proche de a .

On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{a} f=\ell$.



Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers 1.

En effet, pour $x\neq 1$, $f(x)=x+1$ et tout intervalle ouvert contenant 2 contient aussi les réels $1+x$, pour x assez proche de 1.

Si f est continue sur un intervalle ouvert I , alors, pour tout réel a de I , $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

4 Limites et ordre

f, g et h désignent des fonctions numériques, ℓ et ℓ' des réels, et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

4.1 Compatibilité avec l'ordre

propriété

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

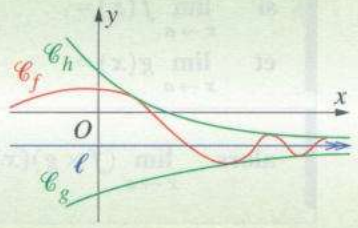
Si f et g sont dans un certain ordre, alors les limites ℓ et ℓ' sont dans le même ordre.

Voir Exercice 34

4.2 Théorème des « gendarmes »

Si une fonction f est encadrée par deux fonctions g et h ayant même limite ℓ en a, alors f a pour limite ℓ en a.

Si $g \leqslant f \leqslant h$, avec $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



Remarque

Voir Exercices 30 à 32

On a le cas particulier : si, pour tout x, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

En effet, l'inégalité en valeur absolue s'écrit $-g(x) + \ell \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \ell$ et le théorème des « gendarmes » s'applique.

Démonstration

On veut démontrer le théorème en $+\infty$. Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ.

Il s'agit de démontrer que J contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, donc J contient les réels $g(x)$ pour x supérieur à un certain réel B_1.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, donc J contient les réels $h(x)$ pour x supérieur à un certain réel B_2.

On appelle B le plus grand des deux réels B_1 et B_2. Alors l'intervalle J contient $g(x)$ et $h(x)$ pour x supérieur à B, donc il contient également le réel $f(x)$ qui est compris entre $g(x)$ et $h(x)$.

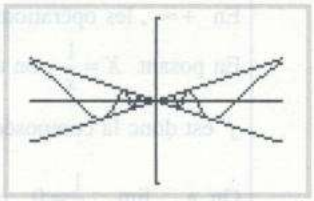
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction sinus étant majorée par 1 et minorée par -1, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $-x \leqslant f(x) \leqslant x$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.



4.3 Second théorème de comparaison

- Si $f \leqslant g$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $f \geqslant g$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

On dispose d'un théorème analogue pour les suites.

Voir Exercice 30

5 Limites et opérations

5.1 Opérations sur les limites – Rappels

a désigne soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$; ℓ et ℓ' sont des réels.

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure directement

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure directement

si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell\neq 0$	$\ell=0$ et $g>0$	$\ell=0$ et $g<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g}(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

On dispose de résultats analogues pour les limites de suites.

Voir Exercices 36 à 46

5.2 Composée de deux fonctions

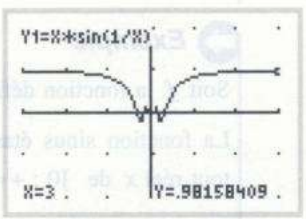
proposition

Soit $f = g \circ u$ une fonction composée de deux fonctions u et g.
a, b et λ désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \lambda$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$.

Voir Exercices 47, 48 et 50

Exemples

• On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.



En $+\infty$, les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.

En posant $X = \frac{1}{x}$, on a $x = \frac{1}{X}$, donc $f(x) = \frac{\sin X}{X}$.

f est donc la composée de $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ suivie de $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, car la fonction sinus est dérivable en 0 et sa dérivée vaut 1, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

• On considère la fonction h définie sur $I =]-\infty ; 1[$ par $h(x) = \sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$.

Pour tout réel x appartenant à I, $4x-5<0$ et $x-1<0$, donc $h(x)$ existe.

Si x tend vers $-\infty$, $\frac{4x-5}{x-1}$ a la même limite que $\frac{4x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{x-1} = 4$.

Or $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ (continuité de la fonction racine carrée en 4) ; donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 2$.

5.3 Composée d'une suite et d'une fonction — proposition

a et λ désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de réels appartenant à I, et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = f(u_n)$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lambda$.

En particulier :

• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ et $v_n = f(n)$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lambda$;

• si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si la fonction f est continue en ℓ, alors la suite (v_n) converge vers $f(\ell)$.

Ce théorème est aussi très utile pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite.

Exemple

Voir Exercices 51 et 57

Soit la suite (u_n), définie pour $n \geqslant 1$, par $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a vu dans l'exemple précédent que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc la suite (u_n) converge vers 1.

6 Théorème des valeurs intermédiaires sur I ouvert

On admettra que le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donné au *Chapitre* 1 s'étend au cas d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non borné.

6.1 Équation $f(x) = k$ — proposition

a, b, α et β désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $]a ; b[$ telle que :

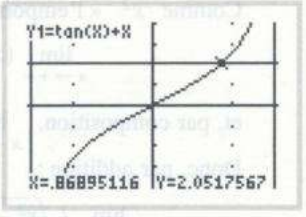
$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} f(x) = \beta,$$

alors, pour tout réel k strictement compris entre α et β,
l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]a ; b[$.

Voir Exercices 52 à 56

Exemple

Dans l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on veut résoudre l'équation $\tan x + x = 2$.



La fonction f définie sur I par $f(x) = \tan x + x$ est dérivable sur I, donc continue sur I.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2 + \tan^2 x$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est alors strictement croissante sur I.
De plus, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

Le réel 2 appartient à l'intervalle image $]-\infty ; +\infty[$, donc l'équation $\tan x + x = 2$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1 Calculs de limites de fonctions

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x}{3x-1}$ en $+\infty$; **b)** $g : x \mapsto \sqrt{x^2-2x}-x$ en $+\infty$;

c) $k : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sin x}{4x-\pi}$ en $\dfrac{\pi}{4}$; **d)** $m : x \mapsto \dfrac{x}{2-\cos x}$ en $-\infty$.

• Méthodes

Si les théorèmes sur les limites (somme, produit, quotient, composée) ne permettent pas de conclure, on peut :

• repérer les termes prépondérants dans l'expression algébrique de la fonction ou utiliser un résultat remarquable ;

• utiliser un changement de variable ; par exemple $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$;

• comparer la fonction f a une fonction dont on connaît la limite et utiliser un théorème de comparaison.

• conjecturer la limite ℓ de la fonction f, puis montrer que $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.

a) En $+\infty$, x^2 « l'emporte » sur $4x$ et $3x$ « l'emporte » sur -1 donc $f(x)$ à la même limite que $\dfrac{x^2}{3x}$.

On obtient donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4x}{3x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$.

b) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on conjecture que la limite de g en $+\infty$ est -1 .

On a $|g(x)-(-1)| = \left|\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\right|$ et en utilisant l'expression conjuguée :

$$|g(x)-(-1)| = \frac{1}{\left|\sqrt{x^2-2x}+x-1\right|} .$$

Comme x^2 « l'emporte » sur $-2x$,

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2-2x) = +\infty$$

et, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-2x} = +\infty$.

Donc, par addition :

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-2x}+x-1) = +\infty ,$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} |g(x)-(-1)| = 0$.

En conséquence, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$.

c) On pose $x = \dfrac{\pi}{4} + h$. On obtient, en utilisant les formules d'addition :

$$k\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{4h}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\sin h}{4h} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sin h}{h}\right).$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, on obtient :

$\lim\limits_{h \to 0} k\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} k(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

d) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc :

$$1 \leqslant 2-\cos x \leqslant 3 .$$

La fonction m est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x négatif, on a :

$\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos x} \leqslant 1$, d'où $\dfrac{1}{3}x \geqslant m(x)$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3}x = -\infty$, on en déduit que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = -\infty$ par un théorème de comparaison.

2 Étude d'une suite définie par une somme

BAC

Énoncé

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel non nul, par :

$$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{2}{1+\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{n}{1+n} \ , \ .$$

$$v_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \ldots + \frac{n}{n+n^2} \ .$$

1° Démontrer que, pour tous les entiers naturels non nuls n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geqslant \frac{1}{1+n} \ .$$

En déduire que $u_n \geqslant \frac{1}{2} n$ et déterminer la limite de la suite (u_n) .

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

Analyse de l'énoncé

La forme indique que le dernier terme peut se lire :

$$\frac{n}{1+\sqrt{n \times n}} \ .$$

1° Il s'agit de démontrer une inégalité.
Cette inégalité va permettre de minorer le terme général d'une suite.
Pour obtenir la limite, il reste à utiliser un théorème de comparaison.

2° On demande d'encadrer le terme général d'une suite qui est écrit sous forme d'une somme de n termes.
Pour obtenir la limite, on utilisera un théorème de comparaison.

• Méthode

• Pour minorer une somme, il suffit de minorer chaque terme de cette somme.

• Pour trouver un encadrement d'une somme, il suffit d'ajouter membre à membre des encadrements de chaque terme de cette somme.

1° Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$n \leqslant kn \leqslant n^2 \ , \text{ donc } \sqrt{n} \leqslant \sqrt{kn} \leqslant n \ .$$

En ajoutant 1 :

$$1+\sqrt{n} \leqslant 1+\sqrt{kn} \leqslant 1+n \ .$$

En prenant l'inverse :

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geqslant \frac{1}{1+n}$$

car la fonction inverse est décroissante sur $]0 \ ; +\infty[$.

Ainsi $\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geqslant \frac{1}{1+n}$, puis $\frac{k}{1+\sqrt{kn}} \geqslant \frac{k}{1+n}$.

Par addition de ces n inégalités, on obtient :

$$u_n \geqslant \frac{1}{1+n} + \frac{2}{1+n} + \ldots + \frac{n}{1+n} = \frac{1+2+\ldots+n}{1+n} \ .$$

Or $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $u_n \geqslant \frac{1}{2} n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} n = +\infty$ donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2° Pour tout entier k compris entre 1 et n , on a :

$$1+n^2 \leqslant k+n^2 \leqslant n+n^2 \ .$$

D'où, par inverse, $\frac{1}{n+n^2} \leqslant \frac{1}{k+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2}$,

$$\frac{k}{n+n^2} \leqslant \frac{k}{k+n^2} \leqslant \frac{k}{1+n^2} \ ,$$

et, par addition pour k variant de 1 à n :

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n+n^2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1+2+\ldots+n}{1+n^2} \ .$$

D'où $\frac{1}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2(1+n^2)}$.

En $+\infty$, $\frac{n(n+1)}{2(1+n^2)}$ se comporte comme $\frac{n^2}{2n^2}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2(1+n^2)} = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème des « gendarmes » :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2} \ .$$

exercices résolus

BAC

3 Étude de fonction et recherche d'asymptote

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

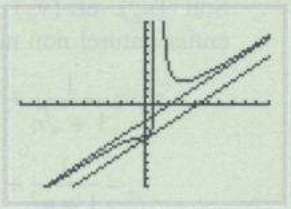
1° Étudier les variations de f et les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2° a) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique $\mathscr{D}$.

3° Déterminer l'abscisse du point I de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à $\mathscr{D}$.

Analyse de l'énoncé



1° Il s'agit de calculer la dérivée de f, d'étudier son signe, puis les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1.

2° L'écriture de $f(x)$ et les calculs de limites font penser que l'asymptote oblique a pour équation $y=x-2$.

3° $\mathscr{D}$ a pour équation $y=x-2$. Il s'agit de résoudre l'équation $f'(x)=1$.

• Méthode

• Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=+\infty$ (ou $-\infty$), alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote « verticale » d'équation $x=c$.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ avec $a\neq 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote « oblique » d'équation $y=ax+b$.

1° • $\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$, avec $(x-1)^2\geqslant 0$; donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$;

donc, par addition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Pour tout réel x différent de 1, $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,

donc $f'(x)$ est du signe du produit $(x-1)(x-3)$.

On obtient alors le tableau des variations :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$		‖ $+\infty$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

2° a) On a $g(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (voir la question précédente), la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (ainsi qu'en $-\infty$).

Comme $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$, alors la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) $g(x)$ est du signe de $3x-2$, donc $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en $J\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Pour $x<\dfrac{2}{3}$, $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}$, et pour $x>\dfrac{2}{3}$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

3° $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 1 ; donc l'abscisse du point I cherché vérifie l'équation :

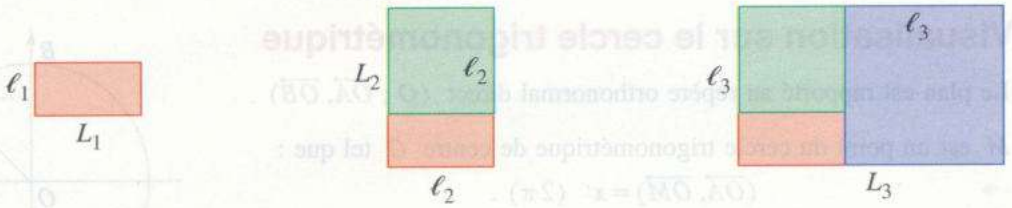
$f'(x)=1$, c'est-à-dire $3x-1=0$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{47}{12}\right)$ et la tangente T a pour équation $y=x-\dfrac{17}{4}$.

1 Périmètres

1.1 Avec des rectangles

On choisit un rectangle R_1 de dimensions ℓ_1 et L_1.
On construit un carré comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient un nouveau rectangle R_2 de dimensions ℓ_2 et L_2. On réitère le procédé.



On appelle $u_n = \dfrac{L_n}{\ell_n}$ le « coefficient de forme » du rectangle R_n.

1 **a)** Expliquer pourquoi, pour tout entier n non nul, $u_n \geqslant 1$.

b) Calculer u_2 en fonction de u_1.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier n non nul.

2 Déterminer la solution positive φ de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Vérifier que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

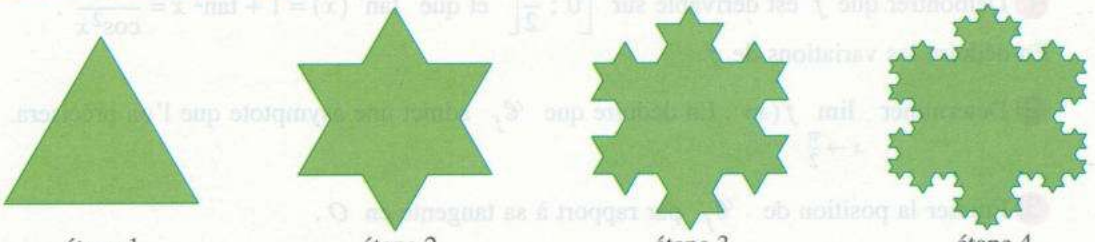
3 **a)** Démontrer que, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} - \varphi = \dfrac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}$.

b) En déduire que, pour tout entier n non nul, on a $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi} |u_n - \varphi|$, puis :

$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-1} |u_1 - \varphi| .$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

1.2 Flocon de Von Koch



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

À l'étape 1, la figure est un triangle équilatéral de côté 1.
On divise en trois chaque côté de la figure 1 et on construit à l'extérieur de la figure des triangles équilatéraux pour obtenir la figure 2.
On réitère le procédé pour obtenir la figure 3, la figure 4… et ainsi de suite.
On appelle c_n le nombre de côtés, p_n le périmètre et a_n l'aire de la surface obtenue à l'étape n.

1 Calculer c_n, p_n et a_n en fonction de n.

2 Étudier la convergence des suites (c_n), (p_n) et (a_n).

2 Étude de la fonction tangente

On appelle « fonction tangente » la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

2.1 Visualisation sur le cercle trigonométrique

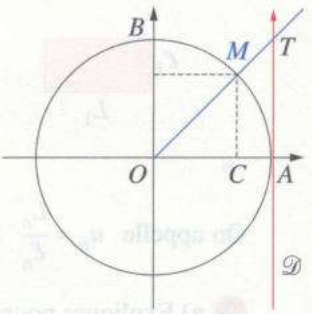
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

M est un point du cercle trigonométrique de centre O tel que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x \quad (2\pi)\ .$$

Soit $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire en A à (OA) .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection T des droites $\mathscr{D}$ et (OM) .



La droite $\mathscr{D}$ munie du repère $(A\ ;\ \overrightarrow{OB})$ est appelée **axe des tangentes**.

2.2 Particularités de la courbe représentative

1 Démontrer que la courbe représentative de la fonction tangente est invariante par toute translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2 Démontrer que le point $I_k(k\pi\ ;\ 0)$, avec $k\in\mathbb{Z}$, est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction tangente.

2.3 Étude de la restriction de la fonction tan à $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

On appelle f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

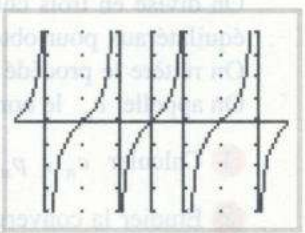
1 Démontrer que f est dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan'(x) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
En déduire les variations de f.

2 Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera.

3 Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en O .

2.4 Courbe représentative de la fonction tangente

Expliquer comment construire la courbe représentative de la fonction tangente donnée ci-contre (utiliser Z-TRIG) à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$.



3 Fonction composée $\sqrt{f}$

3.1 Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x^2+1+\dfrac{2}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1 Étudier la fonction f sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ (limites, dérivée et sens de variation).

2 Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2+1$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

a) Déterminer la limite de $f(x)-(x^2+1)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$.

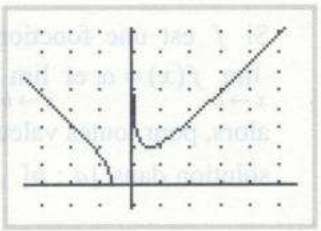
c) Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

d) Construire les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sur le même graphique.

3.2 Étude de la fonction $\sqrt{f}$

Soit la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-contre par une calculatrice graphique.



1 Conjecturer son ensemble de définition, la présence d'asymptotes et l'allure de la courbe au voisinage du point $A(-1\,;\,0)$.

2 **a)** Quel est l'ensemble de définition D de la fonction g ?

b) Étudier la fonction g sur chaque intervalle de son ensemble de définition (limites et sens de variation).

3 **Étude de g au voisinage de -1**

a) Montrer que, pour tout $h>0$, $\dfrac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}=-\sqrt{\dfrac{4+3h+h^2}{h(1+h)}}$.

En déduire que g n'est pas dérivable en -1.

b) Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_g$ en A.

4 **a)** Démontrer que, pour tout réel x appartenant à D, on a :

$$g(x)-|x|=\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\dfrac{2}{x}}+|x|}.$$

b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y=x$, est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

c) Démontrer que la droite $\mathscr{D}'$, d'équation $y=-x$, est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$.

5 Tracer les droites $\mathscr{T}$, $\mathscr{D}$ et Δ, puis la courbe $\mathscr{C}_g$.

Faire le point

• Limites

• Les opérations sur les limites de suites ou de fonctions permettent de conclure dans la plupart des cas quant à la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée.

• Il est essentiel de mémoriser les cas où ces théorèmes ne peuvent être appliqués.
Les formes indéterminées sont :

$$\text{« } \infty - \infty \text{ »},\ \text{« } 0 \times \infty \text{ »},\ \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \text{ et } \text{« } \frac{0}{0} \text{ ».}$$

• Il y a compatibilité entre l'ordre des fonctions (ou des suites) et l'ordre des limites si elles existent.
Les théorèmes de comparaison permettent de déterminer certaines limites.

• Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $]a\,;\,b[$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \beta$ (a, b, α et β pouvant être infinis),
alors, pour toutes valeurs de k comprise entre α et β, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $]a\,;\,b[$.

savoir	comment faire ?
déterminer la limite d'une fonction en a (a réel ou infini)	• on utilise les limites des fonctions de base • on utilise les résultats « opérations et limites » • si les résultats précédents ne permettent pas de conclure : – on transforme et on simplifie l'expression de $f(x)$ – si a est réel on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ • on utilise les théorèmes de comparaison
déterminer la limite d'une suite	• on utilise les limites des suites de base en particulier les suites arithmétiques et géométriques • on utilise les mêmes théorèmes que pour les fonctions • on utilise la limite de l'image d'une suite par une fonction continue
démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, admet une asymptote	• si on montre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote • si on montre que $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote en $+\infty$

1 Limites de suites

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, alors (u_n) converge.

2° Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$, alors (u_n) converge.

3° Si (u_n) converge vers 0, alors (u_n) est une suite croissante et négative ou décroissante et positive.

4° Si les suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limites, alors la suite de terme général $u_n v_n$ n'a pas de limite.

5° Si la suite (u_n) à termes strictement positifs converge, alors la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

6° Si les suites (u_n) et (v_n) sont des suites géométriques dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1, alors la suite de terme général $u_n v_n$ converge.

7° Si les suites (u_n) et (v_n) sont des suites géométriques dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1, alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge.

2 Variation d'une suite

Variation d'une suite

Étude du sens de variation d'une suite (u_n) définie pour $n \geqslant p$:

- si $(u_n) = f(n)$, où f est une fonction, on étudie les variations de f sur l'intervalle $[p\,;+\infty[$;
- on peut étudier, pour tout $n \geqslant p$, le signe de :

$$u_{n+1} - u_n \ ;$$

- si (u_n) est à termes strictement positifs, on peut comparer, pour tout $n \geqslant p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Pour les exercices 2 à 5 :

- *étudier les variations de la suite* (u_n) ;
- *conjecturer la limite* L *de la suite* (u_n) ;
- *déterminer un rang* p *à partir duquel tous les termes de la suite* (u_n) *sont dans l'intervalle* $]L-10^{-4}\,;L+10^{-4}[$ *et un rang* m *à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle* $]L-10^{-8}\,;L+10^{-8}[$.

2 **a)** $u_n = n^2 + 4n + 3$; **b)** $u_n = \frac{2^n}{n+1}$;

c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n+1} \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$.

3 **a)** $u_n = \frac{2}{n}$ $(n>0)$; **b)** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ $(n \geqslant 0)$.

4 **a)** $u_n = \frac{1-3n}{n+2}$ $(n \geqslant 0)$; **b)** $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n \geqslant 0)$.

5 **a)** $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$;

b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ pour $n \geqslant 0$.

3 Limite d'une suite

Pour les exercices 6 et 7, déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) *et* (v_n) .

6 **a)** $u_n = n^2 - 5n + 5$; **b)** $v_n = 5 - \frac{2}{n+1}$.

7 **a)** $u_n = n\sqrt{n}$; **b)** $v_n = \frac{n^2 - 2n}{3 - n}$.

8 Soit la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1° Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < u_n \leqslant 1$.

2° Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3° Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9 (u_n) est la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

1° Vérifier que, pour tout entier k non nul :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \ .$$

2° En déduire une expression simple de u_n en fonction de n et la limite de la suite (u_n) .

10 Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) admettent-elles une limite en $+\infty$?

a) $u_n = (-1)^n$; **b)** $v_n = \sin n$; **c)** $w_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + n\,\frac{\pi}{3}\right)$.

4 Limites de suites géométriques

Pour les exercices 11 à 13, donner les limites des suites suivantes.

11 **a)** $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{n}$; **b)** $v_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$.

12 **a)** $u_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$; **b)** $v_n = \frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$.

13 **a)** $u_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^n$; **b)** $v_n = \frac{-2^{n+1}}{5^{2n}}$.

2 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction numérique

1 Vrai-faux

14 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si f est une fonction croissante sur l'intervalle $]a ; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Si, pour tout réel x de l'intervalle $]a ; +\infty[$, $f(x) = -2 + g(x)$, alors la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

c) Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2 Applications

15 **1°** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2}{1+x^2} \leqslant 10^{-4}$.

2° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} .$$

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Déterminer un réel a tel que :

si $x \geqslant a$, alors $f(x) - (-1) \leqslant 10^{-4}$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

16 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Déterminer la translation qui transforme l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ en $\mathscr{C}_f$.

2° En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

17 Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$, représentant f, admet la droite $\mathscr{D}$ donnée pour asymptote en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto x - 3 + \frac{4}{x}$ et $\mathscr{D} : y = x - 3$.

b) $f : x \mapsto \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$ et $\mathscr{D} : y = 2x - 1$.

c) $f : x \mapsto \frac{(x^2 - x + 2)(3 - x)}{(x - 1)^2}$ et $\mathscr{D} : y = -x + 2$.

3 Limite en un réel a d'une fonction numérique

1 Vrai-faux

18 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° On a $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = +\infty$.

2° Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, alors sa courbe représentative admet une asymptote d'équation :

$x = 2$.

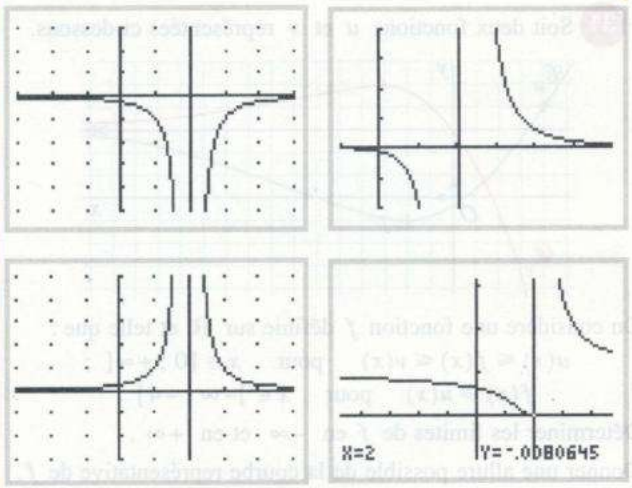
3° Si la courbe représentative de la fonction f, définie sur $]3 ; +\infty[$, admet la droite d'équation $x = 3$ comme asymptote, alors :

$\lim\limits_{x \to 3} |f(x)| = +\infty$.

2 Applications

19 Pour chaque fonction représentée, donner, si elle existe, sa limite en 2, sachant que la droite d'équation $x=2$ est asymptote à la courbe.

Préciser le cas échéant, la limite à droite et la limite à gauche en 2.



20 Conjecturer la limite de f en a, si elle existe, puis prouver la conjecture.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$ en $a=1$;

b) $f(x)=\sqrt{2-x}$ en $a=-2$;

c) $f(x)=3-\dfrac{2}{(x+1)^2}$ en $a=-1$;

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^2-2x-3}$ en $a=3$.

21 Déterminer :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x^2-x}{x-2}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x^2-x}{x-2}$.

22 En utilisant la dérivabilité de certaines fonctions, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$; **c)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{2x-\pi}$.

4 Ordre et limites

1 Vrai-faux

23 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si, pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant 2$, alors la suite (u_n) converge.

2° Si, à partir d'un rang p, $u_n-5\leqslant \dfrac{1}{2n+1}$, alors la suite (u_n) converge vers 5.

3° Si, à partir d'un rang p, $|u_n-2|\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$, alors la suite (u_n) converge vers 3.

24 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Soit f une fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ et telle que $1\leqslant f(x)\leqslant \sqrt{x}$ sur $]1\,;+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$.

2° Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que, pour tout réel positif $\dfrac{x}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{2x}{x+1}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

3° Si, pour tout réel x, $|f(x)-2|\leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

2 Ordre et limites de suites

25 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) $u_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$ $(n\geqslant 1)$; **b)** $v_n=\sqrt{5+n^2}$.

26 Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

a) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$; **b)** $v_n=\dfrac{\cos n}{n^2}$.

27 ★ On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n non nul, par $u_n=\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant \frac{n}{n+1}$$.

2° Étudier la convergence des suites définies par :

a) $v_n=\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$; **b)** $w_n=\dfrac{n}{n+1}$.

3° En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

28 On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{nv_n + 4}{n+1} \end{cases}.$$

1° Conjecturer la limite de la suite (v_n) à l'aide d'un tableur.

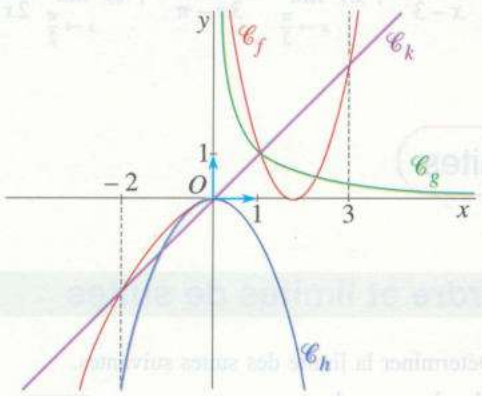
2° Démontrer que la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_n = nv_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

3° En déduire la limite de la suite (v_n).

3 Ordre et limites de fonctions

29 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la fonction f (en rouge) et les fonctions g, h et k telles que :

$g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$, $h(x) = -x^2$ et $k(x) = x$.



Par comparaison, déterminer les limites de f après avoir complété les phrases suivantes :

a) Pour $x \geqslant 3$, on a $f(x) \geqslant \ldots$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$.

b) Pour $0 < x \leqslant 1$, on a $f(x) \geqslant \ldots$.

Quelle limite de f peut-on en déduire ?

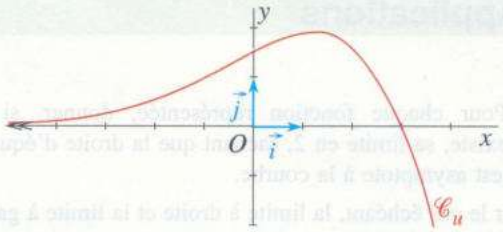
c) Pour $x \leqslant -2$, on a $f(x) \leqslant \ldots$.

Quelle limite de f peut-on en déduire ?

d) Pour $-2 \leqslant x < 0$, on a $\ldots \leqslant f(x) \leqslant 0$.

Quelle limite de f peut-on en déduire ?

30 Soit la fonction u représentée ci-après.



On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

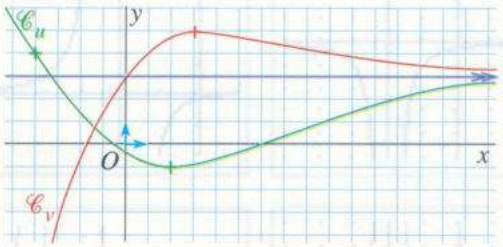
$f(x) \leqslant u(x)$ pour $x \in [2 ; +\infty[$;

$|f(x) - 4| \leqslant u(x)$ pour $x \in]-\infty ; 2]$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Donner une allure possible de la courbe représentative de f.

31 Soit deux fonctions u et v représentées ci-dessous.



On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ pour $x \in [0 ; +\infty[$;

$f(x) \geqslant u(x)$ pour $x \in]-\infty ; -4]$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Donner une allure possible de la courbe représentative de f.

32 On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + \sin x}{x - 1}.$$

Montrer que, pour tout $x \geqslant 2$, $|f(x) - 3| \leqslant \dfrac{4}{x-1}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

33 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}.$$

1° Montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2° En déduire les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2 - \cos x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \cos x}{2 - \cos x}$.

34 ★ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a ; +\infty[$, et ℓ et ℓ' deux réels, tels que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$$

1° On suppose que $\ell > \ell'$ et on désigne par a un réel tel que $\ell > a > \ell'$.

En appliquant la définition de la limite, démontrer que, pour x assez grand, $f(x) > a > g(x)$.

2° En déduire que si $f \leqslant g$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

3° En comparant $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x+1}$ sur $]0 ; +\infty[$, démontrer qu'on peut avoir $f < g$ et $\ell = \ell'$.

5 Limites et opérations

1 Vrai-faux

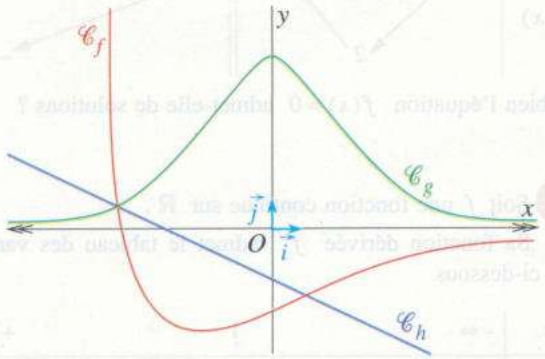
35 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$.

2° Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si, pour tout réel x strictement positif, $g(x)>0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=-\infty$.

2 Limites et opérations

36 Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions f, g et h.



1° D'après le graphique, indiquer les limites de chacune de ces fonctions en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Donner, si possible, les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions $f+g$, $f-g$, fg, fh, $g+h$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{f}{h}$ et $\dfrac{h}{g}$.

37 Dans chaque cas, donner en justifiant les tableaux des variations des fonctions $-f$, $|f|$, f^2 et $\dfrac{1}{f}$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$

38 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-3)$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} [-x^2(x+2)-1]$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)\right]$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$.

39 Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes après avoir vérifié qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto -x^3+2x^2-4$; **b)** $k : x \mapsto \dfrac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$.

Dans les exercices 40 *à* 42, *déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions.*

40 **a)** $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x}+2\right)(x^2-1)$ sur $]0\,;+\infty[$;

b) $g : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x}+2\right)(x^2-1)$ sur $]-\infty\,;0[$;

c) $h : x \mapsto \dfrac{(3-2x)^3}{1-x}$ sur $]-\infty\,;1[$.

41 **a)** $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;4[$;

b) $h : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-15}{10-2x}$ sur $]5\,;+\infty[$.

42 **a)** $f : x \mapsto \tan^2 x - \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;

b) $g : x \mapsto \dfrac{\tan x}{\tan x - 1}$ sur $\left]\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour les exercices 43 *à* 45 :

- *déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ;*
- *étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;*
- *préciser l'existence d'asymptotes horizontales ou verticales ;*
- *conjecturer, puis prouver l'existence ou non d'asymptotes obliques à la courbe représentative de la fonction.*

43 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2-4}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

44 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{(2x+1)^3}{x^3+27}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{2x-4}$.

45 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}+2}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{(2x-3)^3}{-2x^2+8}$.

46 On considère la fonction f définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$, par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x^2 + x - 2} .$$

1° Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x distinct de 1 et de -2, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + x - 2} .$$

2° Montrer que la courbe $\mathscr{C}$, représentative de f dans un repère orthonormal du plan admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ et deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.

3° Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

3 Composée et limites

Pour les exercices 47 *à* 49, *pour chacune des fonctions, déterminer l'ensemble de définition D et les limites aux bornes de D.*

47 **a)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$; **b)** $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

48 **a)** $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; **b)** $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

49 **a)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **b)** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}$.

50 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan \dfrac{\pi x}{4x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

51 Déterminer les limites des suites définies par :

a) $u_n = \cos \dfrac{\pi n + 1}{2n + 3}$; **b)** $v_n = \sin \dfrac{\pi}{2^n}$.

4 Théorème des valeurs intermédiaires

52 Une fonction continue f admet le tableau des variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

1° Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ?

2° Combien l'équation $f(x) = 4$ admet-elle de solutions ?

53 Une fonction continue f admet le tableau des variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$

Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

54 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction dérivée f' admet le tableau des variations ci-dessous.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

En déduire le sens de variation de la fonction f.

55 **1°** Étudier, sur $\mathbb{R}$, les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto x^3 + x + 1$$

ainsi que ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2° En déduire que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une seule solution a sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-3}.

56 Démontrer que l'équation $\dfrac{x^2 + x}{\cos x} = 2$ admet deux solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de ces solutions.

6 Problèmes

57 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On désigne par (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n=\frac{1}{2n\pi}\ ;\ b_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}\ ;\ c_n=f(a_n)\ \text{ et }\ d_n=f(b_n).$$

1° Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n).

2° En déduire que la fonction f ne peut admettre une limite en 0.

58 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=15$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1{,}4u_n-5$.

1° On introduit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n=u_{n+1}-u_n.$$

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

En préciser la raison et le premier terme.

b) On pose, pour $n\geqslant 0$, $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$.

Montrer que $S_n=u_{n+1}-u_0$.

2° Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n.

3° Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n).

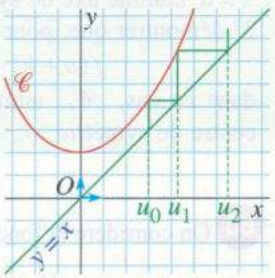
59 **1°** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+2$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Montrer que, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)\geqslant x+1.$$



2° On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\geqslant 1$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-u_0\geqslant n$.

d) En déduire le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$.

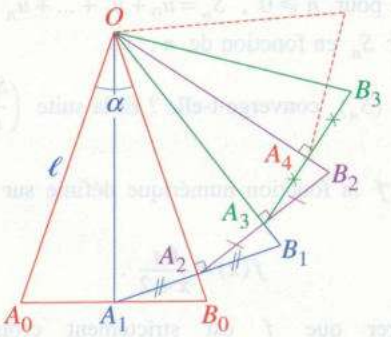
60 OA_0B_0 est un triangle isocèle tel que :

$$OA_0=\ell\quad\text{et}\quad \widehat{A_0OB_0}=\alpha.$$

On désigne par A_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$ et par B_1, le symétrique orthogonal de A_1 par rapport à la droite (OB_0).

OA_1B_1 est encore un triangle isocèle.

On refait une construction similaire à partir de A_2, milieu du segment $[A_1B_1]$. En réitérant le processus, on obtient une suite de triangles isocèles OA_nB_n.



1° a) Pour $n\geqslant 1$, exprimer la distance OA_n en fonction de OA_{n-1}.

b) En déduire l'expression de OA_n en fonction de n, ℓ et a.

2° a) Pour $n\geqslant 1$, exprimer la distance A_nA_{n+1} en fonction de $A_{n-1}A_n$.

b) Déterminer la longueur L_n de la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_n$.

c) Quelle est la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

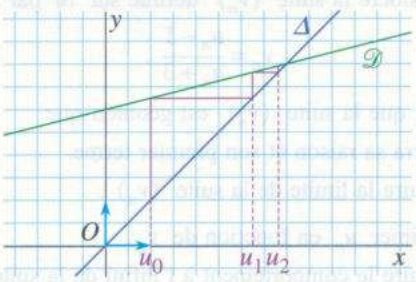
61 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et la relation de récurrence :

pour tout entier n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

Sur la figure, on a représenté les droites Δ et $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$y=x\quad\text{et}\quad y=\frac{1}{4}x+3,$$

ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).



1° Expliquer la construction de u_1 et de u_2.

2° Que suggère le graphique quant à la variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

3° a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1}-u_n$.

b) En déduire les variations de la suite (u_n).

4° On introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer la limite de (v_n) .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n , et en déduire le comportement à l'infini de la suite (u_n) .

d) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le plus petit entier naturel n vérifiant $|u_n - 4| < 10^{-4}$.

5° On pose, pour $n \geqslant 0$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) La suite (S_n) converge-t-elle ? Et la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n>1}$?

62 Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x}{x+2} .$$

A. 1° Montrer que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2° En déduire que si $x \in]0 ; 4[$, alors $f(x) \in]0 ; 4[$.

3° Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant x$.

B. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{u_n + 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1° a) Montrer que $u_1 \in]0 ; 4[$.

b) Démontrer que si $u_n \in]0 ; 4[$, alors $u_{n+1} \in]0 ; 4[$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0 ; 4[$.

2° Montrer que la suite (u_n) est croissante.

63 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} .$$

1° On admet que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2° On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} .$$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On précisera sa raison et son premier terme.

b) En déduire la limite de la suite (v_n) .

3° a) Exprimer u_n en fonction de v_n .

b) En déduire le comportement à l'infini de la suite (u_n) .

64 ★ On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) .$$

1° Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} .$$

Démontrer que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2° a) Démontrer que chacune des trois fonctions numériques suivantes ne prend que des valeurs positives sur $[0 ; +\infty[$:

$$f : x \mapsto x - \sin x ; \quad g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x ;$$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x .$$

b) Sachant que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, démontrer que, pour tout entier n non nul :

$$v_n - \frac{1}{24}\,\frac{(n+1)^2}{n^4} \leqslant u_n \leqslant v_n .$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Symétries d'une courbe représentative d'une fonction

Pour démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ possède une symétrie, on peut :

1° effectuer un changement de repère pour montrer que $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire ou impaire ;

2° démontrer que, pour tout réel h :

$$f(a+h) = f(a-h) ;$$

dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ;

3° démontrer que, pour tout réel h :

$$f(a+h) + f(a-h) = 2b ;$$

dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet le point $I(a ; b)$ comme centre de symétrie.

65 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 2$.

1° Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point $I(1 ; -1)$ comme centre de symétrie.

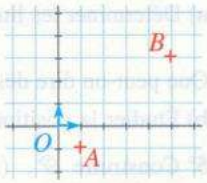
2° Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3° Étudier les variations de f .

4° Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.

5° Construire $\mathscr{C}_f$.

66 ★ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(1\,;-1)$ et $B(5\,;3)$.



On considère la suite de points (G_n) définie par le point G_0 en O et, pour $n \geqslant 1$, G_n est le barycentre des points pondérés $(G_{n-1}, 2)$, $(A, 1)$ et $(B, 1)$.

On note $(x_n\,;y_n)$ les coordonnées de G_n.

1° Calculer les coordonnées des points G_1, G_2 et G_3.

Placer ces points et montrer qu'ils sont alignés.

2° Prouver que, pour tout n de $\mathbb{N}$, G_{n+1} est l'image de G_n par une homothétie que l'on caractérisera par son centre et son rapport.

3° Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\,x_n + \frac{3}{2}\,.$$

4° a) On pose $x_n = u_n + 3$ pour tout entier n.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) En déduire une expression simple de x_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (x_n).

67 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$.

1° Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

2° Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet le point $I\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{9}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

3° Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.

4° Construire le tableau des variations de f.

5° Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$.

68 On considère la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 - x}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2° Étudier la parité de f.

3° a) Démontrer qu'il existe quatre réels a, b, c, d tels que, pour tout réel de D :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}\,.$$

b) En déduire les droites asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

4° a) Déterminer la fonction dérivée de f.

b) Démontrer que l'équation $t^3 + 15t - 4 = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les variations de f sur chaque intervalle de D.

5° Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

69 On considère la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 5}\,.$$

1° Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3° Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal admet la droite D d'équation $x = -\frac{1}{3}$ comme axe de symétrie.

4° a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

5° En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on donnera une équation.

70 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° Démontrer que f est une fonction impaire.

On appelle g la restriction de f à l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère précédent.

2° Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

3° Démontrer que g est croissante sur I.

4° On pose $h(x) = g(x) - x$.

Déterminer la limite de h en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

5° Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - 1}{x}$.

Quelle est l'allure de la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage du point $A(0\,;1)$?

6° Construire $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$.

71 **A.** Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1 .$$

1° Étudier les variations de g.

2° En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que :

$$0{,}65 < \alpha < 0{,}66 .$$

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) .$$

on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2° En utilisant la *partie* **A**, déterminer les variations de f et dresser son tableau des variations.

3° Soit I le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et J le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer une équation de la tangente T en I à $\mathscr{C}$.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

4° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$$

et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto f(x) - h(x) .$$

Que peut-on dire des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ en $+\infty$ et en $-\infty$?

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

5° Construire $\mathscr{P}$, (IJ), T et la courbe $\mathscr{C}$.

72 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que l'équation $x - \cos x = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

En déduire l'ensemble de définition de f.

2° a) Démontrer que, pour tout réel x supérieur à 2 :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x-1} .$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

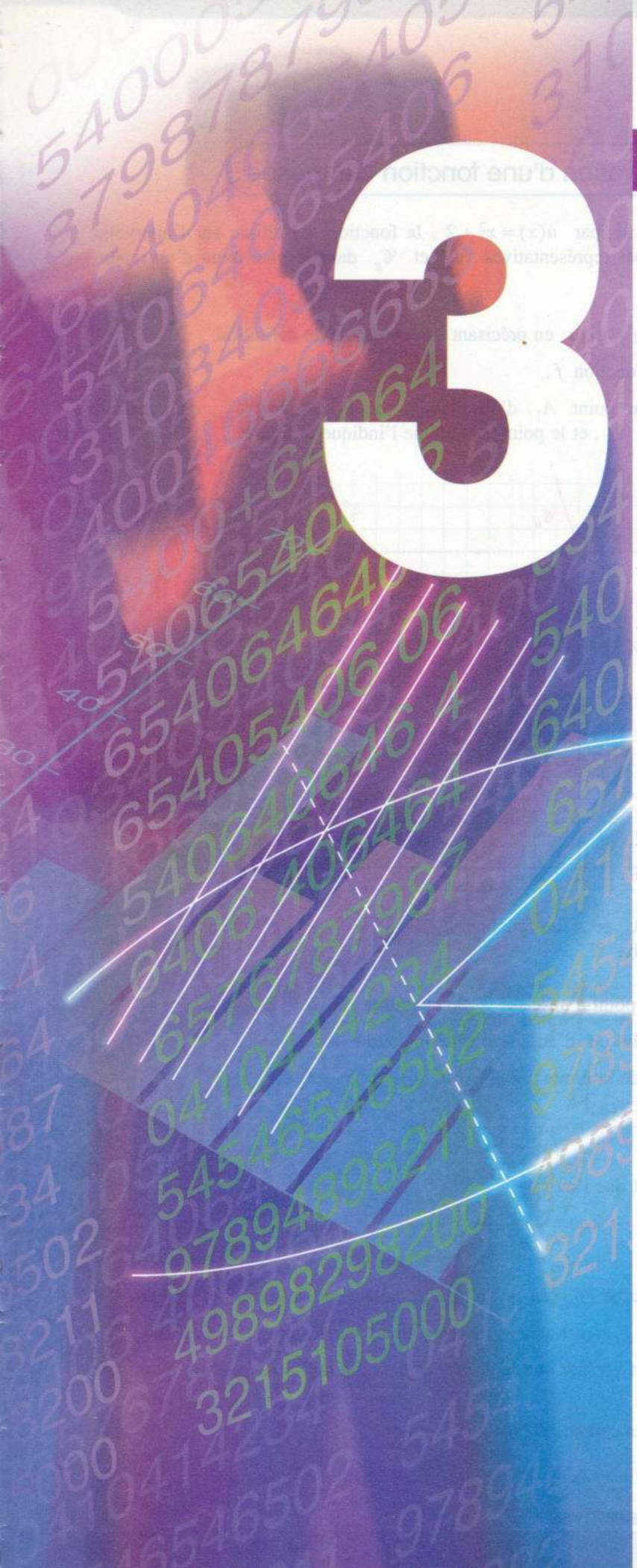
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3° Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.

4° Déterminer les variations de f sur ses intervalles de définition.

5° Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale.

6° Construire $\mathscr{C}_f$ pour x variant de -2π à 2π.



CHAPITRE

3

Dérivées et primitives

Compléments sur la dérivation p. 64

- connaître la notation différentielle
- savoir calculer la dérivée d'une fonction composée

Primitives p. 66

- connaître la définition d'une primitive d'une fonction sur un intervalle
- savoir calculer une primitive de fonctions usuelles

activités

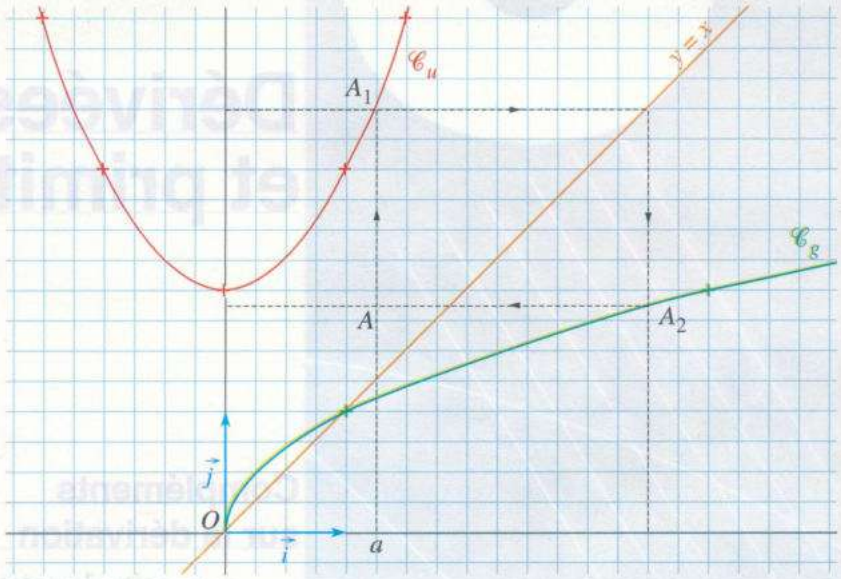
1 Approche de la dérivation d'une fonction composée

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+2$, la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ et leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_g$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 **a)** Déterminer la fonction composée $f=g\circ u$, en précisant son ensemble de définition.

b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

Sur le graphique ci-dessous, à partir du point A_1 d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_u$, on construit successivement le point A_2 de la courbe $\mathscr{C}_g$, et le point A comme l'indique la figure.



Donner les coordonnées des points A_1, A_2 et A en fonction de a.
En déduire que A est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

2 Soit x un réel voisin de a et M_1 le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_u$.

a) Construire comme précédemment le point M d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Démontrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x+a}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{a^2+2}}\,.$$

c) En déduire que f est dérivable en a et que l'on a :

$$f'(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2+2}}\,.$$

3 On désigne par $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_u$ en A_1 et par Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ en A_2.

a) Déterminer les fonctions affines u_1 et g_1 représentées respectivement par les droites $\mathscr{D}$ et Δ.

b) Déterminer la fonction $f_1=g_1\circ u_1$ et vérifier que la droite $\mathscr{T}$ représentant cette fonction passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$.

c) Que peut-on dire de la droite $\mathscr{T}$ pour la courbe $\mathscr{C}$?

2 À la recherche d'une distance

Une automobile roule sur une autoroute rectiligne à $90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. En maintenant une accélération constante pendant 5 secondes, elle atteint une vitesse de $135\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.


© Zefa-Kalt

On veut calculer la distance d parcourue pendant ces 5 s.
Dans ce but, on prend pour origine des temps (exprimés en seconde) l'instant où elle commence à accélérer, et $x(t)$ la distance en mètres parcourue entre les instants 0 et t.

La vitesse $v(t)$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'instant t est $v = \dfrac{\text{d}x}{\text{d}t}$.

L'accélération constante exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ est $a = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}$.

1 Calculer a.

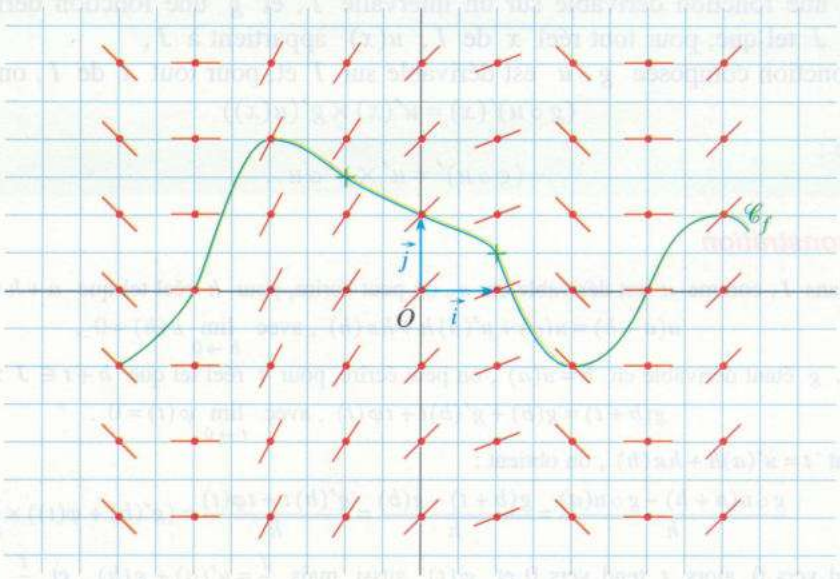
2 **a)** Déterminer une fonction f dérivable sur $[0\ ;\ 5]$ telle que $\dfrac{\text{d}f}{\text{d}t} = a$.

b) En déduire que $v(t) = 2{,}5t + 25$ sur $[0\ ;\ 5]$.

3 Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t et calculer la distance d.

3 Champ de directions de tangentes

Dans l'activité précédente, on a recherché une fonction f connaissant sa dérivée et une de ses valeurs.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction continue f et, en certains points $M(x\ ;\ y)$, un segment de la droite qui passe par M et a pour coefficient directeur $f(x)$.



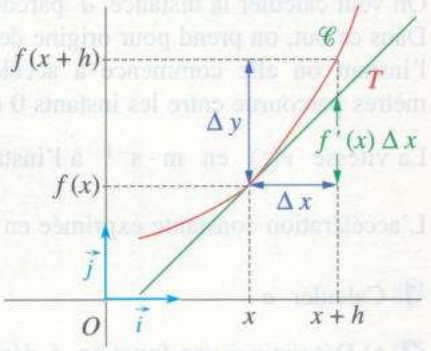
1 Donner l'allure de la courbe représentative d'une fonction F dont la dérivée est f.

2 Par un procédé analogue, esquisser la courbe représentative d'une fonction G telle que $G(1) = 2$ et, pour tout x dans $]1\ ;\ +\infty[$, $G'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1 Compléments sur la dérivation

1.1 Notation différentielle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, soit $\mathscr{C}$ une courbe d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x.
Une petite variation $h = \Delta x$ de la variable x provoque une petite variation $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ des images.



Comme $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

en posant $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$, on a :

$f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$,

que l'on peut écrire :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x\ \varepsilon(\Delta x)\ .$$

Ainsi, lorsque Δx est voisin de 0, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, avec une erreur négligeable devant Δx.

Voir Exercice 19

On convient d'écrire symboliquement $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$.

Cette notation est fréquemment utilisée en sciences physiques. Plus généralement, on emploie aussi les notations suivantes : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ au lieu de f', $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ au lieu de f'', $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ au lieu de $f^{(n)}$.

1.2 Dérivation d'une fonction composée — proposition

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et g une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J,
alors la fonction composée $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I, on a :

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

ou encore :

$$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u\ .$$

Démonstration

Pour a dans I, comme u est dérivable en a, on peut écrire, pour h réel tel que $a + h \in I$:

$$u(a+h) = u(a) + u'(a)\,h + h\varepsilon(h)\ , \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0\ ,$$

De même, g étant dérivable en $b = u(a)$, on peut écrire, pour t réel tel que $b + t \in J$:

$$g(b+t) = g(b) + g'(b)t + t\varphi(t)\ , \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0\ .$$

En prenant $t = u'(a)h + h\varepsilon(h)$, on obtient :

$$\frac{g \circ u(a+h) - g \circ u(a)}{h} = \frac{g(b+t) - g(b)}{h} = \frac{g'(b)\,t + t\varphi(t)}{h} = (g'(b) + \varphi(t)) \times \frac{t}{h}\ .$$

Si h tend vers 0, alors t tend vers 0 et $\varphi(t)$ aussi, mais $\dfrac{t}{h} = u'(a) + \varepsilon(h)$, et $\dfrac{t}{h}$ tend vers $u'(a)$ puisque $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} (g'(b) + \varphi(t)) \times \dfrac{t}{h} = g'(b) \times u'(a)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g \circ u(a+h) - g \circ u(a)}{h} = g'(b) \times u'(a)\ .$$

Ainsi, la fonction $g \circ u$ est dérivable en a et $(g \circ u)'(a) = g'(b) \times u'(a) = g'(u(a)) \times u'(a)$.

Remarque

La notation différentielle permet de retenir facilement cette formule.

Si $x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{g} z$, on a $u'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $g'(y) = \dfrac{dz}{dy}$ et $(g \circ u)'(x) = \dfrac{dz}{dx}$.

La formule obtenue s'écrit $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \times \dfrac{dz}{dy}$.

1.3 Applications

u étant une fonction dérivable sur I, on obtient les formules de dérivation suivantes.

formule	condition de validité
si n est un entier naturel différent de 0 et de 1, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ et en particulier, $(u^2)' = 2u'u$ et $(u^3)' = 3u'u^2$	sur I
si n est un entier relatif strictement négatif, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ et en particulier, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	sur tout intervalle J, inclus dans I, sur lequel la fonction u ne s'annule pas
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	sur tout intervalle J, inclus dans I, sur lequel u est strictement positive
si $f = \sin(u)$, alors $f' = u' \times \cos(u)$ si $f = \cos(u)$, alors $f' = -u' \times \sin(u)$	sur I
si $f = \tan(u)$, alors $f' = u' \times (1 + \tan^2(u))$	sur tout intervalle J, inclus dans I, sur lequel $u(x) \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier relatif k

Exemples *Voir Exercices 3 à 11*

• La fonction $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$ est de la forme u^4, avec $u : x \mapsto x^2 + 3x + 1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 3$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 4u'u^3$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 4(2x+3)(x^2+3x+1)^3$.

• La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^3-1)^2}$ définie sur $]1 ; +\infty[$ est de la forme u^{-2}, avec $u : x \mapsto x^3 - 1$.
u ne s'annule pas sur $]1 ; +\infty[$, et est dérivable sur cet intervalle ; on a $u'(x) = 3x^2$.
Donc f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et $f' = -2u'u^{-3} = -2\dfrac{u'}{u^3}$.
Ainsi, pour tout réel x de $]1 ; +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^3}$.

• La fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est de la forme $\cos u$ avec $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2 Primitives

2.1 Primitive de f sur I — définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

F est une primitive de f sur I, si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f.
Pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple Voir Exercice résolu 2

La fonction F définie sur $]3 ; +\infty[$ par $F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ sur $]3 ; +\infty[$, car, pour tout x de $]3 ; +\infty[$, $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = f(x)$.

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants.

fonction	une primitive	validité
$f(x) = a$, avec a dans $\mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec n entier $\geqslant 1$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec n entier $\leqslant -2$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x$	$\left]\left(2k - 1\right)\dfrac{\pi}{2} ; \left(2k + 1\right)\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Soit u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I, et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.

fonction	une primitive	validité
$f = \alpha u + \beta v$, avec α et β réels	$F = \alpha U + \beta V$	sur I
$f = u' \times g \circ u$	$F = G \circ u$	sur I
$f = u'u^n$, avec n entier $\geqslant 1$	$F = \dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$	sur I
$f = u'u^n$, avec n entier $\leqslant -2$	$F = \dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$f = u' \cos(u)$	$F = \sin(u)$	sur I
$f = u' \sin(u)$	$F = -\cos(u)$	sur I

2.2 Existence de primitives — théorème admis

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur l'intervalle I.

Remarque

Ce théorème donne une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction, mais cette condition n'est pas nécessaire : certaines fonctions discontinues peuvent admettre des primitives.

2.3 Primitives d'une même fonction — proposition

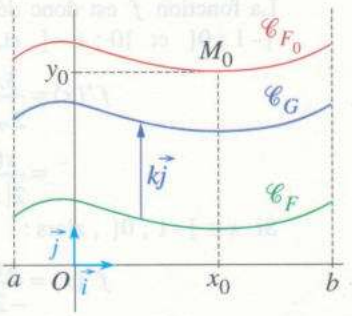
Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I, alors :

- les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x)+k$, avec k réel ;
- pour tout couple $(x_0 ; y_0)$, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F_0 de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

Démonstration

• Dire qu'une fonction G est une primitive de f sur I signifie que G est dérivable sur I et $G'=f$, c'est-à-dire $G'=F'$, ou encore $(G-F)'=0$.
Comme I est un intervalle, cela signifie que la fonction $G-F$ est constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que, pour tout x de I, $G(x)-F(x)=k$.
Ainsi, G est une primitive de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $G(x)=F(x)+k$.

• $G(x_0)=y_0 \iff F(x_0)+k=y_0 \iff k=y_0-F(x_0)$.
L'unique primitive F_0 de f sur I qui vérifie $F_0(x_0)=y_0$ est définie par $F_0(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$.



Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent de l'une d'elles par les translations de vecteur $k\vec{j}$ avec k réel.
Une seule d'entre elles passe par le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$.

Exemples

• Les primitives sur $]3 ; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ sont les fonctions F définies sur $]3 ; +\infty[$ par $F(x)=\sqrt{x^2-9}+k$, où k est une constante réelle.
On a $F(5)=-1 \iff 4+k=-1 \iff k=-5$.
Ainsi, l'unique primitive de f sur $]3 ; +\infty[$, qui prend la valeur -1 en 5, est la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $F_0(x)=\sqrt{x^2-9}-5$.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(x^2+2x+2)^3$, et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=1$.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+2x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x+2=2(x+1)$;
donc $f=\dfrac{1}{2}u'u^3$ admet pour primitive $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}u^4=\dfrac{1}{8}u^4$.
Il existe donc une constante réelle k telle que, pour tout réel x, $F(x)=\dfrac{1}{8}(x^2+2x+2)^4+k$.
On a $F(0)=1 \iff 2+k=1 \iff k=-1$.
Ainsi, pour tout réel x, $F(x)=\dfrac{1}{8}(x^2+2x+2)^4-1$.

1 Étude de la dérivabilité d'une fonction

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur l'intervalle $I=[-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^3+x^2}\ .$$

• Méthode

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle, on applique les théorèmes de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée... et pour les valeurs a où ces théorèmes ne permettent pas de conclure, on revient à la définition du nombre dérivé, en étudiant la limite d'un taux d'accroissement :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

Voir Exercices 12 à 18

• Sur l'intervalle I, $x^3+x^2=x^2(x+1)\geqslant 0$ et $x^3+x^2>0 \iff x\in\,]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
La fonction f est donc dérivable sur les intervalles $]-1\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ et, sur ces intervalles, on a :

$$f'(x)=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$$
$$=\frac{x(3x+2)}{2|x|\sqrt{x+1}}\ .$$

Si $x\in\,]-1\,;0[$, alors :

$$f'(x)=\frac{x(3x+2)}{-2x\sqrt{x+1}}$$
$$=-\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\ .$$

Si $x\in\,]0\,;+\infty[$, alors :

$$f'(x)=\frac{x(3x+2)}{2x\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\ .$$

• Dérivabilité de f en 0

Il s'agit d'étudier $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

$$T(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{h^3+h^2}}{h}=\frac{|h|\sqrt{h+1}}{h}$$
$$=\begin{cases}\sqrt{h+1}, \text{ si } h>0\\ -\sqrt{h+1}, \text{ si } -1\leqslant h<0\ .\end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} T(h)=1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} T(h)=-1$.
Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

Cependant, comme $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} T(h)=1$, on dit que **le nombre dérivé à droite** de f en 0 est $f'_d(0)=1$.
Graphiquement, cela signifie qu'au point O, la courbe $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente à droite de coefficient directeur 1.

De même, **le nombre dérivé à gauche** de f en 0 est $f'_g(0)=-1$, coefficient directeur de la demi-tangente à gauche à la courbe $\mathscr{C}$ en O.

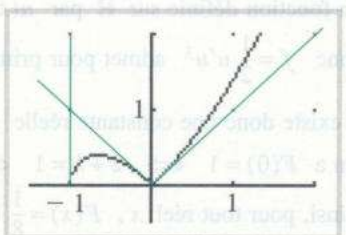
• Dérivabilité de f en -1

Pour $h>0$, on a :

$$q(h)=\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{(-1+h)^3+(-1+h)^2}}{h}$$
$$=\frac{|-1+h|\sqrt{h}}{h}=\frac{|-1+h|}{\sqrt{h}}\ .$$

Or, pour $h>0$, $\lim\limits_{h\to 0}|-1+h|=1$, $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}=0$ et $\sqrt{h}>0$, donc $\lim\limits_{h\to 0} q(h)=+\infty$.

La limite n'étant pas finie, f n'est pas dérivable en -1 , mais la courbe $\mathscr{C}$ admet en $A(-1\,;0)$ une tangente (ou demi-tangente à droite) parallèle à l'axe des ordonnées.



2 Calcul de primitives

1° Déterminer une primitive sur $]-2\,;\,2[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-4)^3}$.

2° Déterminer les primitives sur $]-\infty\,;\,3[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$.

3° Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto (\sin x)(\cos^3 x)$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$.

• Méthode

Pour déterminer les primitives d'une fonction f sur un intervalle I, on procède ainsi :

• on commence par en justifier l'existence en s'assurant que f est continue sur I ;

• on détermine une primitive de f sur I à l'aide des tableaux donnant les primitives des fonctions usuelles et des fonctions composées ;

• on donne la forme générale en ajoutant une constante arbitraire à la primitive trouvée.

Si on connaît l'image d'un réel donné, on détermine la valeur de cette constante.

Voir Exercices 37 à 52

1° f est une fonction rationnelle définie sur $I =]-2\,;\,2[$.
Elle est donc continue sur I et admet des primitives sur I.
En posant $u(x) = x^2 - 4$ sur I, on a $u'(x) = 2x$,
donc $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^3} = \dfrac{1}{2}u'u^{-3}$.
Une primitive de f sur I est donc la fonction $F = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{-2}u^{-2} = -\dfrac{1}{4u^2}$, c'est-à-dire la fonction définie sur $]-2\,;\,2[$ par $F(x) = -\dfrac{1}{4(x^2-4)^2}$.

2° f est continue sur $I =]-\infty\,;\,3[$, donc elle admet des primitives sur I.
En posant $u(x) = 3 - x$ sur I, on a $u'(x) = -1$,
donc $f = \dfrac{1}{\sqrt{u}} = -\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
Une primitive de f sur I est donc la fonction $-2\sqrt{u}$.
Les primitives de f sur $]-\infty\,;\,3[$ sont donc les fonctions $x \mapsto -2\sqrt{3-x} + k$, où k est un réel quelconque.

3° f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
On reconnaît la forme $f = -u'u^3$, avec :
$u(x) = \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $-\dfrac{1}{4}u^4$, et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto -\dfrac{1}{4}\cos^4 x + k$, avec k réel.

On a $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + k$

$= -\dfrac{1}{16} + k$,

donc $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff k = \dfrac{1}{16}$.

Ainsi, la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ est la fonction F_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_0(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{16}.$$

Remarque

Lorsqu'on recherche une primitive d'un produit et qu'on ne reconnaît pas une forme $Au'u^n$, où A est une constante, il est souvent utile de chercher à transformer ce produit en somme.

3 Suite de fonctions

BAC

Énoncé

Soit n un naturel non nul et f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x)=x^n\sqrt{x(1-x)}\ .$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calculer $f_n'(x)$ pour $0<x<1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x$ ont le même signe.

b) Étudier la dérivabilité de f_n en 0 et en 1.

c) Donner le tableau des variations de f_n.

2° Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

Analyse de l'énoncé

1° a) • On applique les formules donnant la dérivée d'un produit et celle de $\sqrt{u}$.

• On cherche à écrire $f'(x)$ sous la forme $\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x\right)\times v(x)$, où $v(x)>0$ sur $]0\,;1[$.

b) On étudie la limite d'un taux d'accroissement.

c) On applique le théorème liant le signe de f' aux variations de f.

2° On étudie le signe de la différence $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

• Méthode

L'analyse claire de l'énoncé permet de répondre aux questions.

1° a) La fonction $u : x\mapsto x(1-x)$ est une fonction dérivable et **strictement positive** sur l'intervalle ouvert $]0\,;1[$, donc la fonction f_n est dérivable sur $]0\,;1[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0\,;1[$.

Pour tout x dans $]0\,;1[$, on a :

$$f'(x)=n\,x^{n-1}\sqrt{x(1-x)}+x^n\times\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$$
$$=\frac{x^n(2n+1-2nx-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}}$$
$$=\frac{2x^n\left(n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right)}{2\sqrt{x(1-x)}}\ .$$

Comme x^n et $\sqrt{x(1-x)}$ sont strictement positifs sur $]0\,;1[$, alors $f_n'(x)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x$ ont le même signe.

b) • Dérivabilité en 0

Pour $x>0$,

$$\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=x^{n-1}\sqrt{x(1-x)}$$

qui admet pour limite 0 lorsque x tend vers 0.
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

• Dérivabilité en 1

Pour $-1<h<0$, on a :

$$\frac{f_n(1+h)-f_n(1)}{h}=\frac{(1+h)^n}{h}\sqrt{-(1+h)h}$$
$$=-(1+h)^n\sqrt{-\frac{(1+h)h}{h^2}}=-(1+h)^n\sqrt{-1-\frac{1}{h}}$$

car $h=-\sqrt{h^2}$, puisque $h<0$.
Lorsque h tend vers 0 par valeurs négatives, $-\frac{1}{h}$ tend vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_n(1+h)-f_n(1)}{h}=-\infty$ et la fonction f_n n'est pas dérivable en 1.

c)

x	0		x_n		1
$f_n'(x)$	0	+	0	−	
$f_n(x)$	0	↗	$f_n(x_n)$	↘	0

avec $x_n=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$.

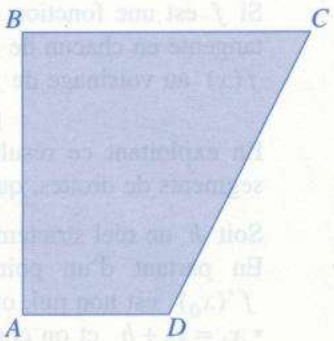
2° Pour $n\geqslant 1$, on a :

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{n+1}\sqrt{x(1-x)}-x^n\sqrt{x(1-x)}$$
$$=x^n(x-1)\sqrt{x(1-x)}$$

est négatif, car $x^n\sqrt{x(1-x)}\geqslant 0$ et $x-1\leqslant 0$.
Ainsi, $\mathscr{C}_{n+1}$ est toujours située en dessous de $\mathscr{C}_n$.

1 Problème d'optimisation

Un lac a la forme d'un trapèze $ABCD$ de bases $[AD]$ et $[BC]$ et de hauteur $[AB]$ dont les dimensions en kilomètres sont $AB = BC = 1$ et $AD = 0{,}5$.
Une route longe les côtés $[BC]$ et $[CD]$.



Un véhicule amphibie part de A pour se rendre en C . Pour cela, il peut traverser une partie du lac et ensuite emprunter la route. Sa vitesse dans l'eau est de $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et sa vitesse sur la route est de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1 Dans cette question, on suppose que le véhicule sort du lac en un point M du segment $[BC]$. On pose $BM = x$ et on note $f(x)$ la durée en minutes du trajet.

a) Démontrer que $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} + \frac{6}{5}(1-x)$.

b) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

2 Dans cette question, on suppose que le véhicule sort du lac en un point N du segment $[CD]$. On note x l'abscisse du point N dans le repère orthonormal $(A\ ;\ \vec{BC}, \vec{AB})$, et $g(x)$ la durée en minutes du trajet.

a) Démontrer que $g(x) = 2\sqrt{5x^2-4x+1} + \frac{6}{\sqrt{5}}(1-x)$.

b) Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

3 Déduire des questions précédentes le trajet dont la durée est minimale et préciser cette durée.

2 Comparaison de fonctions

Pour comparer deux fonctions, on étudie habituellement le signe de leur différence. Les variations de cette fonction différence permettent souvent d'en déduire son signe.

1 En visualisant sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{10x}{10-|x|}$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, il semble que ces deux courbes, notées respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, sont tangentes à l'origine mais il est difficile de voir leur position relative.

a) Confirmer par un calcul la conjecture concernant les tangentes.

b) En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \sin x - \frac{10x}{10-x}$, déterminer la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2 **a)** En utilisant une méthode analogue, démontrer que, pour x dans $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 .$$

b) En déduire la limite de $\frac{1-\cos x}{x}$ lorsque x tend vers 0.

3 La méthode d'Euler

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet une tangente en chacun de ses points $M_0(x_0 ; f(x_0))$ qui permet d'obtenir des valeurs approchées de $f(x)$ au voisinage de x_0. On a :

pour h voisin de 0, $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$.

En exploitant ce résultat, on peut approcher la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide d'une courbe constituée de segments de droites, qui représente une fonction affine par intervalles.

Soit h un réel strictement positif assez petit.
En partant d'un point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ pour lequel $f'(x_0)$ est non nul, on pose :

• $x_1 = x_0 + h$ et on construit le point $P_1(x_1 ; y_1)$ sur la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ en M_0 ; on a alors :

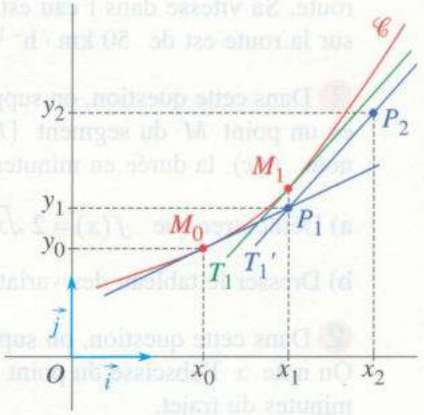
$$y_1 = y_0 + f'(x_0)\,h \ ;$$

• $x_2 = x_1 + h$ et on construit le point $P_2(x_2 ; y_2)$ sur la parallèle T_1' à la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ en $M_1(x_1 ; f(x_1))$; on a alors :

$$y_2 = y_1 + f'(x_1)\,h \ ;$$

• et ainsi de suite …

On construit ainsi une suite de points $P_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + f'(x_n)\,h$.



En joignant les points M_0, P_1, P_2 … , on obtient la courbe représentative d'une fonction g qui est affine par intervalles.

3.1 Un exemple avec le tableur

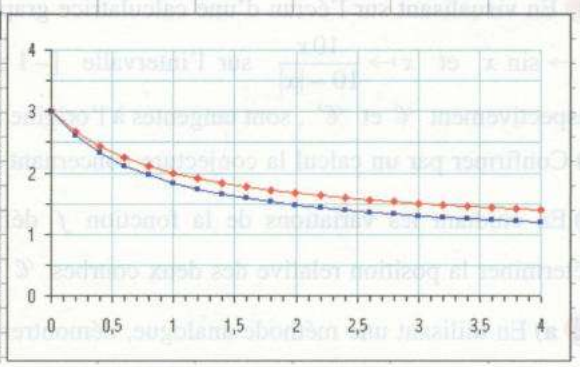
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$.

1 Déterminer la fonction dérivée de f.

2 À l'aide d'un tableur, on peut comparer les courbes représentatives de f et g.

SOMME | =(4-2/(A4+1)^2*B1

	A	B	C	D
1	pas	0,2		
2				
3	x	f(x)	g(x)	différence
4	0	3	3	0
5	0,2	2,66666667	=(4-2/(A4+1)	-0,06666667
6	0,4	2,42857143	2,32222222	-0,10634921
7	0,6	2,25	2,11814059	-0,13185941
8	0,8	2,11111111	1,96189059	-0,14922052
9	1	2	1,8384338	-0,1615662
10	1,2	1,90909091	1,7384338	-0,17065711
11	1,4	1,83333333	1,65578917	-0,17754416
12	1,6	1,76923077	1,58634473	-0,18288604
13	1,8	1,71428571	1,52717313	-0,18711259
14	2	1,66666667	1,47615272	-0,19051395
15	2,2	1,625	1,43170828	-0,19329172
16	2,4	1,58823529	1,39264578	-0,19558952



Écrire :

• dans la cellule A1 : « pas », puis dans la cellule B1 la valeur du pas : « 0,2 ».

• dans la cellule A3 : « x », dans la cellule A4 la valeur de départ pour x : « 0 », dans la cellule A5 : « = A4 + B1 », puis utiliser la poignée de recopie jusqu'à faire afficher la valeur 4 en colonne A.

• dans la cellule B3 : « $f(x)$ », dans la cellule B4 : « =(A4 + 3)/(A4 + 1) », et utiliser la poignée de recopie pour faire afficher les valeurs de $f(x)$.
• dans la cellule C3 : « $g(x)$ », dans la cellule C4 : « =B4 », dans la cellule C5 : « =C4 – 2/(A4 + 1)^2*B1 », puis utiliser la poignée de recopie pour faire afficher les valeurs de $g(x)$.
• dans la cellule D3 : « différence », dans la cellule D4 : « =C4 – B4 », puis utiliser la poignée de recopie pour faire afficher les différences entre la colonne C et la colonne B.

Par observation de la colonne D, que peut-on conjecturer concernant la précision de l'approximation de $f(x)$ par $g(x)$?
Faire afficher de deux couleurs différentes les courbes représentant les fonctions f et g.

3 Changer le pas en mettant 0,1 dans la cellule B1, sélectionner les cellules A5, B5, C5, D5 et recopier ces cellules jusqu'à ce que la valeur 4 apparaisse dans la colonne A.
Faire afficher de deux couleurs différentes les courbes représentant les fonctions f et g.

4 Refaire la question **3** en prenant un pas égal à 0,05.
Quelle observation peut-on faire lorsque le pas diminue ?

3.2 Approximation de la courbe d'une primitive

1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de la primitive F de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que $F(1)=0$.

b) En utilisant la méthode décrite dans la partie précédente, et en prenant 0,01 comme pas, on peut approcher la courbe représentative de la fonction F sur $[1 ; 10]$.
Visualiser cette courbe à l'aide du tableur.

c) Reprendre la question précédente sur l'intervalle $[0{,}5 ; 1]$.

2 Dans chacun des cas suivants, en utilisant la méthode d'EULER, visualiser une approximation de la courbe représentative de la primitive F de la fonction f sur l'intervalle donné.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ sur $[0 ; 5]$; $F(0)=1$. **b)** $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ sur $[0 ; 2]$; $F(0)=0$.

3.3 Pour aller plus loin

1 Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$.
Vérifier que f est dérivable sur $[0 ; 1]$, et que, pour tout réel x, $f'(x)=-2(f(x))^2$.

2 Soit g une fonction dérivable sur $[0 ; 1]$, telle que l'on ait :

pour tout réel x, $g'(x)=-2(g(x))^2$ et $g(0)=-\dfrac{1}{4}$.

a) En utilisant la méthode d'EULER, visualiser une approximation de la courbe représentative de la fonction g.

b) Démontrer que g est décroissante sur $[0 ; 1]$.
En déduire que la fonction g ne s'annule pas sur $[0 ; 1]$, et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2}=-2$.

c) Exprimer $\dfrac{1}{g(x)}$ en fonction de x, et en déduire que $g=f$.

4 Une famille de courbes

Pour tout réel strictement positif m, on note f_m la fonction définie sur $D_m =]-\infty ; 0] \cup]m ; +\infty[$ par $f_m(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-m}}$, et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 **a)** Justifier la dérivabilité de f_m sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]m ; +\infty[$, et démontrer que $f'_m(x) = \dfrac{x(2x-3m)}{2(x-m)^2}\sqrt{\dfrac{x-m}{x}}$.

b) Déterminer le tableau des variations de la fonction f_m.

2 **a)** Établir que, pour tout réel x de $D_m \setminus \{0\}$, on a $f(x) - x = \dfrac{m}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}\right)\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}}$.

b) En déduire que la droite $\mathscr{D}_m$, d'équation $y = x + \dfrac{m}{2}$, est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_m$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_m$.

3 Étudier la dérivabilité de la fonction f_m en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

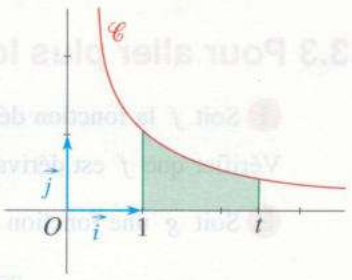
4 **a)** Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sur le même graphique.

b) Par quelle transformation géométrique obtient-on :
- la courbe $\mathscr{C}_2$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_1$?
- la courbe $\mathscr{C}_3$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_1$?
- la courbe $\mathscr{C}_m$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_1$?

5 Dérivabilité d'une aire

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour tout réel strictement positif t, on désigne par $S(t)$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.



1 Soit h un réel tel que $0 < h < 1$.

a) Déterminer un domaine Δ dont l'aire est $S(2+h) - S(2)$.

b) En encadrant ce domaine par deux rectangles, justifier que $\dfrac{h}{2+h} \leqslant S(2+h) - S(2) \leqslant \dfrac{h}{2}$.

2 Par un procédé analogue, déterminer un encadrement de $\dfrac{S(2+h)-S(2)}{h}$ lorsque $-1 < h < 0$.

3 Démontrer que la fonction S est dérivable en 2 et préciser le nombre dérivé $S'(2)$.

4 La fonction S est-elle dérivable en tout réel t de l'intervalle $[1 ; +\infty[$? Justifier.

6 Recherches de primitives

6.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 6x^2 - x - 2$.

a) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ après en avoir justifié l'existence.

b) Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 1$.

2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-3)(x^2 - 6x + 1)^3$.

a) Justifier l'existence de primitives de g sur $\mathbb{R}$.

b) En remarquant que g peut s'écrire sous la forme $Au'u^n$, où A est une constante réelle, n un entier naturel et u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

3 Soit h la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x-2}{(x^2 - 4x + 3)^2}$.

Justifier l'existence de primitives de h sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$, et en utilisant une démarche analogue à celle de la question précédente, déterminer une primitive H de h sur $]3 ; +\infty[$.

4 Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{x(x^2 - 2x + 5)}{(x+1)^2(x-1)^3}$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x de $]-1 ; 1[$, on ait :

$$\varphi(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3} .$$

b) En déduire une primitive de la fonction φ sur l'intervalle $]-1 ; 1[$.

6.2 Fonctions comportant des racines carrées

1 Dans chacun des cas suivants, écrire la fonction f sous la forme $A\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ et déterminer une primitive F de f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ sur $I = \left]-\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$; **b)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2 Déterminer une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^3\sqrt{x}}$.

3 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$.

a) Démontrer que g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la fonction dérivée de g .

b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$.

6.3 Fonctions trigonométriques

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; **b)** $f(x) = 3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

c) $f(x) = \sin x \cos x$; **d)** $f(x) = \tan^2 x$;

e) $f(x) = \sin^2 x$ (on pourra exprimer $f(x)$ à l'aide de $\cos 2x$) ;

f) $f(x) = \cos^3 x$ (on pourra remarquer que $f(x) = (1 - \sin^2 x)\cos x$).

Faire le point

• Dérivation d'une fonction composée

De manière générale, on a :

$$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u \ .$$

En particulier, on retient :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \ ; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \ ;$$

$$(\sin u)' = u' \times \cos u \ ; \quad (\cos u)' = -u' \times \sin u \ ; \quad (\tan u)' = u' \times (1 + \tan^2 u) \ .$$

• Primitives

Soit I un intervalle et deux fonctions f et F définies sur I.

• F est une primitive de f sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et que $F' = f$.

• Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I.

• Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel.

• Pour tout couple $(x_0 \ ; y_0)$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

I désigne un intervalle.

savoir	comment faire ?
étudier la dérivabilité d'une fonction f sur I	• on applique les théorèmes de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée... • pour les valeurs a où aucun de ces théorèmes ne permet de conclure, on étudie la dérivabilité de f à l'aide de la définition du nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
déterminer une primitive d'une fonction sur I	on commence par justifier son existence en s'assurant que f est continue sur I, puis on utilise le tableau donnant les primitives des fonctions usuelles et des fonctions composées ; en particulier, si n est un entier relatif différent de -1 , on a : $u'u^n$ a pour primitive $\dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$
déterminer toutes les primitives d'une fonction sur I	on trouve une primitive et on ajoute une constante arbitraire
déterminer l'unique primitive F_0 d'une fonction f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$	on trouve une primitive F de f sur I, on écrit F_0 sous la forme $x \mapsto F(x) + k$, et on détermine la constante pour que la condition $F_0(x_0) = y_0$ soit vérifiée

1 Dérivation

1 Vrai-Faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Pour x voisin de 0, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est négligeable devant x.

2° Si $\frac{dy}{dx} = 2x+1$, alors $\frac{d^2y}{dx^2} = (2x+1)^2$.

3° Si $y = (x^2+2x+1)^2$ pour x réel, alors :
$$dy = 2(x^2+2x+1)\,dx .$$

4° Si $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ pour x réel, alors :
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} .$$

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x^2+1)^3$ est la fonction $g : x \mapsto 3(x^2+1)^2$.

2° La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^4+1}$ est la fonction :
$$g : x \mapsto \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}} .$$

3° La tangente à la courbe d'équation $y = \tan^3 x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ est parallèle à la droite d'équation $4x+3y=0$.

4° Si f est dérivable en 2, alors :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\sqrt{4+h}) - f(2)}{h} = \frac{1}{4} f'(2) .$$

2 Calculs de dérivées

Dans les exercices 3 à 5, déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.

3 **a)** $f : x \mapsto (4-3x)^3$;
b) $f : x \mapsto (3x+1)^5$;
c) $f : x \mapsto (x^4 - x^2 + 1)^3$;
d) $f : x \mapsto (2x-1)^2(4-3x)^3$.

4 **a)** $f : x \mapsto \frac{1}{(4-5x)^3}$; **b)** $f : x \mapsto \left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^4$;
c) $f : x \mapsto \frac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$; **d)** $f : x \mapsto \frac{(3x-2)^3}{(1-4x)^2}$.

5 **a)** $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$; **b)** $f : x \mapsto \sqrt{4x^2-3x-1}$;
c) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; **d)** $f : x \mapsto x\sqrt{4x^2-1}$.

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel a pour que la fonction f vérifie les conditions imposées.
a) $f(x) = (x^2+1)^3(ax+1)$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0$.
b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)^3(ax+1)$ sur $[0 ; +\infty[$ et $f'(1) = 0$.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par :
$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2} .$$
1° Déterminer la fonction f' dérivée de f.
2° En déduire la fonction dérivée des fonctions :
$g : x \mapsto \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$ définie sur $[0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$;
$h : x \mapsto \frac{3\cos x - 4}{\cos x - 2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :
$$f(x) = \frac{1-x^5}{1-x} .$$
1° Déterminer la fonction f' dérivée de f de deux façons différentes.
2° En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1-5x^4+4x^5}{(1-x)^2} .$$

9 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.
a) $f : x \mapsto (1+\sin 2x)^3$; **b)** $f : x \mapsto \cos^2(3x)\ \sin^3(2x)$;
c) $f : x \mapsto \sqrt{2+\sin x}$; **d)** $f : x \mapsto \tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} .$$

1° Calculer les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$ de la fonction f.

2° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 1 et 3, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} .$$

Utiliser cette expression pour retrouver les résultats de la question **1°**.

11 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} .$$

1° Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$\sqrt{1 + x^2} \times f'(x) = f(x) .$$

2° En déduire que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$(1 + x^2)\, f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0 .$$

3 Étude locale d'une fonction

12 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a.

1° $f : x \mapsto \sqrt{x^3 - 1}$; $a = 1$.

2° $f : x \mapsto x\sqrt{x}$; $a = 0$.

3° $f : x \mapsto (\sin x)\sqrt{x}$; $a = 0$.

13 En utilisant la définition du nombre dérivé en a, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} - 1}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$.

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2 - x^2$, si $x < 1$;

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, si $x \geqslant 1$.

Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 1.

15 Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + 6x - 5$, si $x < 1$;

$f(x) = \dfrac{b}{x} - x$, si $x \geqslant 1$.

Déterminer les réels a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 .$$

Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

17 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\cos 2x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 .$$

1° Démontrer que, pour tout réel x non nul :

$$\frac{f(x)}{x} = -2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 .$$

2° En déduire que f est dérivable en 0.

18 ★★ Soit f la fonction définie sur $]0 ; \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Étudier la dérivabilité de la fonction f en $\dfrac{\pi}{2}$.

19 Une corde élastique est tendue entre deux points A et B.



Si on tire cette corde en un point M, elle s'allonge d'une longueur égale à :

$$y = MA + MB - AB .$$

On pose :

$$a = HA , \quad b = HB \text{ et } x = MH ,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

1° Exprimer y en fonction de x, a et b.

2° En sciences physiques, lorsque x est petit, on utilise l'approximation :

$$y \approx \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) .$$

Justifier cette approximation pour x voisin de 0.

4 Tangente

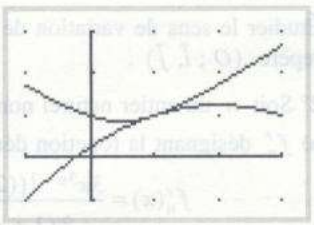
20 Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de chacune des fonctions suivantes au point A d'abscisse a donnée :

1° $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 1}$; $a = 2$.

2° $f : x \mapsto (3x^2 - 1)^2(x + 1)$; $a = -1$.

3° $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 + 5}$; $a = 2$.

21 Sur l'écran d'une calculatrice graphique, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :



$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$,

semblent tangentes au point $A(1 ; 1)$.

Qu'en est-il exactement ?

22 Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan et $\mathscr{C}$ une courbe d'équation :

$$y(x^2 + a)^2 = x^4 + b ,$$

où a et b sont des réels strictement positifs fixés.

Déterminer a et b pour que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x + 4y = 5$ soit tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.

23 Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sin x$ définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On désigne par Γ la transformée de $\mathscr{C}$ par la symétrie d'axe d'équation $y = x$.

1° Justifier que la courbe Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

2° Quels sont les points de la courbe Γ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées ?

En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3° a) Démontrer que, pour tout x dans $[-1 ; 1]$:

$$\sin(f(x)) = x .$$

b) En déduire que, pour tout x dans $]-1 ; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

5 Étude de fonctions

Dans les exercices 24 *à* 26, *étudier les variations de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition et de dérivabilité.*

24 **1°** $f : x \mapsto \frac{(x^2 + 5)^3}{x}$; **2°** $f : x \mapsto \left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)^3$;

3° $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$; **4°** $f : x \mapsto \sqrt{3x - x^3}$.

25 **1°** $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 - 4x + 3}$; **2°** $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$;

3° $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$; **4°** $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

26 **1°** $f : x \mapsto x + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$; **2°** $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$;

3° $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$; **4°** $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + \sin x)^3 .$$

1° Démontrer que f est périodique, de période 2π .

2° Déterminer le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

28 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{3x}} .$$

1° Étudier les variations de la fonction f.

2° Application

La période d'un pendule formé d'une tige homogène de masse m, de longueur L, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en un point situé à la distance x du centre de gravité est :

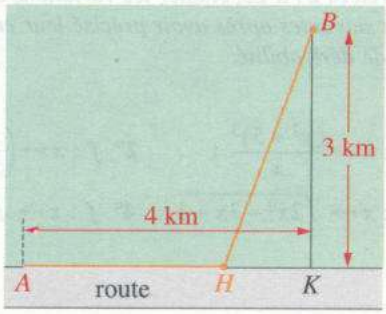
$$T(x) = 2m\sqrt{\frac{L^2}{12gx} + \frac{x}{g}} .$$

a) Déterminer $T(x)$ pour $m = 1$ kg et $L = 2$ m .

b) En déduire la distance x pour que la période T soit minimale.

c) Quelle est cette période ?

29 ★ Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de $40\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et que sa vitesse à travers champ est de $20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

(D'après IREM)

30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto -x + \sqrt{x^2+8}\ .$$

1° Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ à l'aide du signe de $f'(x)$.

2° Étudier les limites de f et démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f admet pour asymptotes la droite d'équation $y=-2x$ et l'axe des abscisses.

3° Dresser le tableau des variations de f.

4° Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal. (On prendra 2 cm pour unité graphique.)

31 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0\ ;\ 1[$ par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\ .$$

1° Étudier les variations de f.

2° Soit Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Tracer la courbe Γ_1 et la droite T.

3° Sur le même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 dans la réflexion d'axe (Ox).

4° Soit $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Montrer que Γ a pour équation cartésienne :

$$x(x^2+y^2)-y^2=0\ .$$

La courbe Γ est appelée la cissoïde de Dioclès.

32 ★ Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par :

$$\text{pour } n=0\ ,\quad f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ ;$$

$$\text{pour } n\geqslant 1\ ,\quad f_n(x)=\frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}\ .$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

1° Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.

Étudier le sens de variation de f_0 et construire $\mathscr{C}_0$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

2° Soit n un entier naturel non nul.

a) f_n' désignant la fonction dérivée de f_n, montrer que :

$$f_n'(x)=\frac{3x^{3n-1}((2n-1)x^3+2n)}{2(1+x^3)(\sqrt{1+x^3})}\ .$$

b) Étudier le sens de variation de f_1 et de f_2, puis dresser leur tableau des variations.

c) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

(D'après BAC)

33 ★★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x-\frac{2}{x^2+1}\ .$$

1° Déterminer sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.

2° a) Étudier le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire le sens de variation de la dérivée f'.

3° a) Montrer que la dérivée f' s'annule deux fois : en -1 et en α, avec $-0{,}3\leqslant\alpha\leqslant-0{,}2$.

b) En déduire le signe de la dérivée f', puis le sens de variation de la fonction f.

34 **1°** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{1+x^2}\ .$$

Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2° Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x\sqrt{1+x^2}-1\ .$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha)=0$ et que, de plus, $0{,}7\leqslant\alpha\leqslant0{,}8$.

c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

3° En déduire le tableau des variations de f.

2 Primitives

1 Vrai-Faux

35 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 1 + \frac{1}{x}$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 6x^2 + \frac{1}{x^2}$.

2° Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto (x+1)^2$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}(x+1)^3$.

3° Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \sin x$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \cos x$.

4° Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto (x^2+1)^2$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+1)^3$.

36 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les fonctions $x \mapsto x(x-2)$ et $x \mapsto (x-1)^2$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction.

2° Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x \sin x$ a pour primitive la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 \cos x$.

3° Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x + \sin x$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \cos x$.

4° Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors elle admet une primitive F qui s'annule au moins une fois sur I.

2 Calculs de primitives

37 Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 3x^3 - 2x + 2$, $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto x + 2 + \frac{1}{x^2}$, $I =]0 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$, $I =]0 ; +\infty[$.

38 Déterminer la primitive F de f sur I vérifiant la condition indiquée :

a) $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$, $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$;

b) $f : x \mapsto 3x + 1 + \frac{1}{x^2}$, $I =]-\infty ; 0[$ et $F(-2) = 1$.

39 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto -3(-3x-2)^3$; **b)** $f : x \mapsto (-2x+1)^5$;

c) $f : x \mapsto x^3(x^4-1)^2$; **d)** $f : x \mapsto (2x-3)(x^2-3x+3)$.

Dans les exercices 40 et 41, déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes.

40 **a)** $f : x \mapsto \frac{3}{(3x+4)^3}$, $I = \left]-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$, $I =]1 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \frac{6x-9}{(x^2-3x+2)^4}$, $I =]1 ; 2[$.

41 **a)** $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$, $I = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$, $I =]1 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$, $I = \left]-\infty ; \frac{3}{4}\right[$;

d) $f : x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]-\infty ; -1[$;

42 Soit les fonctions :

$F : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ et $G : x \mapsto x - \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$,

définies sur $]1 ; +\infty[$.

a) Déterminer les fonctions dérivées F' et G'.

b) Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ? Quelle égalité trouve-t-on ?

43 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{2x+3}{(x-1)^3}.$$

1° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}.$$

2° En déduire une primitive de f sur $]-\infty ; 1[$.

44 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}.$$

1° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x distinct de -2 et de 2 :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^3} + \frac{b}{(x+2)^3}.$$

2° En déduire une primitive de f sur $]-2 ; 2[$.

45 Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

1° Quelle est la dérivée sur I de la fonction $u\sqrt{u}$?

2° En déduire les primitives sur I de la fonction $u'\sqrt{u}$.

3° Application

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 2\sqrt{2x+3}$, $I = \left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$, $I =]-\infty ; 1[$;

c) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-2x+1}$, $I =]1 ; +\infty[$;

e) $f : x \mapsto \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}$, $I =]-1 ; +\infty[$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$a\sqrt{x+1} + \frac{b}{\sqrt{x+1}}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.})$$

46 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x|.$$

1° La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2° On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$ et $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ pour $x < 0$.

Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

47 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 3\cos 2x + 2\sin 3x$; **b)** $f : x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $f : x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; **d)** $f : x \mapsto \cos x - x\sin x$.

48 Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$; $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$;

b) $f : x \mapsto \tan^2(2x)$; $I = \left]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$;

c) $f : x \mapsto \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$; $I =]-\pi ; \pi[$.

49 Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \cos x \sin^2 x$; $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$; $I =]-\pi ; \pi[$;

c) $f : x \mapsto \sin x \sin 2x$; $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

50 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x \cos 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x \sin 2x.$$

1° Vérifier que la fonction $f - g$ s'écrit sous la forme $\cos(u)$, où u est une fonction que l'on précisera.

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f - g$.

2° Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f + g$.

3° En déduire les primitives des fonctions f et g.

51 En s'inspirant de la méthode utilisée à l'*Exercice* 50, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x \sin 3x.$$

52 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \sin x.$$

1° Démontrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 2\cos x - f''(x).$$

2° En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en π.

3 Existence de primitives

53 ★ Soit f la restriction de la fonction partie entière à l'intervalle $[0\,;2[$, c'est-à-dire :

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ si } 0\leqslant x<1\\ 1, \text{ si } 1\leqslant x<2\end{cases}.$$

On veut démontrer que la fonction f n'admet pas de primitive sur $[0\,;2[$.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle admet une primitive F sur $[0\,;2[$ et on pose $a=F(0)$.

1° Démontrer que :

si $0\leqslant x<1$, alors $F(x)=a$;

si $1\leqslant x<2$, alors $F(x)=x+a-1$.

2° En déduire une contradiction en étudiant la dérivabilité de F en 1 et conclure.

54 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0.$$

1° Démontrer que, pour tout réel x non nul :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant |x|.$$

En déduire que f est dérivable en 0.

2° Déterminer la fonction dérivée de f.

3° a) Démontrer que, pour tout entier naturel strictement positif n, on a :

$$\left|f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right|=1.$$

b) En déduire que la fonction f' n'est pas continue en 0 mais admet néanmoins une primitive sur $\mathbb{R}$.

55 ★ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1° On suppose que f est une fonction impaire et on désigne par F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que la fonction $G : x\mapsto F(-x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions paires.

2° On suppose que f est une fonction paire.

a) À l'aide d'un exemple, démontrer que F n'est pas nécessairement une fonction impaire.

b) Démontrer que la fonction f admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui est une fonction impaire.

4 Utilisation de primitives

56 ★ **1°** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels x et y :

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \quad \textbf{(1)}$$

a) Déterminer la valeur de $f(0)$ et démontrer que f est une fonction impaire.

b) Démontrer que, pour tous les réels x et y :

$$f'(x+y)=f'(x) ;$$

en déduire que f' est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient **(1)**.

57 **1°** Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(2x)=2f(x). \quad \textbf{(1)}$$

a) Déterminer la valeur de $f(0)$.

b) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(2x)=f'(x)$.

2° Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est constante.

b) En déduire que $f'(x)=f'(0)$.

3° Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient **(1)**.

58 Déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur l'intervalle I telles que :

1° $f''(x)=0$ sur $I=\mathbb{R}$;

2° $f''(x)=2x+1$ sur $I=\mathbb{R}$;

3° $f''(x)=\dfrac{1}{(3x+1)^3}$ sur $I=\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

59 ★ Un véhicule est animé d'un mouvement linéaire sur un axe et d'une vitesse constante égale à $30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il décélère à partir de l'instant $t=0$. On choisit comme origine le point où se trouve le véhicule à l'instant 0 et on oriente l'axe dans le sens du mouvement.

On suppose que, pendant toute la décélération, l'accélération instantanée est $a(t)=-0{,}5-0{,}01t$.

1° Déterminer la vitesse instantanée pendant la décélération.

2° Déterminer la loi horaire du véhicule entre l'instant $t=0$ et l'instant d'arrêt t.

3° Déterminer l'instant d'arrêt t et la distance parcourue lors du freinage.

60 ★ Un point massif M, fixé à un ressort, est soumis à une accélération instantanée :

$$a(t) = 10\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

1° Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la vitesse instantanée est nulle, exprimer la vitesse $v(t)$ en fonction de t.

2° Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le point M est à l'origine O, déterminer la loi horaire du mouvement.

61 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On recherche une courbe $\mathscr{C}$, représentative d'une fonction f dérivable sur un intervalle I, telle que la tangente à $\mathscr{C}$ en tout point M de $\mathscr{C}$ soit orthogonale à (OM).

1° Démontrer que le problème se ramène à la recherche d'une fonction f telle que, pour tout réel x de I :

$$x + f'(x)\,f(x) = 0.$$

2° En déduire que $\mathscr{C}$ est un arc de cercle de centre O.

62 ★ Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout point M du plan, on note M_1 son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_2 son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

Déterminer une courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f dérivable sur un intervalle I telle qu'en chaque point M de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en M soit orthogonale à (M_1M_2).

3 Problèmes

63 **A.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées)

1° Dresser le tableau des variations de f.

2° On considère la parabole Γ d'équation $y = x^2 + 1$.

a) Déterminer la limite de $f(x) - (x^2+1)$ quand x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

En donner une interprétation graphique.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

3° Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

4° Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

B. Soit la fonction g donnée par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans un plan $\mathscr{P}'$ muni d'un repère orthonormal $(\Omega\,;\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : 1 cm)

1° a) Quel est l'ensemble de définition D de la fonction g ?

b) Étudier la fonction g sur D.

2° a) Montrer que, pour tout $x < -1$:

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = -\sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x(x+1)}}.$$

b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse -1.

3° a) Montrer que, pour tout réel x de D :

$$g(x) - x = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x}} + x}.$$

b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}'$ en $+\infty$.

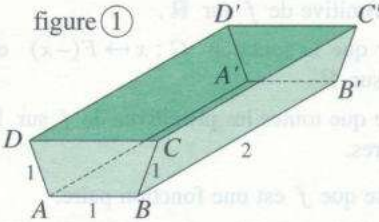
c) Montrer de même que la droite Δ' d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}'$ en $-\infty$.

d) Tracer $\mathscr{C}'$ ainsi que les droites T, Δ et Δ'.

64 Une benne a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.

La longueur du côté $[CD]$ est variable. Les autres dimensions sont fixes et indiquées sur la figure ① (l'unité est le mètre).

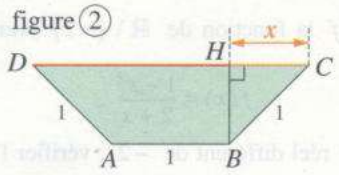
figure ①



La figure ② représente la base $ABCD$ du prisme.

On désigne par x la longueur CH, où H est le projeté orthogonal de B sur (CD).

figure ②



On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1° a) Calculer, en fonction de x, l'aire $S(x)$ du trapèze $ABCD$, puis le volume $V(x)$ de la benne.

b) On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;1[$ par :

$$f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}\ .$$

c) Démontrer que, pour tout x de $[0\,;1[$, on a :

$$f'(x)=\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

d) Étudier le sens de variation de f.

2° a) Exprimer $V(x)$ à l'aide de $f(x)$.

b) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

c) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{CBH}$?

65 **1°** Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}\ .$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2° Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x\ ,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équations respectives :

$$y=-3x \quad \text{et} \quad y=x\ .$$

a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) En déduire le tableau des variations de la fonction f.

d) Déterminer la limite en $-\infty$ de $f(x)-(-3x)$.

Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?

e) Montrer que la droite $\mathscr{D}'$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

f) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport aux deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

g) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

66 ★★ n étant un entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;1]$ par :

$$f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}\ .$$

A. 1° Dresser le tableau des variations de f_n, pour $n\geqslant 1$, en distinguant les deux cas : n pair, puis n impair.

Déterminer l'unique réel α_n de $]0\,;1[$ tel que :

$$f_n'(\alpha_n)=0 \quad \text{pour} \quad n\geqslant 1\ .$$

2° Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1 et f_2.

B. 1° Étudier, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f_1(x)=k$.

2° Montrer que l'équation $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3}<x_1<0\ , \quad 0<x_2<\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}<x_3<1\ .$$

3° Pour $i\in\{1,2,3\}$, on pose alors $u_i=\dfrac{3}{2}\left(x_i-\dfrac{1}{3}\right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel θ_i dans $[0\,;\pi]$, tel que $u_i=\cos\theta_i$.

4° Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions de l'équation $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$, avec $\theta\in[0\,;\pi]$.

5° Donner alors une valeur approchée, à 10^{-5} près, de x_1, x_2 et x_3.

67 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\ ,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3-3x-4\ .$$

1° Dresser le tableau des variations de g.

2° Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α.

3° Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f

1° Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.

2° Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(x^2-1)^2}\ .$$

En déduire le tableau des variations de la fonction f.

3° **a)** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$:

$$f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}\ .$$

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

Partie C : Nombre de solutions d'une équation

1° Déterminer l'abscisse des points de la courbe $\mathscr{C}$, où la tangente est parallèle à la droite d'équation :

$$y=x+2\ .$$

2° Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

3° En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x)=x+m\ .$$

68 ★★ **Encadrement de $\sqrt{1+x}$ par des polynômes**

1° **a)** On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\ .$$

Déterminer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

b) Prouver que, pour tout réel x, on a :

$$(1+x)\sqrt{1+x}-1=\frac{x^3+3x^2+3x}{(1+x)\sqrt{1+x}+1}\ .$$

En déduire le signe de $(1+x)\sqrt{1+x}-1$ pour $x\geqslant 0$.

c) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.

En déduire le signe de f', puis les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

d) Prouver que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\ .$$

2° **a)** On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\sqrt{1+x}\ .$$

Déterminer le signe de $g^{(3)}$ sur $[0\,;+\infty[$, où $g^{(3)}$ est la dérivée troisième de g.

b) Déterminer les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

c) Prouver que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a :

$$\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\ .$$

3° **a)** Écrire l'encadrement de $\sqrt{1+x}$ obtenu.

b) Déterminer en fonction de x une valeur approchée à $\dfrac{x^3}{16}$ près par défaut de $\sqrt{1+x}$.

69 **A.** Soit f la fonction de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}\ .$$

1° Pour tout x réel différent de -2, vérifier l'égalité :

$$f(x)=-x+2-\frac{3}{x+2}\ .$$

2° Étudier les variations de f, et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un répère orthonormal (l'unité de longueur choisie étant 1 cm, figure ①).

3° Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie.

B. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t)=\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}\ .$$

1° Pour tout t réel, montrer que $\varphi(\pi-t)=\varphi(t)$.

Expliquer comment l'étude des variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ.

2° Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t)=0$ admet une solution, notée α, dans l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (l'ordre des questions n'est pas imposé).

a) Montrer que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

Quelle est l'image de $[-1\,;1]$ par f' ?

b) Soit φ' la dérivée de φ.

Pour tout t réel, prouver l'égalité :

$$\varphi'(t)=f'(\sin t)\ \cos t\ .$$

c) Prouver l'existence et l'unicité de α.

d) Calculer la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

3° **a)** Calculer les valeurs exactes de :

$$\varphi(0)\ ;\ \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)\ ;\ \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\ ;\ \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \text{ et }\ \varphi'(0)\ .$$

b) Étudier les variations de φ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Tracer la courbe représentative de φ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal (l'unité de longueur choisie étant 10 cm, figure ②).

4° En utilisant la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(t)=\varphi(t)-t\ ,$$

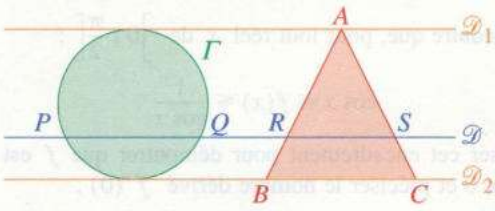
prouver que l'équation $\varphi(t)=t$ admet une solution unique, notée x_0, dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que x_0 est la seule solution de l'équation $\varphi(t)=t$ dans $\mathbb{R}$.

Résoudre graphiquement l'équation $\varphi(t)=t$ à l'aide de la figure ②.

(D'après BAC)

70 Soit deux droites parallèles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ tangentes à un cercle Γ de diamètre d, et un triangle ABC isocèle en A, ne rencontrant pas Γ et ayant son sommet A sur $\mathscr{D}_1$ et ses sommets B et C sur $\mathscr{D}_2$ tels que $BC = d$.



Une droite $\mathscr{D}$ parallèle à $\mathscr{D}_1$ coupe Γ en P et Q, $[AB]$ en R et $[AC]$ en S.

La longueur découpée par $\mathscr{D}$ sur le cercle et le triangle est égale à $PQ + RS$.

Le but de cet exercice est d'étudier s'il existe une autre droite « découpant la même longueur » que $\mathscr{D}$.

On note x la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}_2$ et on pose :

$$f(x) = PQ + RS .$$

1° Démontrer que $f(x) = 2\sqrt{dx - x^2} + d - x$.

2° a) Déterminer la dérivée de f.

b) Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{d}{2} ; d\right]$?

c) Démontrer que sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{d}{2}\right]$, $f'(x)$ a le même signe que $5x^2 - 5dx + d^2$.

d) En déduire le tableau des variations de f sur $[0 ; d]$.

3° En déduire qu'il existe une autre droite découpant la même longueur que $\mathscr{D}$ si, et seulement si :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{4d}{5} \quad \text{et} \quad x \neq a ,$$

où a est un réel que l'on précisera.

71 Une sphère S de rayon R repose sur le plan horizontal $\mathscr{P}$. On considère les cônes de révolution, d'axes verticaux, limités au plan de base $\mathscr{P}$ tel que S soit la sphère inscrite dans ces cônes.

Le problème propose l'étude des variations du volume V d'un tel cône et la détermination d'un cône dont le volume V soit minimum.

Partie A : Étude préalable d'une fonction

Soit f la fonction numérique qui, à tout réel x de $]0 ; 1[$, fait correspondre :

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)} .$$

1° Étudier les variations de f et déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0 ; 1[$.

2° Dessiner la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités : 9 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

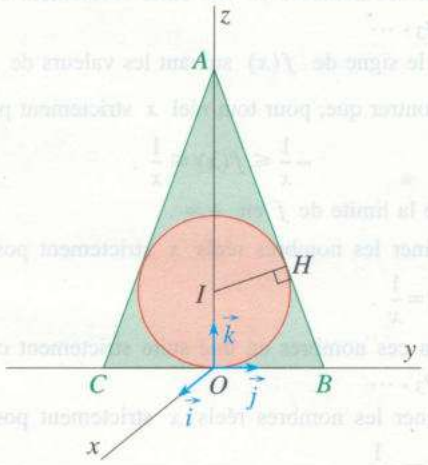
3° Soit k un nombre réel quelconque.

Indiquer graphiquement suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

4° Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 9$.

Partie B : Calcul du volume V d'un cône de révolution

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Soit A, B et C les points de coordonnées respectives :

$(0 ; 0 ; h)$, $(0 ; r ; 0)$ et $(0 ; -r ; 0)$,

h et r étant deux réels strictement positifs donnés.

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{OAB}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Le segment $[AB]$, en tournant autour de (Oz), engendre le cône de révolution qu'on limite à sa base dans le plan (xOy). On désigne par R le rayon du cercle $\mathscr{C}$ inscrit dans le triangle ABC qui est aussi le rayon de la sphère inscrite dans le cône de révolution.

On note I le centre de $\mathscr{C}$ et H le projeté orthogonal de I sur la droite (AB).

1° Exprimer $\sin\alpha$ dans le triangle AIH et $\tan\alpha$ dans le triangle AOB.

2° En déduire r et h en fonction de R et de α.

3° Calculer le volume V du cône de révolution en fonction de R et de α.

Partie C : Utilisation de f et résolution du problème posé

1° R étant supposé fixé, montrer que $V = K f(\sin\alpha)$, où K est une constante positive que l'on exprimera en fonction de R.

2° En déduire les variations de V en fonction de α.

3° Pour quelles valeurs de α ce volume est-il égal à $3\pi R^3$?

4° Pour quelle valeur de α le volume V est-il minimum ?

Calculer alors la hauteur du cône et son volume.

72 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 .$$

1° Démontrer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et déterminer la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

2° a) Déterminer les réels positifs tels que $f(x) = 0$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante a_1, a_2, a_3, ...

b) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3° a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} .$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels x strictement positifs tels que $f(x) = \frac{1}{x}$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante b_1, b_2, b_3, ...

c) Déterminer les nombres réels x strictement positifs tels que $f(x) = -\frac{1}{x}$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante c_1, c_2, c_3, ...

d) Préciser la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et des courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{x} .$$

Comparer les tangentes à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ aux points d'abscisses b_k, ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}'$ aux points d'abscisses c_k.

4° a) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto \tan x - x$ sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul k, il existe un unique réel x_k de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, tel que $\tan x_k = x_k$.

Justifier que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0 ; x_1[$, puis sur chacun des intervalles $]x_k ; x_{k+1}[$ pour tout entier k.

5° a) Étudier le signe des fonctions u et v définies sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$u(x) = \sin x - x \cos x \quad \text{et} \quad v(x) = \sin x \cos x - x .$$

b) En déduire que, pour tout réel x de $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos x \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\cos x} .$$

c) Utiliser cet encadrement pour démontrer que f est dérivable en 0 et préciser le nombre dérivé $f'(0)$.

6° a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3\pi]$.

b) Tracer les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ en se limitant aux points dont l'abscisse est comprise entre 0 et 3π, et placer les points d'abscisses a_k, b_k, c_k et x_k.

On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

(D'après BAC)

73 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} ,$$

et F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $F(0) = 0$.

1° Démontrer que la fonction $x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En déduire que F est impaire.

2° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = F\left(-\frac{1}{x}\right) .$$

a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

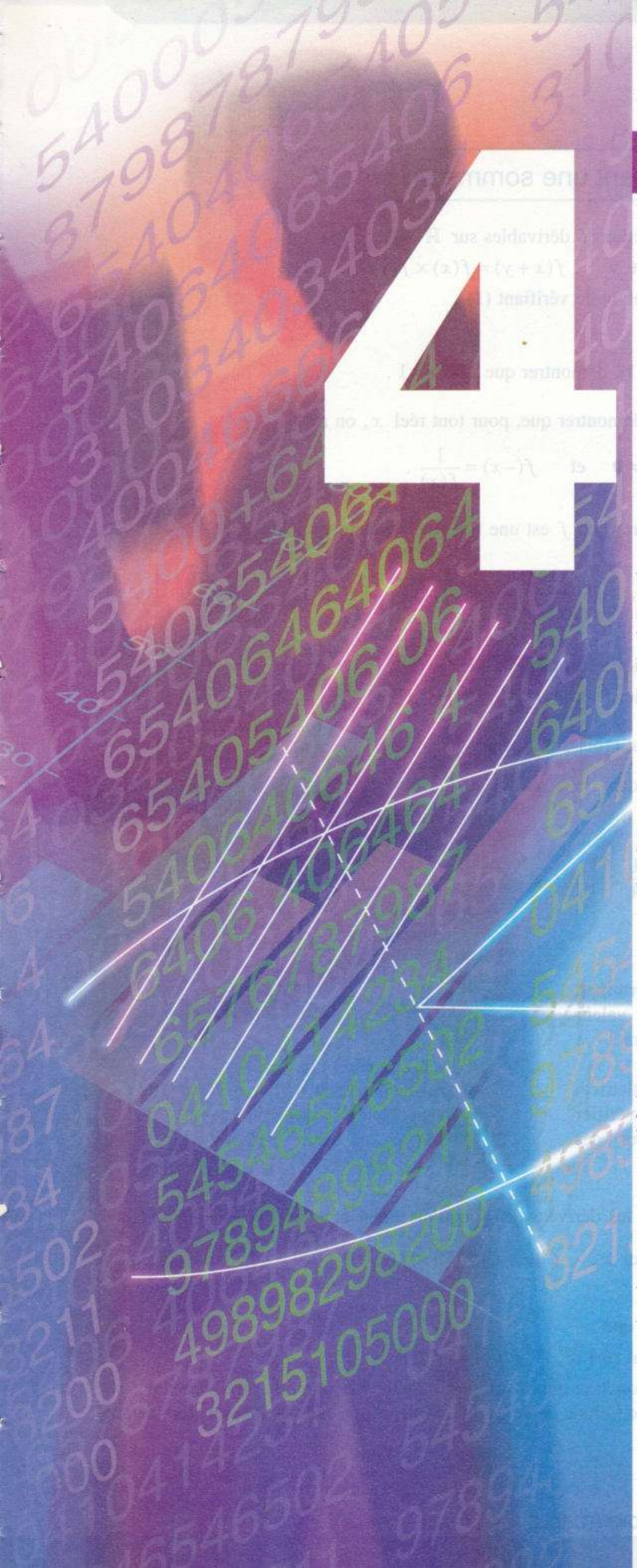
et que la fonction F admet une limite finie L en $+\infty$.

3° On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = F(\tan x)$.

a) Déterminer la fonction dérivée de h.

b) En déduire que, pour tout réel x, $h(x) = x$.

c) Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de L.



CHAPITRE

4

Fonction exponentielle

Fonctions vérifiant $f' = kf$ p. 92

- définir la fonction exp
- connaître les solutions de l'équation $f' = kf$
- connaître les propriétés algébriques de exp

Étude de la fonction exponentielle p. 94

- connaître le tableau des variations de exp
- savoir calculer des limites

Équation différentielle $y' = ay + b$ p. 96

- savoir résoudre cette équation différentielle

1 Fonctions transformant une somme en produit

Dans cette activité, on s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

pour tous réels x et y, $\quad f(x+y)=f(x)\times f(y)$ **(1)**.

On suppose qu'il existe une fonction f non nulle vérifiant **(1)**.

1 Soit t un réel tel que $f(t)\neq 0$.
En remplaçant x par t et y par 0 dans **(1)**, démontrer que $f(0)=1$.

2 **a)** En remarquant que $x+(-x)=0$, démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x)\neq 0 \quad \text{et} \quad f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$

b) En remarquant que $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$, démontrer que f est une fonction strictement positive.

c) En déduire que, pour tous réels x et y, $\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$ **(2)**.

d) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f(n)$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique ; en déduire que :

pour tout entier naturel n, $\quad f(n)=(f(1))^n$.

3 On suppose que $f(1)=3$ et que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

a) En remplaçant x par 0 et y par 1 dans la relation **(2)**, on obtient $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$.

Calculer de même les images des réels $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$.

b) L'algorithme ci-contre permet de déterminer, avec la **méthode de dichotomie**, une valeur approchée de l'image $f(x)$ d'un réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.
Programmer cet algorithme sur votre calculatrice. Calculer les images de plusieurs réels et vérifier que la condition **(1)** est satisfaite sur ces exemples.

Algorithme

Mettre 3 dans la mémoire Q.
Demander une valeur entre 0 et 1 et la mettre dans la mémoire X.
Mettre 0 dans la mémoire A
1 dans la mémoire I.
1 dans la mémoire B
Q dans la mémoire J.
Tant que $|J-I|>10^{-9}$:
  Mettre $\frac{A+B}{2}$ dans la mémoire C
  Mettre $\sqrt{IJ}$ dans la mémoire Y.
  Si $X<C$
  alors remplacer B par C et J par Y
  Sinon, remplacer A par C et I par Y.
Fin de boucle.
Afficher Y.

4 **a)** Soit a un réel fixé. En comparant les dérivées des fonctions $x\mapsto f(x+a)$ et $x\mapsto f(x)f(a)$, démontrer que :

pour tout réel x, $\quad f'(x+a)=f'(x)f(a)$.

En déduire que $f'(a)=f'(0)f(a)$.

b) En déduire l'existence d'un réel λ, tel que :

pour tout réel x, $\quad f'(x)=\lambda f(x)$.

On est donc ramené à la recherche d'une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée, problème rencontré en particulier en Sciences Physiques lors de l'étude de la loi de désintégration radioactive, qui sera détaillé dans le *T.D.* 3.

2 Recherche d'une fonction φ telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$

1 Soit n un entier naturel.

Quel est le degré de la dérivée d'une fonction polynôme de degré n ?

En déduire qu'il n'existe pas de fonction polynôme P telle que $P' = P$ et $P(0) = 1$.

2 Soit P et Q deux fonctions polynômes et I un intervalle sur lequel la fonction $\frac{P}{Q}$ est définie.

Démontrer que $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P}{Q}$ si, et seulement si, $P'Q - PQ' = PQ$.

En déduire qu'il n'existe aucune fonction rationnelle non nulle qui est égale à sa dérivée.

3 Soit t_0 un réel non nul.

En utilisant la méthode d'EULER décrite dans le *T.D.* 4 du *chapitre* 3, pour tout entier naturel non nul n, on peut définir de proche en proche une fonction f_n continue et affine par morceaux qui fournit une approximation de la fonction φ entre 0 et t_0 .

Pour cela, on pose $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{t_0}{n}$, $x_2 = 2 \times \frac{t_0}{n}$, … , $x_k = k \times \frac{t_0}{n}$, … , $x_n = t_0$ et on définit de proche en proche les valeurs approchées y_0 , y_1 , y_2 , … , y_n des images $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, … , $\varphi(x_n)$ en utilisant l'approximation :

$$\varphi(x+h) \approx \varphi(x) + \varphi'(x) \times h \text{ , c'est-à-dire } \varphi(x+h) \approx (1+h)\varphi(x) .$$

Lorsque x est un réel quelconque et h est voisin de 0.

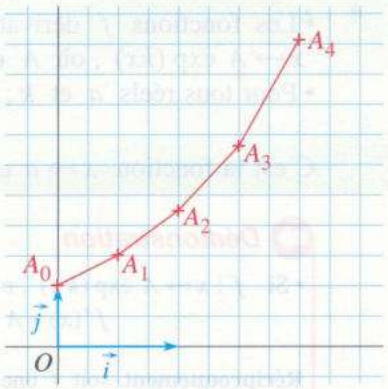
On a $x_0 = 0$ et $y_0 = \varphi(x_0) = 1$ et, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\varphi(x_{k+1}) = \varphi\left(x_k + \frac{t_0}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{t_0}{n}\right) \varphi(x_k) .$$

On pose donc $y_0 = 1$ et, pour tout entier compris entre 0 et $n-1$, $y_{k+1} = \left(1 + \frac{t_0}{n}\right) y_k$.

La courbe représentative de la fonction f_n est obtenue en reliant les points de coordonnées $(x_k \, ; y_k)$.

Par exemple, en prenant $t_0 = 2$ et $n = 4$, on obtient la courbe ci-contre constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$,
avec $A_0(0 \, ; 1)$, $A_1(0{,}5 \, ; 1{,}5)$, $A_2(1 \, ; 1{,}5^2)$, $A_3(1{,}5 \, ; 1{,}5^3)$, $A_4(2 \, ; 1{,}5^4)$.



a) En utilisant un tableur, tracer sur un même graphique les courbes représentant les fonctions f_2 , f_5 , f_{10} et f_{100} en prenant $t_0 = 1$; faire de même en prenant $t_0 = -2$.

b) Quelles conjectures peut-on émettre concernant le signe et le sens de variation de la fonction φ ?

4 On suppose qu'il existe une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi' = \varphi$.

Démontrer que la fonction $x \mapsto \varphi(x)\,\varphi(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

En déduire que la fonction φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x , $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$.

1 Fonctions vérifiant $f' = kf$, où k est un réel fixé

1.1 Définition de la fonction exponentielle

théorème

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée et prend la valeur 1 en 0. Cette fonction est notée **exp** et appelée fonction exponentielle. On a :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1 .$$

Remarques

• La méthode d'EULER, en prenant un pas suffisamment petit, permet d'obtenir la courbe représentative d'une fonction affine par intervalle qui est proche de la fonction exp.

Voir Activité 2



• De plus, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Démonstration

• L'existence de la fonction exp est momentanément admise. Elle sera justifiée au *chapitre* 5, *exercice* 9.

• Pour démontrer l'unicité, on suppose que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Il s'agit de démontrer que $f = \exp$ ou encore que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\exp(x)} = f(x)\exp(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à 1.

Or $g'(x) = f'(x)\exp(-x) + f(x)(-\exp(-x)) = (f'(x) - f(x))\exp(-x) = 0$, donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$ et la valeur de cette constante est $g(0) = f(0)\exp(0) = 1$.

Ainsi, $f = \exp$.

1.2 Solutions de l'équation $f' = kf$

théorème

• Les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = kf$, où $k \in \mathbb{R}$, sont les fonctions $x \mapsto A\exp(kx)$, où A est une constante réelle.

• Pour tous réels a et k, il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = kf \quad \text{et} \quad f(0) = a .$$

C'est la fonction $x \mapsto a\exp(kx)$.

Démonstration

Voir Exercices 3 à 11

• Si $f : x \mapsto A\exp(kx)$, où $A \in \mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$f'(x) = A \times k\exp'(kx) = kA\exp(kx) = kf(x), \quad \text{donc} \quad f' = kf .$$

Réciproquement, soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = kf$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(kx)} = f(x)\exp(-kx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = f'(x)\exp(-kx) + f(x)(-k\exp(-kx)) ;$$

donc $g'(x) = (f'(x) - kf(x))\exp(-kx) = 0$, car $f' = kf$.

La fonction g est donc une constante A sur $\mathbb{R}$, d'où $g(x) = A\exp(kx)$.

• Les solutions de l'équation $f' = kf$ sont les fonctions $x \mapsto A\exp(kx)$ avec A réel.

De plus, $f(0) = a \iff A = a$, donc l'unique solution, vérifiant $f(0) = a$, est $x \mapsto a\exp(kx)$.

1.3 Caractérisation algébrique

théorème

Les fonctions f non nulles et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)f(y)$, sont les fonctions $x \mapsto \exp(kx)$, où k est un réel.

Démonstration

• D'après l'*Activité* 1, si $f \neq 0$ et, pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)f(y)$, alors $f(0)=1$ et $f'=kf$, où $k=f'(0)$.
D'après le théorème précédent, pour tout réel x, $f(x)=1\times\exp(kx)=\exp(kx)$.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(kx)$, où k est un réel. On a $f'=kf$.
Pour tout réel fixé y, la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x+y)-f(x)f(y)$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée g' telle que $g'(x)=f'(x+y)-f'(x)f(y)=kf(x+y)-kf(x)f(y)=kg(x)$.
De plus, $g(0)=f(y)-f(y)=0$.
D'après le théorème précédent, cette fonction est donc la fonction $x\mapsto 0\times\exp(kx)$, c'est-à-dire la fonction nulle. Ainsi, pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)f(y)$.

Règles de calculs

propriétés

Pour tous réels x et y, et tout entier relatif n, on a :

• $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ • $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ • $\exp(nx)=(\exp(x))^n$

Démonstration

• Le premier résultat découle du théorème précédent et du fait que $\exp'=\exp$.
• Pour le deuxième, on a $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))=\exp(x)\exp(-y)$.

Or $\exp(-y)=\dfrac{1}{\exp(y)}$, donc $\exp(x-y)=\exp(x)\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

• La fonction $f=\exp^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=n\exp^{n-1}\times\exp'=n\exp^{n-1}\exp=n\exp^n=nf$.
De plus, $f(0)=(\exp(0))^n=1^n=1$.
D'après le théorème donnant les solutions de l'équation $f'=kf$, on en déduit que f est la fonction $x\mapsto\exp(nx)$.
Ainsi $\exp(nx)=(\exp(x))^n$.

1.4 Une nouvelle notation

Pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\exp(n)=\exp(n\times 1)=(\exp(1))^n$.
Dorénavant, le réel $\exp(1)$ est noté **e** ; on a alors, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $\exp(n)=e^n$.
Par convention, pour tout réel x, on note e^x au lieu de $\exp(x)$.
Avec cette notation, les propriétés algébriques de la fonction exponentielle se traduisent comme les règles de calculs sur les exposants déjà connues.

Pour tous réels x et y, et tout entier relatif n, on a :

$$\bullet\ e^0=1 \quad \bullet\ \frac{1}{e^x}=e^{-x} \quad \bullet\ e^xe^y=e^{x+y} \quad \bullet\ \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y} \quad \bullet\ (e^x)^n=e^{nx}$$

Remarque

Voir Exercices 12 à 17

Cette notation a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui fut certainement le plus grand mathématicien du XVIIIe siècle.
Le nombre e est un nombre de même nature que π. Il est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers. Ce résultat a été démontré en 1873 par le mathématicien français Charles Hermite (1822-1901).
On aura l'occasion de déterminer des valeurs approchées du nombre e à l'aide de suites, mais il est important de savoir que $\mathbf{e\approx 2{,}718}$.

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Signe et sens de variation de exp

propriété

La fonction exp est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$ et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, on a :
  - $x < 0 \iff 0 < e^x < 1$
  - $x = 0 \iff e^x = 1$
  - $x > 0 \iff e^x > 1$
- Pour tous réels a et b, on a :
  - $a < b \iff e^a < e^b$
  - $a = b \iff e^a = e^b$

Démonstration

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (d'après le *paragraphe* 1.1) et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (résultat du premier paragraphe), donc elle ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De plus, $\exp(0) = 1$ est strictement positif, donc exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Comme $\exp' = \exp > 0$, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Approximation affine au voisinage de 0

propriété

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est la meilleure approximation affine de la fonction exp au voisinage de 0 et on écrit :

pour x voisin de 0, on a $e^x \approx 1 + x$.

Démonstration

Voir Exercices 35 et 36

Ces résultats découlent du fait que la fonction exp est dérivable en 0 et que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

La tangente à la courbe représentative de la fonction exp en $A(0\,;\,1)$ a pour équation $y = 1 + x$.

2.3 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

propriété

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration

Voir Exercices 28 à 31

- Il s'agit de démontrer que si A est un réel quelconque, alors tout intervalle ouvert $I =]A\,;+\infty[$ contient les réels e^x pour tout réel x suffisamment grand.
On sait que la suite géométrique $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$, car $e > 1$.
Par définition, on en déduit qu'à partir d'un certain rang p, on a $e^n > A$. En particulier, $e^p > A$.
La fonction exp étant croissante, si $x \geqslant p$, on a $e^x \geqslant e^p$; donc $e^x > A$ et l'intervalle I contient les réels e^x pour tout réel $x \geqslant p$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. On peut mémoriser cette limite par la phrase :

si l'exposant tend vers $+\infty$, alors l'exponentielle tend vers $+\infty$.

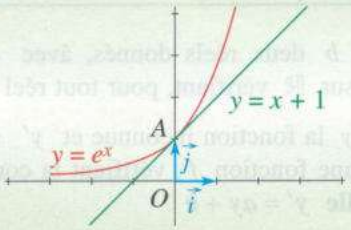
- Si x tend vers $-\infty$, alors $-x$ tend vers $+\infty$ et, compte tenu du résultat précédent, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Or $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. On peut mémoriser cette limite par la phrase :

si l'exposant tend vers $-\infty$, alors l'exponentielle tend vers 0.

2.4 Tableau des variations et courbe représentative

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x) = e^x$		$+$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0	↗	1	↗	$+\infty$



2.5 Croissance comparée

propriété

Pour tout entier naturel non nul n, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$.

Remarques

Voir T.D.1 ; Exercices 32 à 34

- La démonstration est proposée dans le *T.D.* 1.
- Pour des valeurs de x assez grandes, la fonction exponentielle croît beaucoup plus vite qu'une fonction puissance ; ce qui justifie parfois l'expression du langage courant « croissance exponentielle » pour une croissance rapide.
- Il découle de cette propriété que, pour tout entier naturel n et pour x assez grand, on a $e^x > x^n$.

Exemples

- Pour tout réel x non nul, $\dfrac{e^x}{x^2+1} = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ a la même limite que $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$; et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = +\infty$.

- Pour tout réel x, $(x^3 + 5x + 1)\, e^x = x^3 e^x + 5x e^x + e^x$, somme de trois termes qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 5x + 1) e^x = 0$.

En pratique, on retiendra que :

à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x.

Et on conclura, sans autre justification, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 5x + 1)\, e^x = 0$.

2.6 Dérivée de e^u

propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction composée $\exp \circ u$, notée aussi e^u, est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$(e^u)' = u' \times e^u .$$

Démonstration

Voir Exercices 37 à 43

Le résultat découle de la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$(\exp \circ u)' = u' \times \exp' \circ u = u' \times \exp \circ u \text{ , car } \exp' = \exp .$$

Exemples

- La fonction $x \mapsto e^{x^2+3x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa **dérivée** est $x \mapsto (2x+3)\, e^{x^2+3x}$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, définie sur $]0 ; +\infty[$, admet pour **primitive** la fonction $x \mapsto -e^{\frac{1}{x}}$.

3 Équation différentielle $y' = ay + b$

Soit a et b deux réels donnés, avec $a \neq 0$. On cherche à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, $f'(x) = af(x) + b$.

En notant y la fonction inconnue et y' sa dérivée, cette relation s'écrit $y' = ay + b$.
On dit qu'une fonction f, vérifiant la condition ci-dessus, est **une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$**.

De nombreux problèmes issus des sciences expérimentales, de l'économie, de la mécanique, conduisent à l'étude d'équations différentielles de ce type, le plus souvent notées $\frac{dy}{dx} = ay + b$.

Forme des solutions — théorème

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$, et l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$.

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$, où K est une constante réelle et $x \mapsto \alpha$ est l'unique fonction constante qui est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

- Pour tout couple $(x_0 ; y_0)$ de réels, l'équation (E) admet une unique solution f vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Voir Exercices 56 à 58

- Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, les fonctions constantes solutions de l'équation sont celles qui vérifient $0 = ay + b$, c'est-à-dire $y = -\frac{b}{a}$. Ainsi, $\alpha = -\frac{b}{a}$.

- Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) - \alpha$.

Pour tout réel x, on a $g'(x) = h'(x)$ et $ag(x) + b = ah(x) + a\alpha + b = ah(x)$, donc :

g solution de $(E) \iff h' = ah \iff h : x \mapsto Ke^{ax}$ avec K réel, d'après 1.2.

Ainsi les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $g : x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$, avec K réel.

- $g(x_0) = y_0 \iff \alpha + Ke^{ax_0} = y_0 \iff Ke^{ax_0} = y_0 - \alpha \iff K = (y_0 - \alpha)\, e^{-ax_0}$.

L'unique solution, vérifiant $f(x_0) = y_0$, est la fonction $f : x \mapsto \alpha + (y_0 - \alpha)\, e^{a(x - x_0)}$.

Exemple

L'équation différentielle (E) $2y' + 3y = 6$ s'écrit sous la forme $y' = ay + b$, avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 3$.

L'unique fonction constante $x \mapsto \alpha$ solution vérifie $2 \times 0 + 3\alpha = 6$, donc $\alpha = 2$.

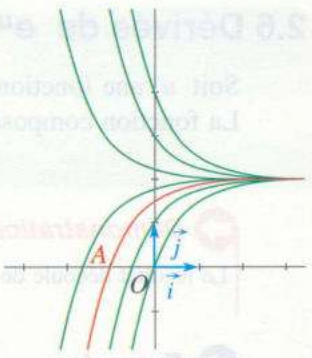
Les solutions de l'équation sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$g : x \mapsto 2 + Ke^{-\frac{3}{2}x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

On peut, par exemple, rechercher les solutions dont la courbe représentative passe par le point $A(-1 ; 0)$.

$$g(-1) = 0 \iff 2 + Ke^{\frac{3}{2}} = 0 \iff Ke^{\frac{3}{2}} = -2 \iff K = -2e^{-\frac{3}{2}}.$$

On obtient ainsi une solution unique $g : x \mapsto 2 - 2e^{-\frac{3}{2}(x+1)}$ vérifiant $g(-1) = 0$.



Courbes représentant des solutions de (E)

1 Résolution d'équations et d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1° $e^{-x}+1=0$;

2° $e^{3x+1}-e^{-x}<0$;

3° $\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^3=e^2\times e^{2x}$;

4° $e^{2x}+2e^x<3$.

• Méthode

• Pour résoudre une équation comportant des exponentielles, on peut utiliser les propriétés algébriques de la fonction exp pour :

– se ramener à une équation de la forme $e^{f(x)}=e^{g(x)}$, qui équivaut à l'équation $f(x)=g(x)$;

– utiliser un changement d'inconnue permettant de se ramener à une équation classique.

• Pour une inéquation, on peut procéder de la même manière, et utiliser la stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^{f(x)}<e^{g(x)} \iff f(x)<g(x) .$$

Voir Exercices 20 à 27

1° L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle s'écrit $e^{-x}=-1$ et n'admet pas de solution, car, pour tout réel x :

$$e^{-x}>0 .$$

2° L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle s'écrit $e^{3x+1}<e^{-x}$ et équivaut à :

$$3x+1<-x .$$

On a donc :

$$e^{3x+1}-e^{-x}<0 \iff 4x<-1$$
$$\iff x<-\frac{1}{4} .$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right[$.

3° L'équation est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Elle s'écrit $e^{3\left(\frac{1}{x}-1\right)}=e^{2+2x}$ et équivaut à :

$$3\left(\frac{1}{x}-1\right)=2+2x .$$

On a donc, pour tout x dans $\mathbb{R}^*$:

$$\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^3=e^2\times e^{2x} \iff -2x-5+\frac{3}{x}=0$$
$$\iff -2x^2-5x+3=0 .$$

qui est une équation du second degré que l'on résout sans difficultés.

Ainsi, l'équation admet deux solutions : -3 et $\frac{1}{2}$.

4° L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit :

$$(e^x)^2+2e^x-3<0 ,$$

c'est-à-dire :

$$X^2+2X-3<0 , \quad \text{avec} \quad X=e^x .$$

Or $X^2+2X-3<0 \iff -3<X<1$,

donc, on a $e^{2x}+2e^x<3 \iff -3<e^x<1$

$$\iff e^x<1 ,$$

car, pour tout réel x $e^x>0>-3$.

On a $e^x<1 \iff x<0$,

car $1=e^0$ et la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

Remarque

Pour une équation du type $e^x=3-2x$, où l'inconnue n'intervient pas uniquement en exposant, on ne peut pas utiliser les méthodes évoquées ci-dessus.

Ici, le tableau des variations de la fonction $x\mapsto e^x+2x-3$ permettra de justifier l'existence et le nombre de solutions de l'équation, et d'en obtenir des encadrements.

2 Recherche de primitives

Déterminer une primitive, sur l'intervalle donné, de chacune des fonctions suivantes :

1° $f : x \mapsto 2e^{-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$; **2°** $f : x \mapsto (x+1)\,e^{x^2+2x}$ sur $\mathbb{R}$.

• Méthode

Pour déterminer une primitive sur un intervalle I d'une fonction comportant des exponentielles, on cherche à reconnaître une fonction du type $u' \times e^u$ qui a pour primitive e^u sur I.

Voir Exercices 41 à 44

1° Pour faire apparaître la forme $u' \times e^u$, on pose :

$$u(x) = -3x + 1 .$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -3$.

Pour tout réel x, on a donc :

$$f(x) = -\frac{2}{3} \times (-3) \times e^{-3x+1} = -\frac{2}{3}\,u'(x)\,e^{u(x)} .$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est alors :

$$F : x \mapsto -\frac{2}{3}e^{-3x+1} .$$

2° Pour faire apparaître la forme $u' \times e^u$, on pose :

$$u(x) = x^2 + 2x .$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 2$.

Pour tout réel x, on a donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times (2x+2) \times e^{x^2+2x} = \frac{1}{2}\,u'(x)\,e^{u(x)} .$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est alors :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}\,e^{x^2+2x} .$$

3 Détermination de limites

Déterminer les limites : **1°** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{x - \frac{1}{x}}$; **2°** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - e^{2x+1})$; **3°** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{2e^x + 3}$.

• Méthode

Pour déterminer une limite d'une expression comportant une exponentielle, on applique les théorèmes du *Chapitre* 2, et, lorsqu'il y a une forme indéterminée, on utilise le fait que, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x x^n = 0 ,$$

c'est-à-dire « à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x ».

Voir Exercices 28 à 36

1° Si x est strictement positif et tend vers 0, l'exposant $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{x - \frac{1}{x}} = 0$.

2° Lorsque x tend vers $+\infty$, $(2x+1)$ tend vers $+\infty$, donc e^{2x+1} tend vers $+\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » ; mais en $+\infty$, e^{2x+1} l'emporte sur toute puissance de $2x+1$, donc aussi sur toute puissance de x.

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - e^{2x+1}) = -\infty$.

3° Intuitivement, on est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; mais, comme l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x à l'infini :

$\dfrac{e^x - x}{2e^x + 3}$ a la même limite que $\dfrac{e^x}{2e^x} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{2e^x + 3} = \dfrac{1}{2}$.

4 Équation différentielle

BAC

Énoncé

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : \quad y' - y = 3e^{-2x} .$$

1° Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = u(x)\, e^{-2x}$. Démontrer que la fonction v est solution de (E_1) si, et seulement si, la fonction u est solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) : y' - 3y = 3 .$$

2° Résoudre l'équation différentielle (E_2).

3° En déduire que l'équation différentielle (E_1) admet une unique solution f vérifiant $f(0) = -3$.

4° Dresser le tableau des variations de la fonction f.

Analyse de l'énoncé

1° Il s'agit de démontrer une équivalence.

2° On doit résoudre une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $y' = ay + b$.

3° On doit appliquer les résultats précédents et trouver la valeur d'une constante.

4° Il s'agit d'étudier une fonction.

• Méthode

Pour résoudre une équation différentielle (E) de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels :
• on commence par rechercher l'unique fonction constante $x \mapsto \alpha$ qui est solution de (E),
• on écrit que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$, avec K réel.

1° La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un produit de fonctions dérivables) et on a :

$$v'(x) = u'(x)e^{-2x} + u(x) \times (-2e^{-2x})$$
$$= (u'(x) - 2u(x))\, e^{-2x}$$

et $\quad v'(x) - v(x) = (u'(x) - 3u(x))\, e^{-2x}$.

Donc la fonction v est solution de (E_1) si, et seulement si :

pour tout réel x, $(u'(x) - 3u(x))\, e^{-2x} = 3e^{-2x}$,

c'est-à-dire $u'(x) - 3u(x) = 3$ en simplifiant par e^{-2x} qui est non nul.

Ainsi v est solution de (E_1) si, et seulement si, u est solution de (E_2).

2° L'équation (E_2) s'écrit $y' = 3y + 3$.
On commence par chercher la fonction constante $u_0 : x \mapsto \alpha$ qui est solution de (E_2).
On a alors $0 = 3\alpha + 3$; donc $\alpha = -1$.

Les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions :
$u : x \mapsto -1 + Ke^{3x}$, où K est une constante réelle.

3° D'après la question **1°**, les solutions de (E_1) sont donc les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = u(x)\, e^{-2x} = (-1 + Ke^{3x})\, e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x} + Ke^{x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

On a alors $v(0) = -1 + K$; donc :

$$v(0) = -3 \iff K = -2 .$$

La fonction $f : x \mapsto -e^{-2x} - 2e^{x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est l'unique solution de (E_1) vérifiant $f(0) = -3$.

4° Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{x} = 2(e^{-2x} - e^{x}) .$$

On a :

$$f'(x) = 0 \iff e^{-2x} = e^{x}$$
$$\iff -2x = x \iff x = 0$$

et $\quad f'(x) > 0 \iff e^{-2x} > e^{x}$
$$\iff -2x > x \iff x < 0 .$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty .$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

On en déduit le tableau des variations ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

1 Croissances comparées de la fonction exp et des fonctions puissances

Le tableau ci-contre fournit quelques valeurs numériques de e^x et x^n pour certaines valeurs du réel x et de l'entier naturel n.
On peut observer, par exemple, que $x^{20} \geqslant e^x$ pour certaines valeurs de x, mais que $x^{20} \leqslant e^x$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

En d'autres termes, la fonction $x \mapsto x^{20}$ semble croître moins vite que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	exp(x)	x^2	x^3	x^5	x^10	x^20
2	10	22026,4658	100	1000	100000	10000000000	1E+20
3	20	485165195	400	8000	3200000	1,024E+13	1,0486E+26
4	30	1,0686E+13	900	27000	24300000	5,9049E+14	3,4868E+29
5	40	2,3539E+17	1600	64000	102400000	1,04858E+16	1,0995E+32
6	50	5,1847E+21	2500	125000	312500000	9,76563E+16	9,5367E+33
7	60	1,142E+26	3600	216000	777600000	6,04662E+17	3,6562E+35
8	70	2,5154E+30	4900	343000	1680700000	2,82475E+18	7,9792E+36
9	80	5,5406E+34	6400	512000	3276800000	1,07374E+19	1,1529E+38
10	90	1,2204E+39	8100	729000	5904900000	3,48678E+19	1,2158E+39
11	100	2,6881E+43	10000	1000000	1E+10	1E+20	1E+40
12	110	5,921E+47	12100	1331000	1,6105E+10	2,59374E+20	6,7275E+40
13	120	1,3042E+52	14400	1728000	2,4883E+10	6,19174E+20	3,8338E+41
14	130	2,8726E+56	16900	2197000	3,7129E+10	1,37858E+21	1,9005E+42
15	140	6,3274E+60	19600	2744000	5,3782E+10	2,89255E+21	8,3668E+42
16	150	1,3937E+65	22500	3375000	7,5938E+10	5,7665E+21	3,3253E+43
17	160	3,0698E+69	25600	4096000	1,0486E+11	1,09951E+22	1,2089E+44
18	170	6,7618E+73	28900	4913000	1,4199E+11	2,01599E+22	4,0642E+44
19	180	1,4894E+78	32400	5832000	1,8896E+11	3,57047E+22	1,2748E+45

L'objet de ce T.D. est de démontrer que :

« à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur toute puissance de x ».

Plus précisément, pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 .$$

1 a) Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $e^x \geqslant x^2$. On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^x - x^2$ sur $[1 ; +\infty[$, et utiliser la dérivée seconde f''.

En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Pour étudier le comportement de $x e^x$ lorsque x tend vers $-\infty$, pour tout réel non nul x, on pose $X = -x$.

Démontrer que $x e^x = -\dfrac{X}{e^X}$ et en déduire la limite de $x e^x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2 Soit n un entier naturel non nul fixé.

a) Vérifier que, pour tout réel non nul x, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = A\left(\frac{e^t}{t}\right)^n , \qquad \text{où } t = \frac{x}{n} \quad \text{et} \quad A \text{ est une constante.}$$

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

b) Vérifier que, pour tout réel non nul x, on a :

$$x^n e^x = B\,\frac{X^n}{e^X} , \qquad \text{où } X = -x \text{ et } B \text{ est une constante.}$$

En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

3 Applications

Calculer les limites des fonctions définies ci-dessous aux bornes de leur ensemble de définition.

a) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$;

b) $f(x)=(x^2-2x+5)\,e^{\frac{x}{2}}$ sur $\mathbb{R}$;

c) $f(x)=x^3-3e^x$ sur $\mathbb{R}$;

d) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2 Tangentes à la courbe d'équation $y = e^x$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

1 Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A_0(0\,;1)$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_0 .

2 Démontrer que la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A_1(1\,;e)$ passe par l'origine du repère.

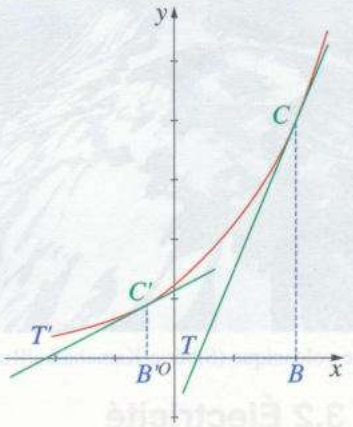
3 Soit a un réel et T_a la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a .
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite T_a avec l'axe des abscisses.
En déduire une construction simple de la droite T_a .

4 En étudiant les variations de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x)=e^x-e^a(x-a)-e^a$, où a est un réel fixé,
démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de ses tangentes.

5 Soit Γ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que Γ admette en chacun de ses points C une tangente qui coupe l'axe des abscisses au point T .

On note B le projeté orthogonal du point C sur l'axe des abscisses.

Les résultats précédents permettent d'affirmer que si Γ est la courbe $\mathscr{C}$, alors on a toujours $\overrightarrow{BT}=-\vec{i}$.



a) Déterminer, à partir de $\mathscr{C}$, une courbe $\mathscr{C}'$ pour laquelle on a toujours $\overrightarrow{BT}=\vec{i}$.

b) On se propose de déterminer les courbes Γ pour lesquelles on a toujours $\overrightarrow{BT}=2\vec{i}$.

Démontrer que le problème se ramène à la recherche des fonctions non nulles telles que $f=-2f'$ et conclure.

c) Plus généralement, déterminer les courbes Γ pour lesquelles on a toujours $\overrightarrow{BT}=k\vec{i}$, où k est un réel non nul fixé.

3 Des équations différentielles

3.1 Radioactivité

L'expérience montre que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'AVOGADRO, soit 10^{23}), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un petit intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} \approx -\lambda \Delta t \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda N(t) \ .$$

En prenant la limite de chaque membre lorsque Δt tend vers 0, on obtient $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$, ou encore $N' = -\lambda N$.

1 En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de t, de λ et du nombre N_0 d'atomes radioactifs présents à l'instant $t = 0$.

2 **a)** Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Ce réel est noté **ln 2** et appelé **logarithme népérien de 2** (voir *Chapitre* 5).

b) En déduire qu'il existe un unique réel T, tel que, pour tout réel positif t, on ait :

$$N(t+T) = \frac{1}{2} N(t) \ .$$

Le réel T est appelé la **période radioactive** ou la **demi-vie** de ce corps radioactif.



© Yann ARTHUS-BERTRAND/Altitude

Paysage volcanique (Sibérie/Kamchatka/Russie)

3 On a pu observer que, pour le carbone 14, on a :

$$\lambda \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4} \ .$$

a) Déterminer la période en années du carbone 14.

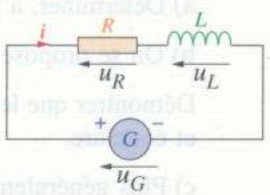
b) Dans une carrière d'une chaîne volcanique, on a retrouvé des bois carbonisés pris dans des projections de l'un des volcans.

L'étude de ces échantillons de bois fossiles a montré que leur teneur en carbone 14 est égale à 25 % de celle des échantillons de bois actuel frais et de même masse.

Déterminer l'âge de l'événement volcanique.

3.2 Électricité

On considère un circuit comportant en série un générateur délivrant une tension constante u_G (en volts), un résistor de résistance R (en ohms) et une bobine d'inductance L (en henrys).
Soit $i(t)$ l'intensité du courant (en ampères) dans ce circuit à l'instant t (en secondes).



D'après le cours de Physique, $u_R(t) = R \cdot i(t)$ et $u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

1 En appliquant la loi d'additivité des tensions $u_G = u_L + u_R$, montrer que la fonction $i : t \mapsto i(t)$ est solution sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{R}{L} \cdot y = \frac{u_G}{L} .$$

2 **a)** Déterminer les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation de la question 1.

b) Déterminer l'intensité du courant dans ce circuit à l'instant t sachant que $i(0) = 0$.

3 On suppose $u_G = 10$ V, $R = 5\ \Omega$ et $L = 1$ H.

a) Étudier les variations de la fonction i sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de i en $+\infty$.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction i.

3.3 Loi de refroidissement de Newton

On a pu établir que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et la température ambiante. Le coefficient de proportionnalité k dépend de la nature de ce corps.
Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 °C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 °C. On désigne par $\theta(t)$ la température de ce corps à l'instant t, exprimé en seconde.

1 Justifier que la fonction θ vérifie une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ dont on précisera les coefficients a et b en fonction de k.

2 En déduire que, pour tout réel t strictement positif, $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$.

3 On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 °C.

a) Déterminer la valeur du réel k.

b) Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 °C ?

4 Fonctions $x \mapsto e^{-kx}$ et $x \mapsto e^{-kx^2}$, avec k réel strictement positif

Pour tout réel strictement positif k, on considère les fonctions f_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = e^{-kx} \quad \text{et} \quad g_k(x) = e^{-kx^2} .$$

On note respectivement $\mathscr{C}_k$ et Γ_k les courbes représentatives des fonctions f_k et g_k dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Dresser les tableaux des variations des fonctions f_k et g_k.

2 **a)** Tracer sur un même graphique les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

b) Soit k et k' deux réels tels que $0 < k < k'$. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k'}$, puis celle des courbes Γ_k et $\Gamma_{k'}$, et enfin celle des courbes Γ_k et $\mathscr{C}_{k'}$.

3 **a)** Soit k et k' deux réels tels que $0 < k < k'$.
Déterminer la limite de $\dfrac{f_{k'}(x)}{f_k(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour les décroissances des fonctions f_k et $f_{k'}$?

b) k et k' étant deux réels quelconques, comparer les décroissances des fonctions f_k et $g_{k'}$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

5 Étude de fonctions comportant des exponentielles

5.1 Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)(e^x+1)$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

2 Étudier les variations de la fonction f' et en déduire le signe de f'.

3 Dresser le tableau des variations de la fonction f et tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

4 Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $x+y=2$, est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

5 Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à $\mathscr{D}$.

5.2 Exemple 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0)=0$ et, si $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 Démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout réel non nul x, on a :

$$g'(x)=\frac{h\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$, où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(1+x)e^x+1$.

2 Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$ et en déduire son signe.

3 Déterminer le sens de variation de la fonction g.

4 **a)** Justifier que lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $g(x)$ est du même ordre de grandeur que $\dfrac{x}{2}$.

b) Démontrer que, pour tout réel non nul x, $\quad g(x)-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\times\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$.

c) En déduire que la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

5 Soit x un réel non nul et M le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

a) Calculer, en fonction de x, le coefficient directeur de la droite (OM).

b) Étudier la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives et la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement négatives.

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

Faire le point

• Fonction exponentielle : définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée et vérifie $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle est **strictement croissante** et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

• Propriétés algébriques

$\bullet\ e^0 = 1 \quad \bullet\ \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \bullet\ e^x e^y = e^{x+y} \quad \bullet\ \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad \bullet\ (e^x)^n = e^{nx}$, $n \in \mathbb{Z}$

• Limites à connaître

Soit n un entier naturel.

en $-\infty$	en $+\infty$	en 0
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

À l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x.

• Dérivée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. On a $(e^u)' = u'e^u$.

savoir	comment faire ?
résoudre une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$	on utilise l'équivalence : pour tous réels a et b, $e^a = e^b \iff a = b$
résoudre une inéquation de la forme $e^{u(x)} < e^{v(x)}$	on utilise la stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: pour tous réels a et b, $e^a < e^b \iff a < b$
démontrer qu'une fonction f est de la forme $x \mapsto Ae^{kx}$	on prouve que $f' = kf$
démontrer qu'une fonction f est de la forme $x \mapsto e^{kx}$	on peut utiliser l'une des méthodes suivantes : • prouver que $f' = kf$ et $f(0) = 1$; • prouver que $f \neq 0$ et établir que, pour tous les réels x et y : $f(x+y) = f(x)f(y)$
résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	• on détermine la fonction constante $x \mapsto \alpha$ qui est solution de (E) ; les solutions de (E) sont alors les fonctions : $x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$, où K est une constante réelle

1 Fonctions telles que $f' = kf$

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction exp est l'unique fonction égale à sa dérivée.

2° Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 2 ,$$
alors, pour tout réel x, $f(x) = 2e^x$.

3° La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x-1}$ est telle que $f' = 2f$.

4° Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$f' = 2f \quad \text{et} \quad f(1) = 2 ,$$
alors, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{x-1}$.

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction exp est l'unique fonction telle que, pour tous les réels x et y :
$$f(x+y) = f(x)\, f(y) .$$

2° Pour tout réel x, $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x+3}} = e^2$.

3° Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous les réels x et y :
$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 ,$$
alors il existe un réel k tel que $f' = kf$.

4° Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \exp(u_n)$.
Si (u_n) est une suite arithmétique, alors (v_n) est une suite géométrique.

2 L'équation $f' = kf$

Dans les exercices 3 et 4, démontrer que la fonction f définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il existe un réel k tel que $f' = kf$.

3 1° $f(x) = \exp(2x)$; 2° $f(x) = 3\exp(-2x)$;
3° $f(x) = \exp\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$; 4° $f(x) = \exp(-3x+4)$.

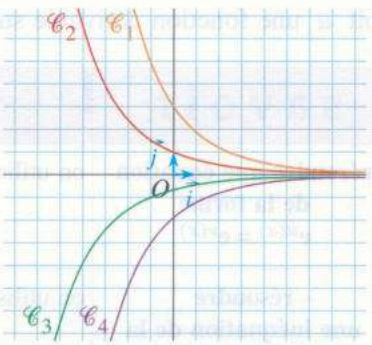
4 1° $f(x) = \exp(-2x+1)$; 2° $f(x) = \exp\left(x + \frac{1}{4}\right)$;
3° $f(x) = -2\exp(x-1)$; 4° $f(x) = -\frac{1}{3}\exp(-2x+4)$.

5 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$f' = 3f .$$
Exprimer $f(x)$ en fonction de x sachant que $f(0) = 2$.

6 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$f' = -2f .$$
Exprimer $f(x)$ en fonction de x sachant que $f(1) = 3$.

7 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$2f' = f .$$
Exprimer $f(x)$ en fonction de x sachant que $f(-1) = 2$.

8 Les courbes ci-dessous représentent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant une égalité de la forme :
$$f' = -\frac{1}{2}f .$$



Déterminer une équation de chacune de ces courbes.

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(x)$ en fonction de x.

1° $f' = 2f$ et $f(0) = 1$.
2° $f' = 2f$ et $f(0) = -3$.
3° $f' = -f$ et $f(1) = 2$.
4° $f' = \frac{1}{4}f$ et $f(2) = -1$.
5° $2f' = -f$ et $f(0) = -2$.
6° $2f' = 3f$ et $f(-1) = 0$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(x)$ en fonction de x.

1° $f' + 3f = 0$ et $f(0) = 1$.

2° $2f' + f = 0$ et $f(0) = -3$.

3° $f' + f = 0$ et $f(1) = 2$.

4° $2f' - \frac{3}{2}f = 0$ et $f(2) = -1$.

11 La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$f' = kf$, où k est un réel.

La droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(0 ; 2)$ et passe par $B(-3 ; 1)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

3 Propriétés algébriques de exp

12 Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^x \times e^{-x}$; $B = e^x + 2e^x$;

$C = (e^x)^3 e^{-2x}$; $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$.

13 Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^{2x} \times e^{-x}$; $B = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$;

$C = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$; $D = \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$.

14 Démontrer que, pour tout réel x :

$(e^{2x} - e^{-x})(1 + e^{-3x}) = (e^{3x} + 1)(1 - e^{-3x})e^{-x}$.

15 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1° Calculer $(f(x))^2 - (g(x))^2$.

2° Démontrer que :

$f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$ et $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

3° Exprimer $f(x+y)$ et $g(x+y)$ en fonction de $f(x)$, $f(y)$, $g(x)$ et $g(y)$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1° Démontrer que f est une fonction impaire.

2° Démontrer que $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$.

3° Exprimer $f(x+y)$ en fonction de $f(x)$ et $f(y)$.

17 1° Démontrer que, pour tout réel x :

$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$.

2° Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sqrt{e^{-x} + 3e^{-x}}$; $B = \sqrt{\dfrac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$.

2 Fonction exponentielle

1 Vrai-faux

18 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si $x \geqslant -2$, alors $e^x \geqslant \dfrac{1}{e^2}$.

2° L'équation $e^x + e^{2x-1} = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3° L'inéquation $e^x < 1$ a pour ensemble de solutions $]-\infty ; 0[$.

4° Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = e^{2x}$.

Il existe un unique point M de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

19 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les courbes représentatives des fonctions :

$x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ et $x \mapsto e^x$

ont la même tangente au point $A(0 ; 1)$.

2° La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2x} e^{x^2}$.

3° La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe d'équation $y = x + \dfrac{e^x - 2}{e^{2x} - 1}$.

4° Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) = x^{10} e^{-x}$ a pour limite 0.

2 Équations et inéquations

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1° $e^{3-x}=1$; **2°** $e^{2x+1}=\sqrt{e}$;

3° $(e^{x-1}+2)(e^{x+2}-1)=0$; **4°** $e^{2x-1}=e^{\frac{x}{2}+1}$.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1° $(e^x)^3=e^{x-1}$; **2°** $e^x=\sqrt{e^{x-1}}$;

3° $\dfrac{e^{-x}-3}{e^{-x}-5}=\dfrac{1}{2}$; **4°** $e^{\frac{2x-1}{x-2}}-e=0$.

22 **1°** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2X^2+3X-5=0 .$$

2° En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2e^{2x}+3e^x-5=0 .$$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1° $e^{6x}+2e^{3x}-3=0$; **2°** $e^x+e^{-x}=1$;

3° $e^x+e^{1-x}-(e+1)=0$; **4°** $2e^{-x}=3-e^x$.

24 **1°** Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution réelle et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

a) $e^x=3$; **b)** $e^x=\dfrac{1}{2}$.

2° Démontrer que, pour tout réel strictement positif m, l'équation $e^x=m$ admet une unique solution réelle.

Cette solution est notée **ln** m et appelée **logarithme népérien de** m .

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x-e^{-x}=2$; **b)** $e^x=3e^{-x}+2$.

Dans les exercices 25 à 27, résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes.*

25 **1°** $e^x<1$; **2°** $e^x\geqslant -2$;

3° $e^{-x}\leqslant 1$; **4°** $e^{2x-1}>\sqrt{e}$.

26 **1°** $1\leqslant 2-e^{x^2}$; **2°** $e^{-3x}<e^{x-3}$;

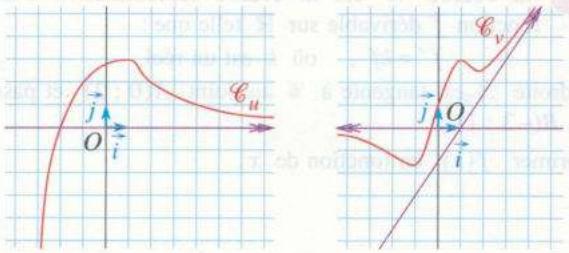
3° $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\geqslant\dfrac{1}{e^2}$; **4°** $e^{\frac{2x-1}{3x+1}}\geqslant\dfrac{1}{e^2}$.

27 **1°** $4e^{2x}<3e^x+1$; **2°** $\dfrac{2e^x-3}{e^x-3}<\dfrac{1}{2}$;

3° $e^x<e^{-x}+1$.

3 Détermination de limites

28 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont on connaît les courbes représentatives.



1° Indiquer, à l'aide du graphique, les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions u et v.

2° En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions :

$f=e^u$ et $g=e^v$.

29 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x\mapsto e^{-x}$; **b)** $f : x\mapsto xe^{-x}$;

c) $f : x\mapsto x+1-e^x$; **d)** $f : x\mapsto 2e^x-e^{2x}$;

e) $f : x\mapsto\sqrt{e^{2x}+1}$; **f)** $f : x\mapsto x(1+e^{-2x})$.

30 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux bornes de l'intervalle I donné :

a) $f : x\mapsto\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, avec $I=\mathbb{R}$;

b) $f : x\mapsto(x^2-2x+6)\,e^x$, avec $I=\mathbb{R}$;

c) $f : x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$, avec $I=]0\,;+\infty[$;

d) $f : x\mapsto e^{-x^2}$, avec $I=\mathbb{R}$.

31 Déterminer chacune des limites demandées :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{2+e^x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2e^x-1}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+2)\,e^{\frac{1}{x-1}}$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{e^{2x}+1}-e^x)$.

32 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux bornes de l'intervalle I donné :

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$, avec $I =]-1 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$, avec $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto e^{\frac{x+1}{2x-3}}$, avec $I = \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$.

33 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux bornes de l'intervalle I donné :

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+2}$, avec $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto (x+1)\, e^{\frac{x}{2}}$, avec $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{e^x+1}$, avec $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{e^{-x}-1}$, avec $I =]0 ; +\infty[$.

34 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux bornes de l'intervalle I donné :

a) $f : x \mapsto e^x - x^3 + 2x - 1$, avec $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto (x+1)\, e^x - 2$, avec $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto (x^2+1)\, e^{-\frac{x}{2}}$, avec $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto x e^{\frac{-1}{x}}$, avec $I =]0 ; +\infty[$.

La dérivabilité en 0 de la fonction exp a permis d'établir :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 .$$

35 ★ En utilisant l'encadré ci-dessus, déterminer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

36 ★ En utilisant l'encadré ci-dessus, déterminer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$; **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$.

4 Dérivées et primitives

Dans les exercices 37 et 38, déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions, sur l'intervalle I donné :

37 Avec $I = \mathbb{R}$:

1° a) $f : x \mapsto x^3 - e^3 + e^x$; **b)** $f : x \mapsto 4xe^x$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; **d)** $f : x \mapsto 2e^{3x} + e^{-2x}$;

2° a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

c) $f : x \mapsto (x^2+4)e^{-2x}$; **d)** $f : x \mapsto e^{x^2}$.

38 **a)** $f : x \mapsto 2e^{-3x} - 4e^{2x}$, avec $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$, avec $I =]0 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto e^{\frac{2x+3}{x-2}}$, avec $I =]2 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$, avec $I =]0 ; +\infty[$.

39 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}\right)e^{-x} .$$

1° Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2° Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

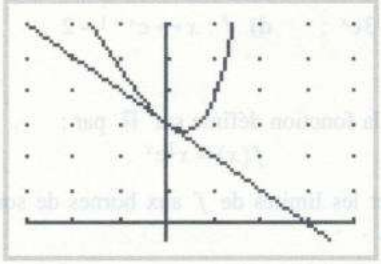
$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = -xe^{-x} .$$

40 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b + xe^x ,$$

où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous, on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1° Indiquer, à l'aide du graphique, $g(0)$ et $g'(0)$.

2° En déduire la valeur de chacune des constantes a et b.

41 Déterminer les primitives sur $I = \mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto e^{-x+3}$; **b)** $f : x \mapsto e^{2x}$; **c)** $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$.

42 Déterminer les primitives sur $I = \mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto (-2x+3)\, e^{-x^2+3x-1}$; **b)** $f : x \mapsto 3x e^{x^2-1}$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(3e^x+2)^2}$; **d)** $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$.

43 Déterminer par identification les réels α et β pour que la fonction :

$$F : x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f : x \mapsto (2x+1)\, e^{-x} .$$

44 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2-4)\, e^{2x} .$$

1° Déterminer les réels α, β, γ pour que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^{2x} ,$$

soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

5 Étude de fonctions

45 Écrire f comme composée de fonctions, l'une d'elles étant la fonction exponentielle.

En déduire (sans calculer de dérivée) les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal, en expliquant comment elle se déduit de la courbe de la fonction exponentielle.

a) $f : x \mapsto e^{|x|}$; **b)** $f : x \mapsto e^{x+4}$;

c) $f : x \mapsto -3e^x$; **d)** $f : x \mapsto e^{x-1} - 2$.

46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^x .$$

1° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° Étudier les variations de f.

3° Le plan étant muni d'un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction f.

47 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 2 + e^x .$$

1° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° En considérant f comme somme de deux fonctions, déterminer ses variations sur $\mathbb{R}$.

3° a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . (On expliquera la méthode utilisée.)

48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 4 .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2° Étudier le comportement de f en $+\infty$.

(On pourra factoriser $f(x)$ par e^x.)

3° a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4° Dresser le tableau complet des variations de f.

5° a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

6° Tracer la droite $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 5e^x - 6 .$$

1° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3° On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

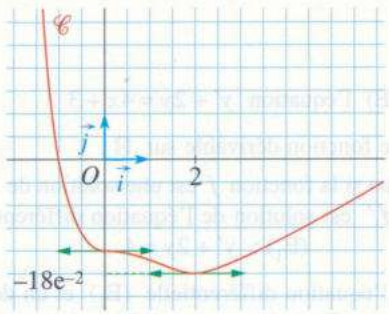
5° Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de f.

50 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, e^{-x} ,$$

où a, b, c et d sont des réels.

La courbe représentative de f, dans le plan muni d'un repère orthonormal, est donnée ci-dessous.



1° Établir graphiquement le tableau des variations de f.

2° À l'aide de certaines données du graphique, montrer que :

$$a=-1\ ,\quad b=-1\ ,\quad c=-2\quad \text{et}\quad d=-2\ .$$

3° Retrouver par le calcul les résultats figurant dans le tableau des variations trouvé en **1°**.

51 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par :

$$g(x)=e^{\frac{x-1}{x+2}}\ .$$

1° Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire des équations des asymptotes à la courbe représentant g dans le plan muni d'un repère.

2° Étudier les variations de g.

52 ★ On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+e^{1-x}\ .$$

1° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° a) Montrer que la droite Δ, d'équation $y=x$, est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, dans le plan muni d'un repère.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

3° Déterminer le tableau de variations de f.

4° Tracer la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

53 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{x^2-x-1}\ ;$$

on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1° Montrer que la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

2° a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déduire, des résultats précédents, celle en $+\infty$.

3° Étudier les variations de f sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

4° Dresser le tableau complet des variations de f.

5° a) Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les valeurs exactes de ces solutions.

54 **A. Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;2{,}1]$ par :

$$f(x)=3+(x-2)\,e^x\ .$$

1° Établir le tableau des variations de f.

2° Calculer, à 10^{-2} près, les images de :

$$0\ ;\ 0{,}25\ ;\ 0{,}6\ ;\ 1\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2\ ;\ 2{,}1.$$

Tracer, dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R}_1$ (unité : 5 cm), la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

B. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;2{,}1]$ par :

$$F(x)=3x+3+(x-3)e^x\ .$$

1° Établir, en utilisant les résultats de la partie **A.**, les variations de F.

2° Calculer, à 10^{-2} près, les images de :

$$0\ ;\quad 0{,}25\ ;\quad 0{,}6\ ;\quad 1\ ;\quad 2\ ;\quad 2{,}1.$$

Tracer, dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\mathscr{R}_2$ d'unités 5 centimètres sur l'axe des abscisses et 10 centimètres sur l'axe des ordonnées, la courbe représentative Γ de F.

C. Application

Un laboratoire fabrique un produit pharmaceutique ; sa capacité de production ne peut excéder 2,1 tonnes de produit.

On note x la masse, en tonnes, de produit fabriqué.

Le coût de fabrication, en millions d'euros, de x tonnes de produit est égal à $F(x)$, F étant la fonction définie dans la partie **B**.

Si on note k le prix de vente, en millions d'euros, d'une tonne de produit, alors $P(x)=kx-F(x)$ donne le profit (ou la perte), en millions d'euros, réalisé(e) après la fabrication et la vente de x tonnes de produit.

On suppose $k=3$.

1° Tracer, dans le plan rapporté au repère $\mathscr{R}_2$, la droite d'équation $y=3x$ et déterminer graphiquement le signe de $P(x)$.

2° Étudier les variations de la fonction P.

En déduire la production x_0 pour laquelle le profit est maximal.

3 Équation différentielle $y' = ay + b$

1 Vrai-faux

55 Soit (E) l'équation différentielle $y' = 3y - 6$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto -6 + Ke^{3x}$, avec K réel.

2° La fonction constante $x \mapsto 2$ est solution de l'équation différentielle (E).

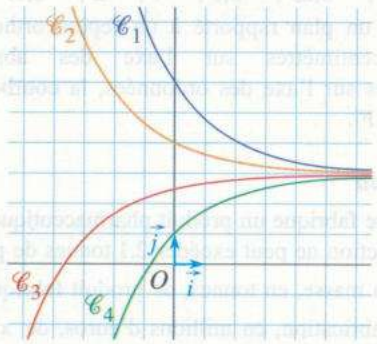
3° Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto 2 + Ke^{3x}$, avec K réel.

4° L'équation (E) admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 3$.

2 Résolution d'équations différentielles

56 Les courbes ci-dessous représentent des solutions d'une équation différentielle de la forme :

$2y' = -y + b$, où b est un réel fixé.



Déterminer le réel b et une équation de chacune de ces courbes.

57 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1° $y' = 2y + 1$; **2°** $3y' - 2y = 1$; **3°** $y' + 3y = 2$.

58 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

1° $y' = -2y + 5$ et $y(0) = 2$;

2° $5y' + 2y = 1$ et $y(1) = -1$;

3° $3y' = y - 3$ et $y(-1) = 3$.

59 Soit (E) l'équation $y' + 2y = 4x + 3$.

1° Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si la fonction f est une solution de (E), alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle :

(E_1) : $y' + 2y = 4$.

2° Résoudre l'équation différentielle (E_1) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 2x + \frac{1}{2} + Ke^{-2x}$$

où K est une constante réelle.

3° Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

60 Soit l'équation différentielle :

$y' = -3y + 4e^{-2x}$. (E).

1° Déterminer le réel λ tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \lambda e^{-2x}$$

soit solution de (E).

2° Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle :

$y' = -3y$. (E')

3° Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').

4° En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

61 **1°** Résoudre l'équation différentielle :

$y' - 2y = 0$ **(1)**

2° Déterminer un polynôme du second degré P solution de l'équation différentielle :

$y' - 2y = 8x^2 - 8x$ **(2)**

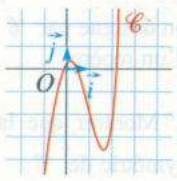
3° Démontrer que les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2,$$

où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle **(2)**.

4° La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une des fonctions f_k.

Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.



4 Problèmes

62 Élimination d'un médicament

À l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3 mL d'un médicament.

Une étude du processus d'élimination de ce médicament a permis d'observer qu'à chaque instant t, exprimé en heures, la vitesse d'élimination de ce produit est proportionnelle à la quantité $f(t)$, exprimée en mL, de médicament encore présente dans le sang du patient, c'est-à-dire qu'il existe une constante strictement positive k telle que :

$$f'(t) = -kf(t) .$$

1° Un dosage effectué au bout de trente minutes, c'est-à-dire à l'instant $\frac{1}{2}$, permet d'estimer la quantité de médicament présente dans le sang à 2,85 mL.

En déduire une approximation de $f'(0)$, puis de k.

2° On suppose désormais que $k = 0{,}1$.

a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t.

b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12]$.

c) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

3° Déterminer graphiquement, à 10^{-1} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 4 h, puis au bout de 5 h 30 min.

4° On procède à une nouvelle injection de 3 mL au bout de 7 h.

a) À partir de la courbe $\mathscr{C}$, représenter la courbe $\mathscr{C}_1$ représentant la quantité de médicament présente dans le sang du patient après la seconde injection.

b) Utiliser ce graphique pour déterminer au bout de combien de temps, le sang du patient ne contient plus que 1 mL de médicament.

63 Parachutage

Un objet relié à un parachute est largué à l'instant $t = 0$ en un point O.

On admet que sa trajectoire est verticale et que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de pénétration dans l'air et on note k le coefficient de proportionnalité.



À chaque instant t, exprimé en secondes, on désigne par $v(t)$ la vitesse de l'objet et par $h(t)$ son altitude.

1° Démontrer que :

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg \quad (E),$$

où m est la masse totale, en kg, de l'objet et du parachute et g le coefficient d'accélération de la pesanteur.

2° On prend :

$$m = 8 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad k = 25 \text{ unités S.I.}$$

On suppose que l'altitude, en mètres, du point O est $h(0) = 100$ et que la vitesse initiale $v(0)$ est nulle.

a) Déterminer $v(t)$ en fonction de t.

b) En déduire que :

$$h(t) = 100 - 3{,}2t - 1{,}024(e^{-3{,}125t} - 1) .$$

c) Démontrer que l'équation :

$$100 - 3{,}2t - 1{,}024(e^{-3{,}125t} - 1) = 0$$

admet une unique solution t_1.

En déduire une valeur approchée, à 1 seconde près, de la durée de la chute et une valeur approchée, à $0{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, de la vitesse à l'arrivée au sol.

3° Reprendre la question précédente, en supposant que l'objet est largué d'une altitude de 500 m.

4° Reprendre la question **2°**, en supposant que l'objet est largué avec une vitesse verticale de $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5° On se place dans le cas général.

On suppose que l'objet est largué à une altitude h_0 avec une vitesse verticale v_0.

On désigne par t_1 la durée de chute et v_1 la vitesse de l'objet lorsqu'il arrive au sol.

a) Démontrer que, pour tout réel t de $[0 ; t_1]$:

$$v(t) = (v_0 - 3{,}2)e^{-3{,}125t} + 3{,}2$$

et $h(t) = h_0 + (0{,}32v_0 - 1{,}024)(e^{-3{,}125t} - 1) - 3{,}2t$.

b) Dans cette question, on suppose que $v_0 \leqslant 3{,}2$.

Justifier que :

$$v_1 \leqslant 3{,}2 .$$

c) Dans cette question, on suppose que :

$$3{,}2 \leqslant v_0 \leqslant 100 \quad \text{et} \quad h_0 \geqslant 50 .$$

Démontrer que, pour tout réel t de $[0 ; t_1]$:

$$h(t) \geqslant 10 - 3{,}2t .$$

En déduire que :

$$t_1 \geqslant 3 \quad \text{et} \quad v_1 \leqslant 3{,}21 .$$

64 ★ On veut étudier la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2 + 2e^{-\frac{1}{2}x} .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° Étude de f'

a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

b) Étudier le sens de variation de f' .

Déterminer la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(0)$.

c) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel α strictement positif pour lequel f' s'annule.

Vérifier que $0{,}4 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5$.

d) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

2° Comportement de f en $+\infty$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) On pose, pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$d(x) = f(x) - (x^2 - 2) .$$

Déterminer le signe de $d(x)$ et sa limite lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

3° Variations de f

a) Donner le tableau des variations de f.

b) Donner, en le justifiant, le signe de $f(\alpha)$.

4° Représentations graphiques

Tracer la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2$ et la courbe $\mathscr{C}$ sur un même graphique.

65 ★★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité graphique est de 2 cm sur (Ox) et de 10 cm sur (Oy) .

1° a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) .$$

On rappelle que, pour tous les réels a et b , on a :

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos (a + b) .$$

c) Résoudre sur $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 .$$

En déduire le signe de $f'(x)$ pour x dans $[0 ; 2\pi]$.

d) Donner le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$. On précisera $f'(0)$ et $f'(2\pi)$.

2° Dans le repère précédent, on note Γ et Γ' les courbes d'équations respectives :

$$y = e^{-x} \quad \text{et} \quad y = -e^{-x} .$$

a) Déterminer les abscisses sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacune des courbes Γ et Γ' .

b) Vérifier qu'en chacun de ces points communs les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, d'une part, et $\mathscr{C}$ et Γ' , d'autre part, ont la même tangente.

c) Tracer sur $[0 ; 2\pi]$ les trois courbes $\mathscr{C}$, Γ et Γ' .

(D'après BAC)

66 ★★★ On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-\frac{1}{x}} .$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Variations de f

a) Déterminer la dérivée f' de f sur $]0 ; +\infty[$.

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2° Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(u) = 1 - (1 + u)e^{-u} .$$

a) Calculer la dérivée de φ .

b) Prouver que, pour tout $u \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u .$$

c) En déduire que, pour tout $u \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

(Pour la seconde inégalité, on pourra étudier la fonction $u \mapsto \varphi(u) - \frac{u^2}{2}$.)

3° Étude de f au voisinage de $+\infty$

a) À l'aide de **(1)**, établir que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x} .$$

b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ .

4° Étude de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point

Soit a un élément de $]0 ; +\infty[$ et T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a .

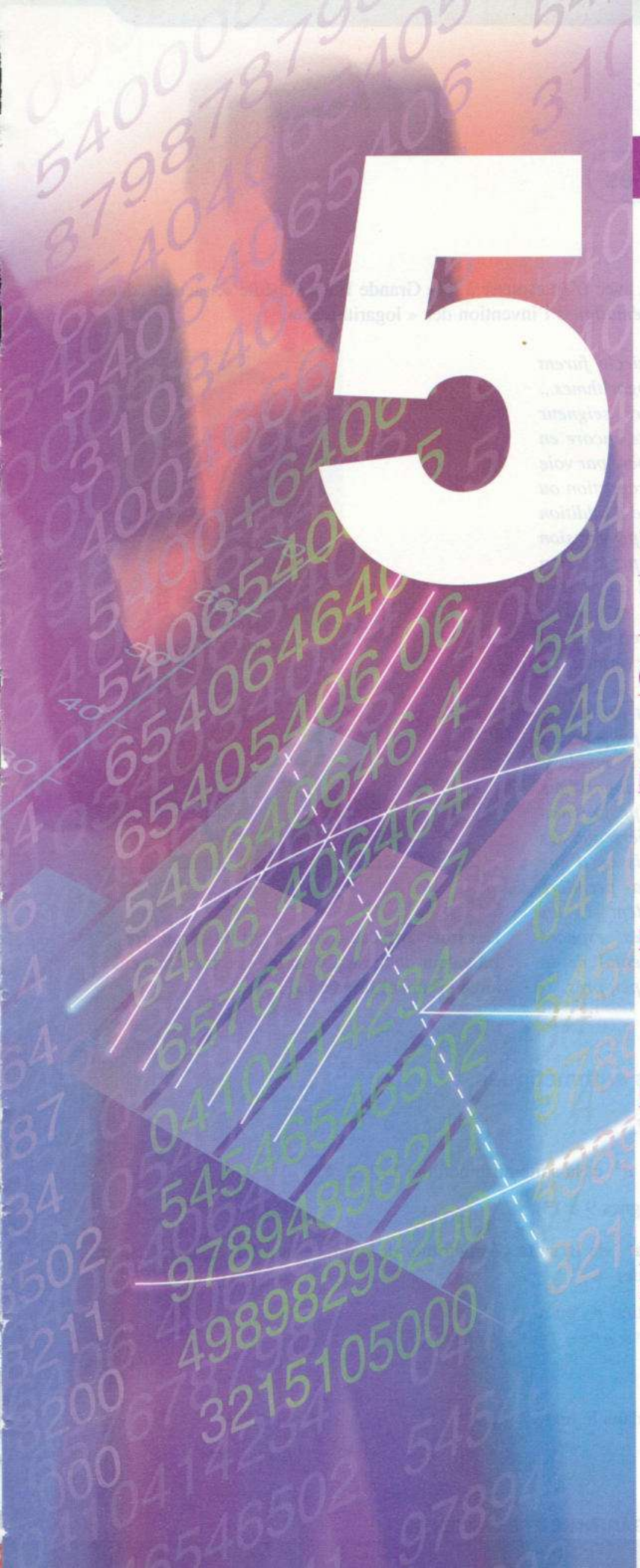
a) Déterminer une équation de T_a .

b) Montrer que T_a coupe l'axe des abscisses (Ox) au point d'abscisse $\frac{a}{1 + a + a^2}$.

5° Tracé de $\mathscr{C}$

Tracer $\mathscr{C}$ et Δ . On précisera les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 1, $\frac{1}{3}$ et 3.

(D'après BAC)



CHAPITRE

5

Fonctions logarithme et exponentielle

Fonction ln p. 118

- définir la fonction ln
- caractériser algébriquement les fonctions logarithmes

Étude de ln p. 119

- connaître le sens de variation et les limites de ln
- comprendre le lien entre ln et exp

Dérivées et primitives p. 122

- savoir calculer la dérivée de $\ln u$ et déterminer une primitive de $\frac{u'}{u}$

Puissance d'un réel strictement positif p. 122

- connaître la définition de a^b lorsque $a > 0$ et b non entier
- connaître la racine n-ième d'un réel positif

Histoire et logarithmes

Leur invention

L'abbé BOSSUT (1730-1814) qui collabora avec D'ALEMBERT à la « Grande Encyclopédie », raconte, dans son *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* l'invention des « logarithmes ».

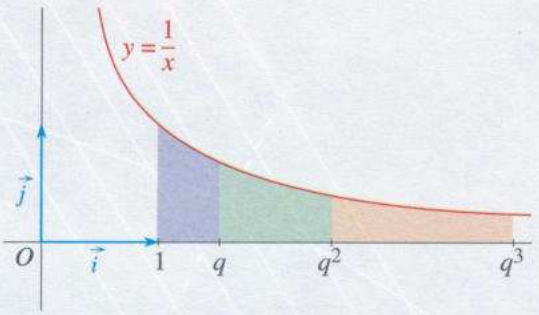
Les premières années du dix-septième siècle furent marquées par la belle découverte des Logarithmes... Cette invention est due au baron de Neper, seigneur écossais d'une illustre maison qui subsiste encore en Angleterre... Il observa que tout ce qui s'opère par voie de multiplication et de division dans la proportion ou progression géométrique, s'opère par voie d'addition et de soustraction dans la proportion ou progression arithmétique ; par exemple : dans la progression géométrique, le quatrième terme est égal au produit des moyens divisé par le premier terme et dans la progression arithmétique, le quatrième terme est la somme des deux moyens moins le premier terme.

Le choix de la progression est également arbitraire, quant à la théorie. Neper prit pour progression arithmétique des logarithmes celle des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4... faisant répondre le logarithme zéro à l'unité de numération de la progression géométrique ; et il régla celle-ci de manière que ses termes étant représentés par les abscisses d'une hyperbole équilatère, dans laquelle la première abscisse et la première ordonnée valent 1, les logarithmes le sont par la suite des espaces hyperboliques. Alors le nombre fondamental de la progression géométrique vaut 2,718 28 à peu près.



© Mary Evans/Explorer

NEPER (1550-1617)



Les trois surfaces colorées ont la même aire. La valeur de la raison est choisie pour que ces aires prennent la valeur 1.

Suites géométriques et suites arithmétiques

On considère un réel a strictement positif.

1 Soit la suite géométrique a, a^2, a^3, a^4 et la suite arithmétique 1, 2, 3, 4.

Vérifier l'affirmation du texte ci-dessus (lignes 9 à 13).

2 Soit f la fonction qui, à tout terme a^n de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison a strictement positive, fait correspondre l'entier n.

Vérifier que, pour tout entier n et tout entier p, on a :

$$f(a^n \times a^p) = f(a^n) + f(a^p) .$$

Combien vaut $f(1)$?

3 Quelle est la raison choisie par NEPER dans le texte ?
Quel est le logarithme de e ?

Une équation fonctionnelle

Le but de cette activité est de déterminer toutes les fonctions f qui sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et vérifient :

pour tous réels a et b strictement positifs, $f(a\times b)=f(a)+f(b)$.

1 Calculer $f(1)$.

2 **a)** Soit a un réel strictement positif. À partir de l'égalité $f(a)+f(x)=f(ax)$, démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x)=af'(ax)$.

b) En déduire qu'il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$f'(a)=k\times\frac{1}{a}\ .$$

3 On appelle ln la primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Démontrer que toutes les fonctions vérifiant $f(a\times b)=f(a)+f(b)$ sont de la forme $k\times\ln$ (k réel).

4 **Étude de la réciproque**

Soit a un réel strictement positif et F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\ln(ax)$.

a) Démontrer que F est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

b) En déduire qu'il existe un réel c tel que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on ait $F(x)=\ln x+c$.
Déterminer le réel c en donnant à x la valeur 1.

c) En déduire que la fonction ln vérifie :

pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$,

et qu'il en est de même pour les fonctions $k\times\ln$, où k est un réel quelconque.

Les fonctions, non nulles, solutions du problème posé, sont les **fonctions logarithmes**.

Un cas particulier : les logarithmes décimaux

Le système de numération étant un système en base 10, le mathématicien anglais Briggs (1561-1630) privilégie la fonction logarithme, notée log , telle que $\log(10)=1$.

1 Calculer $\log(100)$, $\log(1\,000)$ et, d'une façon générale, $\log(10^n)$.

2 En 1624, Briggs publie des tables donnant la partie décimale des logarithmes des nombres de 1 à 10 000.

On a ci-contre un extrait de ces tables, pour les nombres de 1 à 100, encore utilisées en 1970.

En utilisant la table, trouver $\log 7$, $\log 11$ et $\log 77$.
Vérifier que $\log 77=\log 7+\log 11$.

3 Expliquer pourquoi, dans les tables, on peut se contenter de la partie décimale du logarithme décimal.

Donner $\log 9{,}9$, puis $\log 0{,}099$.
Confronter ces résultats à ceux fournis par une calculatrice.

TABLE I

LOGARITHMES

DES NOMBRES ENTIERS

DE 1 à 10000.

N	Log	N	Log	N	Log	N	Log
1	0,00 000	26	1,41 497	51	1,70 757	76	1,88 081
2	0,30 103	27	1,43 136	52	1,71 600	77	1,88 649
3	0,47 712	28	1,44 716	53	1,72 428	78	1,89 209
4	0,60 206	29	1,46 240	54	1,73 239	79	1,89 763
5	0,69 897	30	1,47 712	55	1,74 036	80	1,90 309
6	0,77 815	31	1,49 136	56	1,74 819	81	1,90 849
7	0,84 510	32	1,50 515	57	1,75 587	82	1,91 381
8	0,90 309	33	1,51 851	58	1,76 343	83	1,91 908
9	0,95 424	34	1,53 148	59	1,77 085	84	1,92 428
10	1,00 000	35	1,54 407	60	1,77 815	85	1,92 942
11	1,04 139	36	1,55 630	61	1,78 533	86	1,93 450
12	1,07 918	37	1,56 820	62	1,79 239	87	1,93 952
13	1,11 394	38	1,57 978	63	1,79 934	88	1,94 448
14	1,14 613	39	1,59 106	64	1,80 618	89	1,94 939
15	1,17 609	40	1,60 206	65	1,81 291	90	1,95 424
16	1,20 412	41	1,61 278	66	1,81 954	91	1,95 904
17	1,23 045	42	1,62 325	67	1,82 607	92	1,96 379
18	1,25 527	43	1,63 347	68	1,83 251	93	1,96 848
19	1,27 875	44	1,64 345	69	1,83 885	94	1,97 313
20	1,30 103	45	1,65 321	70	1,84 510	95	1,97 772
21	1,32 222	46	1,66 276	71	1,85 126	96	1,98 227
22	1,34 242	47	1,67 210	72	1,85 733	97	1,98 677
23	1,36 173	48	1,68 124	73	1,86 332	98	1,99 123
24	1,38 021	49	1,69 020	74	1,86 923	99	1,99 564
25	1,39 794	50	1,69 897	75	1,87 506	100	2,00 000

1 Fonction logarithme népérien

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle, dont une seule s'annule en 1.

1.1 Fonction ln

définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. On note cette fonction ln.

Remarques

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0 ; +\infty[$.
- On a $\ln 1 = 0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout réel x dans $]0 ; +\infty[$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

1.2 Équation fonctionnelle caractéristique

théorème

Les fonctions f dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui, pour tous réels x et y, vérifient :

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

sont les fonctions $k \times \ln$, où k est une constante réelle.

Ce théorème a été établi dans l'*Activité* 1.

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n, on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration

Voir Exercices 2 à 6

- Comme $b \times \frac{1}{b} = 1$, on a $\ln\left(b \frac{1}{b}\right) = \ln 1$, donc $\ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$. Or $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$, donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = 2 \ln \sqrt{a}$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Exemples

- Soit $A = \ln 81 + \ln 3\sqrt{3}$. On a $\ln 81 = \ln 3^4 = 4 \ln 3$, $\ln 3\sqrt{3} = \ln 3 + \ln \sqrt{3}$ et $\ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$.

Donc $A = 4 \ln 3 + \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{11}{2} \ln 3$.

- Pour x dans $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$, $\frac{x-1}{x+2}$ est strictement positif, donc $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est défini, mais l'égalité $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$ n'est valable que pour x dans $]1 ; +\infty[$.

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Sens de variation

propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln a < \ln b \iff a < b .$$

Démonstration

Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) > 0$, car $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$; donc ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Conséquences

- $\ln x < 0 \iff x \in]0 ; 1[$ • $\ln x = 0 \iff x = 1$ • $\ln x > 0 \iff x \in]1 ; +\infty[$
- Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln a = \ln b \iff a = b .$$

Exemple

Soit l'inéquation $\ln(5 - x) > 2 \ln(x + 1)$.

Elle est définie pour tout x vérifiant $x + 1 > 0$ et $5 - x > 0$, c'est-à-dire sur $I =]-1 ; 5[$.
Pour tout x dans I, on a :

$$\ln(5 - x) > 2 \ln(x + 1) \iff \ln(5 - x) > \ln(x + 1)^2$$
$$\iff 5 - x > (x + 1)^2 ,$$

car ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
Or $5 - x > (x + 1)^2 \iff x^2 + 3x - 4 < 0$ et cette inéquation a pour ensemble de solutions $]-4 ; 1[$.

Les solutions de l'inéquation donnée sont les réels de $]-4 ; 1[$ qui appartiennent à I. Ainsi, l'inéquation a pour ensemble de solutions $]-1 ; 1[$.

2.2 Limites en $+\infty$ et en 0

propriété

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Démonstration

• Il s'agit de montrer que si A est un réel quelconque, alors tout intervalle $I =]A ; +\infty[$ contient les réels $\ln x$ pour x assez grand.

Comme $\ln 10 > 0$, la suite arithmétique $(n \ln 10)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite infinie ; donc, à partir d'un certain rang p , on a $n \ln 10 > A$.
Si $x > 10^p$, alors $\ln x > \ln(10^p)$, car ln est strictement croissante ; donc $\ln x > p \ln 10 > A$.
L'intervalle I contient tous les réels $\ln x$ dès que $x > 10^p$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

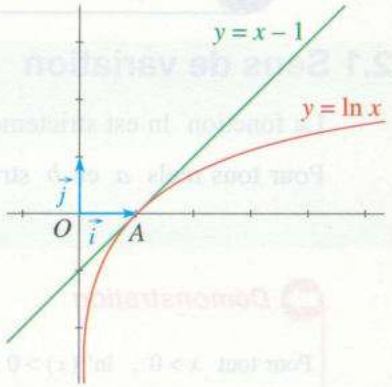
• Lorsque x tend vers 0, avec $x > 0$, alors $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

On a $\ln x = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln X$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = -\infty$.

2.3 Courbe représentative

Tableau des variations de la fonction ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	‖	$+$	1	$-$	
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$



La courbe représentative de la fonction ln admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

La droite d'équation $y=x-1$ est tangente à la courbe en $A(1\,;0)$, car le nombre dérivé de la fonction ln en 1 est $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$.

Donc, par définition, on a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=1$. Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1\ .$$

Voir Exercice 40

La fonction $h\mapsto h$ est la meilleure approximation affine de la fonction $h\mapsto \ln(1+h)$ au voisinage de 0. On a :

pour h voisin de 0, $\ln(1+h)\approx h$.

2.4 Croissance comparée

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^n\ln x=0\ .$$

On retiendra que « **en $+\infty$ et en 0, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$** ».

Exemples

Voir T.D. 1 ; Exercices 47 à 51

• Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ln x$. On peut écrire $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\,\dfrac{\ln x}{x}$.

$\dfrac{x^2}{x^2+1}$ se comporte comme $\dfrac{x^2}{x^2}$ en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$.

Or en $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

• Soit g la fonction définie sur $[0\,;1[$ par $g(x)=(x^2-1)\ln(1-x)$.

En posant $t=1-x$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} t=0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{t\to 0}(-2t+t^2)\ln t=0$, car $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t=0$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^2\ln t=0$.

2.5 Liens avec la fonction exponentielle — proposition

• Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
De plus, cette solution est le réel e^m.

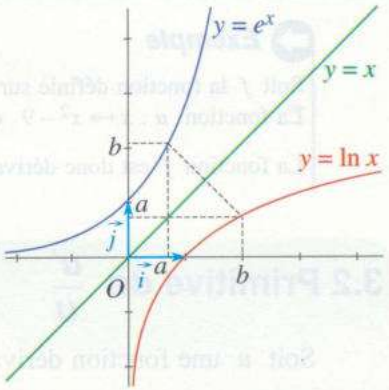
• Pour tout a dans $\mathbb{R}$ et pour tout b dans $]0 ; +\infty[$, on a :
$$\ln(e^a) = a \quad \text{et} \quad e^{\ln b} = b .$$

Remarques

• Comme $e^1 = e$, on a $\ln e = 1$.

• Pour tout a dans $\mathbb{R}$ et pour tout b dans $]0 ; +\infty[$, on a :
$$e^a = b \iff \ln b = a .$$
On dit que la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont **réciproques** l'une de l'autre.

• Les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln x$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Démonstration

Voir Exercices 11 à 16

• La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et prend toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.
La preuve du fait que $\alpha = e^m$ est proposée à l'*Exercice* 9.

• Pour a dans $\mathbb{R}$, le réel e^a est solution de l'équation $\ln x = a$, donc $\ln(e^a) = a$.
Pour b dans $]0 ; +\infty[$, b est l'unique solution de l'équation $\ln x = \ln b$, donc $b = e^{\ln b}$.
On en déduit sans difficulté l'équivalence $e^a = b \iff \ln b = a$.

Exemples

• Soit l'équation $\ln(x-2) = 3$.

Elle est définie sur $I =]2 ; +\infty[$. On a $\ln(x-2) = 3 \iff x - 2 = e^3 \iff x = 2 + e^3$.
Comme $2 + e^3$ est bien un élément de I, l'équation proposée admet l'unique solution $2 + e^3$.

• Soit l'équation $e^{2x-1} = 3$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$. On a :
$$e^{2x-1} = 3 \iff 2x - 1 = \ln 3 \iff x = \frac{1 + \ln 3}{2} .$$
L'équation proposée admet l'unique solution $\dfrac{1 + \ln 3}{2}$.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; comme f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$, avec $m \in]0 ; +\infty[$, admet un unique antécédent $x = \ln(e^m - 1)$.

Les fonctions $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to]0 ; +\infty[\\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} g :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(e^x - 1) \end{cases}$ sont réciproques.

3 Dérivées et primitives

Le théorème de dérivation d'une fonction composée permet d'énoncer le théorème suivant.

3.1 Dérivée de ln *u*

propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, notée $\ln u$, est dérivable sur I et on a $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple

Voir Exercices 53 à 55

Soit f la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.
La fonction $u : x \mapsto x^2 - 9$ est dérivable et strictement positive sur $]3 ; +\infty[$; on a $u'(x) = 2x$.

La fonction f est donc dérivable sur $]3 ; +\infty[$ et, pour tout x de $]3 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$.

3.2 Primitive de $\dfrac{u'}{u}$

propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I.

Une primitive sur l'intervalle I de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction $\ln|u|$.

Démonstration

Voir Exercices 59 à 61

Comme u est continue sur I (car elle est dérivable) et ne s'annule pas sur I, u ne change pas de signe sur I.

- Si $u > 0$ sur I, $|u| = u$ et $(\ln|u|)' = (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Si $u < 0$ sur I, $|u| = -u$ et $(\ln|u|)' = (\ln(-u))' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[4 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{7 - 3x}$.

f est continue sur $[4 ; +\infty[$, donc elle admet des primitives sur $[4 ; +\infty[$.
La fonction $x \mapsto 7 - 3x$ est dérivable sur $[4 ; +\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.

Comme $u'(x) = -3$, on peut écrire $f(x) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f sur $[4 ; +\infty[$ est $F : x \mapsto -\dfrac{2}{3}\ln|7 - 3x|$.

Comme $7 - 3x < 0$ sur $[4 ; +\infty[$, on a $F : x \mapsto -\dfrac{2}{3}\ln(3x - 7)$.

4 Puissances d'un réel strictement positif

Soit a un réel strictement positif et n un entier relatif.
On sait que $\ln(a^n) = n \ln a$; donc $a^n = e^{n \ln a}$.
De même, comme $\ln e = 1$, si x est un réel quelconque, on a $e^x = e^{x \ln e}$.
Ces constatations nous conduisent à la définition suivante.

4.1 Définition

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$.

Exemples

• $3^{1,2} = e^{1,2 \ln 3} \approx 3,737$ à 10^{-3} près.

• $10^{2\sqrt{3}-1} = e^{(2\sqrt{3}-1)\ln 10} \approx 291,14$ à 10^{-2} près.

Règles de calcul

Pour tous les réels a et a' strictement positifs et pour tous les réels b et b', on a :

• $\ln(a^b) = b \ln a$ • $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$ • $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$

• $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ • $(aa')^b = a^b a'^b$ • $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$

Voir Exercices 70 à 72

4.2 Racine n-ième d'un réel positif — définition

Pour tout réel positif a et tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif b tel que $b^n = a$. Le réel b est noté $\sqrt[n]{a}$ et s'appelle la racine n-ième du réel positif a. On a :

$\sqrt[n]{0} = 0$ et, pour $a > 0$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration

• **Si $a = 0$** : comme $n \geqslant 1$, $b^n = 0 \iff b = 0$. • **Si $a > 0$** : $b^n = a \iff (b^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \iff b = a^{\frac{1}{n}}$.

4.3 Fonction exponentielle de base a — définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle de base a.

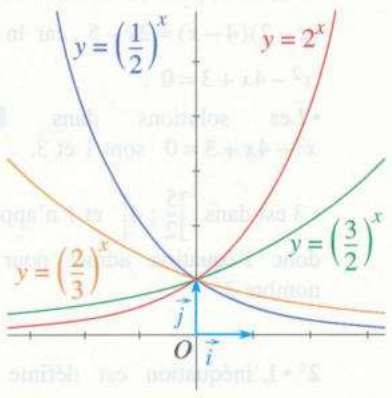
Pour tout réel x, $f_a(x) = e^{x \ln a}$ est de la forme e^u, avec $u : x \mapsto x \ln a$, donc f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a'(x) = (\ln a)\, e^{x \ln a} = (\ln a)\, a^x$.
Pour tout réel x, $a^x > 0$; on a donc :

si $0 < a < 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

si $a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$



Exemples

Voir Exercice 75

Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Si $1 < a$, alors $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

1 Résolution d'une équation ou d'une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1° $\ln(x-2)+\ln(4-x)=\ln(2x-5)$;

2° $\ln(1-x)+\ln(-3-2x)\leqslant\ln 102$;

3° $\ln(2x+1)-\ln x\leqslant\ln(4-x)$.

• Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation avec ln :

• on détermine l'ensemble D sur lequel l'équation ou l'inéquation est définie ;

• on utilise les propriétés algébriques de la fonction ln pour les mettre sous la forme :

$$\ln(a(x))=\ln(b(x)) \quad \text{ou} \quad \ln(a(x))\leqslant\ln(b(x)) ,$$

qui se ramènent à $a(x)=b(x)$ ou $a(x)\leqslant b(x)$;

• on résout cette équation ou cette inéquation ;

• parmi les valeurs trouvées, on ne retient que celles qui sont dans D.

1° • Comme le logarithme ne s'applique qu'aux réels strictement positifs, l'équation est définie pour tout x vérifiant $x-2>0$, $4-x>0$ et $2x-5>0$,

c'est-à-dire $x>2$, $x<4$ et $x>\dfrac{5}{2}$.

Ainsi, $D=\left]\dfrac{5}{2}\,;4\right[$.

• Pour tout réel x de D, l'équation équivaut successivement à :

$\ln[(x-2)(4-x)]=\ln(2x-5)$

$(x-2)(4-x)=2x-5$, car $\ln a=\ln b \iff a=b$,

$x^2-4x+3=0$.

• Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2-4x+3=0$ sont 1 et 3.

• 3 est dans $\left]\dfrac{5}{2}\,;4\right[$ et 1 n'appartient pas à $\left]\dfrac{5}{2}\,;4\right[$, donc l'équation admet pour unique solution le nombre 3.

2° • L'inéquation est définie pour $1-x>0$ et $-3-2x>0$, soit pour $x<1$ et $x<-\dfrac{3}{2}$.

Ainsi, $D=\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right[$.

• Pour tout réel x de D, l'inéquation s'écrit :

$$\ln((1-x)(-3-2x))\leqslant\ln 102 .$$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, l'inéquation est équivalente à :

$$(1-x)(-3-2x)\leqslant 102 ,$$

soit à $2x^2+x-105\leqslant 0$.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2+x-105\leqslant 0$ est l'intervalle $I=[-7{,}5\,;7]$.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intersection des intervalles I et D, c'est-à-dire $[-7{,}5\,;-1{,}5[$.

3° • L'inéquation est définie pour :

$$2x+1>0 , \quad x>0 \quad \text{et} \quad 4-x>0 ,$$

c'est-à-dire pour $x>-\dfrac{1}{2}$, $x>0$ et $x<4$.

Ainsi, $D=]0\,;4[$.

• Pour tout réel x de D, l'inéquation équivaut successivement à :

$\ln(2x+1)\leqslant\ln x+\ln(4-x)$

$\ln(2x+1)\leqslant\ln x(4-x)$

$2x+1\leqslant x(4-x)$, car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

$(x-1)^2\leqslant 0$

• Cette dernière inéquation admet 1 comme unique solution.

• 1 est un élément de D, donc l'inéquation a 1 pour unique solution.

2 Limites de fonctions avec ln

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} \ln x$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$; **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$; **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$.

• Méthodes

Pour déterminer une limite comportant ln :

• on utilise les théorèmes sur les limites (opérations, composition) dans les cas non indéterminés.

• sinon, on se ramène, par changement de variable, au calcul d'une limite en $+\infty$ et on utilise la croissance comparée des fonctions ln , $x \mapsto x^n$ et exponentielle.

a) D'après le théorème sur les limites d'une fonction rationnelle en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right) = 3$ et comme $\lim\limits_{x \to 3} \ln x = \ln 3$, par le théorème sur les fonctions composées, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right) = \ln 3 .$$

b) En $+\infty$, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ se comporte comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} \ln x$ se comporte comme $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln x = 0 .$$

c) On est en présence d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ » .

Pour se ramener au voisinage de $+\infty$, on pose :

$$t = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

On a alors $\sqrt{x} \ln x = \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{1}{t^2} = -\dfrac{\ln t^2}{t} = -2\dfrac{\ln t}{t}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{2 \ln t}{t}\right) = 0 .$$

d) On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .

En posant $t = \ln x$, on a :

$$x = \mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad \frac{(\ln x)^3}{x} = \frac{t^3}{\mathrm{e}^t} .$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^3}{\mathrm{e}^t} = 0$,

car $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^3} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0 .$$

e) On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .

Comme, pour tout réel x , $2^x = \mathrm{e}^{x \ln 2}$, on pose :

$$t = x \ln 2 .$$

On a $\dfrac{2^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x \ln 2}}{x^2}$

$$= \frac{\mathrm{e}^t}{\left(\dfrac{t}{\ln 2}\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} \times (\ln 2)^2 .$$

Or on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ et, de plus, $(\ln 2)^2 > 0$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty .$$

3 Recherche de primitives

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \tan x$ sur $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$;

b) $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$ sur $I = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$ $\left(\text{on écrira } f(x) \text{ sous la forme } ax + b + \frac{c}{2x+1}\right)$;

c) $f : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 3)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

• Méthode

Pour déterminer une primitive d'un quotient ou d'un produit sur un intervalle I, on peut chercher à faire apparaître des fonctions de la forme $u'u^\alpha$, où u est une fonction dérivable sur I, et utiliser les résultats suivants :

• si u ne s'annule pas sur un intervalle I, alors $\ln|u|$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I ;

• si u ne s'annule pas sur I et n entier tel que $n \neq -1$,

alors $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ sur I.

a) Pour tout réel x de I, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Si on pose $u(x) = \cos x$, alors $u'(x) = -\sin x$,

donc $f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$.

De plus, $\cos x > 0$ sur I, donc les primitives de la fonction f sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions :

$$F : x \mapsto -\ln(\cos x) + k,$$

où k est une constante réelle.

b) f est une fonction rationnelle continue sur I.

On doit avoir, pour tout réel x de I :

$$f(x) = \frac{2ax^2 + (a+2b)x + (b+c)}{2x+1}.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = 3 \\ b + c = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Pour tout x élément de I, $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x+1}$.

De plus, $\frac{3}{2x+1} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = 2x + 1$,

donc la fonction $x \mapsto \frac{3}{2x+1}$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}\ln|2x+1|$.

Or $2x + 1 < 0$ pour x dans I, donc :

$$|2x+1| = -2x - 1.$$

Les primitives de f sur I sont les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\ln(-2x-1) + k,$$

où k est un réel.

c) La fonction f est continue sur l'intervalle I.

Si on pose $u(x) = e^x + 3$, on a :

$$u'(x) = e^x$$

et $$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2} = u'(x)(u(x))^{-2}.$$

Une primitive de f sur I est donc $-\frac{1}{u}$.

Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1}{e^x + 3} + k,$$

où k est un réel.

1 Croissance comparée des fonctions logarithme et puissance

L'observation du tableau de valeurs ci-contre semble indiquer que la fonction ln semble croître moins vite que la fonction $x \mapsto x$ en $+\infty$.

L'objectif de ce T.D. est de montrer que, en $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$.

	A	B	C
1	x	ln(x)	ln(x) / x
2	10	2,302585093	0,230258509
3	100	4,605170186	0,046051702
4	1000	6,907755279	0,006907755
5	10000	9,210340372	0,000921034

1.1 Fonction ln et fonctions puissances entières

1 On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

a) Étudier les variations de f. En déduire que, pour $x > 0$, $\ln x \leqslant \sqrt{x}$.

b) En utilisant les théorèmes de comparaison, en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2 En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

3 En effectuant le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 .$$

1.2 Généralisation aux fonctions puissances

On considère un réel α strictement positif.

1 Démontrer que, pour tout réel x, $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{\ln (x^\alpha)}{x^\alpha}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

2 En effectuant le changement de variable $X = x^\alpha$, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

3 En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

1.3 Applications

1 On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \ln x - x$.

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

3 **a)** En remarquant que pour $x > 1$, on a $0 < \ln x < x$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{e^x}$.

b) Retrouver le résultat précédent, en remarquant que, pour tout réel x strictement positif, on a $\dfrac{x \ln x}{e^x} = \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{\ln x}{x}$.

2 Logarithme décimal

2.1 Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, ou fonction logarithme de base 10, notée log, est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1 Donner $\log 1$ et $\log 10$.

2 Pour tout x strictement positif, on peut écrire $\log x = \dfrac{1}{\ln 10} \ln x$.

a) Déterminer le signe de $\dfrac{1}{\ln 10}$.

b) Déduire de l'étude de la fonction ln celle de la fonction log.

c) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ d'équations respectives :

$$y = \ln x \quad \text{et} \quad y = \log x .$$

Tracer ces courbes dans un même repère.

3 a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $10^{\log x}$.

b) Pour tout réel x, calculer $\log (10^x)$.

c) Quel lien ont les fonctions $x \mapsto \log x$ et $x \mapsto 10^x$?

Des valeurs approchées du logarithme décimal d'un réel strictement positif s'obtiennent à l'aide de la touche log d'une calculatrice.

Les propriétés algébriques de la fonction log sont les mêmes que celles de la fonction ln.

2.2 Propriétés de log

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout réel x, on a :

- $\log (ab) = \log a + \log b$
- $\log \left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log b$
- $\log \left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
- $\log (a^x) = x \log a$

Démontrer la dernière relation.

2.3 Logarithme décimal et écriture scientifique

Soit x un réel strictement positif admettant pour écriture scientifique $a \times 10^p$, où p est un entier relatif et a un décimal vérifiant $1 \leqslant a < 10$.

1 Justifier que $\log x = p + \log a$.

2 Montrer que $\log a$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1[$.

3 En déduire la partie entière de $\log x$, c'est-à-dire le plus grand entier précédant $\log x$.

4 **Applications**

Sans calculatrice, déterminer la partie entière des nombres suivants :

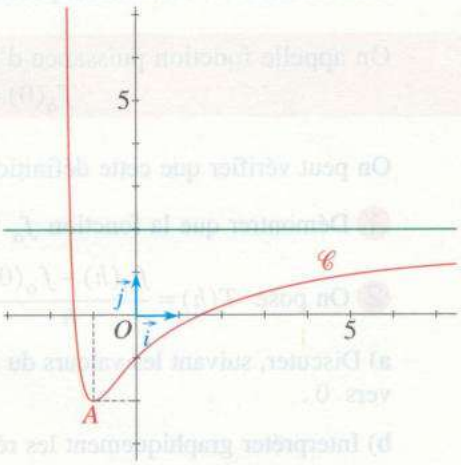
$$\log 36\,000 ; \quad \log 0{,}0003 ; \quad \log 379\,514 ; \quad \log \left(\frac{1}{5}\right).$$

3 Une étude de fonction

3.1 Détermination d'une fonction auxiliaire

La fonction f admet pour courbe représentative la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.

La droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point $A(-1\,;-2)$.



Pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, on a :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x+2)^2},$$

avec a, b et c réels.

1. Déterminer les réels a, b et c.

2. Déterminer le signe de $f(x)$.

3.2 Étude de fonction

On considère la fonction F définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=2x+4-8\ln(x+2)-\frac{4}{x+2}.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-2\,;+\infty[$.

En déduire les variations de F.

2. **a)** Démontrer que l'on a :

$$\lim_{x\to -2}\ (x+2)\ln(x+2)=\lim_{h\to 0}\ h\ln h.$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

3.3 Position de Γ par rapport à l'une de ses tangentes

1. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y=-2x-4$, est tangente à la courbe Γ au point d'abscisse -1.

2. On pose $d(x)=F(x)-(-2x-4)$.

a) Étudier les variations de d.

b) En déduire le signe de $d(x)$ au voisinage de -1.

c) Étudier la position de la courbe Γ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Construire Γ, $\mathscr{D}$, l'asymptote et les tangentes horizontales à Γ.

4 Étude des fonctions puissance

Dans ce qui suit, α est un réel strictement positif.
Pour tout réel x strictement positif, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction f_α définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f_\alpha(0) = 0$ et pour $x > 0$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

On peut vérifier que cette définition coïncide avec la définition des puissances entières de x.

1 Démontrer que la fonction f_α est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

2 On pose $T(h) = \dfrac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h}$.

a) Discuter, suivant les valeurs du réel α, l'existence et la valeur de la limite de T lorsque h tend vers 0.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3 Déterminer la limite de f_α en $+\infty$.

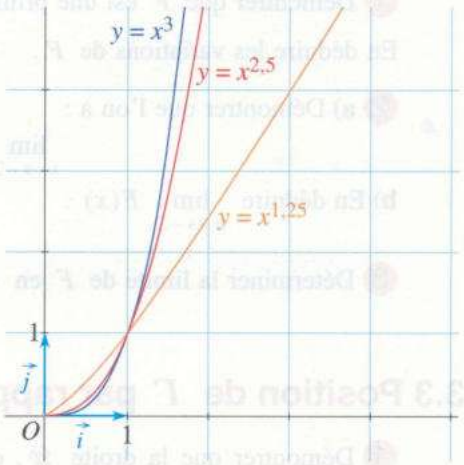
4 Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle Γ_α la courbe d'équation $y = x^\alpha$, $\mathscr{C}_\alpha$ la courbe d'équation $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

a) Soit M un point de $\mathscr{C}_\alpha$.

Démontrer que le point M', image de M par la réflexion s d'axe Δ, est un point de Γ_α.
On a donc $s(\mathscr{C}_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$.

b) Démontrer que $s(\mathscr{C}_\alpha) = \Gamma_\alpha$.

c) Construire les courbes $\mathscr{C}_{0,4}$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{3}}$, et $\mathscr{C}_{0,8}$ à partir des courbes $\Gamma_{1,25}$, $\Gamma_{2,5}$ et Γ_3 ci-contre.



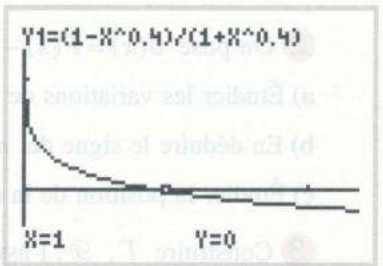
5 Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_\alpha$ et $\mathscr{C}_\beta$, si α et β sont deux réels tels que :

a) $1 < \alpha < \beta$;

b) $0 < \alpha < \beta < 1$.

6 Application
On a représenté ci-contre la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1 - x^{0,4}}{1 + x^{0,4}}.$$



a) Justifier les affirmations :
• f est définie sur $]0 ; +\infty[$;
• f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) Démontrer que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$.

Faire le point

• Fonction ln

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

On a $\ln 1 = 0$ et, pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

• Propriétés algébriques

Soit a et b deux réels strictement positifs et x un réel quelconque :

$$\ln 1 = 0 \ ; \quad \ln e^x = x \ ; \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b \ ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \ ; \quad \ln(a^x) = x \ln a \ .$$

• Limites à connaître

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \ ; \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \ ;$$

« en $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$ » : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$.

• Puissance d'un réel strictement positif

Soit a un réel strictement positif, x un réel quelconque et n un entier naturel $(n \geqslant 2)$; on a :

$$a^x = e^{x \ln a} \ ; \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \ ; \qquad \sqrt[n]{0} = 0 \ .$$

• Dérivées

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I et n un entier naturel ; on a :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad \text{et} \qquad (u^n)' = n u' u^{n-1} \ .$$

savoir	comment faire ?
résoudre une équation $\ln u(x) = \ln v(x)$ ou une inéquation $\ln u(x) < \ln v(x)$	on détermine l'ensemble de définition et on utilise les équivalences suivantes : $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$, valables lorsque a et b sont strictement positifs
résoudre une équation $\ln x = m$ (avec m réel) ou $e^x = p$ (avec $p > 0$)	on utilise le fait que la fonction exp et la fonction ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire : $\ln a = m \iff a = e^m$, valable pour $a > 0$ et m réel quelconque
déterminer une primitive sur un intervalle I d'un produit ou d'un quotient	on peut chercher à faire apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'u^n$ et on utilise : • si $u > 0$ sur I et $n \neq -1$, $\dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ • si u ne s'annule pas sur I, $\ln \lvert u \rvert$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$

1 Fonction logarithme népérien

1 Vrai-Faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Pour tous réels a et b tels que $ab > 0$, on a :
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b .$$

2° L'écriture $\ln(-x)$ n'a pas de sens.

3° La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 3)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

4° La fonction $f : x \mapsto \ln(x+2)^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

5° $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, définie sur $]-1\,;\,1[$, est impaire.

2 Propriétés algébriques

2 Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$, les réels :

a) $x = \dfrac{1}{2}\ln 16$; **b)** $y = \ln\dfrac{1}{2}$; **c)** $z = \ln 36 - 2\ln 3$;

d) $t = 2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; **e)** $u = \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0{,}875$.

3 Sans calculatrice, calculer :
$$x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3) ;$$
$$y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\frac{1}{4} .$$

4 Simplifier $x = 2\ln(2+\sqrt{5}) + \ln(9 - 4\sqrt{5})$;
$$y = \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9} .$$

5 a, b et c sont trois réels strictement positifs. Écrire, en fonction de $\ln a$, $\ln b$ et $\ln c$, les réels suivants :

a) $x = \dfrac{1}{4}\ln(a^8)$; **b)** $y = \ln\dfrac{a}{b} - \ln\dfrac{c}{b}$; **c)** $z = \ln\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)$.

6 f fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$, vérifie : pour tous réels x et y strictement positifs,
$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(5) = 1 .$$

1° Exprimer $f(x)$ en fonction de $\ln x$.

2° Calculer $f(10)$, $f(50)$, $f\left(\dfrac{1}{100}\right)$.

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \ln u_n$.

1° Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

2° Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \ln 2 - \frac{(n-1)\ln 3}{2} .$$

8 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :
$$u_0 = 9 , \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6 .$$

1° **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs.

b) Calculer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n et en déduire la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

2° On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln v_n$ pour tout entier n. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

Calculer $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ en fonction de n.

3° Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$ en fonction de n.

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ soit $\mathscr{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives :
$$y = \ln x \quad \text{et} \quad x = \ln y .$$

1° **a)** Par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe Γ à partir de la courbe $\mathscr{C}$.

b) En déduire que la courbe Γ admet en chacun de ses points une tangente qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

2° **a)** Justifier que, pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. En déduire que Γ est la courbe représentative d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$.

b) Que peut-on dire du signe de la fonction φ ?

c) Quelle propriété de la fonction φ peut-on déduire du résultat de la question **1° b)** ?

3° **a)** En utilisant le fait que, pour tout réel x, $\ln(\varphi(x)) = x$, démontrer que $\varphi' = \varphi$.

b) En déduire que φ est la fonction exponentielle.

Remarque

Cet exercice permet de justifier l'existence de la fonction exp admise au *Chapitre* 4. De plus, pour tout réel m, l'unique solution de l'équation $\ln x = m$ est donc $\varphi(m) = e^m$.

2 Fonctions utilisant $x \mapsto \ln x$

1 Vrai-Faux

10 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2° Pour tout réel x, $\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) < 0$.

3° La courbe d'équation $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ admet deux asymptotes.

4° $e^{\frac{1}{2}\ln 4} + e^{-\ln\frac{1}{2}} = 4$.

2 Équations

Dans les exercices 11 *à* 15, *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations données après avoir déterminé l'ensemble de définition.*

11 **a)** $\ln x = 0$; **b)** $\ln x = 1$;
c) $\ln(4-2x) = 0$; **d)** $(2+x)\cdot\ln(x-3) = 0$.

12 **a)** $\ln(x+1) = \ln 3$; **b)** $\ln(x+3) = \ln(2-x)$;
c) $\ln(x^2-4) = \ln(1-4x)$; **d)** $\ln(x^2-2x+2) = 1$.

13 **a)** $\ln x = -2$; **b)** $\ln x = \dfrac{1}{4}$;
c) $\ln(x^2) = 16$; **d)** $(\ln x)^2 = 16$.

14 **a)** $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(4+2x)$;
b) $\ln(1-x) + \ln(1+x) = 2(\ln 3 - \ln 5)$;
c) $\ln x + \ln(x-3) = \ln 4$; **d)** $\ln(x(x-3)) = \ln 4$.

15 **a)** $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right) = 0$;
b) $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$;
c) $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-3)$;
d) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$.

16 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations suivantes :
a) $\ln(e^x+1) = 1$; **b)** $\ln(2e^x+1) = 1$;
c) $e^{2+\ln x} = x+3$; **d)** $e^{4-\ln x} = x$.

17 **1°** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$.
2° En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2$.

19 On pose $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.
1° Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x :
$P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$.
2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$2(\ln x)^3 + 5(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.

20 Soit P le polynôme tel que :
$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.
1° Montrer que 3 est une racine de P.
Déterminer a, b et c tels que, pour tout réel x, on ait :
$P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$.
Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2° En déduire la résolution des équations :
a) $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 4\ln x + 12 = 0$;
b) $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$.
On ne demande pas de valeurs décimales approchées des solutions.

21 **1°** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$.
2° Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$\ln(10-x^2) = 2\ln 3 - \ln x^2$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $2x = \ln(3e^x - 2)$; **b)** $\ln(2\sin x - \sin^2 x) = 0$.

3 Inéquations

Pour les exercices 23 *à* 26, *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations.*

23 **a)** $\ln x \geqslant 0$; **b)** $\ln x < 1$; **c)** $\ln x \geqslant 2$;
d) $\ln x < -3$; **e)** $\ln\dfrac{1}{x} > 2$; **f)** $\ln x > \dfrac{1}{3}\ln 2$;
g) $\ln(\ln x) > 0$; **h)** $\ln x < 3\ln 2 - 3$.

24 ★ **a)** $(1-\ln x)(3+\ln x)\geqslant 0$;
b) $(x-5)(\ln x+1)<0$;
c) $(\ln x)^2\leqslant 1$; **d)** $\ln(x^2-4)\leqslant 0$.

25 ★★ **a)** $\ln(x+1)+\ln(x-2)<2\ln(3-x)$;
b) $\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$;

26 **a)** $\dfrac{\ln x+2}{\ln x-1}<0$;
b) $\ln|x-2|+\ln|x+4|\leqslant 3\ln 2$.

27 **1°** Factoriser, dans $\mathbb{R}$, x^2-x-6 .
2° En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :
$(\ln x)^2-\ln x-6\leqslant 0$.

28 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)$.
1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leqslant 0$.
2° En utilisant les résultats de la question **1°**, résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $2(\ln x)^2-(\ln x)^2-5\ln x-2\leqslant 0$;
b) $2\ln x+\ln(2x-1)\leqslant \ln(5x+2)$.

29 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leqslant 10^{-9}$; **b)** $3-\left(\dfrac{7}{5}\right)^n\leqslant 0$;
c) $1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\geqslant 0{,}97$; **d)** $\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^n\geqslant 2$.

30 Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0=2$ et de raison $\dfrac{3}{2}$. À partir de quel rang les termes de la suite sont-ils supérieurs ou égaux à 10^3 ?

31 La probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant n fois deux dés équilibrés est $p_n=1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$.
Déterminer le nombre minimal de lancers pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à 0,99.

4 Systèmes

32 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes donnés :
a) $\begin{cases}2\ln x+\ln y=1\\5\ln x+3\ln y=4\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=-15\\\ln(xy)=-2\end{cases}$.

33 ★ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes donnés :
a) $\begin{cases}x^2+y^2=10\\\ln x+\ln y=\ln 3\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}\ln(x^2y^3)=-4\\\ln\left(\dfrac{x^3}{y^4}\right)=11\end{cases}$.

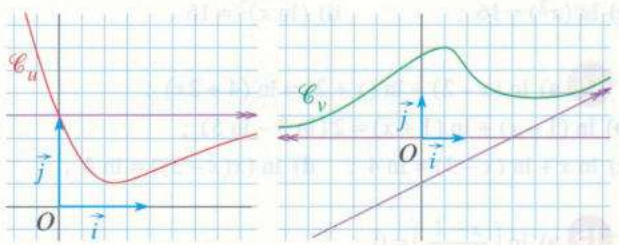
34 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes donnés :
a) $\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln 6\\e^x\times e^y=e^5\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}\ln(y+6)-\ln x=3\ln 2\\e^{5x}\times e^{-y}=e^{-6}\end{cases}$.

5 Détermination de limites

35 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.
a) $f:x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$; **b)** $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}-\ln x$;
c) $f:x\mapsto\dfrac{-1}{\ln x-1}$; **d)** $f:x\mapsto(\ln x)^2-\ln x$.

36 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I donné.
a) $f:x\mapsto\ln(2+x)$, $I=]-2;+\infty[$;
b) $f:x\mapsto\ln(1-x)$, $I=]-\infty;1[$;
c) $f:x\mapsto\ln(x^2+3x-4)$, $I=]1;+\infty[$.

37 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont on donne, ci-dessous, les courbes représentatives.



1° a) À l'aide des graphiques, donner le signe de chacune des fonctions u et v .
b) En déduire que les fonctions :
$f=\ln\circ u$ et $g=\ln\circ v$
sont définies sur $\mathbb{R}$.
2° a) Indiquer, à l'aide des graphiques, les limites des fonctions u et v en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) En déduire les limites des fonctions f et g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Dans les exercices 38 et 39, déterminer l'ensemble de définition des fonctions et les limites aux bornes de cet ensemble.

38 **a)** $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)$; **b)** $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)$;

c) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$; **d)** $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$;

39 **a)** $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$; **b)** $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$;

c) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; **d)** $f : x \mapsto \ln(1-e^x)$.

40 En utilisant le fait que la fonction ln est dérivable en 1, déterminer les limites suivantes après avoir fait les transformations nécessaires.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{x-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; **d)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x-3}\ln\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

6 Études de fonctions

41 Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné et étudier le signe de la fonction dérivée.

a) $f : x \mapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto x\ln x - x$, $I =]0 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$.

42 Écrire f comme composée de fonctions, l'une étant la fonction logarithme népérien. En déduire (sans calculer de dérivée) les variations de f, puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal, en expliquant comment elle se déduit de la courbe de la fonction ln .

a) $f : x \mapsto |\ln x|$; **b)** $f : x \mapsto \ln|x|$; **c)** $f : x \mapsto -2\ln x$;

d) $f : x \mapsto \ln(x+3)$; **e)** $f : x \mapsto \ln(x-1)+2$.

43 Pour chacune des fonctions suivantes :

- déterminer l'ensemble de définition D ;
- étudier les variations ;
- déterminer les limites aux bornes de D et en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe représentative ;
- construire la courbe représentative.

a) $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{\ln x}$; **b)** $f : x \mapsto (\ln x)^2 - 2\ln x$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$.

44 ★ On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 4 + \dfrac{1}{4}\ln x$.

1° Déterminer les limites de f aux bornes de $]0 ; +\infty[$. Interpréter graphiquement la limite en 0.

2° En considérant f comme somme de deux fonctions, déterminer ses variations sur $]0 ; +\infty[$.

3° a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[3 ; 4]$.

b) À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

45 ★ On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 5\ln x - (\ln x)^2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° a) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2° a) Calculer $f'(x)$.

b) Résoudre $5 - 2\ln x = 0$ et $5 - 2\ln x > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

3° Donner le tableau complet des variations de f.

4° a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\ln x - (\ln x)^2 = 0$.

b) Interpréter graphiquement les solutions obtenues.

5° Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

46 ★ Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x - e)(\ln x - 1) .$$

1° Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2° Déterminer la fonction dérivée de f.

3° Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{e}{x} .$$

a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et étudier les variations de g .

b) Calculer $g(e)$ et déduire, à l'aide de **a)**, le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.

4° En utilisant les résultats sur la fonction g, établir les variations de f et dresser son tableau des variations.

5° Dans le plan muni d'un repère, on désigne par $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = -x + e$.

Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f par rapport à $\mathscr{D}$ et les tracer dans un repère.

7 Croissance comparée

47 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I donné.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto x(1-\ln x)$, $I =]0 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2-1}{2x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x+1}$, $I =]0 ; +\infty[$.

48 Déterminer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - x) \ln x$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x \ln x^3}{x^2+1}\right)$; **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1 - \ln x)$.

49 ★ Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = -(\ln x)^2 - 2 \ln x + x \ln x$.

1° Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0.

2° a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0 ; +\infty[$, puis calculer $f'(x)$.

b) Déterminer les variations de f.

3° Dresser le tableau complet des variations de f.

50 **1°** Étudier les variations de la fonction :

$g : x \mapsto -x^2 - 2 + 2 \ln x$

définie sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le signe de $g(x)$.

2° On considère la fonction :

$f : x \mapsto -x + 5 - 2 \dfrac{\ln x}{x}$

définie sur $I =]0 ; +\infty[$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal.

a) Étudier les limites de f aux bornes de I.

b) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.

Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

c) Étudier les variations de f.

(On pourra utiliser la *Question* **1°**.)

d) Construire $\mathscr{C}_f$.

51 ★ Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \ln x - 1 - \dfrac{9}{2} x^2$.

1° Étudier les variations de f.

2° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3° Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :

$f(x) = m$.

3 Dérivées et primitives

1 Vrai-faux

52 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $]-1 ; 3[$ et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x-3)}$.

2° La fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

3° La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$.

4° La fonction $x \mapsto \ln x \times \ln(x+1)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x+1}$.

2 Calculs

Dans les exercices 53 *à* 55, *déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions sur l'intervalle I donné.*

53 **a)** $f : x \mapsto \ln(3x+1)$, $I = \left]-\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto (x-1) \ln(2-x)$, $I =]-\infty ; 2[$;

c) $f : x \mapsto \ln(x^3)$, $I =]0 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \ln \sqrt{5-4x}$, $I = \left]-\infty ; \dfrac{5}{4}\right[$.

54 **a)** $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{3-2x}\right)$, $I = \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$, $I =]1 ; +\infty[$;

c) $f : x \mapsto \ln(\sin x)$, $I =]0 ; \pi[$;

d) $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$, $I = \mathbb{R}$.

55 **a)** $f : x \mapsto \ln(e^x + 2)$, $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto \ln(e^{3x} + 1)$, $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$, $I =]0 ; +\infty[$.

56 1° Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

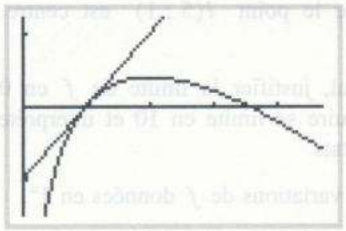
$$f(x) = (x-1)[2\ln(x-1) + 5] .$$

2° Montrer que, pour tout x de $]1 ; +\infty[$, on a :

$$(x-1)f'(x) - f(x) = 2(x-1) .$$

57 On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = ax + 1 + b\ln x$, où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous est donnée sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.



1° Indiquer, à l'aide du graphique, $g(1)$ et $g'(1)$.

2° En déduire la valeur de chacune des constantes a et b .

58 Soit a et b deux réels, et g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x} .$$

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point $A(1 ; 0)$ et admette en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Dans les exercices 59 *à* 63, *déterminer les primitives sur* I *de chacune des fonctions :*

59 **a)** $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $I =]-\infty ; 0[$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$, $I =]1 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{3}{2-x}$, $I =]2 ; +\infty[$.

60 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{-2}{3x-6}$, $I =]2 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3+x^2}$, $I = \mathbb{R}$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{-4x-2}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x+2}$, $I =]-1 ; +\infty[$.

61 **a)** $f : x \mapsto 3x^2 - 1 + \dfrac{2}{3x+2}$, $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^2}$, $I =]-\infty ; 0[$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$;

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$, $I =]1 ; +\infty[$.

62 ★ **a)** $f : x \mapsto \tan x$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x \times \tan x}$, $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

63 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{2e^x}{e^x + 2}$, $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} + 4x}{e^{2x} + 4x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

64 La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x - 1} .$$

1° Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout x distinct de 1, on ait $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

2° En déduire les primitives de f sur $]1 ; +\infty[$.

65 ★ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1° Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x distinct de $-\dfrac{1}{2}$, on ait $f(x) = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{(2x+1)^2}$.

2° En déduire les primitives de f sur $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3° Déterminer la primitive F de f sur $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ vérifiant $F(0) = 1$.

3 Fonctions composées avec la fonction ln

66 ★ On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(1+x)$.

1° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° a) Étudier les variations de f.

b) Construire la courbe représentative de f.

c) En déduire le signe de f sur $]-1\,;+\infty[$.

3° a) En utilisant le signe de f, justifier que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

67 Soit la fonction f définie sur $]-2\,;2[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

1° a) Montrer que f est impaire.

b) Étudier les variations de f sur $[0\,;2[$.

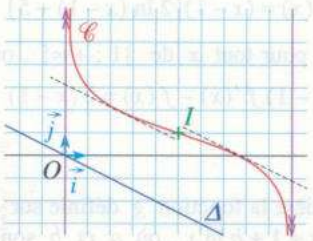
c) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$, représentant f dans le plan muni d'un repère, admet deux asymptotes.

2° Résoudre l'équation $f(x)=\frac{1}{3}$.

3° Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ en O.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

68 ★ On donne la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0\,;10[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{10-x}{x}\right)+1.$$



1° À l'aide de ce graphique, conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que ses variations.

2° Montrer que le point $I(5\,;1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

3° Par le calcul, justifier la limite de f en 0 conjecturée en **1°**. En déduire sa limite en 10 et interpréter graphiquement ces résultats.

4° Justifier les variations de f données en **1°**.

5° Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y=-\frac{1}{2}x$.

4 Puissances d'un réel strictement positif

1 Vrai-faux

69 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° a et b sont deux réels strictement positifs :

$$5^a=5^b \iff a=b.$$

2° Si a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$, alors, pour tout x réel positif, $a^x\leqslant b^x$.

3° La dérivée de la fonction $x\mapsto 3^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x\mapsto x3^{x-1}$.

4° Soit $f : x\mapsto x^{2,3}$.
Pour tout réel x strictement positif :

$$2{,}3\,f(x)-x\,f'(x)=0.$$

2 Propriétés algébriques

70 Simplifier : **a)** $x=27^{\frac{1}{3}}$; **b)** $y=64^{\frac{2}{3}}$; **c)** $z=32^{\frac{3}{5}}$;
d) $t=(0{,}25)^{-1{,}5}$; **e)** $u=\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$; **f)** $v=2^{-\frac{1}{\ln 2}}$.

71 x désigne un réel strictement positif. Écrire sous la forme x^α (α réel) les nombres suivants :

$$A=x^4x^{-3}\ ;\quad B=x^{\sqrt{2}}x^{\sqrt{2}}\ ;\quad C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\ ;\quad D=\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{0,1}}\ ;$$

$$E=\frac{\sqrt{x}}{x}\ ;\quad F=\sqrt[5]{x^{10}}\ ;\quad G=\sqrt[3]{x^5}\ ;\quad H=\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}.$$

72 ★ Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants :

$A = 5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{25}$; $B = \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243}$;

$C = \dfrac{2 - \ln \sqrt[3]{e}}{1 + \ln e^2}$; $D = \dfrac{3\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{9}}\right)^7}{\sqrt[3]{81}\,\sqrt[5]{27}}$.

3 Équations – Inéquations – Systèmes

73 1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 + 4X - 6 = 0$.

2° En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2e^{2x} + 4e^x - 6 = 0 .$$

74 ★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$; **b)** $2e^x - 5 + 2e^{-x} = 0$;

c) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$; **d)** $e^x + e^{1-x} - (e+1) = 0$.

75 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $10^x = 50$; **b)** $3^{-x} = 2$; **c)** $3^x = 5^{2x+3}$;

d) $7^{x-1} = 2^x$; **e)** $x^{\frac{1}{4}} = 2$; **f)** $x^{-\frac{2}{3}} = 4$;

g) $x^\pi = -2$; **h)** $(x+1)^{2,5} = 1$.

76 ★ 1° On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2 .$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2° En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$; **b)** $-\ln^3 x + 2\ln^2 x = 2 - \ln x$;

c) $-8^x + 2 \times 4^x + 2^x - 2 = 0$.

77 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $100^x - 10^x - 2 = 0$; **b)** $2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} = 7$;

c) $x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} = -4$; **d)** $3x^{\frac{1}{12}} + \sqrt{5}x^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{5}$.

78 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations données :

a) $e^x < 3$; **b)** $e^x \geqslant -2$; **c)** $e^{-x} \leqslant 1$; **d)** $e^{-3x} < e^{x+7}$.

79 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations données :

a) $1 \leqslant e^{x^2} - 2$; **b)** $(e^{-x} - 2)(e^{2x} - 1) < 0$;

c) $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5$; **d)** $\dfrac{2e^x + 1}{e^{x-3} - 1} \geqslant 0$.

80 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations données :

a) $2^x \geqslant 4$; **b)** $3^{-x} < 3^{2x}$; **c)** $x^\pi > 2$; **d)** $1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 5$.

81 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes donnés :

a) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3\ln 2 \\ e^{5x}e^{-y} = e^{-6} \end{cases}$.

82 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes donnés :

a) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 5\sqrt{2} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 8^x \cdot \sqrt{2}^y = 2^{2x+1} \\ 3^x \cdot 27^y = 9^{y-1} \end{cases}$.

4 Recherche de primitives

83 Déterminer les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$; **b)** $f : x \mapsto 4x^{-\frac{2}{3}}$;

c) $f : x \mapsto \sqrt[4]{x}$; **d)** $f : x \mapsto 3x\sqrt[3]{x}$.

84 Déterminer les primitives sur l'intervalle I donné de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f : x \mapsto 3(3x-1)^{\frac{3}{2}}$, $I = \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, $I = \mathbb{R}$.

5 Étude de fonctions

85 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}} .$$

1° Écrire $f(x)$ sous la forme x^α, avec α dans $\mathbb{R}$.

2° Étudier la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

86 ★ h est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = x - (3x)^{\frac{1}{3}} .$$

1° Justifier que h est bien définie en 0.

2° Étudier la fonction h et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

87 ★★ Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1} .$$

1° Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2° Montrer que f est impaire.

3° Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$, et en déduire ses variations sur $]-\infty ; 0[$.

4° a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$.

b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = -\frac{2}{3}$.

88 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x3^{-x} .$$

1° a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} .$$

En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

2° Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3° Dans le plan muni d'un repère orthogonal, tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x3^{-x}$.

89 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto (4x^2 - 1)^{\frac{3}{4}}$ définie sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

1° Justifier que f est bien définie en $\frac{1}{2}$ et en $-\frac{1}{2}$.

2° Montrer que f est une fonction paire.

3° Étudier le comportement de f en $+\infty$, puis en déduire son comportement en $-\infty$.

4° Après avoir justifié la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, donner l'expression de f' et les variations de f.

90 Dans l'étude de l'isolation thermique d'un local, on a noté la température $T(t)$ en fonction du temps (t en heure et T en degré Celsius) :

$$T(t) = 20 \cdot (0,9)^{2t} .$$

1° Donner le sens de variation de T et construire sa courbe représentative.

2° Au bout de combien de temps la température a-t-elle diminué de moitié ?

91 La température θ d'un four est donnée par la relation :

$$\theta = 850\left(1 - \alpha e^{-\frac{t}{1\,000}}\right) ,$$

avec t en seconde, θ en degré Celsius et α constante positive.

1° Déterminer α à 10^{-3} près pour que, si $t = 0$, $\theta = 20$ °C.

2° On prend $\alpha = 0,98$. On pose $f : t \mapsto \theta$ et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Démontrer que $\mathscr{C}$ possède une asymptote que l'on déterminera.

Interpréter ce résultat.

b) Au bout de combien de temps le four atteint-il la température de 400 °C ? 800 °C ?

92 La dimension M d'une mémoire tampon intervenant dans un réseau télé-informatique est donnée par la relation :

$$M(t) = -\frac{30}{\log t} - 10 ,$$

où t représente l'intensité du trafic ($t \in]0 ; 1[$) et log est la fonction logarithme décimal.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = -\frac{30}{\log x} - 10 .$$

1° a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) Étudier les variations de f ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c) Construire la courbe représentative de f.

2° Déterminer le tableau des variations de la fonction f'. En donner une interprétation graphique.

3° Déterminer l'intensité du trafic pour une mémoire tampon $M = 64$.

5 Problèmes

93 Asymptote. Fonctions associées

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

2° Étudier les variations de f et donner son tableau des variations.

3° a) Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-\ln 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

4° Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

5° Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ par $g(x)=f(|x|)$.

a) Justifier que g est une fonction paire.

b) Déduire de l'étude de f le tableau complet des variations de g.

c) Expliquer comment on obtient la courbe Γ représentative de g à partir de la courbe $\mathscr{C}$ puis tracer Γ.

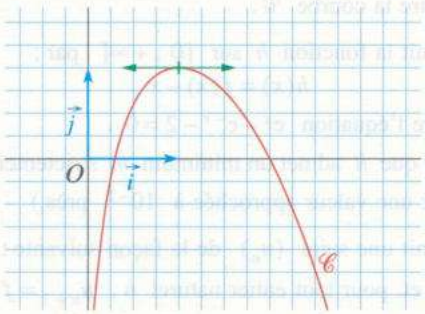
94 À partir d'un graphique

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=ax+(bx+c)\ln x,$$

où a, b et c sont des réels, et dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



En utilisant ce graphique et sachant que $f(2)=2-3\ln 2$, déterminer les réels a, b et c.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x)=x+(1-2x)\ln x.$$

1° Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2° a) Déterminer la fonction dérivée de g.

b) Étudier, pour x dans $]0 ; +\infty[$, le signe de $-2\ln x$ et celui de $\frac{1-x}{x}$.

En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

3° Dresser le tableau complet des variations de g.

4° Soit la droite Δ d'équation $y=x$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1-2x)\ln x=0$ et donner une interprétation graphique des solutions.

b) Étudier la position de la courbe représentative de g par rapport à la droite Δ.

95 Avec une fonction auxiliaire

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x)=x-\ln x.$$

1° Étudier les variations de g.

2° En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $g(x)\geqslant 1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}.$$

1° Justifier que f est bien définie sur $]0 ; +\infty[$.

2° Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3° Étudier les variations de f et donner son tableau des variations.

4° Soit A le point de coordonnées $(0 ; -1)$.

On considère le point $M(x ; f(x))$ pour $x>0$.

Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM) en fonction de x puis sa limite quand x tend vers 0.

Interpréter ce résultat graphiquement.

5° Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

96 Construction de tangentes

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

1° a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(On pourra poser $h=\frac{3}{x}$.)

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2° a) Pour x dans $[1 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f' puis la limite de f'' en $+\infty$.

En déduire le signe de f' sur $[1 ; +\infty[$.

c) Indiquer les variations de f et donner son tableau des variations.

3° On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer la droite d'équation $y = 3$ et la courbe $\mathscr{C}$ en indiquant le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

4° On désigne par g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{x+3},$$

et on appelle Γ sa courbe représentative.

a) Donner le tableau des variations de g.

b) Vérifier que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) - g(x) = xf'(x).$$

c) Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ et la limite de $f - g$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement les deux résultats.

d) Tracer la courbe Γ dans le même repère que $\mathscr{C}$ en indiquant le point B de Γ d'abscisse 3.

5° Soit λ élément de $[1 ; +\infty[$.

a) Donner une équation de la tangente T_λ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse λ.

b) Montrer que T_λ rencontre l'axe (Oy) au point N d'ordonnée $g(\lambda)$.

c) En déduire, à l'aide du tracé de Γ, la construction de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse λ.

Tracer de cette façon la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

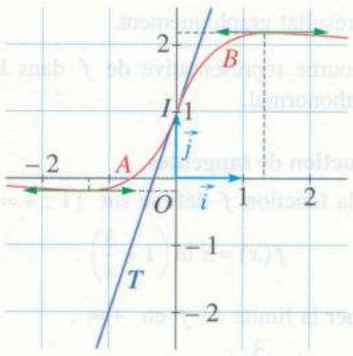
97 Utilisation d'un graphique

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1},$$

et dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



1° Démontrer que le point $I(0 ; 1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2° Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire des équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

3° Calculer les coordonnées du point d'intersection A entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

En déduire l'abscisse du point B de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 2.

4° Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5° La droite T est tangente à $\mathscr{C}$ en I.
Donner son coefficient directeur.

Partie B

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 1.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Montrer que la courbe Γ admet deux asymptotes dont l'une est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.

3° a) Montrer que f est la fonction dérivée de F.

b) Déduire de la **Partie A** les variations de F et dresser son tableau des variations.

4° Tracer Γ, ses asymptotes et la tangente à Γ en son point d'abscisse 0.

98 ★★ Fonctions réciproques et suite

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° a) Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2° On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

a) Résoudre l'équation $e^x - e^{-x} - 2 = 0$.

b) Montrer que h admet un minimum m strictement positif.
(En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.)

3° On définit une suite (u_n) de la façon suivante :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ peut être minorée par m pour tout entier naturel n.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0 + n \cdot m$, puis la limite de la suite (u_n).

4° Soit a un réel quelconque.

a) Discuter graphiquement, en utilisant la question **1°**, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

b) Résoudre, lorsque c'est possible, cette équation.

Partie B

On définit la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) .$$

On désigne par Γ la courbe représentative de g dans le même repère que $\mathscr{C}$.

1° Soit x et y deux réels, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$.

Montrer que l'égalité $y = f(x)$ équivaut à l'égalité $x = g(y)$.

2° Démontrer que la courbe Γ est la symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ dans la symétrie orthogonale d'axe la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

3° Construire Γ.

4° La fonction g est-elle dérivable en 1 ?

99 ★★ Une famille de courbes

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = xe^x - nx .$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (1 + x)\, e^x - n .$$

1° Déterminer la dérivée de g_n. Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2° Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n, et que α_n est positif ou nul.

3° Montrer que $\alpha_n = \ln \dfrac{n}{1 + \alpha_n}$, et $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \ln n$.

4° a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln x \leqslant x - 1 \quad \textbf{(1)}.$$

b) Déduire de **(1)** le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$.

c) Justifier que $\dfrac{1}{2} \ln n \leqslant \alpha_n$. Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\dfrac{\alpha_n}{n}$?

B. 1° a) Déterminer la dérivée de f_n.

En déduire les variations de f_n.

b) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \dfrac{-n\alpha_n^2}{1 + \alpha_n}$.

2° Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote $\mathscr{D}_n$ que l'on déterminera.

3° Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et de l'axe des abscisses, et préciser la position de $\mathscr{C}_n$ par rapport à cet axe.

4° Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

5° a) Montrer que $0{,}35 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0{,}40$.

Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès, de α_2.

En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents. (On choisira comme unité 10 cm sur les deux axes.)

On précisera les tangentes en O à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(D'après BAC)

100 Partie A. Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.

1° a) Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

b) Tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.

2° a) Démontrer que, pour tout réel t, $e^t \geqslant t + 1$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

b) En déduire que, pour tout réel t :

$$e^{-t} + t + 1 \geqslant 2 ,$$

et que, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2 .$$

Partie B. Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = (x + 1) \ln x .$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1° a) Étudier le sens de variation de g en utilisant la partie **A**.

b) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

2° Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3° On appelle h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - 2x + 2 .$$

a) Étudier le sens de variation de h. On pourra utiliser la question **A. 2. b)**.

b) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

4° Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport $\mathscr{D}$.

5° Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

101 ★★ **A.** Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x .$$

1° Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Étudier les variations de g et dresser son tableau des variations.

2° a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0{,}27 ; 0{,}28[$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x \ln x}{x+1} \text{ , pour } x \in]0 ; +\infty[,$$

et $f(0) = 0$.

1° a) Montrer que f est continue en 0.

b) f est-elle dérivable en 0 ?

2° Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3° a) Montrer que, pour $x \in]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2} .$$

b) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$.

c) Dresser le tableau des variations de f.

C. Soit la courbe $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

1° Donner une équation de T.

2° On considère la fonction φ définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - 2(x-1) .$$

a) Montrer que $\varphi''(x) = f''(x) = \dfrac{4h(x)}{(x+1)^3}$, où h est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = -x + \frac{1}{x} - 2\ln x .$$

b) Calculer $h'(x)$ et en déduire le sens de variation de h.

Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$, puis le signe de $\varphi''(x)$.

c) Donner le sens de variation de φ', le signe de $\varphi'(x)$, le sens de variation de φ et le signe de $\varphi(x)$.

d) Conclure sur la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

D. On prendra pour unité graphique : 4 cm et on prendra 0,28 pour valeur approchée de α.

1° Calculer les images par f des réels :

0,1 ; 0,28 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.

2° Tracer la portion de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux réels x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$, la tangente T et les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et α.

102 Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unité graphique 2 cm.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x .$$

1° Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2° Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

3° Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$.

Vérifier l'encadrement $1{,}86 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}87$ et préciser le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0 ; \alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$.

On ne demande pas de représentation graphique de g.

Partie B. Étude de la fonction f

1° a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Déterminer la dérivée f' de f. Montrer qu'en tout réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Déterminer le sens de variation de f.

2° a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Déterminer le point d'intersection A de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3° Calculer $\ln(e\sqrt{e})$. Déterminer le point B de la courbe $\mathscr{C}$, où la tangente T est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

4° Construire $\mathscr{D}$, T et $\mathscr{C}$ dans le repère donné.

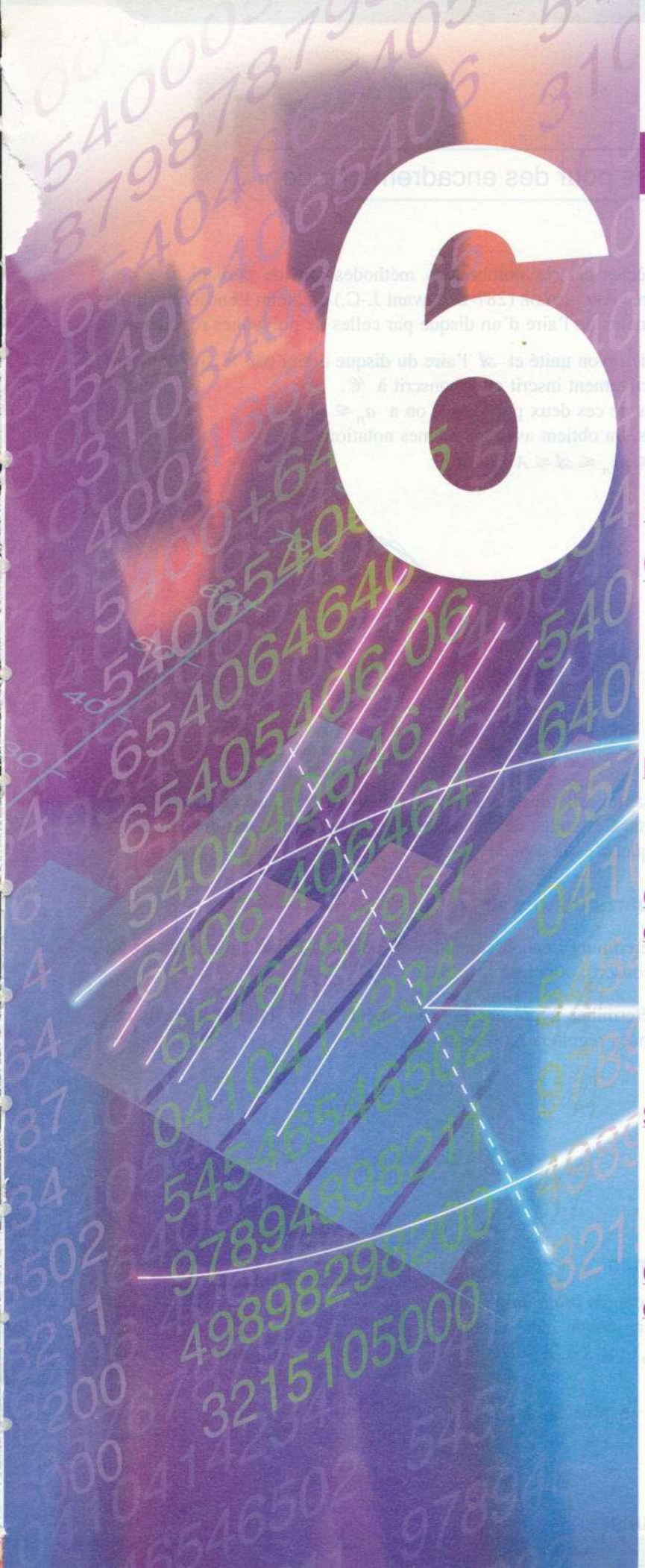
Partie C. Calcul d'une primitive

1° Soit $h : x \mapsto 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $u : x \mapsto \ln x$ pour $x > 0$.

Exprimer h en fonction de u et u'.

En déduire une primitive de h sur $]0 ; +\infty[$.

2° Donner une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.



CHAPITRE

6

Suites et récurrence

Récurrence p. 149

- savoir mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

Comportement d'une suite numérique p. 150

- déterminer le sens de variation d'une suite
- reconnaître une suite majorée, minorée, bornée

Suites adjacentes p. 152

- définir la notion de suites adjacentes
- utiliser les suites adjacentes pour établir une convergence

Convergences des suites monotones p. 153

- démontrer la convergence de certaines suites

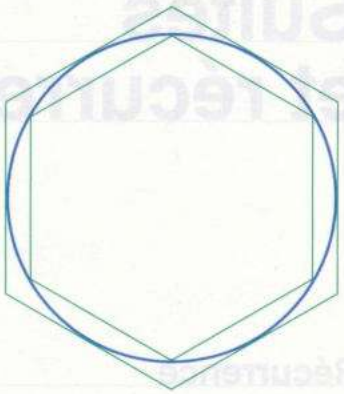
1 Méthode d'ARCHIMÈDE pour des encadrements de π

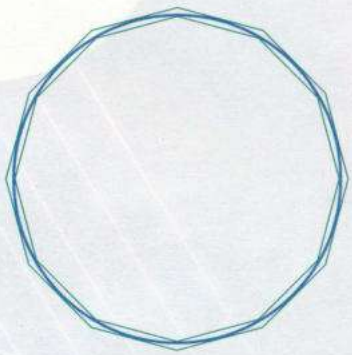
Principe

Le nombre π a inspiré au cours des siècles de très nombreuses méthodes afin de parvenir à « s'en approcher ». Le mathématicien et savant grec ARCHIMÈDE (287-212 avant J.-C.) a obtenu l'encadrement de π par 3,133 et 3,142 grâce à des encadrements de l'aire d'un disque par celles de polygones réguliers.

Plus précisément, $\mathscr{C}$ désignant un cercle de rayon unité et $\mathscr{A}$ l'aire du disque défini par $\mathscr{C}$, on construit deux polygones réguliers à n côtés respectivement inscrit et circonscrit à $\mathscr{C}$.
En appelant a_n et A_n les aires respectives de ces deux polygones, on a $a_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant A_n$.
Si, à présent, on double le nombre de cotés, on obtient avec les mêmes notations :

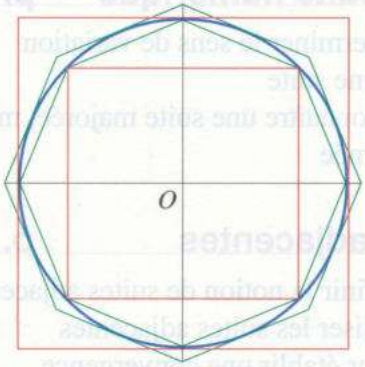
$$a_n \leqslant a_{2n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant A_{2n} \leqslant A_n .$$





On construit ainsi deux suites, l'une croissante, celle des aires des polygones inscrits successifs, et l'autre décroissante pour les polygones circonscrits. Ces suites donnent, lorsque n augmente, des encadrements de plus en plus précis de l'aire $\mathscr{A}$ du disque, c'est-à-dire de π.

Recherche pour des valeurs particulières de n



1 Déterminer l'encadrement de π obtenu à l'aide des carrés, inscrit et circonscrit, ci-contre.

2 Déterminer à présent l'encadrement de π obtenu à partir des octogones réguliers représentés.

Observation de quelques termes

L'écran ci-contre, obtenu sur le tableur EXCEL en programmant le calcul de l'aire d'un polygone régulier, donne des valeurs approchées pour les termes des suites (a_n) et (A_n) lorsque n augmente.

On peut observer l'encadrement de plus en plus précis obtenu pour le nombre π.

PI | =A2*TAN(PI()/A2)

	A	B	C
1	valeur de n	an	An
2	4	2	=A2*TAN(PI()/A2)
3	8	2,8284271247	3,3137084990
4	16	3,0614674589	3,1825978781
5	32	3,1214451523	3,1517249074
6	64	3,1365484905	3,1441183852
7	128	3,1403311570	3,1422236299
8	256	3,1412772509	3,1417503692
9	512	3,1415138011	3,1416320807

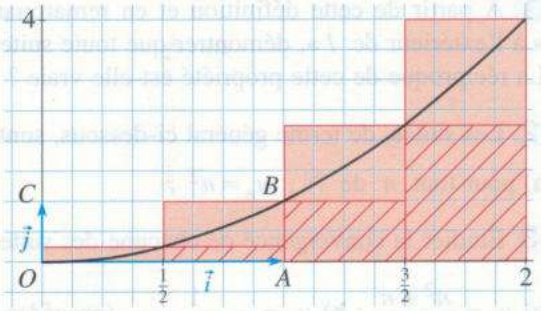
2 Aire sous une parabole

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.
$\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$, où a est un réel strictement positif (l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OABC$, avec $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{j}$).

Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette question que $a = 2$.
On partage l'intervalle $[0 ; 2]$ en quatre intervalles de même amplitude :

$$\left[0 ; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2} ; 1\right], \left[1 ; \frac{3}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{3}{2} ; 2\right].$$



À l'aide du graphique, justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{2^3}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{2^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2).$$

Cas général

Voir Exercice résolu 1

On admet que, pour tout entier de $\mathbb{N}$, on a $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On partage l'intervalle $[0 ; a]$ en n intervalles de même amplitude $\dfrac{a}{n}$ à l'aide des réels $u_0 = 0$ et, pour tout entier $k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $u_k = u_{k-1} + \dfrac{a}{n}$.

1 Pour tout $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$, exprimer u_k en fonction de k.

2 **a)** On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} f(u_k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} f(u_k)$.
Interpréter s_4 et S_4 sur la figure ci-dessus. Que représentent géométriquement les réels s_n et S_n ?

b) Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $s_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_n$.
Déterminer l'amplitude de cet encadrement de $\mathscr{A}$ en fonction de a et n.

c) Déterminer en fonction de a et n les expressions de s_n et S_n.

3 On s'intéresse aux suites (s_{2^n}) et (S_{2^n}) définies pour tout entier $n \geqslant 2$; on rappelle qu'on a :

$$s_{2^n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_{2^n}.$$

a) À l'aide d'une interprétation graphique, justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$s_{2^{n+1}} \geqslant s_{2^n} \quad \text{et} \quad S_{2^{n+1}} \leqslant S_{2^n}.$$

En déduire que la suite (s_{2^n}) est croissante et que (S_{2^n}) est décroissante.

b) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2^n} - s_{2^n}) = 0$.
Les propriétés des questions **a)** et **b)** font de ces deux suites des **suites adjacentes**.

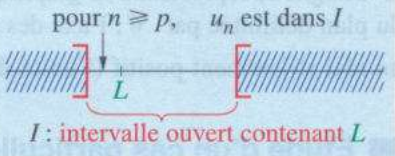
c) Déterminer en fonction de a et n le terme général de (s_{2^n}) et celui de (S_{2^n}) ; en déduire que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on précisera.

d) Quelle est la valeur de l'aire $\mathscr{A}$?

3 Limites de suites

On a vu en classe de Première la définition d'une suite convergente :

On dit que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ converge vers le réel L si tout intervalle ouvert I contenant L contient également tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p (qui dépend de l'intervalle I).



1 À partir de cette définition et en remarquant qu'un nombre fini seulement de termes de (u_n) sont « à l'extérieur de I », démontrer que toute suite convergente est bornée.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

2 Les suites, de terme général ci-dessous, sont-elles convergentes ?

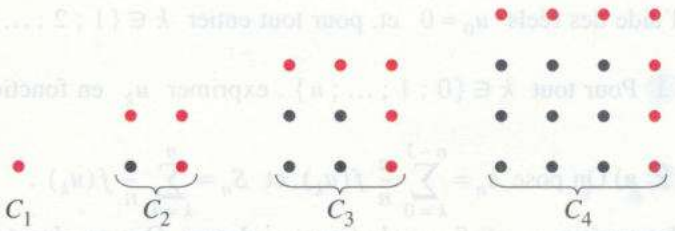
a) pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2$; **b)** pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n$.

3 Étudier la convergence de chacune des suites de terme général :

a) $u_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2+3}$; **b)** $u_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n}$ (procéder à un encadrement de u_n) ; **c)** pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

4 Nombres carrés

Les mathématiciens grecs du début de notre ère nommaient « nombres carrés » la suite de nombres définis pour $n \geqslant 1$ par $C_n = n^2$. Ils représentaient ces nombres à l'aide des figures ci-contre.
Ces représentations graphiques servaient de support à la justification de la propriété :



pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Au premier siècle de notre ère, THÉON DE SMYRNE en rédigeait ainsi la justification :

« Les impairs ajoutés les uns aux autres font des nombres carrés. Quant aux impairs successifs ce sont 1, 3, 5, 7, 9, 11... En les additionnant dans l'ordre de succession, on obtiendra des nombres carrés. Par exemple, l'Un est le premier carré car une fois l'Un, Un. Ensuite l'impair 3, si on l'ajoute à l'unité on obtiendra un carré égal un nombre égal de fois car il sera 2 selon la longueur et 2 selon la largeur. Dans l'ordre de succession, l'impair 5. Si on l'ajoute au carré il engendrera à nouveau le carré 9 ayant selon la longueur 3 et selon la largeur 3. À la suite l'impair 7, si on l'ajoute au 9 on produit le 16, de 4 selon la longueur et 4 selon la largeur. Et le même raisonnement jusqu'à l'infini. »

Le raisonnement proposé suppose que la propriété remarquable observée sur les figures donnant les premiers « nombres carrés » est toujours vraie et assure le « passage à l'infini ».
Pour mener un tel raisonnement aujourd'hui, on a recours au **raisonnement par récurrence**.

Il nécessite de prouver que la propriété étudiée est « héréditaire », c'est-à-dire que lorsqu'elle est vraie à un rang n , elle l'est aussi au rang suivant $(n+1)$.

Démontrer que la propriété étudiée ici est héréditaire.

1 Récurrence

1.1 Suite récurrente

On a rencontré en classe de Première la notion de suite récurrente.
Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 4$, on a alors $u_1 = 2$, $u_2 = 0$, $u_3 = -4$, ...
On perçoit intuitivement que l'on pourrait calculer u_n pour tout entier naturel n ; le calcul de u_3 permet celui de u_4, qui lui-même permet celui de u_5, etc.
Cette perception s'appuie sur le principe de récurrence, que l'on considérera comme un **axiome**, c'est-à-dire une **propriété admise**.

1.2 Démonstration par récurrence

axiome

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P_n relative à un entier naturel n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on doit :

• démontrer que la propriété est vraie pour n_0 (**initialisation**) ;

• démontrer que la propriété est « héréditaire », c'est-à-dire prouver que si on la suppose vraie à un rang $n \geqslant n_0$ (**hypothèse de récurrence**), alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Exemple

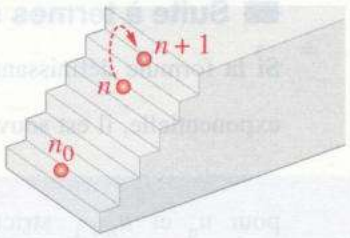
Voir Exercices 1 à 11

On se propose de démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $n < 2^n$.
• La propriété est vraie pour $n = 0$: $0 < 2^0$.
• On suppose que la propriété est vraie pour un certain entier $n < 2^n$. Alors, on a $n+1 < 2^n + 1$.
Comme $n \geqslant 0$, on a $2^n \geqslant 1$.
Ainsi, $n+1 < 2^n + 2^n$. Or, $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
D'où, $n+1 < 2^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0.

On conclut finalement, grâce aux deux étapes ci-dessus, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.

Remarque

On peut illustrer le principe de récurrence à l'aide de l'image d'un escalier. Si l'on peut :
• accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation),
• monter sur une marche à partir de la précédente,
alors on peut accéder à toute marche au-dessus de n_0.



Contre-exemples

Une démonstration par récurrence doit comporter impérativement les deux étapes décrites ci-dessus. L'omission de l'une d'entre elles peut conduire à des affirmations fausses, comme les exemples qui suivent.

• Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on a $n^2 \geqslant 2^n$; il est cependant faux d'en déduire une propriété générale, puisqu'on peut montrer que cette inégalité est fausse dès que $n \geqslant 5$.

• Si n est un entier naturel quelconque, P_n est la propriété « 6 divise $7^n + 1$ ».
Cette propriété est héréditaire à partir de $n = 0$; en effet, si P_n est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier k tel que $7^n + 1 = 6k$. D'où $7^{n+1} + 1 = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k-1) + 1 = 42k - 6 = 6(7k-1)$ et $7k-1$ est un entier. P_{n+1} est donc vraie lorsque P_n l'est.
Cependant, P_0 est fausse, car $7^0 + 1 = 2$ n'est pas multiple de 6, pas plus que $7^1 + 1 = 8$.
On peut d'ailleurs démontrer que la propriété P_n est fausse pour tout entier naturel n ...

2 Comportement d'une suite numérique

2.1 Monotonie

définition

• Une suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

• Une suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

• Une suite qui, à partir de son premier terme, est soit croissante, soit décroissante, est dite monotone.

Remarques

• Si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n$, la suite (u_n) est constante ou stationnaire.

• Dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 3 signifie que :

$$u_3 \leqslant u_4 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$$

• Comme pour les fonctions, on peut parler de suites strictement monotones.

2.2 Détermination du sens de variation

Cas général

Voir Exercices 16 à 20

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -u_n^2 + 3u_n - 1.$$

On a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n - 1)^2$.

La suite (u_n) est décroissante, comme la programmation du calcul de ses premiers termes permet de le conjecturer.

```
-Ans²+3Ans-1          .5
                      .25
                     .3125
                -2.035156 25
               -11.24732971
               -161.2444148
```

Suite à termes strictement positifs

Si la formule définissant la suite (u_n) fait intervenir des produits, des quotients, ou la fonction exponentielle, il est souvent plus facile de manipuler le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et d'utiliser la propriété :

pour u_n et u_{n+1} strictement positifs, on a l'équivalence $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$.

Exemple

La suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{n^2}$, est strictement croissante ; en effet, ses termes sont strictement positifs et, pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = e^{(n+1)^2 - n^2} = e^{2n+1} \quad \text{et} \quad e^{2n+1} \geqslant e > 1.$$

Suite définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[n_0 ; +\infty[$

Si f est une fonction monotone sur $[n_0 ; +\infty[$, où n_0 est un entier naturel, alors la suite (u_n) est monotone à partir du rang n_0.

En effet, si, par exemple, f est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $n \leqslant n+1$, donc $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Exemples

• On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : pour tout entier naturel n, $u_n = \ln\left(n - \frac{15}{2}\right)^2$.

Par composition de la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{15}{2}\right)^2$, suivie de la fonction $x \mapsto \ln x$, on obtient le tableau des variations de $f : x \mapsto \ln\left(x - \frac{15}{2}\right)^2$.

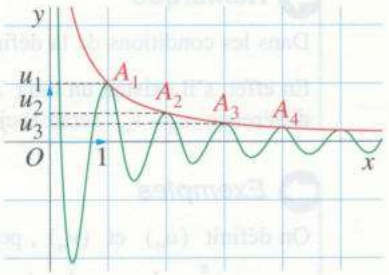
x	$-\infty$		$15/2$		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↗	

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 8.

• La fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos(2\pi x)}{x}$ n'est pas monotone.

Pourtant, la suite (u_n) définie par $u_n = g(n)$, avec $n \geqslant 1$, est décroissante, car :

$$g(n) = \frac{\cos(2\pi n)}{n} = \frac{1}{n}.$$



La réciproque de la propriété précédente est donc fausse.

2.3 Majorants, minorants

• Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que :
pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.

• Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m, tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.

• Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Voir Exercices 12 à 20

• M est un **majorant** de la suite, m est un **minorant**.
Tout nombre M' supérieur à M est également un majorant.

• Si une suite est croissante, elle est minorée par son terme initial :

$$u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1} \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$$

• Si une suite est décroissante, elle est majorée par son terme initial :

$$u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$$

• Dans le cas d'une suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$:
si f est bornée sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ l'est également.

Exemple

Soit la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \sqrt{2 + \cos n}$.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on sait que :
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$.
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[1 ; 3]$, on peut écrire :

$$1 \leqslant \sqrt{2 + \cos x} \leqslant \sqrt{3}.$$

La suite (u_n) est donc bornée.



3 Suites adjacentes

3.1 Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Remarque

Voir Exercices 23 à 27

Dans les conditions de la définition, on a, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

En effet, s'il existait un rang k tel que $u_k > v_k$, alors, par croissance de (u_n) et décroissance de (v_n) , la différence $u_n - v_n$ serait toujours supérieure à $u_k - v_k$ pour $n \geqslant k$; elle ne tendrait donc pas vers 0.

Exemples

On définit (u_n) et (v_n) , pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} .$$

La suite (u_n) est croissante puisque, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} .$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2} .$$

On en déduit que (v_n) est décroissante.

Enfin, la différence $u_n - v_n = \frac{-1}{n}$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

Ces deux suites sont donc adjacentes. Leur programmation sur tableur permet d'observer leur comportement.

PI : =B4+1/(A5^2)

	A	B	C
1	valeur de n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69444444
5	4	=B4+1/(A5^2	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65087884
11	10	1,54976773	1,64976773
12	11	1,55803219	1,64894128
13	12	1,56497664	1,64830997
14	13	1,5708938	1,64781688
15	14	1,57599584	1,64742441

3.2 Théorème — admis

Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

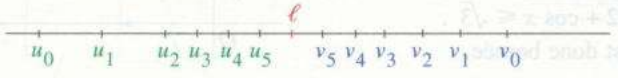
Exemple

On pourrait démontrer que les suites de l'exemple précédent convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$, mais peu rapidement.

997	996	1,64393055	1,64493457
998	997	1,64393156	1,64493457
999	998	1,64393256	1,64493457
1000	999	1,64393357	1,64493457
1001	1000	1,64393457	1,64493457
1002			
1003	(pi() ^2)/6 =	1,6449341	

Remarque

Si ℓ désigne la limite commune des suites (u_n) et (v_n) , on a, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
On obtient ainsi des encadrements de la limite ℓ de plus en plus précis lorsque n augmente (leur amplitude tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini).



4 Convergence des suites monotones

4.1 Théorème admis

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Voir Exercices 28 à 32

Exemples

• Soit la même suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

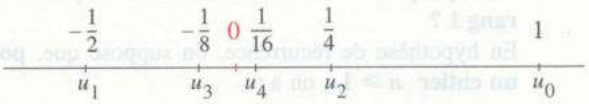
On sait que (u_n) est croissante ; de plus, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$.

Or, on a l'égalité $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$; d'où, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

La plupart des termes s'annulent deux à deux dans cette dernière somme, et on obtient $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
La suite (u_n) est donc majorée par 2, et croissante ; elle est donc convergente.
Mais on n'obtient pas ainsi sa limite.

• La suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$ est convergente vers 0 et « alternée », donc elle n'est pas monotone.



On en déduit que la réciproque du théorème précédent est fausse : il existe des suites convergentes qui ne sont pas monotones.

Remarque

Le théorème qui précède est un théorème d'existence. Il permet d'affirmer, sous certaines conditions, qu'une suite est convergente, mais ne permet pas de déterminer sa limite. Pour la détermination de la limite on doit utiliser d'autres résultats, lorsque c'est possible. La propriété suivante est souvent utile dans le cas des suites récurrentes.

4.2 Propriété

Soit une suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
On dit que ℓ est un « **point fixe** » de la fonction f.

Démonstration

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = f(u_n)$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors, f étant continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f(\ell)$.
Or, pour tout n, on a $v_n = u_{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$. D'où l'égalité $\ell = f(\ell)$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = k$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors il vérifie $\ell = \ell^2 + 1$; mais l'équation du second degré $\ell^2 - \ell + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$; la suite (u_n) n'est donc pas convergente : aucun réel ne peut être limite de cette suite.

1 Démonstration par récurrence

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la somme S_n des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• Méthode

Lorsque l'on doit établir une propriété pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, il faut penser à l'éventualité d'un raisonnement par récurrence.
Dans ce cas, il est impératif de respecter les deux étapes du raisonnement :
initialisation, puis caractère héréditaire de la propriété.

• Initialisation

La propriété est vraie au rang $n = 1$; en effet, on a :

$$S_1 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = 1 .$$

• La propriété est-elle héréditaire à partir du rang 1 ?

En hypothèse de récurrence, on suppose que, **pour un entier** $n \geqslant 1$, on a :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Alors, au rang $(n+1)$:

$$S_{n+1} = [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2] + (n+1)^2 .$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\,\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} .$$

Par étude de ses racines, on factorise le trinôme :

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$$

Or, $(n+2)(2n+3) = ((n+1)+1)(2(n+1)+1)$.
Ainsi, on a :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} .$$

Et la propriété est donc établie au rang $(n+1)$.

Ainsi la propriété proposée est vraie au rang $n = 1$, et elle est héréditaire à partir du rang 1.

On peut donc conclure par récurrence qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

■ Mise en garde

Lors de la formulation de l'hypothèse de récurrence, il est essentiel de supposer la propriété vraie pour **un** entier $n \geqslant 1$, et surtout pas pour **tout** entier $n \geqslant 1$, puisque cette dernière formulation conduit à admettre purement et simplement le résultat recherché.

2 Convergence d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,u_n + 3$.

1° À l'aide d'une calculatrice, puis d'une représentation graphique, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

2° a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 4$.

b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour un entier naturel n quelconque, puis le sens de variation de (u_n). Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

3° Déterminer la limite de la suite (u_n).

• Méthode

• Pour **démontrer qu'une suite** (u_n) **est convergente**, on peut prouver qu'elle est croissante et majorée, ou décroissante et minorée.

• Pour **calculer sa limite**, on peut mettre en place une suite « auxiliaire », ou étudier les éventuels points fixes de la fonction continue qui permet de définir la suite récurrente (u_n).

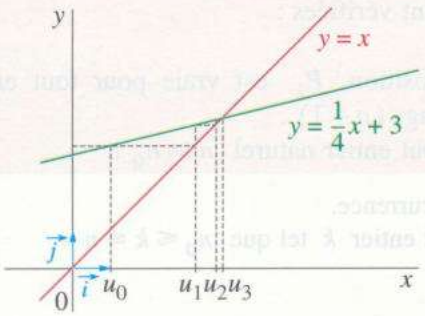
1° En utilisant la touche ANS de la calculatrice, on obtient l'écran suivant, après calcul des cinq premiers termes.



Il semble que la suite soit croissante, et converge vers 4.
La représentation graphique, obtenue à partir du tracé des droites d'équations :

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \quad \text{et} \quad y = x \,,$$

confirme cette impression.



2° a) Pour démontrer que la suite est majorée par 4, on utilise un raisonnement par récurrence.

La propriété est vraie au rang 0 :

$$u_0 = 1 \,, \quad \text{donc} \quad u_0 \leqslant 4 \,.$$

On montre alors que la propriété est héréditaire à partir du rang 0.

On suppose l'hypothèse de récurrence :

pour un entier naturel n, on a $u_n \leqslant 4$.

Avec la relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$, on obtient :

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} \times 4 + 3 \,, \text{ soit } u_{n+1} \leqslant 4$$

et **la propriété est vraie au rang** $(n+1)$.

En conclusion, on a prouvé par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4.

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$$

$$= -\frac{3}{4}(u_n - 4) \,.$$

Or, d'après le résultat précédent, on sait que :

pour tout entier naturel n, $u_n - 4 \leqslant 0$.

On peut donc en déduire que :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \,.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, elle est donc convergente.

3° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 \,.$$

f est continue et, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \,.$$

La suite (u_n) étant convergente, sa limite ℓ vérifie donc l'équation $f(\ell) = \ell$.
Or, cette équation admet le réel 4 pour unique solution.

On en déduit que (u_n) converge vers 4, ce qui confirme la conjecture formulée à la première question.

Autre méthode

On peut introduire la suite auxiliaire définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 4 \,.$$

On démontre alors que cette suite est géométrique et convergente vers 0.

1 « Récurrence », chercher l'erreur…

On se propose ici de « montrer » par récurrence que n points distincts du plan sont toujours alignés.
Soit la propriété : « n points distincts du plan sont toujours alignés ».

• Initialisation
La propriété est vraie pour $n = 2$; en effet, par deux points distincts du plan passe une droite unique, et ces deux points sont donc alignés.

• La propriété est héréditaire
Hypothèse de récurrence : on suppose que, pour un entier $n \geqslant 2$, tout ensemble formé de n points distincts est contenu dans une droite.
Soit alors $\mathscr{E}$ un ensemble de $n+1$ points distincts, et A et B deux d'entre eux, distincts.
L'ensemble $\mathscr{E}$ privé de A est formé de n points distincts ; donc, d'après l'hypothèse de récurrence, ces n points sont alignés sur une droite d.
De la même façon, $\mathscr{E}$ privé de B est formé de n points alignés sur une droite d'.
Comme $n+1 \geqslant 3$, les droites d et d' ont au moins deux points communs : elles sont donc confondues et ainsi tous les points de $\mathscr{E}$ appartiennent à d.

• Conclusion
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a prouvé par récurrence que n points distincts du plan sont toujours alignés…
Il s'agit maintenant de trouver l'erreur dans ce raisonnement !

2 Une autre forme du raisonnement par récurrence

Il peut être utile dans certains cas de disposer d'une autre forme du principe de récurrence.

Soit n_0 un entier naturel donné et P_n une proposition dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$.
On suppose que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
• P_{n_0} est vraie ;
• pour tout entier naturel $p \geqslant n_0$, si la proposition P_k est vraie pour tout entier k vérifiant $n_0 \leqslant k \leqslant p$, alors elle est vraie au rang $(p+1)$.
On peut alors conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

On démontre ce résultat à l'aide du principe de récurrence.
Soit Q_n la proposition : « P_k est vraie pour tout entier k tel que $n_0 \leqslant k \leqslant n$ ».

1 a) Vérifier que Q_{n_0} est vraie.

b) Vérifier que si Q_p est vraie pour un entier $p \geqslant n_0$, alors Q_{p+1} est vraie.

c) En déduire que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Cette version du raisonnement par récurrence peut être commode lorsque la propriété étudiée fait intervenir plusieurs rangs successifs.

2 Exemple d'application
Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 2^n$.

Remarque
On peut démontrer, à l'aide de cette forme du raisonnement par récurrence, la propriété de décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers.

3 Calculatrices et suites récurrentes

Les calculatrices permettent plusieurs procédures pour traiter des suites récurrentes, y compris des programmes intégrés permettant de calculer les termes d'une suite.

3.1 La touche ANS

L'instruction ANS rappelle le résultat du dernier calcul effectué. Elle peut s'avérer très commode pour calculer les premiers termes d'une suite récurrente.

1 On considère, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

Taper 9 ENTER (ou EXE), puis 2 × ANS − 5 ;



la calculatrice effectue $2 \times 9 - 5$ et affiche 13.

Si, on tape à nouveau ENTER, que donne la calculatrice ?

Quel calcul a été effectué ? Quelle est alors la valeur stockée dans la mémoire ANS ?

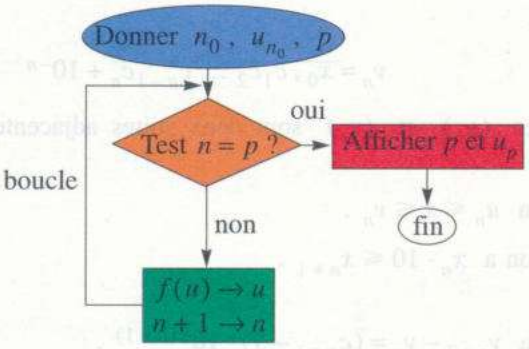
Quel résultat sera obtenu si on tape une fois de plus sur la touche ENTER ?

Calculer ainsi la valeur de u_{10}.

2 En reprenant le procédé, que peut-on conjecturer pour la suite (v_n) définie par $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$?

3.2 Programmation du calcul d'un terme donné

Il peut être très utile de programmer le calcul du terme de rang p d'une suite récurrente pour une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son terme initial u_{n_0} et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La programmation repose sur l'*organigramme* suivant :



choix des valeurs du rang initial n_0, du terme initial u_{n_0} et du rang p

Test : le rang n a-t-il atteint le rang p choisi ?

Si oui, **afficher** les résultats ;

sinon, **calculer le terme suivant**, augmenter de 1 le rang, puis revenir avant le test (boucle)

• sur T.I.	avec $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$	• sur Casio
Prompt N, U, P	entrée des valeurs initiales	"N"? → N:"U"? → U:"P"? → P
Lbl1	(adresse 1)	Lbl 1
If N = P	test	If N = P
Then	si oui	Then "P" : P ◢
Disp "P", P, "U", U	afficher les résultats	"U":U ◢
Else	sinon	Else $\sqrt{}$ (U² + 2) → U
$\sqrt{}$ (U² + 2) → U	remplacer u par $f(u)$	
N + 1 → N	remplacer n par $n + 1$	N + 1 → N
Goto 1	retourner à l'adresse 1	Goto 1

Pour aller plus loin

On peut transformer le programme pour tester :

- si le terme de la suite dépasse une valeur B choisie, le test est : `if U > B` ;
- si la distance entre deux termes consécutifs u_{n+1} et u_n est devenue inférieure à une distance d choisie, il faut utiliser deux « mémoires » U, V et le test est `If Abs (U – V) < d`

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 0{,}5$. À partir de quel rang aura-t-on $u_n > 2\,000$?

2 Soit $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 2}{2v_n + 1}$.
À partir de quel rang a-t-on $|v_n - v_{n+1}| < 10^{-5}$?

4 Approximations décimales d'un réel

Pour un nombre réel donné r, on appelle partie entière de r, et on note $E(r)$, l'unique entier relatif m vérifiant $m \leqslant r < m + 1$.
$E(r)$ est le plus grand entier majoré par r ; ainsi, par exemple, $E(\pi) = 3$; $E(-3{,}86) = -4$.

Soit x un nombre réel. On considère, pour tout entier naturel n, la partie entière du réel $x \cdot 10^n$; c'est l'unique entier relatif x_n qui vérifie $x_n \leqslant x \cdot 10^n < x_n + 1$. On pose alors :

$$u_n = x_n \cdot 10^{-n} \quad \text{et} \quad v_n = (x_n + 1) \cdot 10^{-n} = u_n + 10^{-n}.$$

1 Déterminer les six premiers termes des suites (u_n) et (v_n) pour le réel $x = 8{,}479\,2$.
On suppose que x est un réel positif. Le réel u_n est par définition un nombre décimal, s'écrivant sous la forme $\overline{x_0, c_1c_2 \ldots c_n}$, où x_0 désigne la partie entière de x, les c_n étant des chiffres de 0 à 9. On a ainsi :

$$u_0 = \overline{x_0}$$
$$u_1 = \overline{x_0, c_1}$$
$$u_2 = \overline{x_0, c_1c_2}$$
$$\vdots$$
$$u_n = \overline{x_0, c_1c_2 \ldots c_n}$$

$$v_1 = \overline{x_0, c_1} + 10^{-1}$$
$$v_2 = \overline{x_0, c_1c_2} + 10^{-2}$$
$$\vdots$$
$$v_n = \overline{x_0, c_1c_2 \ldots c_{n-1}c_n} + 10^{-n}$$

2 On se propose de démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes qui convergent vers x.

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant x \leqslant v_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $x_n \cdot 10 \leqslant x_{n+1}$.
En déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = (c_{n+1} - 9) \cdot 10^{-(n+1)}$.
En déduire que la suite (v_n) est décroissante.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$, puis conclure.

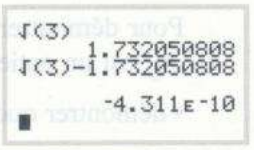
Pour tout réel positif x, u_n et v_n sont des **valeurs décimales approchées** de x à 10^{-n} près par défaut et par excès respectivement.

La suite (u_n) permet de définir, lorsque n tend vers $+\infty$, le **développement décimal illimité du réel x** ; on note $x = \overline{x_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots}$.
Pour $x < 0$, le développement décimal s'obtient à partir de celui du réel positif $-x$.

3 Exemple

a) Justifier les inégalités $1{,}732 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1{,}732\ 1$; en déduire les cinq premiers termes des suites (u_n) et (v_n) associées au réel $\sqrt{3}$.

b) Commenter la copie d'écran de calculatrice ci-contre.
Comment s'explique ce résultat apparemment « paradoxal » ?
Quel terme de la suite (u_n) ou (v_n) l'écran propose-t-il à l'affichage pour $\sqrt{3}$?
Est-ce par ce nombre que $\sqrt{3}$ est remplacé dans les calculs ?



5 Rapidité de convergence

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2 + \frac{1}{n}$;
- $v_0 = 3$, et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 1$.

1 a) Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.
b) Quelle est la limite de (u_n) ? Avec la calculatrice, conjecturer le comportement de (v_n) .

2 Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $w_n = v_n - 2$.
Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et converge vers 0.
Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

3 a) À l'aide d'un tableur, dresser la liste des valeurs de u_n , v_n , $|u_n - 2|$ et $|v_n - 2|$ pour les valeurs de n de 1 à 15. Que constate-t-on ?

b) Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel 2, mais leurs « rapidités de convergence » sont différentes ; pour évaluer cette rapidité, on étudie la convergence vers 0 des différences $|u_n - 2|$ et $|v_n - 2|$. Calculer ces différences.

Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, du quotient $\frac{|v_n - 2|}{|u_n - 2|}$; commenter.

6 Exemple de situation « arithmético-géométrique »

Une automobile est vendue neuve au prix de 15 000 € au 1er janvier 2002.
On calcule sa « cote » annuelle (prix de vente estimé) de la façon suivante : chaque année, la nouvelle cote au 1er janvier est égale à la précédente diminuée de 25 %, le tout étant augmenté de 500 €.
On appelle P_n le montant de la cote au 1er janvier de l'année $2002 + n$.

1 a) Calculer P_0 , P_1 et P_2 .
b) Déterminer, pour un entier naturel n quelconque, l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n .

2 Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (P_n) .
Quel paraît être le comportement de cette suite ?

3 a) On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = P_n - 2\ 000$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique et en déduire l'expression de P_n en fonction de n .
b) Quelle est la limite de P_n ?
Déterminer la date à partir de laquelle le véhicule aura une cote inférieure à 5 000 €.

Faire le point

• Récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier naturel donné, on doit :

• démontrer que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;

• démontrer que si la propriété est vraie pour un entier $n \geqslant n_0$, alors elle est vraie pour l'entier $(n+1)$.

• Suites adjacentes

• Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$(u_n) \text{ est croissante, } (v_n) \text{ décroissante et } \lim_{n \mapsto +\infty} (u_n - v_n) = 0 .$$

• Deux suites adjacentes sont convergentes vers la même limite.

• Si ℓ désigne la limite commune des suites adjacentes (u_n) et (v_n), alors, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n .$$

On obtient ainsi, lorsque n augmente, des encadrements de plus en plus précis de ℓ.

• Convergence

• Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.

• Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Ces résultats permettent d'établir qu'une suite est convergente, mais ne donnent pas la valeur de sa limite.

savoir	comment faire ?
utiliser un raisonnement par récurrence	• conjecturer le résultat, s'il n'est pas donné, en procédant à des « essais » sur les premières valeurs de n • bien respecter les deux étapes du raisonnement par récurrence : initialisation et propriété héréditaire • formuler correctement l'hypothèse de récurrence
obtenir des encadrements d'un nombre réel	faire apparaître ce nombre réel comme la limite commune de deux suites adjacentes et utiliser les propriétés de ces suites
prouver qu'une suite est convergente	• démontrer (si tel est le cas !) que cette suite est croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) • pour le calcul de sa limite, recourir aux méthodes déjà connues pour les fonctions ou, pour une suite récurrente, examiner les points fixes de la fonction continue associée à la suite

1 Raisonnement par récurrence

1 Pour démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4u_n - 3$$

est constante égale à 1, Émilie a rédigé la solution suivante :

« Par hypothèse, on a $u_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Je suppose que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 1$ (hypothèse de récurrence) ;
alors, on en déduit :

$$u_{n+1} = 4u_n - 3 = 4 \times 1 - 3 = 1 .$$

Ainsi, la propriété est également vraie au rang $n+1$.
En conclusion, la propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, on en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = 1$. »

La copie d'Émilie est-elle satisfaisante ?

2 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$.

3 Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

4 On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, le n-ième nombre triangulaire par :

$$t_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$



Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

5 On considère la suite définie par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1$.

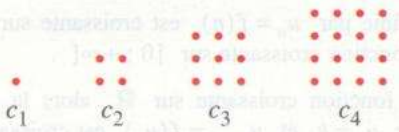
À l'aide de la touche ANS de la calculatrice, conjecturer une propriété de la suite (u_n), puis démontrer cette propriété par récurrence.

6 On considère la suite définie par :

$u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 10u_n - 18$.

À l'aide de la calculatrice, conjecturer une expression de u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 1$, et démontrer par récurrence cette conjecture.

7 On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, le n-ième nombre carré par $c_n = n^2$. (Voir *Activité* 4.)



Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

8 1° Calculer les sommes :

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} , \quad \text{puis} \quad \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4}$$

$$\text{et enfin} \quad \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} .$$

2° À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'expression en fonction de n de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} .$$

9 ★ Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel ; démontrer que :

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} .$$

10 On rappelle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n .$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$n! \geqslant 2^{n-1} .$$

11 ★ On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n).

2 Comportement d'une suite numérique

1 Vrai-Faux

12 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses.?

1° Si f est une fonction croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

2° Si la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$, alors f est une fonction croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3° Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, alors la suite (u_n) définie par $u_0 = k$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

4° Si (u_n) est croissante, alors elle n'est pas majorée.

5° Si la suite définie par $u_n = f(n)$ est bornée, alors f est bornée sur $[0 ; +\infty[$.

6° Si, à partir d'un rang n_0, on a $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors (w_n) est également convergente.

2 Applications

13 Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par 2 :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$; **b)** $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{2}$; **c)** $u_n = \dfrac{2 + \sin^2 n}{4}$.

14 Démontrer que chacune des suites (u_n) est minorée, mais pas bornée :

a) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}+1}$; **b)** $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n+1}$.

15 Dans chacun des cas suivants, on définit la suite (u_n) pour $n \geqslant 1$; préciser si cette suite est bornée :

a) $u_n = n^2 + n - 2$; **b)** $u_n = \ln(n)$; **c)** $u_n = \dfrac{1}{n}$;
d) $u_n = \ln \dfrac{n}{n+1}$; **e)** $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$; **f)** $u_n = \mathrm{e}^{n^2}$.

Dans les exercices 16 à 18, étudier le sens de variation de la suite (u_n) et préciser si elle est majorée, minorée, bornée (la suite est définie sur $\mathbb{N}$).

16 **a)** $u_n = \dfrac{4n + 1 + 2^n}{5}$; **b)** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

17 **a)** $u_n = n + (-1)^n$; **b)** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

18 **a)** $u_n = \dfrac{-5}{3^n}$; **b)** $u_n = \dfrac{(-5)^n}{3}$.

19 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

a) $u_n = n^2 + 4n + 3$; **b)** $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$;
c) $u_n = \dfrac{1 - n^2}{n+2}$; **d)** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$.

20 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs et étudier son sens de variation.
En déduire que la suite (u_n) est bornée et en préciser un majorant et un minorant.

21 ★ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit sur $]0 ; +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = x^n (2 \ln x - 1).$$

1° Déterminer la fonction dérivée f_n' et démontrer qu'elle s'annule une seule fois sur $]0 ; +\infty[$ en un réel a_n.

2° **a)** Exprimer a_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$1 \leqslant a_n < \sqrt{\mathrm{e}}.$$

c) Étudier les variations de la suite (a_n).

d) Préciser le comportement de (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

22 ★ On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.

1° Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite et conjecturer son comportement (sens de variation, limite).

2° Démontrer que (u_n) est positive et majorée par 5.

3° Étudier le sens de variation de (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

3 Suites adjacentes

1 Vrai-Faux

23 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Deux suites convergentes ayant la même limite sont adjacentes.

2° Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et si ces deux suites convergent, alors elles sont adjacentes.

3° Les suites dont les termes généraux sont, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

4° Si la suite (u_n) est croissante et convergente et si, pour tout entier naturel n, $v_n = -u_n$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2 Applications

24 Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et préciser leur limite commune :

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ et $v_n = -u_n$;

b) $u_n = \dfrac{-1}{n+2}$ et $v_n = \dfrac{2}{n+1}$;

c) $u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 3 + \dfrac{2}{n+3}$.

25 On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

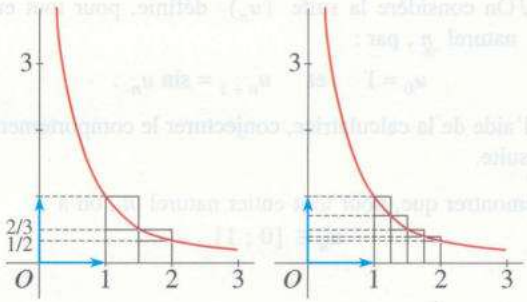
Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

26 ★ On définit, pour tout entier $n \geqslant 2$, les suites (s_n) et (S_n) par :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S_n = s_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

27 Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction inverse sur l'intervalle $]0 ; 3[$.



1° Par une argumentation graphique, si $\mathscr{A}$ désigne l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$, justifier, à l'aide du premier graphique, l'encadrement $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right)$.

2° À l'aide du second graphique proposé, déterminer l'encadrement de $\mathscr{A}$ obtenu et justifier graphiquement.

3° À l'étape suivante, c'est-à-dire en « découpant » l'intervalle $[1 ; 2]$ en 8 intervalles de même amplitude, quel encadrement obtient-on pour $\mathscr{A}$?

On peut ainsi construire deux suites adjacentes en ajoutant les aires des rectangles « au-dessous » de la courbe et celles des rectangles « au-dessus » de la courbe.

Ces deux suites convergent vers le réel $\mathscr{A}$, dont on admet ici qu'il est égal à $\ln 2$, image de 2 par la fonction logarithme népérien. Quel encadrement de $\ln 2$ a-t-on obtenu ainsi ?

4 Convergence des suites monotones et bornées

1 Vrai-Faux

28 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Du fait que, pour tout entier naturel n, on a $\sin n \leqslant 1$, on peut en déduire que la suite de terme général $\sin n$ est convergente.

2° Toute suite croissante et convergente est majorée.

3° Toute suite convergente et majorée est croissante.

4° Toute suite croissante est minorée.

5° Si la suite (u_n) est croissante et strictement positive, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

2 Applications

29 **Suite logique**

$u_1 = 0{,}1$; $u_2 = 0{,}122$; $u_3 = 0{,}122\,333$; etc.

1° Préciser les valeurs de u_4 et u_5.

2° Combien de chiffres après la virgule u_9 contient-il ? et u_{10} ?

3° La suite ainsi construite est-elle convergente ?

30 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sin u_n .$$

1° À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de cette suite.

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \in [0\,;\,1] .$$

3° Étudier le signe sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction $x \mapsto x - \sin x$, et en déduire le sens de variation de (u_n).

4° Que peut-on conclure à propos de la suite (u_n) ?

31 ★ On considère la suite (S_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} .$$

Démontrer que (S_n) est majorée par 1 et convergente (on ne demande pas la limite).

32 ★ On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 4 .$$

2° a) Étudier le sens de variation de (u_n) et en déduire sa convergence.

b) Quelle est la limite de (u_n) ?

5 Problèmes

1 Utilisation de suites auxiliaires

33 ★★ La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6} .$$

1° a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1 < u_n < 3$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2° On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

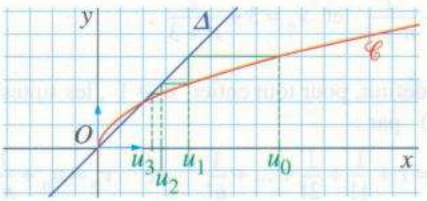
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

b) Quelle est la limite de (v_n) ?

3° Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n.
En déduire le comportement à l'infini de u_n.

34 ★★ Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

La droite Δ d'équation $y = x$, la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sqrt{x}$ et les premiers termes de la suite (u_n) sont représentés sur la figure ci-dessous :



On veut démontrer que (u_n) converge vers 1.

1° Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n \geqslant 1 .$$

2° a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} .$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1) .$$

3° a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.

b) Conclure à propos de la convergence de la suite (u_n).

35 ★ On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.

1° À l'aide de la touche ANS de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (variations et limite).

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

3° Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Que peut-on en déduire ?

4° On introduit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

b) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n).

36 Soit f la fonction définie, pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$, par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

1° a) Démontrer que si $x > 1$, alors $f(x) > 1$.

b) En déduire que l'on peut définir la suite récurrente (u_n) par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2° On désire à présent définir les suites (v_n) et (w_n), pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln v_n.$$

a) Justifier que ces deux suites sont bien définies pour tout entier naturel n.

b) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

c) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n, puis v_n en fonction de n, et en déduire que :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

2 Raisonnement par récurrence

37 Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on appelle d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n sommets.

1° Calculer d_3, d_4 et d_5.

2° Pour tout $n \geqslant 3$, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.

3° Déterminer par récurrence une expression de d_n en fonction de n.

38 Démontrer, pour tout réel $a \geqslant 0$ et tout entier naturel n, « l'inégalité de BERNOULLI » :

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

39 ★ Démontrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

40 Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

41 ★ On s'intéresse ici à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels **impairs**.

1° Calculer S_1, S_2 et S_3.

2° Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = 2n^4 - n^2$.

3° Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41\,328$?

3 Études de suites

42 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1° Démontrer que la suite ainsi définie est croissante et majorée.

2° Quelles sont les valeurs possibles pour la limite de (u_n) ?

3° Démontrer que (u_n) est convergente vers le nombre $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, encore appelé « nombre d'or », égal à :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

43 ★★ La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \frac{5^n}{n!}.$$

1° Démontrer que (u_n) est minorée par 0 et décroissante à partir du rang 5.

Que peut-on en déduire ?

2° Établir que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1}.$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 6$, on a :

$$0 < u_n < \frac{5u_5}{n}.$$

3° Préciser la limite de la suite (u_n).

44 ★ On se propose de démontrer que quel que soit l'entier naturel $\alpha \geqslant 2$, la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente.

A. Cas $\alpha = 2$

1° Calculer u_1, u_2 et u_3.

2° Justifier la croissance de la suite (u_n).

3° Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$; justifier que l'on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)},$$

puis démontrer l'égalité $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

4° Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

En déduire la convergence de (u_n).

B. Cas $\alpha \geqslant 3$

1° Justifier la croissance de (u_n).

2° Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2}$, et en déduire que (u_n) est majorée par 2. Conclure.

45 On définit la suite (u_n) par :

$u_0 \in]0\,;5]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$.

1° À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (sens de variation et limite).

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

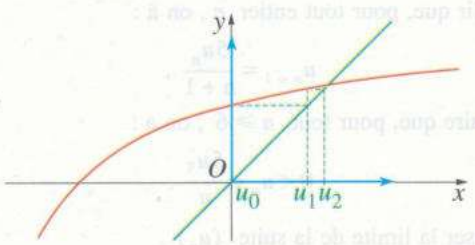
$$0 \leqslant u_n \leqslant 5.$$

3° Étudier le sens de variation de (u_n) et en déduire sa convergence. Quelle est sa limite ?

46 ★ On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

1° La figure ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. Que permet-elle de conjecturer ?



2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3° Démontrer que, pour tout entier naturel n, les différences $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont de même signe.

En déduire le sens de variation de (u_n), puis sa convergence.

4° Déterminer la limite de la suite (u_n).

47 ★★ Soit k un réel tel que $0 < k < 1$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation $u_{n+1} = (1 + k^n)u_n$.

1° Calculer en fonction de k les termes u_2, u_3, u_4.

2° Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n = (1+k)(1+k^2)...(1+k^{(n-1)})$.

3° On considère à présent la suite (v_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $v_n = \ln u_n$.

a) Justifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que la suite (v_n) est majorée par $\frac{k}{1-k}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est majorée, étudier son sens de variation et en déduire sa convergence.

4 Divers

48 On considère la fonction affine croissante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

1° Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Quel est le comportement de la suite (u_n) ?

2° Soit (v_n) la suite définie par :

$v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Calculer les trois premiers termes de (v_n).

b) Démontrer que la suite (v_n) est minorée par 2.

c) En déduire que la suite (v_n) est décroissante, puis convergente ; préciser sa limite.

3° Soit (w_n) la suite définie par :

$w_0 = -2$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

a) Calculer les trois premiers termes de (w_n).

b) Démontrer que la suite (w_n) est croissante, puis convergente ; préciser sa limite.

Que peut-on illustrer à propos des suites récurrentes à l'aide de cet exercice ?

49 ★ On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} ;$$

$$v_1 = 12 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} .$$

1° Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3.

2° On pose $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que (w_n) est géométrique et préciser sa limite.

3° Après avoir étudié les sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

Que peut-on en déduire ?

4° On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = 3u_n + 8v_n$.

Démontrer que cette suite est constante, et en déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

50 ★★ Soit a et b deux nombres réels vérifiant $0 < a < b$.

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$;

$v_0 = b$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1° Vérifier que (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

2° On pose, pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} w_n$ et en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.

3° Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

4° Que peut-on en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

5° À l'aide de l'étude de la suite $(u_n v_n)$, déterminer la valeur de la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Application : En prenant $a = 3$ et $b = 5$, déterminer à l'aide de (u_n) et (v_n) un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2} de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.

51 ★★ **Constante d'Euler**

On peut démontrer que la suite (S_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ n'est pas minorée et tend vers $+\infty$.

On considère la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = S_n - \ln n .$$

1° Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2° On admet dans cette question que, pour tout réel $x > -1$, on a $x \geqslant \ln(1+x)$.

(On peut démontrer ce résultat en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $]-1 ; +\infty[$.)

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) .$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3° On pose, à présent, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} .$$

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

Quel est le sens de variation de (v_n) ?

4° Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

La limite commune de ces deux suites est appelée la **constante d'Euler**.

5° Déterminer à l'aide des suites (u_n) et (v_n) un encadrement de la constante d'Euler d'amplitude 10^{-1}.

52 ★★★ On considère les deux suites à termes strictement positifs (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n} ;$$

$$v_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)} .$$

On se propose ici de démontrer que ces deux suites sont convergentes vers 0.

1° Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.

2° Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ'.

3° On considère à présent la suite (w_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $w_n = u_n v_n$.

a) Compte tenu de la convergence des suites (u_n) et (v_n) vers ℓ et ℓ', que peut-on en déduire pour (w_n) ?

b) Déterminer l'expression de (w_n) en fonction de n, et en déduire l'égalité $\ell\ell' = 0$.

4° Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n < v_n$.

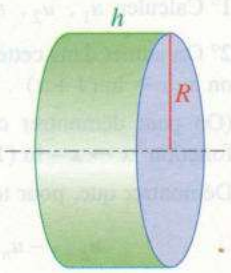
En déduire que $\ell = 0$.

5° Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$2u_{n+1} > v_n .$$

En déduire l'inégalité $2\ell \geqslant \ell'$ et conclure.

53 ★ Volume d'un paraboloïde



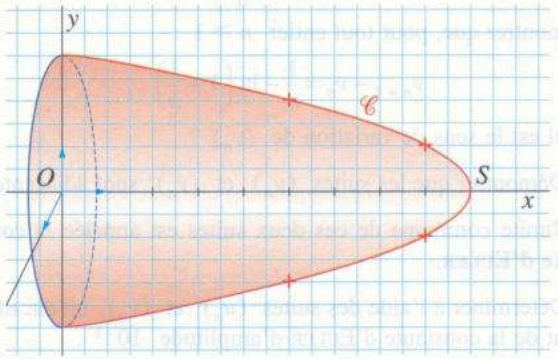
A. Question préliminaire

Quel est le volume d'un cylindre de hauteur h et de base un disque de rayon R ?

B. Soit f la fonction définie sur $[0\,;9]$ par $f(x)=\sqrt{9-x}$.

$\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 1 cm, et $S(9\,;0)$ son sommet.

On considère le paraboloïde engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.



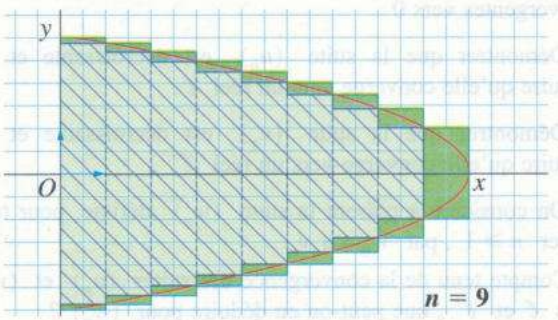
On se propose de déterminer le volume $\mathscr{V}$ de ce solide à l'aide d'encadrements et de suites.

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on coupe le solide suivant n plans équidistants parallèles à sa base.

On considère :

– la somme A_n des volumes des cylindres engendrés par la rotation des n rectangles verts ;

– la somme B_n des volumes des cylindres engendrés par la rotation des $n-1$ rectangles bleus.



1° Comparer les nombres $\mathscr{V}$, A_n et B_n.

2° Quelle est la hauteur de chacun des cylindres ?

3° a) Montrer que :

$$A_n=\frac{9\pi}{n}\left([f(0)]^2+\left[f\left(\frac{9}{n}\right)\right]^2+\ldots+\left[f\left((n-1)\,\frac{9}{n}\right)\right]^2\right).$$

b) Exprimer $\left(f\left(k\,\frac{9}{n}\right)\right)^2$ en fonction de k et de n pour k entier dans $[0\,;n-1]$.

En déduire que $A_n=\frac{81}{2}\,\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4° Par un même raisonnement, exprimer B_n en fonction de n.

5° Déterminer la limite de A_n et celle de B_n lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire le volume $\mathscr{V}$ du paraboloïde.

54 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$, $u_1=1$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

Cette suite est appelée **« suite de FIBONACCI »**.

1° Calculer les dix premiers termes de (u_n).

Démontrer que (u_n) est strictement positive et croissante.

2° On définit la suite (φ_n) par :

pour tout entier naturel n, $\varphi_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

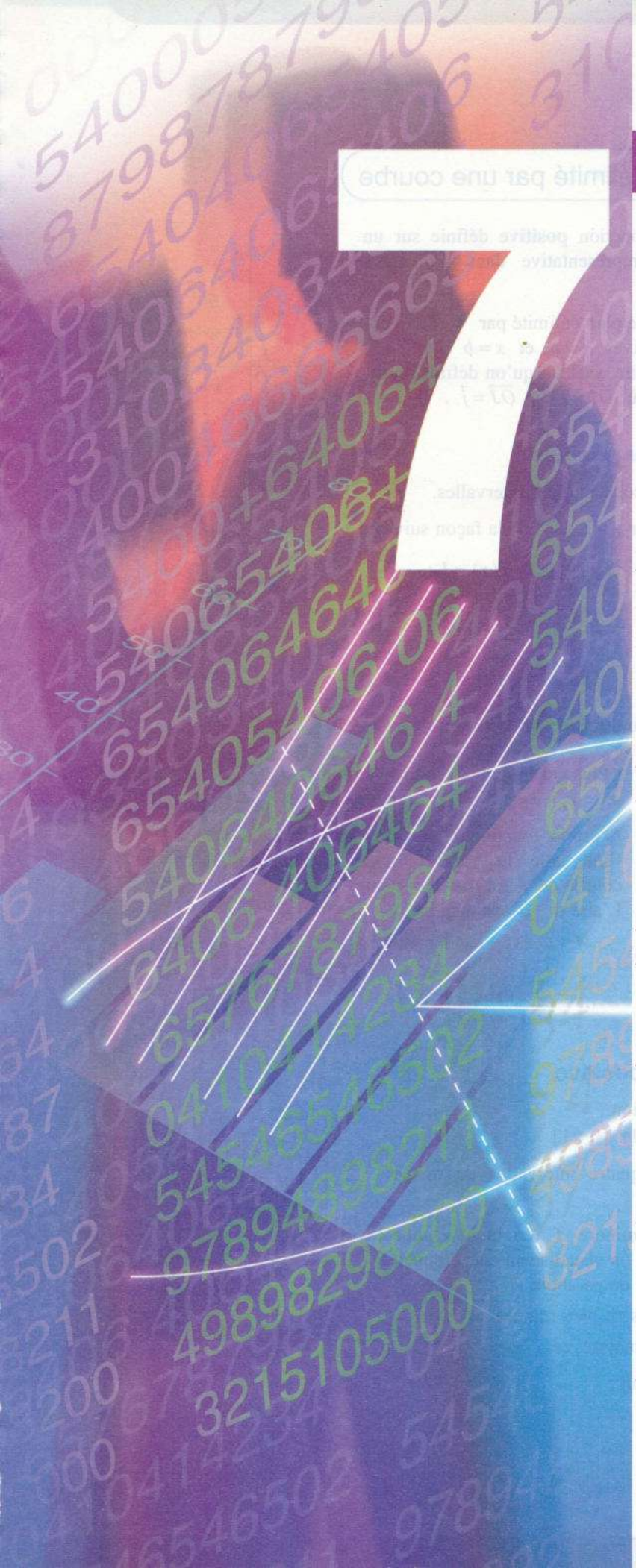
a) Démontrer que la suite (φ_n) est strictement positive.

b) Démontrer que (φ_n) est majorée par 2.

3° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\varphi_{n+1}=1+\frac{1}{\varphi_n}.$$

La limite de cette suite est appelé le **« nombre d'or »** ; ce nombre intervient dans de nombreux domaines mathématiques comme artistiques (architecture, peinture, ...).



CHAPITRE

7

Intégration

Notion d'intégrale pour une fonction positive p. 173
- définir une intégrale comme aire
- interpréter une valeur moyenne

Intégrale d'une fonction de signe quelconque p. 174
- étendre les notions précédentes

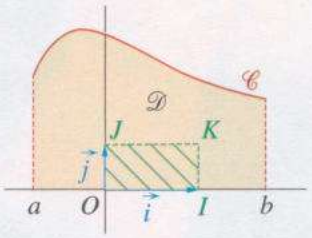
Intégrale et primitive p. 175
- lier intégrale et primitive
- calculer une intégrale en utilisant une primitive

Propriétés de l'intégrale p. 176
- calculer avec des intégrales
- minorer, majorer, encadrer une intégrale

Intégration par parties p. 178

1 Aire d'un domaine délimité par une courbe

a et b étant deux réels, soit f une fonction **positive** définie sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



Dans la suite, on désigne par $\mathscr{D}$ le domaine plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$.
On cherche l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$, en unités d'aire, sachant qu'on définit l'unité d'aire comme l'aire du rectangle $OIKJ$, où $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.

Cas d'une fonction en escalier positive

Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

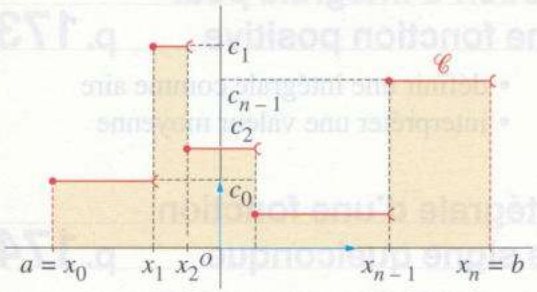
• Par exemple, f est la fonction définie sur $[-2\,;3]$ de la façon suivante :

si $x\in\left[-2\,;-\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=1$;

si $x\in\left[-\frac{1}{2}\,;2\right[$, $f(x)=\frac{7}{2}$;

si $x\in[2\,;3]$, $f(x)=\frac{1}{4}$.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ défini ci-dessus.



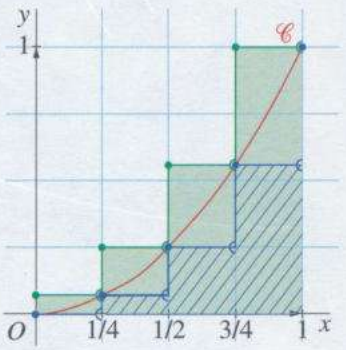
• Plus généralement, soit les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$, avec $x_0=a$ et $x_n=b$.

f est la fonction en escalier qui prend la valeur c_k sur l'intervalle $[x_k\,;x_{k+1}[$ pour k entier de 0 à $n-1$. La courbe de f est tracée ci-contre.
L'aire de $\mathscr{D}$ est égale à :

$$\mathscr{A}=c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)+\ldots+c_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x_{k+1}-x_k).$$

Cas d'une fonction continue positive

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente la fonction :
$f : x\mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.



a) On partage l'intervalle $[0\,;1]$ en quatre intervalles de même amplitude.

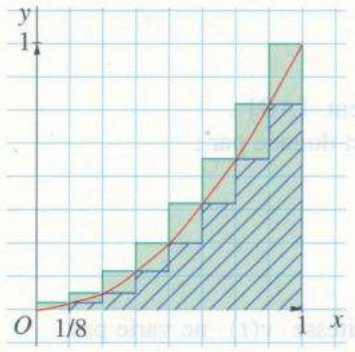
En créant une fonction en escalier qui minore f (en bleu) et une fonction en escalier qui la majore (en vert), on visualise un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'arc de parabole $\mathscr{C}$:

la somme des aires des rectangles hachurés en bleu minore $\mathscr{A}$;

la somme des aires des rectangles en vert majore $\mathscr{A}$.

Vérifier que l'on obtient ainsi l'encadrement :

$$\frac{7}{32}\leqslant\mathscr{A}\leqslant\frac{15}{32}.$$



b) On reprend le même travail, mais en partageant l'intervalle $[0 ; 1]$ en 8 intervalles de même amplitude.

Calculer l'aire du domaine hachuré en bleu, et l'aire de celui en vert.

Vérifier que l'on obtient :

$$\frac{35}{128} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{51}{128} .$$

Comment a évolué l'aire « bleue » ? l'aire « verte » ?

Comparer les amplitudes des deux encadrements obtenus en **a)** et **b)**.

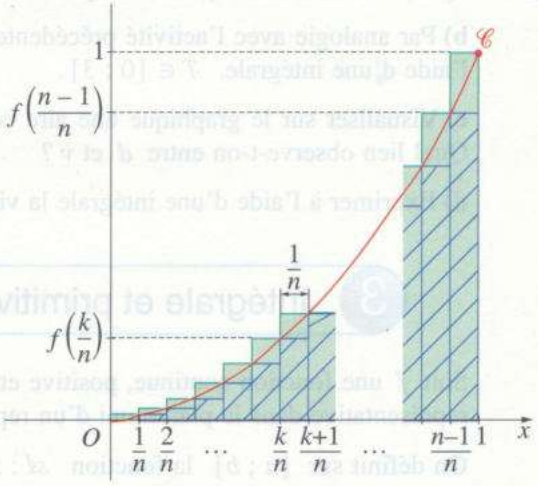
c) On généralise la méthode précédente, en divisant $[0 ; 1]$ en n intervalles de même amplitude.

L'aire qui minore $\mathscr{A}$ est maintenant :

$$s_n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 ,$$

$$\text{soit} \quad s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 ,$$

tandis que celle qui majore $\mathscr{A}$ est $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$.



Si on considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 2$ par $u_n = s_{2^n}$ et $v_n = S_{2^n}$, on montre qu'elles sont **adjacentes** :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

De plus, $u_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant v_n$.

Voir Activité 2, Chapitre 6

En utilisant l'égalité $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, exprimer, en fonction de n, le terme général de chacune des suites (u_n) et (v_n) et montrer qu'elles convergent vers la même limite.

En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.

Notion d'intégrale

Lorsque n tend vers l'infini, la largeur $\frac{1}{n}$ de chaque rectangle tend vers 0.

Cette largeur infiniment petite, située sur l'axe des abscisses, se note alors $\mathrm{d}x$.

Pour chaque valeur de x, les « dimensions » du rectangle sont $f(x)$ et $\mathrm{d}x$, et son aire est $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour noter la somme des aires de ces rectangles, on n'emploie plus le symbole $\sum$, mais le signe $\int$ qui se lit encore « somme », ou « intégrale ».

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, est alors notée $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On lit « intégrale de 0 à 1 de f » ou « somme de 0 à 1 de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Cette notation est due à LEIBNIZ (1646-1716).

2 Distance parcourue par un point mobile

Un mobile M, situé au point A à l'instant $t = 0$, se déplace sur un segment $[AB]$.
À l'instant t (exprimé en secondes), sa vitesse v (exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) est donnée par :

$$v(t) = 3t + 1 \quad \text{pour} \quad t \in [0 ; 3] .$$

À l'instant $t = 3$, le mobile arrive au point B.

1 Représenter la vitesse du mobile en fonction du temps.

2 **a)** Durant une période très courte, notée $\text{d}t$, on peut considérer que la vitesse $v(t)$ ne varie pas. Quelle est la distance parcourue par le mobile durant cette période ?

b) Par analogie avec l'activité précédente, exprimer la distance parcourue d entre les instants 0 et T à l'aide d'une intégrale, $T \in [0 ; 3]$.

c) Visualiser sur le graphique une aire correspondant à cette intégrale et exprimer d en fonction de T. Quel lien observe-t-on entre d et v ?

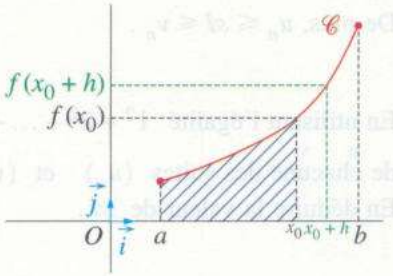
d) Exprimer à l'aide d'une intégrale la vitesse moyenne v_{m} du mobile sur $[0 ; 3]$, et la calculer.

3 Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I = [a ; b]$. On note $\mathscr{C}$, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On définit sur $[a ; b]$ la fonction $\mathscr{A} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\text{d}t$ et on fixe x_0 dans $[a ; b]$.

1 Que vaut $\mathscr{A}(a)$?

2 Soit h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in I$.



a) Que représente $\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)$ sur la figure ?

b) Par des arguments graphiques, justifier l'encadrement :

$$h \cdot f(x_0) \leqslant \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) \leqslant h \cdot f(x_0 + h) .$$

c) En déduire que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

3 Soit h un réel strictement négatif tel que $x_0 + h$ appartienne à l'intervalle I.
Par un raisonnement analogue, justifier l'encadrement :

$$f(x_0 + h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0) \quad \text{et en déduire} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} .$$

4 En déduire que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur I. Quelle est sa fonction dérivée ?
Que représente donc la fonction $\mathscr{A}$ pour la fonction f ?

5 **Application**
On prend dans cette question $I = [0 ; 1]$ et $f : x \mapsto x^2$.

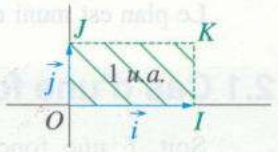
a) Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en 0. Donner l'expression de la fonction $\mathscr{A}$.

b) Retrouver alors l'aire cherchée dans l'*Activité* 1, correspondant à celle du domaine situé entre l'axe des abscisses et la parabole pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1 Notion d'intégrale pour une fonction positive

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on définit les points I, J et K par $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $OIKJ$ rectangle.

Dans l'*Activité* 1, sur la fonction carré, on a montré que l'aire du domaine délimité par la parabole, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ s'exprime comme limite de suites, et on a exprimé cette aire par une intégrale. On admet que ce résultat se généralise.

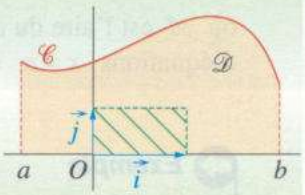


L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle $OIKJ$.

1.1 Aire et intégrale — définition

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Le réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de $f(x)\,dx$ » ou « **intégrale de a à b de f** ».

a et b sont les **bornes** de l'intégrale et x est une variable muette ; elle n'intervient pas dans le résultat. On utilise aussi les lettres t et u. Ainsi, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$.

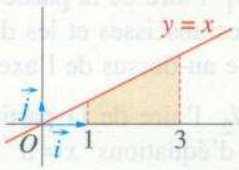
Exemples

• Si $a=b$, alors $\int_a^a f(x)\,dx=0$. En effet, le domaine $\mathscr{D}$ est alors réduit à un segment.

• Pour $m>0$, $\int_a^b m\,dx=(b-a)m$.
Le domaine $\mathscr{D}$ est un rectangle.



• $\int_1^3 x\,dx=4$. Le domaine $\mathscr{D}$ est un trapèze.



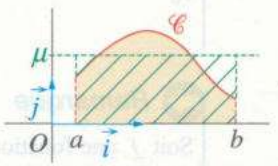
Voir Exercices 2 à 6

1.2 Valeur moyenne — définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a<b$.

La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ est le réel $\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

$\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ équivaut à $\mu(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$.



La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et $b-a$ soit de même aire que le domaine en jaune situé sous la courbe de f.
C'est la valeur que devrait prendre f si elle était constante sur $[a\,;b]$ pour que l'aire sous la courbe soit inchangée.

Voir Activité 2

2 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

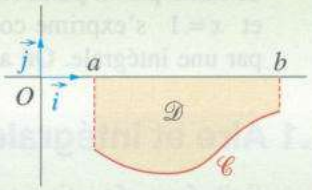
2.1 Cas d'une fonction négative

définition

Soit f une fonction **continue** et **négative** sur un intervalle $[a\,;b]$.

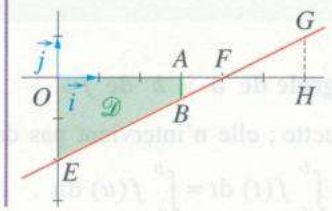
On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}\ ,$$



où $\mathcal{A}$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemple



Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x-2$.

La fonction f est continue et négative sur $[0\,;3]$.

L'aire de $\mathcal{D}$ est celle du trapèze $OABE$, d'où le calcul :

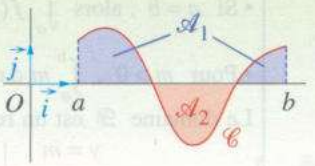
$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(2+0{,}5)\times 3}{2} = -\frac{15}{4}\ .$$

2.2 Cas d'une fonction changeant de signe

définition

Soit f une fonction **continue** qui change de signe sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, et située au-dessus de l'axe des abscisses.



Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, et située en dessous de l'axe des abscisses.

On pose alors $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.

Exemple

Voir Exercices 7 à 9

On reprend la fonction définie dans l'exemple précédent.

$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$, avec $\mathcal{A}_1 = \text{Aire}\,(FGH) = 1$ et $\mathcal{A}_2 = \text{Aire}\,(OEF) = 4$, donc :

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 4 = -3\ .$$

Remarque

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a<b$.

On étend la notion de valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ en posant que cette valeur moyenne est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

3 Intégrale et primitive

On a vu dans l'*Activité* 3 que si f est continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors la fonction $x \mapsto \mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a\,;\,b]$ qui s'annule en a.

On admet que ce résultat se généralise.

3.1 Théorème admis

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et a un élément quelconque de I.

La fonction Φ définie sur I par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarques

• On ne peut pas employer la même lettre pour une borne de l'intégrale (ici x) et la variable « muette » d'intégration, notée ici t.

• La fonction Φ définie dans le théorème est donc **dérivable** sur I, de **dérivée** f.

Exemple

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$; son unique primitive qui s'annule en 1 étant la fonction logarithme népérien, on a, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\ln x = \int_1^x \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

3.2 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive — théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ ,$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et deux réels a et b dans I.

On note Φ la primitive de f sur I qui s'annule en a, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et F une primitive quelconque de f sur I. On sait qu'il existe une constante k telle que $F = \Phi + k$.

Alors $F(b) - F(a) = \Phi(b) + k - \Phi(a) - k = \Phi(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a ainsi un procédé de calcul d'une intégrale pour une fonction continue dont on connaît une primitive. L'expression a un sens quels que soient le signe de la fonction f et l'ordre des bornes a et b.

Exemple

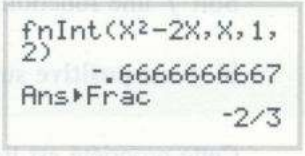
Voir Exercice résolu 1 ; *Exercices* 12 à 15

La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

L'une de ses primitives sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x^2$.

Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Ainsi $\int_1^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = \left(\dfrac{8}{3} - 4\right) - \left(\dfrac{1}{3} - 1\right) = -\dfrac{2}{3}$.



4 Propriétés de l'intégrale

Les démonstrations reposent en général sur le calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, mais l'interprétation en termes d'aire permet de visualiser ces propriétés dans certains cas.

4.1 Relation de CHASLES

propriété

Soit f une fontion continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx .$$

Démonstration

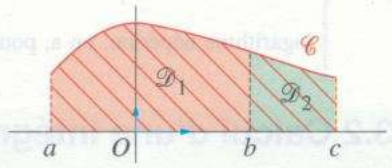
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx .$$

Cas particulier :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{donc} \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx .$$

En termes d'aire, lorsque f est continue et positive sur I et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de CHASLES traduit que l'aire du domaine hachuré est la somme des aires des domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



4.2 Linéarité

propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et α un réel.

Pour tous réels a et b de I, on a :

- $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration

Voir Exercices 17 à 26

Elle repose sur le fait que, si F et G sont des primitives de f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$, et αF une primitive de αf sur I.

4.3 Positivité

propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I avec $a \leqslant b$.

Si f est **positive** sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Cette propriété est liée à la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire située sous la courbe représentative de la fonction sur $[a\,;\,b]$.

4.4 Signe d'une intégrale

si $f \geqslant 0$ sur I	avec $a \leqslant b$, $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$	avec $a \geqslant b$, $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
si $f \leqslant 0$ sur I	avec $a \leqslant b$, $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$	avec $a \geqslant b$, $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Exemples

Sans calculs, on a les inégalités suivantes : $\int_{-2}^{0} (1+\sin^2 x)\,dx \geqslant 0$; $\int_2^1 \sqrt{x}\,dx \leqslant 0$; $\int_{0,5}^{0,8} \ln x\,dx \leqslant 0$.

4.5 Conservation de l'ordre — propriété

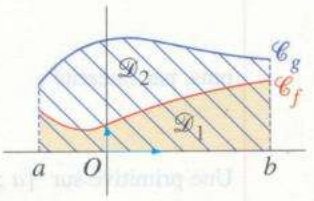
Soit f et g deux fonctions continues sur I, et a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.

Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Démonstration

Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $g-f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$; de plus, $g-f$ est continue sur $[a\,;b]$, donc $\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geqslant 0$, d'après ce qui précède.

Par linéarité, on obtient $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.



En termes d'aire, si f et g sont continues et positives sur $[a\,;b]$, l'inégalité traduit le fait que l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ situé sous $\mathscr{C}_f$ est inférieure à l'aire de $\mathscr{D}_2$ situé sous $\mathscr{C}_g$.

Voir Exercice résolu 3 ; T.D. 3

4.6 Inégalités de la moyenne — propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels a et b dans I .

• S'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f \leqslant M$ sur I, et si $a \leqslant b$, alors :

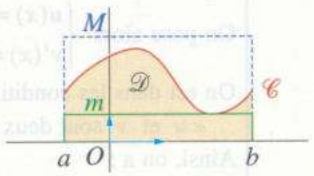
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) .$$

• S'il existe un réel M positif tel que $|f| \leqslant M$ sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M|b-a|$.

Démonstration

• Pour tout x de $[a\,;b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc par conservation de l'ordre, $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$, ce qui donne le résultat.

• La seconde inégalité se prouve en utilisant $-M \leqslant f \leqslant M$ dans chacun des cas $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.



En termes d'aire, pour f positive et $m>0$, cet encadrement traduit que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est comprise entre les aires de deux rectangles de hauteurs m et M, de largeur $b-a$.

Exemple

Voir Exercices 29 à 35

Pour tout x de $[1\,;8]$, on a $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 3$, donc $7\sqrt{2} \leqslant \int_1^8 \sqrt{1+x}\,dx \leqslant 21$.

5 Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions **dérivables** sur un intervalle I, telles que u' et v' sont **continues** sur I.

Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration

u et v étant deux fonctions dérivables sur un intervalle I, uv est aussi dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'\ .$$

u et v étant dérivables sur I, elles sont continues sur I. Donc $u'v$ et uv', et par suite $(uv)'$ le sont aussi.

En écrivant $uv' = (uv)' - u'v$, et en intégrant de a à b, pour a et b dans I, on obtient :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x))\,\mathrm{d}x\ ,$$

puis, par linéarité :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Une primitive sur $[a\,;b]$ de $(uv)'$ étant uv, on obtient :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Remarque

L'intégration par parties est souvent utilisée pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont on ne connaît pas de primitive et qui peut se mettre sous la forme d'un produit ; en particulier lorsque $f(x)$ est de la forme :

$P(x)\times \ln x$, $P(x)\times \mathrm{e}^x$, $P(x)\times \cos x$, $P(x)\times \sin x$, où P est une fonction polynôme.

Exemple

Voir Exercice résolu 2 ; Exercices 42 à 50

Soit l'intégrale $\int_1^2 (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto (x+1)\ln x$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions continues, mais on n'en connaît pas de primitive.

Pour x dans $]0\,;+\infty[$, on peut écrire :

$$(x+1)\ln x = u(x)v'(x)\ ,\ \text{avec}\ u(x)=\ln x\ \text{ et }\ v'(x)=x+1\ .$$

On pose alors $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x+1 \end{cases}$. On a $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et on prend, par exemple, $v(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$.

On est dans les conditions du théorème :

« u et v sont deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, et u' et v' sont continues sur $]0\,;+\infty[$ ».

Ainsi, on a :

$$\int_1^2 (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\ln 2 - 0 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x$$

$$= 4\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_1^2 = 4\ln 2 - \left(1+2-\frac{1}{4}-1\right) = 4\ln 2 - \frac{7}{4}\ .$$

1 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Énoncé

Calculer les intégrales :

a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2t+3}\,dt$; **b)** $\int_{2}^{0} 2xe^{x^2-1}\,dx$;

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos^2 x\,dx$.

Analyse de l'énoncé

Avant de calculer une intégrale demandée, on justifie son existence.

Pour procéder en utilisant une primitive, on doit reconnaître dans la fonction à intégrer la dérivée d'une fonction.

• Méthode

• On cherche à faire apparaître, dans la fonction à intégrer de a à b, la dérivée d'une fonction usuelle ou l'une des formes :

$$u' \times u^n \text{ avec } n \neq -1 , \quad \frac{u'}{u} , \quad \frac{u'}{\sqrt{u}} \quad \text{ou} \quad u' \times e^u .$$

• On détermine une primitive F de cette fonction, sur un intervalle contenant les bornes a et b, par lecture inverse du tableau des dérivées.

• L'intégrale est égale à $F(b) - F(a)$.

Voir Exercices 12 à 15

a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2t+3}$ est continue sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$, qui contient -1 et 1.

L'intégrale existe donc.

On peut écrire $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$, en posant :

$$u(t) = 2t + 3 .$$

Une primitive de f sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ est alors :

$$F = \frac{1}{2} \ln |u| .$$

Pour tout t de $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$, on a :

$$2t + 3 > 0 ,$$

donc $F : t \mapsto \frac{1}{2} \ln (2t+3)$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2t+3}\,dt = \left[\frac{1}{2} \ln (2t+3)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 5 .$$

b) La fonction $g : x \mapsto 2x\,e^{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues.

L'intégrale existe donc.

On peut écrire $g = u' \times e^u$, en posant :

$$u(x) = x^2 - 1 .$$

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = e^u$.

On a donc :

$$\int_{2}^{0} 2xe^{x^2-1}\,dx = \left[e^{x^2-1}\right]_{2}^{0}$$

$$= e^{-1} - e^{3} = \frac{1}{e} - e^{3} .$$

c) La fonction $h : x \mapsto \sin x \cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues ; l'intégrale donnée existe donc.

On peut écrire $h = -u' \times u^2$, en posant :

$$u(x) = \cos x .$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H = -\frac{1}{3} u^3$.

On a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos^2 x\,dx = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 \pi + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} .$$

2 Calculs d'intégrales par intégration par parties

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

a) $\int_{-1}^{3}(3x+2)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$; **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$ ..

Analyse de l'énoncé

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, on cherche à écrire la fonction à intégrer sous la forme d'un produit, de sorte qu'en utilisant l'intégration par parties, on obtienne une nouvelle intégrale plus facile à calculer.

Voir Exercices 42 à 48

• Méthode

Pour calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par parties :

• on cherche u et v' telles que $f(x)=u(x)\,v'(x)$;
en particulier, P étant une fonction polynôme :
– si $f(x)=P(x)\ln x$, on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=P(x)$;
– si $f(x)=P(x)\,\mathrm{e}^x$ ou $f(x)=P(x)\sin x$ ou $f(x)=P(x)\cos x$, on pose $u(x)=P(x)$ et $v'(x)$ l'autre expression ;
• on cherche la dérivée de u et une primitive de v' ;
• on applique la formule d'intégration par parties. Si la nouvelle intégrale obtenue ne se calcule pas directement, on peut envisager une seconde intégration par parties.

a) La fonction $f : x \mapsto (3x+2)\mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on peut écrire $f(x)=u(x)v'(x)$, avec $u(x)=3x+2$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$.

On a $u'(x)=3$ et on prend, par exemple, $v(x)=\mathrm{e}^x$.

On applique le théorème d'intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(3x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= [(3x+2)\mathrm{e}^x]_{-1}^{3}-\int_{-1}^{3}3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= 11\mathrm{e}^3-(-\mathrm{e}^{-1})-[3\mathrm{e}^x]_{-1}^{3}\\ &= 11\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^{-1}-(3\mathrm{e}^3-3\mathrm{e}^{-1})\\ &= 8\mathrm{e}^3+\frac{4}{\mathrm{e}}\cdot\end{aligned}$$

b) La fonction $g : t \mapsto t^2\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions continues.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$g(t)=u(t)v'(t)\ ,$$

avec $u(t)=t^2$ et $v'(t)=\sin t$.

On a $u'(t)=2t$ et on choisit :

$$v(t)=-\cos t\ .$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2\sin t\,\mathrm{d}t &= [-t^2\cos t]_0^{\pi/3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-2t\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\pi^2}{9}\times\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

On effectue une seconde intégration par parties pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,\mathrm{d}t$. Pour tout t de $\mathbb{R}$, on peut écrire $t\cos t=w(t)z'(t)$, avec $w(t)=t$ et $z'(t)=\cos t$.

On a $w'(t)=1$ et on choisit $z(t)=\sin t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,\mathrm{d}t &= [t\sin t]_0^{\pi/3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-[-\cos t]_0^{\pi/3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi^2}{18}+2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\right)$

$$=-\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-1\ .$$

Remarques

• Lors de la seconde intégration par parties, si on avait posé $w(t)=\cos t$ et $z'(t)=t$, le calcul nous aurait ramené à la première intégrale. Si ceci se produit dans un exercice, inverser $w(t)$ et $z'(t)$.
• Il ne sera pas toujours dit dans un énoncé de procéder à l'aide d'une intégration par parties. Avant de calculer une intégrale, il est essentiel d'analyser la fonction à intégrer.

Si celle-ci est de la forme $u'\times u^n$, avec $n\neq -1$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ou $u'\mathrm{e}^u$, alors on procède comme dans l'*Exercice résolu* 1, on en connaît une primitive. Dans les autres cas, on envisage une intégration par parties.

3 Suite définie par une intégrale

BAC

Énoncé

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx .$$

1° Étudier le sens de variation de (I_n) .

2° Montrer que, pour tout x de $[0 ; 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2} .$$

En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n) .

Analyse de l'énoncé

1° Il s'agit de comparer deux termes consécutifs quelconques de la suite.

2° Comme $\frac{e^{nx}}{1+e^x} = e^{nx} \times \frac{1}{1+e^x}$, à partir de l'encadrement, on peut chercher à encadrer sur $[0 ; 1]$ la fonction à intégrer dans I_n . De tout encadrement d'une fonction f continue sur $[0 ; 1]$, on peut déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

• Méthode

Soit une suite (I_n) définie par une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de n .

• Pour étudier son sens de variation, on cherche le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$; la linéarité et la positivité permettent souvent de conclure.

• Pour obtenir un encadrement de I_n , on commence par encadrer la fonction à intégrer en gardant n dans les expressions, et on intègre.
Le fait d'avoir gardé n permet de pouvoir ensuite passer à la limite quand tend vers $+\infty$.

► *Voir Exercices* 36, 37, 51 *à* 53

1° Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x} - e^{nx}}{1+e^x}\,dx \text{ , par linéarité.}$$

Or $\frac{e^{(n+1)x} - e^{nx}}{1+e^x} = \frac{e^{nx}(e^x - 1)}{1+e^x}$.

Si x est dans $[0 ; 1]$, alors $e^{nx} > 0$, $e^x - 1 \geqslant 0$ et $1 + e^x > 0$, donc $\frac{e^{(n+1)x} - e^{nx}}{1+e^x} \geqslant 0$.

Comme $0 \leqslant 1$, d'après la positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{(n+1)x} - e^{nx}}{1+e^x}\,dx \geqslant 0 ;$$

ainsi $I_{n+1} \geqslant I_n$ et la suite (I_n) est croissante.

2° Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors on a $1 \leqslant e^x \leqslant e$; d'où :

$$2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 1 + e \leqslant 4 ,$$

puis $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$.

En multipliant chaque membre de l'encadrement par e^{nx} , qui est strictement positif, on a :

$$\frac{e^{nx}}{4} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2} ,$$

qui est un encadrement de la fonction à intégrer dans I_n .

Par conservation de l'ordre par intégration de 0 à 1, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{4}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}\,dx ,$$

soit : $\frac{1}{4}\int_0^1 e^{nx}\,dx \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx$.

Or $\int_0^1 e^{nx}\,dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{1}{n}(e^n - 1)$; on conclut :

$$\frac{1}{4n}(e^n - 1) \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n}(e^n - 1) .$$

On a $\frac{1}{n}(e^n - 1) = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}$.

D'après les limites usuelles :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 ;$$

d'où, par addition :

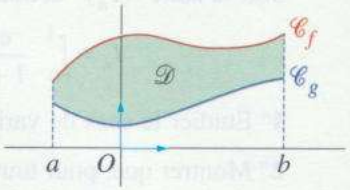
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(e^n - 1) = +\infty .$$

De $\frac{1}{4n}(e^n - 1) \leqslant I_n$, on déduit, à l'aide d'un théorème de comparaison, que $\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

1 Calcul de l'aire d'un domaine délimité par deux courbes

1.1 Étude

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

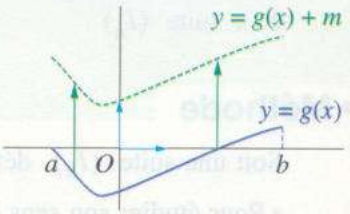


On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

1 On suppose que $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, avec g positive.

Montrer que cette aire est, en unités d'aire :

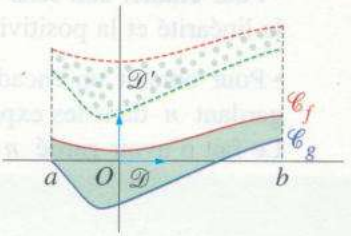
$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\ .$$



2 On suppose seulement $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$.

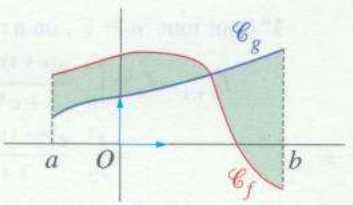
On admet que l'on peut trouver un réel m tel que, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $g(x)+m$ soit positif.

a) On note $\mathscr{D}'$ le domaine délimité par les courbes d'équations $y=f(x)+m$, $y=g(x)+m$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
Justifier que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont la même aire.



b) Exprimer l'aire de $\mathscr{D}'$ à l'aide d'une intégrale en utilisant **1**.
En déduire l'aire de $\mathscr{D}$.

3 On suppose que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent sur $[a\,;\,b]$ en un point.



Donner un procédé permettant de calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

1.2 Applications

► *Voir Exercices 60 à 64*

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur (Ox) et 1 cm sur (Oy).

1 On donne les deux paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$y=x^2-2 \quad \text{et} \quad y=-x^2+2x+2\ .$$

a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de ces paraboles.

b) En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

2 On donne les deux fonctions f et g de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-3+\frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=x-3\ .$$

a) Étudier la position des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

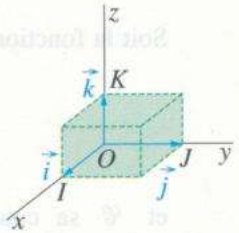
b) Déterminer l'aire, en cm^2, du domaine délimité par ces courbes et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=2$.

2 Calcul de volumes

L'espace étant muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on définit les points I, J et K par :

$$\overrightarrow{OI}=\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OJ}=\vec{j}\ \text{ et }\ \overrightarrow{OK}=\vec{k}\ .$$

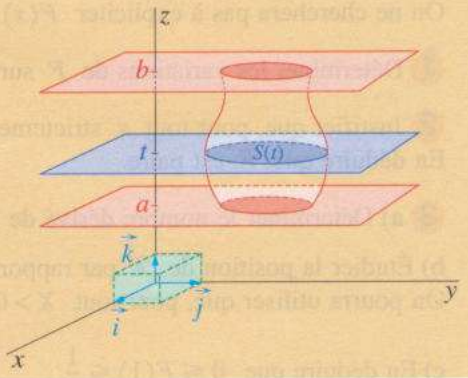
L'unité de volume est le volume du parallélépipède construit sur les côtés $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$.



2.1 Expression intégrale du volume d'un solide

Soit un solide délimité par les plans d'équations respectives $z=a$ et $z=b$.
Tout plan d'équation $z=t$, avec $t\in[a\,;b]$, coupe ce solide suivant une section d'aire $S(t)$, en unités d'aire.
Lorsque S est une fonction continue de t, on admet que le volume V du solide est, en unités de volume :

$$V=\int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t\ .$$



2.2 Applications

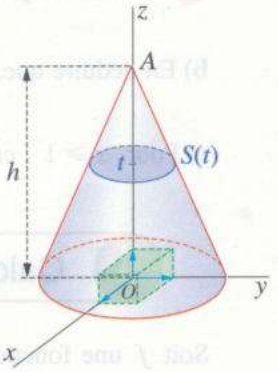
1 Volume d'un cône

Soit le cône d'axe (Oz) de sommet A, de hauteur h dont la base $\mathcal{B}$ est le disque de centre O et de rayon R.

Tout plan d'équation $z=t$, avec $t\in[0\,;h]$, coupe le cône suivant un disque D de rayon variable.

a) Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A transformant $\mathcal{B}$ en D. En déduire l'aire $S(t)$ de D en fonction de R, h et t.

b) À l'aide d'une intégrale, retrouver le volume du cône en fonction de R et h.



2 Volume d'un solide engendré par une courbe

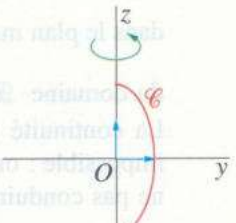
Dans le plan (yOz), on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

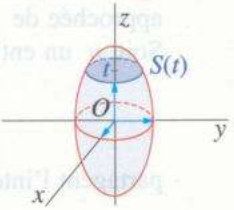
$$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-z^2}\ ,\ \text{avec}\ \ z\in[-2\,;2]\ .$$

Par rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des cotes, on obtient un solide de révolution.
Tout plan d'équation $z=t$, avec $t\in[-2\,;2]$, coupe ce solide suivant un disque.

a) Justifier que l'aire de ce disque est $S(t)=\dfrac{\pi}{4}\,(4-t^2)$.

b) En déduire le volume du solide.



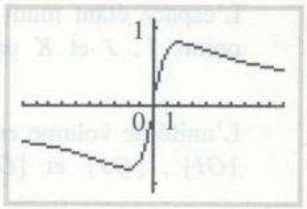


Voir Exercices 66 à 69

3 Fonction définie par une intégrale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0, \end{cases}$$



et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$.

On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

On ne cherchera pas à expliciter $F(x)$.

1 Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

2 Justifier que, pour tout x strictement positif, on a $\int_{-x}^{0} f(t)\,dt = -\int_0^x f(t)\,dt$.
En déduire que F est paire.

3 **a)** Déterminer le nombre dérivé de f en 0.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en O.
On pourra utiliser que, pour tout $X > 0$, $\ln(1+X) \leqslant X$.

c) En déduire que $0 \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4 **a)** Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\dfrac{\ln(t^2)}{t} \leqslant \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} \leqslant \dfrac{\ln(2t^2)}{t}$.

b) En déduire que, pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) - F(1) \geqslant 2\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}\,dt$.

c) Pour $x \geqslant 1$, calculer $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}\,dt$ et en déduire le comportement de F en $+\infty$.

4 Calcul approché d'une intégrale. Programmation

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Le but est d'évaluer $\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{A}$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
La continuité de f assure l'existence de l'intégrale, mais il est fréquent qu'un calcul direct soit impossible : on peut ne pas connaître de primitive de f et la formule d'intégration par parties peut ne pas conduire à un résultat.

1 On suppose f croissante sur $[a\,;b]$. On cherche alors un encadrement ou une valeur approchée de $\mathscr{A}$.
Soit n un entier naturel non nul, les réels :

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n},\quad x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n},\quad \ldots,\quad x_{n-1} = a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}$$

partagent l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de même amplitude $\dfrac{b-a}{n}$.

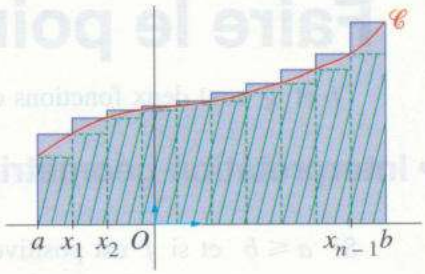
En posant $x_0 = a$, $x_n = b$,

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)$$

(somme des aires des rectangles hachurés),

et $$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$$

(somme des aires des rectangles en bleu), on a $s_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant S_n$.



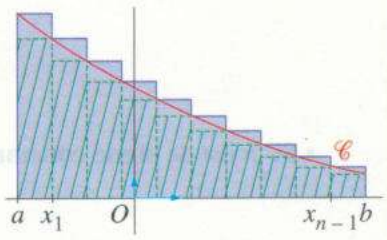
a) Exprimer $S_n - s_n$ en fonction de a , b et n .

b) Déduire de l'encadrement de $\mathcal{A}$ et de **a)** que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant \mathcal{A} - s_n \leqslant \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) ,$$

et que l'on a le même encadrement pour $S_n - \mathcal{A}$.
s_n et S_n sont des valeurs approchées de $\mathcal{A}$ par cette **méthode**, dite **des rectangles**.

2 On suppose que f est décroissante sur $[a\,;b]$.
Avec les notations précédentes, on a $S_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant s_n$.
Encadrer $\mathcal{A} - S_n$ et $s_n - \mathcal{A}$.



3 Programmation du calcul de s_n et S_n
On suppose avoir entré la fonction f dans Y1
Saisir le programme sur une calculatrice.

T.I. 83	commentaires	Casio 35
...	nom du programme	...
Prompt A, B, N	entrée des bornes a et b et du nombre n de subdivisions	"A ="? → A "B ="? → B "N ="? → N
(B − A)/N → D	« base » des rectangles	(B − A)/N → D
A → X	première abscisse	A → X
0 → S 0 → R	initialisation des sommes	0 → S 0 → R
For (K, 1, N)	boucle de calcul	For 1 → K to YN
D × Y1 + S → S	aire d'un rectangle et somme avec les aires des rectangles précédents	D × Y1 + S → S
X + D → X	abscisse suivante	X + D → X
D × Y1 + R → R	aire du rectangle construit sur la même base que le précédent mais de hauteur différente et somme avec les aires des rectangles précédents	D × Y1 + R → R Next
End	fin de boucle	
Disp "S =", S Disp "R =", R	sortie des sommes	"S =" : S ◢ "R =" : R

On prend f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour avoir une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\,dx$ à 10^{-2} près ?

À l'aide du programme, donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\,dx$ à 10^{-2} près.

Faire le point

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a, b et c.

• Interprétation géométrique pour f positive

Si $a \leqslant b$ et si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe d'équation $y=f(x)$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

• Propriétés

• **Relation de CHASLES** : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

• **Linéarité** : $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout réel α.

• Si f est de **signe constant** sur I :

- et si $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est du signe de f ;
- et si $a \geqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est du signe de $-f$.

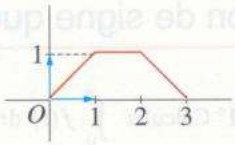
savoir	comment faire ?
calculer une intégrale	• si on connaît une **primitive** F de f sur I, alors on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ • si on ne sait pas trouver directement une primitive de f sur I, mais : – si on sait écrire f comme somme de fonctions dont on connaît des primitives, on peut appliquer **la linéarité** – si f s'écrit comme un produit uv' et que l'on sait intégrer $u'v$, alors on applique **la formule d'intégration par parties** : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)\,v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$
encadrer une intégrale	• si on sait interpréter cette intégrale comme une aire, alors un graphique peut permettre d'en trouver un encadrement • si $a \leqslant b$ et si on a trouvé deux fonctions continues h et k qui encadrent f sur $[a\,;b]$ et que l'on sait intégrer de a à b, alors, comme l'intégrale conserve l'ordre : si $h \leqslant f \leqslant k$, on a $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x$; si h et k sont constantes, on obtient l'**inégalité de la moyenne**
calculer l'aire d'un domaine délimité par deux courbes	si $a \leqslant b$ et si $f \geqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, celle de g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

1 Notion d'intégrale pour une fonction positive

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Soit la fonction f définie sur $[0\,;3]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.



1° $\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = \frac{15}{8}$;

2° $\int_1^3 f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt$;

3° Si $1 < \beta < 2$,

alors $\int_0^\beta f(t)\,dt = \beta - \frac{1}{2}$.

2 Lien avec l'aire

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 4 .$$

Calculer $\int_1^3 f(x)\,dx$.

3 g est la fonction définie sur $[-1\,;5]$ par :

$g(x) = 2$, si $x \in [-1\,;2[$;

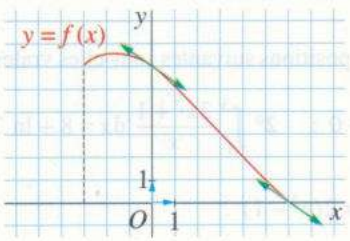
$g(x) = -x + 4$, si $x \in [2\,;3[$;

$g(x) = 2x - 5$, si $x \in [3\,;5]$.

1° Tracer la courbe représentative de g dans un repère.

2° Calculer $\int_{-1}^2 g(x)\,dx$, puis $\int_1^5 g(x)\,dx$.

4 On donne la fonction f dérivable sur $[-3\,;7]$ représentée ci-dessous.



Sur le graphique sont tracées les tangentes à sa courbe aux points d'abscisses 0 et 6.

1° Par lecture graphique, justifier que, pour tout x de $[-3\,;6]$, $-\frac{2}{3}x + 4 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{2}{3}x + 6$.

En déduire un encadrement de $\int_{-3}^6 f(x)\,dx$ par deux intégrales I et J.

2° Calculer I et J en les interprétant comme des aires.

3° Donner l'encadrement obtenu pour $\int_{-3}^6 f(x)\,dx$.

5 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x + 1 ,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1° Vérifier que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

2° On désigne par $\mathscr{D}$ la partie du plan formée des points de coordonnées $(x\,;y)$, telles que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases} ,$$

et on note $\mathscr{A}$ son aire, en unités d'aire.

n étant un entier naturel non nul, on partage $[0\,;2]$ en n intervalles de même amplitude et on considère les fonctions en escalier g_n et h_n définies sur $[0\,;2]$ de la façon suivante :

pour tout entier k de 0 à $n-1$:

si $x \in \left[\frac{2k}{n}\,;\frac{2k+2}{n}\right[$, $g_n(x) = f\left(\frac{2k}{n}\right)$;

si $x \in \left]\frac{2k}{n}\,;\frac{2k+2}{n}\right]$, $h_n(x) = f\left(\frac{2k+2}{n}\right)$;

$g_n(2) = 7$ et $h_n(0) = 1$.

a) En procédant comme dans l'*Activité* 1, encadrer $\mathscr{A}$ par les termes de deux suites (a_n) et (A_n) associées aux aires des domaines situés sous les courbes de g_n et h_n sur $[0\,;2]$.

b) Rappeler les résultats des sommes :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 .$$

En déduire une expression simple de a_n et A_n .

c) Montrer que (a_n) et (A_n) convergent vers la même limite.

d) En déduire $\mathscr{A}$ et l'exprimer à l'aide d'une intégrale.

6 On considère la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = \ln(1 + e^x) .$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, A le point d'abscisse 0 de Γ et B son point d'abscisse 1.

1° Étudier brièvement les variations de g.

2° Donner une équation de la tangente en A à Γ.

3° On note P le point d'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$.

Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.

4° On admet que la courbe Γ est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$.

Montrer alors que :

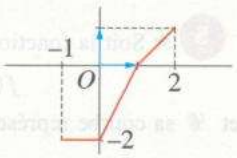
$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \ln \sqrt{2(1+e)} .$$

2 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

1 Vrai-faux

7 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Soit la fonction f définie sur $[-1 ; 2]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

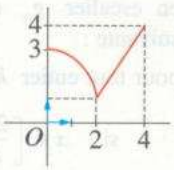


1° $\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = -2$; 2° $\int_{-0,5}^{0,5} f(t)\,dt = 0$;

3° $\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = -\frac{5}{2}$.

2 Calculs d'intégrales

8 f est la fonction définie sur $[0 ; 4]$ représentée ci-contre. (Sur $[0 ; 2]$, sa courbe représentative est un quart de cercle.)



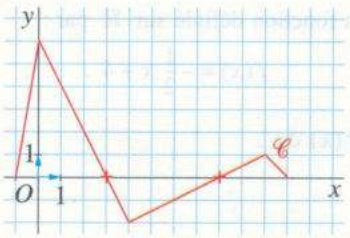
1° Calculer $\int_0^2 f(t)\,dt$ et $\int_0^4 f(t)\,dt$.

2° Soit $g = -f$. Calculer $\int_0^4 g(t)\,dt$.

3° Soit h définie sur $[0 ; 4]$ par $h(x) = f(x) - 2$.

Calculer $\int_2^4 h(t)\,dt$.

9 f est la fonction affine par intervalle représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.



Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \ ; \ \int_{-1}^{11} |f(x)|\,dx \ ; \ \int_{-1}^{11} f(x)\,dx ,$$

et donner une interprétation géométrique de chacune d'elles.

3 Intégrale et primitive

1 Vrai-faux

10 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = \ln(x + 1) .$$

On appelle F la primitive de f sur $[0 ; 3]$ qui s'annule en 0.

1° F est définie par $F(x) = \int_0^x \ln(t+1)\,dt$.

2° Pour tout x de $[0 ; 3]$, $F'(x) = \frac{1}{x+1}$.

3° F est croissante sur $[0 ; 3]$.

11 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $\int_{-1}^{4} t^3\,dt > 0$; 2° $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{x}\,dx = 8 + \ln 3$;

3° $\int_0^1 e^{2x}\,dx = 2(e^2 - 1)$.

2 Calculs d'intégrales

12 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-2}^{0} (2x^3 - x + 1)\,dx$; **b)** $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$;

c) $\int_{2}^{0} t(t^2 - 4)\,dt$; **d)** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{3x-1}\,dx$;

e) $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$; **f)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 3x\,dx$;

g) $\int_{1}^{2} \frac{2}{(3u-1)^2}\,du$; **h)** $\int_{0}^{1} xe^{-x^2}\,dx$.

13 ★ Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$; **b)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^4 t \sin t\,dt$;

c) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$; **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,dx$;

e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{s \cdot \ln s}\,ds$; **f)** $\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

14 Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

1° Vérifier que $F : x \mapsto (x+1) e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2° En déduire le calcul de l'intégrale $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

15 ★ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = e^{-t} \sin t .$$

1° a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée g' .

b) Justifier que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée g'' .

2° a) Vérifier que, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$g(t) = -g'(t) - \frac{1}{2} g''(t) .$$

b) En déduire une primitive de g et le calcul de l'intégrale :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt .$$

4 Propriétés de l'intégrale

1 Vrai-faux

16 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $\int_{-1}^{4} |t-1|\,dt = \frac{13}{2}$.

2° $I = \int_{0}^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx$ et $J = \int_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx$.

Alors $I + J = e^{\pi} - 1$.

3° f est une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et $\int_{a}^{b} f(t)\,dt > 0$.

Alors f est positive sur $[a ; b]$.

4° f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Si $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$ et a et b sont dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} g(x)\,dx .$$

2 Calculs d'intégrales

17 Calculer $\int_{-5}^{2} |2t-3|\,dt$.

18 ★★ On considère la fonction partie entière E sur l'intervalle $[1 ; 3[$.

1° Tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

2° Soit la fonction F définie sur $[1 ; 3[$ par :

$$F(x) = \int_{1}^{x} E(t)\,dt .$$

a) Déterminer $F(x)$ suivant les valeurs de x .

b) Représenter la fonction F sur un autre graphique de mêmes unités que le précédent.

c) Donner une interprétation géométrique de $F(x)$ à l'aide de la courbe de E .

19 ★★ On considère la fonction g définie sur $[0 ; 2]$ par :

$g(x) = x$, si $x \in [0 ; 1[$;

$g(x) = -x + 2$, si $x \in [1 ; 2]$.

1° Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

2° Soit la fonction G définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt .$$

a) Déterminer $G(x)$ suivant les valeurs de x.

b) Représenter la fonction G sur un autre graphique de mêmes unités que le précédent.

20 Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-1} .$$

1° Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x > 1$:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} .$$

2° Calculer $\int_2^3 f(x)\,dx$.

21 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $h(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}$.

1° Déterminer les réels A et B tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $h(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}$.

2° Calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,dx$.

22 **1°** Déterminer les réels a , b , c et d tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1} .$$

2° Calculer $\int_2^3 \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}\,dx$.

23 ★ On cherche à calculer $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\theta \cos^3\theta\,d\theta$.

1° En écrivant $\cos^3\theta = \cos\theta \cdot \cos^2\theta$, montrer que $\sin^2\theta \cos^3\theta$ se ramène à une somme de termes du type $\cos\theta \sin^k\theta$, où k est un entier naturel.

2° En déduire le calcul de I.

24 Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^3}{1+x^2} .$$

1° Calculer $I_1 = \int_0^1 g(x)\,dx$.

2° Soit $I_2 = \int_0^1 h(x)\,dx$.

Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2 .

25 On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx .$$

1° a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?

b) Calculer I.

2° Soit la fonction f définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} .$$

a) Justifier que f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} .$$

b) Déduire du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J.

(D'après BAC)

26 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln(1 + e^x) .$$

Pour tout réel α strictement positif, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx .$$

1° Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout réel x :

$$\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x} .$$

En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

2° Définir $f + f'$, où f' est la dérivée de f.

En déduire $I(\alpha)$ en fonction de α .

(D'après BAC)

27 **Fonction paire, impaire, périodique**

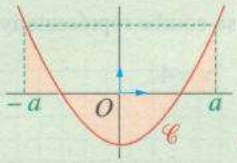
• Soit f une fonction continue sur $[-a\,;a]$ avec $a>0$.

Si f est **paire**, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

et

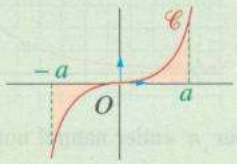
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\ .$$



Si f est **impaire**, alors :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

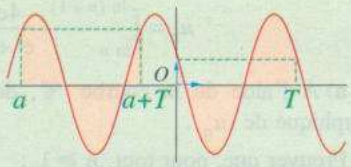
et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.



• Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, **périodique** de période T.

Pour tout réel a :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx\ .$$



Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x|\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x\,dx$.

28 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t\,dt$; **b)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{13\pi}{7}} \sin x\,dx$; **c)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,dx$.

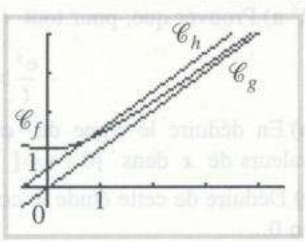
3 Encadrement d'intégrales

29 Sans aucun calcul, donner le signe de chacune des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{2}^{4} \ln(1+x)\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} -e^{x+3}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-6} \sqrt{2-t}\,dt$; **d)** $\displaystyle\int_{0}^{-1} \frac{1}{t-3}\,dt$.

30 Soit les fonctions f, g et h définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $g(x)=x$ et $h(x)=x+\dfrac{1}{2}$, et leurs courbes représentatives sur l'écran d'une calculatrice.



1° Pour tout $x\geqslant 1$, comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2° En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{1}^{3} \sqrt{x^2+1}\,dx$.

31 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{-x^2}\ .$$

On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$, on se propose de chercher un encadrement de $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$.

Pour cela, on commence par encadrer f sur $[0\,;1]$.

1° Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x)=f(0)+\int_{0}^{x} f'(t)\,dt\ .$$

2° a) Montrer que, pour tout t de $[0\,;1]$:

$$-2t\leqslant f'(t)\leqslant -\frac{2}{e}\,t\ .$$

b) Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$:

$$-x^2\leqslant\int_{0}^{x} f'(t)\,dt\leqslant -\frac{1}{e}\,x^2\ .$$

c) En déduire un encadrement de f sur $[0\,;1]$ par deux fonctions polynômes du second degré.

3° Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$.

32 ★ Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}\ ,$$

on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$.

1° En étudiant les variations de f, démontrer, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, l'encadrement $1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ **(1)**.

2° a) Démontrer que, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}\ .$$

b) En déduire que $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$.

c) Calculer l'intégrale $J=\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx$.

d) Déduire de **(1)** que $\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à 0,01 près.

(D'après BAC)

33 **1°** Montrer que, pour tout réel t de $\left[-\frac{\pi}{4} ; 0\right]$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\cos t} \leqslant \sqrt{2}\ .$$

2° En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos t}\,dt \leqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ .$$

34 Soit la fonction g définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\ln x}\ .$$

1° a) Étudier les variations de g sur $]1 ; +\infty[$.

b) En déduire un encadrement de g sur $[2 ; 4]$.

2° Donner un encadrement de $I = \int_2^4 g(x)\,dx$.

35 **1°** À partir de l'encadrement $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, valable pour tout réel t, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$-x \leqslant \sin x \leqslant x\ .$$

2° Justifier qu'il en découle, pour tout $x \geqslant 0$:

$-\frac{1}{2}x^2 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{1}{2}x^2$, puis $x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x$.

4 Suites

36 ★ Soit la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 2$, par :

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x}\,dx\ ,$$

et S_n la somme des $n-1$ premiers termes de cette suite.

1° a) Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale puis, calculer cette intégrale.

b) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

2° Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$:

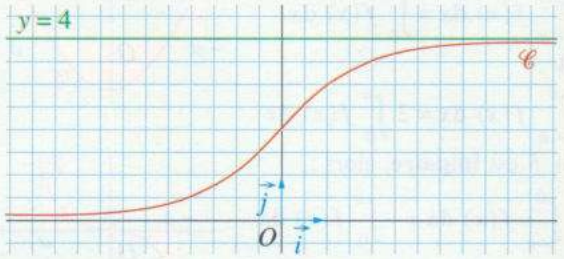
$$\frac{1}{k \ln k} \geqslant u_k\ .$$

En déduire une minoration de $S'_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ par une intégrale et le comportement en $+\infty$ de S'_n.

37 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{4e^t}{e^t + 1}\ ,$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous.



Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{4e^t}{e^t + 1}\,dt\ .$$

1° a) À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, donner une interprétation graphique de u_n.

b) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = 4 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

2° On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a) À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, donner une interprétation graphique du nombre S_n.

b) En déduire une expression simple de S_n.

Quelle propriété de l'intégrale est derrière ce résultat ?

3° Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}(n)$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 4$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

Déterminer la limite de $\mathscr{A}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(D'après BAC)

5 Fonctions définies par une intégrale

38 Soit la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\ .$$

1° Déterminer le sens de variation de F.

2° a) Prouver que, pour tout t de $]0 ; +\infty[$:

$$\frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}\ .$$

b) En déduire le signe de $\varphi(x) = F(x) - \ln x$ suivant les valeurs de x dans $]0 ; +\infty[$.

c) Déduire de cette étude le comportement de F en $+\infty$ et en 0.

39 Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x^2} .$$

1° Étudier les variations de g sur $]0 ; +\infty[$.

2° On note G la primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en $\frac{1}{2}$. Pour $x > 0$, $G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)\,dt$.

Déterminer les variations de G sur $]0 ; +\infty[$.

3° a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 2$:

$$\int_2^x g(2)\,dt \leqslant \int_2^x g(t)\,dt .$$

b) Par comparaison des limites et en utilisant la relation de CHASLES, déterminer la limite de G en $+\infty$.

40 ★ On considère les fonctions f et F définies sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + x} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_1^x f(t)\,dt .$$

1° Que représente F pour f ?

2° a) Étudier les variations de F sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) F garde-t-elle un signe constant sur cet intervalle ?

3° Prouver que, pour tout $t \geqslant 1$, $f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^2}$.

En déduire une majoration de $F(x)$ pour $x \geqslant 1$ par une intégrale que l'on calculera. Justifier que, pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) < 1$.

5 Intégration par parties

1 Vrai-faux

41 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{3} \cos x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$.

2° Pour $x > 0$, $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t\,dt = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + 1$.

3° Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I telle que v' soit continue sur I .

Pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b v(x)\,dx = bv(b) - av(a) - \int_a^b xv'(x)\,dx .$$

2 Appliquer la formule d'intégration par parties

42 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_1^2 xe^{-x}\,dx$; **b)** $\int_{-1}^1 (2s-1)e^{-2s}\,ds$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$; **d)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (2t-1)\cos t\,dt$;

e) $\int_1^e \ln t\,dt$; **f)** $\int_{\frac{1}{e}}^e x^2 \ln x\,dx$.

43 ★ Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une double intégration par parties :

a) $\int_1^0 x^2 e^x\,dx$; **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$;

c) $\int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 1)e^x\,dx$; **d)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 3x\,dx$.

44 On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x\,dx .$$

1° Calculer $I + J$, puis $I - J$.

2° En déduire I et J .

45 Soit les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_0^t e^{-\theta} \cos\theta\,d\theta \quad \text{et} \quad G(t) = \int_0^t e^{-\theta} \sin\theta\,d\theta .$$

1° En utilisant les deux possibilités d'intégration par parties pour $F(t)$, montrer que, pour tout réel t :

$$F(t) = 1 - e^{-t}\cos t - G(t) \quad \text{et} \quad F(t) = e^{-t}\sin t + G(t) .$$

2° En déduire $F(t)$ et $G(t)$.

46 Soit a un réel strictement positif.

On pose :

$$I(a)=\int_1^a \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx .$$

1° En remarquant que, pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},$$

calculer $I(a)$ en utilisant une intégration par parties.

2° Calculer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$ puis, lorsque a tend vers 0.

47 ★ L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \; ; \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$$\text{et} \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx .$$

1° Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+2}$.

b) En déduire la dérivée f' de f.

c) Calculer I.

2° Calcul de J et de K

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que :

$$J+2I=K .$$

b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que :

$$K=\sqrt{3}-J .$$

c) En déduire J et K.

(D'après BAC)

48 ★ On se propose de calculer l'intégrale :

$$J=\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(1+e^x)^3}\,dx .$$

1° Calculer les deux intégrales :

$$A=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \quad \text{et} \quad B=\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx .$$

2° Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel t positif, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2}=a+\frac{bt}{1+t}+\frac{ct}{(1+t)^2} \quad \textbf{(1)}.$$

3° En posant $t=e^x$ dans l'égalité **(1)**, calculer l'intégrale :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx .$$

4° Établir une relation entre J et I.

En déduire J. À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

(D'après BAC)

3 Détermination de primitives

49 Déterminer la primitive sur I qui s'annule en a de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x\mapsto \dfrac{2}{3x-1}$, $I=\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $a=1$.

b) $g : t\mapsto t\cos t$, $I=\mathbb{R}$ et $a=\dfrac{\pi}{6}$.

c) $h : x\mapsto \ln x$, $I=]0\,;+\infty[$ et $a=1$.

d) $k : x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$, $I=]0\,;+\infty[$ et $a=1$.

e) $l : t\mapsto 2te^t$, $I=\mathbb{R}$ et $a=\ln 3$.

50 ★ On considère les intégrales :

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos^2 t\,dt$$

$$\text{et} \quad J(x)=\int_0^x e^t\sin^2 t\,dt \text{, pour } x \text{ réel.}$$

1° Calculer $I(x)+J(x)$, puis $I(x)-J(x)$.

2° En déduire $I(x)$ et $J(x)$.

Que représente chacune de ces expressions ?

4 Suites

51 On définit la suite (I_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$I_n=\int_0^n x^2 e^{-x}\,dx .$$

1° Justifier que (I_n) est une suite à termes positifs.

2° Montrer que (I_n) est croissante.

3° Exprimer I_n en fonction de n.

4° Déterminer la limite L de la suite (I_n).

5° À l'aide d'une calculatrice, trouver le plus petit entier n, tel que $|I_n-L|\leqslant 10^{-3}$.

(D'après BAC)

52 On pose, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1° Calculer I_1.

2° Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$.

Si une suite a pour terme général une intégrale dans laquelle les bornes sont constantes et la fonction à intégrer dépend de n et qu'on ne sait pas calculer l'intégrale, une intégration par parties peut permettre d'établir une relation de récurrence entre deux termes de cette suite.

3° Calculer I_2 et I_3.

53 Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$v_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx .$$

1° Calculer v_1. (On pourra utiliser, que pour tout x de $[0\,;1]$, $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$.)

2° Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

Pour étudier le sens de variation d'une suite (v_n) définie par une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de n, on peut :
– chercher le signe de la différence $v_{n+1} - v_n$ en utilisant la linéarité et la positivité (voir *Exercice résolu* 3) ;
– comparer les fonctions à intégrer dans v_n et v_{n+1}, puis intégrer l'inégalité.

3° a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$.

b) En déduire le comportement de (v_n) en $+\infty$.

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $0 \leqslant v_n \leqslant 10^{-2}$.

6 Calculs de grandeurs

1 Vrai-faux

54 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x .$$

1° La valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$ est $-\frac{2}{3}$.

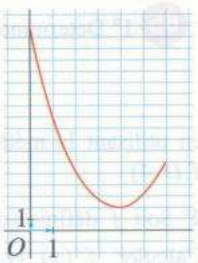
2° En unités d'aire, l'aire du domaine plan délimité par la courbe de f et les droites d'équations $y = -x$, $x = 0$ et $x = 1$ est $\frac{1}{6}$.

2 Valeur moyenne

55 Soit la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = (x-4)^2 + 2 ,$$

dont la représentation graphique est l'arc de parabole ci-contre.



1° Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0\,;6]$.

2° Représenter cette valeur moyenne sur le graphique et l'interpréter.

56 Soit l'arc $\mathscr{C}$ de parabole d'équation :

$$y = -x^2 + 4x - 3 \text{ pour } x \text{ dans } [1\,;3] .$$

I et A ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$ et $(3\,;0)$.



Déterminer la largeur du rectangle dont un côté est $[IA]$ et dont l'aire est la même que celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'arc $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

57 Soit g une fonction affine définie par :

$$g(x) = mx + p .$$

Déterminer la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[a\,;b]$, avec $a \neq b$.

À quoi correspond ce nombre ?

58 Calculer la valeur moyenne de la fonction cosinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis sur $[0\,;\pi]$.

59 **1° a)** Calculer la valeur moyenne m_1 de la fonction $f : t \mapsto t$ sur $I = [\ln 2 ; \ln 3]$.

b) Calculer la valeur moyenne m_2 de la fonction $g : t \mapsto e^{-t}$ sur I.

2° Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} t\,e^{-t}\,dt$.

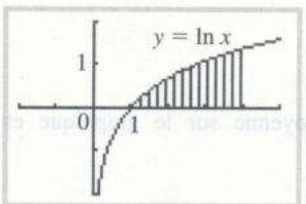
En déduire la valeur moyenne μ de la fonction $h : t \mapsto t\,e^{-t}$ sur I.

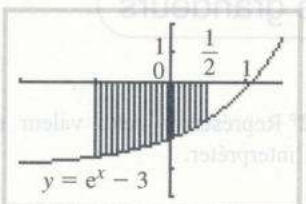
3° En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier votre jugement sur l'énoncé :

« Sur un intervalle, la valeur moyenne du produit de deux fonctions est égale au produit des valeurs moyennes de ces fonctions. »

3 Aires

60 Calculer l'aire, en unités d'aire, de chacun des domaines hachurés suivants :



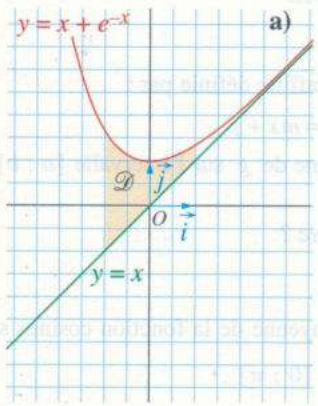


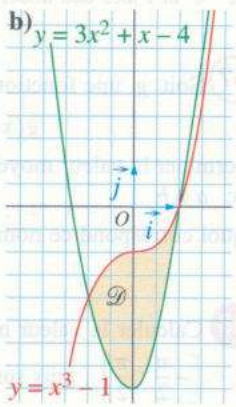
61 Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités 2 cm sur (Ox) et 3 cm sur (Oy).

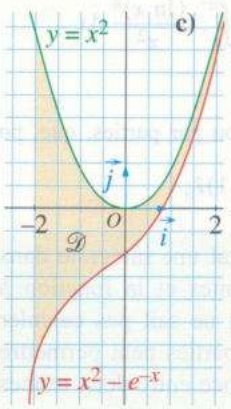
Déterminer l'aire, en cm², du domaine délimité par la courbe d'équation $y = (4 - x)\ln x$ et l'axe (Ox).

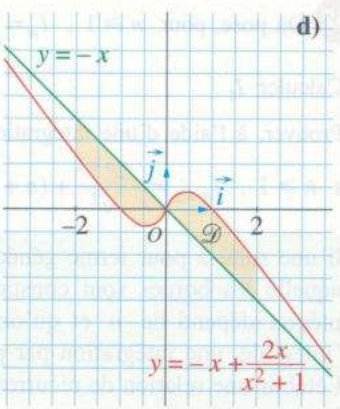
En donner une valeur approchée au mm² près.

62 Calculer l'aire, en unités d'aire, de chacun des domaines $\mathscr{D}$ suivants :









63 **1° a)** Vérifier que, pour tout x :

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

b) En déduire le signe de $\sin x - \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$.

2° Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Calculer l'aire, en cm², du domaine délimité par les courbes des fonctions sinus et cosinus sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$.

64 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Montrer que $\mathscr{C}$ possède une asymptote d en $+\infty$.

2° Pour tout réel λ positif ou nul, $\mathscr{A}(\lambda)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}$, d et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

b) Déterminer la limite A de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

c) À partir de quelle valeur de λ a-t-on :

$$|\mathscr{A}(\lambda) - A| \leqslant 10^{-2} \ ?$$

65 **1°** Déterminer un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

en utilisant la méthode des rectangles avec $n = 10$. (Voir *T.D.* 4)

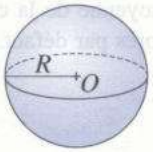
2° Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur exacte de I.

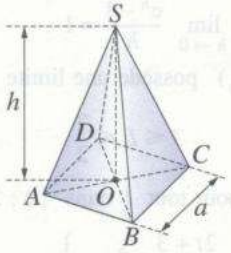
4 Volumes

66 Calculer le volume de chacun des solides ci-dessous.

a) Boule de centre O et de rayon R.

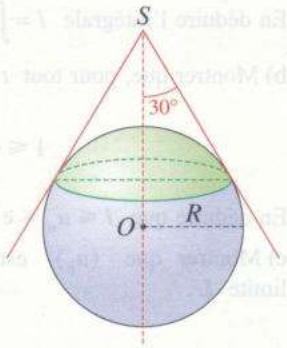


b) Pyramide régulière à base carrée de côté a et de hauteur h.



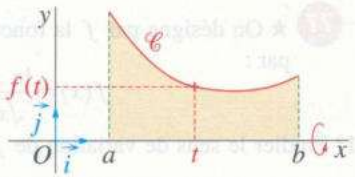
67 ★ Sur une sphère de centre O et de rayon 10 cm, on place un cône de sommet S et d'angle au sommet 60°.

Calculer le volume de la calotte sphérique déterminée par la sphère et le cône (en cm^3).



68 L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



En faisant tourner $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses, on obtient un solide de révolution.

1° Soit $S(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la section du solide par le plan d'équation $x=t$ pour tout t de $[a\,;b]$.

Montrer que $S(t)=\pi[f(t)]^2$.

2° En déduire l'expression du volume V du solide, en unités de volume, à l'aide d'une intégrale.

3° Applications

Déterminer le volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de chacune des courbes d'équations suivantes :

a) $y=2$ sur $[0\,;3]$;

b) $y=x$ sur $[0\,;3]$;

c) $y=\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1\,;1]$.

Quels résultats retrouve-t-on ?

69 L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité graphique 1 cm.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x)=\sin x\ ,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer le volume du solide de révolution engendré par rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses. On donnera sa valeur exacte en cm^3, puis une valeur approchée à 1 mm^3 près.

5 En physique, en biologie

70 L'intensité i d'un courant variable est donnée en fonction du temps t par :

$$i(t)=4\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right).$$

1° Déterminer la période T de la fonction i.

2° Calculer la valeur moyenne de i sur une période.

71 L'intensité efficace d'un courant alternatif est l'intensité d'un courant continu qui produirait le même dégagement de chaleur par effet joule à travers la même résistance R pendant la même durée.

1° Sachant que l'énergie W fournie par un courant alternatif d'intensité $i(t)$ à travers une résistance R pendant un intervalle de temps égal à la période T est :

$$W=\int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

montrer que l'intensité efficace I_e de ce courant est telle que I_e^2 est la valeur moyenne de la fonction i^2 sur $[0\,;T]$.

2° On suppose que $i(t)=I_m\cos\omega t$, où I_m est l'intensité maximale.

Exprimer I_e en fonction de I_m.

72 Un fil rectiligne $[OZ]$ de longueur L tel que la densité en tout point M est $f(x)$, où f est une fonction continue sur $[0\,;L]$ et x la distance OM, possède une masse m donnée par :

$$m=\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Déterminer la masse d'un fil lorsque f est définie par :

$$f(x)=\frac{1}{L+x}\ .$$

73 Suite à un début de maladie infectieuse dans une région, des études ont permis de mettre en évidence que le nombre de personnes ayant contracté cette maladie t jours après l'apparition des premiers cas, pour t dans $[0\,;\,25]$, est $N(t)=45t^2-t^3$.

Calculer le nombre moyen de personnes malades durant la première semaine.

74 La capacité pulmonaire, exprimée en litres, de l'être humain suivant son âge x de 10 à 90 ans, est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{110(\ln x-2)}{x}.$$

Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire de 20 à 70 ans, à 0,1 litre près par défaut.

7 Problèmes

75 ★ **Étude d'une suite**

On pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et, pour tout n entier naturel non nul :

$$I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx.$$

1° Calculer I_0 et I_1.

2° Pour $n\in\mathbb{N}^*$, établir la relation $2I_n+nI_{n-1}=e^2$.

Calculer I_2.

3° Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

En déduire, en utilisant la relation de récurrence précédente, l'encadrement :

$$\frac{e^2}{n+3}\leqslant I_n\leqslant\frac{e^2}{n+2}.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

76 ★ Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\,dt.$$

1° a) Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par :

$$\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}.$$

Étudier les variations de φ sur $[0\,;\,2]$.

En déduire que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$:

$$\frac{3}{2}\leqslant\varphi(t)\leqslant\frac{7}{4}.$$

b) Justifier que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$, on a :

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\leqslant\varphi(t)\,e^{\frac{t}{n}}\leqslant\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}.$$

c) Par intégration, en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\leqslant u_n\leqslant\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right).$$

d) On rappelle que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors :

$$3\leqslant L\leqslant\frac{7}{2}.$$

2° a) Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;\,2]$, on a :

$$\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}.$$

En déduire l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}\,dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans $[0\,;\,2]$, on a :

$$1\leqslant e^{\frac{t}{n}}\leqslant e^{\frac{2}{n}}.$$

En déduire que $I\leqslant u_n\leqslant e^{\frac{2}{n}}I$.

c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

(D'après BAC)

77 ★ On désigne par f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

1° Étudier le sens de variation de f.

2° Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$u_n=f(8)+f(9)+\ldots+f(n)=\sum_{k=8}^{k=n}f(k).$$

a) Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Démontrer que :

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leqslant f(k).$$

b) En déduire que, pour tout entier $n\geqslant8$:

$$u_{n+1}-f(8)\leqslant\int_8^{n+1}f(t)\,dt\leqslant u_n.$$

c) Calculer $\int_8^{n+1}f(t)\,dt$.

d) Déduire des questions **b)** et **c)**, que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3° Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$v_n = u_n - \int_8^{n+1} f(t)\,dt .$$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) et en déduire que :

$$u_n - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n ,$$

puis que la suite (v_n) est bornée.

Montrer que la suite (v_n) est croissante.

On admet que la suite (v_n) converge.

Démontrer que sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant 0{,}74$.

78 ★★ Irrationalité de e

Le but du problème est de montrer que le nombre e n'est pas un nombre rationnel.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1° Étudier les variations de f ; on précisera ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3° Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$ et donner une interprétation géométrique de celle-ci.

Partie B

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1° a) Montrer que, pour tout x de $[0 ; 1]$:

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n .$$

b) Exprimer en fonction de l'entier n l'intégrale :

$$J_n = \int_0^1 x^n\,dx .$$

c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

2° À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

3° Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $k_n = n!\,e - I_n$.

a) Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n.

b) Calculer k_1 (on pourra utiliser **A. 3°**).

En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, que k_n est un nombre entier pour tout $n \geqslant 1$.

c) Montrer que, quel que soit l'entier $n \geqslant 2$, le nombre $n!\,e = k_n + I_n$ n'est pas un nombre entier.

4° Soit p et q deux entiers strictement positifs.

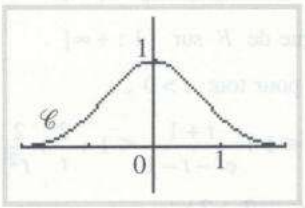
Montrer que, pour $n \geqslant q$, $\dfrac{n!p}{q}$ est un nombre entier.

En déduire, à l'aide de **3° b)** et **c)**, que e n'est pas un nombre rationnel (on pourra raisonner par l'absurde).

(D'après BAC)

79 ★★ Fonction définie par une intégrale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.



On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt .$$

(On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

1° Étudier le sens de variation de F.

2° Interpréter géométriquement $F(x)$ pour x positif, puis pour x négatif. En déduire que F est impaire.

3° a) Vérifier que, pour tout $t \geqslant 2$, on a $e^{-t^2} \leqslant e^{-2t}$.

En déduire que, pour tout $x \geqslant 2$, on a :

$$F(x) - F(2) \leqslant \int_2^x e^{-2t}\,dt .$$

b) Calculer $\int_2^x e^{-2t}\,dt$. En déduire que, pour tout $x \geqslant 2$, on a $F(x) - F(2) \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-4}$, puis que F est majorée sur $\mathbb{R}$.

c) On admet que F a une limite L en $+\infty$.

Montrer que $0 \leqslant L - F(2) \leqslant 10^{-2}$.

d) On considère les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0, $\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{3}{2}$ et 2.

À l'aide d'une calculatrice, calculer l'aire de la partie de plan délimitée par la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Ce nombre est une valeur approchée de L dont on ne demande pas la précision.

4° En rassemblant les résultats précédents, donner l'allure de la courbe représentative de F.

(D'après BAC)

80 ★ **A. Questions préliminaires**

1° On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = e^t - t - 1 .$$

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son signe.

2° Déduire de cette étude, les variations et le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par :

$$h(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 .$$

B. Fonction définie par une intégrale

Pour $x \geqslant 1$, on pose :

$$F(x) = \int_1^x \left(1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1}\right) dt .$$

1° Donner le signe de F sur $[1 ; +\infty[$.

2° Montrer que, pour tout $t > 0$:

$$1 \leqslant 1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1} \leqslant 1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} .$$

3° Calculer $\displaystyle\int_1^x \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) dt$ pour $x \geqslant 1$.

4° **a)** Justifier que, pour $x \geqslant 1$:

$$x - 1 \leqslant F(x) \leqslant 2 \ln x - \frac{2}{x} + x + 1 .$$

b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

5° **a)** Montrer que, pour $x \geqslant 1$:

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{F(x)}{x} \leqslant \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} .$$

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

81 ★★★ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1° **a)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x non nul.

c) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - xe^x - 1 .$$

Étudier les variations de g , puis le signe de g .

En déduire, pour tout x non nul, le signe de $f'(x)$.

d) Donner les variations de f .

2° **a)** Justifier, pour tout réel x , l'existence de :

$$H(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt .$$

On définit ainsi une fonction H sur $\mathbb{R}$.

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

b) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exprimer H au moyen de F .

En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout x non nul, on a :

$$H'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} (3 - e^x) .$$

c) Étudier les variations de H .

3° **a)** Montrer, en utilisant l'inégalité de la moyenne que, si x est non nul, $\dfrac{H(x)}{x}$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$ (distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$).

b) Déterminer la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $\dfrac{H(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$; en déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

d) Interpréter les résultats précédents pour la courbe Γ .

4° Quelle aire représente $H(\ln 3)$?

Déterminer un encadrement de $H(\ln 3)$ par la méthode des rectangles, en utilisant la subdivision :

$$\left(\ln 3, \frac{4}{3} \ln 3, \frac{5}{3} \ln 3, 2 \ln 3\right) .$$

On utilisera des valeurs approchées à 10^{-3} près des images par f des termes de la subdivision donnée.

5° Donner, en tenant compte des résultats précédents, le tableau des variations de H , puis l'allure de Γ .

(D'après BAC)

82 ★ Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Pour tout entier k positif ou nul, on pose :

$$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\, dx .$$

1° **a)** Sans calculer B_k , déterminer le signe de B_k suivant la parité de l'entier k .

b) Donner une interprétation géométrique de B_k suivant la parité de k .

2° Calculer B_k et montrer que la suite (B_k) est géométrique.

Préciser sa raison et son premier terme B_0 .

3° On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} B_k$.

a) Réduire U_n de deux manières différentes.

b) Déterminer la limite U de U_n en $+\infty$.

4° On pose $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} |B_k|$.

a) Donner une interprétation géométrique de $|B_k|$.

b) Réduire V_n.

c) Déterminer la limite V de V_n en $+\infty$.

5° Vérifier que $\frac{1}{U} + \frac{1}{V} = \frac{2}{B_0}$.

83 Encadrement de ln $(n!)$

On considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1° Tracer $\mathscr{C}$.

2° Pour tout entier naturel non nul p, on désigne par A_p le point de coordonnées $(p ; 0)$.

a) Tracer les rectangles de bases :

$$[A_1A_2]\ ,\ [A_2A_3]\ ,\ \ldots,\ [A_{n-1}A_n]$$

et de hauteurs respectives :

$$\ln 2\ ,\ \ln 3\ ,\ \ldots,\ \ln n\ .$$

Montrer que la somme des aires de ces rectangles est :

$$S_n = \ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n\ .$$

b) En utilisant une autre couleur qu'au **a)**, tracer les rectangles de bases :

$$[A_1A_2]\ ,\ [A_2A_3]\ ,\ \ldots,\ [A_{n-1}A_n]$$

et de hauteurs respectives :

$$\ln 1\ ,\ \ln 2\ ,\ \ldots,\ \ln(n-1)\ .$$

Exprimer la somme des aires de ces rectangles en fonction de n.

c) Donner une interprétation géométrique de :

$$I_n = \int_1^n \ln x\, dx \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2\ .$$

d) À l'aide de considérations géométriques, justifier que :

$$\text{pour} \quad n \geqslant 2\ ,\ S_{n-1} \leqslant I_n \leqslant S_n\ .$$

En déduire que $I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \ln n$.

3° a) Calculer I_n.

b) En déduire un encadrement de S_n.

4° Déterminer un encadrement de l'entier p tel que :

$$10^p \leqslant 1\,000! < 10^{p+1}\ .$$

Que peut-on en conclure quant au nombre de chiffres de 1 000! ?

(D'après BAC)

84 ★ Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1° Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + e^{-x}\ ,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Établir le tableau des variations de f.

2° Soit T l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées $(x ; y)$, associe le point N de coordonnées $(x' ; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}.$$

a) Montrer que $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\vec{i} + \vec{j}$ et que le milieu P de $[MN]$ appartient à l'axe (Oy).

b) Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par :

$$g(x) = x - \frac{1}{2} + e^{x}\ ,$$

et $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par T est la courbe $\mathscr{C}_1$.

3° Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ admettent pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et préciser leur position par rapport à Δ.

4° En adoptant une unité de 4 cm sur chaque axe, tracer Δ et les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit $\mathscr{D}_k$ la droite d'équation :

$$y = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\ ,$$

où k est un réel strictement supérieur à 1.

1° a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_k$ et donner l'abscisse de leur point commun M_k.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}_k$ et donner l'abscisse de leur point commun N_k.

c) Vérifier que $N_k = T(M_k)$ et que le milieu P_k de $[M_kN_k]$ appartient à l'axe (Oy).

2° Démontrer que les parties du plan délimitées, l'une par $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}_k$ et (Oy), l'autre par $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{D}_k$ et (Oy) ont la même aire $a(k)$.

Étudier la limite de $a(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

(D'après BAC)

85 ★ Calcul d'aire

Partie I

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} .$$

1° Déterminer la fonction dérivée de f et étudier les variations de f.

2° Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, puis vers $+\infty$.

3° Donner le tableau des variations de f et en déduire le signe de $f(x)$ pour x dans $]0 ; +\infty[$.

4° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct, d'unité graphique 5 cm, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

Partie II

Soit λ un réel strictement supérieur à 1.

On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en cm^2, du domaine formé des points dont les coordonnées vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x) .$$

1° Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

2° Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

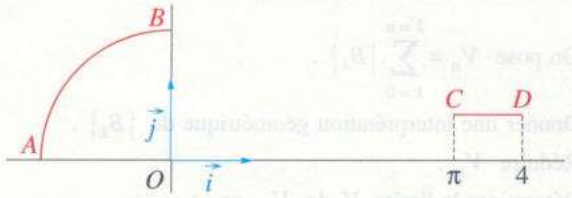
86 Calcul de volume

Le but est le calcul du volume d'une ampoule.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm), on donne les points :

$A\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$, $B\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$, $C\left(\pi ; \frac{1}{2}\right)$ et $D\left(4 ; \frac{1}{2}\right)$,

et l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ de centre O, comme l'indique la figure :



1° On veut raccorder l'arc $\overset{\frown}{AB}$ au segment $[CD]$ par une courbe admettant en B la même tangente que l'arc de cercle et tangente en C à la droite (CD).

Soit la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + 1 .$$

a) Démontrer que la courbe d'équation $y = f(x)$ répond aux conditions posées.

b) Tracer cette courbe, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et le segment $[CD]$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2° Démontrer que, pour tout réel x :

$$\left(\frac{1}{2}\cos x + 1\right)^2 = \frac{1}{8}\cos 2x + \cos x + \frac{9}{8} .$$

3° Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan délimité par l'arc de courbe $\overset{\frown}{ABC}$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = \pi$.

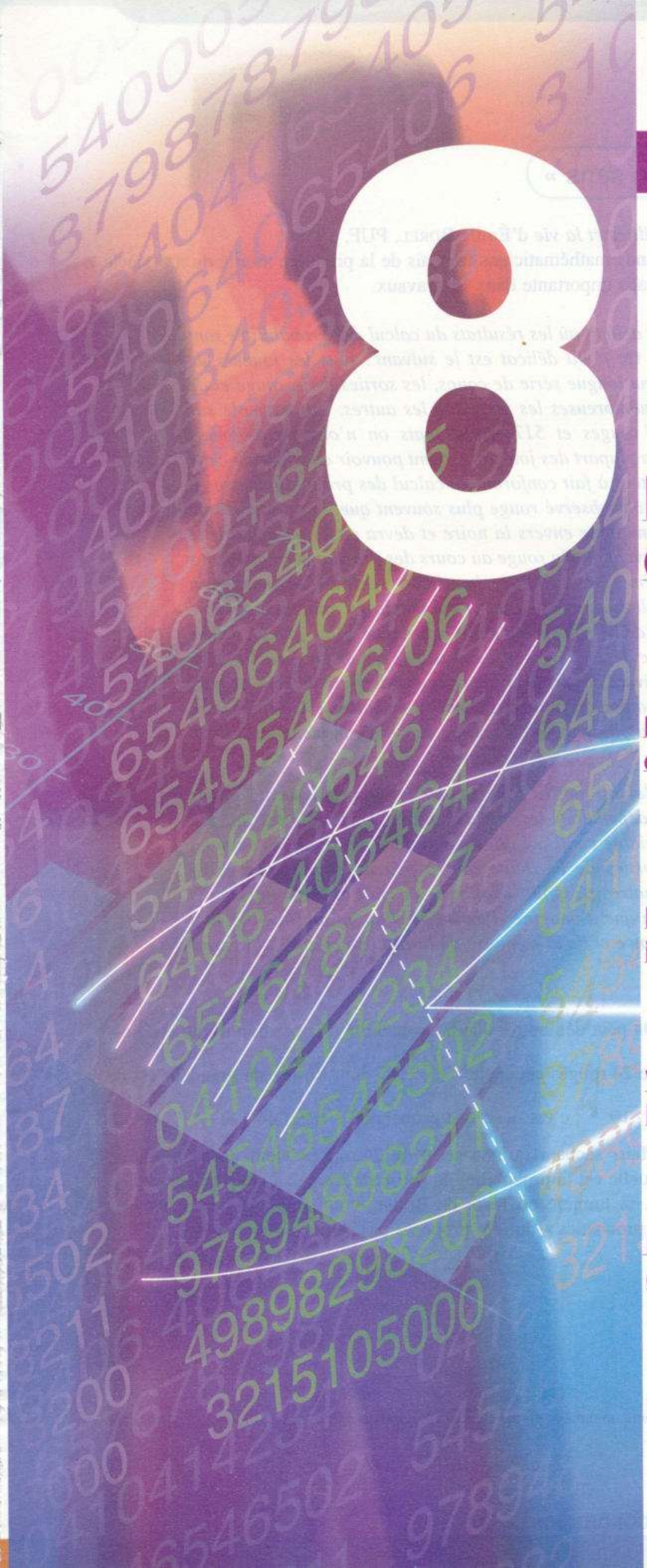
a) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{E}$ autour de l'axe (Ox).

On rappelle que le volume d'une demi-boule de rayon r est :

$$\frac{2}{3}\pi r^3 .$$

b) Donner la valeur exacte de V en cm^3, puis, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée à 10^{-3} près.

(D'après BAC)



CHAPITRE

8

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle p. 206

- définir le conditionnement
- mettre en place de nouvelles probabilités

Événements indépendants p. 207

- caractériser l'indépendance de deux événements

Variables aléatoires indépendantes p. 208

- démontrer ou exploiter l'indépendance de deux variables aléatoires

Formules des probabilités totales p. 209

- découvrir et utiliser la formule des probabilités totales

Expériences répétées p. 210

- utiliser le principe multiplicatif

1 Probabilités et « bon sens »

Le texte suivant est extrait de *Les probabilités et la vie* d'Émile Borel, PUF, 1958.
Émile Borel (1871-1956) fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du XXe siècle et le calcul des probabilités occupa une place importante dans ses travaux.

« ...mettons en évidence le point délicat où les résultats du calcul des probabilités sont contestés au nom du bon sens. Ce point délicat est le suivant : tous les joueurs de roulette[1] ont observé que, sur une longue série de coups, les sorties de la rouge et de la noire sont à peu près aussi nombreuses les unes que les autres. Par exemple sur 1 000 coups, on observera 483 rouges et 517 noires, mais on n'observera jamais 217 rouges contre 783 noires. La plupart des joueurs croient pouvoir conclure de cette observation exacte et d'ailleurs tout à fait conforme au calcul des probabilités que, si durant une certaine période, ils ont observé rouge plus souvent que noire, la roulette a contracté, en quelque sorte, une dette envers la noire et devra acquitter cette dette en faisant sortir la noire plus souvent que la rouge au cours des prochains coups. Dans certains cas, la dette devra même être acquittée immédiatement : si un joueur, en consultant les archives de la roulette au cours d'un grand nombre d'années, a observé que la série la plus longue a été de 24 rouges, ou de 24 noires, ce même joueur, s'il se trouve observer un jour une série de 24 rouges, n'hésitera pas à conclure que la noire doit forcément sortir au coup suivant, « puisqu'il n'y a jamais de série de 25 ». À quoi Joseph Bertrand répond : « la roulette n'a ni conscience ni mémoire ». C'est lui faire trop d'honneur que de penser qu'elle garde le souvenir de ses égarements et qu'elle tient à les réparer.

Il semble que le « bon sens » devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette sont indépendants les uns des autres. (...) Mais les joueurs sont influencés par un fait indéniable confirmé par de multiples observations : sur un grand nombre de coups, les sorties de la rouge sont à peu de choses près aussi fréquentes que celles de la noire et, pour expliquer ce fait d'observation, ils n'aperçoivent pas d'autre moyen que d'imaginer l'existence d'un mécanisme inconnu qui jouerait le rôle de la conscience et de la mémoire de la roulette et qui l'obligerait à compenser ses écarts. »



© Fabrice Rouland / Rapho

On peut démontrer que la probabilité d'apparition d'une « série » de 24 rouges est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$, dont l'ordre de grandeur est de $6 \cdot 10^{-8}$; c'est donc une probabilité « très faible ».

Mais, sachant qu'une série de 24 rouges vient de se produire, quelle est la probabilité de sortie du rouge au coup suivant ?
À la lumière du texte de Borel, commenter la pertinence des « pronostics » du loto proposés par certains magazines.

[1] À la roulette, une boule s'arrête sur une case, qui porte un numéro et une couleur (rouge ou noire) ; les cases rouges et noires sont en nombres égaux.

2 Fréquences

On interroge à la sortie des urnes 1 000 électeurs, 500 hommes et 500 femmes.
Deux candidats A et B briguaient leurs suffrages ; les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre.

	votants pour A	votants pour B	bulletins nuls
hommes	220	195	85
femmes	180	235	85
total	400	430	170

1 Déterminer la fréquence des votants pour A, puis pour B, enfin des électeurs ayant voté nul.

2 Quelle est la fréquence des votants pour A parmi les femmes ?

3 Quelle est la fréquence des hommes parmi les électeurs de B ?

4 Répondre par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations suivantes :

a) 39 % des hommes ont voté pour B ; **b)** 36 % des électeurs de A sont des femmes ;

c) 17 % des bulletins nuls émanent des hommes ; **d)** le vote nul est indépendant du sexe de l'électeur.

5 On suppose que l'échantillon interrogé est représentatif du corps électoral concerné.
Comment pourrait-on alors définir la probabilité pour qu'un électeur choisi au hasard ait voté pour A ?
Et celle qu'un électeur ait voté pour A, sachant que c'est une femme ? Commenter.

3 Indépendance

On fait tourner deux roues circulaires bien équilibrées, une bleue et une rouge, formées chacune de trois secteurs identiques numérotés 1, 2 et 3. On forme ainsi un nombre à deux chiffres, celui des dizaines étant le numéro obtenu sur la roue bleue, celui des unités le numéro obtenu sur la rouge.
Déterminer l'univers et la loi de probabilité associés à cette expérience aléatoire.

1 **Règle du jeu n° 1** : le joueur est gagnant si le résultat qu'il obtient est un multiple de 11.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « le joueur est gagnant » ?

b) La roue bleue est arrêtée sur le numéro 1 alors que la rouge tourne encore.
• Quels sont désormais le nouvel univers et la nouvelle loi de probabilité ?
• Calculer à présent la probabilité que le joueur gagne, sachant que la roue bleue est arrêtée sur le 1.
Cette probabilité a-t-elle changé par rapport à l'expérience initiale ?

Les événements « la roue bleue est arrêtée sur 1 » et « le joueur est gagnant » **sont indépendants**.

2 **Règle du jeu n° 2** : le joueur gagne si la somme des chiffres obtenus est au moins égale à 5.
S désigne la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de S, puis la probabilité de l'événement « le joueur est gagnant ».

b) La roue bleue s'est arrêtée sur le numéro 3 alors que la rouge tourne encore.
• Déterminer le nouvel univers, puis la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
• Quelle est à présent la probabilité que le joueur gagne sachant que la roue bleue est arrêtée sur le 3 ?
Cette probabilité est-elle égale à la précédente ?

Les événements « la roue bleue est arrêtée sur 3 » et « le joueur est gagnant » **ne sont pas indépendants**.

c) Qu'en serait-il si la roue bleue s'était arrêtée sur le numéro 1 ?

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Conditionnement par un événement

définition

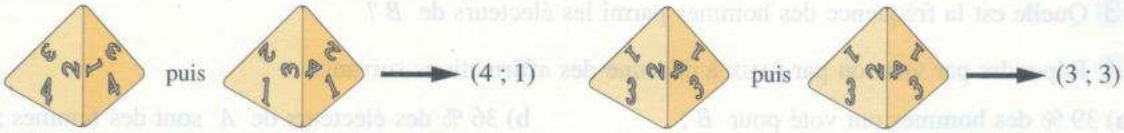
Soit P une probabilité sur un univers E et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, on appelle **probabilité de B sachant A** le réel $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple

Voir Exercices 1 à 10

On lance deux fois successivement un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4, et on note dans l'ordre d'apparition les numéros des faces obtenues.



On modélise cette expérience aléatoire à l'aide d'une loi équirépartie sur l'ensemble des 16 résultats possibles : pour tous entiers i et j de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on a $P((i ; j)) = \dfrac{1}{16}$.

Soit A l'événement « le premier tirage a donné trois » et B l'événement « la somme des numéros obtenus est au moins égale à 7 ».

On a $P(A) = P((3 ; 1)) + P((3 ; 2)) + P((3 ; 3)) + P((3 ; 4)) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = P((3 ; 4)) = \dfrac{1}{16}$.

Par définition, $P_A(B) = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}$. On obtient la probabilité d'obtenir une somme au moins égale à 7 sachant que le premier tirage est trois.

Remarque

Le réel $P_A(B)$ correspond à la probabilité de B sachant que A est lui-même déjà réalisé (A n'est donc pas impossible, conformément à la condition $P(A) \neq 0$).

1.2 Probabilité conditionnelle

propriété

Soit P une probabilité sur un univers E et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

• L'application qui à tout événement B associe le réel $P_A(B)$ est une probabilité sur l'univers E, appelée **probabilité conditionnelle sachant A**. On a en particulier :

pour tout événement B, $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

• De plus, on a : • $P_A(A) = 1$; • si A et B sont incompatibles, alors $P_A(B) = 0$.

Démonstration

• Soit $\{x\}$ un événement élémentaire de E. Par définition :

$$P_A(\{x\}) = \frac{P(\{x\})}{P(A)} \text{ si } x \in A, \quad \text{et} \quad P_A(\{x\}) = 0 \text{ si } x \notin A.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{x \in E} P_A(\{x\}) = \sum_{x \in A} \frac{P(\{x\})}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{x \in A} P(\{x\}) = \frac{1}{P(A)} \cdot P(A) = 1$.

P_A permet donc de définir une loi de probabilité.

• Les deux autres propriétés sont des conséquences immédiates de la définition.

Remarque

La probabilité conditionnelle P_A est une nouvelle probabilité sur l'univers E pour laquelle **l'événement A est devenu certain puisqu'il est réalisé** ; $\overline{A}$ est devenu impossible.
Cette probabilité est induite par la connaissance de renseignements supplémentaires par rapport à l'expérience aléatoire initiale : on sait que l'événement A est réalisé.
Au jeu, l'objectif du tricheur est d'obtenir un conditionnement : sachant qu'il a vu l'as de trèfle dans le jeu de son voisin de gauche, la probabilité que son voisin de droite dispose d'un carré d'as devient nulle…

2 Événements indépendants

Définition et propriété

Soit P une probabilité sur un univers E.

- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a A et B indépendants $\iff P_A(B) = P(B)$
$\iff P_B(A) = P(A)$.

Démonstration

Voir Exercices 11 à 24

On suppose que $P(A) \neq 0$. On a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) .$$

A et B sont indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$\iff P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$
$\iff P_A(B) = P(B)$ en divisant par $P(A) \neq 0$

La démonstration est identique pour $P_B(A) = P(A)$ en supposant $P(B) \neq 0$.

Exemple

On s'intéresse à l'expérience étudiée précédemment de deux lancers successifs d'un dé tétraédrique.
Soit D l'événement « on obtient deux numéros identiques » et I l'événement « le premier résultat est impair ».

On a $P(D) = P((1 ; 1)) + P((2 ; 2)) + P((3 ; 3)) + P((4 ; 4)) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

De même $P(I) = \frac{1}{2}$ et $P(D \cap I) = P((1 ; 1)) + P((3 ; 3)) = \frac{1}{8}$; on a donc :

$$P(D \cap I) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P(D) \times P(I) ,$$

et on en déduit que D et I sont indépendants.

Soit les événements A « le premier tirage a donné 3 » et B « la somme des faces est au moins égale à 7 » ;

on a vu précédemment que $P_A(B) = \frac{1}{4}$; or :

$$P(B) = P((3 ; 4)) + P((4 ; 3)) + P((4 ; 4)) = \frac{3}{16} .$$

Les probabilités $P_A(B)$ et $P(B)$ sont différentes ; on en déduit que A et B ne sont pas indépendants.

Remarque

Lorsque deux événements A et B sont de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

3 Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même univers E ; $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ sont les différentes valeurs possibles pour X et $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ les différentes valeurs possibles pour Y.

Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tout i de $\{1 ; 2 ; \ldots ; m\}$ et pour tout j de $\{1 ; 2 ; \ldots ; k\}$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) .$$

Exemples

Voir Exercices 25 à 27

• Sur l'univers obtenu à partir de deux lancers successifs d'un dé tétraédrique, on définit les variables aléatoires X, égale au numéro obtenu au premier lancer, et Y, définie par la parité de la somme des numéros obtenus.

1er lancer / 2nd lancer	1	2	3	4
1	$X=1$; Y : pair	$X=2$; Y : impair	$X=3$; Y : pair	$X=4$; Y : impair
2	$X=1$; Y : impair	$X=2$; Y : pair	$X=3$; Y : impair	$X=4$; Y : pair
3	$X=1$; Y : pair	$X=2$; Y : impair	$X=3$; Y : pair	$X=4$; Y : impair
4	$X=1$; Y : impair	$X=2$; Y : pair	$X=3$; Y : impair	$X=4$; Y : pair

Les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y sont :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

y_i	pair	impair
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On a $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(Y = \text{pair}) = \frac{1}{2}$; de plus, l'intersection des événements $(X = 1)$ et $(Y = \text{pair})$ étant formée des deux événements élémentaires $(1 ; 1)$ et $(1 ; 3)$, la probabilité de cette intersection est donc égale à $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$. Ainsi, on a $P((X = 1) \cap (Y = \text{pair})) = P(X = 1) \times P(Y = \text{pair})$, et les événements $(X = 1)$ et $(Y = \text{pair})$ sont indépendants.

On peut vérifier que les événements $(X = i)$ et $(Y = \text{pair})$ ou $(X = i)$ et $(Y = \text{impair})$ sont indépendants pour tout i de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

• Une chaîne fabrique des boîtes rectangulaires. L et ℓ sont les variables aléatoires égales respectivement à la largeur et la longueur (en cm) d'une boîte tirée au hasard en sortie de chaîne. Les lois de probabilités de L et ℓ sont :

x_i	13,9	14	14,1
$P(L = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

y_i	7,9	8	8,1
$P(\ell = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

L et ℓ sont indépendantes. On s'intéresse à la probabilité de E « le périmètre de la boîte est de 44 cm exactement ».
On a $E = ((L = 13,9) \cap (\ell = 8,1)) \cup ((L = 14) \cap (\ell = 8)) \cup ((L = 14,1) \cap (\ell = 7,9))$.
E est la réunion de trois événements disjoints et, par hypothèse d'indépendance :

$$P(E) = P(L = 13,9) \times P(\ell = 8,1) + P(L = 14) \times P(\ell = 8) + P(L = 14,1) \times P(\ell = 7,9) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{13}{24} .$$

4 Formule des probabilités totales

4.1 Partition de l'univers — définition

Soit E un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2.

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de E si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $A_i \neq 0$;
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

Remarques

- La notion géométrique correspondante à celle de la partition est celle de « pavage ».
- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$, A et $\overline{A}$ forment une partition de E.

4.2 Formule des probabilités totales — propriété

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition d'événements de l'univers E constituée d'évènements de probabilités non nulles , et B un événement quelconque contenu dans E . On a :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) + \ldots + P_{A_n}(B) \cdot P(A_n) .$$

Démonstration

Voir Exercices 28 à 34

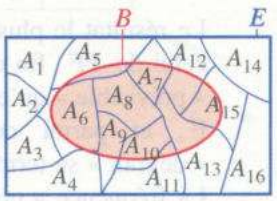
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$, certains des $B \cap A_i$ étant éventuellement vides.

Ces événements sont deux à deux disjoints, donc la probabilité de leur réunion est la somme des probabilités de chacun d'entre eux ; on en déduit :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) .$$

La formule des probabilités totales est une conséquence directe de la relation précédente du fait que, pour tout i de $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$:

$$P(B \cap A_i) = P_{A_i}(B) \times P(A_i) .$$



Exemple

Deux urnes contiennent chacune cinq boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge et 4 bleues dans l'urne A , 3 rouges et 2 bleues dans l'urne B . Un joueur doit choisir une urne et en tirer une boule ; le placement des urnes est tel que la probabilité de tirer dans l'urne A vaut $\frac{2}{3}$, alors qu'elle est de $\frac{1}{3}$ pour l'urne B . On cherche la probabilité que le joueur tire une boule rouge.



On appelle A (respectivement B) l'événement « le joueur effectue le tirage dans l'urne A (respectivement B) » et R l'événement « la boule tirée est rouge ».

On a , $P_A(R) = \frac{1}{5}$ et $P_B(R) = \frac{3}{5}$. De plus, par hypothèse, $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$;

donc, par application de la formule des probabilités totales, $P(R) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{1}{3}$.

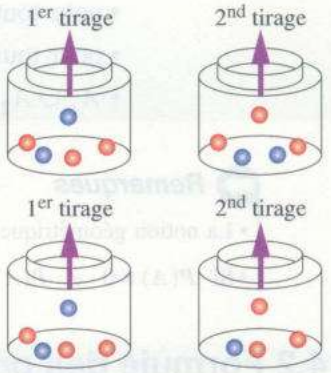
5 Expériences répétées

5.1 Expériences indépendantes

Lors de la répétition d'expériences aléatoires, on dira qu'elles sont indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le déroulement des autres.

Exemple

On dispose d'une urne dans laquelle sont placées cinq boules indiscernables au toucher, trois rouges et deux bleues.



• **Si l'on procède successivement à deux tirages avec remise**, c'est-à-dire que la première boule tirée est replacée dans l'urne avant le second tirage, **on réalise deux expériences indépendantes** : quel que soit le résultat du premier tirage, le second est fait dans des conditions identiques.

• **Si l'on procède successivement à deux tirages sans remise, les expériences ne sont plus indépendantes** : l'absence au second tirage de la première boule tirée en modifie les conditions.

5.2 Simulation de lancers de pièces

On donne une simulation de taille cent de deux lancers répétés d'une pièce équilibrée.
0 correspond à FACE et 1 représente PILE.
Les résultats obtenus sont donc :

FF	FP	PF	PP
25	31	22	22

Le résultat le plus conforme à l'intuition est celui de FF. En effet, sur 100 lancers, il est « prévisible » qu'environ 50 commencent par F, et parmi ces 50 lancers, la moitié « devrait » se terminer par F.
La fréquence « prévisible » de FF est donc de 0,25, et est égale au produit $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ des probabilités d'apparition de F pour chacune des expériences.
On admettra ce principe multiplicatif lors de la répétition d'expériences indépendantes.

A3 = =ENT(ALEA()*2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	simulation de 100 lancers de deux pièces													
2														
3	0	0		1	0		1	0		1	1		0	0
4	1	1		1	1		1	1		0	1		1	0
5	0	0		1	1		1	0		0	1		1	1
6	0	0		1	0		0	0		0	0		1	0
7	1	0		0	1		0	0		1	0		1	0
8	0	0		0	1		1	0		0	0		0	1
9	1	0		1	0		0	1		1	0		0	1
10	1	1		0	1		0	1		1	0		1	1
11	1	1		0	1		1	1		0	0		0	1
12	0	0		1	1		0	1		0	1		0	1
13	0	1		0	1		1	0		1	0		0	1
14	0	0		1	0		0	1		1	1		0	1
15	1	1		1	1		0	0		0	1		1	1
16	0	0		1	0		1	1		0	0		1	0
17	1	0		0	0		0	1		1	1		1	1
18	0	1		0	0		1	1		0	1		0	1
19	1	1		0	1		0	1		1	1		0	0
20	0	0		0	1		0	0		0	1		1	1
21	1	0		0	0		1	0		0	1		0	1
22	0	0		0	1		0	0		0	0		0	0
23														

5.3 Propriété admise

Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.

Exemple

Voir Exercices 28 à 34

On lance deux dés équilibrés successivement : l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On forme ainsi un nombre de deux chiffres. La probabilité d'obtenir 25 est égale à $\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$; c'est le produit des probabilités d'obtenir 2 au premier lancer et 5 au second.

1 Probabilité conditionnelle et indépendance

Une usine d'horlogerie fabrique des montres en très grande série. Ces montres peuvent présenter, à l'issue de la fabrication, deux défauts a et b.

Une étude statistique a permis d'établir que, pour une montre sortant de l'usine, le défaut a apparaît avec une probabilité de 0,02, alors que la probabilité d'apparition du défaut b est de 0,1.

On prélève au hasard une montre à l'issue de la fabrication ; on appelle A l'événement « la montre présente le défaut a » et B l'événement « la montre présente le défaut b ».

1° On suppose qu'une étude de qualité a permis de déceler que la moitié des montres présentant le défaut a présente également le défaut b.

a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) Calculer la probabilité que la montre prélevée présente les deux défauts a et b.

2° On décide de modifier le procédé de fabrication de façon à rendre les événements A et B indépendants. Calculer, dans ces conditions, la probabilité de l'événement « la montre présente un et un seul des deux défauts ».

• Méthode

Pour résoudre un exercice en utilisant les probabilités conditionnelles, il convient d'analyser le texte et de traduire précisément les hypothèses, en évitant en particulier les confusions entre $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A \cap B)$.

Pour démontrer l'indépendance de deux événements, on doit établir l'une des égalités :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{ou} \quad P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A).$$

Inversement, lorsqu'on connaît l'indépendance de deux événements, on peut utiliser ces égalités pour résoudre les questions posées.

Par hypothèse, on a :

$$P(A) = 0{,}02 \quad \text{et} \quad P(B) = 0{,}1.$$

1° On sait ici que lorsqu'une montre présente le défaut a, alors elle présente aussi le défaut b, avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Ainsi, on a $P_A(B) = 0{,}5$.

a) Les égalités $P(B) = 0{,}1$ et $P_A(B) = 0{,}5$ permettent de conclure immédiatement que A et B ne sont pas indépendants puisque la réalisation de A modifie (sensiblement !) la probabilité de B.

b) L'événement « la montre présente les deux défauts » est l'événement $A \cap B$.

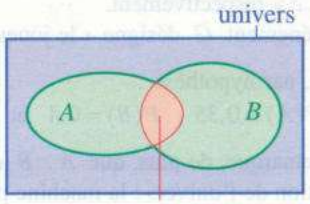
On sait que $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$; on en déduit :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0{,}5 \times 0{,}02 = 0{,}01.$$

Une montre présente donc les deux défauts avec une probabilité de 0,01.

On remarque que $P(A) \times P(B) = 0{,}002$ est différent de $P(A \cap B)$: on retrouve la non indépendance de A et B.

2° Le graphique suivant permet de schématiser la situation. L'événement C est représenté en vert.



$A \cup B$ est la réunion disjointe des événements C et $A \cap B$; donc $P(A \cup B) = P(C) + P(A \cap B)$.

Mais on sait que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

On en déduit donc que :

$$P(C) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Par hypothèse, A et B sont ici indépendants, donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Ainsi, on a :

$$P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$
$$= 0{,}02 + 0{,}1 - 2 \times 0{,}02 \times 0{,}1 = 0{,}116.$$

La probabilité qu'une montre prélevée au hasard, en fin de fabrication, présente un et un seul défaut, est de 0,116.

2 Probabilités totales et utilisation d'un arbre pondéré

Une machine électronique propose aux joueurs une partie parmi trois de types différents.

Une partie de type a est proposée avec une probabilité de 0,35, une partie de type b avec une probabilité de 0,4 et une partie de type c avec une probabilité de 0,25.

La machine est programmée de telle sorte que le joueur est gagnant avec une probabilité de 0,2 pour une partie a, 0,5 pour une partie b et 0,8 pour une partie c.

1° a) Traduire les hypothèses en termes de probabilités (éventuellement conditionnelles).

b) Construire, à l'aide de ces probabilités, un arbre pondéré.

2° Un joueur décide de faire une partie.
Calculer la probabilité pour qu'il en sorte gagnant.

3° Un joueur a gagné sa partie.
Quelle est la probabilité que ce soit à l'issue d'une partie a ?

• Méthode

• La formule des probabilités totales peut être utilisée en présence d'événements qui s'excluent mutuellement et qui recouvrent l'ensemble de tous les cas possibles.

• Un arbre pondéré permet de traduire commodément les situations d'application de la formule des probabilités totales.

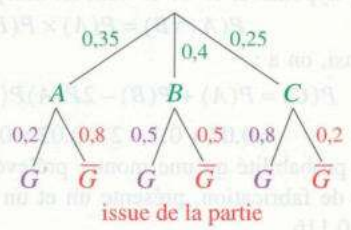
1° a) On appelle A, B et C les événements « le jeu propose une partie de type a », « le jeu propose un partie de type b » et « le jeu propose une partie de type c » respectivement.
L'événement G désigne « le joueur est gagnant ».

On a, par hypothèse :
$P(A)=0{,}35$, $P(B)=0{,}4$ et $P(C)=0{,}25$.

On remarque, de plus, que A, B et C forment une partition de l'univers : la machine propose une et une seule partie de l'un des trois types à chaque fois.

À l'issue d'une partie de type a, le joueur est gagnant avec une probabilité de 0,2 ; ainsi, on a :
$$P_A(G)=0{,}2 .$$
De même, $P_B(G)=0{,}5$ et $P_C(G)=0{,}8$.

b) On peut schématiser un tel problème à l'aide d'un « arbre pondéré » :



À l'aide de cet arbre, on peut déterminer la probabilité de $G \cap A$, par exemple, en « remontant » la branche passant par G et A :
$$P(G \cap A)=P_A(G)\times P(A)$$
$$=0{,}2\times 0{,}35=0{,}07 .$$

2° On cherche ici à calculer $P(G)$. En appliquant la formule des probabilités totales avec la partition A, B et C, on a :
$$P(G)=P(G\cap A)+P(G\cap B)+P(G\cap C) .$$
En utilisant l'arbre pondéré qui précède, on obtient :
$$P(G)=0{,}2\times 0{,}35+0{,}5\times 0{,}4+0{,}8\times 0{,}25=0{,}47 .$$

3° Dans cette question, on sait que le joueur a gagné ; on s'intéresse dans ces conditions à la probabilité qu'il ait gagné une partie de type a ; c'est donc $P_G(A)$ que l'on veut déterminer.

On a $P_G(A)=\dfrac{P(G\cap A)}{P(G)}$.

D'après l'arbre obtenu précédemment, on a :
$$P(G\cap A)=0{,}07 .$$
On sait de plus que $P(G)=0{,}47$.
Ainsi, $P_G(A)=\dfrac{0{,}07}{0{,}47}$.

La probabilité pour un gagnant d'avoir joué une partie de type a est de 0,149 à 10^{-3} près.

3 Épreuve répétée et variables aléatoires

Sur la ligne qu'il emprunte, un train peut rencontrer deux feux rouges qui le contraignent à un arrêt momentané. Lorsqu'un train arrive à la hauteur d'un feu, celui-ci est rouge ou vert avec une probabilité de 0,5 , indépendamment de l'état de l'autre feu sur le trajet.

1° On appelle F la variable aléatoire définie par le nombre de feux rouges rencontrés par le train sur un trajet donné. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire F.

2° On désigne par H la variable aléatoire de « ponctualité » du train : elle a deux valeurs possibles, h lorsque le train est à l'heure à l'arrivée et r lorsqu'il est en retard.
Compléter le tableau de fréquences ci-contre, issu de l'étude d'un grand nombre de trajets.

nombre de feux	0	1	2	total
h	0,15		0,15	0,60
r				
total	0,25	0,50		

3° On admet que l'on peut assimiler fréquence et probabilité ; calculer :

a) la probabilité qu'un train soit en retard sachant qu'il a rencontré un seul feu rouge ;

b) la probabilité qu'un train n'ait pas rencontré de feu rouge sachant qu'il est arrivé à l'heure.

4° Les variables aléatoires F et H sont-elles indépendantes ?
La compagnie veut diminuer la fréquence des retards ; doit-elle modifier le système de feux ?

• Méthode

• Lors de la répétition d'une même épreuve de façon indépendante, on applique le principe de multiplicativité des probabilités pour une liste de résultats.

• Pour étudier l'indépendance de deux variables aléatoires, on doit examiner l'indépendance deux à deux des différentes paires d'événements possibles.

1° On répète deux fois indépendamment l'épreuve de l'arrivée devant un feu. En appliquant le principe de multiplicativité, on a :

$$P(V\,;\,V) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25 \ .$$

De même, $P(V\,;\,R) = 0{,}25$, $P(R\,;\,V) = 0{,}25$ et $P(R\,;\,R) = 0{,}25$.

La loi de probabilité de F est :

0	1	2
0,25	0,5	0,25

2° Si x désigne la fréquence correspondant à $F = 1$ et $H = h$, on a :

$$x + 2 \times 0{,}15 = 0{,}60 \ , \text{ d'où } x = 0{,}30 \ .$$

De façon similaire, on obtient le tableau complet :

nombre de feux	0	1	2	total
h	0,15	0,3	0,15	0,60
r	0,1	0,2	0,1	0,4
total	0,25	0,50	0,25	1

3° a) En isolant la deuxième colonne du tableau (on sait que le train a rencontré un seul feu rouge), on a :

$$P_{(F=1)}(H=r) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4 \quad \text{et} \quad 0{,}4 = P(H=r) \ .$$

b) On isole à présent la ligne $(H = h)$ du tableau et on obtient :

$$P_{(H=h)}(F=0) = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25 \quad \text{et} \quad 0{,}25 = P(F=0) \ .$$

4° D'après la question précédente, on sait que les événements $(H = r)$ et $(F = 1)$ sont indépendants, de même que $(H = h)$ et $(F = 0)$.

On examine l'indépendance de $(H = h)$ et $(F = 2)$ d'après le tableau précédent, on a :

$$P((H=h) \cap (F=2)) = 0{,}15 \ .$$

Or , $P(H=h) \times P(F=2) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$.
Ainsi, par définition, les événements $(H = h)$ et $(F = 2)$ sont indépendants et on vérifie sans difficulté l'indépendance dans tous les autres cas.

Les variables aléatoires F et H sont donc indépendantes. Par conséquent ...

1 Tests de dépistage

Pour dépister une maladie, un test a été mis au point. Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99.

On s'intéresse à une « population cible » dans laquelle on veut procéder à un dépistage systématique. Un individu est choisi au hasard dans la population cible. M désigne l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test de l'individu choisi est positif ». On pose $P(M) = p$.

1 Traduire les quantités 0,99, données en hypothèses, en termes de probabilités conditionnelles.

2 **a)** À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer en fonction de p les probabilités $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$. En déduire l'expression $f(p)$ en fonction de p de la probabilité conditionnelle $P_T(M)$.

b) Étudier les variations sur l'intervalle $[0 ; 1]$ de la fonction $p \mapsto f(p)$.

c) Compléter le tableau de valeurs suivants :

p	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	0,8
$P_T(M)$						

3 On suppose que la population cible choisie est constituée d'individus présentant des symptômes évocateurs de la maladie ; dans cette population cible, on a $p = 0,7$.
Calculer $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}(\overline{M})$. Commenter ces résultats.

4 On s'intéresse à présent à une maladie « rare » que l'on veut dépister de façon systématique dans la population ; on a ici $p = 0,005$.

a) Quelle est la probabilité pour un individu, dont le test est positif, d'être malade ?

b) Calculer la probabilié pour un individu, dont le test est positif, de n'être pas atteint.

c) Commenter.

2 Le paradoxe des trois coffres

Le texte suivant est issu du *Calcul des probabilités* de J. BERTRAND, Paris, 1889.

« Trois coffrets sont d'apparences identiques. Chacun a deux tiroirs, chaque tiroir renferme une médaille. Les médailles du premier coffre sont en or, celles du second en argent, le troisième coffre contient une médaille d'or et une médaille d'argent.
On choisit un coffret ; quelle est la probabilité de trouver dans ses tiroirs une pièce d'or et une pièce d'argent ?
Trois cas sont possibles et le sont également puisque les trois coffrets sont d'apparences identiques. Un cas seulement est favorable ; la probabilité est $\frac{1}{3}$.
Le coffret est choisi. On ouvre un tiroir. Quelle que soit la médaille qu'on y trouve, deux cas seulement restent possibles. Le tiroir qui reste fermé pourra contenir une médaille dont le métal diffère ou non de la première. Sur ces deux cas, un seul est favorable, celui du coffret dont les pièces sont différentes. La probabilité d'avoir mis la main sur ce coffret est donc $\frac{1}{2}$.
Comment croire, cependant, qu'il suffise d'ouvrir un tiroir pour changer la probabilité, et de $\frac{1}{3}$ *, l'élever à* $\frac{1}{2}$ *? (...) »*

1 Des deux réponses proposées par J. BERTRAND, laquelle semble correcte ?

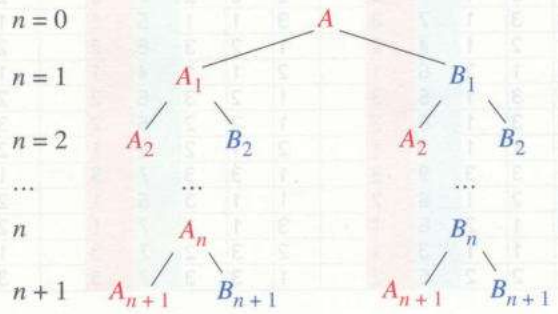
2 Mettre en place un raisonnement basé sur le conditionnement pour invalider la réponse incorrecte proposée dans ce texte.

3 Déplacement d'une particule

Pour traiter une situation concrète à l'aide des probabilités, il est nécessaire de traduire et d'interpréter mathématiquement des hypothèses souvent formulées par une phrase.

On considère une particule ne pouvant occuper que deux positions A et B.
Elle se déplace aléatoirement de l'une à l'autre de la façon suivante :

- au temps 0, la particule est en A ;
- au temps n, la particule est soit en A, soit en B.



On sait que la probabilité pour que la particule ne change pas de position entre les instants n et $n+1$ est constante. On considère les événements :

- A_n : « au temps n la particule est en A » ;
- B_n : « au temps n la particule est en B ».

On note α_n et β_n les probabilités des événements A_n et B_n.

1 À l'aide des hypothèses, justifier que $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$.

2 **a)** Quelle hypothèse permet d'affirmer que $P_{A_n}(A_{n+1})$ ne dépend pas du temps ?
On appelle θ cette probabilité.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $P_{B_n}(B_{n+1}) = \theta$.

3 **a)** Calculer, en fonction de θ et β_n, la probabilité de l'événement $B_n \cap A_{n+1}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + 1 - \theta .$$

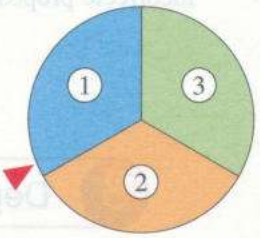
c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\alpha_n = \frac{(2\theta - 1)^n}{2} + \frac{1}{2} .$$

d) Déterminer la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

4 Expériences répétées et indépendance

On dispose d'une roue divisée en trois secteurs identiques numérotés 1, 2 ou 3. On suppose qu'après rotation, la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs de façon équiprobable.



Partie A. On fait tourner trois fois successivement la roue, en supposant ici que chaque résultat est indépendant des deux autres.
S désigne la variable aléatoire définie par la somme des trois numéros obtenus ; D est la variable aléatoire dont les valeurs sont données par le numéro sorti à la deuxième rotation.

1 On a procédé sur tableur à une simulation de taille 45 de cette expérience ; déterminer pour cette simulation les répartitions des fréquences pour les variables aléatoires S et D.

L2C1 = =ENT(3*ALEA()+1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1er	2ème	3ème	S	D		1er	2ème	3ème	S	D		1er	2ème	3ème	S	D
2	3	3	1	7	3		3	2	2	7	2		2	3	1	6	3
3	1	3	3	7	3		1	2	2	5	2		2	3	3	8	3
4	1	1	3	5	1		1	2	3	6	2		2	1	3	6	1
5	3	3	1	7	3		2	3	2	7	3		2	2	2	6	2
6	3	3	1	7	3		3	1	1	5	1		1	3	2	6	3
7	1	2	1	4	2		1	2	3	6	2		2	1	1	4	1
8	2	1	3	6	1		2	1	1	4	1		1	1	3	5	1
9	1	3	1	5	3		1	2	3	6	2		2	3	3	8	3
10	2	3	1	6	3		1	2	2	5	2		3	1	1	5	1
11	1	1	1	3	1		2	1	2	5	1		2	1	1	4	1
12	3	3	3	9	3		1	3	3	7	3		1	3	3	7	3
13	3	2	1	6	2		1	1	3	5	1		2	3	2	7	3
14	3	1	2	6	1		3	1	3	7	1		2	2	2	6	2
15	1	1	1	3	1		2	3	2	7	3		1	3	1	5	3
16	1	2	2	5	2		1	3	3	7	3		3	3	3	9	3

2 À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, procéder à une nouvelle simulation de taille 50 ; mettre en commun les différentes simulations obtenues dans la classe et déterminer les répartitions des fréquences correspondantes pour les variables S et D.

3 En utilisant les résultats connus sur la répétition d'expériences indépendantes, dresser les lois de probabilité des variables aléatoires S et D.

4 Calculer la probabilité de $(S=3)$ sachant que $(D=2)$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Partie B. On se propose ici de conserver la même expérience aléatoire, mais de changer de point de vue : on utilise l'équiprobabilité des résultats possibles à l'issue des trois rotations de la roue.

1 Préciser l'univers puis la loi de probabilité associés à cette expérience aléatoire.
On considère les variables aléatoires D, définie précédemment, et T, dont les valeurs sont données par le numéro sorti à la troisième rotation.

2 Déterminer les lois de probabilité de D et T et démontrer que les variables aléatoires D et T sont indépendantes.

On pourrait démontrer de même que les variables aléatoires définies par le premier, le deuxième ou le troisième numéro sorti sont deux à deux indépendantes.

On peut ainsi remarquer que :
supposer l'équiprobabilité des résultats possibles à l'issue des trois rotations revient à admettre l'indépendance des résultats des trois rotations successives.

Faire le point

• Probabilité conditionnelle

• Si A et B sont deux événements et si $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A est le réel :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

• L'application P_A est une probabilité qui correspond à une situation où l'on dispose de plus d'information que dans l'expérience aléatoire initiale : **on sait que A est réalisé**.

• Indépendance

• Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

• Les événements A et B , de probabilités non nulles, sont indépendants si, et seulement si :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A) .$$

Ainsi la réalisation de l'un des deux événements ne modifie pas la probabilité de l'autre.

• Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, quelles que soient les valeurs possibles x pour X et y pour Y, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

• Formule des probabilités totales

Les évènements A_1, A_2, …, A_n de probabilités non nulles, forment une partition de l'univers E.

Pour tout événement B , on a :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + \ldots + P_{A_n}(B) \times P(A_n) = P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n) .$$

• Expériences répétées indépendantes

Lorsqu'on répète de façon indépendante des expériences aléatoires, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chacun de ces résultats.

savoir	comment faire ?
démontrer (ou utiliser) l'indépendance de deux événements	• vérifier (ou appliquer) la définition de l'indépendance ou sa propriété caractéristique en termes de probabilités conditionnelles
utiliser la formule des probabilités totales	• reconnaître une partition de l'univers • analyser soigneusement l'énoncé afin d'en faire une traduction convenable ; si nécessaire, schématiser le problème à l'aide d'un tableau, d'un diagramme ou d'un arbre pondéré • appliquer la formule des probabilités totales

1 Probabilités conditionnelles

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Quel que soit l'événement A, on a $P_A(A) = 1$.

2° Si $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$, alors $P_A(B) = 0{,}4$.

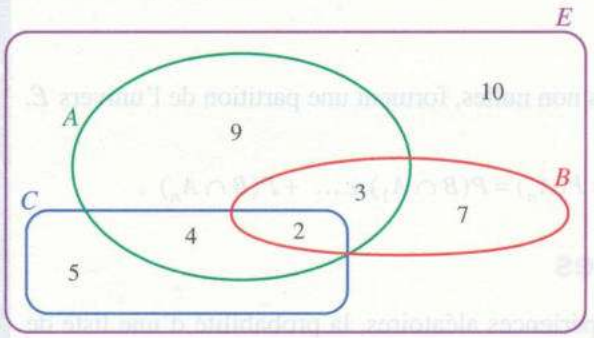
3° Si $P(B) = 0{,}5$ et $P_B(A) = 0{,}4$, alors $P(A \cap B) = 0{,}2$.

4° Si $P(A) \neq 0$, alors, pour tout événement B, on a : $P_A(A \cup B) = 1$.

5° Si $P_A(B) = 0$, alors A et B sont incompatibles.

2 On considère trois événements A, B et C d'un même univers E que l'on peut schématiser par le diagramme ci-dessous.

E est formé de 40 résultats possibles et est muni d'une loi de probabilité P équirépartie.



Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $P(A \cap B) = \frac{5}{40}$; **b)** $P(A \cap C) = \frac{4}{40}$;

c) $P(B \cap C) = \frac{2}{40}$; **d)** $P(A) = \frac{9}{40}$; **e)** $P_A(B) = \frac{5}{18}$;

f) $P_B(C) = \frac{2}{12}$; **g)** $P_C(B) = \frac{5}{11}$; **h)** $P_B(A) = \frac{5}{18}$.

2 Calculs de probabilités

3 Soit A et B deux événements, tels que :

$P_A(B) = 0{,}5$; $P_B(A) = 0{,}3$ et $P(A) = P(B) - 0{,}3$.

Calculer les probabilités des événements A, B, puis $A \cap B$.

4 On donne $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}7$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$.

Calculer $P(A \cap B)$, puis $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

5 A et B sont deux événements, tels que :

$P(B) = 2\,P(A)$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ et $P_A(B) = 0{,}5$.

Calculer les probabilités de A et de B.

6 Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75 % et sa seconde balle, qu'il joue plus prudemment, à 90 %.

Quelle est la probabilité qu'il commette une double faute (c'est-à-dire qu'il échoue à ses deux services) ?

7 On lance deux dés cubiques bien équilibrés, un bleu et un rouge. Les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Quelle est la probabilité que la somme des faces obtenues soit paire sachant que le dé rouge affiche 3 ?

8 ★ Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine un tiers de la population. On a constaté qu'un malade sur 10 est vacciné, et que la probabilité pour une personne choisie au hasard d'être grippée est de 0,25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de se retrouver grippé malgré tout ?

9 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : trois bleues et deux rouges. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Calculer les probabilités pour que :

a) la seconde boule tirée soit bleue sachant que la première était rouge ;

b) la seconde boule tirée soit rouge sachant que la première était bleue.

10 ★ Un lot de pièces présente 5 % de pièces défectueuses. La procédure de contrôle en sortie de fabrication n'est pas infaillible : 96 % des pièces bonnes sont acceptées et 98 % des mauvaises sont rejetées.

On choisit une pièce au hasard en sortie de fabrication.

Quelle est la probabilité pour que :

a) la pièce soit refusée ;

b) la pièce soit bonne et acceptée ;

c) il y ait une erreur de contrôle ;

d) la pièce soit bonne sachant qu'elle est refusée ;

e) la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée.

2 Indépendance

1 Vrai-faux

11 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si A et B sont deux événements indépendants, alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2° Si $P(A) = P(B)$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

3° Si $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}14$, alors A et B sont indépendants.

4° Si A et B sont indépendants, alors :
$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(B)$.

2 Événements indépendants

12 1° A et B sont deux événements indépendants, tels que $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}3$.
Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

2° Même question pour A et B incompatibles.

13 A et B sont deux événements, tels que :
$P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}58$.

1° Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2° Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?

14 A et B sont deux événements, tels que :
$P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}86$.

1° Calculer $P_B(A)$.

2° Les événements A et B sont-ils indépendants ?

15 ★ A et B sont deux événements, tels que :
$P(A \cup B) = 0{,}58$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$.

1° Déterminer un encadrement de $P(A)$ aussi précis que possible.

2° Calculer $P(A)$ et $P(B)$ lorsque A et B sont indépendants.

16 ★ On suppose que A et B sont deux événements indépendants.

1° Justifier l'égalité $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A)P(B)$.

2° Démontrer l'indépendance des événements A et $\overline{B}$, puis celle de $\overline{A}$ et B .

3° Démontrer l'indépendance des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
(On remarquera que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.)

17 ★ On considère deux événements A et B indépendants.

Dans le tableau suivant, on lit, par exemple, $P(A \cap \overline{B}) = n$.

	A	$\overline{A}$
B	m	p
$\overline{B}$	n	q

Démontrer que $mq = np$.

On admettra l'indépendance de $\overline{A}$ et B , A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

18 Deux événements A et B incompatibles peuvent-ils être indépendants ?

19 Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue étudiée et de l'activité sportive choisie :

	tennis	équitation	voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1° On choisit au hasard un stagiaire.

Déterminer la probabilité des événements A , B et C suivants :

A : « le stagiaire étudie l'Anglais » ;

B : « le stagiaire étudie l'Allemand et pratique la voile » ;

C : « le stagiaire pratique l'équitation ».

2° **a)** On choisit au hasard un stagiaire pratiquant le tennis.

Quelle est la probabilité pour qu'il étudie l'Allemand ?

b) Les événements « étudier l'Allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

c) Les événements « pratiquer la voile » et « étudier l'Anglais » sont-ils indépendants ?

20 On lance deux fois successivement un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Étudier l'indépendance des événements suivants :

a) A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » ;

b) C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » ;

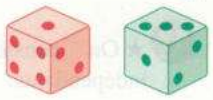
c) E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois ».

21 ★ On a placé dans une urne des jetons, 50 rouges numérotés 0 et 50 rouges numérotés 1.

Il y a, de plus, 30 jetons verts numérotés 0.

Déterminer le nombre de jetons verts numérotés 1 de façon à ce que les événements « le jeton est rouge » et « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lorsqu'on procède au tirage d'un jeton au hasard dans l'urne.

22 On lance simultanément deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 : un rouge et un vert.



On considère les événements suivants :

R : « le numéro sorti sur le dé rouge est pair » ;

V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair » ;

S : « la somme des numéros sortis est paire ».

1° Démontrer que S et R sont indépendants.

2° Démontrer que S et V sont indépendants.

3° S et $R \cap V$ sont-ils indépendants ?

23 ★ On dit que les trois événements A, B et C sont indépendants, si ces événements sont deux à deux indépendants et si on a :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) .$$

Cette dernière condition n'est pas une conséquence des autres, comme l'exemple suivant permet de le montrer.

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée ; on considère les événements :

A : « le premier lancer donne PILE » ;

B : « le second lancer donne FACE » ;

C : « les deux lancers donnent des résultats identiques ».

Vérifier que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais que les trois événements A, B et C ne sont pas indépendants.

24 ★ Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1° Démontrer que $P_B(A) = \dfrac{P(A) - P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(A)}{P(B)}$.

2° Une population peut être atteinte par deux maladies A et B. Une étude statistique révèle que :

• la probabilité pour une personne d'être atteinte par A est 0,2, celle d'être atteinte par B est 0,3 ;

• la probabilité pour une personne n'étant pas atteinte par B de l'être par A est 0,1.

a) Calculer la probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A.

b) Les maladies A et B frappent-elles indépendamment les individus de la population ?

3 Variables aléatoires indépendantes

25 ★ On a placé dans une urne trois boules indiscernables au toucher : une rouge et deux bleues.

On tire successivement et sans remise les trois boules de l'urne.

1° Utiliser un arbre pour décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.

2° On appelle X la variable aléatoire égale au rang de tirage de la boule rouge ; déterminer la loi de probabilité de X.

3° On appelle Y la variable aléatoire donnant la couleur de la dernière boule tirée (Y prend les valeurs R ou B). Déterminer la loi de probabilité de Y.

4° Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

26 Chaque soir, M. Silem achète une baguette pour le dîner avec une probabilité de 0,7 et Mme Silem avec une probabilité de 0,4.

X est la variable aléatoire égale au nombre de baguettes achetées par M. Silem un soir donné, Y la variable aléatoire correspondante pour Mme Silem.

Dans le tableau suivant, on lit, par exemple :

$$P((X = 1) \cap (Y = 0)) = 0,42 .$$

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	0,18	0,42
$Y = 1$	0,12	0,28

1° Quelle est la probabilité pour qu'un soir choisi au hasard, il n'y ait pas de baguette fraîche chez les Silem ?

2° Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Peut-on soupçonner une concertation chez les Silem en ce qui concerne l'achat du pain ?

27 Sur un univers E, on définit les variables aléatoires X et Y par les lois de probabilité suivantes :

$$P(X = 0) = 0,6 \ ; \ P(X = 1) = 0,4 \ ;$$
$$P(Y = 0) = 0,25 \ ; \ P(Y = 1) = 0,5 \ ; \ P(Y = 2) = 0,25 .$$

On donne de plus le tableau suivant, qui permet de lire les probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$ pour tout $i \in \{0 ; 1\}$ et tout $j \in \{0 ; 1 ; 2\}$:

Examiner l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0,15	0,3	0,15
$X = 1$	0,1	0,2	0,1

3 Formule des probabilités totales

1 Vrai-faux

28 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Une partition formée de deux événements est du type A, $\overline{A}$.

2° Quels que soient les événements A et B :

si $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}25$, alors $P(A) = 0{,}55$.

3° B et C forment une partition de l'univers et on a :

$P(B) = 0{,}4$; $P_B(A) = \frac{3}{4}$ et $P_C(A) = \frac{2}{3}$.

Alors $P(A) = 0{,}7$.

2 Calculs de probabilités

29 Le tableau suivant donne la répartition des 1 250 élèves d'un lycée selon leur classe et leur participation à l'atelier d'arts plastiques proposé dans l'établissement.

	Seconde	Première	Terminale
participent à l'atelier	70	28	24
ne participent pas	430	322	376

1° On choisit un élève de Seconde au hasard ; quelle est la probabilité pour qu'il suive l'atelier d'arts plastiques ?

2° On choisit un élève du lycée au hasard.

a) Construire un arbre pondéré schématisant la situation.

b) Quelle est la probabilité que ce soit un élève de Seconde suivant l'atelier d'arts plastiques ?

c) Quelle est la probabilité que cet élève suive l'atelier d'arts plastiques ?

d) Sachant que l'élève désigné suit l'atelier, quelle est la probabilité qu'il soit en classe de Première ?

30 ★ L'urne A contient quatre boules bleues et une rouge, alors que l'urne B contient deux boules bleues et trois rouges.

On choisit une urne au hasard parmi A et B, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie.

1° Schématiser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2° Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge sachant que l'urne A a été choisie, puis la probabilité de tirer une boule rouge sachant que B a été choisie.

3° Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

31 ★★ Pompon est un chat fugueur ; s'il a trouvé sa gamelle pleine le matin, il revient le lendemain matin avec une probabilité de 0,4 ; mais s'il a trouvé sa gamelle vide, poussé par la faim, il revient le lendemain matin avec une probabilité de 0,8.

Dédé, qui nourrit Pompon, remplit sa gamelle 9 matins sur 10.

Clément arrive à l'improviste un matin chez Dédé ; quelle est la probabilité qu'il y voie Pompon ?

32 ★★ On dispose de trois urnes A, B et C qui contiennent des boules indiscernables au toucher.

Dans l'urne A, la probabilité de tirer une boule noire est de 0,2 contre 0,5 pour l'urne B, et 0,3 pour l'urne C.

On tire une boule dans A ; si elle est noire, on tire une autre boule dans B ; sinon, on tire une autre boule dans C.

Calculer la probabilité de l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

33 Dans un magasin de matériel informatique, une étude de la clientèle des ordinateurs montre que 25 % des clients achètent un ordinateur portable, 40 % achètent un ordinateur fixe à moins de 1 000 euros et le reste des clients achète un ordinateur fixe à au moins 1 000 euros.

La probabilité pour qu'un client choisisse un ordinateur avec lecteur DVD est de 0,8 chez les acheteurs de portables, 0,2 chez les acheteurs de « fixes » à moins de 1 000 euros et 0,5 pour les autres.

1° Calculer la probabilité pour qu'un acheteur choisi au hasard s'équipe d'un lecteur DVD.

2° Un acheteur de ce magasin possède un ordinateur avec lecteur DVD. Quelle est la probabilité que ce soit un portable ?

34 ★★ **1°** M. et Mme Durand et leurs trois enfants Caroline, Cécile et Charles, tirent les rois.

La galette est partagée en cinq parts égales.

Caroline peut être reine si elle obtient elle-même la fève ou bien si un roi la choisit pour reine. M. Durand choisira sa reine en tirant un nom dans un chapeau contenant les noms des trois reines possibles, tandis que Charles choisira sa reine entre Caroline et Cécile en tirant à PILE ou FACE.

Quelle est la probabilité pour que Caroline soit reine ?

2° Lors d'un autre tirage des rois, la galette est partagée en six parts égales. On convient de distribuer au hasard une part à chacun des cinq membres de la famille Durand et de partager équitablement la sixième part entre les enfants.

Le choix de la reine se fait selon les principes établis en **1°**.

Quelle est, lors de ce tirage, la probabilité pour que Caroline soit reine ?

(D'après IREM de Strasbourg)

4 Expériences répétées

1 Vrai-faux

35 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si on procède à 10 lancers indépendants d'une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir 10 fois PILE est inférieure à 10^{-3}.

2° Si on lance 5 fois de suite un dé cubique équilibré, la probabilité d'avoir des résultats tous pairs est $\frac{1}{2}$.

3° La probabilité de gagner la partie à un jeu est $\frac{1}{5}$ (sinon, on perd…). En faisant cinq parties successives et indépendantes, la probabilité d'avoir gagné au moins une fois est égale à 1.

4° Une urne contient 40 % de boules blanches.
On tire successivement avec remise trois boules de l'urne.
La probabilité de tirer trois blanches vaut 0,064.

2 Principe multiplicatif

36 Sur son trajet, Monsieur Tempo croise six feux tricolores non coordonnés. À son arrivée devant un feu, la probabilité que M. Tempo soit contraint de s'arrêter est de $\frac{1}{3}$, et la probabilité qu'il puisse passer sans arrêt est de $\frac{2}{3}$. On suppose que l'état des différents feux est indépendant de celui des autres.

1° Calculer la probabilité qu'un jour donné, M. Tempo effectue son trajet sans aucun arrêt aux feux.

2° Quelle est la probabilité que M. Tempo s'arrête au moins une fois devant un feu au cours d'un trajet ?

3° Déterminer la probabilité pour que M. Tempo s'arrête deux fois exactement durant un trajet.

37 ★ **1°** Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2 et 3.

Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants.

Pour A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2 et 3 sont dans cet ordre :

$$\frac{1}{12} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{7}{12}.$$

Pour B, les trois éventualités sont équiprobables.
Le concurrent A lance trois fois la fléchette.
Les résultats des trois lancers sont indépendants.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne trois fois la case 3 ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 dans cet ordre ?

c) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 dans un ordre quelconque ?

2° On tire au sort un des deux concurrents, le tirage au sort de A étant deux fois plus probable que celui de B.

a) Un seul lancer est effectué par le joueur tiré au sort.
Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte ?

b) Un seul lancer a été effectué et la case 3 a été atteinte.
Quelle est la probabilité pour que le joueur A ait été tiré au sort ?

38 Un marchand de matériel hi-fi a vendu le même jour quatre téléviseurs du même modèle qui sont garantis pour une période de deux ans.
La probabilité pour qu'un tel appareil tombe en panne pendant cette période est de 0,05 et on suppose que les éventuelles pannes sont indépendantes d'un appareil à l'autre.

1° Calculer la probabilité qu'aucun des quatre appareils ne tombe en panne pendant la période de garantie.
En déduire la probabilité pour qu'au moins un des appareils subisse une panne pendant cette période.

2° Calculer la probabilité pour qu'exactement trois appareils sur les quatre tombent en panne pendant la période de garantie.

39 ★ En sortie de fabrication, des appareils peuvent être dans trois situations différentes : en bon état de marche, défectueux et réparables ou défectueux et irréparables.
Une étude statistique a permis d'établir qu'un appareil pris au hasard en fin de production est :

- en bon état de marche avec une probabilité de 0,8 ;
- défectueux-réparable avec une probabilité de 0,15 ;
- défectueux-irréparable avec une probabilité de 0,05.

Le fabricant décide de livrer les détaillants par lots de trois appareils tirés au hasard en fin de production.

On admet que l'état de chaque appareil du lot est indépendant de l'état des autres.

1° Calculer la probabilité pour que les trois appareils d'un lot soient en bon état de marche.

2° Calculer la probabilité pour que les trois appareils d'un lot soient irréparables.

3° On appelle B la variable aléatoire égale au nombre d'appareils en bon état de marche dans un lot.
Déterminer la loi de probabilité de B et calculer son espérance.

40 Une brigade de gendarmerie procède à un alcootest. Pendant l'opération, un nombre n de personnes seront contrôlées et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de conducteurs en infraction parmi les n contrôlés.
Une étude statistique a permis d'établir que la probabilité pour qu'un automobiliste arrêté au hasard soit en infraction est de 0,03. On admet, de plus, que les différents contrôles sont effectués au hasard et indépendamment les uns des autres.

1° Déterminer la probabilité de l'événement $(X = 0)$.

2° Quelle est la probabilité que le contrôle permette de verbaliser au moins un conducteur en infraction ?
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles cette probabilité est au moins égale à 0,9.

41 ★ On dispose dans une urne trois boules indiscernables au toucher, deux bleues et une rouge.
On procède successivement à quatre tirages au hasard et avec remise d'une boule de l'urne, et on note R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1° À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, procéder à une simulation de taille 50 de cette expérience aléatoire.
Dresser la distribution des fréquences correspondante pour la variable aléatoire R.

2° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire R.
Calculer l'espérance de R.

42 L'écran ci-dessous correspond à une simulation de taille 50 d'une expérience aléatoire.

L1C1 = =ENT(6*ALEA())+1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	6	3	9	2	1	3	3	1	4	6	2	8	3	5	8	
2	6	4	10	4	5	9	6	3	9	2	6	8	1	6	7	
3	6	4	10	4	6	10	2	1	3	3	4	7	4	2	6	
4	3	5	8	3	5	8	6	2	8	6	4	10	6	5	11	
5	6	1	7	6	1	7	1	5	6	3	3	6	5	5	10	
6	6	4	10	4	3	7	3	2	5	5	5	10	4	4	8	
7	5	2	7	3	1	4	4	2	6	4	2	6	5	4	9	
8	5	4	9	2	5	7	4	5	9	4	3	7	3	4	7	
9	3	3	6	1	6	7	1	5	6	4	3	7	5	5	10	
10	2	4	6	1	2	3	6	4	10	1	1	2	4	4	8	

1° Sachant que la cellule L1C1 a été copiée dans les cellules des colonnes 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 et 14, préciser quelle expérience aléatoire a pu être ainsi simulée.

2° Dresser le tableau des fréquences obtenu pour cette simulation.

3° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire définie dans l'expérience précédente.

5 Problèmes

1 Conditionnement - Indépendance

43 Un dé est truqué ; les probabilités d'apparition des différentes faces lors d'un lancer sont données dans le tableau ci-dessous.

numéro	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	x	y

1° Déterminer x et y sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois plus probable que celle du 6.

2° **a)** Calculer la probabilité d'apparition d'un numéro impair.

b) Calculer la probabilité d'obtenir le numéro 1 sachant que le résultat est impair.

3° On considère les événements suivants :

A : « le résultat est pair » ;

B : « le résultat est un multiple de 3 » ;

C : « le résultat est inférieur ou égal à 3 ».

a) A et B sont-ils indépendants ?

b) A et C sont-ils indépendants ?

44 ★ 1° Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
Démontrer la relation, dite « formule de BAYES » :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}.$$

2° Application
On dispose de 100 dés cubiques, dont exactement 25 sont truqués. Un dé truqué amène le 6 avec une probabilité de 0,5.
On choisit au hasard un dé parmi les 100, on le lance et on obtient un 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué ?

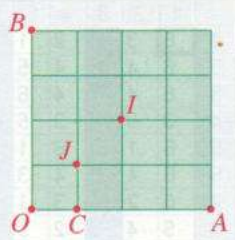
45 On lance une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir PILE soit égale à $\frac{1}{3}$ et celle d'obtenir FACE à $\frac{2}{3}$.
Si FACE sort, on prend au hasard un nombre entier de 1 à 9.
Si PILE apparaît, on prend au hasard un nombre entier de 1 à 5.

1° Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit pair.

2° Quelle est la probabilité pour que la pièce soit tombée sur PILE sachant que le nombre obtenu est pair ?

46 ★★ À l'aide d'une pièce équilibrée, on déplace un jeton d'un point à un autre du quadrillage ci-dessous de la façon suivante :

- la position initiale est en O ;
- si PILE sort, on déplace le jeton d'une case vers la droite ;
- si FACE sort, on déplace le jeton d'une case vers le haut.



On procède selon cette règle à quatre déplacements successifs du jeton.

1° Déterminer le nombre de trajets possibles.

2° Quelle est la probabilité pour que le jeton arrive en A ? en B ? en I ?

3° Calculer la probabilité pour que le jeton arrive en I sachant qu'il est passé par J.

4° Pour un jeton arrivé en I, quelle est la probabilité qu'il soit passé par C ?

47 On lance deux fois consécutivement un dé cubique bien équilibré. On considère les événements :

A : « la somme des numéros obtenus aux deux lancers est paire » ;

B : « le premier numéro obtenu est 6 » ;

C : « le numéro obtenu au premier lancer est strictement supérieur au numéro obtenu au second lancer ».

1° Calculer les probabilités conditionnelles :

a) $P_A(B)$; **b)** $P_B(C)$; **c)** $P_A(C)$.

2° a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

c) Les événements B et C sont-ils indépendants ?

2 Probabilités totales

48 ★★★ **Loi de HARDY-WEINBERG**

Dans les cas simples, un gène est formé de 2 allèles A et a ; un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA , Aa , aa .

Un enfant, lors de la conception, hérite d'un gène de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi, si le père est du type AA et la mère de type Aa , les enfants peuvent être du type AA ou Aa .

A. On considère une population dont les proportions des génotypes sont données par le tableau suivant :

AA	Aa	aa
$p_0 = 0{,}4$	$q_0 = 0{,}3$	$r_0 = 0{,}3$

On suppose que les couples se forment au hasard quant aux génotypes considérés et on choisit un enfant au hasard.

1° Calculer la probabilité que cet enfant ait :

a) deux parents de type AA ;

b) un parent de type AA et un parent de type Aa ;

c) deux parents de type Aa .

2° Quelle est la probabilité pour que l'enfant soit de type AA sachant que :

a) les deux parents sont de type AA ?

b) un des deux parents est de type AA et l'autre du type Aa ?

c) les deux parents sont de type Aa ?

3° a) Calculer la probabilité p_1 pour que l'enfant soit de type AA , puis la probabilité r_1 pour que l'enfant soit de type aa .

b) En déduire la probabilité q_1 pour que l'enfant soit de type Aa .

4° Calculer de même les probabilités p_2 , q_2 et r_2 pour qu'un enfant de seconde génération soit de type AA , Aa et aa .
Que remarque-t-on ?

B. Généralisation : p_0 , q_0 et r_0 sont maintenant des nombres positifs de somme égale à 1.

1° a) Montrer que la probabilité pour qu'un enfant soit de type AA est $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}\,q_0\right)^2$.

b) Sans calcul, donner une expression de r_1 .

2° a) Soit $\alpha = p_0 - r_0$. Montrer que $p_1 = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$

b) En déduire les expressions de r_1 , puis de q_1 en fonction de α . Que peut-on dire de $p_1 - r_1$?

3° Donner les expressions de p_2 , q_2 et r_2 en fonction de α .

4° On a étudié les génotypes de 100 enfants choisis au hasard parmi les enfants de la première génération, puis les génotypes de 100 enfants choisis au hasard parmi les enfants de la seconde génération.
Les fréquences d'enfants de type AA , Aa , aa étant respectivement $\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{r}_1$ et $\hat{p}_2, \hat{q}_2, \hat{r}_2$, on remarque que :

$$\frac{\hat{q}_1^{\,2}}{\hat{p}_1\hat{r}_1} \approx 3{,}91 \quad \text{et} \quad \frac{\hat{q}_2^{\,2}}{\hat{p}_2\hat{r}_2} \approx 3{,}95 \ .$$

Cette remarque, obtenue sur des résultats observés, peut-elle être rapprochée d'un résultat théorique ?

49 ★★ Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes ; le premier produit des bulbes à fleur rouge dont 90 % donnent une fleur, le second produit des bulbes à fleurs jaunes dont 80 % donnent une fleur. Un horticulteur achète 70 % de ses bulbes au premier grossiste et le reste au second.

Un bulbe donne au plus une fleur.

L'horticulteur plante un bulbe choisi au hasard dans son stock.

Quelle est la probabilité pour que ce bulbe donne une fleur ?

50 ★ Un produit industriel est soumis à un double contrôle de qualité pour des caractéristiques indépendantes A et B.

Pour la caractéristique A, le « test A » est efficace à 90 %, c'est-à-dire que, sur 100 objets satisfaisant au test, 90 sont effectivement conformes à la norme de qualité pour la caractéristique A.

Le test B est, pour sa part, efficace à 95 %.

On dira qu'un produit est conforme s'il est conforme aux normes A et B, qu'il est accepté s'il satisfait aux deux tests A et B.

On choisit au hasard un produit parmi ceux qui ont été acceptés.

1° Déterminer la probabilité pour que ce produit ne soit pas conforme.

2° On prélève au hasard un échantillon de 10 produits, en admettant que la population des produits acceptés est suffisamment vaste pour que l'on puisse assimiler le choix de cet échantillon à une succession de 10 choix indépendants.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près des probabilités :

a) pour que tous les produits choisis soient conformes ;

b) pour qu'au moins un des produits choisis soit non conforme ;

c) pour qu'au plus un des produits choisis soit non conforme.

51 ★★ Marion débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie.

On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,6 , alors que, si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,7.

Pour n entier naturel non nul, on note :

- l'événement G_n : « Marion gagne la n-ième partie » ;
- l'événement P_n : « Marion perd la n-ième partie ».

1° Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et de P_1.

2° Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de P_2.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$x_n = P(G_n) \quad \text{et} \quad y_n = P(P_n).$$

3° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n \ ;$$

$$y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}7y_n \ .$$

4° Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$v_n = x_n + y_n \quad \text{et} \quad w_n = 4x_n - 3y_n \ .$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est constante.

b) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

c) Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, l'expression de x_n en fonction de n.
Étudier la convergence de la suite (x_n).

3 Épreuves répétées

52 ★★ Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0 \leqslant n \leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1° Le joueur tire au hasard une boule de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
R : « la boule tirée est rouge » ;
B : « la boule tirée est blanche » ;
V : « la boule tirée est verte ».

2° Le joueur décide de jouer une partie ; celle-ci se déroule de la manière suivante :
le joueur tire une boule de l'urne :
si elle est rouge, il gagne 16 € ;
si elle est blanche, il perd 12 € ;
si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire à nouveau une boule de l'urne :
si cette boule est rouge, il gagne 8 € ;
si cette boule est blanche, il perd 2 € ;
si cette boule est verte, il ne perd ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont supposés indépendants.
Au début de la partie, le joueur possède 12 €.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un ou deux tirages selon le cas).

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Montrer que l'espérance mathématique de X est :

$$\frac{16n}{(n+7)^2} + 12 \ .$$

3° On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$. Étudier les variations de f.

4° En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique de X est maximale. Calculer cette valeur maximale.

4 Probabilités et suites numériques

53 ★★ **Application du calcul des probabilités à la génétique**

1° Soit α un nombre réel non nul différent de 1.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1-\alpha}{2} b_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha b_n \ ; \end{cases}$$

a) Exprimer b_n en fonction de n et de α pour tout entier naturel n.

b) En déduire la valeur de $a_{n+1} - a_n$ et montrer que $a_n = \frac{1}{2}(1-\alpha^n)$ pour tout entier naturel n.

2° Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est *homozygote* lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa.

Une plante est *hétérozygote* lorsqu'elle est de génotype Aa.

Certaines plantes, par exemple le *Lupin*, se reproduisent par *autogamie* (ou *autofécondation*) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de *même génotype*, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

a) Calculer les probabilités pour qu'une plante de génotype AA, ou Aa, ou aa donne par autogamie une plante de génotype AA, Aa ou aa.
On présentera les résultats sous forme de tableau.

Ainsi, à l'intersection de la colonne Aa et de la ligne aa on fera figurer la probabilité pour qu'une plante de génotype Aa donne par autogamie une plante de génotype aa.

Génotype du descendant \ Génotype de la plante initiale	AA	Aa	aa
AA			
Aa			
aa			

b) Partant d'une plante *hétérozygote* (génération 0), on constitue par autogamie des générations successives.

On note les événements :

AA_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype AA » ;

Aa_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa » ;

aa_n : « la plante de la n-ième génération est de génotype aa ».

On appelle :

x_n la probabilité de AA_n et y_n la probabilité de Aa_n ;

z_n la probabilité de aa_n ;

en particulier $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$.
Calculer x_1, y_1, et z_1.
Expliciter les probabilités conditionnelles :

u_{n+1} de AA_{n+1} sachant AA_n ;
v_{n+1} de AA_{n+1} sachant Aa_n ;
w_{n+1} de Aa_{n+1} sachant Aa_n.

Utiliser ces probabilités conditionnelles pour montrer que, pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n .$$

Utiliser les résultats de **1°** pour donner les valeurs de x_n, de y_n puis de z_n en fonction de n.

c) On garde les hypothèses et notations de la question **2° b)**.
Calculer la probabilité p_n pour qu'une plante de la n-ième génération ne soit pas homozygote.

À partir de quelle génération (caractérisée par son numéro d'ordre n) a-t-on $p_n \leqslant 0{,}01$?

(D'après BAC)

54 ★★★ Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant, qui se présente comme une succession de « parties » :

– au départ, A et B misent chacun 1 € et lancent chacun une pièce parfaitement équilibrée (c'est-à-dire amenant avec une égale probabilité soit PILE, soit FACE) ;

– si A amène PILE et B FACE, le jeu s'arrête, A gagne et récupère la mise des deux joueurs ;

– si B amène PILE et A FACE, le jeu s'arrête, B gagne et récupère les mises ;

– dans les autres cas, la partie est nulle, les joueurs doublent la mise et engagent une nouvelle partie.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant ou que la vingtième partie s'achève sur un nul (auquel cas les joueurs récupèrent leurs mises respectives).

Pour tout entier n de 1 à 20, on considère les événements :

A_n : « le jeu se termine à la n-ième partie par le gain de A » ;

B_n : « le jeu se termine à la n-ième partie par le gain de B » ;

N_n : « la n-ième partie est une partie nulle ».

On pose :

$$x_n = p(A_n) \ ; \ y_n = p(B_n) \ ; \ z_n = p(N_n) .$$

1° a) Calculer x_1, y_1 et z_1.

b) Montrer que, pour tout entier n de 1 à 19, on a :

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}z_n , \quad y_{n+1} = \frac{1}{4}z_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n .$$

c) En déduire que, pour n entier de 1 à 20, on a :

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

2° On considère la variable aléatoire X : « nombre d'euros mis en jeu lors de la partie qui conclut le jeu », c'est-à-dire récupérés par le gagnant ou partagés entre les deux joueurs, dans le cas où le jeu s'achève sur un nul.

Si le jeu s'achève à la k-ième partie, on a ainsi :

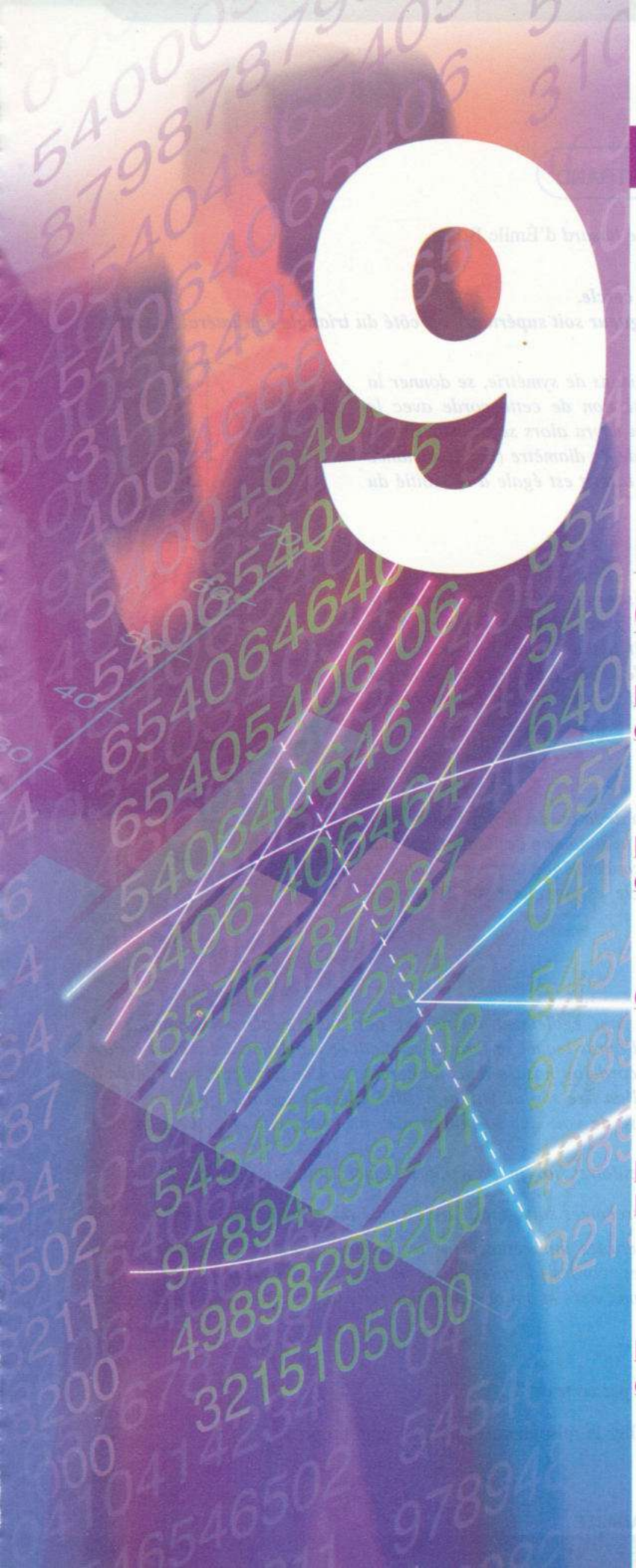
$$X = 2^k .$$

a) Donner l'expression numérique de la plus grande valeur que peut prendre X.

b) Calculer $p(X = 2^{20})$.

c) Pour k entier de 1 à 19, exprimer l'événement « $X = 2^k$ » à l'aide des événements A_k et B_k.
En déduire $p(X = 2^k)$.

d) Calculer l'espérance mathématique de X.



CHAPITRE

9

Lois de probabilité

Exemples de dénombrement p. 232

- utiliser des arbres pour dénombrer

Factorielle d'un entier naturel p. 233

- mettre en place une nouvelle notation

Combinaisons p. 233

- définir les combinaisons
- découvrir quelques propriétés des combinaisons
- utiliser la formule du binôme

Loi de BERNOULLI Loi binomiale p. 236

- définir la loi binomiale à partir d'expériences de BERNOULLI

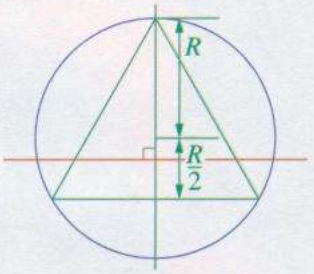
Exemples de lois de probabilité continues p. 237

- prendre contact avec les lois continues à partir de deux exemples

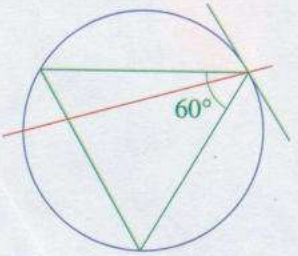
1 Le paradoxe de BERTRAND

Le texte suivant est extrait de l'ouvrage *Le hasard* d'Émile BOREL.

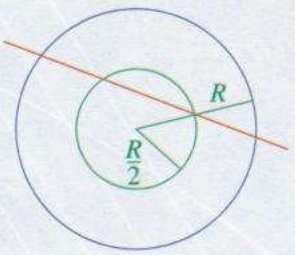
« Problème :
On choisit une corde au hasard dans un cercle.
Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit ?



Première solution *: On peut, pour des raisons de symétrie, se donner la direction de la corde : le point d'intersection de cette corde avec le diamètre perpendiculaire à cette direction devra alors se trouver sur un segment égal à la moitié de la longueur de ce diamètre (car la distance au centre du côté du triangle équilatéral inscrit est égale à la moitié du rayon) ; la probabilité est donc* $\frac{1}{2}$ *.*



Deuxième solution *: On peut, pour des raisons de symétrie, se donner une des extrémités de la corde sur le cercle ; la tangente en ce point et les deux côtés du triangle équilatéral inscrit ayant ce point pour sommet forment trois angles de 60° ; la direction de la corde doit être à l'intérieur de l'un de ces trois angles à l'exclusion des deux autres : la probabilité est donc* $\frac{1}{3}$ *.*



Troisième solution *: Pour fixer la position de la corde, il suffit de donner son milieu ; pour que la corde satisfasse à la condition de l'énoncé, il faut que son milieu soit intérieur à un cercle concentrique au cercle donné et de rayon moitié ; la surface de ce cercle est le quart de la surface donnée ; la probabilité est donc* $\frac{1}{4}$ *.*

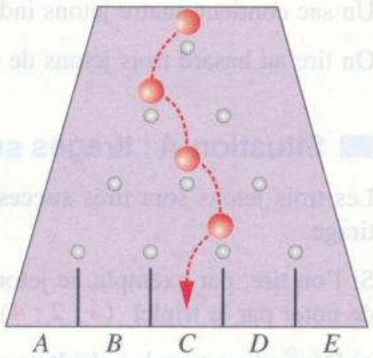
Doit-on penser que ces trois solutions sont également bonnes et par suite également mauvaises ? Nullement, il s'agit de préciser le mode d'après lequel se fera la vérification expérimentale, c'est-à-dire comment on s'y prendra pour tracer une corde au hasard dans un cercle : si l'on assujettit cette corde à passer par un point fixe du cercle, ou si l'on fixe son milieu au hasard, c'est la seconde ou la troisième solution qui est la bonne ; mais il est aisé de voir que la plupart des procédés naturels que l'on peut imaginer conduisent à la première.
Si, par exemple, on jette un disque circulaire sur un plan dans lequel sont tracées des droites, la probabilité pour que l'une des cordes interceptées soit supérieure au côté du triangle équilatéral est $\frac{1}{2}$ *; il en est de même si l'on considère les cordes interceptées sur le disque circulaire de la lune par la trajectoire d'une étoile occultée, ou les cordes décrites dans le champ circulaire d'une lunette astronomique par des astres que l'on n'a pas visés et qui occupent par suite une position quelconque dans le champ de la lunette. »*

1 Quel est le problème essentiel soulevé par ce texte ?

2 Pour chacune des trois solutions, détailler le raisonnement géométrique proposé.

2 La « planche » de GALTON

La machine de GALTON est formée d'une planche disposée verticalement plantée de lignes de clous en quinconce : un clou sur la première ligne, deux sur la deuxième, trois sur la troisième, …



Lorsqu'une bille est lâchée au sommet de la machine, elle se dirige sur le premier clou, puis sur la deuxième ligne par la droite ou la gauche du premier clou, puis sur la troisième ligne par la droite ou la gauche du clou heurté sur la deuxième, etc.
On étudie ici une machine à quatre lignes de clous, de sorte qu'un trajet de la bille est caractérisé par une suite de quatre directions « gauche » (g) ou « droite » (d). Le chemin représenté ci-contre est : *gddg*.

On étudie ici l'expérience aléatoire consistant à lâcher une bille dans la machine puis à observer sa case d'arrivée (A, B, C, D ou E).

Simulation

L'écran ci-contre correspond à une simulation de taille 50 de l'expérience.

a) Grâce à l'affichage du contenu de la cellule L2C1, expliquer comment la simulation a été réalisée.

b) Dresser le tableau des fréquences correspondant aux arrivées de la bille en A, B, C, D ou E dans cette simulation.

L2C1 = =SI(ALEA()<0,5;"d";"g")

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1er	2ème	3ème	4ème		1er	2ème	3ème	4ème		1er	2ème	3ème	4ème
2	g	d	g	g		d	d	d	d		d	g	d	g
3	d	g	g	g		g	d	d	g		g	d	d	g
4	d	g	d	d		g	d	g	d		d	d	d	g
5	d	g	d	d		d	g	g	g		g	d	g	d
6	g	d	g	g		g	g	g	g		g	g	g	g
7	d	d	d	g		g	d	g	g		g	d	d	g
8	d	d	g	d		g	d	g	d		d	d	d	d
9	g	d	g	g		g	d	g	g		d	d	g	d
10	g	g	d	d		d	g	d	d		g	g	d	g
11	g	g	g	d		g	g	d	g		d	d	g	d
12	d	d	d	g		g	g	d	d					
13	g	d	d	g		d	g	d	d					
14	g	d	g	d		g	g	g	g					
15	d	g	d	g		d	g	d	d					
16	g	g	d	g		g	g	d	g					
17	d	d	d	g		d	d	d	d					
18	d	g	d	d		d	g	d	g					
19	g	d	d	d		d	g	d	g					
20	d	d	d	g		g	g	g	g					
21	d	d	g	g		g	d	g	g					

Modélisation

a) À l'aide d'un arbre, dénombrer les différents chemins possibles pour la bille sur la planche.
Parmi ces chemins, combien aboutissent respectivement à A, B, C, D ou E ?

b) La planche est conçue de telle sorte que tous les chemins sont équiprobables.
Dresser la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
Comparer cette loi au résultat de la simulation obtenu précédemment.

Triangle de PASCAL

► *Voir Exercice 21*

a) Après avoir reproduit la disposition des « clous » de la planche, noter au-dessous de chacun d'entre eux le nombre de chemins qui y conduisent. On construit ainsi le début du « triangle de PASCAL ».

b) Calculer les nombres 11^0, 11^1, 11^2, 11^3 et 11^4. Que remarque-t-on ?
On pourra démontrer cette « curiosité » numérique après l'étude de la « formule du binôme ».

3 Des arbres pour dénombrer

Un sac contient quatre jetons indiscernables au toucher numérotés 1, 2, 3 et 4.

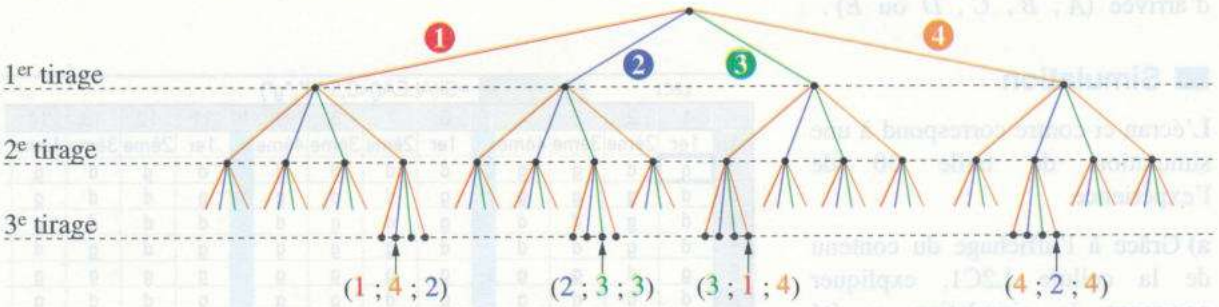
On tire au hasard trois jetons de ce sac.

Situation *A* : tirages successifs avec remise

Les trois jetons sont tirés **successivement**, donc dans un ordre donné, et remis dans le sac après chaque tirage.

Si l'on tire, par exemple, le jeton 4 lors des 1er et 3e tirages, et le jeton 2 au 2e tirage, on convient de noter par le triplet (4 ; 2 ; 4) le résultat du triple tirage.

a) Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce triple tirage, en s'aidant d'un arbre sur le modèle ci-dessous :



b) Dénombrer les résultats tels que le 2e tirage ne soit pas le jeton 3.

c) Dénombrer les résultats pour lesquels le jeton 3 est tiré exactement deux fois.

Situation *B* : tirages successifs sans remise

Les trois jetons sont tirés **successivement**, mais sans remettre dans le sac les jetons tirés.

a) Quels résultats de la situation *A* ne retrouve-t-on pas dans cette situation *B* ?

b) Compléter l'arbre ci-dessous afin de dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce triple tirage.



c) Dénombrer les résultats pour lesquels le 2e tirage n'est pas le jeton 3.

d) Dénombrer les résultats du type $(a\,;\,b\,;\,c)$, avec $a<b<c$.

Remarque

Lors d'une expérience aléatoire basée sur plusieurs « tirages », l'expression « tirages successifs » sous-entend que l'ordre d'apparition des différents résultats est pris en compte.
Dans le cas des « tirages simultanés », au contraire, l'ordre n'intervient pas.

Situation *C* : tirages simultanés

Les trois jetons sont tirés **simultanément** du sac.

On note le tirage simultané des jetons 4, 1 et 2 par l'ensemble $\{4 ; 1 ; 2\}$; **l'ordre n'intervient pas dans la notation d'un ensemble** $\{\dots ; \dots ; \dots\}$ **, alors que c'est le cas dans la notation d'un triplet** $(\dots ; \dots ; \dots)$.

À l'aide de cette notation, dénombrer les résultats possibles pour cette situation.

Lien entre les situations *B* et *C*

1 Pour l'ensemble $\{4 ; 1 ; 3\}$, résultat de la situation C , citer tous les triplets, résultats de la situation B lui correspondant (par exemple, $(4 ; 3 ; 1)$, $(4 ; 1 ; 3)$, ...).

2 Expliquer alors pourquoi il y a six fois moins de résultats dans la situation C que dans la situation B .

4 Choix d'un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$

On cherche ici à décrire une **loi de probabilité** associée au choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

1 Pour définir une loi de probabilité sur un **univers fini**, il suffit de définir la probabilité de chaque événement élémentaire. On s'interroge sur la validité de cette démarche dans le cas de $[0 ; 1]$.

a) On choisit au hasard un nombre décimal dans $E_1 = \{0 ; 0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}3 ; \dots ; 0{,}9\}$.

Quelle est la probabilité de chaque événement élémentaire ?

b) Même question dans l'ensemble des décimaux $E_2 = \{0 ; 0{,}01 ; 0{,}02 ; 0{,}03 ; \dots ; 0{,}97 ; 0{,}98 ; 0{,}99\}$.

c) Soit n un entier naturel non nul ; choisir un nombre au hasard parmi tous les décimaux comportant n chiffres (éventuellement nuls) après la virgule, c'est choisir indépendamment les unes des autres chacune des n décimales dans $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 9\}$.

En déduire la probabilité p_n d'un tel choix. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

d) On admet que tout nombre réel possède « un développement décimal illimité » (dont toutes les décimales sont nulles à partir d'un certain rang si ce nombre est décimal) ; ainsi, choisir un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$, c'est répéter **indéfiniment** la même expérience du choix de chacune de ses décimales. Si $a \in [0 ; 1]$ et si $a = 0{,}a_1a_2\dots a_n\dots$ quelle est alors la probabilité du résultat $\{a\}$ lors du choix d'un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$?

2 **a)** On considère à nouveau l'ensemble E_2 des nombres décimaux de $[0 ; 1]$ dont l'écriture décimale comporte deux chiffres après la virgule (éventuellement nuls) ; on choisit un nombre au hasard dans E_2 ; quelle est la probabilité qu'il appartienne à $[0{,}37 ; 0{,}81[$?

b) Même question dans l'ensemble E_5 des nombres décimaux de $[0 ; 1]$ dont l'écriture comporte cinq chiffres (éventuellement nuls) après la virgule, puis dans l'ensemble E_k des décimaux comportant k chiffres (éventuellement nuls) après la virgule (k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Le choix d'un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$ est modélisé par **la loi uniforme sur $[0 ; 1]$** ; cette loi vérifie la propriété :

quels que soient a et b éléments de $[0 ; 1]$, la probabilité pour qu'un nombre réel choisi au hasard dans $[0 ; 1]$ appartienne à $[a ; b[$ est égale à $b - a$.

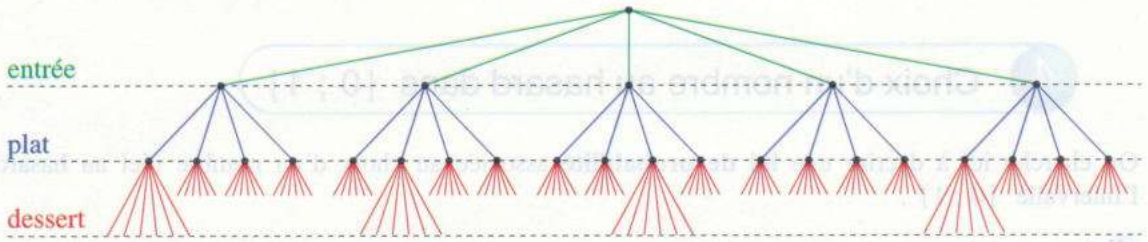
1 Exemples de dénombrement

En situation d'équiprobabilité sur un univers fini E contenant n éventualités (n étant un entier naturel non nul), si A est un événement formé de k éventualités, on sait que $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

On est ainsi conduit, pour l'univers et pour l'événement A, à déterminer le nombre d'éventualités qui les constituent, c'est-à-dire à pratiquer le **dénombrement**.

1.1 Arbre de choix dans des ensembles distincts

• Au restaurant, on compose un menu par le choix d'une entrée e dans l'ensemble $\mathscr{E}$ des 5 entrées proposées, puis d'un plat p dans l'ensemble $\mathscr{P}$ des 4 plats, puis d'un dessert d dans l'ensemble $\mathscr{D}$ des 6 desserts.



On peut ainsi composer 120 menus différents :

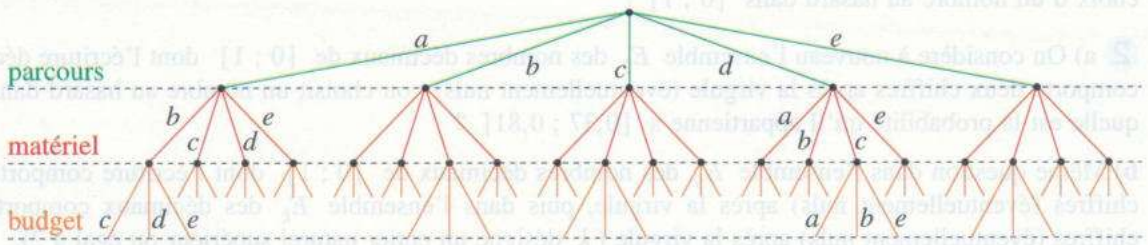
$$5\times4\times6=120\ .$$

L'arbre ci-dessus met en évidence ce **principe multiplicatif**.

• On lance quatre fois successivement un dé à six faces.
On forme ainsi un nombre à quatre chiffres, la place de chacun étant fixée par son ordre d'apparition.
On obtient ainsi $6\times6\times6\times6=6^4=1\ 296$ résultats possibles.

1.2 Arbre de choix successifs dans un ensemble s'amenuisant

Pour préparer une excursion, cinq randonneurs, Anne, Ben, Cari, Dim et Élise, nomment parmi eux trois responsables différents, l'un chargé du **parcours**, l'autre du **matériel** et le 3e du **budget**.
Les différentes possibilités sont données par l'arbre ci-dessous :



Il y a 5 choix possibles pour le premier poste ; pour chacun des 5 choix du premier poste, il reste 4 randonneurs disponibles, et donc 4 choix possibles pour le 2e poste ; il reste alors 3 randonneurs disponibles et pour chacun des 5×4 choix précédents, il y a 3 choix possibles pour le 3e poste.
Ainsi, il y a $5\times4\times3=60$ façons possibles de nommer 3 responsables parmi les 5 randonneurs.

► *Voir Exercices 1 à 11*

2 Factorielle d'un entier naturel

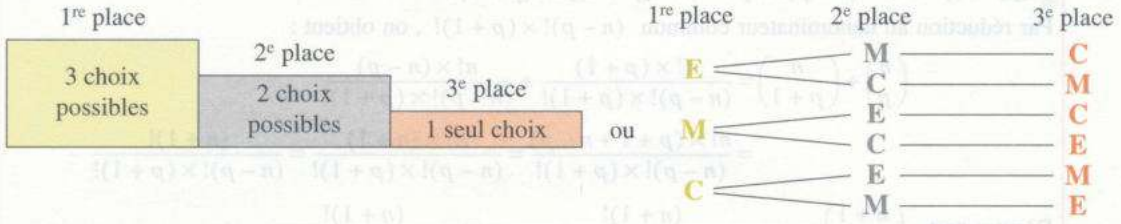
Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre « factorielle n » est le produit de tous les entiers naturels de 1 à n ; on le note $n!$. Ainsi, on a $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
Par convention, on a $0! = 1$ et $1! = 1$.

Exemple

Émilie, Marion et Clément disputent un « 50 mètres nage libre ». Si l'on exclut les possibilités d'ex-aequo, on a :



On obtient ainsi $3 \times 2 \times 1 = 3!$, c'est-à-dire 6 ordres d'arrivée possibles.

3 Combinaisons

Soit E un ensemble non vide contenant n éléments, et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

3.1 Combinaisons — définition

Une combinaison à p éléments de E est une partie de E formée de p éléments.
La combinaison $A = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_p\}$ de E est une partie de E ayant p éléments distincts deux à deux ; le changement de l'ordre de leur écriture ne modifie pas la combinaison A .

3.2 Les nombres $\binom{n}{p}$ — propriété

Le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté $\binom{n}{p}$. On a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} .$$

Exemple

Voir Exercices 18, 19 et 24 à 26

Pour calculer le nombre de tirages possibles du loto, on doit dénombrer les combinaisons à 7 éléments dans l'ensemble des 49 résultats possibles : le résultat est donc égal à $\binom{49}{7} = \frac{49!}{7! \times 42!}$.

On a $\frac{49!}{42!} = 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43$, et donc :

$$\binom{49}{7} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 85\ 900\ 584 .$$

La plupart des calculatrices permettent un calcul direct de $\binom{n}{p}$.

3.3 Formule de PASCAL

propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- Si p est un entier vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, alors on a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
- Si p vérifie $0 \leqslant p \leqslant n-1$, alors on a $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration

- $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-(n-p))! \times (n-p)!} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!} = \binom{n}{p}$.
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!} + \dfrac{n!}{(n-(p+1))! \times (p+1)!}$.

Par réduction au dénominateur commun $(n-p)! \times (p+1)!$, on obtient :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n! \times (p+1)}{(n-p)! \times (p+1)!} + \frac{n! \times (n-p)}{(n-p)! \times (p+1)!}$$

$$= \frac{n! \times (p+1+n-p)}{(n-p)! \times (p+1)!} = \frac{n! \times (n+1)}{(n-p)! \times (p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p)! \times (p+1)!}.$$

D'autre part, $\binom{n+1}{p+1} = \dfrac{(n+1)!}{((n+1)-(p+1))! \times (p+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n-p)! \times (p+1)!}$.

D'où l'égalité $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Cette dernière formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche, en formant le triangle de PASCAL.

Voir Activité 2

3.4 Triangle de PASCAL

E désigne un ensemble à n éléments. Dans le tableau ci-contre, le nombre figurant dans la ligne n et la colonne p est $\binom{n}{p}$, avec $p \leqslant n$.

Par convention $\binom{0}{0} = 1$, et pour tout entier n non nul, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (seule la partie vide admet 0 élément ; seul E admet n éléments dans E). On obtient ainsi les 1 de la 1re colonne, pour $p = 0$, et les 1 de la diagonale, pour $p = n$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

La seconde formule se traduit par $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Ainsi, un nombre intérieur du triangle est égal à la somme des deux termes de la ligne précédente situés au-dessus et à gauche.

La formule $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ se traduit par la symétrie de chacune des lignes du triangle de PASCAL.

3.5 Formule du binôme

Soit a et b deux réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$
$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n .$$

Démonstration

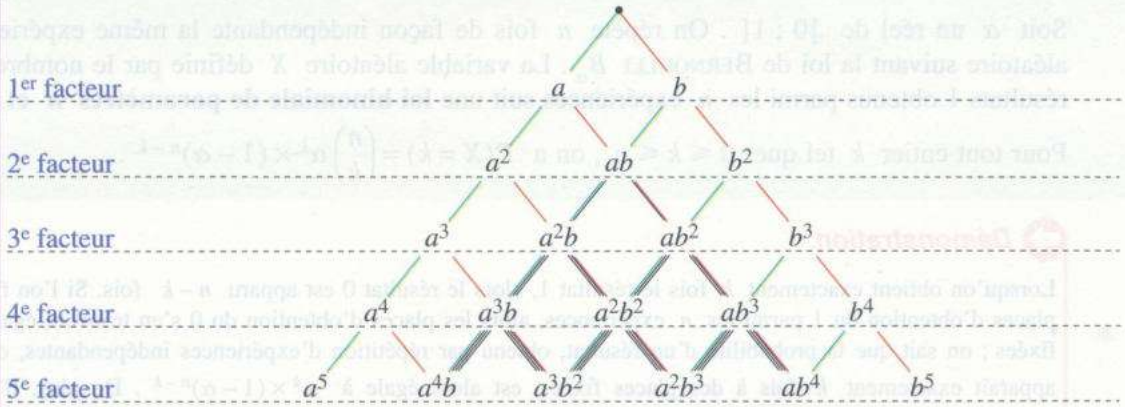
$(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times\ldots\times(a+b)$; ce produit est composé de n facteurs.
Si on développe ces n facteurs, on fait apparaître les termes en a^n, $a^{n-1}\times b$, $a^{n-2}\times b^2$, ..., $a^2\times b^{n-2}$, $a\times b^{n-1}$ et b^n, c'est-à-dire des termes de la forme $a^{n-k}\times b^k$ pour k entier variant de 0 à n.

Le terme en $a^{n-k}\times b^k$ s'obtient en prenant le nombre b dans k facteurs $(a+b)$ parmi les n facteurs du produit, et alors il ne reste plus qu'à prendre le nombre a dans les $n-k$ facteurs restants.

Il y a donc $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir $a^{n-k}\times b^k$ et $\binom{n}{k}\times a^{n-k}\times b^k$ est le terme en $a^{n-k}\times b^k$.

Exemple

Pour $n=5$, $(a+b)^5 = (a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)$, le terme en a^3b^2 s'obtient en prenant b dans 2 de ces 5 facteurs et a dans les 3 facteurs restants.



Si on effectue le développement sans simplifier, on obtient :

$$aaabb + aabab + aabba + abaab + ababa + abbaa + baaab + baaba + babaa + bbaaa ,$$

c'est-à-dire $10a^3b^2$ ou encore $\binom{5}{2}a^3b^2$.

On remarque que, dans $(a+b)^n$, les nombres a et b ont un rôle symétrique ; la formule du binôme peut donc aussi s'écrire suivant les puissances croissantes de a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Les coefficients $\binom{n}{k}$ des termes $a^{n-k}b^k$ du développement de $(a+b)^n$ constituent la ligne numéro n du triangle de PASCAL.
Ainsi $(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$.

Lorsque $a=b=1$, on obtient, pour tout entier n non nul :

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} .$$

Voir Exercices 20 à 23

4 Loi de BERNOULLI. Loi binomiale

4.1 Loi de BERNOULLI — définition et propriété

• On appelle loi de BERNOULLI une loi de probabilité définie sur un univers E formé de deux éventualités. Si $E = \{0 ; 1\}$, alors une loi de BERNOULLI est de la forme :

1	0
α	$1-\alpha$

où α est un élément de $]0 ; 1[$.

• La loi de BERNOULLI B_α admet pour espérance α et pour variance $\alpha(1-\alpha)$.

Démonstration

Par définition, l'espérance est égale à $1 \times \alpha + 0 \times (1-\alpha) = \alpha$. Pour la variance, on a :

$$V = \alpha \times (1-\alpha)^2 + (1-\alpha) \times (0-\alpha)^2 = \alpha \times (1-\alpha) \times [(1-\alpha) + \alpha] = \alpha \times (1-\alpha) .$$

Exemple

Le lancer d'une pièce de monnaie fournit l'exemple le plus connu de loi de BERNOULLI.
En général, on modélise par une loi de BERNOULLI les expériences aléatoires à deux issues.

4.2 Loi binomiale — définition

Soit α un réel de $]0 ; 1[$. On répète n fois de façon indépendante la même expérience aléatoire suivant la loi de BERNOULLI B_α. La variable aléatoire X définie par le nombre de résultats 1 obtenus parmi les n expériences suit une **loi binomiale de paramètres n et α**.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} \alpha^k \times (1-\alpha)^{n-k}$.

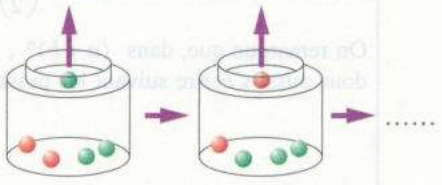
Démonstration

Lorsqu'on obtient exactement k fois le résultat 1, alors le résultat 0 est apparu $n-k$ fois. Si l'on fixe les places d'obtention du 1 parmi les n expériences, alors les places d'obtention du 0 s'en trouvent également fixées ; on sait que la probabilité d'un résultat, obtenu par répétition d'expériences indépendantes, où le 1 apparaît exactement k fois à des places fixées, est alors égale à $\alpha^k \times (1-\alpha)^{n-k}$. De plus, il existe exactement $\binom{n}{k}$ façons de fixer les places d'obtention du 1 parmi les n places possibles. D'où le résultat.

Exemple

On place dans une urne cinq boules indiscernables au toucher, deux rouges et trois vertes. On procède à quatre tirages successifs au hasard et **avec remise**, de sorte que le contenu de l'urne est identique à tous les tirages. La probabilité d'obtenir exactement trois boules rouges sur les quatre tirées est égale à :

$$\binom{4}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{4-3} = \frac{96}{625} = 0{,}1536 .$$



Voir Exercices 27 à 32

4.3 Propriétés admises

• L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et α est égale à $n \times \alpha$.

• La variance d'une loi binomiale de paramètres n et α est égale à $n \times \alpha \times (1-\alpha)$.

5 Exemples de lois de probabilité continues

Dans ce paragraphe, on aborde les lois de probabilité continues, dont l'univers est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point ; cet univers est donc infini.

Voir Activité 4

5.1 Loi de durée de vie sans vieillissement — définition

Soit λ un réel strictement positif et f_λ la fonction définie sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$ par :

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t} .$$

On définit sur I une probabilité P, dont f_λ est appelée la **densité**, en posant :

- pour tout intervalle J d'extrémités c et d (avec c et d éléments de I), on a :

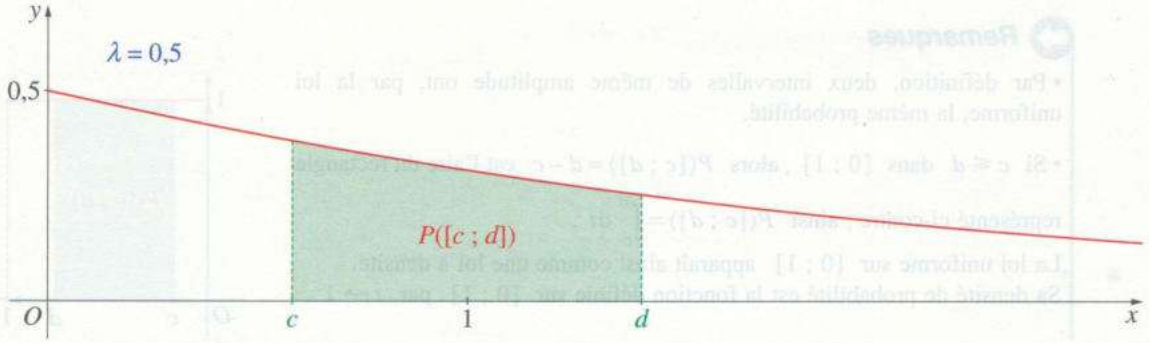
$$P(J) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\, dt ;$$

- pour tout intervalle $J = [c ; +\infty[$, où c appartient à I, on a $P(J) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

Voir T.D. 3

Une telle définition est possible, car f_λ est positive sur $[0 ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f_\lambda(t)\, dt = 1$.

Ainsi, la probabilité de $[c ; d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ représentant f_λ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$.



La limite quand x tend vers $+\infty$ de :

$$x \mapsto \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

est égale à 1.

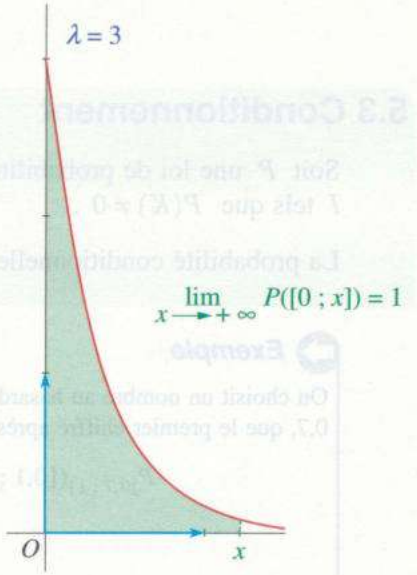
En effet, $\int_0^x f_\lambda(t)\, dt = -[e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

De plus, avec $\lambda > 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} (-\lambda x) = -\infty .$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$; d'où le résultat annoncé.

Ainsi, la probabilité de tout intervalle contenu dans $[0 ; +\infty[$ est majorée par 1, et $P(I) = 1$ traduit la valeur 1 de l'aire comprise « entre la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ et l'axe des abscisses ».



5.2 Loi uniforme sur [0 ; 1]

définition

La loi uniforme P sur $[0 ; 1]$ modélise le choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
Pour tous réels c et d de $[0 ; 1]$ tels que $c \leqslant d$, si I désigne l'un des quatre intervalles $[c ; d]$, $]c ; d[$, $]c ; d]$ ou $[c ; d[$, on a $P(I) = d - c$.

Exemple

Voir Exercices 39 à 42

On choisit un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$.
La probabilité qu'il appartienne à $[0{,}25 ; 0{,}67[$ est égale à $0{,}67 - 0{,}25 = 0{,}42$.

Propriétés

P désigne la loi de probabilité uniforme sur $[0 ; 1]$.

• On a $P([0 ; 1]) = 1$, $P(\varnothing) = 0$ et, pour tout x de $[0 ; 1]$, $P(\{x\}) = 0$.

• On définit la probabilité de la réunion d'intervalles disjoints comme la somme des probabilités de chacun.
Dans ces conditions, si $\overline{[a ; b]}$ désigne le complémentaire de $[a ; b]$ dans $[0 ; 1]$, on a :

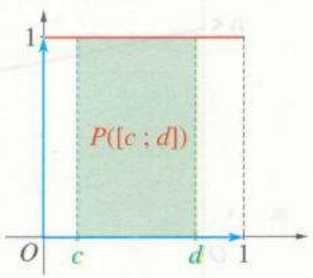
$$P(\overline{[a ; b]}) = 1 - P([a ; b]).$$

Voir Exercice 39

Remarques

• Par définition, deux intervalles de même amplitude ont, par la loi uniforme, la même probabilité.

• Si $c \leqslant d$ dans $[0 ; 1]$, alors $P([c ; d]) = d - c$ est l'aire du rectangle représenté ci-contre ; ainsi $P([c ; d]) = \int_c^d \mathrm{d}t$.



La loi uniforme sur $[0 ; 1]$ apparaît ainsi comme une loi à densité.
Sa densité de probabilité est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $t \mapsto 1$.

5.3 Conditionnement

définition

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I, et K et J deux intervalles contenus dans I tels que $P(K) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de J sachant K est définie par $P_K(J) = \dfrac{P(K \cap J)}{P(K)}$.

Exemple

On choisit un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$ et on s'intéresse à la probabilité, sachant qu'il est supérieur à 0,7, que le premier chiffre après la virgule soit impair ; autrement dit, on cherche :

$$P_{]0{,}7 ; 1[}([0{,}1 ; 0{,}2[\cup [0{,}3 ; 0{,}4[\cup [0{,}5 ; 0{,}6[\cup [0{,}7 ; 0{,}8[\cup [0{,}9 ; 1[)$$

$$= \frac{P(]0{,}7 ; 0{,}8[\cup [0{,}9 ; 1[)}{P(]0{,}7 ; 1])} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}.$$

1 Utilisation d'un arbre

Le digicode à l'entrée d'un immeuble est constitué d'un clavier de 13 touches marquées des trois lettres U, V et X, et des 10 chiffres de 0 à 9.

Un code est formé d'une lettre suivie d'une liste de trois chiffres, non nécessairement distincts.

1° Déterminer le nombre de codes possibles.

2° Un visiteur se présente en connaissant le principe de composition d'un code.

a) Quelle est la probabilité qu'il ouvre la porte au premier essai, alors qu'il a composé un code entièrement au hasard ?

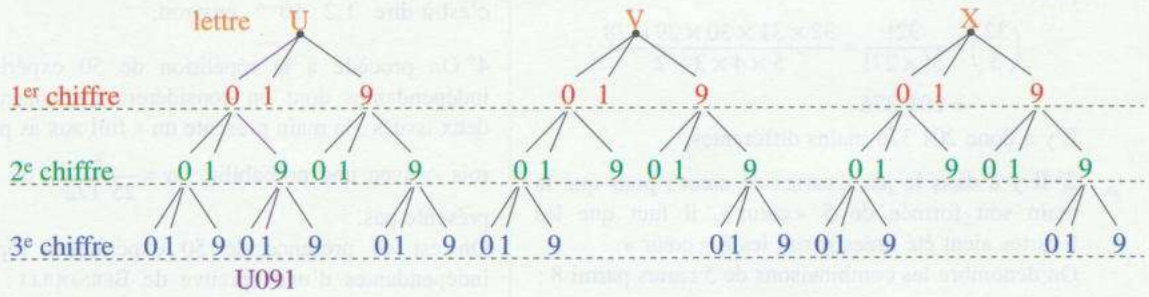
b) Le visiteur se souvient de la lettre du code. Quelle est la probabilité qu'il trouve le bon code s'il compose au hasard une suite de trois chiffres après la lettre correcte ?

3° Le code d'ouverture est V618. Lucien, l'étourdi, se souvient de la lettre V et des trois chiffres corrects, mais il a oublié l'ordre de ces derniers. Quelle est la probabilité que Lucien entre dans l'immeuble dès le premier essai de code ?

• Méthode

En situation d'équiprobabilité, on dénombre les éventualités qui composent l'univers ou les événements étudiés. Pour cela, on peut soit utiliser des combinaisons lorsque l'expérience aléatoire le permet, soit des arbres de dénombrement, des diagrammes, des schémas qui permettent de modéliser l'expérience proposée.

1° Un code est une suite ordonnée d'une lettre et de trois chiffres ; les combinaisons ne permettent pas de modéliser l'expérience. On construit un arbre pour dénombrer tous les cas possibles.

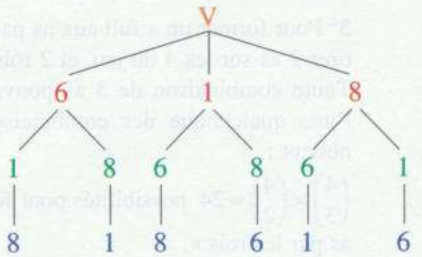


En appliquant le principe multiplicatif, on obtient $3 \times 10 \times 10 \times 10$, soit 3 000 codes possibles.

2° a) Il y a un unique code correct sur les 3 000 possibles ; si le visiteur compose le code entièrement au hasard, la probabilité qu'il obtienne le code correct est donc de $\frac{1}{3\,000}$.

b) Si le visiteur se souvient de la lettre du code, il n'a plus qu'à composer la partie formée de trois chiffres : il a donc le choix parmi 1 000 possibilités dont une seule est correcte. La probabilité recherchée ici est donc égale à $\frac{1}{1\,000}$. On peut aussi utiliser le conditionnement.

3° Pour résoudre cette question, on peut à nouveau recourir à un arbre de dénombrement ; puisque Lucien se souvient de la lettre et des chiffres du code, les différentes possibilités qui s'offrent à lui sont dénombrées dans l'arbre ci-contre :



Lucien a donc le choix entre $6 = 3!$ codes possibles, dont un seul est correct : la probabilité recherchée est $\frac{1}{6}$.

2 Combinaisons

BAC

On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 : on constitue ainsi une « main ».

1° Combien y a-t-il de mains possibles ?

2° Quelle est la probabilité que la main constituée soit formée de 5 cartes de « cœur » ?

3° Calculer la probabilité que la main soit un « full aux as par les rois » (3 as et 2 rois).

4° On procède à 50 distributions successives et indépendantes d'une main de 5 cartes.

Quelle est la probabilité que parmi les 50 mains ainsi obtenues :

a) exactement deux comportent un « full aux as par les rois » ?

b) au moins une comporte un « full aux as par les rois » ?

• Méthode

Pour utiliser les combinaisons, il faut que l'expérience aléatoire se ramène au modèle des tirages au hasard simultanés.
Lors de répétitions indépendantes d'une même expérience, on fait clairement apparaître, lorsque c'est le cas, l'expérience comme une expérience de Bernoulli à deux issues.
On utilise ensuite la loi binomiale pour modéliser les expériences répétées.

1° Aucun ordre n'intervient dans le choix des 5 cartes qui sont toutes distinctes ; on peut donc assimiler une main à une combinaison de 5 cartes parmi 32. On a :

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 201\,376 .$$

Il y a donc 201 376 mains différentes.

2° Il y a dans le jeu 8 cartes de cœur ; pour que la main soit formée de 5 « cœur », il faut que les 5 cartes aient été tirées parmi les 8 « cœur ».
On dénombre les combinaisons de 5 cartes parmi 8 :

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56 .$$

Les mains formées de 5 « cœur » sont au nombre de 56.
Si C est l'événement « la main est formée de 5 cœur », on a :

$$P(C) = \frac{56}{201\,376} = \frac{1}{3\,596} ,$$

c'est-à-dire $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ environ.

3° Pour former un « full aux as par les rois », on doit tirer 3 as sur les 4 du jeu, et 2 rois sur les 4 du jeu.
Toute combinaison de 3 as pouvant être associée à l'une quelconque des combinaisons de 2 rois, on obtient :

$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ possibilités pour former un « full aux as par les rois ».

La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{24}{201\,376} = \frac{3}{25\,172} ,$$

c'est-à-dire $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ environ.

4° On procède à la répétition de 50 expériences indépendantes dont on considérera que chacune a deux issues : la main présente un « full aux as par les rois », avec une probabilité $\alpha = \frac{3}{25\,172}$, ou ne le présente pas.
On est en présence de 50 expériences répétées indépendantes d'une épreuve de BERNOULLI : c'est donc par une loi binomiale que l'on modélise cette situation.

a) La probabilité d'obtenir exactement deux « full aux as par les rois » sur 50 mains est donnée par :

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} \times \alpha^2 \times (1 - \alpha)^{48} ,$$

la probabilité obtenue est de $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ environ.

b) Pour calculer la probabilité d'obtenir au moins un « full aux as par les rois », on passe par l'événement contraire qui correspond à l'obtention d'aucun.
Sa probabilité est :

$$\delta = P(X = 0) = \binom{50}{0} \times \alpha^0 \times (1 - \alpha)^{50} = \left(\frac{25\,169}{25\,172}\right)^{50} ;$$

la probabilité d'obtenir au moins un full aux as par les rois est donc :

$$1 - \delta , \text{ soit } 5{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ environ.}$$

1 Calculs avec des combinaisons

1.1 Nombre de parties d'un ensemble

E désigne un ensemble à n éléments, avec n un entier naturel non nul.

1 Pour un entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, combien E a-t-il de parties à p éléments ?

Que représente ainsi la somme $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$?

2 Développer $(1+1)^n$; en déduire le nombre de parties de E.

1.2 Calculs de sommes

1 Pour un entier naturel n non nul, développer $(1+x)^n$.

2 Calculer la somme $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$.

3 Déterminer les sommes $\sum_{2p \leqslant n} \binom{n}{2p}$ et $\sum_{2p+1 \leqslant n} \binom{n}{2p+1}$.

1.3 Utilisation de la dérivation

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$, où n est un entier naturel non nul.

Déterminer deux expressions de la dérivée f' de f, l'une étant obtenue en développant $(1+x)^n$.

En déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p}$.

2 Si E est un ensemble à n éléments, en déduire la somme des nombres d'éléments de toutes les parties de E.

2 Loi binomiale avec paramètre

On dispose des jetons indiscernables au toucher dans une urne, des rouges et des bleus.
Les joueurs ont le choix entre deux types de parties : effectuer deux tirages successifs avec remise d'un jeton de l'urne, ou bien effectuer quatre tirages successifs avec remise d'un jeton de l'urne.
La partie est gagnée lorsqu'au moins la moitié des jetons tirés est formée de jetons rouges.
Un joueur décide de faire une partie, mais désire comparer ses « chances » de gagner suivant le type de partie qu'il engage (et qu'il faut annoncer au départ). On appelle d et d' respectivement les probabilités des événements « le joueur gagne sa partie à deux tirages » et « le joueur gagne sa partie à quatre tirages », et p désigne la probabilité de tirer un jeton bleu lors d'un tirage dans l'urne.

1 On suppose que l'urne contient un jeton bleu et trois rouges.
Calculer d et d' ; quel est, dans ce cas, le type de partie le plus « avantageux » pour le joueur ?

2 Reprendre l'étude précédente avec un jeton bleu et deux rouges dans l'urne.

3 Dans le cas général, démontrer que $d - d' = p^2(1-p)(3p-1)$.
Discuter, suivant les valeurs de p, le type de partie le plus avantageux pour le joueur.

3 Loi de désintégration radioactive

On cherche ici à mettre en place une loi décrivant la désintégration des noyaux pour une substance radioactive donnée.
À partir de données expérimentales, on propose un modèle fondé sur les hypothèses suivantes :

• la durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité P à densité continue f sur $[0 ; +\infty[$ identique pour tous les noyaux ;

• la désintégration d'un noyau n'affecte pas celle des autres ;

• la probabilité conditionnelle pour un noyau, ayant existé jusqu'à l'instant t, de se désintégrer entre les instants t et $t+s$, ne dépend pas de son « âge » t : c'est pour cette raison que la loi de probabilité P est appelée **loi de durée de vie sans vieillissement**.

Notations

• Pour un intervalle I contenu dans $[0 ; +\infty[$, $P(I)$ représente la probabilité pour le noyau considéré de se désintégrer à un instant t élément de I.

• On définit la fonction F sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = P([0 ; t]) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

1 Démontrer que, pour tous réels positifs a et b, on a :
$$P([a ; b]) = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad P([a ; +\infty[) = 1 - F(a) .$$

2 **a)** Comment s'interprète la probabilité conditionnelle $P_{[t ; +\infty[}([t ; t+s])$?

Justifier, pour tous t et s positifs, l'égalité :
$$P_{[t ; +\infty[}([t ; t+s]) = F(s) .$$

b) En déduire, pour tous t et s positifs, la relation :
$$F(t+s) - F(t) = F(s) \times (1 - F(t)) .$$

3 Soit G la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $G(t) = 1 - F(t)$.

a) Déterminer $G(0)$.

b) Justifier que G est dérivable et préciser sa fonction dérivée.

c) Démontrer, pour tous réels positifs t et s, la relation $G(t+s) = G(t) \times G(s)$.

d) En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout réel positif t, $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{\alpha t}$.

4 **a)** Préciser la limite de F en $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour le signe de α ?

b) Démontrer que la densité f de la loi de probabilité P est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est un réel strictement positif.

Remarque

La constante λ est appelée « constante de désintégration par unité de temps » ; sa valeur est très variable d'une substance radioactive à l'autre.
On a, par exemple :

• pour l'uranium 238, la constante de désintégration annuelle est $1{,}54 \cdot 10^{-10}$;

• pour l'iode 131, la constante de désintégration quotidienne est $8{,}7 \cdot 10^{-2}$;

• pour le polonium 214, la constante de désintégration par seconde est $1\,155$.

Voir Problème 61

4 Distribution de fréquences et loi de probabilité

Un des objectifs des probabilités est **l'approximation d'une distribution statistique de fréquences observées par une loi de probabilité**.

Il existe de nombreuses méthodes « d'ajustement » et différents tests qui permettent d'évaluer la « convenance » d'un modèle probabiliste à une distribution statistique ; ces outils ne sont pas au programme des classes de Terminales.

On se propose ici, à partir de certaines propriétés des lois équiréparties, d'examiner s'il est « raisonnable » d'envisager un modèle équiréparti pour certaines distributions observées.

Pour une loi équirépartie, on sait que **deux intervalles de même amplitude ont toujours la même probabilité**.

Cette propriété caractéristique des lois équiréparties permet une première approche du problème posé ici.

La copie d'écran ci-dessous fournit, pour tout entier n entre 1 et 100, la partie décimale (arrondie à 10^{-9}) des nombres $n\sqrt{2}$.

On donne également la répartition des résultats obtenus dans $[0\ ;\ 0{,}5[$ et dans $[0{,}5\ ;\ 1]$, puis dans les dix intervalles d'amplitude 10^{-1} de $[0\ ;\ 0{,}1[$ à $[0{,}9\ ;\ 1]$.

F8 = =RACINE(2)*E8-ENT(RACINE(2)*E8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	n	n*racine(2)	n	n*racine(2)	n	n*racine(2)	n	n*racine(2)	n	n*racine(2)			
2	1	0,414213562	21	0,69848481	41	0,982756057	61	0,267027305	81	0,551298552		intervalle	effectif
3	2	0,828427125	22	0,112698372	42	0,39696962	62	0,681240867	82	0,965512115		[0;0,5[	51
4	3	0,242640687	23	0,526911935	43	0,811183182	63	0,09545443	83	0,379725677		[0,5;1]	49
5	4	0,656854249	24	0,941125497	44	0,225396744	64	0,509667992	84	0,793939239			
6	5	0,071067812	25	0,355339059	45	0,639610307	65	0,923881554	85	0,208152802		[0;0,1[	10
7	6	0,485281374	26	0,769552622	46	0,053823869	66	0,338095117	86	0,622366364		[0,1;0,2[	10
8	7	0,899494937	27	0,183766184	47	0,468037432	67	0,752308679	87	0,036579926		[0,2;0,3[	10
9	8	0,313708499	28	0,597979746	48	0,882250994	68	0,166522241	88	0,450793489		[0,3;0,4[	10
10	9	0,727922061	29	0,012193309	49	0,296464556	69	0,580735804	89	0,865007051		[0,4;0,5[	11
11	10	0,142135624	30	0,426406871	50	0,710678119	70	0,994949366	90	0,279220614		[0,5;0,6[	10
12	11	0,556349186	31	0,840620434	51	0,124891681	71	0,409162928	91	0,693434176		[0,6;0,7[	10
13	12	0,970562748	32	0,254833996	52	0,539105243	72	0,823376491	92	0,107647738		[0,7;0,8[	10
14	13	0,384776311	33	0,669047558	53	0,953318806	73	0,237590053	93	0,521861301		[0,8;0,9[	10
15	14	0,798989873	34	0,083261121	54	0,367532368	74	0,651803616	94	0,936074863		[0,9;1]	9
16	15	0,213203436	35	0,497474683	55	0,781745931	75	0,066017178	95	0,350288425			
17	16	0,627416998	36	0,911688245	56	0,195959493	76	0,48023074	96	0,764501988			
18	17	0,04163056	37	0,325901808	57	0,610173055	77	0,894444303	97	0,17871555			
19	18	0,455844123	38	0,74011537	58	0,024386618	78	0,308657865	98	0,592929113			
20	19	0,870057685	39	0,154328933	59	0,43860018	79	0,722871427	99	0,007142675			
21	20	0,284271247	40	0,568542495	60	0,852813742	80	0,13708499	100	0,421356237			

1 Les résultats obtenus peuvent-ils suggérer l'hypothèse d'équirépartition dans $[0\ ;\ 1]$?

2 Déterminer la répartition des résultats dans les vingt intervalles d'amplitude 0,05 depuis $[0\ ;\ 0{,}05[$ jusqu'à $[0{,}95\ ;\ 1]$.
L'équirépartition paraît-elle se confirmer ?

Faire le point

• Combinaisons

Soit n et p deux entiers naturels, avec $0 \leqslant p \leqslant n$, et E un ensemble à n éléments.

• Une combinaison à p éléments de E est une partie de E formée de p éléments.

• Le nombre de combinaisons à p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

• On a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ et, si $0 \leqslant p \leqslant n-1$, alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

• **Formule du binôme** :

pour tous réels ou complexes a et b, on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

• Lois de probabilité discrètes

• Une « loi de BERNOULLI » est une loi de probabilité à deux éventualités.

• La répétition de n épreuves indépendantes de BERNOULLI à deux issues, « succès » ou « échec », conduit à une **loi binomiale** ; si α est la probabilité du succès dans une épreuve, la probabilité d'obtenir exactement k succès lors des n épreuves est $\binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$.

L'**espérance** de cette loi binomiale est $n\alpha$, sa **variance** $n\alpha(1-\alpha)$.

• Lois continues

• Une loi continue est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le calcul d'une probabilité pour une loi continue se ramène au calcul d'une intégrale de sa densité.

• La **loi uniforme** P sur $[0\,;1]$ est caractérisée par la proportionnalité de la probabilité d'un intervalle avec son amplitude :

pour tous $a \leqslant b$ dans $[0\,;1]$, on a $P([a\,;b]) = \int_a^b \mathrm{d}t = b - a$.

• La **loi de durée de vie sans vieillissement** P_λ est une loi à densité continue sur $[0\,;+\infty[$:

pour tous $a \leqslant b$ dans $[0\,;+\infty[$, on a $P_\lambda([a\,;b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$, où $\lambda > 0$.

savoir	comment faire ?
dénombrer les éventualités formant un événement	• utiliser les combinaisons si la situation se ramène à des tirages simultanés, donc non ordonnés • sinon, modéliser la situation à l'aide d'un arbre ou d'un diagramme
utiliser une loi binomiale	• repérer la répétition d'une expérience suivant une loi de BERNOULLI • modéliser les répétitions indépendantes de cette expérience par une loi binomiale
calculer la probabilité d'un intervalle par une loi continue	intégrer la densité de cette loi entre les bornes adéquates

1 Exemples de dénombrements

1 Vrai-Faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

On dispose de quatre couleurs, jaune, vert, bleu et rouge, pour colorier chacune des cinq cases du motif ci-contre :



1° 5^4 coloriages différents sont possibles ;

2° 4^5 coloriages différents sont possibles ;

3° le nombre de coloriages avec exactement une case en bleu est égal à 405 ;

4° le nombre de coloriages avec au moins une case en bleu est 781.

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Huit judokas, dont un Français, participent à un tournoi international.

Un podium est composé d'un premier, d'un deuxième et d'un troisième judoka.

1° Le nombre de podiums est 336.

2° Le nombre de podiums avec le judoka français est 42.

3° Le nombre de podiums sans le judoka français est 210.

2 Diagrammes et tableaux

3 Dans une classe de 34 élèves, un professeur pose les deux questions suivantes à chacun de ses élèves, qui répondent pour chaque question par OUI ou par NON :

Question 1 : Êtes-vous abonné à une revue ?

Question 2 : Pratiquez-vous un sport ?

Les réponses ont été :

OUI, pour 11 élèves, à la *question* 1 ;

NON, pour 9 élèves, à la *question* 2 ;

NON, pour 5 élèves, aux deux questions.

Quel est le nombre d'élèves ayant répondu OUI aux deux questions ?

4 ★ Dans un groupe de personnes, on sait que les trois cinquièmes sont sportifs, un tiers est fumeur, 42 sont les deux et un cinquième n'est ni l'un ni l'autre.

De combien de personnes est composé le groupe ?

5 ★ Dans une campagne de sensibilisation sur le tri des ordures ménagères, une enquête a été menée auprès de 800 personnes d'une commune.

À la question « Triez-vous le papier et le verre ? », 45 % des personnes interrogées ont répondu OUI.

La population interrogée était composée :
de 25 % de personnes de moins de 35 ans,
et de 280 personnes de plus de 50 ans.

Sur les moins de 35 ans, 160 ont répondu OUI,
et sur les plus de 50 ans, 70 % ont répondu NON.

On pourra reporter les données dans un tableau.

1° Combien de personnes âgées entre 35 et 50 ans ont répondu OUI ?

2° Dans les personnes qui ont répondu NON, quel est le pourcentage de ceux de moins de 35 ans ?

3 Arbres, principe multiplicatif

6 Un jour de janvier, Amandine, Carol, Gilles et Hélène décident de tirer les rois.

Ils disposent de deux galettes, dont une seule est fourrée à la frangipane, chacune contenant une fève.

Ils décident de partager chaque galette en quatre parts égales et de manger chacun une part de chaque galette.

1° Représenter un arbre donnant les répartitions possibles des fèves et dénombrer ces répartitions.

2° Dénombrer les répartitions pour lesquelles :

a) les deux fèves sont obtenues par la même personne ;

b) Carol a au moins une fève.

Dans les exercices 7 *à* 16, *on pourra modéliser les situations à l'aide d'arbres que l'on représentera ou que l'on imaginera.*

7 ★ On dispose de cinq pulls.

1° De combien de façons peut-on les ranger dans trois tiroirs ?

2° De combien de façons peut-on les ranger de sorte que chaque tiroir reçoive au moins un pull ?

8 Une classe de 31 élèves choisit deux délégués élèves.

Les 31 élèves de cette classe sont répartis selon trois catégories de la façon suivante :

18 internes, 7 externes et 6 demi-pensionnaires.

Combien de groupes de deux délégués sont tels que les élèves appartiennent à deux catégories différentes ?

9 Un particulier souhaite compléter l'équipement électroménager de sa cuisine avec un four à micro-ondes, un lave-vaisselle et un robot multifonctions.

Un magasin lui propose :

7 modèles de four à micro-ondes, dont 3 de marque française ;

4 modèles de lave-vaisselle, dont 1 de marque française ;

7 modèles de robot, dont 4 de marque française.

1° Dénombrer les choix possibles d'équipement de ce particulier.

2° Dénombrer les choix d'équipement tels que :

a) les trois éléments achetés soient de marque française ;

b) au moins deux des trois éléments achetés soient de marque française.

10 Une assemblée est composée de 16 personnes.

De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier ?

11 Un portemanteau comporte cinq patères alignées.

Sans mettre deux manteaux sur la même patère, combien a-t-on de dispositions possibles, pour :

a) deux manteaux ; **b)** cinq manteaux.

2 Factorielle d'un entier naturel

1 Vrai-Faux

12 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $\frac{6!}{4!} = 30$; **2°** Pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2n)! = 2n!$;

3° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

2 Utiliser des factorielles

13 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $\frac{3}{5! \times 3!} + \frac{4}{7!}$; **b)** $\frac{2}{9!} + \frac{2}{11!} - \frac{2}{10!}$;

c) $\frac{(n+1)!}{n!}$; **d)** $\frac{n!}{n}$;

e) $\frac{2}{n!} + \frac{2}{(n+2)!} - \frac{2}{(n+1)!}$ pour n dans $\mathbb{N}$.

14 ★ Un circuit touristique comprend la visite de cinq villes A, B, C, D et E.

1° Dénombrer les ordres de visites possibles.

2° Combien de circuits sont tels que D soit la troisième ville visitée ?

3° Combien de circuits sont tels que la ville A soit visitée avant la ville D ?

15 ★ Lorsqu'on permute les lettres d'un mot, on obtient une anagramme de ce mot.

1° Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIF.

2° Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIF :

a) commençant par une consonne ;

b) commençant et finissant par une consonne ;

c) commençant par une voyelle ;

d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;

e) commençant par RO.

3° Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIFS.

16 ★ Dénombrer les anagrammes du mot EXERCICE.

17 Une urne contient six boules noires et six boules jaunes, indiscernables au toucher.

On extrait les boules de l'urne, une à une et sans remise.

Quelle est la probabilité de les extraire dans l'ordre suivant :

noire, jaune, noire, jaune, etc ?

3 Combinaisons

1 Vrai-Faux

18 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $\binom{12}{3}=\binom{12}{9}$; 2° $\dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{9}{5}}=\dfrac{1}{3}$;

3° Pour p et n entiers, avec $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}.$$

19 On extrait simultanément quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

On appelle *figure* : un valet, une dame ou un roi.
Un résultat est une main.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° On dénombre $\binom{12}{4}$ mains ne contenant pas de figures.

2° On dénombre $4\times\binom{31}{3}$ mains contenant exactement un roi.

3° La probabilité d'avoir une main contenant deux dames et deux valets est :

$$\frac{2\times\binom{4}{2}}{\binom{32}{4}}.$$

2 Propriétés et formule du binôme

20 n et p sont deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$.
Soit E un ensemble contenant $n+1$ éléments et a un élément de E.

1° Quel est le nombre de combinaisons de E à $p+1$ éléments ?

2° Dénombrer les combinaisons de E à $p+1$ éléments :

a) dont a ; **b)** sans a.

3° Retrouver la formule de PASCAL.

21 En utilisant la formule du binôme, calculer :

11^2, 11^3 et 11^4

à partir de l'égalité $11 = 10 + 1$.
Quelle particularité en déduit-on pour ces nombres ?
(Voir *Activité* 2)
La propriété est-elle encore vérifiée pour 11^5 ? Pourquoi ?

22 Déterminer le coefficient du terme en x^4 dans le développement des expressions suivantes :

a) $(3-x^2)^5$; **b)** $(1+2x)^6$; **c)** $(2x^2-3)^7$.

23 ★ Écrire les nombres ci-dessous sous la forme : $a+b\sqrt{5}$, où a et b sont des entiers relatifs.

a) $(2-\sqrt{5})^3$; **b)** $(1+2\sqrt{5})^7$; **c)** $(3\sqrt{5}-2)^3$.

3 Pour dénombrer

24 n points distincts sont placés sur un cercle, $n \geqslant 3$.

1° **a)** Dénombrer toutes les droites passant par deux de ces points.

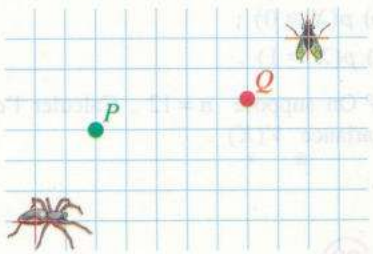
b) Vérifier le résultat pour $n = 5$, en faisant une figure.

c) Pour quelle valeur de n obtient-on 21 droites ?

2° **a)** Dénombrer les triangles obtenus en joignant trois de ces n points.

b) Combien de ces triangles ont pour sommets 3 points consécutifs ?

25 Une araignée se déplace sur une toile représentée ci-contre.
Elle veut atteindre la mouche en se déplaçant uniquement de gauche à droite et de bas en haut.



1° Dénombrer les itinéraires possibles.

2° Dénombrer les itinéraires passant par :

a) le point P ; **b)** les points P et Q ;

c) les points P ou Q.

26 Un groupe de 24 personnes, 14 hommes et 10 femmes, doit prendre un car pour effectuer une excursion.
Par suite d'un malentendu, il se présente un car ne comportant que 12 places. Il est décidé que 7 hommes et 5 femmes prendront part à l'excursion.

1° Combien peut-on former de groupes de 7 hommes et 5 femmes ?

2° Si M. X et Mme Y préfèrent ne pas être dans le même groupe d'excursion, combien de groupes peut-on constituer ?

4 Loi de Bernoulli, loi binomiale

1 Vrai-Faux

27 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et 0,03.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $p(X=2)=\binom{n}{2}\times 0{,}03^2\times 0{,}97^{n-2}$;

2° $p(X\geqslant 1)=1-p(X=1)$;

3° $V(X)=0{,}0291n$;

4° $p(X=0)=0{,}97$.

2 Calculs de probabilités

28 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et 0,2.

1° Exprimer en fonction de n :

a) $p(X=k)$ pour k entier entre 0 et n ;

b) $p(X\geqslant 0)$;

c) $p(X\geqslant 1)$.

2° On suppose $n=12$. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

29 Dans une urne, il y a 8 jetons jaunes et 15 jetons rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise 2 jetons de l'urne.

1° Déterminer la probabilité de l'événement :

E : « le premier jeton tiré est jaune » ;

2° On répète 7 fois cette épreuve ; après chaque épreuve, les 2 jetons sont remis dans l'urne.

X est la variable aléatoire qui, à chaque partie de 7 épreuves, associe le nombre de fois où E se produit.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer la probabilité de l'événement :

A : « E se produit exactement trois fois ».

c) Calculer la probabilité de l'événement :

B : « E se produit au moins six fois ».

30 ★ Sur les faces d'un dé tétraédrique, sont inscrits les chiffres 1, 3, 7 et 9.

Lorsqu'on lance ce dé, la probabilité qu'il se pose sur une face donnée ne dépend pas de cette face.

1° On lance le dé. Quelle est la probabilité de l'événement S : « la somme des nombres sur les faces visibles est supérieure à 18 » ?

2° On effectue n lancers du dé dans les mêmes conditions. Y est la variable aléatoire qui comptabilise les fois où S se réalise.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de celle-ci.

b) Exprimer $p(Y=k)$ pour k entier entre 0 et n .

c) Déterminer le nombre minimal de lancers pour avoir $p(Y=0)<10^{-8}$.

31 ★ Lors d'un parcours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km · h^{-1} et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment.

Pour ce cavalier, la probabilité de franchir sans faute un obstacle est $\frac{2}{3}$; le passage sans faute d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Calculer l'espérance de X et donner sa signification.

Calculer la durée moyenne du parcours.

32 ★ On considère qu'à un concours, un candidat a 20 % de chances de réussir.

On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1° Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?

2° Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?

3° Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?

4° Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 qui passent le concours.

5 Lois continues

1 Vrai-Faux

33 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° P désigne la loi uniforme sur $[0 ; 1]$; on a :

$$P(\{0,5\}) = 0 .$$

2° P désigne la loi uniforme sur $[0 ; 1]$; on a :

$$P([0,436 ; 0,752]) = 0,316 .$$

3° Par la loi uniforme sur $[0 ; 1]$, deux intervalles ont même probabilité si, et seulement si, ils ont même amplitude.

4° P désigne la loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre 0,5 :

a) on a $P(\{0\}) = 0,5$;

b) on a $P([0 ; \ln 2]) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) on a $P([0 ; \ln 4]) = P([\ln 4 ; +\infty[)$.

2 Loi de durée de vie sans vieillissement

34 On considère la loi de durée de vie sans vieillissement P de densité :

$$f : t \mapsto 2e^{-2t} \text{ sur } [0 ; +\infty[.$$

1° Étudier la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et la représenter graphiquement.

2° Calculer :

a) $P([0 ; 0,5])$; **b)** $P([1 ; 2])$; **c)** $P([3 ; +\infty[)$.

3° Illustrer graphiquement à l'aide de la courbe précédente chacune des trois quantités calculées ci-dessus.

35 Soit P la loi de durée de vie sans vieillissement de densité :

$$t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \text{ sur } [0 ; +\infty[,$$

où λ est un réel strictement positif.

Déterminer la valeur du paramètre λ sachant que l'on a :

$$P([0 ; 2]) = \frac{e^4 - 1}{e^4} .$$

36 On appelle respectivement P et P' les lois de probabilité « durée de vie sans vieillissement » associées aux paramètres $\lambda = 0,5$ et $\lambda' = 2$.

a) Calculer $P([0 ; 0,5])$ et $P'([0 ; 0,5])$;

b) Calculer $P([2 ; +\infty[)$ et $P'([2 ; +\infty[)$.

37 P désigne la loi de probabilité de densité :

$$t \mapsto e^{-t} \text{ sur } [0 ; +\infty[.$$

1° Calculer $P_{[2 ; +\infty[}([2 ; 4])$.

2° Soit k un réel strictement positif quelconque.

Calculer $P_{[k ; +\infty[}([k ; k+2])$.

Ce résultat dépend-il de k ?

38 On considère la loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre 2.

Déterminer le réel τ tel que $P([0 ; \tau]) = P([\tau ; +\infty[)$.

Interpréter graphiquement.

3 Loi uniforme sur [0 ; 1]

Dans les exercices 39 *à* 42, P *désigne la loi uniforme sur* $[0 ; 1]$.

39 P désigne la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

1° Démontrer que $P([0 ; 1]) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$.

(On pourra remarquer que $\varnothing = [0,5 ; 0,5[$.)

2° a et b désignant deux réels de $[0 ; 1]$ tels que $a \leqslant b$.

Démontrer que :

$$P(\overline{[a ; b]}) = 1 - P([a ; b]) .$$

40 Si a et b sont deux réels de $[0 ; 1]$ tels que $a \leqslant b$, interpréter graphiquement l'égalité :

$$P(\overline{[a ; b]}) = 1 - P([a ; b]) ,$$

à partir de l'égalité $P([a ; b]) = \int_a^b dt$.

41 ★ **1°** Que représente la probabilité conditionnelle :

$$P_{[0,25 ; 0,5]}([0,4 ; 0,45]) ?$$

Calculer cette probabilité.

2° On choisit un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$.

Sachant qu'il est compris entre 0,1 et 0,2, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 0,17 ?

42 On choisit un nombre au hasard dans $[0 ; 1]$.

Sachant qu'il est inférieur à 0,3, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 0,187 ?

6 Problèmes

43 ★ Une urne comporte 18 jetons : 8 rouges numérotés de 1 à 8, et 10 verts numérotés de 1 à 10.

On tire au hasard successivement sans remise trois jetons de l'urne.

1° Dénombrer les tirages possibles.

2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

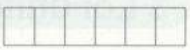
a) les trois jetons tirés sont rouges ;

b) le deuxième jeton tiré est rouge ;

c) le deuxième jeton tiré est rouge et le troisième porte le numéro 5 ;

d) le premier et le troisième jeton sont verts et le deuxième porte le numéro 7.

44 ★ On dispose de trois couleurs pour colorier le motif ci-contre, composé de six cases.



On désire que deux cases voisines ne soient pas de la même couleur. Déterminer :

a) le nombre de coloriages possibles ;

b) le nombre de coloriages utilisant exactement deux des trois couleurs disponibles ;

c) le nombre de coloriages utilisant au moins une fois les trois couleurs disponibles.

45 ★ On lance trois fois de suite un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Un résultat est un triplet $(a\,;b\,;c)$, où a, b et c sont des entiers compris entre 1 et 4.

1° Dénombrer tous les résultats.

2° Calculer la probabilité d'avoir :

a) $a=b=c$; **b)** $a\neq b$ et $a\neq c$; **c)** $a\leqslant b$ et $b=c$.

46 ★ À partir des lettres des mots ARBRE, TRONC et FEUILLE, on forme un mot de trois lettres, ayant ou non une signification.

La première lettre est une lettre au hasard du mot ARBRE, la seconde une lettre au hasard du mot TRONC et la troisième une lettre au hasard du mot FEUILLE.

1° Combien peut-on former de mots au total ?

2° Quelle est la probabilité de former un mot :

a) se terminant par un L ?

b) avec au moins un E ?

47 Sept chevaux, deux bais et cinq noirs, participent à des exercices d'équitation.

On les différencie les uns des autres par leur harnachement.

Trois de ces chevaux entrent l'un après l'autre dans un manège.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les trois chevaux sont noirs » ;

B : « un seul des trois chevaux est bai ».

48 ★ Jean et Pauline répondent à une invitation.

Cinq autres personnes sont présentes.

1° Les sept participants sont placés du même côté d'une table rectangulaire.



a) Dénombrer les dispositions possibles.

b) Quelle est la probabilité que Jean et Pauline ne soient pas assis l'un à côté de l'autre ?

2° Reprendre les questions **a)** et **b)** dans le cas où les sept participants sont placés autour d'une table ronde.



49 On écrit chacune des 26 lettres de l'alphabet sur un carton, on met les cartons dans un sac et on tire au hasard simultanément six cartons.

1° Dénombrer les tirages possibles.

2° Déterminer la probabilité pour que le tirage :

a) contienne les lettres P et C ;

b) ne contienne ni P, ni C.

3° Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) le tirage contient autant de voyelles que de consonnes ;

b) le tirage contient au moins deux consonnes ;

c) le tirage contient au plus deux voyelles ;

d) le tirage contient au moins une consonne et au moins une voyelle.

50 ★ Neuf points sont disposés comme l'indique la figure ci-contre.



1° De combien de façons peut-on choisir quatre points ?

2° Quelle est la probabilité que sur les quatre points choisis trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés ?

51 Lors d'un recrutement, un chef d'entreprise doit choisir 5 personnes parmi 21 candidats, 13 femmes et 8 hommes.

1° Dénombrer les choix possibles de recrutement.

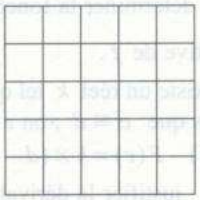
2° Quelle est la probabilité qu'il choisisse :

a) deux femmes et trois hommes ;

b) au moins une femme ;

c) au moins une personne de chaque sexe.

52 On dispose d'un damier carré de cinq cases sur cinq, placé dans une position fixe sur lequel on veut placer cinq jetons indiscernables, sur cinq cases différentes.



Quelle est la probabilité des événements suivants :

A : « un jeton exactement est placé par colonne et par ligne » ;

B : « aucun jeton n'est sur une diagonale » ;

C : « quatre jetons sont sur une diagonale, le jeton restant n'étant pas sur l'autre diagonale » ;

D : « au plus un jeton est placé sur un des quatre coins du damier » ;

E : « une colonne est vide ».

53 ★ Dans le tiroir de son armoire, Romain possède cinq paires de chaussettes noires, trois paires de chaussettes vertes et deux paires de chaussettes rouges.
Ces chaussettes se trouvent mélangées dans le plus grand désordre. Romain, pressé, prend, parfaitement au hasard, deux chaussettes dans le tiroir.

1° a) Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité que Romain ait pris deux chaussettes noires.

b) Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité que Romain ait pris deux chaussettes de la même couleur.

2° On suppose que les nombres de paires de chaussettes vertes et rouges restent inchangés.

Déterminer le nombre n de chaussettes noires devant se trouver dans le tiroir pour que Romain prenne deux chaussettes noires avec une probabilité de $\frac{2}{7}$.

54 ★ Le morse utilise deux signaux : le point • et le trait —.
On forme avec ces 2 signaux des séquences de longueurs différentes.
Par exemple, • • — — • est une séquence de longueur 5.

1° Déterminer le nombre de séquences de longueur 5 que l'on peut former.

2° a) n étant un entier naturel non nul, déterminer le nombre de séquences de longueur n que l'on peut former.

b) Déterminer la plus petite valeur de n permettant de coder les 26 lettres de l'alphabet et les 10 chiffres avec des séquences toutes de longueur n.

3° a) n étant un entier naturel non nul, déterminer le nombre de séquences de longueur au plus n que l'on peut former.

b) Déterminer la plus petite valeur de n permettant de coder les 26 lettres de l'alphabet et les 10 chiffres avec des séquences de longueur au plus n.

55 ★ D'un jeu de 32 cartes, on extrait simultanément 6 cartes, on obtient une main de 6 cartes.

Dénombrer les mains contenant :

a) au moins un cœur ;

b) les 4 as ;

c) exactement 2 cœurs et 3 carreaux ;

d) exactement 3 cœurs et 2 as ;

e) au moins 4 cœurs et au moins 2 as.

56 ★★ Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et n boules jaunes, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

On tire simultanément deux boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1° Exprimer en fonction de n les probabilités des événements :

A : « les deux boules sont jaunes » ;
B : « le tirage est unicolore » ;
C : « le tirage est bicolore ».

2° Dans cette question, on suppose que la probabilité de A est $\frac{3}{13}$. En déduire n et les probabilités de B et C.

3° Dans cette question, on suppose que n vaut 7.

On répète dix fois l'expérience en remettant dans la boîte, après chaque tirage, les deux boules tirées.

X est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réalisations de l'événement B.

a) Calculer la probabilité des événements :

$$(X=2) \text{ et } (X \geqslant 9).$$

b) Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

57 ★★ **Dépistage d'une maladie**

On étudie dans ce problème un cas concret afin de minimiser le coût du dépistage d'une maladie.

(La méthode décrite a systématiquement été utilisée par l'armée américaine durant la Seconde Guerre mondiale.)

Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité, par rapport au coût, de deux méthodes de dépistage d'une maladie concernant statistiquement 1 % de la population, sur un ensemble de 1 000 personnes.

On considère que les résultats des tests individuels constituent des événements indépendants.

Dans la **méthode A**, on effectue 1 000 analyses individuelles (méthode exhaustive).

Dans la **méthode B**, on répartit les 1 000 personnes en n groupes de r personnes (donc $n \cdot r = 1\,000$).

Dans chaque groupe, on mélange les r prélèvements pour en faire une seule analyse, ce qui conduit à une première série de n analyses.

– Un groupe est négatif lorsqu'aucun des individus qui le composent n'est malade.

– Sinon, le groupe est positif et l'on procède alors à une nouvelle analyse de sang de chacune des r personnes de ce groupe.

1° Étude de la méthode B

a) Quelle est la probabilité p pour qu'un groupe donné soit négatif ?

En déduire la probabilité q pour que ce groupe soit positif.

b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs.

Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres $(n\,;\,q)$.

En déduire l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

c) Si Y désigne le nombre de groupes positifs, calculer le nombre d'analyses faites au total avec la méthode B.

X désignant la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la **méthode B**, calculer l'espérance mathématique de X.

2° Comparaison des méthodes A et B

a) En remplaçant $0{,}99^r = \left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^r$ par sa valeur approchée $1 - \dfrac{r}{100}$, montrer que :

$$E(X) \approx 10\left(r + \frac{100}{r}\right).$$

b) Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,1\,000]$ par :

$$f(x) = 10\left(x + \frac{100}{x}\right).$$

Dresser le tableau des variations de f.

Résoudre l'équation $f(x) = 1\,000$,

et l'inéquation $f(x) < 1\,000$.

c) En déduire les valeurs de r pour lesquelles la méthode **B** est moins coûteuse que la méthode **A**, ainsi que la valeur de r minimisant le coût de la méthode **B**.

58 ★★ **Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$**

La loi uniforme sur un intervalle $[a\,;\,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, modélise le tirage au hasard d'un réel dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Elle est caractérisée par la propriété suivante :

« la probabilité de tout intervalle est proportionnelle à son amplitude. »

On admet que la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ est une loi à densité continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue f définie sur $[a\,;\,b]$ et telle que, pour tout $c \leqslant d$ dans $[a\,;\,b]$, $P([c\,;\,d]) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$.

On se propose ici de déterminer la fonction f.

1° Soit F une primitive de f.

a) Démontrer qu'il existe un réel k tel que, pour tous réels c et d de $[a\,;\,b]$ tels que $c \leqslant d$, on a :

$$F(d) - F(c) = k \times (d - c).$$

b) Soit $x_0 \in [a\,;\,b]$; justifier la dérivabilité de F en x_0 et préciser la valeur de $F'(x_0)$.

En déduire que f est constante sur $[a\,;\,b]$.

2° a) À l'aide de l'égalité $P([a\,;\,b]) = 1$, préciser l'expression de $f(t)$ pour tout t de $[a\,;\,b]$.

b) Tracer la représentation graphique de f sur $[a\,;\,b]$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus ci-dessus (on prendra $a = -1$ et $b = 4$).

3° Application

On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[-1\,;\,4]$.

a) Quelle est la probabilité qu'il appartienne à $[0\,;\,1]$?

b) Quelle est la probabilité qu'il soit inférieur à $-0{,}39$ sachant qu'il est négatif ?

59 ★★ Un skieur doit traverser un glacier en suivant une piste de longueur 1 km.

La probabilité pour qu'il rencontre une crevasse sur son chemin est p.

Si cette crevasse existe, sa répartition sur le chemin suit une loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

À la distance d du point de départ $(0 < d < 1)$ se trouve un refuge, où le skieur peut se reposer un instant.

On note C l'événement : « la crevasse existe effectivement sur le chemin parcouru par le skieur » ;

A : « il existe une crevasse entre le départ et le refuge » ;

B : « il existe une crevasse entre le refuge et l'arrivée ».

a) Interpréter les probabilités :

$$P_C(A) \text{ et } P_C(B),$$

puis exprimer ces probabilités en fonction de d.

b) Construire un arbre des possibilités faisant intervenir C, $\overline{C}$, A et B.

Calculer $P(A)$ et $P(B)$ en fonction de p et d.

c) Sachant que le skieur est parvenu sans encombre au refuge, quelle est la probabilité pour qu'il rencontre la crevasse sur la suite du parcours ?
Combien vaut cette probabilité si $p = 1$? Interpréter le résultat.

60 ★★ Désintégration radioactive

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = e^{-x}$;
P est la loi de probabilité de densité f sur $[0 ; +\infty[$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa représentation graphique.

2° a) Calculer $P([0 ; 1])$ et interpréter graphiquement cette quantité. En déduire la valeur de $P([1 ; +\infty[)$.

b) On appelle s un réel positif quelconque.
Calculer la probabilité conditionnelle :
$P_{[1 ; +\infty[}([1 ; 1+s])$.

3° a) Soit s et t deux réels positifs quelconques.
Calculer la probabilité conditionnelle :
$P_{[t ; +\infty[}([t ; t+s])$.
Cette quantité dépend-elle de t ?

b) I est un intervalle contenu dans $[0 ; +\infty[$; on admet que $P(I)$ est la probabilité pour un noyau radioactif donné d'une certaine substance radioactive de se désintégrer à un instant t appartenant à I. En quoi le résultat du **3° a)** justifie-t-il le nom de « loi de durée de vie sans vieillissement » pour P ?

61 ★ Loi de durée de vie sans vieillissement

On appelle P la « loi de durée de vie sans vieillissement » sur $[0 ; +\infty[$ de paramètre $\lambda > 0$.
Ce paramètre λ est attaché à une substance radioactive, et on admet que, si I est un intervalle contenu dans $[0 ; +\infty[$, $P(I)$ désigne la probabilité pour un noyau donné de cette substance de se désintégrer à un instant t appartenant à I.

1° t et s désignent deux réels positifs.
Calculer $P([t ; t+s])$; que représente ce nombre ?

2° On sait qu'un noyau n'est pas désintégré à l'instant t. Quelle est la probabilité qu'il se désintègre entre les instants t et $t+s$? Ce résultat dépend-il de t ?

3° a) Calculer en fonction de λ le temps τ tel que :
$$P([0 ; \tau]) = \frac{1}{2} .$$
Ce nombre τ est appelé la demi-vie, ou période, de l'élément radioactif considéré.

b) Quelle est la probabilité pour qu'un noyau donné se désintègre entre les instants t et $t+\tau$ sachant qu'il n'est pas désintégré à l'instant t ?

4° La demi-vie τ et la constante λ sont très variables d'un élément radioactif à l'autre.

a) Le « carbone 14 » a une demi-vie de 5 730 années ; calculer sa constante de désintégration annuelle.

b) La constante de désintégration annuelle de l'uranium 238 est de $1{,}54 \cdot 10^{-10}$ environ.
Quelle demi-vie peut-on en déduire pour l'uranium 238 ?

Pour les exercices 62 *et* 63 *:*

Densité d'une loi de probabilité sur un intervalle $[a ; b]$

Soit $[a ; b]$ un intervalle.
La fonction numérique f définie et continue sur $[a ; b]$ est une densité de probabilité sur $[a ; b]$, si f est positive sur $[a ; b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 1$.
Dans ces conditions, si P désigne la loi de probabilité de densité f, quels que soient les réels c et d de $[a ; b]$ tels que $c \leqslant d$, on a :
$$P([c ; d]) = \int_c^d f(t)\,dt .$$

62 1° a) Démontrer que la fonction $f : t \mapsto 4t^3$ est la densité d'une loi de probabilité définie sur $[0 ; 1]$.

b) Calculer $P([0{,}25 ; 0{,}75])$.

2° Soit P' une loi de probabilité sur $[1 ; 10]$, de densité :
$g : t \mapsto kt^{-2}$, où k est une constante positive.

a) Déterminer la valeur du réel k , puis étudier et représenter graphiquement la fonction g sur $[1 ; 10]$.

b) Calculer les probabilités $P'([1 ; 5])$ et $P'([5 ; 10])$; représenter graphiquement ces quantités sur la figure réalisée précédemment.

Comparer les amplitudes et les probabilités des intervalles $[1 ; 5]$ et $[5 ; 10]$; commenter en comparant à la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

63 ★★ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$f(x) = k \cdot x^2$, où k est un réel fixé.

1° Déterminer la valeur de k sachant que f est la densité d'une loi de probabilité P sur $[0 ; 1]$.
Représenter graphiquement la fonction f.

2° Calculer les probabilités $P\left(\left[0 ; \frac{1}{2}\right]\right)$ et $P\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right)$; représenter ces quantités sur le graphique précédemment tracé.

3° Déterminer le réel a tel que :
$$P\left(\left[\frac{1}{2} ; a\right]\right) = P\left(\left[0 ; \frac{1}{2}\right]\right) .$$

4° Existe-t-il deux intervalles de même amplitude et de même probabilité suivant la loi P ?

64 ★★ **Exemple de « distribution normale »**

Une chaîne de fabrication produit des pièces circulaires.

A. En sortie de chaîne, on a prélevé un échantillon de 1 000 pièces, pour lesquelles on a calculé l'écart, en millimètres, entre le rayon idéal et le rayon observé.

Les résultats sont les suivants :

$[-0,9 ; -0,8[: 0$; $[-0,8 ; -0,7[: 1$;
$[-0,7 ; -0,6[: 4$; $[-0,6 ; -0,5[: 21$;
$[-0,5 ; -0,4[: 37$; $[-0,4 ; -0,3[: 78$;
$[-0,3 ; -0,2[: 100$; $[-0,2 ; -0,1[: 123$;
$[-0,1 ; 0[: 130$; $[0 ; 0,1[: 127$; $[0,1 ; 0,2[: 122$;
$[0,2 ; 0,3[: 103$; $[0,3 ; 0,4[: 75$; $[0,4 ; 0,5[: 43$;
$[0,5 ; 0,6[: 26$; $[0,6 ; 0,7[: 7$;
$[0,7 ; 0,8[: 2$; $[0,8 ; 0,9[: 1$.

1° Tracer l'histogramme de cette série statistique, en prenant pour unités 10 cm pour 1 mm sur l'axe des abscisses et 1 cm^2 pour 10 pièces.

Quelle est l'aire totale des rectangles ainsi construits ?

2° Calculer les fréquences correspondant :

a) aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[-0,3 ; 0,3]$.

b) aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[0,6 ; 1]$.

c) aux pièces dont l'écart entre le rayon mesuré et le rayon idéal appartient à $[-0,7 ; -0,5]$.

B. Les conditions de fabrication sont telles que la variable étudiée en **A.** peut être considérée comme continue.

Devant les résultats obtenus, un statisticien propose de modéliser la situation à l'aide d'une loi de probabilité dont la densité f (f est une approximation) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 1{,}33e^{\frac{-t^2}{0{,}18}} .$$

On admet que f permet de définir la densité d'une probabilité sur $\mathbb{R}$.

1° Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2° a) Calculer les images par f des réels de -1 à 1 avec le pas 0,1.

b) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm) ;

3° On admet que l'aire, comprise entre la courbe de f sur $\mathbb{R}$ et l'axe des abscisses, est égale à 1.

a) Que représente, en unité d'aire, un carré de côté 1 cm sur la figure ?

b) En déduire des valeurs approchées des probabilités :

$P([-0,3 ; 0,3])$, $P([0,6 ; 1])$ et $P([-0,7 ; -0,5])$.

Comparer ces résultats à ceux obtenus sur l'échantillon étudié en **A.**

L'approximation proposée par la loi de densité f semble-t-elle convenable ?

65 On désire fabriquer une plaque en plastique dont la forme « idéale » est un rectangle de longueur 21 cm et de largeur 15 cm. Les conditions de fabrication sont telles que chacun des côtés est soumis à une variation de longueur de plus ou moins 1 mm indépendamment des trois autres côtés (le boîtier n'est donc pas en général un rectangle…).

On a mesuré les dimensions (en cm) d'un échantillon de 50 plaques en sortie de fabrication et les résultats obtenus sont consignés dans le tableau fourni.

E2 = =A2+B2+C2+D2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	L1	l1	L2	l2	Périmètre	L1	l1	L2	l2	Périmètre
2	20,93	15,03	21,05	15,07	72,08	21,05	14,98	21	15,09	72,12
3	20,94	15	20,96	15,02	71,92	20,94	15,04	20,94	15,02	71,94
4	20,91	15,01	21,02	14,94	71,88	21,02	14,92	21,08	15,04	72,06
5	21,09	15,08	20,97	15,03	72,17	21,09	15,07	21,06	14,93	72,15
6	21,01	14,91	21,1	14,9	71,92	20,95	15	21	14,9	71,85
7	20,92	14,91	20,93	15,1	71,86	20,98	14,96	21,04	15,01	71,99
8	20,97	14,97	21,08	15,03	72,05	20,98	15,04	20,96	14,97	71,95
9	21,09	14,92	20,94	15,03	71,98	21,01	15,01	21	14,99	72,01
10	21,07	14,96	21	15,04	72,07	20,94	14,96	20,93	14,97	71,8
11	20,96	15,04	20,97	15,09	72,06	21,03	15,04	21	15,01	72,08
12	20,94	15,1	20,95	14,94	71,93	20,91	14,96	21,03	14,95	71,85
13	20,91	15,09	21,04	15	72,04	20,96	14,96	21,06	15,01	71,99
14	20,95	15,03	20,91	14,94	71,83	20,96	15	21,02	14,97	71,95
15	21,1	15,09	20,96	15,04	72,19	21,09	14,93	20,93	15,1	72,05
16	20,98	14,92	21,09	14,91	71,9	21,07	14,97	20,99	14,95	71,98
17	20,96	14,92	20,94	15,09	71,91	21,04	14,93	20,91	15	71,88
18	21,02	14,92	20,96	14,9	71,82	20,93	15,02	20,95	14,99	71,89
19	21,06	15,07	20,92	14,99	72,04	20,91	15,1	20,99	14,93	71,93
20	21,1	15,03	20,99	15,04	72,16	21,08	14,92	21	14,99	71,99
21	21,08	15,07	21,1	14,96	72,21	20,93	14,91	20,97	14,93	71,74
22	21,02	15,03	21,07	15,02	72,14	21,03	15,04	20,95	14,9	71,92
23	21,04	15,07	21,01	14,93	72,05	20,97	15,08	20,96	14,99	72
24	20,96	15	20,93	14,94	71,83	20,91	15,05	20,95	14,9	71,81
25	21,03	14,98	20,96	15,06	72,05	20,99	14,91	20,97	14,94	71,81
26	21	14,93	20,99	15	71,92	21,05	15,05	21,02	15,01	72,13
27										

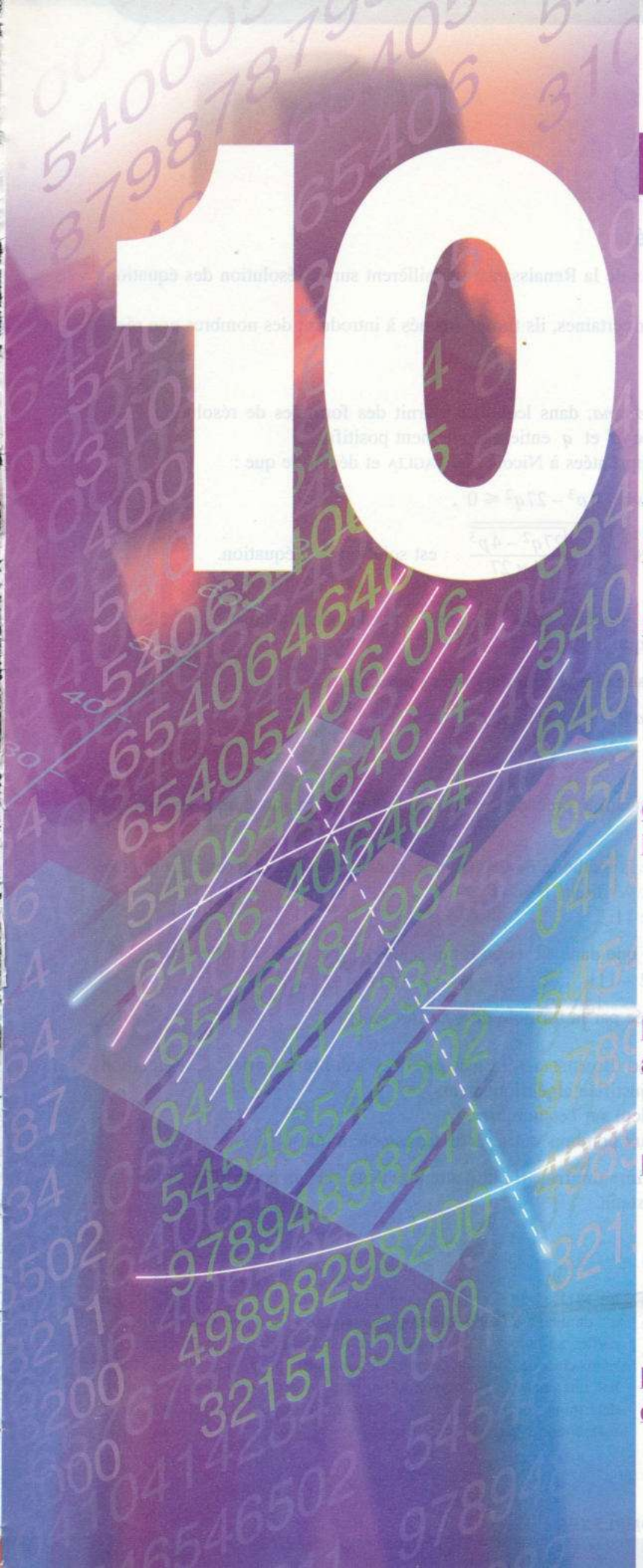
1° a) Compte tenu des conditions de fabrication, à quels intervalles les mesures des différents côtés appartiennent-elles ?

b) En déduire que le périmètre de la plaque varie dans l'intervalle $[71,6 ; 72,4]$.

2° En se reportant aux 50 résultats mesurés pour la dimension L1, motiver le choix d'une loi équirépartie dans $[20,9 ; 21,1]$ pour L1.

On admettra l'équirépartition pour les quatre dimensions dans chacun des intervalles obtenus en **1° a)**.

3° À l'aide des résultats relevés pour le périmètre dans cet échantillon, peut-on suggérer une loi équirépartie dans $[71,6 ; 72,4]$ pour cette grandeur ?



CHAPITRE

10

Nombres complexes

Représentation p. 258
- associer un nombre complexe et un point du plan
- reconnaître et utiliser une forme algébrique

Calculer avec les nombres complexes p. 260
- effectuer des opérations et les interpréter géométriquement dans certains cas
- utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Équations du second degré à coefficients réels p. 262
- formules de résolution

Module et argument p. 263
- faire le lien entre forme algébrique et formes trigonométriques
- connaître les propriétés du module et des arguments
- utiliser la notation exponentielle

Nombres complexes et géométrie p. 266
- interpréter géométriquement un module et un argument
- reconnaître une transformation du plan

activités

1 Approche historique

Équations du troisième degré

Au XVIe siècle, des mathématiciens italiens de la Renaissance travaillèrent sur la résolution des équations du troisième degré.
Afin de calculer des solutions, réelles pour certaines, ils furent amenés à introduire des nombres non réels.

1 Formule de CARDAN

En 1545, Jérôme CARDAN publie l'*Ars Magna*, dans lequel il fournit des formules de résolution d'une équation de la forme $x^3 = px + q$, avec p et q entiers strictement positifs.
Il développe et complète des méthodes empruntées à Nicolo TARTAGLIA et découvre que :

si $4p^3 - 27q^2 \leqslant 0$,

alors le réel positif $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}}$ est solution de l'équation.

Dans cette formule, le nombre noté $\sqrt[3]{x}$, pour x dans $[0 ; +\infty[$, est le nombre positif qui, élevé au cube, donne x . On l'appelle **racine cubique** de x .

a) Vérifier que l'équation $x^3 = 15x + 4$ admet une solution entière positive a .

b) En factorisant $x^3 - 15x - 4$ par $(x - a)$, achever la résolution.

2 L'audace de BOMBELLI

La formule de CARDAN appliquée à l'équation précédente fait apparaître la racine carrée du nombre strictement négatif : -121 .

En 1572, afin de tenter de rendre générale la méthode de CARDAN, Raphaël BOMBELLI introduit un nombre *più di meno*, noté **i** en 1777 par EULER, et vérifiant $\mathbf{i^2 = -1}$.
Ainsi $-121 = 121 \times (-1)$ est le carré de $11\mathrm{i}$.

a) En utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1 , montrer que :
$(2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\mathrm{i}$ et $(2 - \mathrm{i})^3 = 2 - 11\mathrm{i}$.

b) Quelle est alors la solution réelle donnée par la formule de CARDAN ?

Par l'intermédiaire de nombres nouveaux, BOMBELLI retrouve une des solutions réelles de l'équation.
L'introduction du nombre i semble alors justifiée algébriquement.
Conjointement, il énonce les règles de calcul sur ces nombres.
L'apparition au XVIe siècle de ces nouveaux nombres entraîna de vives polémiques.

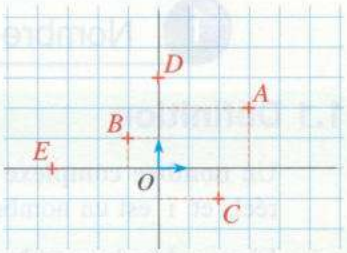
En 1637, DESCARTES leur donna le nom d'**imaginaires**. Il fallut attendre deux siècles pour qu'ils obtiennent de la communauté mathématique un réel statut.

Représentation géométrique

À la fin du XVIIIe siècle et au début du XIXe, WESSEL et ARGAND proposent de représenter le nombre imaginaire $x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, par le point de coordonnées $(x ; y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal.

En 1811, GAUSS écrit :
« ...de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse x et son ordonnée y représente en même temps la quantité $x + \mathrm{i}y$. »

1 Donner les nombres imaginaires a, b, c, d et e associés respectivement à chacun des points A, B, C, D et E.



2 Construire le vecteur $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner le nombre imaginaire s que représente S. Établir une relation entre s, a et c.

3 Construire le vecteur $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OB}$ et donner le nombre imaginaire p qui représente P. Établir une relation entre p et b.

Cette représentation géométrique des nombres imaginaires, donnant du sens aux calculs algébriques, fit taire les réticences. Ces nombres finirent par être adoptés et en 1831, GAUSS leur donna le nom de **nombres complexes**.

2 Coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Soit $(O\,;\vec{u})$ un repère polaire du plan et $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ le repère orthonormal direct associé.

1 a) Placer les points F et G de coordonnées polaires $\left(2\,;\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right)$ dans $(O\,;\vec{u})$.

b) Calculer les coordonnées cartésiennes de F et G dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2 Soit H le point de coordonnées cartésiennes $(1\,;\sqrt{3})$ dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer un couple $(r\,;\theta)$ de coordonnées polaires du point H dans $(O\,;\vec{u})$.

3 M étant un point distinct de O de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$ dans $(O\,;\vec{u})$, on note M_1 et M_2 ses symétriques respectifs par rapport à O et à l'axe (Ox).
Comparer les coordonnées polaires des points M_1 et M_2 à celles de M.

3 Trigonométrie

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



1 N, P et Q sont les points du cercle $\mathscr{C}$ respectivement associés aux réels $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points.

2 Soit M et M' des points du cercle $\mathscr{C}$, M d'abscisse $\frac{1}{2}$ et M' d'ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Quelles sont les positions possibles de M sur $\mathscr{C}$? Pour chacune de ces positions, déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$. Faire de même pour le point M'.

Remarque
Si x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, alors tous les nombres $x + k\times 2\pi$, avec k entier relatif, sont des mesures de cet angle. On écrit $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = x \ \ (2\pi)$, où (2π) se lit « modulo 2π ».

3 Sans utiliser de calculatrice, déterminer θ vérifiant les conditions données.

a) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 < \theta < 2\pi$; **b)** $\cos\theta \geqslant 0$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\pi < \theta < \pi$;

c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$; **d)** $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta \leqslant 0$ et $-\pi < \theta < \pi$.

1 Nombre complexe – Représentation

1.1 Définition

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $x+\mathrm{i}y$, où x et y sont deux nombres réels et i est un nombre imaginaire vérifiant $\mathbf{i^2=-1}$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Dans le plan muni d'un **repère orthonormal direct** $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, à tout point M correspond un couple $(x\,;y)$ de réels, celui de ses coordonnées.

Réciproquement, à tout couple de réels correspond un unique point de ce plan.

Ainsi, on peut établir une correspondance entre les points du plan et les nombres complexes, souvent notés avec la lettre z.

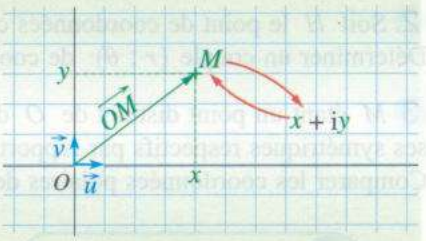
1.2 Représentation géométrique

Le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ est l'**affixe** du point $M(x\,;y)$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On écrit $x+\mathrm{i}y=z_M=z_{\overrightarrow{OM}}$ ou $M(x+\mathrm{i}y)$ qu'on lit « le point M d'affixe $x+\mathrm{i}y$ ».

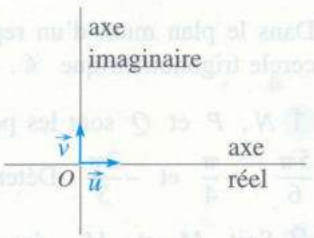
Le point $M(x\,;y)$ est l'**image** de $x+\mathrm{i}y$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de $x+\mathrm{i}y$.



• Le plan muni d'un repère orthonormal direct dans lequel on représente les nombres complexes est appelé **plan complexe**.

• Tout **point de l'axe des abscisses** est l'image d'un nombre complexe de la forme $x+\mathrm{i}0$, avec x réel, noté simplement x.
Par exemple, $-3+0\mathrm{i}=-3$ et $0+0\mathrm{i}=0$.



Ainsi, l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Tout **point de l'axe des ordonnées** est l'image d'un nombre complexe de la forme $0+\mathrm{i}y$, avec y réel, noté simplement $\mathrm{i}y$, et dit **imaginaire pur**.
Par exemple, $0+5\mathrm{i}=5\mathrm{i}$.

Pour ces raisons :

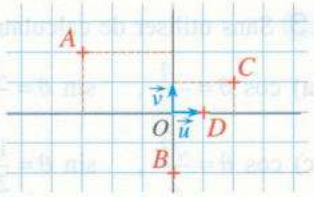
l'axe des abscisses (Ox) est l'**axe réel** et l'axe des ordonnées (Oy) est l'**axe imaginaire**.

Exemples

Soit les points A, B, C et D de la figure ci-contre.

$-3+2\mathrm{i}$ est l'affixe de A et $-2\mathrm{i}$ est l'affixe de B.

C est l'image du complexe $2+\mathrm{i}$ et D est l'image du réel 1.



1.3 Forme algébrique

théorème

Tout nombre complexe z admet une écriture unique de la forme $x+\mathrm{i}y$, où x et y sont deux nombres réels.

Cette écriture est la **forme algébrique** de z avec :

x, la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$;

y, la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
Par exemple, $3+\mathrm{i}(5+2\mathrm{i})$ n'est pas sous forme algébrique, car $5+2\mathrm{i}$ n'est pas réel.

Soit z un nombre complexe, alors :

z est **réel** si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle ;

z est **imaginaire pur** si, et seulement si, sa partie réelle est nulle .

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$z=z' \iff \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') .$$

En particulier, un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle **et** sa partie imaginaire sont simultanément nulles :

pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, $\quad x+\mathrm{i}y=0 \iff x=0$ et $y=0$.

Exemples

Soit a et b dans $\mathbb{R}$ et $z=(2a-b)+\mathrm{i}(b-1)$.

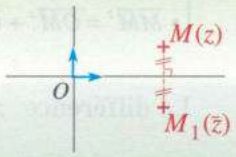
$2a-b\in\mathbb{R}$ et $b-1\in\mathbb{R}$, donc z est sous forme algébrique.

z est imaginaire pur si, et seulement si, a et b vérifient la relation $2a=b$.

1.4 Conjugué

définition

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x+\mathrm{i}y$, le conjugué de z est le nombre complexe $\boldsymbol{x-\mathrm{i}y}$, noté $\bar{z}$.



Le point $M_1(\bar{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox) .

Un nombre complexe et son conjugué ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

Exemples

- Le conjugué de $2+3\mathrm{i}$ est $2-3\mathrm{i}$.
- Si $z=-\sqrt{3}-4\mathrm{i}$, alors $\bar{z}=-\sqrt{3}+4\mathrm{i}$.

Voir Exercices 1 à 4

2 Calculer avec les nombres complexes

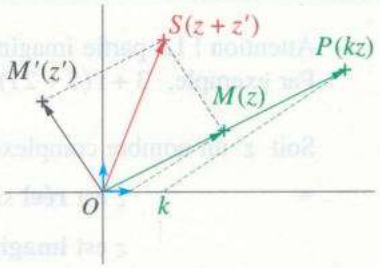
2.1 Somme – Produit

Dans le plan complexe, soit les points M et M' d'affixes respectives $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$, avec x, y, x' et y' réels.
On a $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OS}$, avec le point S tel que $OMSM'$ est un parallélogramme. On en déduit :

$S(x + x' ; y + y')$ ou S d'affixe $(x + x') + \mathrm{i}\,(y + y')$.

Soit k un réel. On a $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$:
si $k \neq 0$, P est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k,
et si $k = 0$, P est confondu avec O.
Ainsi, O, M et P sont toujours alignés. On en déduit :

$P(kx ; ky)$ ou P d'affixe $(kx) + \mathrm{i}\,(ky)$.

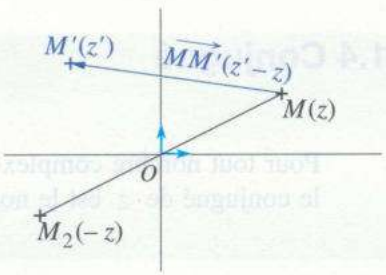


Définitions

Soit un réel k et les nombres complexes z et z' de forme algébrique $x + \mathrm{i}\,y$ et $x' + \mathrm{i}\,y'$.
- La somme de z et z' est le nombre complexe $z + z' = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y')$.
- Le produit de z et du réel k est le nombre complexe $k \cdot z = (kx) + \mathrm{i}\,(ky)$.
- Le produit de z et z' est le nombre complexe $z \cdot z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}\,(xy' + x'y)$.

Remarques

- Ainsi, $z_{\overrightarrow{OM}} + z_{\overrightarrow{OM'}} = z_{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}}$ et $k \cdot z_{\overrightarrow{OM}} = z_{k\overrightarrow{OM}}$.
Plus généralement, pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$, et tout réel k, $z_{\vec{w}} + z_{\vec{t}} = z_{\vec{w} + \vec{t}}$ et $k \cdot z_{\vec{w}} = z_{k\vec{w}}$.
- Lorsque z est réel, l'écriture algébrique du produit $z \cdot z'$ est cohérente avec celle du produit avec un réel.
- On peut démontrer que les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- Pour $k = -1$, on a $(-1)z = (-x) + \mathrm{i}\,(-y)$, noté $-z$, qui est l'opposé de z. On a $-z = -x - \mathrm{i}\,y$.
$M_2(-z)$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à O.
- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} + (-\overrightarrow{OM})$ a pour affixe $z' + (-z)$.



La **différence** $z' - z$ est la somme $z' + (-z)$; on a :
$z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$.

En pratique, on effectue la somme et le produit de nombres complexes en appliquant les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1.

Exemple

Soit $z = -1 + 2\mathrm{i}$ et $z' = 2 + 5\mathrm{i}$.

On a $z + z' = (-1 + 2) + \mathrm{i}\,(2 + 5) = 1 + 7\mathrm{i}$,

et $z \cdot z' = (-1 + 2\mathrm{i})(2 + 5\mathrm{i}) = -2 - 5\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 = -12 - \mathrm{i}$.

```
(-1+2i)+(2+5i)
                1+7i
(-1+2i)*(2+5i)
               -12-i
```

Voir Exercices 5 à 15

2.2 Quotient

Soit z un nombre complexe.
On cherche s'il existe un nombre complexe Z tel que $z \cdot Z = 1$, c'est-à-dire si le nombre complexe z admet un inverse.
On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$, avec x et y réels, alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$, et on remarque que :

$z \cdot \overline{z} = (x + \mathrm{i}\,y)(x - \mathrm{i}\,y) = (x^2 + y^2) + \mathrm{i}\,(x(-y) + xy) = x^2 + y^2$, qui est un réel positif.

Or, $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$ et $y = 0 \iff x + \mathrm{i}\,y = 0$.

Comme $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, si $z \neq 0$, alors $\dfrac{z \cdot \overline{z}}{x^2 + y^2} = 1$, c'est-à-dire $(x + \mathrm{i}\,y) \times \dfrac{x - \mathrm{i}\,y}{x^2 + y^2} = 1$.

Tout nombre complexe z non nul de forme algébrique $x + \mathrm{i}\,y$ admet un **inverse**, noté $\dfrac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2 + y^2}\ .$$

Le **quotient** $\dfrac{z'}{z}$ est alors le produit $z' \times \dfrac{1}{z}$.

En pratique, pour obtenir $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z'}{z}$ sous forme algébrique :
on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z.

Exemple

Soit $z = \sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ et $z' = 1 + \mathrm{i}$.

On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}{(\sqrt{3} - 2\mathrm{i})(\sqrt{3} + 2\mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}{3 + 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{7} + \mathrm{i}\,\dfrac{2}{7}$,

et $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3} - 2\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(\sqrt{3} + 2\mathrm{i})}{(\sqrt{3} - 2\mathrm{i})(\sqrt{3} + 2\mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{3} + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2}{3 + 4} = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{7} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3} + 2}{7}$.

Voir Exercices 16 à 19

2.3 Propriétés du conjugué d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$, son conjugué est $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z) = 2x$
- $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{i}\,y$
- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

- z est réel si, et seulement si, son conjugué est lui-même : $\overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur si, et seulement si, son conjugué est son opposé : $\overline{z} = -z$.

En effet, z est réel $\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff \overline{z} = z$,
et z est imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff \overline{z} = -z$.

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- si $z \neq 0$, $\left(\overline{\dfrac{1}{z}}\right) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\left(\overline{\dfrac{z'}{z}}\right) = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Voir Exercice résolu 1 ; Exercices 27 à 31

3 Équations du second degré à coefficients réels

Formules de résolution

a, b et c étant trois réels donnés, avec a non nul, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
Δ est le discriminant de $az^2 + bz + c$.
Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet toujours deux solutions (confondues si $\Delta = 0$) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où δ est un nombre complexe dont le carré est le discriminant $\delta^2 = \Delta$.

Démonstration

Soit a, b et c dans $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\iff a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

$$\iff a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

• Si $\Delta \geqslant 0$, alors Δ est un carré et $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$.

• Si $\Delta < 0$, alors $\Delta = -|\Delta| = (\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|})^2$; Δ est encore un carré.

Dans tous les cas, on peut écrire $\Delta = \delta^2$, où δ est un nombre complexe. Ainsi :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = 0$$

$$\iff a\left[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right] = 0$$

$$\iff a = \left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right) = 0$$

$$\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

L'équation a donc deux solutions, $\frac{-b + \delta}{2a}$ et $\frac{-b - \delta}{2a}$; elles sont confondues si $\delta = 0$.

On remarque que :

si $\Delta > 0$, alors les solutions sont réelles distinctes ;
si $\Delta = 0$, alors les solutions sont confondues, on parle de solution double ;
si $\Delta < 0$, alors les solutions sont complexes et conjuguées.

Et le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise toujours dans $\mathbb{C}$.

Exemple

On donne l'équation $z^2 - 4z + 15 = 0$. On a :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 15 = -44 = (\mathrm{i}\sqrt{44})^2 = (2\mathrm{i}\sqrt{11})^2$, et on pose $\delta = 2\mathrm{i}\sqrt{11}$.

Donc l'équation possède dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - 2\mathrm{i}\sqrt{11}}{2} = 2 - \mathrm{i}\sqrt{11} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2\mathrm{i}\sqrt{11}}{2} = 2 + \mathrm{i}\sqrt{11}.$$

Voir T.D. 1 ; Exercices 32 à 35

4 Module et arguments

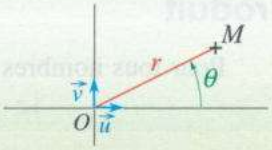
4.1 Définition

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ ayant pour coordonnées polaires $(r\,;\theta)$ dans $(O\,;\vec{u})$.

On dit que :

r est le **module** de z, noté $|z|$, et θ est un **argument** de z, noté arg z.

Ainsi $|z| = r = OM$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.



Exemples

• D'après la figure ci-contre, par lecture graphique, on a :

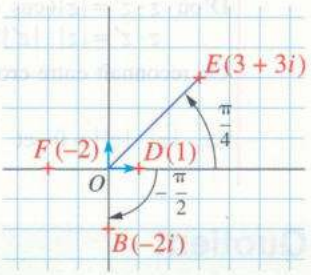
$|-2\,\mathrm{i}| = OB = 2$ et $\arg(-2\,\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$;

$|1| = OD = 1$ et $\arg(1) = 0\ (2\pi)$;

$|3+3\,\mathrm{i}| = OE = 3\sqrt{2}$ et $\arg(3+3\,\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$;

$[OE]$ est l'une des diagonales d'un carré de côté 3 ;

$|-2| = OF = 2$ et $\arg(-2) = \pi\ (2\pi)$.



• $M(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est un point du cercle trigonométrique :

$|\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta| = 1$ et $\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \theta\ (2\pi)$.

Remarque

Si $z = 0$, alors M est en O. La distance OM est nulle. On définit le module de 0 par $|0| = 0$.
Attention, 0 n'a pas d'argument.

4.2 Forme algébrique et formes trigonométriques

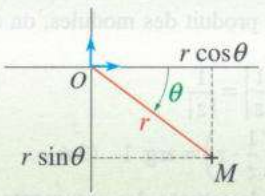
Pour tout nombre complexe z **non nul**, d'image M de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ et de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$, on a :

• la **forme algébrique**

$z = x + \mathrm{i}y$

avec $x = r\cos\theta$

et $y = r\sin\theta$



• une **forme trigonométrique**

$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$,

et $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

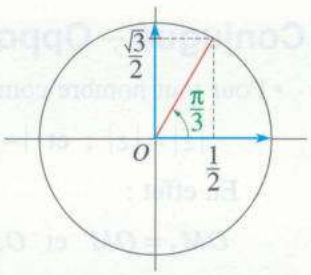
Exemple

Soit $z = \frac{1}{3} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$. On a $r = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$, d'où $z = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On est ramené à chercher θ tel que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La valeur $\frac{\pi}{3}$ convient pour θ. D'où, $|z| = \frac{2}{3}$ et $\arg z = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

On en déduit une forme trigonométrique de z : $z = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.



Voir Exercice 55

4.3 Propriétés

Égalité

Deux nombres complexes non nuls sont **égaux** si, et seulement si, ils ont même module et même argument, à un multiple de 2π près.

Produit

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi) .$$

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. On pose $\arg z = \theta \quad (2\pi)$ et $z' = \theta' \quad (2\pi)$.

D'où $z \cdot z' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z \cdot z' = |z| \cdot |z'|[(\cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \cdot \sin\theta') + i(\cos\theta \cdot \sin\theta' + \sin\theta \cdot \cos\theta')]$.

On reconnaît entre crochets les développements de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$, d'où :

$$z \cdot z' = |z| \cdot |z'|[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] .$$

Or, $|z| \cdot |z'| > 0$ et $|\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')| = 1$, donc :

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi) .$$

Quotient

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad (2\pi)$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z \quad (2\pi)$

Démonstration

Voir Exercices 46, 47, 49 à 53

Soit z un nombre complexe non nul, alors $|z|$ est non nul. On utilise $\frac{1}{z} \cdot z = 1$.

- En prenant les modules, on a $\left|\frac{1}{z} \cdot z\right| = 1$.

Comme le module d'un produit est le produit des modules, on obtient $\left|\frac{1}{z}\right| \cdot |z| = 1$,

et, en divisant par $|z|$, on obtient $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

- En prenant un argument, on a $\arg\left(\frac{1}{z} \cdot z\right) = \arg 1 \quad (2\pi)$.

Comme un argument d'un produit est la somme des arguments, on obtient :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg z = 0 \quad (2\pi) , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad (2\pi) .$$

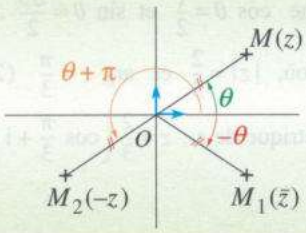
Conjugué – Opposé

- Pour tout nombre complexe z :

$|\bar{z}| = |z|$; et $|-z| = |z|$.

En effet :

$OM_1 = OM$ et $OM_2 = OM$.



- Pour tout complexe $z \neq 0$:

$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad (2\pi)$;

$\arg(-z) = \arg z + \pi \quad (2\pi)$.

4.4 Notation exponentielle

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par le nombre complexe $\varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, de module 1 et d'argument le réel θ.

D'après la propriété sur module et arguments d'un produit, pour tous réels θ et θ' :

$$|\varphi(\theta)\cdot\varphi(\theta')| = |\varphi(\theta)|\cdot|\varphi(\theta')| = 1\times 1 = 1$$

et $\arg[\varphi(\theta)\cdot\varphi(\theta')] = \arg\varphi(\theta) + \arg\varphi(\theta') = \theta + \theta' \ (2\pi)$.

Donc, le produit de deux images $\varphi(\theta)$ et $\varphi(\theta')$ s'écrit :

$$\varphi(\theta)\cdot\varphi(\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'),$$

c'est-à-dire $\varphi(\theta)\cdot\varphi(\theta') = \varphi(\theta+\theta')$.

Ainsi la fonction φ vérifie l'**équation fonctionnelle** caractéristique des fonctions exponentielles.

Voir Chapitre 4

Si on admet que les règles de dérivation sont applicables aux fonctions à valeurs complexes, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et alors, pour tout réel θ, on peut écrire :

$$\varphi'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = i\varphi(\theta).$$

Ainsi $\varphi' = i\varphi$ et $\varphi(0) = 1$, par analogie avec les résultats du *Chapitre* 4, il est naturel de noter $\varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ sous la forme exponentielle $e^{i\theta}$.

Forme exponentielle

Tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument θ, admet une écriture de la forme $z = r\cdot e^{i\theta}$.

Cette écriture est une **forme exponentielle** de z.

Règles de calcul

Pour tous réels θ et θ', on a :

- $e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$.

Exemple

Voir Exercices 59 à 62

Soit $z = \sqrt{3}+i$ et $z' = -1+i$. On pose $\theta = \arg z \ (2\pi)$ et $\theta' = \arg z' \ (2\pi)$.

On a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}\end{cases}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} \ (2\pi)$ et $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

De plus, $|z'| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $\begin{cases}\cos\theta' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, donc $\theta' = \dfrac{3\pi}{4} \ (2\pi)$ et ainsi $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Des propriétés sur module et argument, on déduit :

$$|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'| = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z\cdot z') = \arg(z) + \arg(z') = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{12} \ (2\pi).$$

Ou bien, en utilisant la notation exponentielle, $z\cdot z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, on reconnaît l'écriture sous forme exponentielle du nombre complexe de module $2\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{11\pi}{12}$.

5 Nombres complexes et géométrie

5.1 Distances, angles orientés

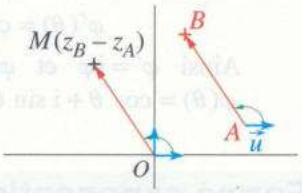
propriétés

Soit A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C :

- $|z_B - z_A| = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ (2π)
- $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (2π)

Démonstration

Soit A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.



• Soit M l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, alors $z_M = z_B - z_A$.
Ainsi $|z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$,
et $\arg(z_B - z_A) = \arg z_M = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ (2π).

• D'après le module d'un quotient et la propriété précédente :

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \frac{CB}{CA}.$$

D'après un argument d'un quotient et l'interprétation d'un argument d'une différence :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(z_B - z_C) - \arg(z_A - z_C) = (\vec{u}, \overrightarrow{CB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{CA}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA}, \vec{u}) \quad (2\pi),$$

c'est-à-dire, en utilisant la relation de CHASLES :

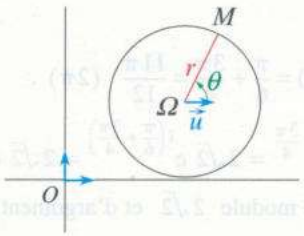
$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi).$$

Les points A, B et C étant distincts deux à deux, on a :

- les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0 \quad (\pi)$;
- les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si, et seulement si, $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (π).

Remarque

Voir Exercices 65 à 73



Soit $\Omega(\omega)$ et $r > 0$.

L'ensemble des points $M(z)$ défini par $z - \omega = r \cdot e^{i\theta}$, où θ décrit $[0 ; 2\pi[$, est le cercle de centre Ω et de rayon r.

En effet, on a :

$$\Omega M = |z - \omega| = |r \cdot e^{i\theta}| = r$$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \arg(z - \omega) = \theta$, θ décrivant $[0 ; 2\pi[$.

5.2 Transformations du plan

Translation

proposition

Soit z, z' et b des nombres complexes, avec b l'affixe d'un point B donné.

La relation $z' = z + b$ traduit que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par **la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$**.

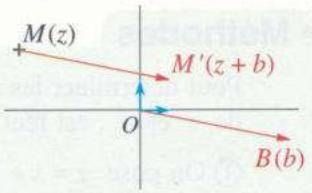
Démonstration

En partant de la relation, on a :

$$z' = z + b \iff z' - z = b .$$

Or, $z' - z$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$.

On traduit l'égalité par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.



Homothétie

proposition

Soit z, z' et ω des nombres complexes, où ω est l'affixe d'un point Ω donné et k un réel non nul.

La relation $z' - \omega = k(z - \omega)$ traduit que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par **l'homothétie de centre Ω et de rapport k**.

Démonstration

En partant de la relation, on a $z' - \omega = k(z - \omega) \iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = k z_{\overrightarrow{\Omega M}}$.

Or, $k\, z_{\overrightarrow{\Omega M}} = z_{k\overrightarrow{\Omega M}}$; on est donc ramené à $z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k\overrightarrow{\Omega M}}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Rotation

proposition

Soit z, z' et ω des nombres complexes, où ω est l'affixe d'un point Ω donné et θ un réel.

La relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ traduit que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par **la rotation de centre Ω et d'angle θ**.

Démonstration

Voir Exercice résolu 2 ; T.D. 2 et 3 ; Exercices 79 à 86

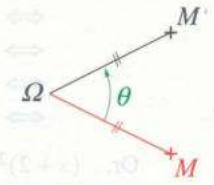
- Si $M = \Omega$, alors $z = \omega$; donc $z' - \omega = 0$, c'est-à-dire $z' = \omega$; ainsi M' est confondu avec Ω.
- Si $M \neq \Omega$, alors $z \neq \omega$.

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\iff \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = |e^{i\theta}| \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \ (2\pi)$$

$$\iff \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \ (2\pi)$$

$$\iff \Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \ (2\pi) .$$



Ce qui signifie que le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

1 Réel ou imaginaire pur

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels le point M' d'affixe $Z = z \cdot \overline{z} + z(2+\mathrm{i}) + \overline{z}(2+3\mathrm{i}) + 1$ appartient :

1° à l'axe réel ; **2°** à l'axe imaginaire.

Voir Exercices 30 et 31

• Méthodes

Pour déterminer les nombres complexes z pour lesquels un nombre complexe Z, dépendant de z et $\overline{z}$, est réel ou bien imaginaire pur, on dispose de deux méthodes.

① On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels) et on écrit Z sous forme algébrique.
On utilise les caractérisations que l'on traduit en condition(s) sur x et y :

Z est réel $\iff \mathrm{Im}(Z) = 0$ ou bien Z est imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(Z) = 0$

② On utilise les caractérisations :

Z est réel $\iff \overline{Z} = Z$ ou bien Z est imaginaire pur $\iff \overline{Z} = -Z$.

Par ces deux méthodes, on obtient ainsi des équations des ensembles cherchés.

• Méthode ①

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.
Alors :

$$\begin{aligned} Z &= x^2 + y^2 + (x+\mathrm{i}y)(2+\mathrm{i}) + (x-\mathrm{i}y)(2+3\mathrm{i}) + 1 \\ &= x^2 + y^2 + [2x - y + \mathrm{i}(x+2y)] \\ &\qquad + [(2x+3y) + \mathrm{i}(3x-2y)] + 1 \\ &= (x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1) + \mathrm{i}(4x) \ . \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{Re}(Z) = x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1$$
et $\mathrm{Im}(Z) = 4x$.

1° Le point M' est sur l'axe (Ox) si, et seulement si, son affixe Z est un réel :

Z est réel $\iff 4x = 0 \iff x = 0$.

Or, $x = 0$ est une équation de l'axe des ordonnées.

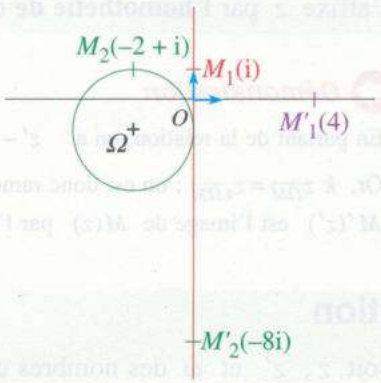
Donc l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels M' est sur (Ox) , est l'axe (Oy) .

2° Le point M' est sur l'axe (Oy) si, et seulement si, Z est imaginaire pur :
Z imaginaire pur

$$\begin{aligned} &\iff x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \\ &\iff (x^2 + 4x) + (y^2 + 2y) = -1 \\ &\iff (x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = -1 \\ &\iff (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4 \ . \end{aligned}$$

Or, $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ est une équation du cercle de centre $\Omega(-2\ ;-1)$ et de rayon 2.

L'ensemble des points $M(z)$, pour lesquels M' est sur (Oy) , est ce cercle.



• Méthode ②

D'après les propriétés sur les conjugués :

$$\overline{Z} = \overline{z} \cdot z + \overline{z}(2-\mathrm{i}) + z(2-3\mathrm{i}) + 1 \ .$$

1° Z est un réel $\iff \overline{Z} = Z \iff \overline{Z} - Z = 0$

$$\begin{aligned} &\iff -4\,\mathrm{i}\,(z + \overline{z}) = 0 \\ &\iff \overline{z} = -z \ . \end{aligned}$$

Ainsi, le point M' est sur (Ox) si, et seulement si, le point M est sur (Oy) .
L'ensemble cherché est donc (Oy) .

2° Z est imaginaire pur $\iff \overline{Z} = -Z$

$$\begin{aligned} &\iff \overline{Z} + Z = 0 \\ &\iff 2z \cdot \overline{z} + 4(z + \overline{z}) + 2\,\mathrm{i}(\overline{z} - z) + 2 = 0 \ . \end{aligned}$$

On pose $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$.
Comme $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, $z + \overline{z} = 2x$ et $\overline{z} - z = -2\mathrm{i}y$; on retrouve l'équation obtenue par la méthode précédente.
On conclut de la même façon.

2 Équation et étude d'une configuration

BAC

Énoncé

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 .$$

On donnera les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique, avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

2° Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = \sqrt{2}(1+\text{i})$ et $z_2 = \sqrt{2}(1-\text{i})$.

a) Déterminer l'affixe z_3 du point M_3 image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport -3 .

b) Déterminer l'affixe z_4 du point M_4 image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

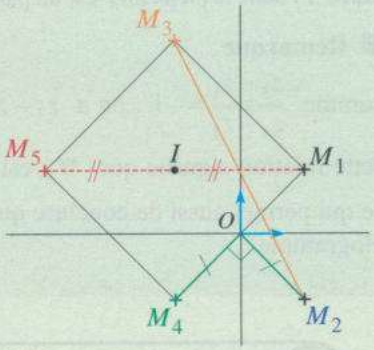
c) Calculer le nombre complexe $Z = \dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

d) Soit I le milieu de $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I . Montrer que le quadrilatère $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Analyse de l'énoncé

1° Dans le cas présent, on reconnaît une équation du second degré. Dans $\mathbb{C}$, l'équation a deux solutions.

2° a) b) On cherche à calculer l'affixe de points définis comme images par une transformation connue.



c) d) Il s'agit d'établir un lien entre côtés et angles du quadrilatère $M_1M_3M_5M_4$ et le nombre complexe Z .
On pensera à l'interprétation géométrique du module et d'un argument.

• Méthode

• Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$, avec $a \neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Les solutions sont les nombres complexes $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$, où $\delta^2 = \Delta$.

• Pour calculer l'affixe z' du point M' image d'un point M d'affixe z :

– par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k , on utilise $z' - \omega = k(z - \omega)$;

– par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , on utilise $z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega)$.
en particulier, pour la rotation de centre O et d'angle θ , on utilise $z' = \text{e}^{\text{i}\theta}z$.

• Si $Z = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$, avec $z_B \neq z_C$ et $z_A \neq z_C$, alors $\arg Z = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (2π) et $|Z| = \dfrac{CB}{CA}$.

1° Le discriminant de $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ est :

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 16 = -8 = (2\text{i}\sqrt{2})^2 .$$

L'équation possède donc dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{2\sqrt{2} - 2\text{i}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}$$

et $\dfrac{2\sqrt{2} + 2\text{i}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$.

On pose alors $z_1 = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z}_1$.

2° a) Le point M_3 , image de M_2 par l'homothétie de centre $A(a)$ et de rapport -3 , a pour affixe z_3 telle que $z_3 - a = -3(z_2 - a)$.
D'où :

$$z_3 = -3\left(\sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(-1 + 3\text{i}) .$$

b) Le point M_4 , image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, a pour affixe z_4 telle que :

$$z_4 = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} z_2 = -\text{i}\sqrt{2}(1-\text{i}) = \sqrt{2}(-1-\text{i}) .$$

c) $Z=\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=\dfrac{\sqrt{2}(-1+3\mathrm{i})-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}$

$=\dfrac{-1+3\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})}{-1-\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})}$

$=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2}$

$=-\mathrm{i}$.

d) Les segments $[M_3M_4]$ et $[M_1M_5]$ ont le même milieu I, donc $M_1M_3M_5M_4$ est un parallélogramme.

Comme $Z=-\mathrm{i}$, alors :

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)=\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

et $\left|\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right|=|-\mathrm{i}|=1$.

En interprétant géométriquement ces résultats, on obtient :

$(\overrightarrow{M_1M_4},\overrightarrow{M_1M_3})=-\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ et $\dfrac{M_1M_3}{M_1M_4}=1$,

donc $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Remarque

Comme $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=-\mathrm{i}$, on a $z_3-z_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_4-z_1)$.

Cette relation signifie que M_3 est l'image de M_4 par la rotation de centre M_1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Ce qui permet aussi de conclure que $M_1M_3M_5M_4$ est un carré après avoir justifié que c'est un parallélogramme.

Voir Exercices 95, 96 et 102

3 Figures remarquables et nombres complexes

Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne trois points et leurs affixes : $M(-1+\mathrm{i})$, $N(2+2\mathrm{i})$ et $P(4\mathrm{i})$.

1° Quelle est la nature du triangle MNP ?

2° Déterminer le point Q tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Préciser la nature de $MNQP$.

Voir Exercices 92 et 93

• Méthode

On interprète les propriétés géométriques à l'aide des complexes :

- pour calculer une longueur, on se ramène à un calcul de module $AB=|z_B-z_A|$.
- $MNQP$ est un parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$, qui se traduit par une égalité dans $\mathbb{C}$.

1° Faire une figure permet d'avoir une idée des réponses et de vérifier les résultats.

On place les points M , N et P dans le plan.

$MN=|z_N-z_M|$

$=|2+2\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})|$

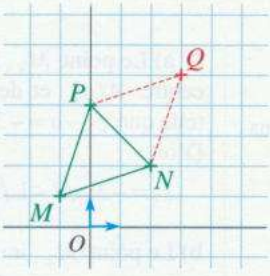
$=|3+\mathrm{i}|=\sqrt{10}$,

$MP=|z_P-z_M|$

$=|1+3\mathrm{i}|=\sqrt{10}$,

$NP=|z_P-z_N|$

$=|-2+2\mathrm{i}|=\sqrt{8}$.



$MN=MP$, donc le triangle MNP est isocèle en M .

Mais $MN\neq NP$, donc MNP n'est pas équilatéral.

Le triangle MNP étant isocèle en M , s'il est rectangle, c'est en M .

Or $MN^2+MP^2=20$ et $NP^2=8$.

$20\neq 8$, et donc, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, MNP n'est pas rectangle.

2° $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe z_N-z_M et $\overrightarrow{PQ}$ a pour affixe z_Q-z_P .

$MNQP$ est un parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$

$\iff z_N-z_M=z_Q-z_P$

$\iff z_Q=z_N-z_M+z_P$

Donc $z_Q=2+2\mathrm{i}+1-\mathrm{i}+4\mathrm{i}=3+5\mathrm{i}$.

Le parallélogramme $MNQP$ possède deux côtés consécutifs $[MN]$ et $[MP]$ de même longueur et non perpendiculaires, donc $MNQP$ est un losange qui n'est pas un carré.

1 Équations à coefficients réels

1.1 Équations du second degré

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - \sqrt{2}z + \frac{1}{2} = 0$; **b)** $4z^2 + 4z + 101 = 0$; **c)** $z^2 + 2z - 80 = 0$.

2 Factoriser dans $\mathbb{C}$ chacune des expressions suivantes :

$P(z) = 4z^2 - 4z + 5$; $Q(z) = z^2 - 6z + 13$; $R(z) = 3z^2 + 2z + 6$.

1.2 Équation du troisième degré

On donne $P(z) = z^3 - (2\sqrt{2} + 3)z^2 + 3(1 + 2\sqrt{2})z - 9$.

1 Vérifier l'égalité $P(3) = 0$.

2 Déterminer les réels α et β tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait :

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta) .$$

3 Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

1.3 Équation bicarrée

On considère l'équation $2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$. On pose $Z = z^2$.

1 Résoudre l'équation $2Z^2 - 5Z - 12 = 0$.

2 En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation considérée.

Voir Exercices 33 à 41

2 Lieu géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z telle que $|iz - 3i - 1| = 4$.

2.1 Avec des propriétés du module

1 Montrer que $|iz - 3i - 1| = 4 \iff |z - (3 - i)| = 4$.

2 Soit A le point d'affixe $3 - i$.
En interprétant géométriquement $|z - (3 - i)|$, déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

2.2 Avec une rotation

On pose $z' = iz - 3i - 1$ et f l'application du plan qui à $M(z)$ associe $M'(z')$.

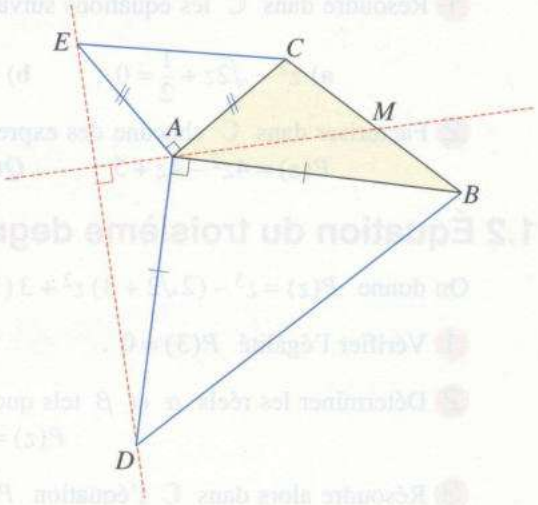
1 Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on déterminera l'affixe.
En déduire que f est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2 Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M'(z')$ tels que $|z'| = 4$.

3 Que représente l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché pour l'ensemble $\mathscr{C}$? En déduire $\mathscr{E}$.

3 Étude d'une configuration géométrique

ABC est un triangle direct quelconque, on note M le milieu de $[BC]$.
À l'extérieur de ABC, on construit les triangles ACE et ADB rectangles isocèles en A et directs.
Le but est de prouver que les droites (AM) et (ED) sont perpendiculaires et que $AM = \frac{1}{2} ED$.



3.1 Raisonnement géométrique

1 Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $R(D)$ et $R(C)$.

b) Construire B' l'image de B par R

c) Définir M' l'image de M par R.

2 **a)** Montrer que A est le milieu de $[DB']$.

b) Déterminer la position relative des droites (AM') et (ED) et comparer AM' et ED.

c) En déduire que $(AM) \perp (ED)$ et $AM = \frac{1}{2} ED$.

3.2 Raisonnement utilisant les nombres complexes

On munit le plan d'un repère orthonormal direct d'origine A, dans lequel les points B et C ont pour affixes respectives b et c.

1 Exprimer l'affixe e du point E en fonction de c et l'affixe d du point D en fonction de b.
En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{ED}$ en fonction de b et c.

2 Exprimer l'affixe m du point M en fonction de b et c.
En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

3 Établir une relation entre les affixes des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AM}$. En déduire que :

$$AM = \frac{1}{2} ED .$$

4 Montrer que $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{ED}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ED}) \quad (2\pi)$.
En déduire que les droites (AM) et (ED) sont perpendiculaires.

Voir Exercices 97 à 104

Faire le point

• Représentation, écriture

Le point $M(x\,;\,y)$ ou de coordonnées polaires $(r\,;\,\theta)$ représente le nombre complexe :

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\,\theta + \mathrm{i}\sin\,\theta) = r\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ .$$

• Module et arguments

Avec z et z' non nuls : $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$ et $\arg\,(z\cdot z') = \arg\,z + \arg\,z'\ \ (2\pi)$;

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\,z' - \arg\,z\ \ (2\pi)\ .$$

• Interprétations géométriques

Soit A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

$|z_B - z_A|$ est la distance AB et $\arg\,(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

$\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

relation	$M'(z')$ image de $M(z)$ par …
$z' = z + b$, où $b \in \mathbb{C}$	la translation de vecteur d'affixe b
$z' - \omega = k(z - \omega)$, où $\omega \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$	l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k
$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$, où $\omega \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$	la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

savoir	comment faire ?
calculer avec les nombres complexes	• sous forme algébrique, comme dans $\mathbb{R}$, en utilisant $\mathrm{i}^2 = -1$ • sous forme exponentielle, en utilisant : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
montrer qu'un nombre complexe est **• réel** **• imaginaire pur**	on utilise l'une des équivalences : • $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \bar{z} = z \iff \arg\,(z) = 0\ \ (\pi)$ ou $z = 0$ • z est imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \bar{z} = -z$ $\iff \arg\,z = \dfrac{\pi}{2}\ \ (\pi)$ ou $z = 0$
trouver un argument d'un nombre complexe non nul	• si z est sous forme algébrique $x + \mathrm{i}y$, on calcule son module $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, alors un argument de z est θ tel que $\begin{cases}\cos\,\theta = \dfrac{x}{r}\\ \sin\,\theta = \dfrac{y}{r}\end{cases}$ • si z est sous forme $r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$, un argument de z est θ

Pour les exercices 1 à 12, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1 Nombre complexe. Représentation

1 Vrai-Faux

1 Soit le nombre complexe $z = 2 - \frac{5}{3}\,\mathrm{i}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La partie imaginaire de z est $-\frac{5}{3}$.

2° Le conjugué de z est $2 + \frac{5}{3}\,\mathrm{i}$.

3° L'image de z est le point $M\left(2\,;-\frac{5}{3}\right)$.

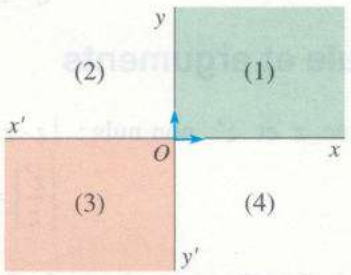
4° Le nombre $Z = 4 + \mathrm{i}\left(2 - \frac{5}{3}\,\mathrm{i}\right)$ est sous forme algébrique.

2 Points, affixes

2 Soit $M(x\,;y)$ un point du plan d'affixe z .

1° $M \in [Ox)$ si, et seulement si, $y = 0$ et $x \geqslant 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}^+$.

Caractériser de la même façon l'appartenance de M à chacune des demi-droites $[Oy)$, $[Ox')$ et $[Oy')$.



2° M appartient au quart de plan ouvert (1) si, et seulement si, $x > 0$ et $y > 0$, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\mathrm{Re}(z) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) > 0 .$$

Caractériser de la même façon l'appartenance de M à chacun des quarts de plan ouverts (2) , (3) et (4) .

3 1° Représenter dans le plan l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(z) = 2$.

2° Même question avec $\mathrm{Im}(z) = -3$.

4 Pour α dans $\mathbb{R}$, on pose :

$z_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ et $z_2 = (1 - 2\cos\alpha) + \mathrm{i}\sin 2\alpha$.

1° Déterminer les réels α pour que z_1 soit réel.

2° Déterminer les réels α pour que z_2 soit imaginaire pur.

2 Calculer avec les nombres complexes

1 Vrai-Faux

5 Sur la figure ci-dessous, le point M a pour affixe z .

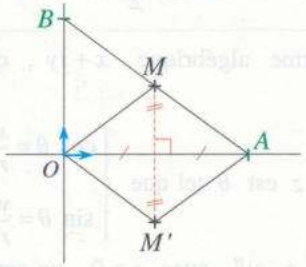
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Le point M' a pour affixe $\bar{z}$.

2° Le point A a pour affixe $z + \bar{z}$.

3° Le point B a pour affixe $\bar{z} - z$.

4° Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $-2\bar{z}$.



6 Les points A , B et C ont pour affixes respectives :

$$z_A = -1 + \mathrm{i} , \quad z_B = -2 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = \frac{1}{2} - 2\mathrm{i} .$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est $1 + 2\mathrm{i}$.

2° L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $-\frac{5}{2} + \mathrm{i}$.

3° L'affixe du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme est $-\frac{1}{2} - 4\mathrm{i}$.

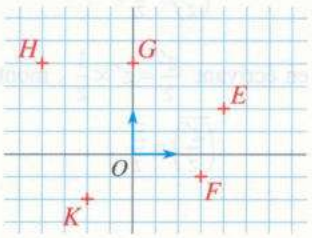
7 Soit $z = 3 + \mathrm{i}$ et $z' = \frac{2}{3} - \mathrm{i}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $z + z'$ est réel. **2°** $z \cdot z' = 3 - \frac{7}{3}\mathrm{i}$. **3°** $\frac{1}{z} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\mathrm{i}$.

2 Calculs sur les affixes

8 **1°** Par lecture graphique, déterminer l'affixe de chacun des points E, F, G, H et K.



2° Calculer l'affixe de chacun des vecteurs :

$\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KH}$.

9 On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(1 ; -3)$, $(4 ; 5)$ et $(-3 ; 2)$.

1° Quelles sont les affixes des points A, B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$?

2° On définit les points D et E par :

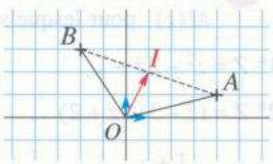
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$.

Déterminer l'affixe de chacun des points D et E.

3° Démontrer que A, D et E sont alignés.

10 **Affixe du milieu d'un segment**

A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B.



1° En écrivant $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, montrer que l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$ est donnée par :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

2° On prend $z_A = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_B = 4 + \mathrm{i}$.

Calculer z_I et faire une figure.

11 On considère les points A, B, C et D d'affixes :

$z_A = 3 + \mathrm{i}$, $z_B = -2\mathrm{i}$, $z_C = 4 - 3\mathrm{i}$ et $z_D = 5$.

Déterminer l'affixe de l'isobarycentre de ces quatre points.

12 On considère le parallélogramme $ABCD$, avec A, B, C et D d'affixes :

$z_A = -1 - 5\mathrm{i}$, $z_B = 4 - 3\mathrm{i}$,

$z_C = 3 + 3\mathrm{i}$ et $z_D = -2 + \mathrm{i}$.

1° a) Déterminer l'affixe du point C', symétrique de C par rapport au point D.

b) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant :

$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

2° Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

3 Calculs sous forme algébrique

Pour les exercices 13 *à* 15, *écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes donnés.*

13 $z_1 = (1 + 3\mathrm{i}) - (2 + \mathrm{i})$; $z_2 = (5 - \mathrm{i})(7 + 4\mathrm{i})$;

$z_3 = \left(\frac{1}{2} - 4\mathrm{i}\right) - (3 - 2\mathrm{i})$; $z_4 = \left(\frac{3}{4}\mathrm{i} - 2\right)(\mathrm{i} + 1)$.

14 $z_1 = (2 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i})$; $z_2 = (2 + 5\mathrm{i})^2$;

$z_3 = \left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right)^2$; $z_4 = (3 - 4\mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})$.

15 ★ $z_1 = \left(\frac{5}{3}\mathrm{i} + 7\right)(1 + 2\mathrm{i})$; $z_2 = (\mathrm{i} + 2)^2 - (3 + 4\mathrm{i})$;

$z_3 = (1 + \mathrm{i})(5 - 8\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$; $z_4 = (-4 + 3\mathrm{i})^3$

$z_5 = (2 + \mathrm{i})^2(7 - 5\mathrm{i})$.

16 Écrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{3} - 2\mathrm{i}$;

$z_3 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = -2 - 7\mathrm{i}$.

17 ★ Écrire sous forme algébrique.

On donne $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 5 - \mathrm{i}$.

a) $z_1 \cdot z_2^2$; **b)** $\frac{z_1}{z_2}$; **c)** $\frac{z_2}{z_1}$; **d)** $\frac{z_1 - 1}{z_2 - 4\mathrm{i}}$.

18 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{8\mathrm{i} - 1}{2 - 3\mathrm{i}}$; $z_2 = 2\mathrm{i} + \frac{5}{\mathrm{i}}$;

$z_3 = \left(\frac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2$; $z_4 = \frac{4 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$.

19 ★ Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2+3\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}} \; ; \qquad z_2 = 11\mathrm{i} - \frac{3}{\mathrm{i}} \; ;$$

$$z_3 = \left(\frac{5-\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}\right)^2 \; ; \qquad z_4 = \frac{1}{2+\mathrm{i}} + \frac{1}{2-\mathrm{i}} \; .$$

20 Calculer $(1+\mathrm{i})^2$.

En déduire que $(1+\mathrm{i})^8$ et $(1+\mathrm{i})^{12}$ sont réels.

21 **1°** Calculer i^2 , i^3 et i^4 .

2° En déduire :

a) i^{2002} et i^{2007} .

b) les entiers naturels n pour lesquels i^n est imaginaire pur.

22 Pour quelles valeurs du réel λ , le nombre complexe :

$$z = (\lambda + \mathrm{i})[\lambda + 5 - \mathrm{i}(\lambda - 7)]$$

est-il un nombre imaginaire pur ?

23 À quelles conditions sur a et b réels le nombre complexe :

$$z = (2a - b - \mathrm{i}(a+b))(-a - \mathrm{i}(a+b))$$

est-il un nombre réel ?

4 Équations, systèmes

Pour les exercices 24 *et* 25, *résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations données :*

24 **a)** $2\mathrm{i}z - 3 = z + \mathrm{i}$; **b)** $3z(z+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}z$;

c) $(3z - \mathrm{i})(z + 2 + 3\mathrm{i}) = 0$; **d)** $3z - 5 + 2\mathrm{i}z = 2\mathrm{i} - 3z - 4\mathrm{i}z$.

25 **a)** $-\mathrm{i}(1+5\mathrm{i})z + (z-1)(\mathrm{i}-2) - 2 = 3z - \mathrm{i}$;

b) $-\dfrac{z}{\mathrm{i}z+1} + \dfrac{3z}{z-\mathrm{i}} = 3 + \mathrm{i}$; **c)** $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}z+3} = 4\mathrm{i}$.

26 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues complexes z_1 et z_2 :

a) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7\mathrm{i} \\ \mathrm{i}z_1 + 2z_2 = 11\mathrm{i} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = \mathrm{i} \\ -2z_1 + 3\mathrm{i}z_2 = -17 \end{cases}$.

5 Avec conjugué

27 **Propriété du cours**

Soit z et z' deux nombres complexes.

1° En écrivant z et z' sous forme algébrique, vérifier que :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \; .$$

2° Si $z \neq 0$, on a $\dfrac{1}{z} \cdot z = 1$.

En prenant les conjugués, montrer que :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \; .$$

3° Pour $z \neq 0$, en écrivant $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$, montrer que :

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \; .$$

28 Écrire sous forme algébrique le nombre complexe conjugué de :

$$z_1 = (4 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i}) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3} \; .$$

29 On pose :

$$z_1 = \frac{5-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \; .$$

Sans calculer z_1 et z_2 , montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Pour les exercices 30 *et* 31, *le plan est muni d'un repère orthonormal direct. On pourra utiliser l'Exercice résolu 1.*

30 Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe réel.

1° $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$.

2° $Z = (\overline{z} - 3)(\mathrm{i}z + 2)$.

3° $Z = \mathrm{i}\,\dfrac{1+z}{1-z}$.

4° $Z = \dfrac{2\mathrm{i}z - 4 + 2\mathrm{i}}{z - 3 + \mathrm{i}}$.

31 Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe imaginaire.

1° $Z = (z - \mathrm{i})(2\mathrm{i}z + 3)$.

2° $Z = (z-1)(\overline{z} - \mathrm{i})$.

3 Équations du second degré ou plus

1 Vrai-Faux

32 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

On donne l'équation $(E) : z^2 + 2z + 26 = 0$.

1° Cette équation possède deux solutions complexes conjuguées.

2° $z^2 + 2z + 26 = (z + 1 - 5\mathrm{i})(z + 1 + 5\mathrm{i})$.

3° (E) et $z^2 + 2z - 24 = 0$ ont une solution commune $-1 + 5\mathrm{i}$.

2 Équations du second degré à coefficients réels

33 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2 - 4z + 53 = 0$; **b)** $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$;

c) $z^2 + 2z + 6 = 0$; **d)** $9z^2 - 6z + 37 = 0$.

34 1° **a)** Déterminer, sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \textbf{(1)} .$$

b) On note j la solution de **(1)** dont la partie imaginaire est positive. Vérifier que $j^2 = -j - 1$.

2° Montrer que $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$ et que $j^3 = 1$.

3° Donner j^n suivant les valeurs de n dans $\mathbb{N}$.

35 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues complexes z_1 et z_2 :

a) $\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = \dfrac{37}{4} \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2z_1 \cdot z_2 = 3 \\ \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$.

3 Équations se ramenant à une équation du second degré

36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z - 3\mathrm{i}}{z + 2}\right)^2 - 6\left(\frac{z - 3\mathrm{i}}{z + 2}\right) + 13 = 0 .$$

37 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128 .$$

1° Calculer $P(8)$.

2° Déterminer a , b et c tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait :

$$P(z) = (z - 8)(az^2 + bz + c) .$$

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

38 1° Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2 .$$

Factoriser $f(z)$ par $z - 2$ et en déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0 .$$

39 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}\, z^3 - 4\sqrt{2}\, z - 16 .$$

1° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b) .$$

2° En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

40 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^4 - 5z^2 - 18 = 0$.

41 ★ **Équation avec coefficients symétriques**

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0 \quad (E) .$$

Vérifier que 0 n'est pas solution.

1° Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} u^2 - 5u + 4 = 0 \\ u = z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$.

On note u_1 et u_2 ses solutions.

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z + \frac{1}{z} = u_1 \quad \text{et} \quad z + \frac{1}{z} = u_2 .$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) .

4 Module et arguments

1 Vrai-Faux

42 Dans le plan complexe, on donne $M(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$ d'affixe z.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Un couple de coordonnées polaires de M est $\left(2\,;-\frac{\pi}{4}\right)$.

2° $|z|=2$.

3° Une forme trigonométrique de z est :

$$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

4° Un argument de z est $\frac{11\pi}{4}$.

43 Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Pour que z et z' soient égaux, il suffit qu'ils aient même module.

2° $z=z' \Leftrightarrow |z|=|z'|$.

3° Si $\mathrm{Re}(z)>2$, alors $|z|>4$.

4° Si un argument de z est $-\frac{\pi}{4}$, alors un argument de $2\overline{z}$ est $\frac{\pi}{2}$.

44 On pose $a=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

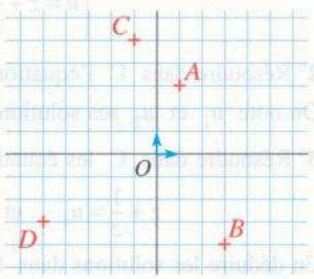
1° $|a|=1$. 2° Un argument de a est $\frac{\pi}{3}$.

3° $\overline{a}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. 4° $a\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=-\mathrm{i}$.

2 Module, arguments

45 Le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est orthonormal direct.

Calculer le module du nombre complexe représenté par chacun des points ci-contre.



Pour les exercices 46 et 47, calculer le module de chacun des nombres complexes donnés.

46 $z_1=\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$; $z_2=(1+\mathrm{i})^2$; $z_3=(-5+3\mathrm{i})^2$; $z_4=(\sqrt{3}+\mathrm{i})(5+\mathrm{i}\sqrt{11})$; $z_5=\frac{5+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$; $z_6=\frac{\mathrm{i}-1}{7+\mathrm{i}}$.

47 ★ $z_1=\frac{5}{(1-2\mathrm{i})^2}$; $z_2=\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$.

48 **Inégalité triangulaire**

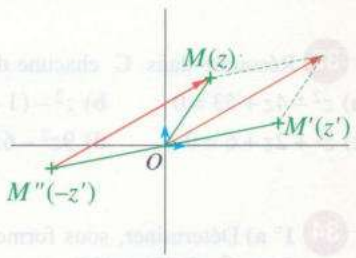
On se propose de démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$.

Dans le plan complexe d'origine O, soit M, M' et M'' d'affixes respectives z, z' et $-z'$.

1° Interpréter géométriquement : $|z|$ et $|z'|$.

2° $z+z'=z-(-z')$.

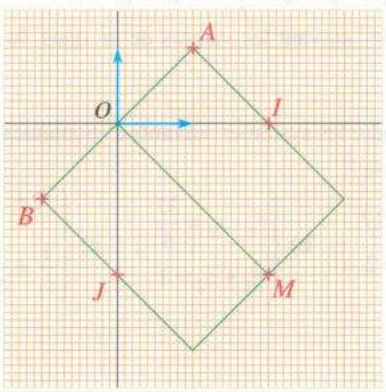
Interpréter $|z+z'|$ comme une distance.



3° Conclure.

49 Le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est orthonormal direct.

Par lecture graphique, déterminer un argument de chacune des affixes des points A, B, I, J et M.



50 Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes donnés.

$z_1=-1+\mathrm{i}$; $z_2=\mathrm{i}$;

$z_3=\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}$; $z_4=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

51 Calculer le module, puis à l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i} + 7$; $z_3 = -4 + \mathrm{i}$.

52 Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés.

$z_1 = (2 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$; $z_2 = \mathrm{i}(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2})$; $z_3 = (-1 - \mathrm{i})^4$;

$z_4 = \dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$; $z_5 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}$; $z_6 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \mathrm{i}}\right)^3$.

53 ★ On considère le nombre complexe :

$z = (\sqrt{3} + 1) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.

1° Écrire z^2 sous forme algébrique.

2° Déterminer le module et un argument de z^2.

À l'aide des propriétés du module et des arguments, donner le module et un argument de z.

3° Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

54 ★★ **Interprétation géométrique du produit**

M est un point du plan complexe d'affixe $z \neq 0$.
Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ.
On pose $z' = a \cdot z$.

1° Déterminer $|z'|$ et $\arg z'$.

2° En déduire par quelle succession de transformations $M'(z')$ est l'image de M .

3 Forme trigonométrique

Dans les exercices 55 *à* 57, *écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.*

55 $z_1 = -1 - \mathrm{i}$; $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;
$z_3 = 5\mathrm{i}$; $z_4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

56 $z_1 = 2(1 + \mathrm{i})$; $z_2 = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$;
$z_3 = \dfrac{-\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6}}{\mathrm{i}}$; $z_4 = \dfrac{5(-1 + \mathrm{i})}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$.

57 ★ $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^2$; $z_2 = (1 + \mathrm{i})^3$;
$z_3 = \cos \dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{3}$; $z_4 = \sin \dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i} \cos \dfrac{\pi}{3}$;
$z_5 = -\cos \theta - \mathrm{i} \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$;
$z_6 = \mathrm{i}(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

4 Notation exponentielle

58 Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, placer les points suivants :

$A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$; $B\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$; $C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)$;
$D\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)$ et $E\left(2\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)\right)$.

Dans les exercices 59 *et* 60, *écrire sous la forme* $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, *avec* r *dans* $]0\,;+\infty[$, *chacun des nombres donnés :*

59 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$; $z_2 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$;
$z_3 = (-1 - \mathrm{i})\,\mathrm{i}$; $z_4 = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

60 ★ $z_1 = (-3 - 3\mathrm{i})^2$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$;
$z_3 = \cos \dfrac{\pi}{5} - \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{5}$; $z_4 = \sin \dfrac{\pi}{8} + \mathrm{i} \cos \dfrac{\pi}{8}$.

61 **1°** Simplifier les écritures suivantes :

a) $\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$; **b)** $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}}$; **c)** $\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^2}$.

2° Soit x un nombre réel.

a) Exprimer en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + x)}$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - x)}$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

b) Retrouver alors les lignes trigonométriques des angles associés à x .

62 **1°** Pour tous réels θ et θ' , on a :

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ **(1)**.

a) En utilisant les écritures trigonométriques de chacun des nombres de la relation **(1)** et en développant, retrouver les formules d'addition, donnant :

$\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$.

b) En déduire les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.

2° À partir d'une relation analogue à **(1)**, retrouver les formules, donnant $\cos(\theta - \theta')$ et $\sin(\theta - \theta')$.

5 Nombres complexes et géométrie

Pour les exercice 63 à 104, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1 Vrai-Faux

63 Soit A , B et C d'affixes respectives :

$$-1-\frac{5}{2}\,\mathrm{i}\;;\quad 2-\frac{3}{2}\,\mathrm{i}\quad\text{et}\quad -1+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}\;.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

2° ABC est isocèle.

3° B est l'image de A par une rotation.

4° Le point D tel que CAD soit équilatéral direct a pour affixe :

$$-1+\frac{5\sqrt{3}}{2}\;.$$

64 Au point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$, avec :

$$z'=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\sqrt{3}+\mathrm{i}\;.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Au point $\Omega(2\mathrm{i})$ est associé le point Ω' . On a $\Omega=\Omega'$

2° $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une homothétie.

3° $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une rotation.

4° $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

2 Ensembles de points

65 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z , telle que $|z|=z$.

66 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z , telle que $|z|=z+\bar{z}$.

67 **1°** Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$; **b)** $|z+\mathrm{i}|=4$.

2° Donner, dans chaque cas, une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

68 **1°** Déterminer, puis tracer, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z-2|=|z+\mathrm{i}|$; **b)** $|\mathrm{i}z+3|=|z+4+\mathrm{i}|$;

c) $\left|\bar{z}+\dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}\right|=3$; **d)** $|1+\mathrm{i}z|=2$.

2° Le point $P\left(-\dfrac{8}{3}+\dfrac{5}{3}\,\mathrm{i}\right)$ appartient-il à l'un des ensembles trouvés ci-dessus ?

69 Déterminer les nombres complexes z , tels que les points M , M' et M'' d'affixes respectives z , $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient sur un même cercle de centre O .

70 ★ Déterminer géométriquement, puis représenter, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z-1|\leqslant 3$; **b)** $|z-1|<|z+1-2\mathrm{i}|$.

71 À tout point M d'affixe z distincte de i , on associe le point M' d'affixe :

$$z'=\frac{z+2}{\mathrm{i}z+1}\;.$$

On note A le point d'affixe -2 et B celui d'affixe i .

1° Interpréter géométriquement le module de z' .

2° a) Déterminer géométriquement l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M , tels que $|z'|=1$.

b) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{E}$.

72 Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $\arg z=\dfrac{\pi}{6}\ \ (2\pi)$; **b)** $\arg\dfrac{1}{z}=\dfrac{2\pi}{3}\ \ (2\pi)$;

c) $\arg(\bar{z})=\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$. **d)** $\arg(-z)=\dfrac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

73 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z , tels que :

a) $\arg(z-2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$;

b) $\arg(z^2-4)=\arg(z+2)\ \ (2\pi)$;

c) $\arg\left(\dfrac{1}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$; **d)** $\arg(\bar{z}+\mathrm{i})=\dfrac{2\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

74 Pour tout nombre complexe z, on considère les points M d'affixe z, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3.

1° Déterminer les nombres complexes z pour lesquels les points M, P et Q sont deux à deux distincts.

2° Sous cette condition, montrer que l'angle $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$ a pour mesure un argument de $z+1$.

3° Déterminer et tracer l'ensemble des points M, tels que le triangle MPQ soit rectangle en M.

75 On considère l'application qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe $Z=z^2$.

1° On suppose $z\neq 0$.

Déterminer le module R et un argument θ de Z connaissant le module r et un argument α de z.

2° Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_R$ décrit par le point M lorsque m décrit le demi-cercle $\mathscr{C}_r$ de centre O et de rayon r, contenu dans le demi-plan d'équation $x\geqslant 0$?

Représenter sur une même figure les ensembles $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_R$, pour :

$$r=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad r=2 .$$

76 Soit K le point d'affixe $2\mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\mathrm{i}z$.

On cherche l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que M, K et M' sont alignés.

1° Méthode analytique

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KM'}$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché en traduisant analytiquement la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KM'}$.

2° Méthode utilisant les nombres complexes

Soit J le point d'affixe 2.

a) Vérifier que si $M=J$ ou si $M=K$, alors les points M, K et M' sont alignés.

b) On suppose $M\neq J$ et $M\neq K$. Vérifier que :

$$\arg\left(\frac{\mathrm{i}z-2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right)=\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z-2}{z-2\mathrm{i}}\right) \quad (2\pi) .$$

En déduire que M, K et M' sont alignés si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{JM})=\frac{\pi}{2} \quad (\pi) .$$

c) Retrouver l'ensemble $\mathscr{E}$.

77 ★ On considère l'application f du plan qui à tout point M, d'affixe z distincte de $2\mathrm{i}$, associe le point d'affixe $z'=\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$.

1° Pour $z\neq 2\mathrm{i}$, on pose $z=2\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Écrire $z'-1$ à l'aide de r et θ.

2° A est le point d'affixe $2\mathrm{i}$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M pour lesquels :

$$|z'-1|=3 .$$

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M pour lesquels :

$$\arg(z'-1)=\frac{\pi}{4} \quad (2\pi) .$$

c) Représenter les ensembles $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.

78 ★ On désigne par A, B et M les points d'affixes :

$$z_A=-2 , \quad z_B=-1+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z .$$

Pour $z\neq -2$, on pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}z+\mathrm{i}+1}{z+2}$.

1° Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

2° Déterminer et tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M, tels que $|Z|=1$.

3° Déterminer et tracer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M, tels que Z ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

3 Reconnaissance d'applications

79 Dans chaque cas, déterminer :

– la transformation (translation ou homothétie) par laquelle $M'(z')$ est l'image de $M(z)$;

– l'affixe de A' image de $A\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}-1\right)$ par cette transformation.

1° $z'+2\mathrm{i}=4(z+2\mathrm{i})$. **2°** $z'=z-3+\mathrm{i}$.

3° $z'=3z-2+4\mathrm{i}$. **4°** $z'=5\mathrm{i}+z$.

80 Dans chaque cas, déterminer par quelle rotation $M'(z')$ est l'image de $M(z)$.

1° $z'-\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-\mathrm{i})$. **2°** $z'=\mathrm{i}z-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

3° $z'+\dfrac{3}{2}+2\mathrm{i}=\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}+2\mathrm{i}\right)$.

81 Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que :

$$z' = z + 2 - 4\mathrm{i} .$$

1° Quelle est la nature de l'application f ?

2° Déterminer l'affixe de l'antécédent P de $Q(5 + 2\mathrm{i})$.

3° On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne :

$$2x - 3y + 1 = 0$$

et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.

Déterminer l'image $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{D}$ et celle $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par f.

Tracer ces ensembles.

82 Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que :

$$z' + 3 - 4\mathrm{i} = 2(z + 3 - 4\mathrm{i}) .$$

1° Quelle est la nature de l'application f ?

2° On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(-2 + \mathrm{i})$ et de rayon 1.

Déterminer l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par f.

83 Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que :

$$z' = 3z + 3 - \mathrm{i} .$$

1° Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on déterminera l'affixe ω.

2° Vérifier que $z' - \omega = 3(z - \omega)$.

En déduire la nature de f.

84 On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $z_C = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_D = 2(1 + \mathrm{i})$.

1° Vérifier que $OA = OB$ et déterminer l'angle de la rotation R de centre O qui transforme A en B.

2° Déterminer les affixes des images C' et D' des points C et D par R.

85 Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que :

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})z .$$

1° Montrer que f est une rotation de centre O, dont on précisera l'angle.

2° Déterminer l'image de l'axe des abscisses par f.

86 ★ Soit g l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que :

$$z' = -\mathrm{i}z + 4\mathrm{i} .$$

1° Montrer que g admet un unique point invariant Ω d'affixe ω.

2° a) Exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

b) Reconnaître l'application g.

3° Déterminer les points dont l'image par g est sur l'axe (Ox).

87 ★ A et B sont deux points fixes distincts du plan, d'affixes respectives z_A et z_B, et a et b deux réels donnés.

1° a) M étant un point quelconque du plan d'affixe z, à quelle condition sur a et b le barycentre M' des points pondérés (A, a), (B, b) et $(M, 1)$ est-il défini ?

b) Dans la suite de l'exercice, on suppose cette condition vérifiée.

Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de z, a, b, z_A et z_B.

2° On suppose $a + b = 0$.

Par quelle application M' est-il l'image de M ?

3° On suppose $a + b \neq 0$.

a) Montrer que M et M' sont confondus si, et seulement si, M est le barycentre de (A, a) et (B, b).

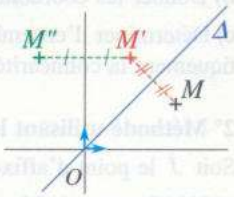
On note G celui-ci et z_G son affixe.

b) Exprimer $z' - z_G$ en fonction de $z - z_G$.

En déduire que M' est l'image de M par une application que l'on déterminera.

88 ★ Soit M d'affixe $a + \mathrm{i}b$, a et b réels.

On note M' le symétrique de M par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ et M'' le symétrique de M' par rapport à l'axe des ordonnées.



1° a) Déterminer l'affixe z' de M' et celle z'' de M'' en fonction de a et b.

b) En déduire que M'' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2° Par des considérations géométriques, retrouver que M'' est l'image de M par R.

On pourra comparer $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''})$ à $(\vec{w}, \vec{v})$, où $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

4 Composition de transformations

89 On donne les points $A(2\,;0)$ et $B(0\,;3)$ et on considère les rotations R_A de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R_B de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Pour un point M quelconque d'affixe z, on pose :

$$M' = R_A(M) \quad \text{et} \quad M'' = R_B(M') .$$

1° a) Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de z.

b) Exprimer l'affixe z'' de M'' en fonction de z'.

2° En déduire l'affixe z'' de M'' en fonction de z.

Par quelle application f, M'' est-il l'image de M ?

3° M_1 et M_2 étant deux points du plan, quelle est la nature du quadrilatère $M_1M_1''M_2''M_2$, où M_1'' et M_2'' sont les images respectives par f des points M_1 et M_2 ?

90 ★ Soit s l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que $z' = -z + 4$.

1° a) Déterminer M' pour M d'affixe $3 + \mathrm{i}$, puis d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$.

b) Montrer que s admet un unique point invariant A.

c) Montrer que s est la symétrie centrale de centre A.

2° Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose $M'' = R \circ s(M) = R(s(M))$.

a) Construire M'' pour chacun des points M de **1° a)**.

b) Montrer que M'' est l'image de M par une rotation à préciser.

91 ★★ On donne les points :

$$A(1\,;0) , \quad B(2\,;-1) \quad \text{et} \quad C(2\,;3)$$

et on considère les homothéties :

h de centre A et de rapport 2,

h' de centre B et de rapport -3,

h'' de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

Pour M un point quelconque d'affixe z, on pose :

$$M_1 = h' \circ h(M) \quad \text{et} \quad M_2 = h'' \circ h(M) .$$

1° a) Exprimer l'affixe z_1 de M_1 en fonction de z.

b) Justifier que M_1 est l'image de M par une homothétie.

Quel est son centre Ω et son rapport k ?

Vérifier que A, B et Ω sont alignés.

2° Exprimer l'affixe z_2 de M_2 en fonction de z.

Par quelle application M_2 est-il l'image de M ?

5 Études de configurations

92 **1°** Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{3}{2}\mathrm{i} , \quad z_B = 2 + \frac{1}{2}\mathrm{i} ,$$

$$z_C = 1 - \frac{3}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -1 - \frac{1}{2}\mathrm{i} .$$

2° Déterminer, en justifiant, la nature du quadrilatère $ABCD$.

93 **1°** On donne les points B et C d'affixes respectives :

$$z_B = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} .$$

Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2° On considère le point A d'affixe :

$$z_A = \frac{z_C - z_B}{2} .$$

Calculer z_A, puis :

$$|z_B - z_A| , \quad |z_C - z_A| \quad \text{et} \quad |z_B - z_C| .$$

3° Déterminer la nature du triangle ABC ;

– en utilisant les résultats de la question **2°** ;

– géométriquement.

94 Dans le plan complexe d'origine O, soit :

$$M_1(z_1) , \quad M_2(z_2) \quad \text{et} \quad I(1) .$$

Montrer que le produit $z_1 \cdot z_2$ est représenté par le point P, tel que les triangles OM_2P et OIM_1 soient semblables.

Rappels

Deux triangles ABC et MNP sont **semblables** ou **de même forme** si, et seulement si :

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} .$$

95 À tout point M d'affixe z, on fait correspondre par l'application f le point M' d'affixe $z' = z - 4\mathrm{i}$.

1° Reconnaître et caractériser f.

2° A est le point d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B' celui d'affixe $-2 - \mathrm{i}$.

Placer A et B' sur une figure.

Déterminer les affixes des points A' et B, tels que :

$$A' = f(A) \quad \text{et} \quad B' = f(B) .$$

3° J est le milieu de $[AB']$.

Montrer que les points A', J et B sont alignés.

96 1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 4z + 16 = 0 .$$

On pose z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.

2° Soit A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Faire une figure que l'on complétera au fil de l'exercice.

b) Calculer l'affixe z_3 du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral direct.
(On pourra utiliser une rotation.)

c) Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

3° f est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z - \mathrm{i}$.

a) Reconnaître et caractériser f.

b) Calculer l'affixe du point D, tel que $f(A) = D$ et celle du point E, tel que $f(E) = C$.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ADCE$?
Calculer son aire.

97 Soit A, B et C d'affixes respectives :

$$1 + \mathrm{i} , \quad 5 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad -1 + 5\mathrm{i}$$

et P l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$.

On désigne par B' le milieu de $[AC]$.

On se propose de montrer que (AP) coupe $[BB']$ en son milieu.

1° Méthode géométrique

a) Soit A_1 le symétrique de A par rapport à B.
Que représente P pour le triangle AA_1C ?

b) La droite (AP) coupe (CA_1) en A_2.
Préciser la position de A_2 sur $[CA_1]$ et déterminer la nature du quadrilatère $AB'A_2B$.
Conclure.

2° Méthode utilisant des barycentres

a) Exprimer P comme barycentre des points B et C.

b) En utilisant le barycentre G des points $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$, montrer qu'on obtient le résultat.

3° Méthode utilisant les nombres complexes

a) Déterminer l'affixe de B', puis celle du milieu J de $[BB']$.

b) Déterminer l'affixe du point P.
Montrer que A, J et P sont alignés.

98 ABC est un triangle isocèle en A.

Soit D le symétrique de B par rapport à A et E celui de C par rapport à B.

On désigne par G le centre de gravité du triangle AEC et par F l'image de G par l'homothétie de centre C et de rapport 6.

On se propose de montrer que le triangle FDC est rectangle

1° Méthode géométrique

a) Montrer que F est l'image de C par une homothétie h de centre G et de rapport k que l'on précisera.

b) Justifier que $h(B) = D$.

c) En déduire la position relative des droites (BC) et (FD).

d) Montrer que (BC) et (CD) sont perpendiculaires.

e) Conclure.

2° Méthode utilisant les nombres complexes

On fait l'hypothèse que A, B et C ont pour affixes respectives :

$$z_A = 4\mathrm{i} , \quad z_B = -2 \quad \text{et} \quad z_C = 2 .$$

a) Vérifier que ABC est bien isocèle en A.

b) Déterminer l'affixe z_D du point D et celle z_G du point G.

c) Déterminer l'affixe z_F du point F.

d) Calculer le rapport $\dfrac{z_F - z_D}{z_C - z_D}$, et en déduire que FDC est rectangle.

99 On considère l'application R du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} z .$$

1° Reconnaître et caractériser R.

2° A est le point d'affixe 2.
Quelle est l'affixe du point A', image de A par R ?

3° Placer les points A et A' sur une figure ainsi que le milieu I du segment $[AA']$.

4° En utilisant la nature du triangle OAA', déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

5° Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.

6° Déduire des résultats précédents, les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{8} .$$

100 1° Déterminer les points d'affixe z, telle que :

$$z^2 = 2\mathrm{i}\,\bar{z}\ .$$

2° L'un des points est O et on note A, B, C les autres.

Placer ces points.

Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

101 Soit $OABC$ un parallélogramme et α un réel donné.

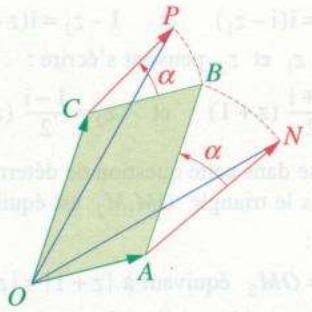
On note z_A, z_B et z_C les affixes respectives des points A, B et C.

1° Justifier que $z_B = z_A + z_C$.

2° On désigne par R_A et R_C les rotations de centres respectifs A et C et d'angle α.

Soit N et P les points, tels que :

$$R_A(N) = B \quad \text{et} \quad R_C(B) = P\ .$$



a) En notant z_N et z_P les affixes de N et de P, traduire ces hypothèses à l'aide de relations entre nombres complexes.

b) En déduire que P est l'image de N par la rotation de centre O et d'angle α.

c) Quelle est la nature du triangle ONP ?

102 On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$8\ ,\quad -4+4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad -4\mathrm{i}\ .$$

1° Faire une figure.

2° Montrer que ABC est rectangle isocèle.

(On pourra utiliser une rotation.)

3° Soit g la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

g transforme A en A', B en B' et C en C'.

a) Construire A', B' et C'.

b) On note a', b' et c' les affixes respectives de A', B' et C'.

Établir que $b' = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$.

Calculer a' et c'.

4° Déterminer les affixes p, q et r des points P, Q et R milieux respectifs des segments :

$$[A'B]\ ,\ [B'C] \quad \text{et} \quad [C'A]\ .$$

Démontrer que :

$$r - p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(q-p)\ .$$

En déduire la nature du triangle PQR.

(D'après BAC)

103 ★ On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1° Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

2° Soit A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.

Démontrer que ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.

3° Soit I, M et M' d'affixes i, z et iz.

Déterminer les nombres complexes z tels que IMM' soit équilatéral direct.

104 On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout réel θ de $[0\ ;\ 2\pi[$, le point M d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

On désigne par P le point d'affixe $1+z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1° À partir du point M, donner :

- une construction géométrique du point P
- et une construction géométrique du point Q.

Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2° Déterminer l'ensemble des points P, pour θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.

Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3° Soit S le point d'affixe $1+z+z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M.

Construire S, en justifiant la construction.

4° a) Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS).

Faire une conjecture sur les points O, S et M.

b) Démontrer que le nombre :

$$\frac{1+z+z^2}{z}$$

est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.

Conclure.

(D'après BAC)

6 Problèmes

Pour les problèmes 105 *à* 113, *le plan est muni d'un repère orthonormal direct* $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

105 Soit A le point d'affixe 4 .

On note d la droite d'équation $x=4$, privée du point A .

À tout point M , différent de A , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' , vérifiant :

$$z'=\frac{z-4}{4-\bar{z}} .$$

1° a) Soit B le point d'affixe $1+3\mathrm{i}$.

Calculer l'affixe du point B' associé au point B .

Placer les points B et B' sur une figure. (Unité graphique : 2 cm.)

b) Soit x un nombre réel différent de 4.

On note R le point d'affixe x .

Calculer l'affixe du point R' associé au point R .

Placer R' sur la figure.

c) Soit y un nombre réel non nul.

On note S le point de d d'affixe $4+\mathrm{i}y$.

Calculer l'affixe du point S' associé au point S .

Placer S' sur la figure.

d) Démontrer que :

$z'=1$ si, et seulement si, $M\in d$.

2° Soit M un point n'appartenant pas à d .

On se propose de déterminer une méthode de construction du point M' connaissant le point M .

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z\neq 4$:

$$|z'|=1 .$$

b) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z\neq 4$:

$\dfrac{z'-1}{z-4}$ appartient à $\mathbb{R}$.

Montrer que la droite $(S'M')$ est bien définie et parallèle à la droite (AM) .

c) Déduire, des questions **2° a)** et **2° b)**, une construction géométrique du point M' connaissant le point M .

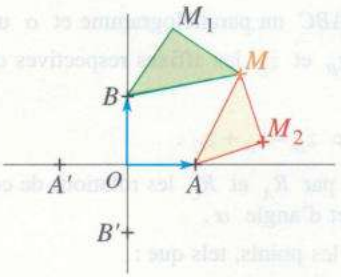
Appliquer cette méthode à la construction du point C' associé au point C d'affixe $2+\mathrm{i}$.

(D'après BAC)

106 ★ A , A' , B et B' sont les points d'affixes respectives 1 , -1 , i et $-\mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe z , distinct des points O , A , A' , B et B' , on associe les points M_1 et M_2 , d'affixes respectives z_1 et z_2 , tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec :

$$(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M})=(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A})=\frac{\pi}{2}\ (2\pi) .$$



1° a) Montrer que :

$$z-z_1=\mathrm{i}(\mathrm{i}-z_1) \quad \text{et} \quad 1-z_2=\mathrm{i}(z-z_2) .$$

b) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(z+1) \quad \text{et} \quad z_2=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(z+\mathrm{i}) .$$

2° On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a) Montrer que :

$$OM_1=OM_2 \text{ équivaut à } |z+1|=|z+\mathrm{i}| .$$

En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1=OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure.

b) Montrer que :

$$OM_1=M_1M_2 \text{ équivaut à } |z+1|^2=2|z|^2 .$$

En déduire analytiquement l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels :

$$OM_1=M_1M_2 .$$

Tracer (Γ) sur la figure.

c) Déduire de l'étude précédente qu'il existe deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et placer ces points sur la figure.

(D'après BAC)

107 Nombres complexes et suites

1° Pour tout entier naturel n , on pose M_n le point d'affixe :

$$u_n=\left(\frac{3}{5}\right)^n(-1+\mathrm{i}) .$$

a) Calculer la distance OM_n .

En déduire la limite de OM_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les arguments du nombre complexe u_n .

En déduire que les points M_n appartiennent à une même demi-droite, dont on précisera une équation.

c) Placer, sur une figure, les points M_0, M_1, M_2 et M_3. (Unité graphique : 10 cm.)

2° Pour tout entier naturel n, on désigne par P_n le point d'affixe $v_n = u_n - i$.

a) Par quelle application P_n est-il l'image de M_n ?

b) En déduire l'alignement des points P_n.
Donner une équation de la droite qui les contient.

108 ★ **Nombres complexes et suites**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n$$

et on note A_n le point d'affixe z_n.

1° a) Calculer sous forme algébrique les nombres z_1 à z_6.

b) Dans un repère d'unité 8 cm, placer les points A_0 jusqu'à A_6.

2° Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1}) .$$

b) En déduire une relation entre d_n et d_{n-1}, pour $n \geqslant 1$, puis d_n en fonction de n et d_0.

c) Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n.

d) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} A_k A_{k+1}$, la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs A_0, A_1, ..., A_{n+1}.

Déterminer L_n en fonction de n et la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

3° Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \arg z_n \ (2\pi)$.

a) Établir une relation entre a_n et a_{n-1} pour $n \geqslant 1$.

b) En déduire a_n en fonction de n.

c) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

109 ★ On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et 2.

θ étant un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$, on note M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$.

1° Justifier que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

2° Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ.

En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

3° Soit M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ.

On note z' son affixe.

Montrer que $z' = \bar{z}$, puis que M' appartient à $\mathscr{C}$.

4° Dans la suite, on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par R.

a) Définir l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par R.

Placer sur une figure A, B, $\mathscr{C}$, M, $\mathscr{C}'$, puis le point M' image de M par R.

b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c) Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en O et en M'.

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A.

Montrer que M' est le milieu de $[A'P]$.

(D'après BAC)

110 ★ Soit les points A, I et B d'affixes respectives 1, 2 et 3.

On note $\mathscr{P}'$ le plan privé de I.

À tout point M de $\mathscr{P}'$ d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2 .$$

1° Déterminer les points M de $\mathscr{P}'$ pour lesquels M et M' sont confondus.

2° Calculer, en fonction de z, les affixes des vecteurs :

$$\overrightarrow{IM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IM'} .$$

En déduire une relation entre IM' et IM, puis une relation entre les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{IM})$.

Placer le point M_0 d'affixe $z_0 = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis le point M'_0 en utilisant ce qui précède.

3° On suppose que M est un point de $\mathscr{P}'$ différent de A et de B.

Calculer $z' - 1$ et $z' - 3$ en fonction de z.

Vérifier que :

$$\frac{1-z'}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z} .$$

En déduire une relation entre $\frac{M'A}{M'B}$ et $\frac{MA}{MB}$, puis une relation entre les angles :

$$(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) .$$

Démontrer que, si M appartient à la médiatrice de $[AB]$, il en est de même pour M'.

(D'après BAC)

111 ★★ On note $\mathscr{P}'$ le plan privé de O et f l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}'$ d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} .$$

1° Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2° a) Montrer que $OM \times OM' = 1$.

b) Établir une relation entre $\arg z$ et $\arg z'$.
En déduire que les points O, M et M' sont alignés, avec M et M' du même côté de O.

c) Construire le point M' connaissant M lorsque $OM = 2$, puis lorsque $OM = \frac{1}{3}$. (Unité graphique : 1,5 cm.)

3° a) Montrer que si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $r > 0$, alors M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ que l'on déterminera.

b) Montrer que tout point de $\mathscr{C}'$ est l'image d'un point de $\mathscr{C}$.

c) En déduire l'image de $\mathscr{C}$ par f.
Vérifier que cette image est aussi l'image de $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O, dont on précisera le rapport.

4° a) Soit z un nombre complexe non nul.
Montrer que si $|z - 1| = 1$, alors :

$$|z' - 1| = |z'| , \quad \text{avec} \quad z' = \frac{1}{\bar{z}} .$$

En déduire que si M est un point autre que O du cercle Γ de centre $A(1)$ et de rayon 1, alors son image M' par f appartient à une droite Δ que l'on déterminera.

b) Montrer que tout point de Δ est l'image par f d'un point de $\Gamma - \{O\}$.

c) En déduire l'image de $\Gamma - \{O\}$ par f.
Tracer Γ et Δ.

112 ★ **Une équation à coefficients complexes**

1° On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})\, z^2 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\, z - \mathrm{i} = 0 .$$

a) Déterminer le réel y tel que $\mathrm{i}y$ soit solution de (E) .

b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z :

$$z^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})z^2 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z - \mathrm{i} = (z - \mathrm{i})(z^2 + az + b) .$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}\, z + 1 = 0$.

d) En déduire les solutions de (E) .

2° On considère le point A d'affixe $z_A = \mathrm{i}$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}$ et le point C symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.
Placer ces points sur un graphique.
Déterminer le module et un argument du quotient :

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} .$$

En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

(D'après BAC)

113 ★ Soit ABC un triangle, tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure α appartenant à $]0 ; \pi[$.

On construit, extérieurement au triangle, les carrés $ACRS$ et $BAMN$; on a donc :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \text{ et } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) .$$

Puis construire le parallélogramme $MASD$ dont on note I le centre.

Faire une figure.

Le but est de montrer que la droite (AD) est une hauteur du triangle ABC et que $AD = BC$.

1° Méthode géométrique

On considère la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Quelles sont les images des points M et C par R ?

b) On note S' l'image de S par R.
Montrer que A est le milieu de $[CS']$.

c) On note I' l'image de I par R.
Montrer que I' est le milieu de $[BS']$.

d) En déduire que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que $AD = BC$.

2° Méthode utilisant les nombres complexes

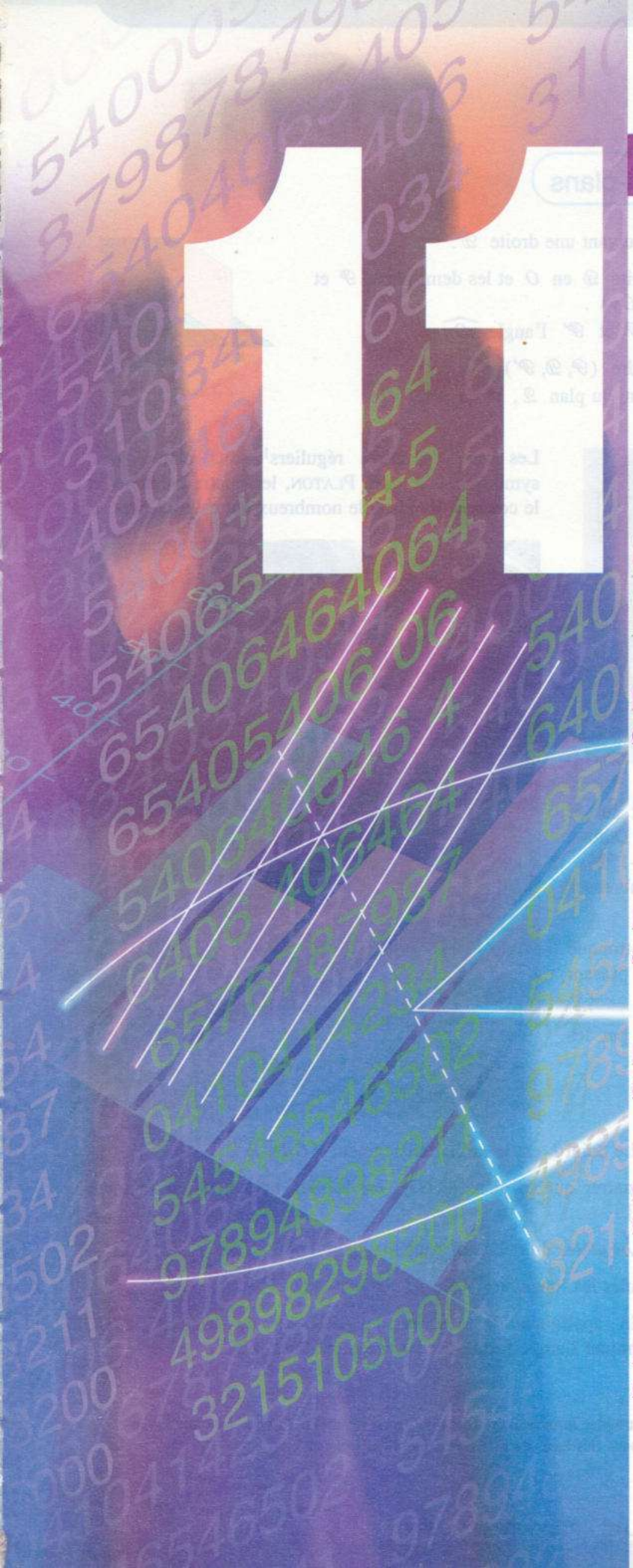
On désigne par a, b et c les affixes de A, B et C.

a) Calculer les affixes de S et M en fonction de a, b et c.

b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{BC}$

c) Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que $AD = BC$.

(D'après BAC)



CHAPITRE

11

Orthogonalité – Produit scalaire

Produit scalaire dans le plan p. 294

- calculer le produit scalaire de deux vecteurs
- démontrer vectoriellement une orthogonalité

Distance d'un point à une droite dans le plan p. 295

- calculer les distances

Produit scalaire dans l'espace p. 296

- calculer un produit scalaire

Orthogonalité dans l'espace p. 297

- démontrer que deux droites, une droite et un plan sont orthogonaux

Équation cartésienne d'un plan p. 298

- déterminer un vecteur normal à un plan et une équation cartésienne d'un plan

activités

1 Angle de deux demi-plans

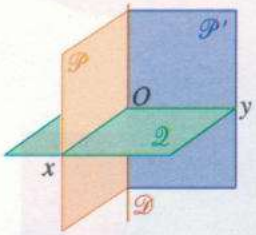
Deux demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$.

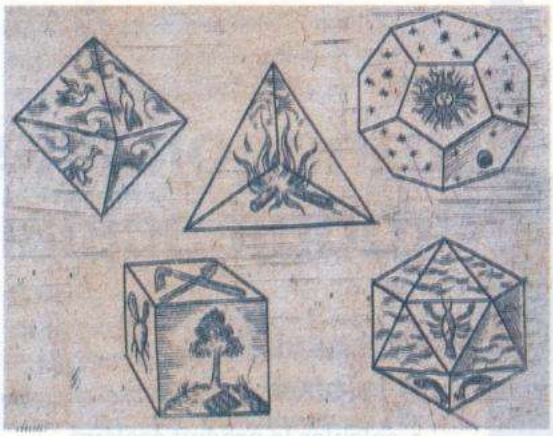
Un plan $\mathscr{Q}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ coupe la droite $\mathscr{D}$ en O et les demi-plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ suivant deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

On appelle **angle des deux demi-plans** $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ l'angle $\widehat{xOy}$.

On dit aussi que $\widehat{xOy}$ est l'angle du dièdre $(\mathscr{P}, \mathscr{D}, \mathscr{P}')$.

On peut vérifier que cet angle ne dépend ni du plan $\mathscr{Q}$, ni du point O.



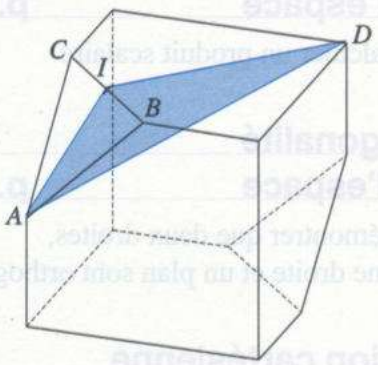


© Jean Vignes

On s'intéresse au polyèdre qui apparaît sur le célèbre tableau *Melancholia* d'Albrecht Dürer, peintre allemand de la Renaissance (1471-1528). Le polyèdre dessiné est l'objet de nombreuses controverses[2].

On suppose que c'est un cube que l'on a tronqué sur deux sommets opposés par des plans passant par les milieux des arêtes.

L'objectif est de calculer l'angle formé par les faces ABC et DCB.



Les cinq polyèdres réguliers[1], dits platoniciens, symbolisent, d'après Platon, les quatre éléments et le cosmos. Il existe de nombreux autres polyèdres.



© Collection Viollet

1 Le point I est le milieu du segment $[CB]$.

Démontrer que le plan (AID) est le plan médiateur du segment $[CB]$.

2 Les arêtes du cube ont pour longueur 1.

Calculer les longueurs AB, AI, ID et AD.

3 En appliquant le théorème d'Al-Kashi au triangle AID, déterminer l'angle formé par les faces ABC et CBD.

[1] Ce sont des polyèdres convexes dont les faces sont toutes formées d'un même polygone régulier et inscrits dans une sphère.
[2] Certains pensent qu'il s'agit d'un rhomboèdre tronqué (les faces du rhomboèdre sont des losanges).

2 Projections orthogonales dans l'espace

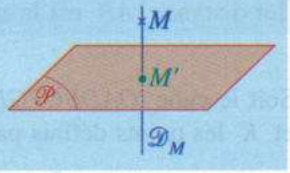
Rappels

• Projection orthogonale sur un plan

Par tout point M de l'espace, il passe une, et une seule, droite $\mathscr{D}_M$ orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

La droite $\mathscr{D}_M$ coupe le plan $\mathscr{P}$ en M' :

M' est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.

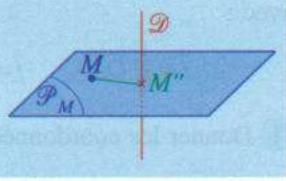


• Projection orthogonale sur une droite

Par tout point M de l'espace, il passe un, et un seul, plan $\mathscr{P}_M$ orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

Le plan $\mathscr{P}_M$ coupe la droite $\mathscr{D}$ en M'' :

M'' est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathscr{D}$.



Applications

1 Soit un plan $\mathscr{P}$ et une droite $\mathscr{D}$ incluse dans $\mathscr{P}$.

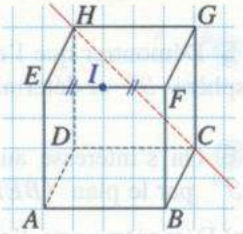
Pour tout point M de l'espace n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$, on considère le projeté orthogonal M' de M sur $\mathscr{P}$, et le projeté orthogonal M'' de M' sur $\mathscr{D}$. Faire une figure.

Démontrer que M'' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

Cette propriété est parfois appelée **théorème des trois perpendiculaires.**

2 Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[EF]$.

Construire les projetés orthogonaux respectifs des points A et I sur la droite (HC).

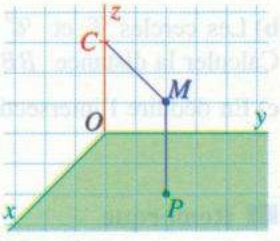


3 Les droites (Ox), (Oy) et (Oz) sont deux à deux orthogonales.

P est le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) et C est le projeté orthogonal de M sur la droite (Oz).

Construire les points A et B, projetés orthogonaux respectifs de M sur (Ox) et (Oy).

Construire les points Q et R, projetés orthogonaux respectifs de M sur les plans (yOz) et (zOx).



Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs directeurs unitaires des droites (Ox), (Oy) et (Oz), en déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\ .$$

3 Calculs utilisant les coordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Le vecteur $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ a pour **norme** $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

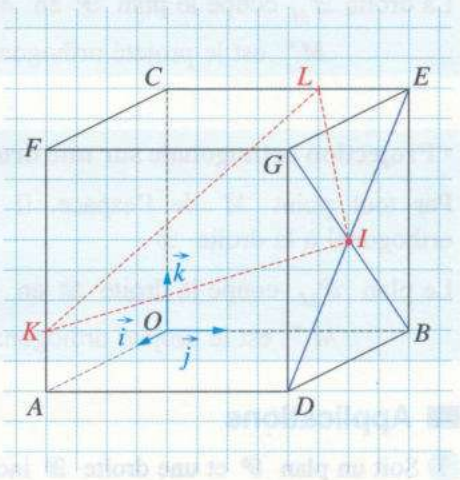
La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$.

Soit le cube $OADBCFGE$, I le centre du carré $DBEG$, L et K les points définis par :

$$\overrightarrow{CL}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AF}.$$

On considère le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, avec :

$$\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}, \quad \vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}.$$



1 Donner les coordonnées des points A, E, I, K et L.

2 Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AE}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{e}$, colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ et de même sens.

3 Démontrer que le triangle KIL est rectangle.

4 **a)** Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2\,;2\,;2)$ qui passe par O.

b) Vérifier que le cube $OADBCFGE$ est inscrit dans la sphère $\mathcal{S}$.

c) Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z=0$.

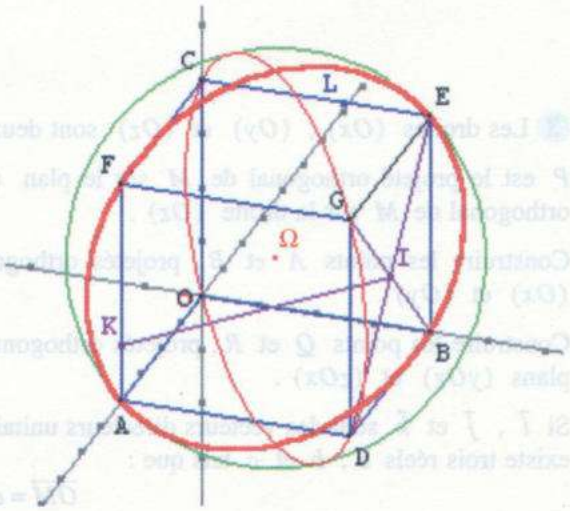
5 Démontrer que l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-8y-8z+16=0$ est une sphère $\mathcal{S}'$ et déterminer son centre et son rayon.

6 On s'intéresse aux sections des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ par le plan (BEF).

a) Démontrer que l'on obtient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon. En faire une représentation dans le plan (BEF).

b) Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en B et B'. Calculer la distance BB'.

c) En déduire l'intersection des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.



Remarque

On pourra contrôler les réponses en construisant la figure à l'aide d'un logiciel (par exemple, GEOSPACW), puis en demandant une visualisation dans des plans convenablement choisis.

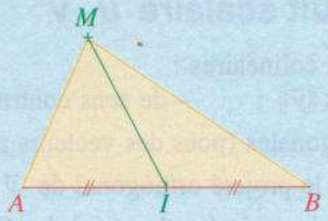
4 Relations métriques dans le triangle

Rappels

• Théorème de la médiane

Soit $[AB]$ un segment de milieu I.
Pour tout point M du plan, on a les relations suivantes :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

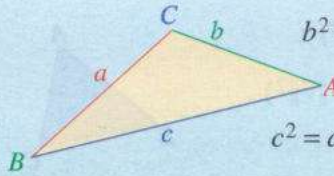


$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IB^2$$

• Relations d'Al-Kashi dans le triangle *ABC*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Applications

1 Dans le plan $\mathscr{P}$, soit ABC un triangle de côtés $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$.

a) Calculer la longueur de la médiane issue de A.

b) Déterminer, à un degré près, la mesure des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan vérifiant $MA^2 - MB^2 = 15$.
Vérifier que le point C appartient à $\mathscr{F}$.

2 Le segment $[AB]$ a pour longueur 6.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan vérifiant chacune des égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$; **b)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$; **c)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10$; **d)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$.

3 Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère le triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 3$.
Soit I le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M, tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, est le cercle de diamètre $[CI]$.

b) Démontrer que pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 82 + 4\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CI}$.

c) En déduire que, l'ensemble des points M du plan, qui vérifient $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = -18$, est la tangente à $\mathscr{C}$ en I.

Un peu d'histoire

Al-Kashi (1380 - 1429), mathématicien né à Kachan en Iran, fut aussi astronome à Samarcande. Il calcula une valeur approchée de π avec 16 décimales, ce qui était la meilleure approximation à l'époque. Il généralisa le théorème de Pythagore sous sa forme actuelle.

1 Produit scalaire dans le plan

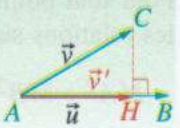
On rappelle les principaux résultats sur le produit scalaire dans le plan obtenus en classe de Première.

1.1 Expressions du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

rappels

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :
– de même sens : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; – de sens contraires : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

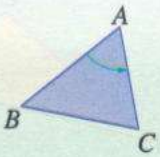
• À l'aide de projections orthogonales (pour des vecteurs non nuls) :
$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,\vec{v}'$, où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$;
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



• Avec des longueurs, des angles (pour des vecteurs non nuls) :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$;

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$;

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

• Dans un repère orthonormal : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1.2 Règles de calcul

rappels

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel k , on a :

• $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$; • $(k\vec{u})\,.\,\vec{v} = k \times (\vec{u}\,.\,\vec{v})$; • $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$.

Voir Activité 4 ; Exercices 4 à 6

1.3 Vecteurs orthogonaux

rappels

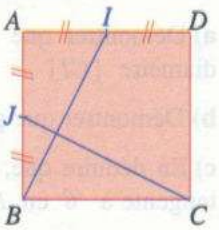
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

En particulier, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Voir Exercices 10 à 12

Exemple

Soit un carré $ABCD$ et les milieux I et J de $[AD]$ et $[AB]$.
On veut démontrer que les droites (BI) et (CJ) sont orthogonales.



• En utilisant l'outil vectoriel, on calcule $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{CJ}$:

$$\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right).\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BJ}\right) = \left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right).\left(-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right).$$

En développant, $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}$.

Or $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA} = 0$, car $(BA) \perp (BC)$; donc $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{CJ} = -\frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}BA^2 = 0$, car $BA = BC$.

Ainsi, les droites (BI) et (CJ) sont orthogonales.

• En utilisant le repère orthonormal $(B\,;\,\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, avec AB pour unité, on a :

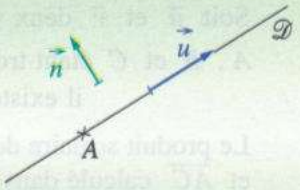
$I\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $J\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{BI}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $\overrightarrow{CJ}\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)$; d'où $\overrightarrow{BI}\,.\,\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2} \times (-1) + 1 \times \frac{1}{2} = 0$.

Les droites (BI) et (CJ) sont orthogonales.

2 Distance d'un point à une droite dans le plan

2.1 Vecteur normal à une droite — rappels

- Par définition, un vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$, de vecteur directeur $\vec{u}$, est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.
- Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
- Dans un repère orthonormal, la droite $\mathscr{D}$ d'équation :
$$ax+by+c=0\ , \quad \text{avec} \quad (a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)\ ,$$
a pour **vecteur normal** le vecteur $\vec{n}(a\ ;\ b)$.

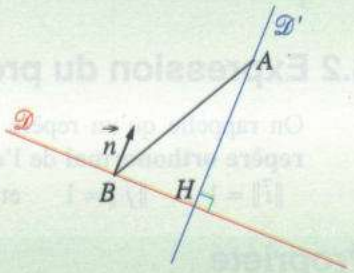


Voir Exercice 20

2.2 Distance d'un point à une droite — propriété

Soit A un point et $\mathscr{D}$ une droite du plan.

- Si B est un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$, alors la distance de A à $\mathscr{D}$ est $AH=\dfrac{|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
- Dans un repère orthonormal du plan, si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $\mathscr{D}$ a pour équation $ax+by+c=0$, avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$, alors :
$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$



Voir Exercices 23 et 28

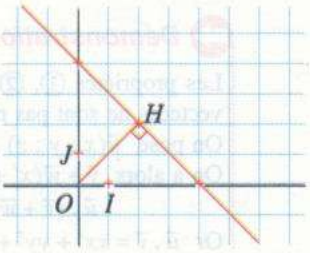
Démonstration

La distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$. On a :
$$\overrightarrow{BA}.\vec{n}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}).\vec{n}=\overrightarrow{BH}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}\ .$$
Comme $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\vec{n}$, $\overrightarrow{BH}.\vec{n}=0$; donc $\overrightarrow{BA}.\vec{n}=\overrightarrow{HA}.\vec{n}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|=AH\times\|\vec{n}\|$; ainsi $AH=\dfrac{|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
On pose $B(x_B\ ;\ y_B)$, donc $\overrightarrow{BA}(x_A-x_B\ ,\ y_A-y_B)$, et on a :
$$\overrightarrow{BA}.\vec{n}=a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)=ax_A+by_A+(-ax_B-by_B)\ .$$
Or B est un point de $\mathscr{D}$, donc $-ax_B-by_B=c$; d'où $\overrightarrow{BA}.\vec{n}=ax_A+by_A+c$.
De plus, $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}$; ainsi $AH=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple

Dans un repère orthonormal, la droite $\mathscr{D}$, d'équation $x+y-4=0$, admet pour vecteur normal $\vec{n}(1\ ;\ 1)$.

L'origine du repère orthonormal est à la distance $\dfrac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ de la droite $\mathscr{D}$.



3 Produit scalaire dans l'espace

3.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

A, B et C étant trois points de l'espace vérifiant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$:

il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B et C.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

Ce produit scalaire est indépendant du choix des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et du choix du plan $\mathscr{P}$, car $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Voir Exercices 34 et 35

Remarques

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$.
- Le carré scalaire de $\vec{u}$ est $\vec{u}^2=\vec{u}\,.\,\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}-\vec{u}\|^2\right)=\|\vec{u}\|^2$, donc $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}$.

3.2 Expression du produit scalaire en repère orthonormal

On rappelle qu'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$, est un **repère orthonormal** de l'espace si :

$\|\vec{i}\|=1$, $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$, $(OI)\perp(OJ)$, $(OJ)\perp(OK)$ et $(OK)\perp(OI)$.

Propriété

Dans un repère orthonormal de l'espace :

- la **norme** du vecteur $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ est $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
- le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ est $\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

Démonstration

Voir Activité 3

On a $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, donc :

$2(\vec{u}\,.\,\vec{v})=x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-(x-x')^2-(y-y')^2-(z-z')^2=2xx'+2yy'+2zz'$.

Ainsi, $\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

3.3 Règles de calculs

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel k :

① $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\vec{v}\,.\,\vec{u}$; ② $(k\vec{u})\,.\,\vec{v}=k\times(\vec{u}\,.\,\vec{v})$; ③ $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{u}\,.\,\vec{w}$;

④ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}\,.\,\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$.

Démonstration

Les propriétés ①, ② et ④ découlent des propriétés analogues dans le plan. Pour la propriété ③, les trois vecteurs ne sont pas nécessairement coplanaires. On peut utiliser un repère orthonormal de l'espace.

On pose $\vec{u}(x\,;y\,;z)$, $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, $\vec{w}(x''\,;y''\,;z'')$.

On a alors $\vec{v}+\vec{w}(x'+x''\,;y'+y''\,;z'+z'')$, donc, après développement et regroupement :

$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')+z(z'+z'')=xx'+yy'+zz'+xx''+yy''+zz''$.

Or $\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\vec{u}\,.\,\vec{w}=xx''+yy''+zz''$, donc $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{u}\,.\,\vec{w}$.

4 Orthogonalité dans l'espace

Par définition, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **orthogonaux** si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
En particulier, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

4.1 Droites orthogonales

propriété

Soit deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a l'équivalence :

$$\mathscr{D}\perp\mathscr{D}' \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 .$$

Exemple

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, sont orthogonales, car $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times1+(-3)\times1+1\times2=0$.

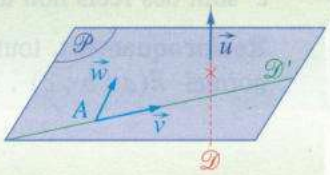
4.2 Droite orthogonale à un plan

propriété

Soit une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathscr{P}$ de repère $(A\,;\vec{v},\vec{w})$.

On a l'équivalence :

$$\mathscr{D}\perp\mathscr{P} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{w}=0 .$$



Voir Exercices 59 et 60 ; T.D. 1 et 2

Démonstration

Si $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à la droite qui passe par A et admet pour vecteur directeur $\vec{v}$; donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. De même, $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$.

Réciproquement, si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$, alors, pour toute droite $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{P}$, un vecteur directeur $\vec{u}'$ de $\mathscr{D}'$ s'écrit sous la forme $\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$, avec α et β réels. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}'=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\times\vec{u}\cdot\vec{w}=\alpha\times0+\beta\times0=0 .$$

Ainsi, la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{P}$ et donc $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.

4.3 Projection orthogonale

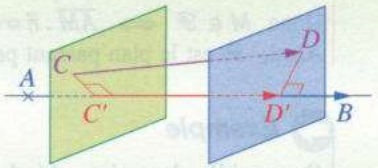
propriété

• Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} ,$$

où C' et D' sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).

Le vecteur $\vec{v}'=\overrightarrow{C'D'}$ est le **projeté orthogonal** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.



• Si $\vec{u}$ est un vecteur **unitaire**, on a $\vec{v}'=k\vec{u}$, avec $k=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Démonstration

Voir Activité 2

• $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}=0$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$.
• Soit k le réel tel que $\vec{v}'=k\vec{u}$; on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'=\vec{u}\cdot k\vec{u}=k\|\vec{u}\|^2=k$, car $\|\vec{u}\|=1$.

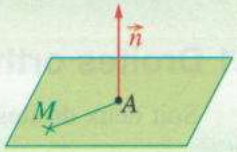
5 Équation cartésienne d'un plan

5.1 Vecteur normal à un plan

définition

• Par définition, un **vecteur normal** à un plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

• Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



5.2 Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Tout plan $\mathscr{P}$ de l'espace admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où a, b et c sont des réels non tous nuls.

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un plan qui admet pour vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Voir Exercices 64 à 66

Démonstration

Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point du plan $\mathscr{P}$ et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

$M\in\mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$. Or $\overrightarrow{AM}(x-x_A\,;y-y_A\,;z-z_A)$ et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$, donc :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=ax+by+cz+d$, avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Ainsi, $M\in\mathscr{P} \iff ax+by+cz+d=0$.

De plus, $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, il est donc non nul et l'un au moins des réels a, b ou c n'est pas nul.

Réciproquement, on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$.
Les réels a, b et c sont non tous nuls, donc $\mathscr{F}$ contient au moins un point A. Par exemple,

si $a\neq 0$, alors le point $A\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie $ax_A+by_A+cz_A+d=0$; donc $A\in\mathscr{F}$.

En considérant le vecteur non nul $\vec{n}(a\,;b\,;c)$, pour tout point $M(x\,;y\,;z)$, on a :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=ax+by+cz+d.$$

Donc $M\in\mathscr{F} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.
Ainsi, $\mathscr{F}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple

On considère les points $A(-1\,;0\,;1)$, $B(2\,;1\,;1)$, et $C(-1\,;2\,;2)$ et le vecteur $\vec{n}(1\,;-3\,;6)$.

On a $\overrightarrow{AB}(3\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;1)$.
Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles, donc ce sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).

Comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$, $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) ; d'où :

$$M\in(ABC) \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\iff 1(x+1)-3(y-0)+6(z-1)=0.$$

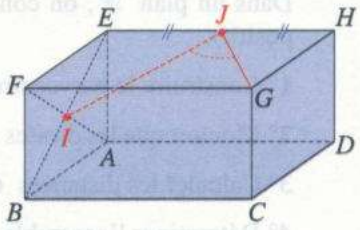
Une équation du plan (ABC) est $x-3y+6z-5=0$.

1 Produit scalaire et angle dans l'espace

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle vérifiant :

$$AB = AE = 2 \quad \text{et} \quad AD = 4 .$$

Soit I le centre du rectangle $ABFE$ et J le milieu du segment $[EH]$.



1° Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{IH} , \quad \overrightarrow{BJ} . \overrightarrow{FA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JI} . \overrightarrow{JG} .$$

2° Déterminer, à 0,1° près, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IJG}$.

• Méthode

• Pour calculer un produit scalaire, on peut :

– utiliser des projections orthogonales ;

– décomposer les vecteurs pour faire intervenir des produits scalaires remarquables ;

– utiliser l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormal.

• Pour déterminer la mesure d'un angle géométrique $\widehat{AOB}$, on calcule :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} .$$

1° Comme la droite (BC) est orthogonale au plan (ABF) et au plan (HGC), B et C sont les projetés orthogonaux respectifs de I et H sur la droite (BC).
On en déduit que :

$$\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BC} ,$$

et donc $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{IH} = BC^2 = 16$.

Par décomposition

$$\overrightarrow{BJ} . \overrightarrow{FA} = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EJ}) . \overrightarrow{FA}$$
$$= \overrightarrow{BE} . \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EJ} . \overrightarrow{FA} .$$

Comme $ABFE$ est un carré, ses diagonales $[BE]$ et $[FA]$ sont orthogonales ; donc $\overrightarrow{BE} . \overrightarrow{FA} = 0$.
Comme la droite (EJ) est orthogonale au plan (EAF), alors :

$$\overrightarrow{EJ} . \overrightarrow{FA} = 0 .$$

Ainsi, on obtient $\overrightarrow{BJ} . \overrightarrow{FA} = 0$.
Les droites (BJ) et (FA) sont donc orthogonales.

Dans le repère orthonormal

$$\left(A ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right) ,$$

les points I, J et C ont pour coordonnées respectives :

$I(1 ; 0 ; 1)$, $J(0 ; 2 ; 2)$ et $G(2 ; 4 ; 2)$.

Ainsi, on obtient $\overrightarrow{JI}(1 ; -2 ; -1)$ et $\overrightarrow{JG}(2 ; 2 ; 0)$.
On a alors :

$$\overrightarrow{JI} . \overrightarrow{JG} = 1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-1) \times 0 = -2 .$$

2° On calcule $\|\overrightarrow{JI}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

et $\|\overrightarrow{JG}\| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

puis : $\cos \widehat{IJG} = \dfrac{\overrightarrow{JI} . \overrightarrow{JG}}{\|\overrightarrow{JI}\| \times \|\overrightarrow{JG}\|} = \dfrac{-2}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$.

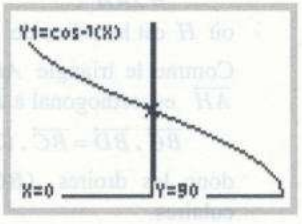
En utilisant la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ de la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{IJG} \approx 106{,}8° .$$

Remarque

La fonction $\cos^{-1}$ est définie sur $[-1 ; 1]$ à images dans $[0 ; 180]$ si on travaille en degrés.

La calculatrice graphique donne la représentation graphique ci-contre (en mode degré).



exercices résolus

2 Barycentre et produit scalaire dans le plan

Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC de côté a (a est un réel strictement positif).

1° Construire le barycentre D des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(C, -1)$.

2° Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.

3° Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.

4° Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que $2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$.
Vérifier que C appartient à $\mathscr{F}$.

• Méthode

• Pour calculer une longueur dans le plan, on peut :

– utiliser les configurations de base (triangle équilatéral, carré, ...)

– utiliser les relations métriques dans un triangle (voir *Activité* 2)

– utiliser le carré scalaire d'un vecteur et les règles de calcul du produit scalaire

• Ne pas oublier que le barycentre de points pondérés permet de simplifier des expressions vectorielles.

1° D étant le barycentre des points pondérés :

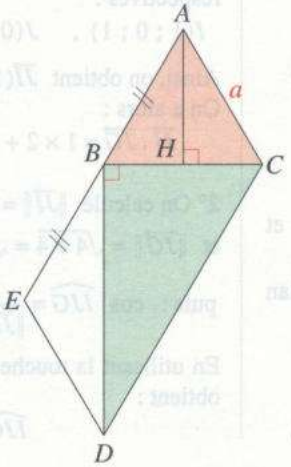
$$(A, 2),\ (B, -2) \text{ et } (C, -1),$$

on a, par définition, pour tout point M du plan :

$$(2 - 2 - 1)\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

En posant $M = A$, on obtient :

$-\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,
soit
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,
d'où la construction.



2° En utilisant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On a, par construction :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AH},\end{aligned}$$

où H est le milieu de $[BC]$.

Comme le triangle ABC est équilatéral, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}\cdot(2\overrightarrow{AH}) = 2\times\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0,$$

donc les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires.

3° D'après ce qui précède $CD = 2a$.
En utilisant le théorème de PYTHAGORE dans le triangle CBD rectangle en B, on a $BD = a\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}AD^2 &= (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 4AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= 4AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK},\end{aligned}$$

où K est le milieu de $[AB]$; donc :

$$AD^2 = 4a^2 + a^2 + 4\times a\times\frac{a}{2} = 7a^2,$$

soit $AD = a\sqrt{7}$.

4° En utilisant le point D :

$$\begin{aligned}&2MA^2 - 2MB^2 - MC^2\\ &= 2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2\\ &= 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2.\end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned}2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 &= -MD^2 + 2DA^2 - 2DB^2\\ &\quad - DC^2 + 2\overrightarrow{MD}\cdot(2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}).\end{aligned}$$

Comme D est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(C, -1)$:

$$2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0},$$

donc $2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -MD^2 + 4a^2$.

M appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si :

$$-MD^2 + 4a^2 = 0, \text{ soit } MD = 2a.$$

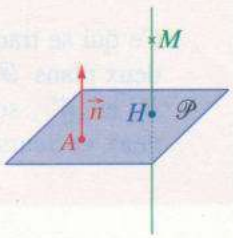
L'ensemble $\mathscr{F}$ est le cercle de centre D et de rayon $2a$.
Comme $DC = 2a$, C appartient à $\mathscr{F}$.

1 Distance d'un point de l'espace à un plan ou à une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1.1 Calculs

Soit $\mathscr{P}$ un plan, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$.



Montrer que $\overrightarrow{MA}\,.\,\vec{n}=\overrightarrow{MH}\,.\,\vec{n}$, puis que $|\overrightarrow{MH}\,.\,\vec{n}|=MH\times\|\vec{n}\|$.

En déduire que :

La distance d'un point M au plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est $MH=\dfrac{|\overrightarrow{MA}\,.\,\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Applications

- Calculer la distance du point $M(2\,;1\,;1)$ au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1\,;4)$.
- Calculer la distance du point $M(-3\,;1\,;-4)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y-2z+1=0$.

1.2 Distance d'un point à une droite

On considère le point $A(-1\,;1\,;3)$ et la droite $\mathscr{D}$ passant par $B(1\,;2\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-1\,;2)$.

Le but de cet exercice est de déterminer la distance de A à $\mathscr{D}$, c'est-à-dire la distance $d=AH$, où H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

1 Méthode 1

Le réel d est le minimum de la distance de A à un point M de la droite $\mathscr{D}$.

Le point H est donc le point de $\mathscr{D}$ minimisant AM, donc minimisant AM^2.

a) Soit M un point de $\mathscr{D}$.

En posant $\overrightarrow{BM}=t\vec{u}$, démontrer que tout point de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $(1+2t\,;2-t\,;2+2t)$, avec $t\in\mathbb{R}$.

b) On pose $AM^2=f(t)$.
Déterminer la fonction f et calculer son minimum.
En déduire la distance d.

2 Méthode 2

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

b) Calculer la distance de B au plan $\mathscr{P}$ et la distance AB.

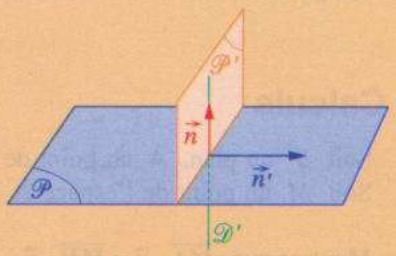
c) En déduire la distance de A à $\mathscr{D}$ (faire une figure).

2 Plans perpendiculaires

Par définition, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Ce qui se traduit vectoriellement par :
deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, sont orthogonaux si, et seulement si, les deux vecteurs normaux sont orthogonaux.

$$\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 .$$



2.1 Vrai-Faux

Dire si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

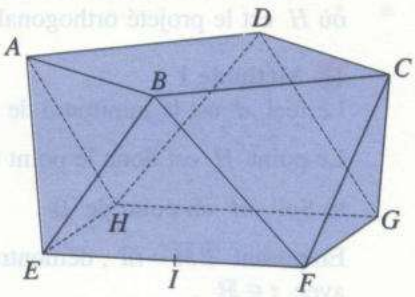
- Deux plans perpendiculaires à un même troisième sont parallèles. V F
- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre. V F
- Les dièdres formés par deux plans perpendiculaires forment un angle droit. V F
- Si un dièdre forme un angle droit, les plans qu'il détermine sont perpendiculaires. V F
- Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un troisième, la droite d'intersection est orthogonale à ce troisième plan. V F
- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$x + 3y - 2z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad 5x + y - z + 4 = 0$$

sont perpendiculaires. V F

2.2 Avec un antiprisme

Le solide ci-contre est un antiprisme dont les bases carrées sont parallèles et telles que les diagonales de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre.
Ses faces latérales sont des triangles équilatéraux.



1. Soit I le milieu de $[EF]$.
Démontrer que le plan (BDI) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. Démontrer que le plan médiateur de $[BD]$ est un plan de symétrie de ce solide.

2.3 Avec un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ dans un plan $\mathscr{P}$.
Soit S un point extérieur à $\mathscr{P}$ qui se projette orthogonalement en A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. Faire une figure.

2. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{C}$ différent de A et B, les plans (SAM) et (SBM) sont orthogonaux.

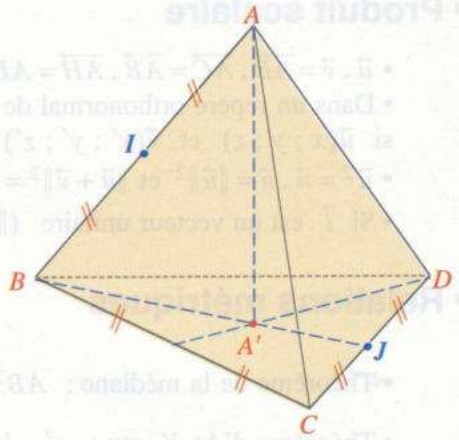
3 Tétraèdre régulier

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête 2 et G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

Les points A', B', C' et D' sont les centres de gravité respectifs des triangles :

BCD, CDA, DAB et ABC.

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.



3.1 Généralités

1 Déterminer le plan médiateur du segment $[CD]$.
En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
Plus généralement, que peut-on dire des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier ?

2 **a)** Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}$.
En déduire que la droite (IJ) est orthogonale à la fois à (AB) et à (CD).

b) Calculer la distance IJ. (Utiliser le triangle ABJ.)

3 **a)** Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}$.
En déduire que la droite (AA') est perpendiculaire au plan (BCD).

b) Calculer AA', puis le volume du tétraèdre $ABCD$.

4 **a)** Montrer que le point G est équidistant des points A, B, C et D.
Calculer le rayon et le volume de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

3.2 Projection sur deux plans

La face ABC du tétraèdre est dans le plan (Oxy) et la droite (BC) est parallèle à (Oy).

1 Construire les projetés orthogonaux A_1, B_1, C_1, D_1, I_1, A'_1 et J_1 des points A, B, C, D, I, A' et J sur le plan (xOz).
Puis construire les projetés orthogonaux A_2, B_2, C_2, D_2, I_2, A'_2 et J_2 des points A, B, C, D, I, A' et J sur le plan (yOz).

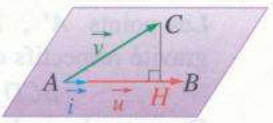
2 Le point B a pour coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$ dans le repère $(Oxyz)$.
Déterminer les coordonnées des points C, D, J, A' et A.

3 Construire le tétraèdre $ABCD$ à l'aide du logiciel GEOSPACW.
Projeter le tétraèdre sur les plans (yOz) et (xOz) et contrôler les constructions.

4 Préciser les positions respectives des points J_1 et A'_1 sur le segment $[B_1D_1]$.

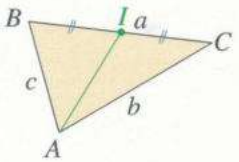
Faire le point

• Produit scalaire



- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
- Dans un repère orthonormal de l'espace,
si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Si $\vec{i}$ est un vecteur unitaire $(\|\vec{i}\| = 1)$, le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{i}$ est $\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i}$.

• Relations métriques



- Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$.
- Théorème d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.
- Formule des sinus : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{S}}$,
où $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle ABC.
- Distance d'un point M à un plan $\mathcal{P}$, avec $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$:
$$d = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

savoir	comment faire ?
calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$	• en repère orthonormal, utiliser les coordonnées • en l'absence de repère, si on connaît : – les normes, utiliser $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ – deux normes et un angle, utiliser : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ – le projeté orthogonal H de C sur (AB), utiliser : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
calculer des distances	on peut utiliser : • les relations métriques dans le triangle • $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$, puis la relation de Chasles et les règles de calcul du produit scalaire • la distance d'un point à un plan
calculer des angles	on peut utiliser : • le théorème d'Al-Kashi ou la formule des sinus • l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
démontrer l'orthogonalité de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$	on prouve que $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}'$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$
démontrer l'orthogonalité d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un plan $\mathcal{P}$	• on prouve que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ • on prouve que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

1 Produit scalaire dans le plan

1 Vrai-Faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $ABCD$ est un parallélogramme tel que :
$AB = 6$, $AD = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -12$.
On a $AC^2 = 27$.

2° Dans un triangle ABC rectangle en A, si H est le pied de la hauteur issue de A, alors $AH^2 = BH \times CH$.

3° Si B est un point de la droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point quelconque du plan se projetant orthogonalement sur $\mathscr{D}$ en H, alors :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} + \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} .$$

2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° A est un point donné du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} \leqslant 0$ est un demi-plan.

2° A et B sont deux points donnés du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle de centre A.

3° A et B sont deux points donnés du plan.
L'ensemble des points du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2$ est un cercle de rayon 2.

3 Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Soit les points $A(1 ; 1)$ et $B(-2 ; 6)$.
La droite $\mathscr{D}$, d'équation cartésienne $3x - 5y + 1 = 0$, est perpendiculaire à la droite (AB).

2° Pour tout couple $(a ; b)$ de réels tels que $a \neq b$, l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2ab = 0$ est celle d'un cercle.

3° La droite passant par $A(3 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2 ; -3)$ est tangente au cercle d'équation :
$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

2 Calculs

4 Soit $\mathscr{C}$ le cercle, de centre O, circonscrit au triangle ABC. La hauteur issue de A coupe la base $[BC]$ en H et le cercle $\mathscr{C}$ en D.

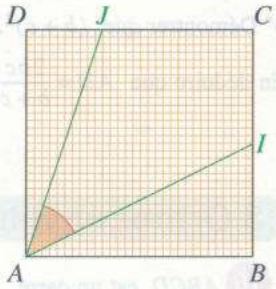
En utilisant le point E, diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$.

5 Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que (AC) et (BC) soient perpendiculaires.
En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, démontrer que :
$AC^2 = AB \times CD$.

6 $ABCD$ est un carré.
Les points I et J sont définis par :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$.



En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ de deux façons, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{IAJ}$, puis la mesure de cet angle en radians.

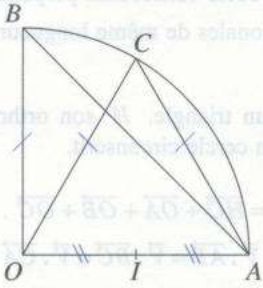
7 On considère un triangle ABC tel que :
$BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1° En exprimant l'aire du triangle ABC de trois façons différentes, démontrer que :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} .$$

2° Application
Déterminer les mesures des côtés d'un triangle ABC, sachant que :
$BC = 8$, $\widehat{ABC} = 20°$ et $\widehat{BCA} = 50°$.

8 Sur un quart de cercle de rayon 1, on considère le point C tel que OAC est un triangle équilatéral.



1° Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB}$.

2° Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ de deux façons différentes et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

9 ABC est un triangle et on pose :

$$AB = c \ , \quad AC = b \quad \text{et} \quad BC = a \ .$$

La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en D.
La droite parallèle à (AD) passant par C coupe (AB) en B'.

1° Démontrer que $AC = AB'$.

2° Démontrer que $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}$.
En déduire que D est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, c).

3° Démontrer que $(b+c)^2 AD^2 = 2b^2c^2(1+\cos\widehat{A})$.

En déduire que $AD = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\widehat{A}}{2}$.

3 Orthogonalité

10 $ABCD$ est un carré.
Les points I et J sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \ .$$

Démontrer que les droites (DI) et (JC) sont orthogonales.

11 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

1° **a)** Montrer que $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.

b) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.

2° **Application**
Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux propriétés énoncées sont équivalentes et préciser la nature du parallélogramme.

a) • $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur ;
• $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires.

b) • $ABCD$ a deux côtés consécutifs perpendiculaires ;
• $ABCD$ a ses diagonales de même longueur.

12 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit.
On pose :

$$\vec{V} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \ .$$

1° Démontrer que $\vec{V}.\overrightarrow{AB} = \vec{V}.\overrightarrow{BC} = \vec{V}.\overrightarrow{CA} = 0$.

2° En déduire que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

3° Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lorsque la droite (OG) existe, elle est appelée **droite d'Euler** du triangle (ABC).

13 Soit un triangle ABC et une droite $\mathcal{D}$.
On désigne respectivement par A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C sur $\mathcal{D}$.
La perpendiculaire à (AC) passant par B' coupe en O la perpendiculaire à (AB) passant par C'.
Montrer que les droites $(A'O)$ et (BC) sont perpendiculaires.

14 Soit un carré $ABCD$, M un point de $[AC]$, et P et Q ses projetés orthogonaux respectifs sur les droites (AD) et (CD).
Démontrer que les droites (PQ) et (BM) sont perpendiculaires.

4 Ensemble de points

15 Soit $[AB]$ un segment de longueur 6.
Déterminer, et construire, l'ensemble des points du plan vérifiant :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$; **b)** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -12$;

c) $0 \leqslant \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \leqslant 6$.

16 Soit $ABCD$ un carré de côté c $(c > 0)$ et α un réel.
On définit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD} \ .$$

1° Déterminer suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de cette application.

2° Déterminer, puis construire l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2 \ .$$

3° Déterminer, puis construire l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2 \ .$$

17 Dans le plan $\mathcal{P}$, soit ABC un triangle équilatéral de côté 2.
On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par H son projeté orthogonal sur la droite (AC).

1° Montrer que H est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(C, 3)$.

2° En déduire une construction du barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 5)$.

3° On considère l'ensemble $\mathcal{G}_k$ des points M du plan qui vérifient :

$$MA^2 + 2MB^2 + 5MC^2 = k \ ,$$

où k est un réel donné tel que C appartienne à $\mathcal{G}_k$.
Déterminer le réel k et la nature de l'ensemble $\mathcal{G}_k$ en précisant ses éléments caractéristiques.

18 Les points O et A sont distincts.

M étant un point du plan $\mathcal{P}$, on se propose d'étudier, s'ils existent, les points M' de $\mathcal{P}$ vérifiant à la fois les deux conditions suivantes :

(1) A, M et M' alignés ;

(2) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$.

1° Déterminer l'ensemble des points M' dans les cas suivants :

a) M est en O ; **b)** M est en A ;

c) M est un point de $\mathscr{C}$ autre que O et A ;

d) M est un point de la droite (OA) autre que O et A ;

e) M est un point de la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire en O à (OA) autre que O.

2° On suppose que M n'est pas sur $\mathscr{C}$.

Démontrer qu'il existe un unique point M' vérifiant **(1)** et **(2)**. En donner une construction géométrique.

5 Avec des coordonnées

Dans les exercices 19 *à* 30, *le plan est rapporté, sauf mention contraire, au repère orthonormal* $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

19 Soit les points $A(3 ; 4)$, $B(5 ; 0)$, $C(1 ; -2)$ et $D(-1 ; 2)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

20 On considère les points $A(6 ; 3)$, $B(1 ; 2)$ et $C(4 ; 2)$.

1° Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC, issue de C.

2° Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

21 On considère les points $A(0 ; 5)$, $B(-2 ; -3)$ et $C(3 ; 4)$.

Calculer l'aire du triangle ABC.

22 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2 ; 1)$ et de rayon 5.

1° Vérifier que le point $A(1 ; 5)$ est un point de $\mathscr{C}$.

2° Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

23 On considère $A(6 ; 4)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$2x - y - 3 = 0$.

Déterminer la distance de A à $\mathscr{D}$ et les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

24 Démontrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives :

$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ et $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 7 = 0$

sont deux cercles tangents en un point que l'on déterminera.

25 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3 ; 0)$ et de rayon 2.

Pour tout réel m, on note $\mathscr{D}_m$ la droite passant par $B(2 ; -2)$ et de coefficient directeur m.

Déterminer m pour que $\mathscr{D}_m$ soit tangente à $\mathscr{C}$.

26 On considère l'équation :

$(E_m) : x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0$,

où m est un nombre réel quelconque.

1° Démontrer que, pour toute valeur de m, (E_m) est l'équation d'un cercle $\mathscr{C}_m$ dont on donnera le centre et le rayon.

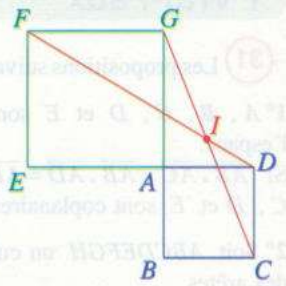
2° Démontrer que tous les cercles $\mathscr{C}_m$ sont tangents entre eux en un point fixe.

27 $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés tels que A appartient aux segments $[ED]$ et $[BG]$.

Les droites (FD) et (GC) se coupent en I.

En utilisant un repère bien choisi, démontrer que les droites (AI) et (DG) sont perpendiculaires.

(On pourra poser $AB = a$ et $AE = b$.)



28 On considère les points $A(-3 ; -3)$, $B(1 ; 1)$ et $C(-4 ; 4)$.

1° Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (AC).

2° Soit $M(a ; b)$ un point quelconque du plan.

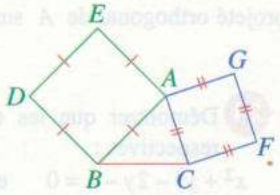
a) Déterminer, en fonction de a et b, les distances de M aux droites (AB) et (AC).

b) Déterminer l'ensemble des points équidistants des droites (AB) et (AC).

On rappelle que $|\alpha| = |\beta| \iff \alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$.

6 Plusieurs méthodes

29 À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les carrés $ABDE$ et $ACFG$.
Il s'agit de démontrer que les droites (EC) et (BG) sont perpendiculaires.



1° Méthode 1

a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}\ .$$

b) Calculer $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CE}$ et conclure.

2° Méthode 2

Le plan est orienté de sorte que le triangle ABC soit direct et on appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer les images de E et de C par r, puis conclure.

30 Dans le plan, on considère trois points distincts A, B et C alignés dans cet ordre et la droite Δ perpendiculaire à (AB) en C.
Soit M un point de la droite Δ différent de C.
On appelle N le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AM) et de la perpendiculaire en B à (BM).
On cherche l'ensemble des points N, lorsque M parcourt Δ privée de C.

1° En utilisant un logiciel de géométrie, conjecturer l'ensemble des points N.

2° Méthode 1

a) Montrer que $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}$, puis que $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = -AB \times BC$.

b) En déduire l'ensemble des points N.

3° Méthode 2

On choisit un repère orthonormal $(B\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$$

et on pose $AB = a$ et $BC = b$.
Le point M a donc pour coordonnées $(b\ ;\ \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$.

a) Déterminer, en fonction de α, les équations cartésiennes des droites (AN) et (BN).

b) Calculer, en fonction de α, les coordonnées du point N et conclure.

2 Produit scalaire dans l'espace

1 Vrai-Faux

31 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° A, B, C, D et E sont cinq points non coplanaires de l'espace.
Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$, alors les points A, C, D et E sont coplanaires.

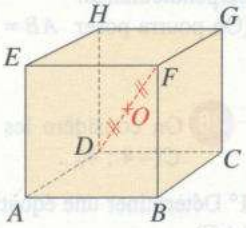
2° Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O et a la mesure des arêtes.
On a :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = a^2$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = \sqrt{2}a^2$;

c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = a^2$;

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \frac{a^2}{2}$.



32 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° A et B sont deux points de l'espace tels que $AB = 1$.
L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 1$$

est le plan orthogonal à (AB) passant par B.

2° A et B sont deux points distincts de l'espace
L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$$

est une sphère de centre I, milieu de $[AB]$.

33 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$2x - 3y + z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - 2z - 3 = 0$$

sont perpendiculaires.

2° On considère les points :

$$A(1\ ;-2\ ;4)\ ,\quad B(-2\ ;-6\ ;5)\ ,\quad C(5\ ;1\ ;2) \quad \text{et} \quad D(-4\ ;0\ ;3)\ .$$

La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).

3° On considère les points :

$$A(-2\ ;3\ ;4)\ ,\quad B(-1\ ;8\ ;4) \quad \text{et} \quad C(-2\ ;6\ ;3)\ .$$

Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $5x - y - 3z - 3 = 0$ est parallèle au plan (ABC).

4° L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6 = 0$$

est une sphère de centre $A(1\ ;2\ ;0)$.

2 Calculs

34 Soit $ABCDS$ une pyramide à base carrée de sommet S dont toutes les arêtes ont la même mesure a.

Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$; **b)** $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$; **c)** $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$.

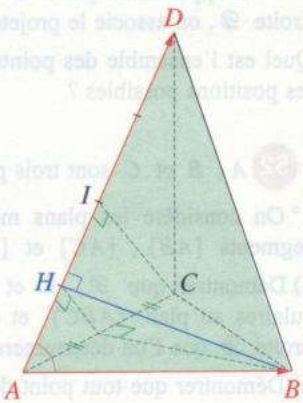
35 On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = 30°$.

Un point D se projette orthogonalement en A sur le plan (ABC) et on a $AD = AC = a$.

Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$.

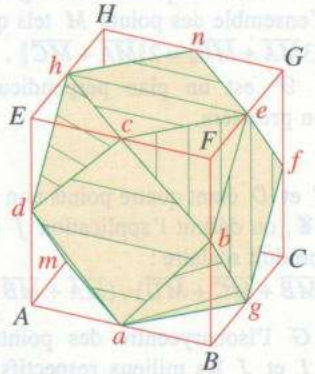
36 ABC est un triangle équilatéral de côté 1, D est le point de la droite orthogonale en C au plan (ABC) vérifiant $CD = 1$, H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD), I le milieu de $[AD]$.



1° Calculer AD et AH, puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2° En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAD}$ à 0,1° près.

37 Le cuboctaèdre est un solide dont les sommets sont les milieux des arêtes d'un cube.



1° Décrire les faces du cuboctaèdre.

2° Démontrer que les centres de gravité des faces triangulaires sont les sommets d'un cube.

3° Calculer la mesure en degré de l'angle de deux faces triangulaires.

4° Réaliser une coupe suivant le plan (HFB).

3 Orthogonalité

38 Soit $ABCD$ un tétraèdre, (AH) la hauteur issue de A et M un point de la face ABC.

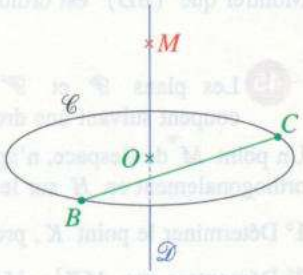
Construire le projeté orthogonal I du point M sur le plan (BCD).

Justifier cette construction.

39 On considère une droite $\mathscr{D}$ de l'espace et un cercle $\mathscr{C}$ d'axe $\mathscr{D}$.

Soit B et C deux points de $\mathscr{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés.

Démontrer que tout point M de l'axe $\mathscr{D}$ se projette orthogonalement sur la droite (BC) en I, milieu de $[BC]$.



40 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a.

On note I le centre de gravité du triangle CFH.

1° a) Montrer que le triangle CFH est équilatéral.

b) Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de $[CH]$ et au plan médiateur de $[CF]$.

c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH).

2° Quel est le projeté orthogonal de A sur le plan (CFH) ?

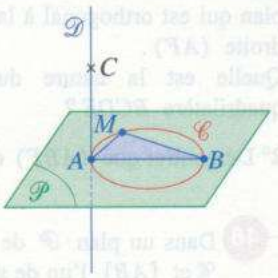
41 Soit ABC un triangle rectangle en A, et D un point situé sur la perpendiculaire en B au plan (ABC).

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

En déduire la nature du triangle ACD.

42 Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et C un point de la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ en A.

Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{C}$, on a : $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB} = 0$.



En déduire l'intersection des sphères de diamètres $[AB]$ et $[BC]$.

43 Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans perpendiculaires et $\mathscr{D}$ leur droite d'intersection.

Deux points A et B du plan $\mathscr{P}$ se projettent orthogonalement en A' et B' sur $\mathscr{D}$ et deux points C et D du plan $\mathscr{P}'$ se projettent orthogonalement en C' et D' sur $\mathscr{D}$.

Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}$.

44 1° Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 .$$

(On pourra, par exemple, exprimer $AC^2 - AD^2$, ainsi que $BC^2 - BD^2$, sous forme de produits scalaires.)

2° On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que (AB) est orthogonale à (CD) et (BC) orthogonale à (AD).
Montrer que (BD) est orthogonale à (AC).

45 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires et se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$.

Un point M de l'espace, n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, se projette orthogonalement en H sur le plan $\mathscr{P}$ et en H' sur $\mathscr{P}'$.

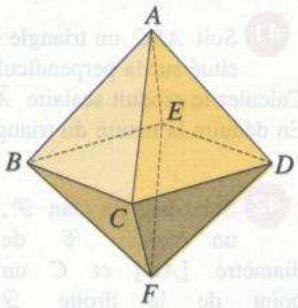
1° Déterminer le point K, projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

2° Démontrer que $MK^2 = MH^2 + MH'^2$.

46 Soit un plan $\mathscr{P}$, une droite $\mathscr{D}$ incluse dans $\mathscr{P}$ et un point A de $\mathscr{D}$.
Un point B, n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$, se projette orthogonalement en H sur le plan $\mathscr{P}$ et en K sur la droite $\mathscr{D}$.
On suppose que K est distinct de A.

Démontrer que (BHK) et (BKA) sont perpendiculaires.

47 Soit $ABCDEF$ un octaèdre régulier.



1° Démontrer que les sommets B, C, D et E appartiennent à un même plan qui est orthogonal à la droite (AF).
Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$?

2° Démontrer que (ABF) et (AFC) sont perpendiculaires.

48 Dans un plan $\mathscr{P}$ de l'espace, on considère un cercle $\mathscr{C}$ et $[AB]$ l'un de ses diamètres.
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A qui est orthogonale à $\mathscr{P}$, et S un point de $\mathscr{D}$ distinct de A.
Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, et H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1° Placer les données précédentes sur une figure, $\mathscr{D}$ étant placée verticalement.

2° Démontrer que les plans (AMS) et (BMS) sont perpendiculaires.

3° Démontrer que (AH) est orthogonale au plan (BMS).

4 Ensemble de points

49 Soit un plan $\mathscr{P}$, A un point extérieur à $\mathscr{P}$, et un réel positif ℓ.
Quel est l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ qui sont situés à la distance ℓ de A ? Discuter suivant les valeurs de ℓ.

50 On considère un plan $\mathscr{P}$ et un point O de $\mathscr{P}$.
Soit A un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$.
À toute droite $\mathscr{D}$ qui passe par O et est incluse dans le plan $\mathscr{P}$, on associe le projeté orthogonal M de A sur la droite $\mathscr{D}$.
Quel est l'ensemble des points M, lorsque $\mathscr{D}$ prend toutes les positions possibles ?

51 Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et un point S n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. À tout plan $\mathscr{P}$ contenant la droite $\mathscr{D}$, on associe le projeté orthogonal K de S sur $\mathscr{P}$.
Quel est l'ensemble des points K, lorsque $\mathscr{P}$ prend toutes les positions possibles ?

52 A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.

1° On considère les plans médiateurs $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

a) Démontrer que $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ sont des plans perpendiculaires au plan (ABC) et qu'ils se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$ que l'on déterminera.

b) Démontrer que tout point de $\mathscr{D}$ est équidistant de A, B et C.

2° Quel est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points A, B et C ?

53 A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| .$$

Démontrer que $\mathscr{P}$ est un plan perpendiculaire au plan (ABC) que l'on précisera.

54 A, B, C et D étant quatre points non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$, on définit l'application f de l'espace $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ par le produit scalaire :

$$f(M) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}).$$

1° On appelle G l'isobarycentre des points A, B, C et D. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Démontrer que $f(M) = 8\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{JI}$.

2° Pour tout réel k, on note $\mathscr{S}_k$ la ligne de niveau k de l'application f, c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = k$. Déterminer la nature de $\mathscr{S}_k$.

3° On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre régulier.
Démontrer que la ligne $\mathscr{S}_0$ de niveau 0 passe par G et est parallèle aux droites (AB) et (CD).

55 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1° Démontrer que, pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0\ .$$

2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}\ .$$

3° On suppose que le triangle ABC est équilatéral.
Que représente, alors, l'ensemble $\mathscr{D}$ pour le cercle circonscrit au triangle ABC ?

5 Dans un repère de l'espace

Sauf mention contraire, dans les exercices 56 à 68, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

56 Soit les points :

$A(-1\ ;1\ ;2)$, $B(0\ ;1\ ;0)$ et $C(2\ ;0\ ;3)$.

1° Calculer les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2° Déterminer, une valeur approchée, à 0,1° près, des mesures en degré des angles géométriques :

$\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

57 Soit les points $A(5\ ;-3\ ;2)$, $B(6\ ;-1\ ;1)$, $C(7\ ;-4\ ;2)$ et $D(6\ ;-1\ ;7)$.

Le tétraèdre $ABCD$ est-il trirectangle en A, c'est-à-dire les arêtes contenant le point A sont-elles deux à deux orthogonales ?

58 Soit :

$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$ et $\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$.

Démontrer que $(O\ ;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère orthonormal de l'espace.

59 Soit les points $A(1\ ;2\ ;-2)$, $B(2\ ;3\ ;-2)$, $D(0\ ;3\ ;-2)$ et $E(1\ ;2\ ;-2+\sqrt{2})$.

1° Démontrer que $AB=AD=AE$ et que les droites (AB), (AD) et (AE) sont deux à deux orthogonales.

2° Déterminer les coordonnées des points C, F, G et H tels que $ABCDEFGH$ soit un cube.

60 Soit B, D et E les points définis par :

$\overrightarrow{OB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{k}$.

1° Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E, F, G et H tels que $OBCDEFGH$ soit un cube.

2° Déterminer les coordonnées du centre Ω de ce cube.

3° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega O}.\overrightarrow{\Omega B}$.

En déduire une valeur approchée, à 0,1° près, de la mesure en degré de l'angle sous lequel on voit une arête depuis le centre du cube.

61 Soit le point A tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$.

Déterminer les coordonnées des points B, C et D sachant que :

- B a une ordonnée positive ;
- B et C appartiennent au plan de repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$;
- O est le centre de gravité du triangle ABC ;
- $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

62 On considère les points :

$A(2\ ;3\ ;-1)$, $B(8\ ;-2\ ;4)$ et $C(3\ ;0\ ;5)$.

Existe-t-il un réel α tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux ?

63 On considère les points :

$A(-2\ ;3\ ;5)$ et $B(4\ ;-1\ ;-3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

64 On considère les points :

$A(1\ ;-1\ ;0)$, $B(2\ ;3\ ;-4)$ et $C(-3\ ;0\ ;1)$

et le vecteur $\vec{n}(8\ ;15\ ;17)$.

1° Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Calculer $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

65 On considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives :

$2x-y+z+9=0$ et $x+y+2z-7=0$.

Quel est l'angle aigu de ces deux plans ?

66 On considère les points $A(1\ ;2\ ;3)$, $B(0\ ;1\ ;5)$ et $C(3\ ;0\ ;4)$.

1° Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2° Démontrer que $\vec{n}(a\ ;b\ ;c)$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases}-a-b+2c=0\\2a-2b+c=0\end{cases}.$$

3° En déduire un vecteur normal à (ABC) à coordonnées entières et une équation du plan (ABC).

67 On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives $2x+y-z=0$ et $x-y+2z=0$.

1° Vérifier que le point $A(1\,;0\,;-3)$ est équidistant des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points équidistants des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

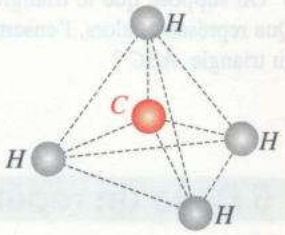
68 $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a et G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1° Démontrer que G est équidistant des points A, B, C et D. Calculer, en fonction de a, le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

2° Montrer que le point G est équidistant des plans :
(BCD), (CDA), (DAB) et (ABC).
En déduire que G est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$.

3° Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$ en utilisant :
• soit l'angle $\widehat{AGB}$;
• soit le milieu I du segment $[AB]$.
En déduire une valeur approchée, à 0,1° près, de la mesure en degré de l'angle $\widehat{AGB}$.

4° La molécule de méthane CH_4



Les noyaux des quatre atomes d'hydrogène sont les sommets d'un tétraèdre régulier et le noyau de l'atome de carbone est au centre de ce tétraèdre.

La longueur des liaisons C—H est $1{,}09\cdot10^{-10}$ m.
Calculer la longueur des liaisons H—H.

3 Problèmes

69 **1°** Dans un plan $\mathscr{P}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R.
On désigne par P un point quelconque du plan $\mathscr{P}$ et par $\mathscr{D}$ une droite passant par P qui coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et B.
a) Démontrer que $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}$, où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$. En déduire que :
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\Omega P^2-R^2\,.$$
b) En déduire que si $\mathscr{D}'$ est une droite passant par P qui coupe le cercle $\mathscr{C}$ en C et D, alors :
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}\,.$$

Le réel $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ qui ne dépend pas du choix de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point P est appelé **puissance du point P par rapport au cercle $\mathscr{C}$**.

2° Soit $ACBD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ dont le centre est noté Ω.
On suppose que les diagonales (AB) et (CD) sont perpendiculaires et on appelle O leur point d'intersection.
On désigne par I le milieu de $[AC]$.
Démontrer que la droite (IO) est perpendiculaire à la droite (BD).

70 On attribue à Albrecht DÜRER la construction présentée ci-contre. (Cahier de l'Abbaye de Boscodon, n° 4 : « *L'art des bâtisseurs romains* ».)

Elle est effectuée avec une même ouverture de compas AB qui est prise comme unité.

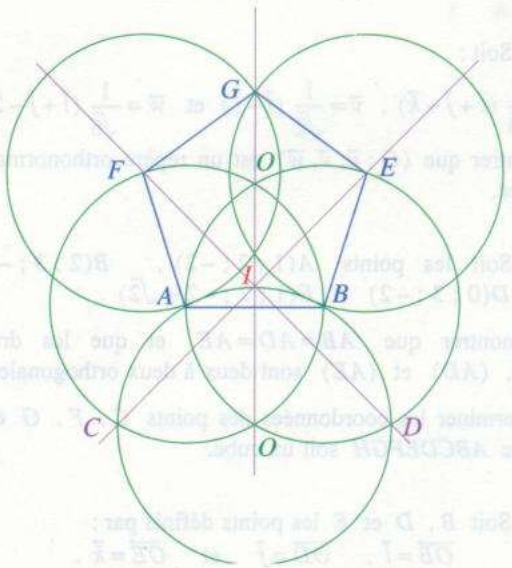
Les cinq côtés du pentagone ont la même longueur par construction, mais est-ce pour autant un pentagone régulier ?

1° Montrer que les points C, O et D sont alignés.

2° a) Montrer que $(O\,;\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OI})$ est un repère orthonormal.
Donner les coordonnées de D, C, I, B et A dans ce repère.

b) Montrer que les coordonnées de E dans le repère précédent sont du type $(x\,;x+1)$.

c) Montrer que $x=\dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{6\sqrt{3}-4}}{4}$.



3° En déduire une mesure en degrés de $\widehat{ABE}$.
La construction de DÜRER fournit-elle un pentagone régulier ?

71 Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on définit les trois points :

$$A(1\,;0)\,,\quad B\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)\quad\text{et}\quad C\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$$

et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x=1$.

1° Déterminer les coordonnées de G tel que $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?

2° On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan $\mathscr{P}$ qui vérifient la relation $-MA^2+MB^2+MC^2=2(x-1)^2$.

a) Vérifier que B et C sont des points de $\mathscr{G}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{G}$.

3° a) Démontrer que $\mathscr{G}$ est la réunion des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives :

$$y=\sqrt{x^2-2}\quad\text{et}\quad y=-\sqrt{x^2-2}\,.$$

b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_1$.

c) Par quelle transformation géométrique, obtient-on la courbe $\mathscr{C}_2$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_1$?
En déduire une droite $\mathscr{D}_2$ qui est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$.

d) Construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en précisant les tangentes aux points :
A d'abscisse $\sqrt{2}$ et B d'abscisse $-\sqrt{2}$.

4° On pose $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$ et $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.
Vérifier que $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal.
Déterminer une équation de $\mathscr{G}$ dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ et en déduire la nature de la courbe $\mathscr{G}$.

5° Démontrer que $\mathscr{G}$ est l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $MG=\sqrt{2}\,d(M,\mathscr{D})$, où $d(M,\mathscr{D})$ est la distance de M à la droite $\mathscr{D}$. Cette courbe est une **hyperbole**.

Hyperbole

C'est une des coniques (ellipse, parabole, hyperbole) étudiées par les mathématiciens grecs de l'Antiquité (MENECHME, APOLLONIUS, PAPPUS). (Voir le *Chapitre* « Surfaces ».) Ces courbes peuvent être définies au moyen d'un point appelé foyer (KEPLER) et d'une droite (d) dite directrice (PAPPUS).
Une conique est l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{MF}{MH}=k\,,\quad\text{avec}\quad k>0\,,$$

où H désigne le projeté orthogonal de M sur (d).

Le nombre k est appelé **excentricité** de la conique.

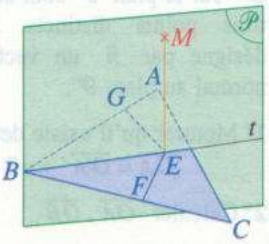
72 L'espace étant rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(4\,;4\,;0)\,,\quad B(0\,;5\,;2)\quad\text{et}\quad C(2\,;0\,;4)\,.$$

1° Placer les points A, B et C sur une figure.

2° On désire construire le pied H de la hauteur du triangle ABC passant par C.
Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$ et placer le point H.

73 On considère un triangle ABC et (Bt) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CBA}$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant (Bt) qui est orthogonal au plan (ABC).



1° Soit M un point de $\mathscr{P}$, E son projeté orthogonal sur (Bt) et F et G les projetés orthogonaux de E respectivement sur les droites (BC) et (BA).
Calculer $\overrightarrow{MF}.\overrightarrow{BF}$.
Démontrer que M est équidistant des droites (BA) et (BC).

2° Déterminer l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants des droites (BA) et (BC).

74 Dans l'espace, on désigne par $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB}=k$ où A et B sont deux points distincts et k un réel strictement positif donnés.

1° Quelle est la nature de $\mathscr{E}_1$?

2° On suppose $k\neq 1$.

a) Démontrer que $\mathscr{E}_k$ est l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2-k^2MB^2=0$.

b) En utilisant le barycentre I des points pondérés $(A,1)$, (B,k) et le barycentre J des points pondérés $(A,1)$, $(B,-k)$, déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_k$.

75 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\mathscr{S}$ la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-z+\frac{5}{4}=0\,.$$

1° Démontrer que la sphère $\mathscr{S}$ coupe le plan d'équation $z=0$ suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

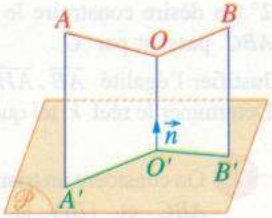
2° Déterminer de même les intersections de $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations respectives $y=0$ et $x=0$.

76 Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube d'arête 1, M un point de la droite (DA') et N un point de la droite (AC).
On pose :
$\overrightarrow{DM}=a\overrightarrow{DA'}$ et $\overrightarrow{AN}=b\overrightarrow{AC}$, avec a et b réels.
Déterminer a et b pour que la droite (MN) soit perpendiculaire aux droites (AC) et (DA'), en utilisant :

a) la relation de CHASLES et des produits scalaires ;

b) le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'})$ dont on précisera la nature.

77 Soit un plan $\mathscr{P}$ et trois points distincts O, A et B de l'espace tels que leurs projetés orthogonaux respectifs A', O' et B' sur le plan $\mathscr{P}$ sont aussi trois points distincts. On désigne par $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.



1° Montrer qu'il existe deux réels a et b vérifiant :
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} + a\vec{n}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} + b\vec{n}$.

2° Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

3° En déduire que :

a) Si un angle droit a l'un de ses côtés parallèle à un plan $\mathscr{P}$ et l'autre côté non orthogonal à $\mathscr{P}$, alors cet angle droit se projette orthogonalement sur $\mathscr{P}$ suivant un angle droit.

b) Si un angle droit se projette orthogonalement sur un plan $\mathscr{P}$ suivant un angle droit, alors l'un, au moins, de ses côtés est parallèle au plan de projection.

4° Application 1

Soit un carré $ABCD$ situé dans un plan non perpendiculaire au plan de projection $\mathscr{P}$ et A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur $\mathscr{P}$.
À quelles conditions $A'B'C'D'$ est-il un losange ? un rectangle ? un carré ?

5° Application 2

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x-2y+z+5=0$ et les points $A(1\,;0\,;3)$, $B(2\,;1\,;2)$ et $C(3\,;-4\,;1)$.

a) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Démontrer que le projeté orthogonal du triangle ABC sur le plan $\mathscr{P}$ est un triangle rectangle.

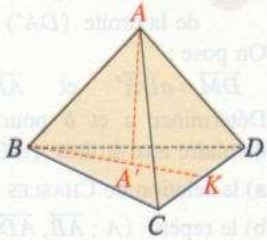
78 Soit $ABCD$ un tétraèdre.

1° Montrer que :
si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, alors $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
(*Indication* :
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.)

On appelle **hauteur d'un tétraèdre**, toute droite contenant l'un des sommets, perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.

2° On suppose que le tétraèdre $ABCD$ satisfait aux conditions de la question **1°**.

a) Soit A' le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BD}$.
En déduire que A' est l'orthocentre du triangle BCD.



b) Soit B' le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD).
Montrer que B' est l'orthocentre du triangle ACD.

c) (BA') coupe (CD) en K. Montrer que K appartient à la droite (AB'). En déduire que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point H.

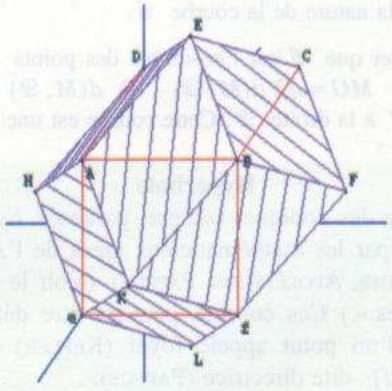
d) Montrer que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.
Le point de concours est appelé **orthocentre** du tétraèdre.

Un tétraèdre qui admet un orthocentre est appelé un **tétraèdre orthocentrique**.

79 **Le cuboctaèdre rhombique**

A. Construction d'un cuboctaèdre rhombique à l'aide du logiciel GEOSPACW.

- Définir un réel a.
- Construire un cube $ABCDefgh$ d'arête a, dont la face $efgh$ est dans le plan (oxy) et $h = o$.
- Construire le symétrique E de O, centre du cube, par la symétrie par rapport au plan (ABC).
- Créer\point\Point image\symétrie plane.
- Construire le cuboctaèdre rhombique $ABCDefghEFGKL$.
- Créer\Solide\polyèdre convexe\défini par ses sommets.



B. 1° Vérifier que les quatre points E, B, F et C sont bien coplanaires.

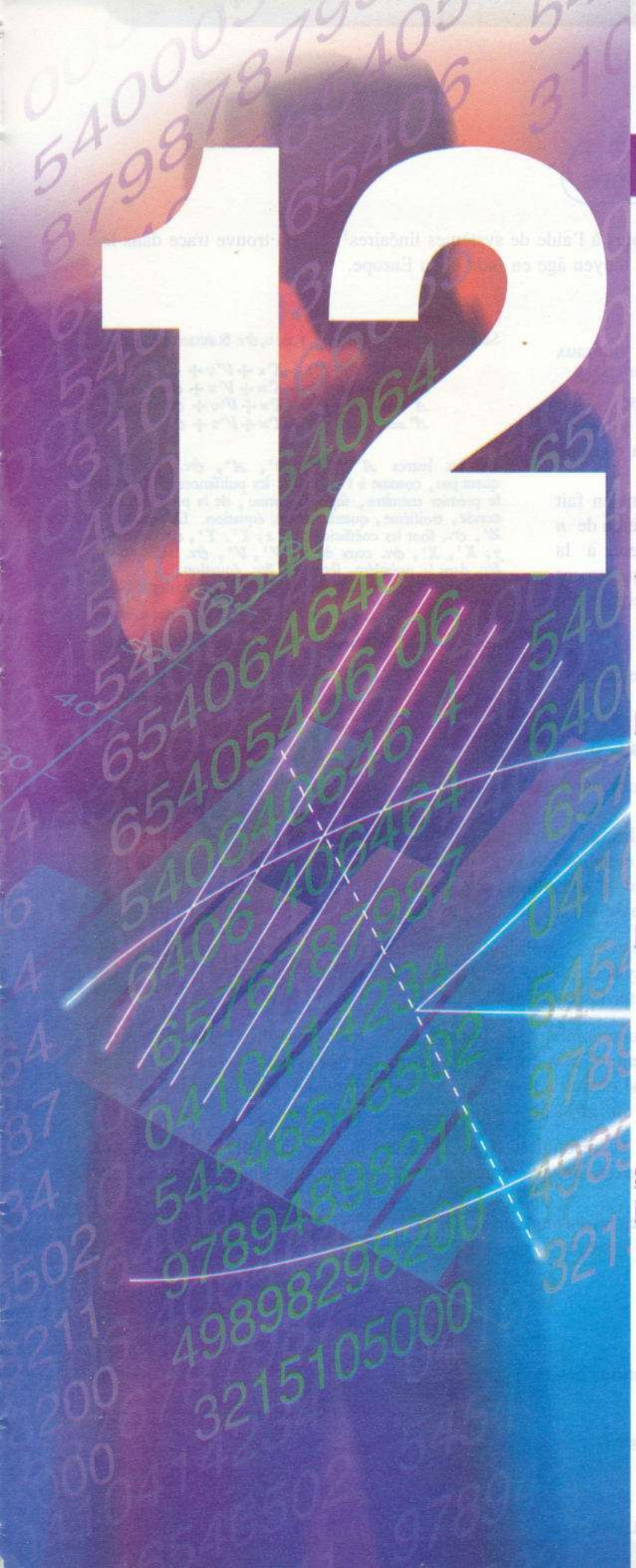
2° Créer le patron de ce solide :

Créer\Solide\Patron d'un polyèdre.

Décrire le cuboctaèdre (sommets, arêtes, faces).

3° Déterminer, en fonction de a, la longueur d'une arête du cuboctaèdre et les longueurs des diagonales d'une face.

4° Déterminer, à 0,1° près, les mesures en degré des angles du quadrilatère $EBFC$ et de l'angle des faces $EBFC$ et $AEBK$.



CHAPITRE

12

Droites et plans

Droites de l'espace p. 320

- caractériser vectoriellement une droite
- déterminer une représentation paramétrique d'une droite
- caractériser une droite, un segment à l'aide de barycentres

Plans de l'espace p. 322

- caractériser vectoriellement un plan
- déterminer une représentation paramétrique ou une équation cartésienne d'un plan
- caractériser un plan à l'aide de barycentres

Systèmes et intersection de plans p. 324

- déterminer et interpréter les solutions de systèmes linéaires

activités

1 Résolution de systèmes

De nombreux problèmes peuvent être résolus à l'aide de systèmes linéaires[1]. On en trouve trace dans les mathématiques babyloniennes, ainsi qu'au moyen âge en Inde et en Europe.

Formules de CRAMER

Les systèmes linéaires à coefficients littéraux apparaissent véritablement à la fin du XVIIe siècle.
Le texte de CRAMER, mathématicien suisse (1704-1752), fournit les formules explicites des solutions d'un système de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.
Ces formules (attention, les exposants sont en fait des indices !) sont généralisables à un système de n équations à n inconnues et conduisent à la définition de la notion de déterminant fréquemment utilisée en algèbre et étudiée dans l'enseignement supérieur.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$, & $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

Vérifier le résultat obtenu pour un système de deux équations à deux inconnues.

Méthode du « pivot » de GAUSS

GAUSS (1777-1855) est un mathématicien allemand qui travailla beaucoup dans le domaine de l'astronomie.
Pour déterminer l'orbite de l'astéroïde Pallas, découvert par l'astronome OLBERS, il fut amené à résoudre un système de six équations à six inconnues.
Dans un mémoire en 1810, il met en œuvre un algorithme valable pour n'importe quel système linéaire. Cet algorithme est basé sur les deux règles suivantes :


© J.L. CHARMET

C.F. GAUSS

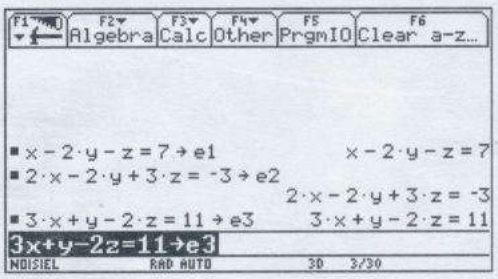
(R1) Si on permute deux équations du système, on obtient un nouveau système qui admet les mêmes solutions que le système initial. On note, par exemple, $e_1 \leftrightarrow e_2$ l'opération qui consiste à permuter les équations e_1 et e_2.

(R2) Si on remplace une équation e_i par une combinaison linéaire de e_i avec une autre ligne e_j, pourvu que l'équation e_i intervienne effectivement, c'est-à-dire remplacer e_i par $ae_i + be_j$ (avec a réel non nul et b réel quelconque), alors le système obtenu admet les mêmes solutions que le système initial.
Cette opération est notée $e_i \leftarrow ae_i + be_j$ ou $ae_i + be_j \rightarrow e_i$.

Ces opérations permettent de ramener la résolution d'un système linéaire à celle d'un système « triangulaire », c'est-à-dire d'un système où chaque équation contient une inconnue de moins que l'équation précédente.
Par exemple, en utilisant une calculatrice possédant un module de calcul formel, pour résoudre le système :

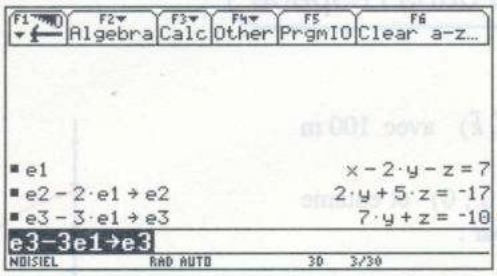
$$\begin{cases} x - 2y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = -3 \\ 3x + y - 2z = 11 \end{cases},$$

on commence par introduire les trois équations notées e_1, e_2 et e_3.



[1] Systèmes où les inconnues apparaissent avec le degré 1.

On obtient ensuite les deux écrans suivants :





1 Quelle règle a été utilisée pour obtenir les systèmes des écrans ci-dessus à partir du système initial ?

2 Sur le deuxième écran ci-dessus, le système obtenu est un système triangulaire.

En déduire la solution du système.

3 Résoudre le système $\begin{cases} x+5z+2t=6 \\ 4x+y+8z=20 \\ 5x+y+6z+10t=11 \\ 8x+2y+z+17t=8 \end{cases}$ en utilisant la méthode de GAUSS.

4 La méthode de GAUSS n'est pas toujours la plus rapide pour résoudre un système.

Par exemple, le système $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+z=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ peut facilement être résolu par substitution :

on peut exprimer y et z en fonction de x dans les deux dernières équations, puis remplacer y et z par les expressions obtenues dans la première équation pour en déduire x et ensuite les valeurs de y et z.

Résoudre ce système.

5 Vérifier que la méthode de GAUSS appliquée au système $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=5 \\ x+4y+7z=11 \end{cases}$ conduit au système

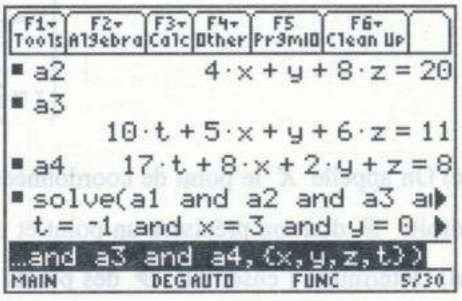
triangulaire $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=3 \\ 0=0 \end{cases}$.

Ce système a-t-il des solutions ?

Si oui, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Ce chapitre va fournir une interprétation géométrique de ce résultat.

6 On peut toujours vérifier les résultats obtenus en utilisant la fonction solve de la calculatrice : après avoir placé les équations du système vu au **3** en a1, a2, a3 et a4, on obtient l'écran ci-contre.



activités

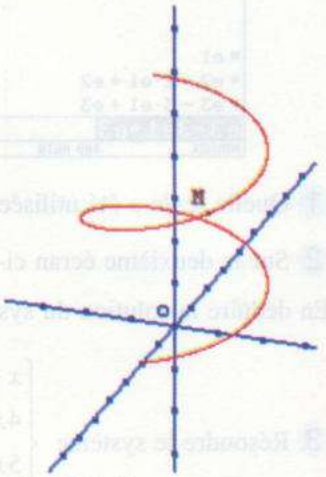
2 Notion de courbe paramétrée dans l'espace

Trajectoire d'un planeur

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec 100 m pour unité.

À l'instant $t=0$, un planeur se trouve au point $A(2\,;0\,;0)$ et entame sa montée en altitude suivant la trajectoire $\mathscr{C}$ donnée par :

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 0{,}5t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in [0\,;10]\,.$$



1 Construire cette courbe à l'aide de GEOSPACW pour contrôler les résultats. (On sélectionnera Créer\Courbe\Courbe paramétrée dans le menu.)

2 Quelle est la projection orthogonale de la courbe $\mathscr{C}$ sur le plan de repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$? Sur le plan de repère $(O\,;\vec{j},\vec{k})$?

3 La trajectoire du planeur M est contenue dans une surface « classique ». Laquelle ?

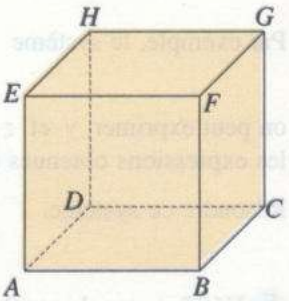
4 Quelle est l'altitude du planeur lorsqu'il repasse à la verticale du point A pour la première fois ?

Un ensemble de barycentres

ABCDEFGH est un cube. Soit t un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

On considère les points suivants :

M le barycentre des points pondérés (A,t), $(C,1-t)$;
N le barycentre des points pondérés (H,t), $(F,1-t)$;
I le barycentre des points pondérés $(M,1)$, $(N,2)$.



Le but de cette activité est de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points I lorsque t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

1 À l'aide d'un logiciel de géométrie (par exemple, GEOSPACW), émettre une conjecture sur l'ensemble $\mathscr{F}$.

2 Démontrer que M est un point du segment $[AC]$ et N un point du segment $[FH]$.

3 On considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ de l'espace.

a) Déterminer les coordonnées des points A, C, F, H, puis celles des points M et N.

b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{F}$ est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}t \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in [0\,;1]\,.$$

c) On appelle K le point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ est inclus dans une droite $\mathscr{D}$ dont on précisera un point et un vecteur directeur.

d) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points I lorsque t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

3 Régionnement du plan

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

La droite $\mathscr{D}$, d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$, partage le plan en trois parties :
- un demi-plan $\mathscr{P}_1$ dont les points de coordonnées $(x\,;y)$ sont tels que $ax+by+c<0$;
- un demi-plan $\mathscr{P}_2$ dont les points de coordonnées $(x\,;y)$ sont tels que $ax+by+c>0$;
- la droite $\mathscr{D}$ dont les points de coordonnées $(x\,;y)$ sont tels que $ax+by+c=0$.

Résolution de systèmes d'inéquations

1 **a)** Tracer les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $x-y+1=0$ et $3x+2y-12=0$.

b) En déduire l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :

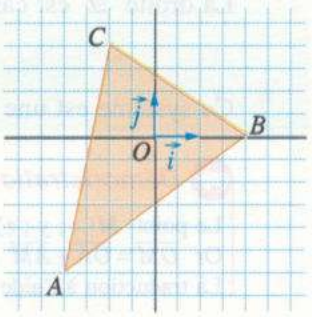
$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x-y+1\geqslant 0 \\ 3x+2y-12\leqslant 0 \end{cases}$$

2 Déterminer dans chaque quadrant du repère l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :

$$|x|+|y|\leqslant 4\ .$$

Caractérisation d'une surface du plan

On considère les points $A(-2\,;-3)$, $B(2\,;0)$ et $C(-1\,;2)$.
Caractériser par un système d'inéquations l'intérieur du triangle ABC, côtés compris.



Avec des barycentres

Soit A, B et C trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$.

1 Caractériser les points intérieurs au triangle ABC par un système d'inéquations utilisant les coordonnées $(x\,;y)$ de ces points dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ du plan $\mathscr{P}$.

2 Soit a, b et c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$.
On appelle M le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c).

a) Vérifier que si a, b et c sont strictement positifs, alors M est situé à l'intérieur du triangle ABC.
b) Que peut-on dire des coefficients a, b et c si M est situé à l'intérieur du triangle ABC ? Justifier.

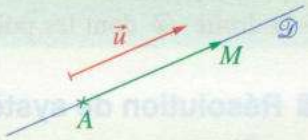
1 Droites de l'espace

Une droite de l'espace est définie :
- soit par deux points distincts A et B ;
- soit par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ non nul.

1.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

propriété

Soit $\mathscr{D}$ une droite, A un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.



La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

$$M \in \mathscr{D} \iff \text{il existe } t \text{ dans } \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u}\ .$$

Remarques
- Le réel t est l'abscisse du point M dans le repère $(A\ ;\ \vec{u})$ de la droite $\mathscr{D}$.
- Toutes les caractérisations de la droite sont basées sur cette propriété.

1.2 Caractérisation paramétrique d'une droite

propriété

L'espace est rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathscr{D}$ une droite, $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

La droite $\mathscr{D}$ est caractérisée par le système $\begin{cases} \overset{M}{x} = \overset{A}{x_A} + t\overset{\vec{u}}{a} \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$. Le **paramètre** est t.

Démonstration ► *Voir Activité 2 ; Exercice résolu 1 ; Exercices 2, 4 et 6*

Le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
Or $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$; donc $M \in \mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$.
La traduction à l'aide des coordonnées de cette égalité vectorielle donne le système paramétrique ci-dessus.

Exemple

Soit $ABCD$ un tétraèdre et D' le centre de gravité du triangle ABC.

Dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace, on a $D(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $D'\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$ et $\overrightarrow{DD'}\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ -1\right)$.

Les systèmes suivants sont des représentations paramétriques de (DD') dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = -t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}\ , \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}s \\ y = \frac{1}{3}s \\ z = 1 - s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}\ , \quad \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}\ .$$

Ils sont obtenus en utilisant respectivement les repères $(D'\ ;\ \overrightarrow{DD'})$, $(D\ ;\ \overrightarrow{DD'})$ et $(D\ ;\ 3\overrightarrow{DD'})$ de la droite (DD').

1.3 Caractérisation barycentrique d'une droite — propriété

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres des points A et B affectés de tous les coefficients possibles non opposés.

$M \in (AB) \iff M$ est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec α, β réels et $\alpha + \beta \neq 0$.

Démonstration

Voir Activité 3 ; Exercice 8

• Si M appartient à la droite (AB), alors il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, donc :

$$\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}), \quad \text{d'où} \quad (1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Comme $(1-t) + t = 1 \neq 0$, M est le barycentre des points pondérés $(A, 1-t)$ et (B, t).

• **Réciproquement**, si α et β sont deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$, alors le barycentre M des points pondérés (A, α) et (B, β) vérifie :

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OM} \text{ pour tout point } O \text{ de l'espace.}$$

En particulier, en prenant O confondu avec A, on a $(\alpha + \beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, M est un point de la droite (AB).

1.4 Caractérisation d'un segment — propriété

Soit A et B deux points distincts de l'espace.
Le segment $[AB]$ est l'ensemble de tous les barycentres des points A et B affectés de tous les coefficients **positifs** possibles non simultanément nuls.

$$M \in [AB] \iff M \text{ est le barycentre de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \text{ avec } \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0 \text{ et } \alpha + \beta \neq 0.$$

Démonstration

• Si M appartient au segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ et l'abscisse t du point M dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB})$ vérifie $0 \leqslant t \leqslant 1$.
On en déduit $(1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ avec $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$.
Ainsi, M est le barycentre des points pondérés $(A, 1-t)$ et (B, t), et les deux coefficients sont positifs.

• **Réciproquement**, si M est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$ alors :

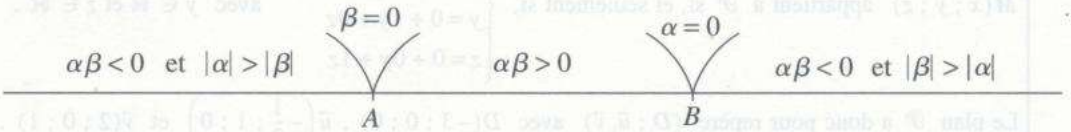
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \frac{\beta}{\alpha + \beta} \leqslant 1,$$

donc M est un point du segment $[AB]$.

Remarques

• Si $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$, alors $M \in [AB]$.

• Le schéma ci-dessous donne la position du barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) selon les conditions vérifiées par les réels α et β.

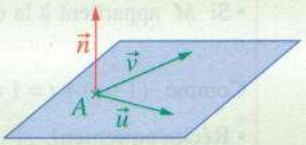


2 Plans de l'espace

Un plan de l'espace est défini :
- soit par trois points non alignés ;
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires (ce qui donne un repère de ce plan) ;
- soit par un point et un vecteur normal.

2.1 Caractérisations vectorielles d'un plan — propriété

- M appartient au plan de repère $(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$ si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
- M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.



Au *Chapitre* 11, on a vu que la traduction analytique de la condition $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ fournit une équation cartésienne de ce plan.

2.2 Équation cartésienne d'un plan — rappel

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$.
Le vecteur $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est alors un vecteur normal à ce plan.

► *Voir Exercice résolu* 2 ; *T.D.* 3 ; *Exercices* 14 *et* 15

En traduisant analytiquement la condition $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, on obtient une représentation paramétrique du plan de repère $(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$ dans l'espace.

2.3 Représentation paramétrique d'un plan — propriété

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ et $\vec{v}(a'\,;\,b'\,;\,c')$ non colinéaires.

Le plan de repère $(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$ est caractérisé par le système d'équations :

$$\begin{cases} x=x_A+\alpha a+\beta a' \\ y=y_A+\alpha b+\beta b' \\ z=z_A+\alpha c+\beta c' \end{cases} \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \beta\in\mathbb{R} .$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique** du plan.

Exemple

► *Voir Exercices* 28 *et* 29

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+y-4z+6=0$.

$M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\begin{cases} x=-3-\frac{1}{2}y+2z \\ y=0+1y+0z \\ z=0+0y+1z \end{cases}$ avec $y\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{R}$.

Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour repère $(D\,;\,\vec{u},\vec{v})$ avec $D(-3\,;\,0\,;\,0)$, $\vec{u}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$ et $\vec{v}(2\,;\,0\,;\,1)$.

2.4 Caractérisation barycentrique d'un plan — propriété

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

La plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C affectés de tous les coefficients possibles.

$$M \in (ABC) \iff M \text{ est le barycentre de } (A,\alpha),\ (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma)$$
$$\text{avec } \alpha,\ \beta \text{ et } \gamma \text{ réels tels que } \alpha+\beta+\gamma \neq 0 .$$

Démonstration

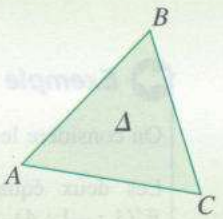
• Soit M un point du plan (ABC) et $(a\,;b)$ ses coordonnées dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ de ce plan.
On a $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AM}+a\overrightarrow{MB}+b\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{MC}$, d'où :
$$(1-a-b)\overrightarrow{MA}+a\overrightarrow{MB}+b\overrightarrow{MC}=\vec{0} .$$
Or $(1-a-b)+a+b=1\neq 0$, donc M est le barycentre des points pondérés $(A,1-a-b)$, (B,a) et (C,b).

• **Réciproquement**, si M est le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ), alors :
$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} ,$$
donc M appartient au plan de repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, c'est-à-dire au plan (ABC).

2.5 Intérieur d'un triangle — propriété

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

L'ensemble des barycentres des points A, B, C affectés de coefficients strictement positifs est l'intérieur Δ du triangle ABC (côtés non compris).



$$M \in \Delta \iff M \text{ est le barycentre de } (A,\alpha),\ (B,\beta) \text{ et } (C,\gamma)$$
$$\text{avec } \alpha>0,\ \beta>0 \text{ et } \gamma>0 .$$

Démonstration

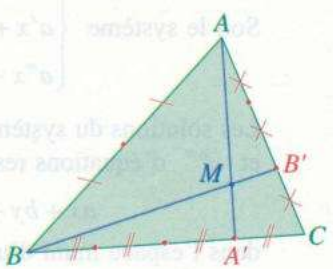
• Soit M le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha>0$, $\beta>0$ et $\gamma>0$.
Par associativité du barycentre, M est le barycentre de (A,α) et $(G,\beta+\gamma)$, où G est le barycentre de (B,β) et (C,γ).
Or $\beta>0$ et $\gamma>0$, donc G appartient au segment $]BC[$, segment $[BC]$ privé des points B et C.
De même, $\alpha>0$ et $\beta+\gamma>0$, donc M appartient au segment $]AG[$.
Ainsi, M est situé à l'intérieur du triangle ABC.

• **Réciproquement**, on peut démontrer que si M est intérieur au triangle ABC, alors il existe des réels strictement positifs α, β et γ tels que M soit le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ).

Exemple

Sur la figure ci-contre, A' est le barycentre de $(B,1)$ et $(C,3)$, et B' est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$.

Pour déterminer le barycentre du système de points pondérés $(A,3)$, $(B,2)$ et $(C,6)$, on utilise l'associativité du barycentre : il appartient à (AA') et à (BB') ; donc M, point d'intersection de (AA') et (BB') est le barycentre du système de points pondérés $(A,3)$, $(B,2)$ et $(C,6)$.



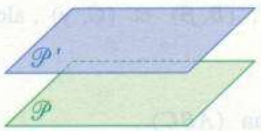
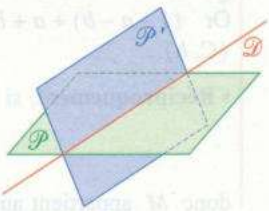
3 Systèmes et intersection de plans

3.1 Intersection de deux plans

Soit le système $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$, avec $\begin{matrix}(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)\\(a'\,;\,b'\,;\,c')\neq(0\,;\,0\,;\,0)\end{matrix}$.

Les solutions du système sont les coordonnées des éventuels points d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a donc trois possibilités :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.
		
$\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\varnothing$	$\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\mathscr{P}$	$\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'=\mathscr{D}$
Le système n'admet pas de solution.	Le système admet une infinité de solutions représentées par un plan.	Le système admet une infinité de solutions représentées par une droite.

Exemple Voir T.D. 2 et 3 ; Exercices 19 et 20

On considère le système (S) $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$.

Les deux équations correspondent à des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}(1\,;1\,;-2)$ et $\vec{n}'(1\,;-1\,;4)$ qui sont non colinéaires. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont donc sécants.

$$(S)\iff\begin{cases} x+y=2z+3 \\ x-y=-1-4z \end{cases}\iff\begin{cases} x=3-y+2z \\ (3-y+2z)-y=-1-4z \end{cases}\iff\begin{cases} x=3-y+2z \\ -2y=-4-6z \end{cases}\iff\begin{cases} x=1-z \\ y=2+3z \end{cases}.$$

Les solutions du système sont les triplets $(1-z\,;2+3z\,;z)$ où z est un réel quelconque.

Ainsi, $(S)\iff\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=2+3\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

On reconnaît la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(1\,;2\,;0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;3\,;1)$ et qui est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

3.2 Intersection de trois plans

Soit le système $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ avec $\begin{matrix}(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)\\(a'\,;\,b'\,;\,c')\neq(0\,;\,0\,;\,0)\\(a''\,;\,b''\,;\,c'')\neq(0\,;\,0\,;\,0)\end{matrix}$.

Les solutions du système sont les coordonnées des éventuels points d'intersection des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ d'équations respectives :

$$ax+by+cz=d\ ,\quad a'x+b'y+c'z=d'\quad\text{et}\quad a''x+b''y+c''z=d''$$

dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

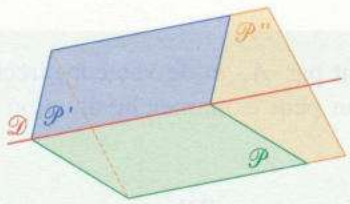
A. Les trois plans sont parallèles

• Soit ils sont confondus ;
on a alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{P}$ et le système admet une infinité de solutions représentées par un plan.

• Soit deux d'entre eux sont strictement parallèles ;
on a alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \varnothing$ et le système n'admet pas de solution.

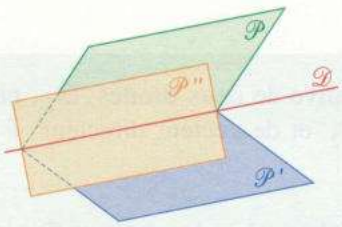
B. Les plans sont sécants deux à deux

• $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}''$.



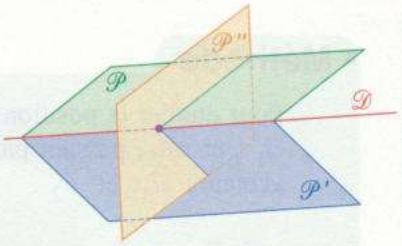
$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \varnothing$
Le système n'admet pas de solution.

• $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}''$.



$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{D}$
Le système a une infinité de solutions représentées par une droite.

• $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{P}''$.



$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \{A\}$
Le système admet une unique solution.

Exemples Voir T.D. 4 ; Exercices 42 et 43

• Soit le système $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$.

Les trois équations représentent trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de vecteurs normaux $\vec{n}(1\,;1\,;0)$, $\vec{n}'(2\,;1\,;2)$ et $\vec{n}''(4\,;4\,;1)$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. En utilisant les techniques du paragraphe précédent, on a $\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -2 + 2z \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$ et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;2\,;1)$.
Comme $\vec{n}'' \cdot \vec{u} = 1 \neq 0$, la droite $\mathcal{D}$ est sécante au plan $\mathcal{P}''$ et le système admet une unique solution. Pour l'obtenir, on substitue les expressions de x et y en fonction de z dans la troisième équation et on obtient $z = 1$. Ainsi, le système admet $(-1\,;0\,;1)$ comme unique solution.

• Soit (S) le système $\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + z = -3 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$.

Les trois équations représentent trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de vecteurs normaux $\vec{n}(1\,;3\,;2)$, $\vec{n}'(0\,;1\,;1)$ et $\vec{n}''(2\,;3\,;1)$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, donc on a :

$$(S) \iff \begin{cases} x = 4 + z \\ y = -3 - z \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}.$$

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-1\,;1)$.
On a $\vec{n}'' \cdot \vec{u} = 0$. La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}''$ donc le système n'admet pas une solution unique. En substituant dans la dernière équation, on obtient l'égalité $-1 = 1$ qui est fausse, donc $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}''$ et le système n'admet pas de solution.

1 Position relative de deux droites

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Étudier la position relative des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, puis $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}:\begin{cases}x=2-3t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ ;\quad \mathscr{D}':\begin{cases}x=6k\\y=2-2k\\z=5-4k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\ ;\quad \mathscr{D}_1:\begin{cases}x=7+2t'\\y=2+2t'\\z=-6-t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

• Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites $\mathscr{D}_1$, passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{u}_1$, et $\mathscr{D}_2$, passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{u}_2$, on peut examiner la situation des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

• Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, alors les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles :

– si A_2 est un point de $\mathscr{D}_1$, alors elles sont confondues ;

– si A_2 n'appartient pas à $\mathscr{D}_1$, alors elles sont strictement parallèles.

• Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes ou non coplanaires :

– si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ sont coplanaires, alors les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes ;

– si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ ne sont pas coplanaires, alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

$\mathscr{D}$ passe par le point $A(2\,;1\,;-3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;1\,;2)$.

$\mathscr{D}'$ passe par le point $B(0\,;2\,;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(6\,;-2\,;-4)$.

$\mathscr{D}_1$ passe par le point $C(7\,;2\,;-6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{w}(2\,;2\,;-1)$.

• Position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car $\vec{v}=-2\vec{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2\,;1\,;8)$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u}(-3\,;1\,;2)$ donc $B\notin\mathscr{D}$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles.

• Position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$

Les vecteurs $\vec{u}(-3\,;1\,;2)$ et $\vec{w}(2\,;2\,;-1)$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas parallèles.

On a $\overrightarrow{AC}(5\,;1\,;-3)$.

En recherchant des réels a et b tels que $\overrightarrow{AC}=a\vec{u}+b\vec{w}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+\vec{w}$$

(il suffit de résoudre un système de trois équations à deux inconnues a et b).

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ sont sécantes.

On obtient les coordonnées de leur point d'intersection I, en résolvant le système :

$$\begin{cases}2-3t=7+2t'\\1+t=2+2t'\\-3+2t=-6-t'\end{cases}\iff\begin{cases}3t+2t'=-5\\t-2t'=1\\2t+t'=-3\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4t=-4\\8t'=-8\\2t+t'=-3\end{cases}\iff\begin{cases}t=-1\\t'=-1\end{cases}.$$

En remplaçant t, par exemple, dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient $I(5\,;0\,;-5)$.

Remarque

Lorsque le système obtenu à partir de $\overrightarrow{AC}=a\vec{u}+b\vec{w}$ n'admet pas de solution, les droites sont non coplanaires.

2 Passage à une équation cartésienne

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ et le segment T de droite qui admettent pour représentations paramétriques :

$$\mathscr{P}\ \begin{cases} x = 2+\alpha+2\beta \\ y = 1-\alpha \\ z = 3-\beta \end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}\ ;\quad T\ \begin{cases} x = 1-3t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases},\ t\in[-1\,;1]\ .$$

1° Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2° Caractériser la droite $\mathscr{D}$, support du segment T, comme intersection de deux plans. Caractériser T comme segment de $\mathscr{D}$.

3° En déduire que le système $(S)\ \begin{cases} x+y+2z=9 \\ x+3y=-5 \\ x-3z=-11 \end{cases}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

• Méthode

Une courbe ou une surface $\mathscr{C}$ étant données par une représentation paramétrique, s'il est possible d'éliminer le ou les paramètres entre x et y ou entre x, y et z, on obtient une équation cartésienne d'une courbe ou d'une surface $\mathscr{C}'$ qui contient $\mathscr{C}$.

1° En utilisant la deuxième et la troisième équation, on obtient $\alpha = 1-y$ et $\beta = 3-z$.

En reportant dans la première équation, on obtient $x = 2+(1-y)+2(3-z)$, qui s'écrit :

$$x+y+2z-9=0\ .$$

Cette équation est une équation cartésienne d'un plan qui contient $\mathscr{P}$, donc le plan $\mathscr{P}$ lui-même.

$\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $x+y+2z-9=0$.

2° • D'après la représentation paramétrique de T, on a :

$$t=\frac{1-x}{3}\ ;\quad t=y+2\ ;\quad t=4-z\ .$$

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ d'un point quelconque M de T vérifient donc :

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{3}=y+2 \\ \dfrac{1-x}{3}=4-z \end{cases}\ \text{ou encore}\ \begin{cases} x+3y+5=0 \\ x-3z+11=0 \end{cases}.$$

• Le segment T est inclus dans la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans :

$\mathscr{Q}$: $x+3y+5=0$ et $\mathscr{R}$: $x-3z+11=0$

(le couple de plans n'est bien sûr pas unique).

$T=[AB]$, où $A(4\,;-3\,;5)$ et $B(-2\,;-1\,;3)$ sont obtenus en remplaçant successivement le paramètre t par -1 et 1.

3° D'après ce qui précède, le système peut s'interpréter comme la recherche des points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ définis aux questions précédentes.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;1\,;2)$, et $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;1\,;-1)$.

Comme $\vec{n}\,.\,\vec{u}=-4$, la droite $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$, donc elle le coupe en un point I.

Le système n'a qu'une solution : les coordonnées du point I.

$$(S)\iff\begin{cases} x+y+2z-9=0 \\ x=1-3t \\ y=-2+t \\ z=4-t \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} (1-3t)+(-2+t)+2(4-t)-9=0 \\ x=1-3t \\ y=-2+t \\ z=4-t \end{cases}.$$

On obtient $t=-\dfrac{1}{2}$, donc le système a pour solution :

$$\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{5}{2}\,;\frac{9}{2}\right).$$

3 Intersection de plans

Énoncé

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1\,;2\,;1)$, $B(1\,;-6\,;-1)$, $C(2\,;2\,;2)$ et $D(0\,;1\,;-1)$.

1° Démontrer que les points A, B et C définissent un plan et déterminer une équation cartésienne de ce plan.

2° Soit $\mathscr{Q}$ le plan d'équation :

$$x-3y+z-4=0\ .$$

a) Pourquoi les plans $\mathscr{Q}$ et (ABC) sont-ils sécants ?

b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$ d'intersection des plans (ABC) et $\mathscr{Q}$.

Analyse de l'énoncé

1° Ne connaissant pas un vecteur normal au plan (ABC), il faut passer par une représentation paramétrique du plan (ABC).

2° a) Problème classique : utiliser les vecteurs normaux aux plans.

b) Déterminer des équations paramétriques de $\mathscr{D}$ en utilisant par exemple z comme paramètre.

• Méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$:

• si on connaît un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, alors :

$$M\in\mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\ ;$$

• si on connaît trois points A, B et C de $\mathscr{P}$, alors on écrit une représentation paramétrique de $\mathscr{P}$, et on élimine les paramètres.

1° Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points non alignés A, B et C définissent donc un plan.

• Le plan (ABC) a pour repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-1+2\alpha+3\beta\\y=2-8\alpha\\z=1-2\alpha+\beta\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}\ .$$

• De la deuxième équation, on tire $\alpha=\dfrac{2-y}{8}$ et, de la première, $\beta=\dfrac{4x+y+2}{12}$.

Par substitution dans la dernière équation, on obtient :

$$x+y-3z+2=0\ ,$$

qui est une équation cartésienne du plan (ABC).

2° a) (ABC) et $\mathscr{Q}$ ont respectivement pour vecteur normal :

$$\vec{n}_1(1\,;1\,;-3) \quad\text{et}\quad \vec{n}_2(1\,;-3\,;1)\ .$$

Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux plans sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.

b) $M(x\,;y\,;z)$ est un point de $\mathscr{D}$ si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases}x+y-3z+2=0\\x-3y+z-4=0\end{cases}.$$

En exprimant x et y en fonction de z, on obtient :

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}+2z\\y=-\dfrac{3}{2}+z\\z=z\end{cases}$$

qui est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Ainsi, $\mathscr{D}$ passe par $E\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;1\,;1)$.

1 Caractérisation d'un demi-espace

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur unitaire.

1.1 Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k$

On appelle $\mathscr{P}_k$ $(k \in \mathbb{R})$ l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k$.

1 Démontrer que le point de $\mathscr{P}_k$, qui appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$, est le point H qui a pour abscisse k dans le repère $(A ; \vec{n})$ de la droite $\mathscr{D}$.

2 En déduire que $\mathscr{P}_k$ est le plan perpendiculaire en H à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

1.2 Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$

1 En utilisant les résultats précédents, démontrer que l'ensemble des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$, est un demi-espace limité par un plan que l'on déterminera.

2 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ et $\vec{n}(a ; b ; c)$ un de ses vecteurs normaux.

Démontrer que le point A défini par $\overrightarrow{OA} = -\dfrac{d}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$ est un point de $\mathscr{P}$.
On note $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d > 0$.
Démontrer que, pour tout point $M(x ; y ; z)$ de l'espace, on a :

$$ax + by + cz + d > 0 \iff \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} + d > 0 .$$

En déduire l'équivalence :

$$M \in \mathscr{E}_1 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0 .$$

En déduire alors le résultat suivant :

Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$, partage l'espace en trois parties :

- le demi-espace $\mathscr{E}_1$, ensemble des points dont les coordonnées vérifient :
$$ax + by + cz + d > 0 ;$$
- le demi-espace $\mathscr{E}_2$, ensemble des points dont les coordonnées vérifient :
$$ax + by + cz + d < 0 ;$$
- le plan $\mathscr{P}$, ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d = 0$.

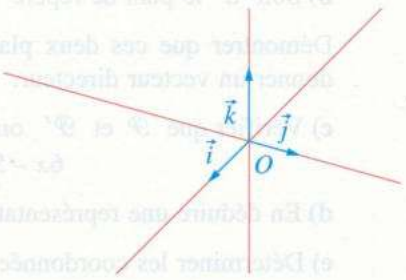
Pour déterminer les solutions de l'inéquation $ax + by + cz + d > 0$, il suffit de déterminer un point dont les coordonnées vérifient cette inéquation pour choisir le demi-espace déterminé par le plan $\mathscr{P}$.

1.3 Application

1 Déterminer et construire les droites d'intersection du plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

avec les plans de coordonnées.



2 Colorier l'ensemble des points qui appartiennent aux plans de coordonnées, et dont les coordonnées vérifient :

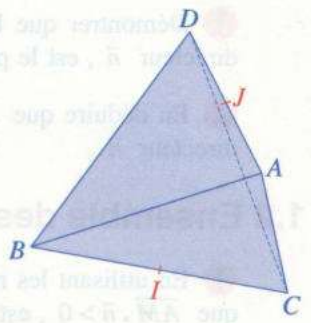
$$2x + 3y + 6z - 6 \leqslant 0 .$$

2 Perpendiculaire commune

On dit qu'une droite Δ est une perpendiculaire commune à deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de l'espace si Δ est à la fois orthogonale et sécante à chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

2.1 Dans un tétraèdre régulier

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. On note I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$.



1 Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (BC) et (AD).

2 Donner d'autres droites qui sont perpendiculaires à deux arêtes du tétraèdre $ABCD$.

3 D'une façon générale, démontrer que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires de l'espace, il existe une droite Δ orthogonale à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$, et sécante avec ces deux droites. On admet que Δ est unique.

2.2 Étude d'un exemple

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(1\,;2\,;1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;0\,;2)$, et la droite $\mathscr{D}'$ qui passe par $B(4\,;2\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}'(0\,;1\,;-3)$.

1 Vérifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

On appelle Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, H' le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$. On se propose de calculer la distance HH'.

2 • **Méthode 1**

a) Écrire des représentations paramétriques des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Soit M un point de $\mathscr{D}$ de paramètre t et N un point de $\mathscr{D}'$ de paramètre m.

Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$, en fonction des paramètres t et m.

b) Déterminer m et t pour que $\overrightarrow{MN}$ soit orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$.

c) En déduire les coordonnées des points H et H' et la distance HH'.

3 • **Méthode 2**

a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;3\,;1)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$.

b) Soit $\mathscr{P}$ le plan de repère $(A\,;\vec{u},\vec{n})$ et $\mathscr{P}'$ le plan de repère $(B\,;\vec{u}',\vec{n})$.

Démontrer que ces deux plans sont sécants suivant une droite. Que représente cette droite ? En donner un vecteur directeur.

c) Vérifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont pour équations respectives :

$$6x-5y+3z+1=0 \quad \text{et} \quad -5x+3y+z+12=0\,.$$

d) En déduire une représentation paramétrique de Δ.

e) Déterminer les coordonnées des points H et H' et en déduire la distance HH'.

3 Plans contenant une droite donnée

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3.1 Plans sécants

1 Démontrer que l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2z-3=0 \end{cases},$$

est une droite $\mathscr{D}$ dont on donnera un vecteur directeur $\vec{u}$.

2 Soit α et β deux réels non tous les deux nuls.

On appelle $\mathscr{P}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\alpha(2x+y+1)+\beta(x+2z-3)=0\ .$$

a) Démontrer que $\mathscr{P}_{\alpha,\beta}$ est un plan de l'espace, pour tout couple de réels $(\alpha\,;\beta)\neq(0\,;0)$.
b) Démontrer que, pour tout couple de réels $(\alpha\,;\beta)\neq(0\,;0)$, la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}_{\alpha,\beta}$.

On admet que tout plan contenant la droite $\mathscr{D}$ est un plan $\mathscr{P}_{\alpha,\beta}$.

3 Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $\mathscr{D}$ et passant par l'origine.

3.2 Plans tangents à une sphère

On se propose de déterminer les plans qui contiennent la droite $\mathscr{D}$ de la partie précédente, et sont tangents à la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(0\,;4\,;0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1 Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+2z-3=0$ n'est pas tangent à $\mathscr{S}$.

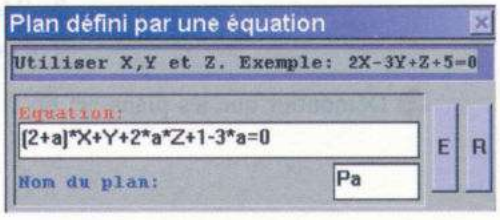
On peut donc choisir α différent de 0 et, en divisant par α, considérer les plans $\mathscr{P}_a$, qui contiennent $\mathscr{D}$, et ont une équation de la forme :

$$2x+y+1+a(x+2z-3)=0\ .$$

2 **Conjecture du résultat à l'aide de GeospaceW**

• Créer le point A, la variable numérique a réelle dans un intervalle, la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}_a$.

• En créant la droite d'intersection du plan $\mathscr{P}_a$ avec le plan (xOy) par exemple, et en se plaçant en mode TRACE, on peut visualiser le fait que l'ensemble des plans $\mathscr{P}_a$ contient tous les plans qui contiennent la droite $\mathscr{D}$, sauf un. Lequel ?



• En créant le cercle intersection de $\mathscr{P}_a$ avec la sphère $\mathscr{S}$, conjecturer les valeurs de a qui fournissent les plans $\mathscr{P}_a$ tangents à la sphère $\mathscr{S}$.

3 Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}_a$ et déterminer les réels a pour lesquels le plan $\mathscr{P}_a$ est tangent à $\mathscr{S}$.

4 Résolution d'un système paramétré

Soit m un réel donné. On considère le système linéaire :

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ -mx-y+z=m-1 \\ x+my-z=m+2 \end{cases}.$$

4.1 Méthode 1

1 Démontrer que le système (S) est équivalent au système :

$$(S_1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ (m+1)x+2y=-m+2 \\ 2x+(m+1)y=m+3 \end{cases}.$$

2 Soit (T) le système à deux inconnues $\begin{cases} (m+1)x+2y=-m+2 \\ 2x+(m+1)y=m+3 \end{cases}$.

a) Démontrer que (T) peut s'interpréter comme l'intersection de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

b) Déterminer un vecteur normal à chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

c) En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs du réel m pour lesquelles les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.

d) Résoudre le système (S) pour les valeurs de m appartenant à $\mathscr{E}$.

e) Que se passe-t-il pour les valeurs n'appartenant pas à $\mathscr{E}$?

4.2 Méthode 2

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Vérifier que la résolution du système (S) peut s'interpréter comme la recherche des points d'intersection entre les plans :

$\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z=1$,
$\mathscr{Q}$ d'équation $-mx-y+z=m-1$,
$\mathscr{R}$ d'équation $x+my-z=m+2$.

2 Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ de vecteur directeur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ m+1 \\ 1-m \end{pmatrix}.$$

3 On appelle $\vec{n}$ un vecteur normal du plan $\mathscr{R}$.

Déterminer les réels m pour lesquels $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

4 Discuter, suivant les valeurs du réel m, de l'existence et du nombre de solutions du système (S).

Faire le point

• Caractérisations d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ la droite (AB) et $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

$M \in \mathscr{D} \iff$

avec des vecteurs	avec des coordonnées	avec des barycentres
$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec t réel.	$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ **représentation paramétrique**	M est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec α et β réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$

• Caractérisations d'un segment

- $M \in [AB] \iff \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0\,;1]$.
- $M \in [AB] \iff M$ est le barycentre de (A, α) et (B, β), avec α et β réels positifs tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

• Caractérisations d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ le plan (ABC), $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ un repère de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$M \in \mathscr{P} \iff$

avec des vecteurs	avec des coordonnées	avec des barycentres
$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec α et β réels	$ax + by + cz + d = 0$ **équation cartésienne du plan** $\mathscr{P}$	M est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec α, β et γ réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

savoir	comment faire ?
déterminer une représentation paramétrique d'une droite $\mathscr{D}$	on trouve les coordonnées d'un point A de $\mathscr{D}$ et les coordonnées $(a\,;b\,;c)$ d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, puis on écrit le système : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
déterminer une équation d'un plan $\mathscr{P}$	on trouve les coordonnées d'un point A de $\mathscr{P}$ et les coordonnées $(a\,;b\,;c)$ d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$; on peut utiliser l'une des méthodes suivantes : • traduire analytiquement l'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ • écrire l'équation sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ et calculer d pour que les coordonnées de A vérifient cette équation • écrire une représentation paramétrique et éliminer les paramètres

1 Droites de l'espace

Sauf mention contraire, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Le point $A(7\,;-2\,;1)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

2° L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $2x-y+3=0$ est une droite.

3° L'ensemble des points M de l'espace qui admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = -1+2\cos t \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in [0\,;\pi]$$

est un segment de droite.

4° On considère le point $A(-1\,;2\,;1)$ et la droite $\mathscr{D}$ passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-5\,;3\,;-4)$.

Il existe une unique droite Δ orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par A .

2 Caractérisations d'une droite

2 **1°** Déterminer, et représenter, l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

2° Le point P de coordonnées $(-1\,;3\,;-2)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?

Même question avec le point Q de coordonnées $(2\,;0\,;3)$.

3° Déterminer, et représenter, l'ensemble $\mathscr{D}'$ des points de $\mathscr{D}$ pour lesquels t décrit l'intervalle $[0\,;2]$.

3 Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(2\,;-3\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;2\,;3)$, puis calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec les plans de repères respectifs $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $(O\,;\vec{j},\vec{k})$ et $(O\,;\vec{i},\vec{k})$.

4 Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(2\,;-3\,;1)$ et $B(2\,;1\,;-1)$, puis donner une représentation paramétrique de $[AB]$.

5 La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

1° Déterminer, pour chacun des points suivants, s'il appartient à la droite $\mathscr{D}$: $A(3\,;-1\,;-3)$; $B(0\,;2\,;1)$.

2° Donner un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

3° Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}'$, parallèle à $\mathscr{D}$ passant par le point $C(1\,;0\,;-2)$.

6 **1°** Déterminer l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 2-3t^2 \\ z = 2+2t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

2° Même question avec $t \in [-1\,;3]$.

7 Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'\begin{cases} x = 2t' \\ y = 5-6t' \\ z = 1-2t' \end{cases},\ t' \in \mathbb{R}\ .$$

Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues.

8 Soit $ABCD$ un tétraèdre.

À tout point M de la droite (AD) , distinct de A , on associe l'isobarycentre G des points A , B , C et M .

Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ décrit par G lorsque M décrit la droite (AD) .

Indication : utiliser le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

9 Soit un tétraèdre $ABCD$.

On symétrise le sommet A par rapport aux milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$.

Soit D' , B' et C' les points ainsi obtenus.

1° Vérifier que $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.

2° Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (BB'), (CC') et (DD').

3° Montrer que ces droites sont concourantes en un point I dont on précisera les coordonnées.

10 Soit H le projeté orthogonal du point $A(-1\,;3\,;5)$ sur la droite $\mathscr{D}$ passant par $B(0\,;-3\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-2\,;-1)$.

1° Démontrer qu'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{BH}=a\vec{u}$.

2° Déterminer les coordonnées du point H.

11 On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathscr{D}\begin{cases}x=2+t\\y=3-2t\\z=5-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad\mathscr{D}'\begin{cases}x=4-3t'\\y=5-8t'\\z=7-t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

On considère un point M de $\mathscr{D}$ et un point M' de $\mathscr{D}'$.

Quel est l'ensemble des milieux du segment $[MM']$ lorsque M décrit $\mathscr{D}$ et M' décrit $\mathscr{D}'$?

2 Plans de l'espace

1 Vrai-Faux

12 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La droite passant par $A(2\,;-2\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5\,;-3\,;-2)$ est parallèle au plan d'équation :
$x+y+z+1=0$.

2° L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient l'équation $y=2x+3$ est une droite.

3° Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives $x-y+z=5$ et $4x+3y-z-2=0$ sont perpendiculaires.

4° Le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x-y-z+1=0$ a pour repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ avec $A(0\,;1\,;0)$, $\vec{u}(1\,;3\,;0)$ et $\vec{v}(0\,;-1\,;1)$.

13 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

On considère les points :
$A(-1\,;1\,;3)$, $B(2\,;1\,;0)$ et $C(4\,;-1\,;5)$.

1° Il existe un couple de réels $(\alpha\,;\beta)$, tels que C soit le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).

2° L'ensemble des barycentres des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) (avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$) est le plan d'équation $2x+7y+2z-11=0$.

3° L'ensemble des barycentres des points pondérés (A,α^2), $(B,1-\alpha^2)$, avec $\alpha\in[0\,;1]$, est le segment $[AB]$.

2 Caractérisation d'un plan

14 Donner les coordonnées d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :

a) $\mathscr{P}_1 : \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-z=0$; **b)** $\mathscr{P}_2 : -x-y+5z+1=0$;

c) $\mathscr{P}_3 : 5x+2z+2=0$; **d)** $\mathscr{P}_4 : y=-1$.

15 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, contenant le point A, dont $\vec{u}$ est un vecteur normal :

a) $A(-1\,;2\,;0)$ et $\vec{u}(1\,;1\,;-1)$;

b) $A(0\,;0\,;2)$ et $\vec{u}(1\,;0\,;0)$;

c) $A(-1\,;-1\,;2)$ et $\vec{u}(-1\,;0\,;1)$.

16 Soit les points $A(-1\,;1\,;3)$ et $B(1\,;5\,;-1)$.
Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

17 Soit les points :
$A(1\,;0\,;1)$, $B(2\,;-1\,;1)$ et $C(0\,;-2\,;3)$.
Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ contenant le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

18 Soit le point $A(1\,;2\,;3)$ et le vecteur $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$.
Déterminer une équation de l'ensemble des points M vérifiant $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=2$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

19 Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-z+1=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation $-x+3y-2z+4=0$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection $\mathscr{D}$ des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.
Vérifier le résultat en utilisant les vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

20 Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-z=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation $2x-y-z-1=0$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection $\mathscr{D}$ des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

21 Soit les points :
$A(0\,;1\,;1)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(-1\,;2\,;1)$ et $D(0\,;1\,;2)$.
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

22 Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}\ \begin{cases} x=-4+t \\ y=4+2t \\ z=2+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'\ \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=1+t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

23 Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation :
$2x+y-2z+5=0$.

1° Déterminer un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

2° Démontrer que le vecteur $\vec{v}(1\,;0\,;1)$ est un vecteur directeur du plan $\mathscr{P}$.

3° Déterminer une base orthonormale $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$, telle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient respectivement colinéaires à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$.

24 Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-2z-1=0$.
Déterminer un repère du plan $\mathscr{P}$.

25 Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}\ \begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'\ \begin{cases} x=5+2t' \\ y=2t' \\ z=-5-t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe un plan $\mathscr{P}$, et un seul, contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

26 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-2y+z-2=0$ et les points $A(1\,;1\,;5)$ et $B(-1\,;-3\,;4)$. Déterminer le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AB).

27 Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1\,;1\,;2)$ et orthogonal à la droite d'intersection du plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x+y+z=0$ et du plan $\mathscr{Q}'$ d'équation $x-y+z-4=0$.

28 Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(-3\,;1\,;2)$ et parallèle aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathscr{D}\ \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'\ \begin{cases} x=2+t' \\ y=-5+t' \\ z=4+t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

29 Déterminer une équation cartésienne du plan défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+t+m \\ y=2+2t-m \\ z=-1+t-m \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \text{ et } m\in\mathbb{R}.$$

30 On considère les points :
$A(2\,;1\,;1)$, $B(3\,;0\,;1)$, $C(0\,;1\,;5)$, $D(-1\,;0\,;1)$ et $E(6\,;2\,;3)$.

1° Vérifier que A, B et C définissent un plan et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2° Déterminer des représentations paramétriques de la droite (DE).

3° Déterminer les coordonnées du point I, intersection de la droite (DE) avec le plan (ABC).

3 Avec des barycentres

31 Soit A, B et C trois points non alignés.
Soit B' le milieu du segment $[AC]$, C' le milieu du segment $[AB]$ et G le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,2)$ et $(C,1)$. Démontrer que G est un point de $[B'C']$.

32 A, B, C et D sont quatre points de l'espace. On considère :
- le barycentre I des points pondérés :
$(A,1)$, $(B,-2)$, $(C,-3)$,
- le barycentre J des points pondérés :
$(A,1)$, $(C,-3)$, $(D,4)$
- et le barycentre K des points pondérés :
$(A,1)$, $(B,-2)$, $(D,4)$.

1° Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}$ est indépendant du point M de l'espace.

2° Démontrer que les droites (DI), (JB) et (CK) sont parallèles.

33 Soit ABC un triangle rectangle en A.

On désigne par O le milieu de $[BC]$, par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et par I le milieu de $[AO]$. À tout point M du plan, on associe les points P et Q tels que :

$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1° Démontrer que I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

2° Démontrer que P et Q sont les images de M par deux transformations dont on donnera les éléments caractéristiques.

3° Dans cette question, M est un point du cercle $\mathscr{C}$.

a) Déterminer l'ensemble des points P et Q lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

b) Soit O' le symétrique de O par rapport à A.
Quelle est la nature du quadrilatère $OMQO'$?
Démontrer que le segment $[PQ]$ garde une longueur fixe et contient le point O'.

34 Soit les réels a, b, c, a', b', c', tels que :

$a+b+c \neq 0$ et $a'+b'+c' \neq 0$

et trois points A, B et C non alignés de l'espace.
On suppose que le barycentre G des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) est confondu avec le barycentre G' des points pondérés (A, a'), (B, b'), (C, c').

1° En exprimant de deux façons différentes le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, démontrer que :

$$\frac{b}{a+b+c} = \frac{b'}{a'+b'+c'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{a+b+c} = \frac{c'}{a'+b'+c'}.$$

2° Démontrer, de même, que $\dfrac{a}{a+b+c} = \dfrac{a'}{a'+b'+c'}$.

3° Démontrer qu'il existe un réel t tel que $a = ta'$; $b = tb'$ et $c = tc'$. Qu'en conclure ?

35 On considère un triangle ABC et les points I, J, K tels que :
I est le barycentre des points A et C affectés respectivement des coefficients 2 et 1,
J est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 1 et 2,
K est le barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients -4 et 1.

1° Démontrer que B est le barycentre des points K et C affectés respectivement des coefficients 3 et 1.

2° Déterminer trois réels a, b et c, tels que J soit le barycentre des points pondérés (A, a), (K, b) et (C, c).

3° Démontrer que J est le milieu de $[IK]$.

36 A, B et C sont trois points non alignés et λ est un réel quelconque.

1° Démontrer que le barycentre G_λ des points pondérés $(A, 3)$, $(B, \lambda - 2)$ et $(C, -\lambda + 1)$ existe.

2° Quel est l'ensemble des points G_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$?

37 A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace et α un réel quelconque.

1° Vérifier que le barycentre G_α des points pondérés :
$(A, \alpha - 1)$, $(B, \alpha + 2)$, $(C, 2\alpha + 3)$ et $(D, -4\alpha - 2)$
existe pour toutes les valeurs de α.

2° Quel est l'ensemble des points G_α lorsque α décrit $\mathbb{R}$?

3 Systèmes et intersection de plans

1 Vrai-faux

38 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Le système :

$$\begin{cases} 2a + 3b - c = -2 \\ 5b - 4c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2° Le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

admet l'unique solution $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

3° Le système :

$$\begin{cases} 3x - 5y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

admet pour unique solution $(-7\ ;\ -5\ ;\ 1)$.

2 Intersection de plans

39 On considère le système :

$$(S)\ \begin{cases} x+y=2 & (1)\\ 2x-y=-5 & (2)\\ 5x-3y=4 & (3)\end{cases}$$

Interprétation géométrique 1
Le plan étant rapporté au repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le système (S) permet d'étudier la position relative des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ d'équations respectives (1), (2) et (3).
Ce système admet-t-il des solutions ? Si oui, les déterminer.

Interprétation géométrique 2
L'espace étant rapporté au repère $(O\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on pose $\vec{u}(1\,;2\,;5)$, $\vec{v}(1\,;-1\,;-3)$ et $\vec{w}(2\,;-5\,;4)$.
Écrire vectoriellement le système (S) et en déduire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

40 On considère le système $(S)\ \begin{cases} ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ d'inconnues x et y avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et $(a'\,;b')\neq(0\,;0)$.
On appelle déterminant du système le réel $d=ab'-a'b$.

1° Démontrer que le système (S) admet une unique solution si, et seulement si, $d\neq 0$ (voir *Activité* 1).

2° Interpréter géométriquement ce résultat.

41 **1°** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $-x+y-2z=-4$ et le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $-x-y-z=-11$ sont sécants.
Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de ces deux plans.

2° Démontrer que le système $(S)\ \begin{cases} -x+y-2z=-4\\ -x-y-z=-11\\ 2x+y-z=8\end{cases}$ admet une solution unique.

3° Résoudre le système (S).

3 Systèmes

Dans les exercices 42 *à* 44, *résoudre les systèmes et interpréter le résultat géométriquement.*

42 **a)** $\begin{cases} 4x+2y+z=4\\ 4x-2y+z=-2\\ 4x-y=0{,}5\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+3y+4z=-1\\ 2x+3y+z=-1\\ x+y+z=1\end{cases}$.

43 **a)** $\begin{cases} x-y=0\\ 2x-2y+2z=2\\ -x+y-z=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+2y-z=5\\ 2x+3y+z=5\\ 3x+7y+4z=10\end{cases}$.

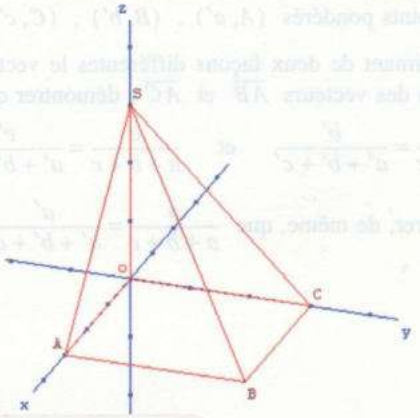
44 **a)** $\begin{cases} x-y+z=1\\ 2x-2y+2z=2\\ -x+y-z=-1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x+3z=7\\ -4x-2y+z=3\\ 2x+2y+2z=4\\ -10x-6y=2\end{cases}$.

4 Demi-espaces

45 Caractériser à l'aide d'un système d'inéquations l'intérieur du cube de centre O d'arête 4, dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées.

46 Quel est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $|x|+|y|+|z|\leqslant 2$?

47 La pyramide $OABCS$ est à base carrée avec $A(3\,;0\,;0)$ et a pour sommet $S(0\,;0\,;3)$.
Caractériser par un système d'inéquations l'intérieur de la pyramide $OABCS$.



48 Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9\\ z\leqslant 4\\ z\geqslant -1\end{cases}$?

49 Représenter l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant y\leqslant 4\\ 0\leqslant z\leqslant 4\\ x+y+z-8\leqslant 0\end{cases}.$$

4 Problèmes

1 Barycentres

50 On considère un triangle ABC du plan.

1° a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$.

b) Déterminer et construire le barycentre G' des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 5)$ et $(C, -2)$.

2° a) Soit J le milieu de $[AB]$.
Démontrer que J appartient à la droite (GG').

b) Démontrer que le barycentre I des points pondérés $(B\,;2)$, $(C\,;-1)$ appartient à la droite (GG').

3° Soit D un point quelconque du plan.
On appelle O le milieu de $[CD]$ et K celui de $[OA]$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que K soit barycentre des points pondérés :

$$(A, a)\ ,\quad (C, b)\ ,\quad (D, c)\ .$$

b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
Déterminer des réels a' et c' tels que X soit barycentre des points pondérés (A, a') et (C, c').

51 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1° Soit M un point de l'espace et M' le point défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\ .$$

Démontrer que les points M, M' et G, isobarycentre des points A, B, C et D, sont alignés.

2° Le point M décrit le plan (BCD).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le plan (BCD). En donner une équation cartésienne.

3° Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des plans $\mathscr{P}$ parallèles à (BCD).
Tout plan de $\mathscr{E}$ coupe (AB) en E et (AC) en F.
Quel est l'ensemble des barycentres des points E et F affectés des coefficients a et b, tels que :

$$a \geqslant 0\ ,\quad b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a + b \neq 0\ ,$$

lorsque $\mathscr{P}$ décrit $\mathscr{E}$.

(D'après BAC)

52 On considère quatre points non coplanaires A, B, C, D de l'espace et deux réels strictement positifs a et b. Soit :
Q le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b),
N le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, ba),
P le barycentre des points pondérés (C, ba) et (D, a^2)
et M le barycentre des points pondérés (D, a^2) et (A, a).
Démontrer que quels que soient les réels a et b, les droites (PQ) et (MN) sont sécantes.

53 **1°** Soit M, N, O, P quatre points du plan.
Démontrer que $MNOP$ est un parallélogramme si, et seulement si, le point P est le barycentre des points pondérés $(M, 1)$, $(N, -1)$ et $(O, 1)$.

2° Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes dans l'espace. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$.

a) Démontrer que L est un barycentre des points I, J, K affectés de coefficients que l'on déterminera.
Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $IJKL$?

b) Démontrer que les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 des parallélogrammes $ABCD$, $A'B'C'D'$ et $IJKL$ sont alignés et préciser les positions relatives de Ω_1, Ω_2 et Ω_3.

2 Plans de l'espace

54 On considère l'ensemble des points de l'espace, noté $\mathscr{P}_m$, dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient l'équation $(3-m)x + 4y - (1+2m)z - 5 = 0$ avec m réel donné quelconque.

1° Démontrer que, pour toute valeur du réel m, l'ensemble $\mathscr{P}_m$ est un plan.

2° Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$.

3° Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans tous les plans $\mathscr{P}_m$.

55 Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + y - z + 3 = 0$ et les points $A(1\,;1\,;0)$ et $B(1\,;-2\,;4)$.

1° Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$
Démontrer que le plan $\mathscr{Q}$ de repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \vec{n})$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
En déduire une représentation paramétrique du plan $\mathscr{Q}$.

2° Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$.

3° En déduire une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}'$, projetée orthogonale de la droite (AB) sur le plan $\mathscr{P}$.

56 Soit $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal de l'espace.

1° On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C.

a) Déterminer les coordonnées de G.

b) Démontrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2° On considère les points :

$$A'(2\,;0\,;0)\ ,\quad B'(0\,;2\,;0) \quad \text{et} \quad C'(0\,;0\,;3)\ .$$

a) Vérifier que ces trois points définissent un plan.

b) Démontrer que le plan $(A'B'C')$ a pour équation :

$$3x + 3y + 2z = 6 .$$

3° Vérifier que la droite (AC) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k , \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R} .$$

4° Calculer les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan $(A'B'C')$.

5° Vérifier que la droite (BC) coupe le plan $(A'B'C')$ en $L(0 ; 4 ; -3)$.

6° Démontrer que les droites (AB), $(A'B')$ et (KL) sont parallèles.

7° Caractériser l'intersection des deux plans (ABC) et $(A'B'C')$ à l'aide de points définis précédemment.

(D'après BAC)

57 On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol.
Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, dont on connaît des représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}_1 \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \mathscr{D}_2 \begin{cases} x = 0{,}5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R} .$$

1° Prouver que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

2° On veut installer au sommet S de la tour de contrôle un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée Δ. S a pour coordonnées $(3 ; 4 ; 0{,}1)$.
On note $\mathscr{P}_1$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_1$, et $\mathscr{P}_2$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_2$.

a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}_2$ est sécante au plan $\mathscr{P}_1$ et que la droite $\mathscr{D}_1$ est sécante au plan $\mathscr{P}_2$.

b) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de Δ pour que cette droite coupe chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

58 **1°** Résoudre le système $\begin{cases} a + 4b + c + d = -18 \\ a - 2b - c - d = 6 \\ a + 2b + 3c + d = -14 \end{cases}$.

2° Déterminer l'ensemble des centres des sphères qui passent par les points :

$A(1 ; 4 ; 1)$, $B(-1 ; 2 ; 1)$ et $C(1 ; 2 ; 3)$.

3° Existe-t-il des sphères qui passent par A, B, C et O ?

3 Avec GeospacW

59 Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2, P_3 à partir de trois composants C_1, C_2, C_3.

Les données sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

	produits		
	P_1	P_2	P_3
nombre de composants $C1$	1	2	4
nombre de composants $C2$	2	1	2
nombre de composants $C3$	3	2	2

On lit par exemple : pour fabriquer une unité de produit P_3, il faut 4 composants C_1, 2 composants C_2 et 2 composants C_3.

Les contraintes d'approvisionnement sont telles que l'entreprise dispose, chaque semaine, de 70 composants C_1, 80 composants C_2 et 60 composants C_3.

Les marges sur coûts variables unitaires sont de 3 € pour P_1, 5 € pour P_2 et 6 € pour P_3.

On note respectivement x, y, z les nombres d'unités de P_1, P_2, P_3 fabriqués au cours d'une semaine.

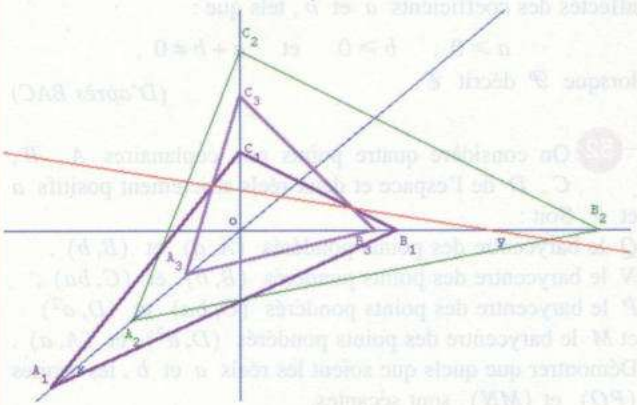
1° Déterminer le système d'inéquations rendant compte des contraintes de production et visualiser les points $M(x ; y ; z)$ à l'aide de GeospacW.

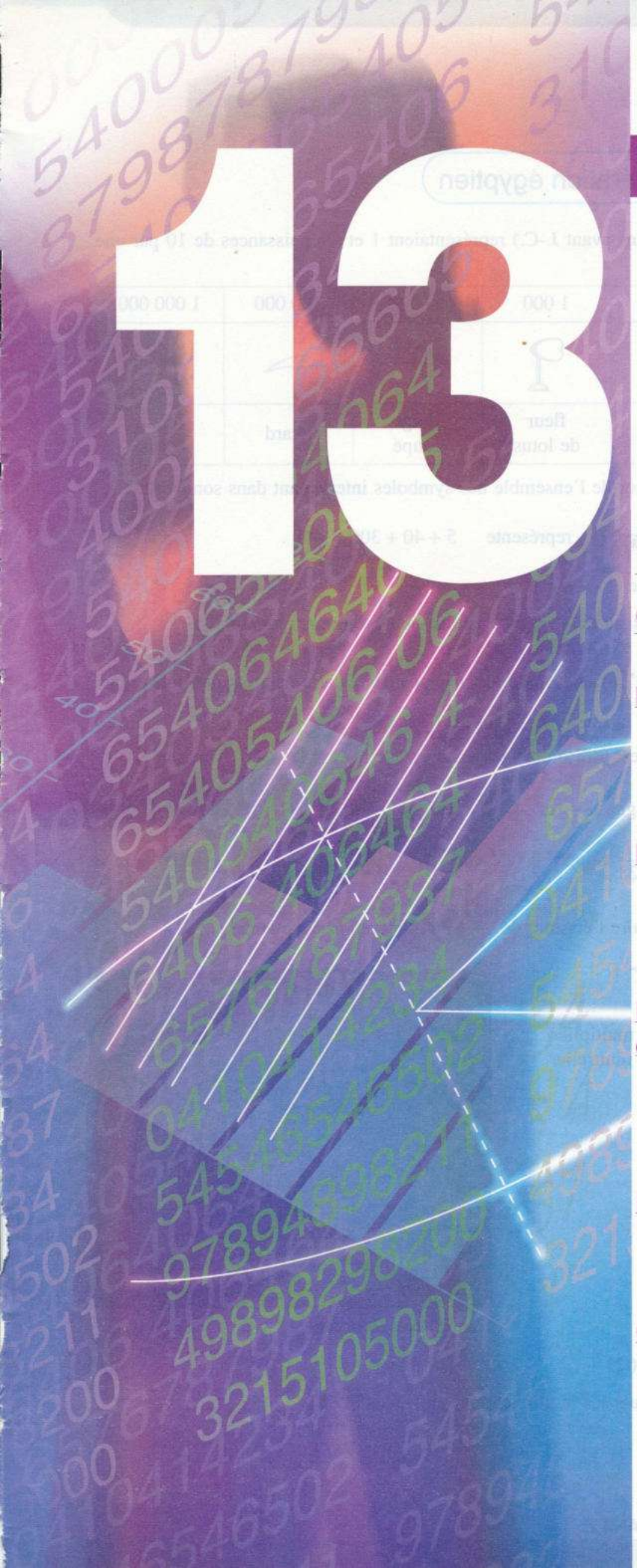
Le solide obtenu s'appelle le polyèdre des contraintes.

2° Démontrer que la marge sur coût variable hebdomadaire m de la production est donnée par $3x + 5y + 6z = m$.

3° Créer le plan $\mathscr{P}_m$ d'équation $3x + 5y + 6z = m$ et son intersection avec le polyèdre des contraintes.

En faisant varier m, déterminer un triplet $(x ; y ; z)$ qui rend maximale la marge sur coût variable hebdomadaire.





CHAPITRE

13

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ p. 346
- définir la relation de divisibilité
- énoncer les principales propriétés de la divisibilité

Nombres premiers p. 347
- définir un nombre premier
- démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers

Décomposition d'un entier p. 348
- mettre en place la décomposition de tout entier naturel en produit de facteurs premiers

Division euclidienne p. 349
- définir la division euclidienne dans $\mathbb{N}$
- généraliser à $\mathbb{Z}$

Congruences p. 350
- poser le vocabulaire des congruences
- étudier la compatibilité avec les opérations dans $\mathbb{Z}$

activités

1 Le système de numération égyptien

1 Les scribes égyptiens (environ 1 800 ans avant J.-C.) représentaient 1 et les puissances de 10 par une figure :

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
						
		corde enroulée	fleur de lotus	doigt coupé	tétard	dieu assis

Pour lire un nombre, on additionne la valeur de l'ensemble des symboles intervenant dans son écriture.

Par exemple,  représente $5 + 40 + 300 = 345$.

a) Écrire 1 789 en numérotation égyptienne.

b) Pourquoi le système égyptien est-il qualifié de « système additif non positionnel à base 10 » ?

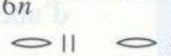
2 En dehors des entiers, les Égyptiens n'utilisaient que les inverses des entiers naturels non nuls, ainsi que la fraction $\frac{2}{3}$ qui était notée  et la fraction $\frac{1}{2}$, notée  .

 est appelé signe de « la bouche » et est utilisé pour les inverses.

Par exemple,  désigne $\frac{1}{3}$,  désigne $\frac{1}{12}$ et  désigne $\frac{1}{24}$.

Pour noter $\frac{2}{7}$, on remarque que $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$; donc $\frac{2}{7}$ s'écrit  .

a) Vérifier que $\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$. En déduire l'écriture de $\frac{2}{15}$ en numération égyptienne.

b) Quelle fraction représente  ?

3 Les Égyptiens savaient très facilement multiplier un nombre par 2 et cela leur permettait de multiplier rapidement deux entiers.

Par exemple, pour effectuer 29×37 , on remarque que $29 = 16 + 8 + 4 + 1$.

$1 \times 37 = 37$ $\times 2$

$2 \times 37 = 74$ $\times 2$

$4 \times 37 = 148$ $\times 2$

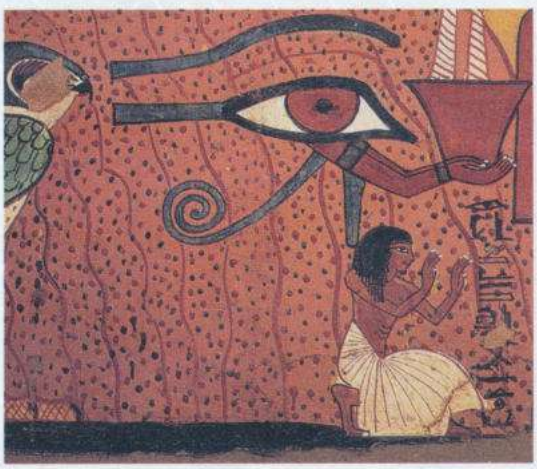
$8 \times 37 = 296$ $\times 2$

$16 \times 37 = 592$

donc $29 \times 37 = 592 + 296 + 148 + 37 = 1\ 073$.

Utiliser la méthode précédente pour effectuer les multiplications suivantes :

a) 43×55 ; **b)** 89×92 .



© G. Dagli Orti

L'œil d'Horus représente $1/2^n$ pour n entier de 1 à 6.

2 Des questions « simples » restent posées

On peut définir l'arithmétique comme l'étude des propriétés des nombres entiers. Cette étude remonte aux sources de l'humanité, motivée par le besoin de dénombrer, donc de créer et de manipuler un système de numération.

► *Voir Activité 1*

Un tel système, avec des opérations entre ses nombres (addition, multiplication,...), a donné naissance à certaines « curiosités numériques » qui ont exercé une fascination permanente au cours des siècles.
On présente ici quelques problèmes d'énoncés simples, qui résistent cependant à toute résolution depuis plusieurs siècles.

Un peu de recherche

1 Nombres pairs

On a $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$ et $10=5+5$.
Écrire tous les nombres pairs entre 12 et 20 comme somme de deux nombres premiers.

2 Nombres premiers jumeaux

Ce sont des nombres premiers différant de deux unités, comme 11 et 13.

Trouver deux autres couples de nombres premiers jumeaux.

3 Nombres parfaits

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs autres que lui-même. Par exemple, 6 est parfait, car ses diviseurs positifs sont 1, 2, 3, 6 et on a $1+2+3=6$.
Vérifier que 28 est parfait.

Des questions qui restent posées

Les questions suivantes, relatives aux trois points abordés ci-dessus ne sont encore pas résolues.

- Tout nombre pair $n>2$ peut-il toujours s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ?
- Existe-t-il une infinité de couples de nombres premiers jumeaux ? (On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.)
- Existe-t-il une infinité de nombres parfaits ? Certains sont-ils impairs ?

L'arithmétique laisse encore d'immenses champs d'exploration à qui veut s'y aventurer...

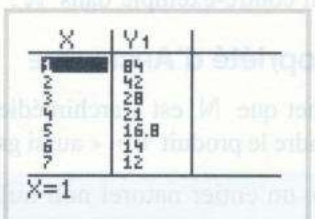
3 Recherche des diviseurs d'un nombre

On se propose de rechercher à la calculatrice des diviseurs de 84 par trois méthodes différentes.

1re méthode : utilisation des fonctions







Pour toute valeur entière de la colonne Y1 on en déduit deux diviseurs du nombre.

activités

2e méthode : utilisation des capacités récursives de la calculatrice

1 on entre la liste {84 ; 1}

2 on entre la liste {84/(ANS(2)+1);ANS(2)+1}

```
{84,1}
                {84 1}
{84/(Ans(2)+1),A
ns(2)+1}
                {42 2}
```

3 on appuie sur ENTER jusqu'à obtenir le premier nombre inférieur au deuxième et on note les couples formés de deux entiers.

```
                {28 3}
                {21 4}
           {16.8 5}
                {14 6}
                {12 7}
           {10.5 8}
{9.333333333 9}
```

Tout couple d'entiers affiché est un couple de diviseurs.

3e méthode : utilisation de la programmation

algorithme

demander N
pour D variant de 1 à $\sqrt{N}$
  tester si D divise N
  si OUI, afficher {D , N/D}

programme

```
PROGRAM:DIVISEUR
:Prompt N
:For(D,1,√(N),1)
:If fPart(N/D)=0
:Disp {D,N/D}
:End
```

utilisation pour N = 84

```
{1 84}
{2 42}
{3 28}
{4 21}
{6 14}
{7 12}
Done
```

Si la liste est trop longue, on remplace la commande Disp par la commande Pause.

4 Les ensembles ℕ et ℤ

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$ et $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.

Parties non vides de ℕ ou de ℤ

Une partie A non vide de $\mathbb{Z}$ est **minorée** s'il existe un élément m de $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout élément a de A, on a $m \leqslant a$.
A **admet un plus petit élément** d si $d \in A$ et si, pour tout élément a de A, on a $d \leqslant a$.

1 On admet la propriété suivante :

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

a) Citer le plus petit élément de l'ensemble des entiers naturels pairs, de l'ensemble des multiples naturels non nuls de 11 et de l'ensemble des diviseurs naturels de 17 distincts de 1.

b) La propriété ci-dessus est-elle vraie dans $\mathbb{Z}$?
Donner un exemple de partie non vide de $\mathbb{Z}$ qui n'admet pas de plus petit élément.
On admet la propriété suivante :

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

2 Énoncer une propriété (que l'on admettra) concernant les parties non vides et majorées de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$.

3 Les propriétés ci-dessus sont fausses si l'on remplace $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{R}$; citer, pour chacune d'entre elles, un contre-exemple dans $\mathbb{R}$.

Propriété d'Archimède

On admet que $\mathbb{N}$ est « archimédien », c'est-à-dire que, pour un entier naturel b non nul quelconque, on peut rendre le produit nb « aussi grand que l'on veut » pourvu que l'on choisisse n « suffisamment grand ».

Soit b un entier naturel non nul.

Alors, quel que soit l'entier naturel a, il existe un entier naturel n tel que $a < nb$.

5 Suites arithmétiques et congruences

1 On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 0$.

a) Déterminer le terme général de (u_n) et vérifier que les termes de (u_n) sont les multiples de 3.

b) Démontrer que la différence entre deux termes quelconques de (u_n) est un multiple de 3.

2 On considère la suite arithmétique (v_n) de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

a) Déterminer le terme général de (v_n) et vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n + 1$.

En déduire qu'un entier naturel m est un terme de (v_n) si, et seulement si, $(m-1)$ est multiple de 3.

b) Démontrer que la différence entre deux termes de (v_n) est un multiple de 3.

3 On considère la suite arithmétique (w_n) de raison 3 et de premier terme $w_0 = 2$.

a) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de u_n et caractériser les termes de (w_n) à l'aide des multiples de 3.

b) Démontrer que la différence entre deux termes de (w_n) est un multiple de 3.

4 Pour m entier naturel quelconque, on admet qu'il existe un entier naturel N tel que l'on ait :

$$3N \leqslant m < 3(N+1) .$$

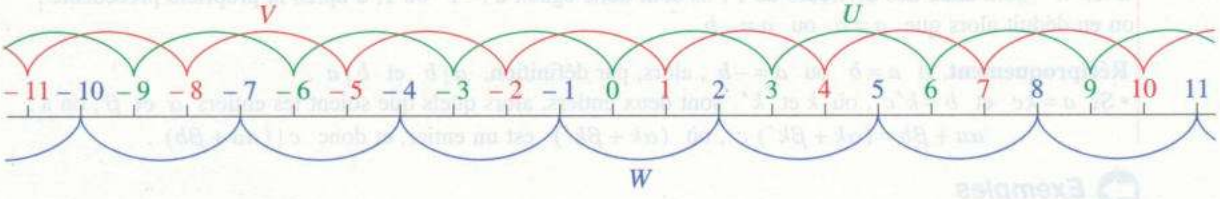
On peut démontrer cette propriété à l'aide des propriétés de $\mathbb{N}$ admises dans l'*Activité* 4.

Démontrer que m est un terme de l'une des suites (u_n), (v_n) ou (w_n).

5 On appelle (u'_n), (v'_n) et (w'_n) les suites arithmétiques de raison -3 et de premier terme 0, 1 et 2 respectivement. U désigne l'ensemble formé de la réunion des termes de (u_n) et de (u'_n), et on définit de même les ensembles V à partir de (v_n) et (v'_n), et W à partir de (w_n) et (w'_n).

Démontrer que U, V et W définissent une partition de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que tout entier relatif appartient à un, et un seul, des ensembles U, V ou W.

- L'ensemble U formé des multiples de 3 est l'ensemble des entiers relatifs u congrus à 0 modulo 3 ; on note $u \equiv 0 \ (3)$.
- L'ensemble V formé des entiers de la forme $3k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers relatifs v congrus à 1 modulo 3 ; on note $v \equiv 1 \ (3)$.
- L'ensemble W formé des entiers de la forme $3k+2$ $(k \in \mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers relatifs w congrus à 2 modulo 3 ; on note $w \equiv 2 \ (3)$.



Exemples

Déterminer pour chacune des valeurs de m ci-dessous l'unique entier r appartenant à $\{0 ; 1 ; 2\}$ tel que $m \equiv r \ (3)$:

a) $m = 7$; **b)** $m = 19$; **c)** $m = -71$; **d)** $m = 921$; **e)** $m = -1\,024$.

cours

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1 Définition — définition

Soit a et b deux entiers.

On dit que « b **divise** a » s'il existe un entier k tel que $a = kb$. On note $b \mid a$.

On dit également « a est un multiple de b » ou « b est un diviseur de a ».

Exemples

On a $12 = 3 \times 4 = (-3) \times (-4)$; donc $4 \mid 12$ et $-3 \mid 12$. L'ensemble des diviseurs de 12 dans $\mathbb{Z}$ est :

$$D_{12} = \{-12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}.$$

1.2 Les diviseurs particuliers — propriétés

- Pour tout entier a, on a $1 \mid a$, $-1 \mid a$, $a \mid a$ et $-a \mid a$;
- Les diviseurs de -1 ou de 1 dans $\mathbb{Z}$ sont -1 et 1.

Démonstration

- Le résultat est immédiat à partir des égalités $a = 1 \times a = (-1) \times (-a)$.
- D'après la propriété précédente, 1 et -1 sont des diviseurs de 1 et de -1.

Si on suppose à présent que $a \times b = 1$ ou $a \times b = -1$, pour deux entiers a et b non nuls, alors on obtient :

$$|a| \times |b| = 1, \quad \text{où} \quad |a| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |b| \geqslant 1 ;$$

ainsi, $|a| \times |b| \geqslant |a| \times 1$, d'après les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, on obtient $1 \geqslant |a|$ et on conclut que $|a| = 1$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -1$.

On trouverait de même $b = 1$ ou $b = -1$.

1.3 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ — propriétés

Quels que soient les entiers non nuls a, b et c, on a :

- si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$;
- $a \mid b$ et $b \mid a \iff a = b$ ou $a = -b$;
- si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors pour tous entiers α et β, $c \mid (\alpha a + \beta b)$.

Démonstration ► *Voir Exercices 1 à 10*

- Si $b = ka$ et $c = k'b$, où k et k' sont deux entiers, alors $c = (k'k)\, a$, où $k'k$ est un entier.
- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $b = ka$, et $a = k'b$, où k et k' sont deux entiers ; d'où :

$$ab = (kk')\, ab \quad \text{et donc} \quad kk' = 1, \text{ car } ab \neq 0.$$

k et k' sont ainsi des diviseurs de 1 ; ils sont donc égaux à -1 ou 1, d'après la propriété précédente ; on en déduit alors que $a = b$ ou $a = -b$.

Réciproquement, si $a = b$ ou $a = -b$, alors, par définition, $a \mid b$ et $b \mid a$.

- Si $a = kc$ et $b = k'c$, où k et k' sont deux entiers, alors quels que soient les entiers α et β, on a :

$$\alpha a + \beta b = (\alpha k + \beta k')\, c, \text{ où } (\alpha k + \beta k') \text{ est un entier, et donc } c \mid (\alpha a + \beta b).$$

Exemples

- Si c est un diviseur de a et de b, la propriété précédente permet en particulier d'affirmer que c est aussi un diviseur de la somme $a + b$ et des différences $a - b$ et $b - a$.
- Si le naturel n divise 1 047 et 254, alors il divise $1\,047 - 4 \times 254 = 31$, qui est premier.

On en déduit que $n = 31$ ou $n = 1$; comme 31 ne divise pas 254, on a $n = 1$.

1 est le seul diviseur positif commun à 1 047 et 254.

2 Nombres premiers

2.1 Définition

On dit qu'un entier naturel n est premier s'il admet exactement deux diviseurs entiers naturels distincts 1 et n.

L'ensemble des entiers naturels premiers sera noté $\mathbb{P}$.

Exemples *Voir Exercice résolu 1*

- 0 n'est pas premier : il admet une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier : il admet 1 pour seul diviseur naturel.
- Les nombres 2, 3, 5, 7 et 11 sont les cinq « premiers » nombres premiers.

2.2 $\mathbb{P}$ infini — théorème

- **(1)** Tout entier naturel n distinct de 1 admet au moins un diviseur premier.
- **(2)** L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.

Démonstration

- **(1)** est vraie pour $n = 0$; en effet, 2, par exemple, divise 0.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
L'ensemble des diviseurs naturels de n distincts de 1 contient n et n'est donc pas vide ;
il admet un plus petit élément que l'on nomme p.

Voir Activité 4

Soit d un diviseur naturel de p distinct de 1 (il en existe au moins un qui est p lui-même).
On a $d \leqslant p$; de plus, $d \mid p$ et $p \mid n$ donc $d \mid n$;
d est donc un diviseur naturel de n distinct de 1, d'où $d \geqslant p$, par définition de p.

On conclut donc à l'égalité $d = p$ puisque l'on a $d \leqslant p$ et $d \geqslant p$.
p admet donc un unique diviseur naturel distinct de 1 : p est donc un nombre premier naturel qui divise n.

- Pour démontrer **(2)**, on réalise un raisonnement « par l'absurde », en supposant que $\mathbb{P}$ est fini et possède n éléments :

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Soit k l'entier naturel tel que $k = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
On considère le nombre premier p_1 ; si $p_1 \mid k$, comme $p_1 \mid p_1 p_2 \ldots p_n$, on en déduit que $p_1 \mid (k - p_1 p_2 \ldots p_n)$, c'est-à-dire $p_1 \mid 1$.
On conclut alors que $p_1 = 1$, ce qui est exclu, car 1 n'est pas premier ; p_1 n'est donc pas un diviseur de k.

On prouve de la même façon qu'aucun des nombres $p_2, p_3, \ldots, p_n$ n'est un diviseur de k.
Ainsi, si $\mathbb{P}$ est fini, on peut construire un entier naturel k qui ne possède aucun diviseur premier, ce qui contredit la propriété **(1)** du théorème.

On conclut alors que l'ensemble $\mathbb{P}$ n'est pas fini, donc qu'il est infini.

Voir Exercices 11 à 19

Remarques

- On généralise la notion de nombre premier à $\mathbb{Z}$ en convenant qu'un entier négatif est premier si son opposé est premier dans $\mathbb{N}$.
On se limitera ici aux entiers naturels premiers.
- On se reportera au *T.D.* 1 pour une méthode de détermination des nombres premiers inférieurs à un entier naturel donné (crible d'ÉRATOSTHÈNE).
Le problème de la « répartition » des nombres premiers dans $\mathbb{N}$ reste encore largement ouvert aujourd'hui.

3 Décomposition d'un entier

3.1 Décomposition en facteurs premiers — théorème

Tout entier naturel n non nul et distinct de 1 se décompose de façon unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \, p_2^{\alpha_2} \, \ldots \, p_m^{\alpha_m} \qquad \textbf{(1)}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des nombres premiers tels que $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m$
et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

L'écriture de n sous la forme **(1)** est sa **décomposition en produit de facteurs premiers.**

Démonstration

Voir Exercices 20 à 26

• **Existence de la décomposition** (démonstration par récurrence : *Chapitre* 6, *T.D.* 2, page 156)
– Pour $n = 2$, on a $2 = 2^1$ et 2 est premier ; 2 admet donc une décomposition de la forme **(1)** .
– Soit m un entier avec $m \geqslant 2$.
On suppose la propriété vraie pour tout entier naturel k tel que $2 \leqslant k \leqslant m$.
Si $m+1$ est premier, alors $m+1 = (m+1)^1$ est une décomposition de la forme recherchée.
Si $m+1$ n'est pas premier, on sait qu'il admet au moins un diviseur premier p .
On peut donc écrire :

$$m+1 = pq \quad \text{avec } q \text{ entier tel que } \quad 2 \leqslant q \leqslant m \ .$$

En effet, on a :

$$q \neq 0 \ , \quad \text{sinon on aurait} \quad m+1 = 0 \ ,$$
$$\text{et} \quad q \neq 1 \ , \quad \text{sinon} \quad m+1 \text{ serait premier.}$$

De plus, $q \geqslant m+1$ est également impossible puisqu'on aurait alors $pq \geqslant p(m+1)$,
c'est-à-dire $(m+1) \geqslant p(m+1)$, ce qui est exclu puisque $p \geqslant 2$.
On peut ainsi appliquer à q l'**hypothèse de récurrence** :

q admet une décomposition en produit de facteurs premiers du type **(1)**,

et donc $m+1 = pq$ également : c'est la décomposition de q , avec un facteur p supplémentaire. Ainsi, la propriété est vraie au rang $(m+1)$.
En conclusion, on a démontré par récurrence que tout entier naturel admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

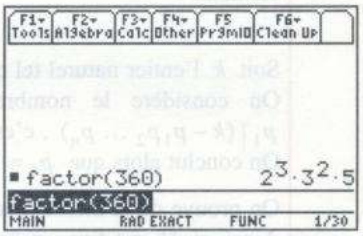
• **Unicité de la décomposition** (propriété admise)

Exemple

$$\begin{aligned} 360 &= 2 \times 180 \\ &= 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \ . \end{aligned}$$

Finalement on obtient la décomposition de 360 :

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \ .$$



Voir Exercice résolu 2

3.2 Corollaire

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ non premier admet au moins un diviseur premier p vérifiant :

$$p^2 \leqslant n \ .$$

Démonstration

Voir Exercice résolu 1

Avec les notations du théorème précédent, si n n'est pas premier, alors sa décomposition comporte au moins deux facteurs, éventuellement égaux à p_1 , et on obtient immédiatement la relation $n \geqslant {p_1}^2$, d'où le résultat recherché.

4 Division euclidienne

4.1 Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

théorème

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.

Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b .$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne de a par b.**

Démonstration

Voir Exercices 27 à 46

Soit a et b dans $\mathbb{N}$, avec $b \neq 0$.

• **Existence de q et r**

D'après la propriété d'ARCHIMÈDE dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels n, tels que $a < nb$, n'est pas vide ; il possède donc un plus petit élément $k \neq 0$ (on aurait sinon $a < 0$, ce qui est exclu pour $a \in \mathbb{N}$) ;

$k-1$ est donc aussi un entier naturel, et on a $(k-1)b \leqslant a < kb$.

On pose alors $q = k-1$ et on obtient $qb \leqslant a < (q+1)b$; en retranchant qb, on a donc $0 \leqslant a - qb < b$.

En posant $r = a - bq$, on conclut que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

• **Unicité de q et r**

On suppose que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$.

On en déduit que $-b < r_2 - r_1 < b$ et que $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$. Ainsi, $r_2 - r_1$ est un multiple de b strictement compris entre $-b$ et b ; on a donc $r_2 - r_1 = 0$, d'où $r_1 = r_2$.

On en déduit alors, du fait que $b \neq 0$, que $q_1 = q_2$, d'où l'unicité annoncée dans le théorème.

Remarque

q est le quotient de la division euclidienne de a par b si, et seulement si, on a :

$$bq \leqslant a < b(q+1) .$$

Divisibilité — **propriété**

Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. On a :

b divise $a \iff$ le reste de la division euclidienne de a par b est nul .

4.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

théorème

Soit a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers relatifs tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne de a par b.**

Remarque

Voir Exercice 28

Si a et b sont des entiers naturels, les couples obtenus dans la division euclidienne de a par b dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ sont bien sûr confondus.

Exemple

La division euclidienne dans $\mathbb{N}$ est bien connue par les élèves de fin d'École primaire ou de début de Collège :

154	9
64	17
1	

On a donc $154 = 9 \times 17 + 1$.

cours

5 Congruences

5.1 Définition

Soit un entier $n \geqslant 2$, a et b deux entiers relatifs.

On dit que a et b sont « congrus modulo n », et on note $a \equiv b \ (n)$, si les divisions euclidiennes de a et de b par n ont le même reste.

Exemples

- $29 \equiv -121 \ (5)$; $-623 \equiv 17 \ (10)$.
- Si l'on « compte de 6 en 6 » à partir de 5, on obtient des entiers congrus à 5 modulo 6 :
  5 ; 11 ; 17 ; 23 ; 29 ; ... ; puis -1 ; -7 ; -13 ; -19 ; -25 ; ...

Voir Activité 5

Propriétés

Soit un entier $n \geqslant 2$, a et b deux entiers relatifs quelconques. On a :

$$a \equiv b \ (n) \iff n \mid (a-b) \ ; \qquad \textbf{(1)}$$

$$a \equiv 0 \ (n) \iff n \mid a \ . \qquad \textbf{(2)}$$

Si $n' \geqslant 2$ est un entier et si $n' \mid n$, alors :

$$a \equiv b \ (n) \text{ implique } a \equiv b \ (n') \ . \qquad \textbf{(3)}$$

Démonstration

- **(1)** Si $a \equiv b \ (n)$, alors il existe trois entiers q, q' et r tels que :
$$a = nq + r \ , \quad b = nq' + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < n \ .$$
On a donc $a - b = nq - nq' = n(q - q')$ et donc $n \mid (a-b)$.

Réciproquement, si $n \mid (a-b)$, alors il existe un entier k tel que $a - b = kn$, soit $a = b + kn$.
Si $b = nq + r$ est la division euclidienne de b par n, on a donc $0 \leqslant r < n$ et, en substituant :
$$a = nq + r + kn = n(q + k) + r \quad \text{avec toujours} \quad 0 \leqslant r < n \ .$$
On obtient ainsi la division euclidienne de a par n, dont le reste est r comme dans la division euclidienne de b par n. On en déduit $a \equiv b \ (n)$.

- La propriété **(2)** est un cas particulier de la propriété **(1)** pour $b = 0$.

- Pour le résultat **(3)**, on a $n \mid (a-b)$ et $n' \mid n$, donc $n' \mid (a-b)$, c'est-à-dire $a \equiv b \ (n')$.

5.2 Congruences et division euclidienne — propriété

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Tout entier relatif a est **congru modulo n** à un unique entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant n - 1$.

Démonstration

À l'aide de la division euclidienne de a par n, on sait qu'il existe un unique entier $r \in \{0 ; 1 ; ... ; n-1\}$ tel que $a = nq + r$.
Le reste r est donc l'unique entier compris entre 0 et $n - 1$ vérifiant $a \equiv r \ (n)$.

Remarques

• La propriété précédente permet de définir une partition de $\mathbb{Z}$ en n « classes » dont chacune contient un unique élément de $\{0 ; 1 ; \ldots ; n-1\}$.
Voir Activité 5

• On démontre que, si a, b et c sont trois entiers et $n \geqslant 2$ est un entier naturel, alors :
$a \equiv a \ (n)$; si $a \equiv b \ (n)$, alors $b \equiv a \ (n)$; si $a \equiv b \ (n)$ et $b \equiv c \ (n)$, alors $a \equiv c \ (n)$.
Ces trois propriétés font de la congruence modulo n une « relation d'équivalence » dans $\mathbb{Z}$, comme l'égalité dans $\mathbb{R}$ ou le parallélisme dans l'ensemble des droites du plan.

• La définition de la congruence peut être étendue à n dans $\mathbb{Z}$, mais cette extension ne présente pas d'intérêt particulier dans la mesure où l'on a alors, pour tous entiers a et b, la relation $a \equiv b \ (n) \iff a \equiv b \ (-n)$; on se ramène ainsi toujours à n dans $\mathbb{N}$.

5.3 Addition, multiplication — propriété

Soit un entier $n \geqslant 2$.

La relation de « congruence modulo n » est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$; autrement dit, a, a', b et b' étant des entiers relatifs quelconques, on a :

si $a \equiv a' \ (n)$ et $b \equiv b' \ (n)$, alors $a+b \equiv a'+b' \ (n)$ et $ab \equiv a'b' \ (n)$.

Démonstration

Si $a \equiv a' \ (n)$ et $b \equiv b' \ (n)$, alors n divise $a-a'$ et $b-b'$; donc n divise la somme $(a-a')+(b-b')$, et on en déduit $n \mid (a+b)-(a'+b')$. D'où on conclut $(a+b) \equiv (a'+b') \ (n)$.
De même, n divise $a-a'$ et $b-b'$; donc il existe deux entiers k et k' tels que :

$$a = a'+kn \quad \text{et} \quad b = b'+k'n \ ;$$

alors on a, en effectuant le produit :

$$ab = a'b' + a'k'n + b'kn + kk'n^2 = a'b' + n(a'k' + b'k + kk'n) \ ;$$

il existe ainsi un entier K tel que $ab - a'b' = nK$.
Donc $n \mid ab - a'b'$ et $ab \equiv a'b' \ (n)$.

Conséquences

Soit un entier $n \geqslant 2$, a et a' deux entiers quelconques. On a :

pour tout entier k, si $a \equiv a' \ (n)$ alors $ka \equiv ka' \ (n)$;

pour tout entier naturel p non nul, si $a \equiv a' \ (n)$ alors $a^p \equiv a'^p \ (n)$.

Voir Exercices 47 à 56

Critères de divisibilité par 2 et 5

Soit $k \in \mathbb{N}$; il existe un unique couple d'entiers naturels $(d ; u)$ tel que $k = 10d + u$, et u est le chiffre des unités de k dans son écriture décimale.
Ainsi, on a $k - u = 10d$ et donc $10 \mid (k-u)$. On peut en déduire que :

$2 \mid (k-u)$ et $5 \mid (k-u)$, c'est-à-dire que $k \equiv u \ (2)$ et $k \equiv u \ (5)$.

Or k est divisible par 2 si, et seulement si, $k \equiv 0 \ (2)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $u \equiv 0 \ (2)$.
De plus, comme $k \equiv 0 \ (2) \iff (-k) \equiv 0 \ (2)$, on obtient ainsi le **critère de divisibilité par 2 dans $\mathbb{Z}$**.
De la même manière, on obtient le **critère de divisibilité par 5 dans $\mathbb{Z}$.**

Voir T.D. 2

• Un entier est divisible par 2 si, et seulement si, le chiffre des unités de son écriture décimale est pair.

• Un entier est divisible par 5 si, et seulement si, son écriture décimale se termine par 0 ou 5.

1 Un entier est-il premier ?

Les nombres 733 et 703 sont-ils premiers ?

• Méthode

Pour déterminer si un entier naturel n est premier ou non :

• on effectue les divisions euclidiennes successives de n par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... en notant les quotients successifs obtenus ;

• dès que l'une des divisions a un reste nul, on peut affirmer que n n'est pas premier et le diviseur est son plus petit diviseur premier ;

• si aucune division n'a pour reste 0 **jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur ou égal au diviseur**, on peut affirmer que n est premier.

	diviseur		quotient	reste
733	2		–	$\neq 0$
	3		–	$\neq 0$
	5		–	$\neq 0$
	7		104	$\neq 0$
	11		66	$\neq 0$
	13		56	$\neq 0$
	17		43	$\neq 0$
	19		38	$\neq 0$
	23	$<$	31	$\neq 0$
	29	$\geqslant$	25	$\neq 0$

733 est premier.

Utilisation de la calculatrice

a) On utilise les idées de l'*Activité* 3 et on s'arrête dès que l'on a trouvé un diviseur autre que 1 s'il y en a.

b) On entre la liste des nombres premiers dans une liste (par exemple L6), ensuite 733 / L6 donne la liste des quotients. On recherche dans cette liste un résultat entier en s'arrêtant à 30 (pour une lecture plus rapide, mettre la calculatrice en mode Float 2).

c) On peut utiliser l'éditeur de liste en posant L1=733 / L6 et L2=703 / L6.

	diviseur	quotient	reste
703	2	–	$\neq 0$
	3	–	$\neq 0$
	5	–	$\neq 0$
	7	100	$\neq 0$
	11	63	$\neq 0$
	13	54	$\neq 0$
	17	41	$\neq 0$
	19	37	$= 0$

$703 = 19 \times 37$

703 n'est pas premier.

Utilisation de la programmation

On cherche à automatiser ce que l'on vient de faire précédemment.

a) On utilise le programme sur la recherche de diviseurs en partant de 7 (car pour 2, 3 et 5, on a des critères), et en allant de deux en deux.

algorithme

demander N
pour D variant de 7 à $\sqrt{N}$ en allant de 2 en 2
  tester si D divise N
  si OUI afficher D et s'arrêter

```
PROGRAM:PREM
:Prompt N
:For(D,7,√(N),2)
:If fPart(N/D)=0
:Then
:Disp D
:Stop
:End:End
```

Si le programme n'affiche rien, c'est que le nombre est premier, sinon il affiche le premier diviseur premier qu'il rencontre.

b) On peut aussi s'appuyer sur la liste des nombres premiers entrés en L6 et ne chercher à diviser que par ces nombres, on économise ainsi plusieurs divisions.

algorithme

demander N
initialiser I à 1
tant que L6(I) $\leqslant \sqrt{N}$
si L6(I) divise N afficher L6(I) et s'arrêter
I+1 → I

```
PROGRAM:PREM2
:Prompt N
:1→I
:While L6(I)≤√(N
)
:If fPart(N/L6(I
))=0
:Then
```

```
PROGRAM:PREM2
:Disp L6(I)
:Stop
:End
:I+1→I
:End
```

2 Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

a) 1 638 ; **b)** 7 429 ; **c)** 35 321.

• Méthode

Pour décomposer un entier naturel N en produit de facteurs premiers, on détermine son plus petit diviseur premier p_1 en effectuant les divisions euclidiennes successives de N par les nombres premiers en ordre croissant ; une fois obtenu le quotient $q_1 = \dfrac{N}{p_1}$, trois cas se présentent :

• si $q_1 = 1$, alors N est premier, égal à p_1 ;

• si q_1 est premier, alors $N = p_1 q_1$ est la décomposition de N en produit de facteurs premiers ;

• sinon, on cherche le plus petit diviseur premier p_2 de q_1 (on a nécessairement $p_2 \geqslant p_1$) ; on obtient un nouveau quotient q_2, à partir duquel on réitère le procédé, qui est interrompu lorsqu'on aboutit à un quotient $q_n = 1$. La décomposition de N en produit de facteurs premiers est alors $N = p_1 p_2 \ldots p_n$, dans laquelle certains des p_i peuvent être égaux.

a) $1\,638 = 2 \times 819$

Le plus petit diviseur premier de 1 638 est $p_1 = 2$, et on a $q_1 = 819$.

$819 = 3 \times 273$

Le plus petit diviseur premier de 819 est $p_2 = 3$, et on a $q_2 = 273$.

$273 = 3 \times 91$

Le plus petit diviseur premier de 273 est $p_3 = 3$, et on a $q_3 = 91$.

$91 = 7 \times 13$

Le plus petit diviseur premier de 91 est $p_4 = 7$, et on a $q_4 = 13$.

$13 = 13 \times 1$

Le plus petit diviseur premier de 13 est $p_5 = 13$, et on a $q_5 = 1$.

On obtient ainsi $1\,638 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13$.
$= 2 \times 3^2 \times 7 \times 13$

Disposition pratique :

1 638	2
819	3
273	3
91	7
13	13
1	

b) On obtient : $7\,429 = 17 \times 19 \times 23$.

7 429	17
437	19
23	23
1	

c) On obtient : $35\,321 = 11 \times 13^2 \times 19$.

35 321	11
3 211	13
247	13
19	11
1	

Utilisation de la calculatrice

On écrit ici le programme permettant la décomposition en facteurs premiers du nombre A.

algorithme

demander A
initialiser D à 2 et la liste des facteurs à { }
tant que A > 1
si A est divisible par D,

```
PROGRAM:FPREMIER
:ClrList L1
:Prompt A
:2→D:1→I:1→P
:While A>1
:If fPart(A/D)=0
:Then
:D→L1(I):I+1→I
```

remplacer A par A / D, mettre D dans la liste des diviseurs et recommencer

si A n'est pas divisible par D, remplacer D par D+1 ou D+2

```
PROGRAM:FPREMIER
:A/D→A
:Else
:D+P→D:2→P
:If D²>A
:A→D
:End:End
:Disp L1
```

fin de « tant que »
afficher la liste des facteurs

Remarque

Dans le cas où certains diviseurs de N sont « évidents », la décomposition peut être obtenue plus rapidement. Par exemple :

$132\,000 = 132 \times 1\,000 = 10^3 \times 12 \times 11 = 2^3 \times 5^3 \times 2^2 \times 3 \times 11 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 11$.

1 Crible d'Ératosthène

1 On se propose de dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 150.

a) Écrire la liste des entiers naturels de 1 à 150. Le plus petit nombre premier est 2.
Rayer dans la liste tous les multiples de 2 distincts de 2.

b) Le plus petit nombre qui n'est pas rayé est alors 3, qui est premier.
Rayer tous les multiples de 3 distincts de 3.

c) Le plus petit nombre non rayé est alors 5, qui est premier.
Rayer tous les multiples de 5 distincts de 5.

d) Poursuivre le processus amorcé ci-dessus, en répondant aux questions suivantes :
Pourquoi peut-on affirmer que le « plus petit nombre non rayé » après la suppression des multiples du nombre premier précédent dans le « crible » est lui-même premier ?
Pourquoi peut-on arrêter le processus après avoir rayé les multiples de 11 ? Autrement dit, pourquoi les nombres inférieurs à 150 non rayés après suppression des multiples de 11 distincts de 11 sont-ils tous premiers ?

1	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10	(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30	(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50	51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70	(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90	91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100
(101)	102	(103)	104	105	106	(107)	108	(109)	110	111	112	(113)	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	(127)	128	129	130	(131)	132	133	134	135	136	(137)	138	(139)	140
141	142	143	144	145	146	147	148	(149)	150										

2 Pour dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 500 grâce au crible d'Ératosthène, pourquoi suffit-il de rayer les multiples des nombres premiers inférieurs à 19 ?

3 Si l'on désire dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 1 000, quel est le plus grand nombre premier p de la liste dont il est nécessaire de rayer les multiples distincts de p ?

2 Critère de divisibilité

On a vu dans le cours les critères de divisibilité d'un entier par 2 ou par 5.
On se propose ici d'établir un critère de divisibilité par 11.

a) Vérifier que $10 \equiv -1 \quad (11)$ et démontrer que :
• si n est un entier naturel pair, alors $10^n \equiv 1 \quad (11)$;
• si n est un entier naturel impair, alors $10^n \equiv -1 \quad (11)$.

b) L'entier naturel N s'écrit en numération décimale $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. Démontrer que :

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^{p-1} a_{p-1} + (-1)^p a_p \quad (11) .$$

c) En déduire qu'un entier N est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre la somme des chiffres d'indice pair et celle des chiffres d'indice impair dans son écriture en numération décimale est divisible par 11.

d) **Application** : examiner la divisibilité par 11 des entiers 9 240, 17 523 et 2 951 765.

3 Somme de deux carrés

On s'intéresse ici aux nombres entiers que l'on peut écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

3.1 Étude de trois cas particuliers

a) Vérifier que l'équation $x^2 + y^2 = 1$ admet quatre couples de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Vérifier que l'équation $x^2 + y^2 = 2$ admet quatre couples de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

c) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3$ n'a aucun couple de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
(Pour cela, examiner tous les cas possibles en remarquant que $|x| < 2$ et $|y| < 2$.)

3.2 Utilisation des congruences

a) Pour tout x de $\mathbb{Z}$, démontrer que l'on a :
$x^2 \equiv 0 \ (4)$ ou $x^2 \equiv 1 \ (4)$.

b) Prouver que, pour tous x et y de $\mathbb{Z}$, $x^2 + y^2$ est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4.

c) En déduire la propriété :

« si $n \equiv 3 \ (4)$, alors n ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers ».

d) Attention, la propriété précédente ne signifie pas que tous les autres entiers sont sommes de deux carrés.
Vérifier, par exemple, que 6 n'est pas une somme de deux carrés.

4 Nature des nombres $\sqrt{n}$ pour n dans $\mathbb{N}$

Soit n un entier naturel.

1 Démontrer que n est le carré d'un entier si, et seulement si, les exposants de tous les nombres premiers dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers sont pairs.

2 On suppose que n est un entier naturel, et qu'il n'est pas le carré d'un entier.
Soit p un nombre premier d'exposant impair dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

On suppose qu'on a l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers avec $b \neq 0$.

a) Quelles sont les parités des exposants de p dans la décomposition de a^2 et de nb^2 en produit de facteurs premiers ?

b) L'égalité $a^2 = nb^2$ est-elle possible ?

c) En déduire que l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ est impossible.

d) En conclure que :

« pour tout entier naturel n , le nombre $\sqrt{n}$ est soit un entier, soit un irrationnel ».

travaux dirigés

5 Algorithmes et programmation (d'après IREM de Poitiers)

5.1 Division euclidienne

Soit a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$.

1 On désigne par q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

a) Démontrer que q est la partie entière de $\frac{a}{b}$.

(On rappelle que la partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.)

b) Comment calcule-t-on r, connaissant a, b et q ?

2 Rédiger un programme sur la calculatrice qui demande les valeurs de a et b, et affiche les valeurs du quotient q et du reste r de la division de a par b.

Remarques

• La partie entière d'un réel de signe quelconque est obtenue avec la fonction :

MATH NUM 5 : int (sur les calculatrices TI

OPTN NUM Intg sur les calculatrices CASIO.

(La fonction Int sur Casio ne fournit pas la partie entière des nombres négatifs non entiers.)

• Certaines calculatrices sont dotées d'une fonction qui permet d'afficher directement le reste de la division euclidienne de a par b.

5.2 Programmation et conjecture

On s'intéresse au problème suivant :
quels sont les entiers naturels n tels que $n^6 - 1$ est divisible par 9 ?

a) À partir de l'algorithme ci-contre, rédiger un programme permettant l'affichage des entiers n recherchés depuis 1 jusqu'à un entier naturel N arbitrairement choisi.

b) Après avoir testé différentes valeurs de N, conjecturer le résultat demandé.

algorithme
demander N
pour n variant de 1 à N
si 9 divise $n^6 - 1$ alors afficher n

c) Démontrer le résultat conjecturé, par exemple en utilisant des congruences modulo 9.

5.3 Commentaire d'écran

Sur cet écran de tableur, la cellule B2 a été copiée et collée dans toute les cellules de la colonne B.
Commenter.

B2 = =(A2^6-1)*1/9

	A	B	C
1	valeur de n		
2	1	0	
3	2	7	
4	3	80,8888889	
5	4	455	
6	5	1736	
7	6	5183,88889	
8	7	13072	
9	8	29127	
10	9	59048,8889	
11	10	111111	

Faire le point

• Nombres premiers

• Soit $p \in \mathbb{N}$.

p premier $\iff$ p a exactement deux diviseurs naturels, 1 et p.

• L'ensemble des nombres premiers est infini.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, avec $p_1, p_2, \dots, p_m$ premiers tels que $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dans $\mathbb{N}^*$.
Cette décomposition est unique.

• Division euclidienne

Soit a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{Z}^*$, alors $a = bq + r$, avec q et r entiers tels que $0 \leqslant r < |b|$.
Le couple $(q\,;r)$ est unique.

De façon pratique, on note : $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

• Congruences

Soit un entier $n \geqslant 2$ et deux entiers relatifs a et b.

• $a \equiv b \ (n) \iff a$ et b ont le même reste dans les divisions euclidiennes par n.

• $a \equiv b \ (n) \iff n \mid (b-a)$; en particulier, $a \equiv 0 \ (n) \iff n \mid a$.

• La congruence modulo n est compatible avec l'addition et la multiplication.

savoir	comment faire ?
démontrer qu'un entier a est divisible par un entier b	on peut employer l'une des méthodes suivantes : • utiliser les critères de divisibilité si b est l'un des nombres 2, 3, 4, 9, 11 ou 25 • trouver k dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = kb$ • prouver que le reste de la division euclidienne de a par b est 0 • établir que $a \equiv 0 \ (b)$
démontrer que n est premier	on peut utiliser l'une des méthodes suivantes : • effectuer les divisions euclidiennes de n par tous les entiers premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ et prouver qu'aucun des restes n'est nul • raisonner par l'absurde pour prouver que n n'a pas de diviseur d vérifiant $1 < d \leqslant \sqrt{n}$
déterminer le reste de la division euclidienne de a par b	• on peut effectuer la division euclidienne • on peut aussi utiliser les congruences modulo b

1 Divisibilité

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Tout entier relatif non nul admet un nombre pair de diviseurs relatifs.

2° Le produit de deux entiers consécutifs est pair.

3° Le produit de trois nombres impairs est divisible par 3.

4° Pour tout entier $n \geqslant 1$, n et $n+1$ sont premiers entre eux.

5° Pour tout entier $n \geqslant 1$, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

6° Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(n-2)$ et $(n+2)$ admettent 2 pour diviseur commun.

7° Si a divise b et a divise c, alors a^2 divise bc et a^2 divise $b+c$.

2 Applications de $b \mid a$

2 En utilisant les propriétés élémentaires de la divisibilité, démontrer que 328 et 299 sont premiers entre eux.
Même question avec 1 000 et 1 093.

3 À l'aide de l'égalité $343 = 7^3$, démontrer que 118 et 225 sont premiers entre eux.

4 1° Démontrer que, si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors, pour tout entier naturel k, on a $a \mid (b - kc)$.

2° En déduire les diviseurs communs de 535 et 132, puis de 1 155 et 143.

5 Vérifier l'égalité $-16 \times 959 + 55 \times 279 = 1$.
En déduire que 959 et 279 sont premiers entre eux.

À partir de l'égalité $-3 \times 325 + 14 \times 70 = 5$, déterminer les diviseurs communs de 325 et 70.

6 n désigne un entier naturel non nul.
Démontrer que les entiers n et $(n+1)$ sont premiers entre eux.
En déduire que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour toute valeur de n.

7 Soit n et a deux entiers naturels non nuls.

1° On suppose que $a \mid (5n+31)$ et $a \mid (3n+12)$.
Montrer que $a \mid 33$.

2° En déduire les valeurs possibles de a.

8 Soit a et n deux entiers naturels non nuls.

1° On suppose que $a \mid (42n+37)$ et $a \mid (7n+4)$.
Montrer que $a \mid 13$.

2° En déduire les valeurs possibles de a.

9 ★ Soit n un entier naturel.

1° Vérifier que $n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$.

2° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{n^3 - n}{n+2}$ est un entier.

10 ★ Si k désigne un entier relatif quelconque, démontrer que :

$a \mid b \iff$ pour tout k de $\mathbb{Z}$, $a \mid (b - ka)$.

1° Déterminer les entiers relatifs a, tels que :
$(a-5) \mid (a+7)$.

2° Déterminer les entiers relatifs b, tels que :
$(b+2) \mid (4b-6)$.

2 Nombres premiers

1 Vrai-faux

11 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

2° Le produit de deux nombres premiers est un nombre premier.

3° Dans $\mathbb{N}$, il existe un unique nombre premier pair.

4° Un nombre premier admet exactement quatre diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

5° 97 est premier.

6° Si l'entier naturel p est premier, alors $\sqrt{p}$ n'est pas un entier.

7° Pour un entier naturel $n \geqslant 2$, $3n^2 + 8n$ n'est jamais premier.

2 Recherche de nombres premiers

12 Les nombres suivants sont-ils premiers ?

a) 983 ; **b)** 649 ; **c)** 857 ; **d)** 1 001.

13 Les nombres suivants sont-ils premiers ?

1° **a)** 1 421 ; **b)** 1 527 ; **c)** 1 519 ; **d)** 1 247.

2° **a)** 2 419 ; **b)** 5 183 ; **c)** 5 189 ; **d)** 6 131.

14 Déterminer, s'il en existe, les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles u_n est premier.

a) $u_n = n^3$; **b)** $u_n = n^2 - 1$; **c)** $u_n = 7n^2 + 12n$.

15 Déterminer, s'il en existe, les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles u_n est premier.

a) $u_n = n^2 + 2n + 1$; **b)** $u_n = n^2 + 8n - 20$.

16 ★ a et b désignent deux entiers naturels distincts de 0 et 1.

En utilisant le carré de $a^2 + 2b^2$, démontrer que l'entier $a^4 + 4b^4$ n'est jamais un nombre premier.

17 On a vu que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont n nombres premiers distincts, alors aucun d'eux ne divise l'entier $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ (voir démonstration du *Théorème* 2 page 347).

On peut se demander si les nombres ainsi construits sont premiers.

Vérifier que $2+1$, $2\times3+1$, $2\times3\times5+1$, $2\times3\times5\times7+1$ et $2\times3\times5\times7\times11+1$ sont premiers, mais que « le suivant », $2\times3\times5\times7\times11\times13+1$, n'est pas premier.

18 **Nombres de FERMAT**

Pour n entier naturel, le nombre $u_n = 2^{2^n} + 1$ est appelé le $(n+1)$-ième nombre de FERMAT, du fait que FERMAT pensait que tous ces nombres étaient premiers.

Vérifier que les cinq premiers nombres de FERMAT sont effectivement premiers, mais que le sixième est divisible par 641.

Remarque

À l'aide d'un programme sur calculatrice qui teste si un nombre est premier, essayer le test sur u_5 .

Le cas échéant, évaluer le temps nécessaire pour obtenir le plus petit diviseur premier.

19 ★ On rappelle que, pour n entier naturel $n \geqslant 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers compris entre 1 et n ; ainsi :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n \ .$$

1° On considère le nombre $A = 2\,001! + 1$.

Démontrer que si k est un entier compris entre 1 et 2 000, alors $A + k$ n'est pas un nombre premier.

En déduire 2 000 entiers consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

2° Soit N un entier naturel non nul.

Construire N entiers consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

3° On désigne par P le produit des entiers naturels impairs de 1 à 2 001 :

$$P = 1 \times 3 \times \dots \times 2\,001 \ .$$

On pose également :

$$B = 2P + 1 \ .$$

Démontrer que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et 2 000, l'entier $B + k$ n'est pas premier.

En déduire à nouveau 2 000 entiers consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

3 Décomposition d'un entier

1 Vrai-faux

20 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Si deux entiers naturels ont les mêmes diviseurs premiers, alors ils sont égaux.

2° Si un entier admet un unique diviseur premier naturel, alors il est premier.

3° 121 est le plus petit entier naturel non premier qui n'est multiple d'aucun des nombres 2, 3, 5 et 7.

4° Un entier supérieur ou égal à 2 est le carré d'un entier si, et seulement si, tous les exposants dans sa décomposition en produit de facteurs premiers sont pairs.

5° Un entier supérieur ou égal à 2 est le cube d'un entier si, et seulement si, tous les exposants dans sa décomposition en produit de facteurs premiers sont impairs.

2 Applications

21 Décomposer le nombre 72 en produit de facteurs premiers, puis en déduire les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres suivants :

a) 72^2 ; **b)** 6×72^3 ; **c)** 25×72^2 ; **d)** 744 .

22 Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

a) 11 858 ; **b)** 56 056 ; **c)** 46 189 ;

d) 54 285 ; **e)** 269 568 ; **f)** 48 608.

23 Un entier naturel n admet pour unique diviseur premier 7 et exactement cinq diviseurs dans $\mathbb{N}$.

Déterminer l'entier n .

24 Soit n un entier naturel qui n'est divisible par aucun carré d'entier.

Que peut-on dire de la décomposition de n en produit de facteurs premiers ?

25 ★ Démontrer qu'un entier naturel est le carré d'un entier si, et seulement si, tous les exposants dans sa décomposition en produit de facteurs premiers sont pairs.

Déterminer le plus petit nombre non nul, dont le produit par 13 608 est le carré d'un entier naturel.

26 Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers, puis déterminer le plus grand carré d'entier qui le divise :

a) 17 199 ; **b)** 27 104.

4 Division euclidienne

1 Vrai-faux

27 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Dans la division euclidienne de 229 par 12, le quotient est 18 et le reste est 13.

2° Le reste dans la division euclidienne de 2 013 par 8 est 5.

3° L'égalité $3\,754 = 123 \times 29 + 187$ permet de définir une division euclidienne.

4° Si a et b ont le même quotient et le même reste dans la division euclidienne par n , alors $a = b$.

5° Il y a exactement n valeurs possibles pour le reste dans une division par n .

6° Si r est le reste dans la division euclidienne de a par n , alors $r+1$ est le reste dans la division euclidienne de $a+1$ par n .

7° Si r est le reste dans la division euclidienne de a par n , alors r^2 est le reste dans la division euclidienne de a^2 par n .

8° Les restes dans les divisions euclidiennes de a par b et de b par a sont toujours égaux.

9° Si q et r sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b , alors $-q$ et $-r$ sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de $-a$ par $-b$.

2 Applications

28 ★★ **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**

Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers vérifiant :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < |b| .$$

La démonstration de cette propriété est faite dans le cours dans le cas où a et b sont des entiers naturels ; on se propose ici de généraliser aux entiers relatifs.

1° Existence du couple $(q\,;r)$

a) On suppose ici que $a<0$ et $b>0$; on appelle q' le quotient et r' le reste dans la division euclidienne de $(-a)$ par b , où $-a$ et b sont entiers naturels.

Démontrer que si $r'=0$, le couple $(-q'\,;0)$ convient, et que sinon le couple $(-q'-1\,;b-r')$ convient.

b) On suppose à présent $b<0$; on appelle q' le quotient et r' le reste de a par $(-b)$.

Démontrer que le couple $(-q'\,;r')$ convient.

L'existence du couple $(q\,;r)$ est donc établie dans tous les cas.

2° Unicité du couple $(q\,;r)$

On suppose qu'il existe deux couples $(q\,;r)$ et $(Q\,;R)$ d'entiers vérifiant :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < |b| \ ;$$
$$a = bQ + R \quad \text{et} \quad 0 \leqslant R < |b| .$$

Démontrer que :

$b(Q-q)=r-R$ avec $-|b|<r-R<|b|$.

En déduire que $r-R$ est nul et conclure.

Pour les exercices 29 à 31, déterminer, dans chaque cas, le quotient et le reste de la division euclidienne.

29 **a)** 17 par 5 ; **b)** -17 par 5 ;
c) 17 par -5 ; **d)** -17 par -5 .

30 **a)** 28 par 5 ; **b)** 28 par -5 ;
c) -28 par 5 ; **d)** -28 par -5 .

31 **a)** 32 par 6 ; **b)** -32 par 6 ;
c) 32 par -6 ; **d)** -32 par -6 .

32 On divise 524 par un entier naturel b non nul.
Le quotient est 15 et le reste r .
Déterminer les valeurs possibles de b et r .

33 On divise 394 par un entier b non nul.
Le quotient est 17 et le reste r .
Déterminer les valeurs possibles de b et r .

34 Dans une division euclidienne, on a augmenté le dividende de 20 et le diviseur de 4 ; le quotient et le reste sont alors inchangés.
Quel est le quotient ?

35 Dans la division euclidienne de 377 par l'entier naturel non nul b , le reste obtenu est 8.
Déterminer les valeurs possibles du diviseur et du quotient.

36 Dans une division euclidienne, le dividende est augmenté de 36 et le diviseur de 3 ; le quotient et le reste se trouvent alors inchangés.
Déterminer le quotient.
Sachant que le diviseur est égal à 8 et que le dividende est supérieur à 100, quelles sont les valeurs possibles de ce dernier ?

37 ★ Soit a un entier naturel.
a) Le reste de la division euclidienne de a par 12 est 8.
Quel est le reste de la division euclidienne de a par 6 ? par 4 ? par 3 ? par 2 ?
b) Le reste de la division euclidienne de a par 12 est r .
Répondre aux mêmes questions que précédemment.

38 Dans la division euclidienne de l'entier naturel a par 155 et par 161, on obtient le même quotient et des restes respectifs 65 et 23.
Calculer a .

39 Déterminer les entiers naturels dont le quotient et le reste sont égaux dans la division euclidienne par 8.

40 Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 20 donne un reste égal au carré du quotient.

41 ★ Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 64 donne un reste égal au cube du quotient.

42 ★ Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel impair par 4 ?
Démontrer que si n est un entier naturel impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

43 Soit un entier $n \geqslant 2$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de n^2+2n par $n+1$.

44 ★ **1°** Montrer que tout entier naturel n peut s'écrire sous une des formes suivantes :

$5k$; $5k+1$; $5k+2$; $5k+3$; $5k+4$

où k désigne un entier naturel.

2° Déterminer le reste de la division euclidienne de n^2-3n par 5.

3° En déduire l'ensemble S des entiers naturels n , tels que le reste de la division euclidienne de n^2-3n par 5 soit égal à 3.

45 ★ p est un entier naturel non nul et x un élément de $\mathbb{Z}\setminus\{0\,;1\}$.
Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

$x^2 \equiv x \quad (p)$

et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x^n \equiv x \quad (p)$.

Quel est l'ensemble des entiers relatifs x tels que, pour tout entier naturel non nul n , $x^n \equiv x \quad (6)$?

46 ★ Les divisions euclidiennes de l'entier naturel a par l'entier naturel b et celle de $(a+15)$ par $(b+5)$ ont même quotient q et même reste r .
Déterminer q .

5 Congruences

1 Vrai-faux

47 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° $356 \equiv 11 \ (23)$.

2° $370 \equiv 17 \ (13)$.

3° L'égalité $914 = 19 \times 47 + 21$ permet de déduire les congruences :

$$914 \equiv 21 \ (19) \quad \text{et} \quad 914 \equiv 21 \ (47) .$$

4° Tout entier est congru modulo 4 à l'un des nombres 0, 1, 2 ou 3.

5° Si $a \equiv b \ (n)$ et $a \equiv c \ (n)$, alors :

$$a^2 \equiv bc \ (n) \quad \text{et} \quad 2a \equiv b + c \ (n) .$$

6° Si $n \geqslant 1$ est un entier, alors :

$$n^2 \equiv 0 \ (n) \quad \text{et} \quad n^2 \equiv -2n \ (n) .$$

2 Applications

48 Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a) 35^{27} par 7 ; **b)** 89^{35} par 11 ; **c)** 77^{20} par 13.

49 Vérifier que 2 003 est un nombre premier.

Quel est le reste de la division euclidienne de $2\,002^{2\,004}$ par 2 003 ?

50 ★ Démontrer les congruences suivantes :

a) $35^{228} + 84^{501} \equiv 0 \ (17)$;

b) $2 \times 35^{2\,002} - 3 \times 84^{2\,003} \equiv 5 \ (17)$.

51 Vérifier que $1\,000 \equiv 1 \ (37)$ et en déduire que, pour tout entier naturel n , on a $10^{3n} \equiv 1 \ (37)$.

En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

52 Déterminer les différents restes possibles dans la division euclidienne de 3^n par 13 (où n est un entier naturel). En déduire le reste de la division euclidienne de $48^{2\,004}$ par 13.

53 Quels sont, pour $n \in \mathbb{N}$, les restes possibles dans la division euclidienne de 3^n par 7 ? En déduire le reste de la division euclidienne de $1\,998^{128}$ par 7.

54 ★ Démontrer que le carré d'un entier n est congru modulo 8 à 0, 1 ou 4.

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(n+3)^2 \equiv 1 \ (8)$.

55 **1°** Vérifier que $1\,000 \equiv -1 \ (13)$.

En déduire, selon la parité de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n , $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

56 ★ **a)** Pour tout entier naturel n , démontrer que l'on a $10^n \equiv 1 \ (9)$ et $10^n \equiv 1 \ (3)$.

b) En écrivant $5\,428 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 8$, démontrer que :

$$5\,428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8 \ (9)$$

$$\text{et que} \quad 5\,428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8 \ (3) .$$

c) Démontrer que tout entier est congru modulo 3 et modulo 9 à la somme des chiffres de son écriture décimale.

d) En déduire des critères de divisibilité d'un entier par 3 ou par 9.

6 Problèmes

57 ★ **1°** Montrer que :

$$5^0 \equiv 1 \ (13) ; \quad 5^1 \equiv 5 \ (13) ;$$

$$5^2 \equiv -1 \ (13) \quad \text{et} \quad 5^3 \equiv -5 \ (13) .$$

2° En déduire que, pour tout entier naturel k :

$$5^{4k} \equiv 1 \ (13) ; \quad 5^{4k+1} \equiv 5 \ (13) ;$$

$$5^{4k+2} \equiv -1 \ (13) \quad \text{et} \quad 5^{4k+3} \equiv -5 \ (13) .$$

3° Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \ (13)$.

58 ★ **1°** Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$7^{3n} \equiv 1 \ (19) .$$

2° Démontrer que, quels que soient les entiers naturels n et k , on a :

$$7^{3n+k} \equiv 7^k \ (19) .$$

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 7^n par 19 ?

3° Démontrer que si a , b , c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.

59 **1°** Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

Justifier que $n!$ est divisible par n .

2° $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent n entiers consécutifs.

Démontrer que deux quelconques d'entre eux ne sont jamais congrus modulo n.
En déduire que $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \equiv n!\,(n)$.

3° Justifier l'affirmation suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

60 ★★ **1°** Déterminer le reste de l'entier relatif n^3 dans la division euclidienne par 9 suivant le reste de n dans cette division euclidienne.
En déduire les équivalences suivantes :

$$n^3 \equiv 0 \ (9) \iff n \equiv 0 \ (3) \ ;$$
$$n^3 \equiv 1 \ (9) \iff n \equiv 1 \ (3) \ ;$$
$$n^3 \equiv 8 \ (9) \iff n \equiv 2 \ (3) \ .$$

2° Démontrer que, si la somme de trois cubes d'entiers est divisible par 9, alors l'un de ces entiers est divisible par 3.

61 Pour tout entier naturel n , démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 :
• par récurrence ; • en factorisant l'expression $n^3 - n$.

62 ★ Démontrer que, pour tout entier naturel n , $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

63 ★★ **1°** Pour tout entier naturel n , démontrer que :
$n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$
sont divisibles par $n + 1$.

2° Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

3° Existe-t-il des entiers naturels n pour lesquels $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n^2 + 3n + 2$?

64 ★★ On se propose ici de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

1° Justifier que tout nombre impair est congru à 1 ou à 3 modulo 4, puis citer deux nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

2° On suppose que tous les diviseurs premiers de l'entier n sont congrus à 1 modulo 4 ; démontrer qu'alors $n \equiv 1 \ (4)$.
En déduire que, si $k \equiv 3 \ (4)$, alors k admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.

3° Si l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est fini, on appelle p son plus grand élément.
Soit alors $K = 2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p + 1$ le produit de tous les nombres premiers jusqu'à p , augmenté de 1.
a) Démontrer que $K \equiv 3 \ (4)$.
b) À l'aide des résultats de la *Question* **2°**, montrer qu'on aboutit alors à une contradiction.

65 **1°** Un diviseur strict d'un entier naturel n est un entier naturel diviseur de n et distinct de n .
Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2° On dit que deux entiers naturels sont **amiables** si chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

3° Un **nombre parfait** est un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (il est ainsi amiable avec lui-même).
a) Le nombre 28 est-il parfait ?
b) Déterminer un nombre premier p tel que le nombre $2^4 \times p$ soit parfait.
c) Plus généralement, si n et p sont deux entiers naturels avec p premier, préciser la seule expression possible de p en fonction de n pour laquelle $2^n \times p$ peut être un nombre parfait. Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

66 a et b sont deux entiers naturels avec $a > b$.
On a $a + b = 444$ et la division euclidienne de a par b a pour quotient 4 et pour reste 24.
Déterminer les entiers a et b .

67 ★★ Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?
Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, comment la somme :

$$S = 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + \ldots + 2^{p(q-1)}$$

peut-elle encore s'écrire ? En déduire que $2^{pq} \equiv 1 \ (2^p - 1)$.
Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par les deux nombres $2^p - 1$ et $2^q - 1$.
En déduire que si le nombre $2^n - 1$ est premier, alors n est lui-même premier. La réciproque est-elle vraie ?
Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ sont appelés nombres de MERSENNE.

68 ★ **1°** Suivant le reste de la division euclidienne de n par 7, déterminer celui de n^3 dans la division euclidienne par 7.

2° Démontrer que :
si $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \ (7)$, alors $abc \equiv 0 \ (7)$.

69 ★★ **Nombre de diviseurs naturels d'un entier naturel**
Soit N un entier naturel non nul dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n} \ .$$

1° Démontrer qu'un entier naturel d est un diviseur de N si, et seulement si, sa décomposition en produit de facteurs premiers est de la forme $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_n^{\beta_n}$, avec, pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

2° Quel est le nombre de diviseurs de N tels que $\beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$?
Et le nombre de diviseurs de N tels que $\beta_3 = \ldots = \beta_n = 0$?
En utilisant au besoin un arbre, démontrer que le nombre de diviseurs de N est égal à $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$.

3° Applications

a) Quel est le nombre des diviseurs de 180 ? Dresser leur liste.

b) Quel est le nombre des diviseurs de 79 625 ?

c) L'entier 8×10^n admet 154 diviseurs.

Déterminer la valeur de n.

d) Quel est le plus petit entier possédant 36 diviseurs ?

e) Démontrer qu'un entier naturel non nul est un carré d'entier si, et seulement si, il admet un nombre impair de diviseurs.

70 ★ Règle de divisibilité par 7

1° k étant un entier naturel, montrer que :

$$10^{6k} \equiv 1 \ (7), \quad 10^{6k+1} \equiv 3 \ (7),$$
$$10^{6k+2} \equiv 2 \ (7), \quad 10^{6k+3} \equiv -1 \ (7),$$
$$10^{6k+4} \equiv -3 \ (7) \quad \text{et} \quad 10^{6k+5} \equiv -2 \ (7).$$

2° On considère le nombre $\overline{abcdefghi}$ écrit en base 10.
Montrer que ce nombre est congru modulo 7 à :

$$(i + 3h + 2g) - (f + 3e + 2d) + (c + 3b + 2a).$$

En déduire que ce nombre est divisible par 7 si, et seulement si :

$$(i + 3h + 2g) - (f + 3e + 2d) + (c + 3b + 2a)$$

est un multiple de 7.

3° Application

Les nombres suivants sont-ils divisibles par 7 ?

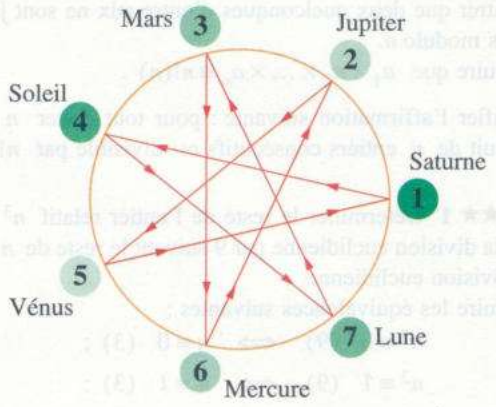
$$N_1 = 325\,412 ; \quad N_2 = 221\,325\,412 ;$$
$$N_3 = 9\,324 ; \quad N_4 = 504\,324\,156.$$

71 Les jours de la semaine

La semaine est d'une durée de sept jours.
Les noms de ces jours proviennent de ceux du Soleil, de la Lune et des planètes visibles à l'œil nu.
Les Anciens avaient classé ces astres dans l'ordre de leurs distances décroissantes à la Terre :
① Saturne ② Jupiter ③ Mars
④ Soleil ⑤ Vénus ⑥ Mercure ⑦ Lune
On dédiait chaque heure du jour à chacun de ces astres suivant l'ordre ci-dessus, et le jour tout entier portait le nom de l'astre auquel était dédiée la première heure.

On suppose partir d'un jour dédié à Saturne, astre n° 1.
La première heure du jour suivant est dédiée à l'astre associé au nombre $1 + 24 = 25$.
Comme $25 = 7 \times 3 + 4$, le jour suivant est dédié à l'astre n° 4, c'est-à-dire le Soleil. En poursuivant ce procédé, retrouver l'ordre des jours de la semaine :

Saturne	→	samedi	(saturday)
Soleil	→	dimanche	(sunday)
Lune	→	lundi	(monday)
Mars	→	mardi	
Mercure	→	mercredi	
Jupiter	→	jeudi	
Vénus	→	vendredi	



Remarque

Les astrologues ont donné une explication de l'ordre des jours de la semaine.
Les sept astres, dans l'ordre donné par les Anciens, correspondent aux sommets d'un heptagone régulier étoilé. En suivant les côtés, on obtient l'ordre des jours de la semaine.

72

À chacun des sept jours de la semaine et des douze mois d'une année est associé un code.
Les jours de la semaine sont codés comme suit :

Di	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa
1	2	3	4	5	6	0

Le code d'un mois (variable suivant l'année) est celui du jour précédant le 1er de ce mois.

1° Sachant que le 1er janvier 1900 était un lundi, justifier que le code du mois de janvier 1900 était 1.

2° L'année 1900 n'était pas bissextile. En effectuant des divisions euclidiennes par 7, montrer que les codes des mois de l'année 1900 étaient les suivants :

janvier	février	mars	avril	mai	juin
1	4	4	0	2	5

juillet	août	sept.	oct.	nov.	déc.
0	3	6	1	4	6

3° a) Combien compte-t-on d'années bissextiles entre 1900 et 1969 ?

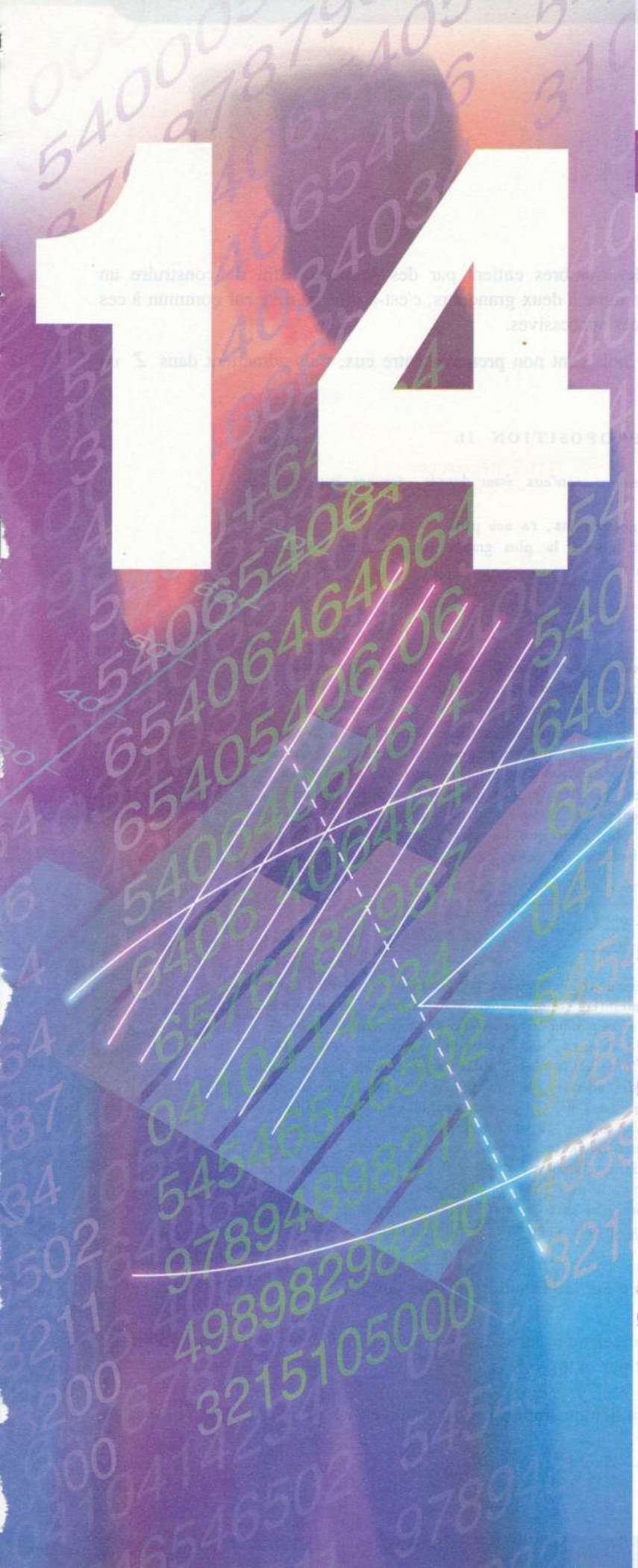
b) Déterminer quel jour était le 1er janvier 1969.

c) En déduire les codes des mois de l'année 1969.

4° Déterminer quel jour était le 20 juillet 1969 lorsque des scientifiques américains plantèrent le drapeau des U.S.A. sur la Lune.

Remarque

Ce procédé peut être utilisé pour déterminer à quel jour de la semaine correspond une date quelconque postérieure à l'année 1582 (année de la réforme du calendrier : calendrier grégorien).



CHAPITRE

14

PGCD – PPCM

Diviseurs communs à deux entiers naturels p. 368

- connaître l'algorithme d'EUCLIDE

PGCD de deux entiers relatifs p. 370

- savoir calculer un PGCD

Nombres premiers entre eux p. 372

- reconnaître des nombres premiers entre eux par un calcul de PGCD ou en utilisant le théorème de BÉZOUT
- savoir utiliser le théorème de GAUSS

PPCM de deux entiers relatifs p. 374

- savoir calculer un PPCM en utilisant un PGCD ou des décompositions en produits de facteurs premiers

activités

Algorithme d'EUCLIDE

Étude du texte d'EUCLIDE

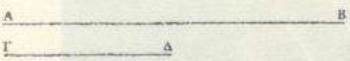
Dans son livre VII, EUCLIDE représente des nombres entiers par des segments afin de construire un raisonnement pour trouver une mesure commune à deux grandeurs, c'est-à-dire un diviseur commun à ces nombres. Il utilise la méthode des différences successives.

On rappelle que deux entiers naturels non nuls sont non premiers entre eux, s'ils admettent dans $\mathbb{Z}$ un diviseur commun autre que 1 et -1 .

PROPOSITION II.

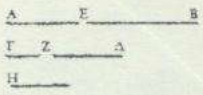
Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les deux nombres AB, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ.



Si ΓΔ mesure AB, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, AB, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas AB, et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres AB, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé; il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant AB laisse EA plus petit que lui-même; que EA mesurant ΔΓ laisse ZΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓZ mesure EA. Puisque ΓZ



mesure AE, et que AE mesure ΔZ, le nombre ΓZ mesurera ΔZ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure BE; donc ΓZ mesure BE. Mais il mesure EA; donc il mesurera BA tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓZ mesure AB et ΓΔ; donc ΓZ est une commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓZ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓZ mesurera les nombres AB, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit H. Puisque H mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure BE, le nombre H mesurera BE. Mais il mesure BA tout entier; donc il mesurera le reste AE. Mais AE mesure ΔZ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

Extrait *Les œuvres d'Euclide* traduite par F. PEYRARD, 1819.

1 Relire ce texte en remplaçant le nom « mesure » par « diviseur », le verbe « mesurer » par « diviser » et les nombres AB et $\Gamma\Delta$ respectivement par a et b .

2 Dans le cas où b divise a , rédiger la démonstration d'EUCLIDE avec les notations et le vocabulaire actuels.

3 Dans le cas où b ne divise pas a, et $a > b$, EUCLIDE retranche toujours le plus petit des nombres du plus grand.
Après avoir retranché b de a, quel nombre calcule-t-il si $a - b > b$? si $a - b < b$?

Peut-on avoir $a - b = b$?

4 On appelle a_1 le plus grand des nombres $a - b$ et b, et b_1 le plus petit de ces nombres.
On écrit :

$$a_1 = \max(a - b\ ;\ b) \quad \text{et} \quad b_1 = \min(a - b\ ;\ b)\ .$$

a) Montrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur commun à a_1 et b_1.

On pose ensuite :

$$a_2 = \max\ (a_1 - b_1\ ;\ b_1) \quad \text{et} \quad b_2 = \min\ (a_1 - b_1\ ;\ b_1) \quad \text{et ainsi de suite.}$$

On construit ainsi deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n), avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Par itération, tout diviseur commun à a et b est un diviseur commun à a_n et b_n.

b) Justifier que, pour tout n, $a_n \geqslant b_n$. Pour tout n, on pose $r_n = a_n - b_n$.

c) Que signifie la phrase : « il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui » ?

En déduire que le processus s'arrêtera et préciser quand.

d) Peut-on avoir $r_n = 1$ pour une valeur de n ?

5 Mettre en forme la preuve que ΓZ est la plus grande mesure de AB et $\Gamma\Delta$, c'est-à-dire **le plus grand commun diviseur** des nombres a et b (partie colorée du texte).

Illustration et transcription

1 Soit $a = 357$ et $b = 105$.

a) Écrire les termes des suites d'entiers (a_n) et (b_n) définies dans le texte d'EUCLIDE.

En déduire le plus grand commun diviseur de 357 et 105.

b) On a obtenu :

$$\begin{aligned} 357 - 105 &= 252 \quad \text{avec} \quad 252 > 105 \\ 252 - 105 &= 147 \quad \text{avec} \quad 147 > 105 \\ 147 - 105 &= 42 \quad \text{avec} \quad 0 < 42 < 105 \end{aligned}$$

et à l'étape d'après, ce n'était plus 105 qui était à retrancher.

Ce qui peut s'écrire :

$$357 - 3 \times 105 = 42$$

ou $357 = 3 \times 105 + 42$ qui est **la division euclidienne de 357 par 105**.

À l'aide de divisions euclidiennes, écrire la liste des différences successives effectuées.

Le plus grand commun diviseur de 357 et 105 apparaît comme le dernier reste non nul de ces divisions.

Ce procédé, pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non nuls, porte le nom d'**algorithme d'EUCLIDE**.

2 Déterminer le plus grand commun diviseur de 76 084 et 63 020 en écrivant les divisions euclidiennes successives de l'algorithme d'EUCLIDE.

1 Diviseurs communs à deux entiers naturels

1.1 Proposition

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$, on désigne par r le reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r = 0$, alors les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de b.
- Si $r \neq 0$, alors les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à b et r.

Démonstration

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, avec $a > b$.
On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.
d désigne un entier non nul.

- **Si $r = 0$**, alors b divise a, que l'on note $b \mid a$.
Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors en particulier $d \mid b$.
Réciproquement, si $d \mid b$, comme $b \mid a$, alors d est un diviseur de a et de b.

- **Si $r \neq 0$**, alors $a = bq + r$ avec $0 < r < b$.
Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid a - bq$, c'est-à-dire $d \mid r$ et d est donc un diviseur de b et de r.
Réciproquement, si $d \mid b$ et $d \mid r$, alors $d \mid bq + r$, c'est-à-dire $d \mid a$, et d est donc un diviseur de a et de b.

Exemples

- 60 divise 360, donc les diviseurs communs à 360 et 60 sont les diviseurs de 60.

- 60 ne divise pas 365, car on a $365 = 60 \times 6 + 5$.
Les diviseurs communs à 365 et 60 sont les diviseurs communs à 60 et 5, c'est-à-dire les diviseurs de 5 puisque 5 divise 60.
5 étant premier, les diviseurs communs à 365 et 60, dans $\mathbb{N}$, sont 1 et 5.

1.2 Algorithme d'Euclide

■ Soit a et b deux entiers naturels non nuls, avec $a > b$ et b ne divisant pas a.

On note q_1 et r_1 le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b ;
puis q_2 et r_2 le quotient et le reste de la division euclidienne de b par r_1.
Cette division a un sens puisque $r_1 \neq 0$.

Si $r_2 \neq 0$, on note q_3 et r_3 le quotient et le reste de la division euclidienne de r_1 par r_2.
On continue ainsi le processus.

On a $r_1 \neq 0$, p étant un entier naturel strictement supérieur à 1 :
si $r_2 \neq 0$, ... et $r_p \neq 0$, on note q_{p+1} et r_{p+1} le quotient et le reste de la division euclidienne de r_{p-1} par r_p.

On a donc :

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ &\ldots & \ldots \\ r_{p-1} &= r_p q_{p+1} + r_{p+1}, & 0 \leqslant r_{p+1} < r_p. \end{aligned}$$

On construit ainsi une suite (r_p) strictement décroissante d'entiers positifs.

Au bout d'un nombre fini de divisions, on va nécessairement obtenir un reste nul.
Donc il existe une valeur de n pour laquelle $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 , & 0 < r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2 , & 0 < r_2 < r_1 \\ &\dots & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n , & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} . \end{aligned}$$

Cette suite de divisions euclidiennes successives de a par b, b par r_1, ... jusqu'à l'obtention du dernier reste r_n non nul, est **l'algorithme d'Euclide.**

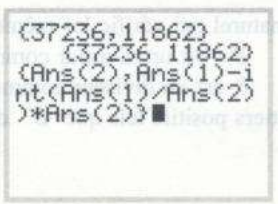
■ Si $a < b$, en cherchant à appliquer la méthode précédente, la première division euclidienne s'écrit $a = b \times 0 + a$, $0 < a < b$, ensuite, on effectue la division euclidienne de b par a.
La première division a simplement échangé a et b. Si a ne divise pas b, en poursuivant on obtient les mêmes quotients et restes qu'en appliquant l'algorithme d'Euclide en partant de b et a avec $b > a$.

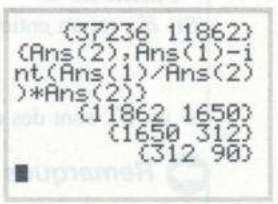
Exemple

On applique l'algorithme d'Euclide à 37 236 et 11 862. On adopte la disposition pratique suivante :

	$q_1 = 3$	$q_2 = 7$	$q_3 = 5$	$q_4 = 3$	$q_5 = 2$	$q_6 = 7$
37 236	11 862	1 650	312	90	42	6
$r_1 = 1\,650$	$r_2 = 312$	$r_3 = 90$	$r_4 = 42$	$r_5 = 6$	$r_6 = 0$	

L'instruction ANS de la T.I. 83 permet d'obtenir rapidement les diviseurs et les restes successifs de l'algorithme.





1.3 Diviseurs communs

proposition

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels qu'aucun ne divise l'autre, on note r_n le dernier reste non nul obtenu en appliquant l'algorithme d'Euclide.

Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de r_n.

Démonstration

Avec les notations et résultats précédents, d étant un entier non nul, on a :

$$\begin{aligned} d \mid a \text{ et } d \mid b &\iff d \mid b \text{ et } d \mid r_1 \\ d \mid b \text{ et } d \mid r_1 &\iff d \mid r_1 \text{ et } d \mid r_2 \\ &\dots \\ d \mid r_{n-2} \text{ et } d \mid r_{n-1} &\iff d \mid r_{n-1} \text{ et } d \mid r_n \\ d \mid r_{n-1} \text{ et } d \mid r_n &\iff d \mid r_n . \end{aligned}$$

Ainsi, d est un diviseur commun à a et b si, et seulement si, d divise r_n.

Exemple

► *Voir Exercices 2 et 3*

Pour les entiers 37 236 et 11 862 ci-dessus, le dernier reste non nul est 6.
Alors les diviseurs communs à 37 236 et 11 862 sont les diviseurs de 6, c'est-à-dire 1, 2, 3 et 6, si on ne considère que les positifs.

2 Plus grand commun diviseur de deux entiers relatifs

2.1 PGCD — théorème et définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Il existe un unique entier naturel δ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- δ est un diviseur commun à a et b,
- tout diviseur commun à a et b divise δ

δ est le **plus grand commun diviseur de a et b** ; on écrit $\delta = \text{PGCD}(a\,;b)$.

Démonstration

Comme les diviseurs communs à a et b sont aussi les diviseurs communs à $|a|$ et $|b|$, on peut se limiter au cas où a et b sont des entiers positifs.

• L'**existence de δ** résulte alors des résultats du paragraphe précédent.
Si b divise a, alors b est un diviseur commun à a et b, et tout diviseur commun à a et b est un diviseur de b.
Si b ne divise pas a, le dernier reste non nul r_n obtenu en appliquant l'algorithme d'EUCLIDE est un diviseur commun à a et b, et tout diviseur commun à a et b est un diviseur de r_n.
Dans tous les cas, il existe un entier naturel δ tel que δ est un diviseur commun à a et b, et tout diviseur commun à a et b divise δ.

• **Unicité de δ**
Si δ' est un entier naturel qui vérifie les mêmes conditions que δ, alors :
δ' est un diviseur commun à a et b, donc δ' divise δ ;
δ est un diviseur commun à a et b, donc δ divise δ'.
δ et δ' sont des entiers positifs tels que δ' divise δ et δ divise δ', donc $\delta' = \delta$.

Remarques

• Si d est un diviseur commun à a et b, alors $d \leqslant \text{PGCD}(a\,;b)$, car d divise $\text{PGCD}(a\,;b)$.

• Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $\text{PGCD}(a\,;b)$:

$$d \mid a \text{ et } d \mid b \iff d \mid \text{PGCD}(a\,;b).$$

Exemples

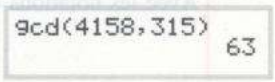
Voir Exercices 6 à 10

• Comme 12 divise 1 440, alors $\text{PGCD}(1\,440\,;12) = 12$.

• Si aucun des deux nombres ne divise l'autre, l'algorithme d'EUCLIDE permet une détermination pratique du PGCD. En l'appliquant à 4 158 et 315, le dernier reste non nul étant 63, on a $\text{PGCD}(4\,158\,;315) = 63$.

	13	5
4 158	315	63
63	0	

On vérifie le résultat avec l'instruction CATALOG gcd(des calculatrices T.I. 83 et 89.



2.2 Propriétés du PGCD

Soit a, b, c, d et k des entiers relatifs non nuls.

- $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;a)$.
- $\text{PGCD}(ka\,;kb) = |k| \times \text{PGCD}(a\,;b)$.
- Si a divise c et b divise d, alors $\text{PGCD}(a\,;b)$ divise $\text{PGCD}(c\,;d)$.

Voir Exercice 5

Propriété fondamentale du PGCD

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, il existe des entiers **relatifs** u et v tels que :

$$au + bv = \text{PGCD}\,(a\,;\,b)\ .$$

Démonstration

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$, avec x et y dans $\mathbb{Z}$.
$|a| \in \mathscr{E}$, car $|a| = |a| \times 1 + b \times 0$, donc $\mathscr{E}$ est non vide.
$\mathscr{E}$ contient alors un plus petit élément m et il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $m = au + bv$.

On va démontrer que $m = \text{PGCD}\,(a\,;\,b)$. D'après la définition du PGCD, il suffit de prouver que m est un diviseur commun à a et à b, et que tout diviseur commun d à a et b divise m.

• La division euclidienne de a par m s'écrit $a = mq + r$, avec $0 \leqslant r < m$. On a donc :

$$r = a - mq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-vq)\ .$$

r est donc de la forme $ax + by$, avec $x = 1 - uq$ et $y = -vq$ dans $\mathbb{Z}$.

Si on suppose que $r > 0$, alors r est un entier appartenant à $\mathscr{E}$, donc $r \geqslant m$ par définition de m.
Or $r < m$, donc on ne peut pas avoir $r > 0$. Ainsi, $r = 0$ et m divise a.

On démontre de façon analogue que m divise b. Ainsi, m est un diviseur commun à a et b.

• Si d est un diviseur commun à a et b, alors d divise $au + bv$. Ainsi, d divise m.

• On peut donc conclure que $m = \text{PGCD}\,(a\,;\,b)$.

Exemple

Voir Exercice résolu 1

On cherche deux entiers u et v tels que :

$$\text{PGCD}\,(960\,;\,255) = 960u + 255v\ .$$

	3	1	3	4
960	255	195	60	15
195	60	15	0	

On obtient donc $\text{PGCD}\,(960\,;\,255) = 15$.

On adopte la disposition suivante :

• on écrit les divisions euclidiennes successives en ligne en mettant 0 comme second membre, sauf pour la dernière, dans laquelle on isole le PGCD ; on dispose les uns sous les autres les nombres identiques :

$$\begin{aligned} 960 - 255 \times 3 - 195 &= 0 \\ 255 - 195 \times 1 - 60 &= 0 \\ 195 - 60 \times 3 &= 15 = \text{PGCD}\,(960\,;\,255)\ ; \end{aligned}$$

• on **multiplie** tous les termes de chaque égalité, **en commençant par l'avant dernière**, par un entier convenable tel qu'en ajoutant membre à membre toutes les égalités obtenues ne restent que des multiples de 960, 255 et leur PGCD égal à 15 :

$$\begin{aligned} 960 - 255 \times 3 - 195 &= 0 \\ 255 - 195 \times 1 - 60 &= 0 \\ 195 - 60 \times 3 &= 15 = \text{PGCD}\,(960\,;\,255)\ . \end{aligned}$$

$\times 4$, pour éliminer 195
$\times (-3)$, pour éliminer 60
aucune modification

On obtient :

$$960 \times 4 - 255 \times 3 \times 4 + 255 \times (-3) = 15\ , \text{ soit } 960 \times 4 + 255 \times (-15) = 15\ .$$

On a trouvé $u = 4$ et $v = -15$.

On pourra vérifier que $u = -13$ et $v = 49$ conviennent aussi. Cet exemple montre qu'il n'y a pas unicité des entiers u et v.

3 Nombres premiers entre eux

3.1 Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont **premiers entre eux** si, et seulement si, le PGCD de a et de b est 1.

Remarque

Ne pas confondre nombres premiers entre eux et nombres premiers :
- les nombres 6 et 25 sont premiers entre eux, mais ne sont pas des nombres premiers ;
- 7 et 13 sont des nombres premiers et sont des nombres premiers entre eux, puisque $\text{PGCD}(7 ; 13) = 1$.

3.2 PGCD et nombres premiers entre eux — proposition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, δ un diviseur positif, commun à a et b .
On note a' et b' les entiers relatifs tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.

Alors $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$ si, et seulement si, a' et b' sont premiers entre eux.

Démonstration

$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(\delta a' ; \delta b') = \delta \cdot \text{PGCD}(a' ; b')$;
donc $\text{PGCD}(a ; b) = \delta \iff \text{PGCD}(a' ; b') = 1$.

3.3 Théorème de Bézout

Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$; c'est l'**égalité de Bézout**.

Démonstration

- Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}(a ; b) = 1$.
La propriété fondamentale du PGCD justifie l'existence de u et v .
- **Réciproquement**, on suppose qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
Pour tout entier d non nul, si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid au + bv$, c'est-à-dire $d \mid 1$.
Ainsi $\text{PGCD}(a ; b) = 1$ et a et b sont premiers entre eux.

Exemple Voir Exercice 19

D'après le théorème de Bézout, pour tout entier naturel n , $4n + 3$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux :

$$1 \times (4n + 3) - 2 \times (2n + 1) = 1 .$$

Conséquence

Soit a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a est premier avec c , alors $\text{PGCD}(a ; bc) = \text{PGCD}(a ; b)$.

Démonstration

Soit d un entier non nul. Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid a$ et $d \mid bc$.
Réciproquement, comme a et c sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + cv = 1$, donc $a(bu) + (bc)v = b$. Ainsi, si $d \mid a$ et $d \mid bc$, alors $d \mid b$.
Ce qui prouve que les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à a et bc .
D'où $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a ; bc)$.

3.4 Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration

Si a est premier avec b, alors $\text{PGCD}(a\,;b)=1$. Donc $\text{PGCD}(ac\,;bc)=|c|$.
Or, a divise bc et a divise ac, donc a divise $\text{PGCD}(ac\,;bc)$. Ainsi, a divise $|c|$, donc c.

Exemple

Voir Exercices résolus 2 et 3 ; T.D. 3 ; Exercice 20

On recherche les entiers naturels n tels que $4n+3$ divise $7(2n+1)$.
Comme $4n+3$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, si $4n+3$ divise $7(2n+1)$, alors $4n+3$ divise 7, d'après le théorème de Gauss.
Or, n étant un entier naturel, on a $4n+3 \geqslant 3$, donc $4n+3=7$. Ainsi $n=1$.

Réciproquement, si $n=1$, alors $4n+3=7$ et 7 divise $7(2n+1)$.
Finalement, le seul entier naturel n, tel que $4n+3$ divise $7(2n+1)$, est 1.

Conséquences

Soit a, a_1, a_2, b, b_1, et b_2, des entiers relatifs non nuls et p un entier naturel.

- a est premier avec chacun des nombres b_1 et b_2 si, et seulement si, a est premier avec le produit b_1b_2 :

$$\text{PGCD}(a\,;b_1)=1 \text{ et } \text{PGCD}(a\,;b_2)=1 \iff \text{PGCD}(a\,;b_1b_2)=1.$$

- Si a_1 et a_2 sont premiers entre eux et divisent b, alors le produit a_1a_2 divise b.
- Si p est premier et p divise le produit ab, alors p divise l'un des facteurs a ou b.

Démonstration

- Si a est premier avec b_2, alors $\text{PGCD}(a\,;b_1b_2)=\text{PGCD}(a\,;b_1)$.
Or, a est premier avec b_1, donc $\text{PGCD}(a\,;b_1)=1$. Ainsi, $\text{PGCD}(a\,;b_1b_2)=1$.

Réciproquement, si a est premier avec b_1b_2, on a $\text{PGCD}(a\,;b_1b_2)=1$.
Or, b_1 divise b_1b_2, donc $\text{PGCD}(a\,;b_1)$ divise $\text{PGCD}(a\,;b_1b_2)$.
Ainsi, $\text{PGCD}(a\,;b_1)=1$. De même, $\text{PGCD}(a\,;b_2)=1$.

Voir Exercice 25

Exemple

Si un nombre est divisible par 4 et par 7, alors il est divisible par 28, car 4 et 7 sont premiers entre eux.

En général, le produit de deux diviseurs d'un entier n'est pas un diviseur de cet entier : 12 est divisible par 6 et par 4, mais n'est pas divisible par $24=4\times6$.

Remarques

La première conséquence s'étend à plusieurs nombres b_1, b_2, ... et b_n.
On en déduit :

- a, b étant des entiers relatifs non nuls, et m et n des entiers naturels non nuls, a est premier avec b si, et seulement si :

$$a^m \text{ est premier avec } b^n ;$$

- p_1 et p_2 étant des nombres premiers distincts, pour tous entiers naturels non nuls m et n :

$$p_1^m \text{ et } p_2^n \text{ sont premiers entre eux.}$$

cours

4 Plus petit commun multiple de deux entiers relatifs

4.1 PPCM — théorème et définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Il existe un unique entier naturel μ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- μ est un multiple commun à a et b,
- μ divise tout multiple commun à a et b.

μ est le **plus petit commun multiple de a et b** ; on écrit $\mu = \text{PPCM}(a\,;b)$.

Démonstration

Comme les multiples communs à a et b sont aussi les multiples communs à $|a|$ et $|b|$, on peut se limiter au cas où a et b sont des entiers positifs.

• Existence de μ

L'ensemble $\mathcal{M}$ des multiples strictement positifs communs à a et b n'est pas vide, car il contient ab.
Cet ensemble possède donc un plus petit élément μ.
Ainsi, μ est un multiple commun à a et b.

Si m est un multiple commun à a et b, soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de m par μ. On a $m = \mu q + r$, avec $0 \leqslant r < \mu$.

Si $r \neq 0$, alors $r = m - \mu q$ est un multiple strictement positif commun à a et b, donc $r \geqslant \mu$.
Or $r < \mu$, donc on ne peut pas avoir $r \neq 0$. Ainsi, $r = 0$ et μ divise m.

• Unicité de μ

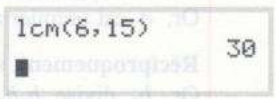
Si μ' est un entier naturel qui vérifie les mêmes conditions que μ, alors :

μ' est un multiple commun à a et b, donc μ divise μ' ;
μ est un multiple commun à a et b, donc μ' divise μ.

μ et μ' sont des entiers positifs tels que μ' divise μ et μ divise μ', donc $\mu' = \mu$.

Exemple

Le plus petit commun multiple de 6 et 15 est 30.
En effet, 30 est un multiple de 6 et de 15.
De plus, si m est un multiple commun à 6 et 15, alors m est aussi un multiple de $30 = 6 \times 15$, car 6 et 15 sont premiers entre eux.
Ainsi, $\text{PPCM}(6\,;15) = 30$.
On vérifie le résultat avec l'instruction lcm(des T.I. 83 et 89.



Remarques

- Si m est un multiple non nul commun à a et b, on a $\text{PPCM}(a\,;b) \leqslant |m|$, car $\text{PPCM}(a\,;b)$ et $|m|$ sont positifs et $\text{PPCM}(a\,;b)$ divise $|m|$.
- Les multiples communs à a et b sont les multiples de $\text{PPCM}(a\,;b)$:

$$a \mid m \text{ et } b \mid m \iff \text{PPCM}(a\,;b) \mid m.$$

Voir Exercice résolu 2

4.2 Propriétés du PPCM

Soit a, b, c, d et k des entiers relatifs non nuls.

- $\text{PPCM}(a\,;b) = \text{PPCM}(b\,;a)$.
- $\text{PPCM}(ka\,;kb) = |k| \times \text{PPCM}(a\,;b)$.
- Si a divise c et b divise d, alors $\text{PPCM}(a\,;b)$ divise $\text{PPCM}(c\,;d)$.

Voir Exercice 49

4.3 PPCM et PGCD

proposition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On a :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b)\times\text{PPCM}(a\,;\,b)=|ab|\ .$$

Démonstration

Comme $\text{PGCD}(a\,;\,b)=\text{PGCD}(|a|\,;\,|b|)$ et $\text{PPCM}(a\,;\,b)=\text{PPCM}(|a|\,;\,|b|)$, on peut se limiter au cas où a et b sont positifs. On pose $\delta=\text{PGCD}(a\,;\,b)$ et $\mu=\text{PPCM}(a\,;\,b)$.
D'après la *Proposition* 3.2, les entiers a' et b', tels que $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$, sont premiers entre eux.
On a $\delta\mu=\text{PGCD}\,(\delta a'\,;\,\delta b')\times\text{PPCM}\,(\delta a'\,;\,\delta b')=\delta\times\text{PGCD}\,(a'\,;\,b')\times\delta\times\text{PPCM}\,(a'\,;\,b')$; d'où :

$$\delta\mu=\delta^2\times\text{PPCM}\,(a'\,;\,b')\ .$$

Comme a' et b' sont premiers entre eux, d'après une conséquence du théorème de GAUSS, un entier relatif non nul m est un multiple commun à a' et b' si, et seulement si, m est un multiple du produit $a'b'$.
Donc $\text{PPCM}\,(a'\,;\,b')=a'b'$ et $\delta\mu=\delta^2\times a'b'=\delta a'\times\delta b'=ab$. D'où le résultat.

Exemples

• On a vu que $\text{PGCD}\,(4\ 158\,;\,315)=63$. On en déduit :

$$\text{PPCM}\,(4\ 158\,;\,315)=\frac{4\ 158\times315}{63}=20\ 790\ .$$

• 6 et 17 sont premiers entre eux, d'où $\text{PPCM}\,(6\,;\,17)=\dfrac{6\times17}{1}=102$.

Voir Exercice résolu 4 ; Exercices 54 à 71

4.4 PPCM et décomposition en facteurs premiers

Comme $\text{PPCM}\,(a\,;\,b)=\text{PPCM}\,(|a|\,;\,|b|)$, on peut se limiter au cas de nombres positifs.

Soit deux entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 ; on dispose donc de leurs décompositions en produit de facteurs premiers.
On pose p_1, p_2, ..., p_n les nombres premiers qui figurent soit dans la décomposition de a, soit dans celle de b, soit dans les deux, avec $p_1<p_2<\ldots<p_n$. On peut alors écrire :

$$a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n},\quad\text{avec}\quad 0\leqslant\alpha_1,\quad 0\leqslant\alpha_2,\ldots,\quad 0\leqslant\alpha_n\ ;$$
$$b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n},\quad\text{avec}\quad 0\leqslant\beta_1,\quad 0\leqslant\beta_2,\ldots,\quad 0\leqslant\beta_n\ .$$

Un nombre entier naturel m non nul est multiple de a et b si, et seulement si, on a :

$$m=p_1^{\gamma_1}\times p_2^{\gamma_2}\times\ldots\times p_n^{\gamma_n}\times P\ ,$$

avec $\gamma_1\geqslant\max\,(\alpha_1\,;\,\beta_1)$, $\gamma_2\geqslant\max\,(\alpha_2\,;\,\beta_2)$, ..., $\gamma_n\geqslant\max\,(\alpha_n\,;\,\beta_n)$, en notant $\max(\alpha\,;\,\beta)$ le plus grand des deux nombres α et β,
et où P est égal à 1 ou au produit de nombres premiers distincts de p_1, p_2, ..., p_n.

$$\text{PPCM}\,(a\,;\,b)=p_1^{\max\,(\alpha_1\,;\,\beta_1)}\times p_2^{\max\,(\alpha_2\,;\,\beta_2)}\times\ldots\times p_n^{\max\,(\alpha_n\,;\,\beta_n)}\ .$$

C'est le produit de tous les facteurs premiers figurant dans la décomposition de a ou de b, chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant.

Exemple

Voir Exercice 50

On considère les entiers $a=12\ 474$ et $b=1\ 960$. On a :

$$a=2\times3^4\times7\times11=2\times3^4\times5^0\times7\times11\quad\text{et}\quad b=2^3\times5\times7^2=2^3\times3^0\times5\times7^2\times11^0\ .$$

Avec les notations ci-dessus, $p_1=2$, $\alpha_1=3$, $\beta_1=1$; d'où $\max(\alpha_1\,;\,\beta_1)=3$.
On poursuit de la même façon. Ainsi, $\text{PPCM}\,(a\,;\,b)=2^3\times3^4\times5\times7^2\times11=1\ 746\ 360$.

1 PGCD et utilisations

1° Calculer δ le PGCD des nombres 9 042 et 1 881 en utilisant l'algorithme d'EUCLIDE.

2° En déduire :

a) tous les diviseurs communs à 9 042 et 1 881 ;

b) deux entiers u et v tels que $\delta = 9\,042u + 1\,881v$;

c) le PPCM de 9 042 et 1 881.

• Méthode

Soit deux entiers a et b non nuls donnés.

• Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de leur PGCD.

• Pour trouver deux entiers u et v vérifiant $au + bv = \text{PGCD}\,(a\,;b)$ à partir de l'algorithme d'EUCLIDE, on écrit les divisions successives en ligne, les unes sous les autres.

On cherche à multiplier les membres de chaque égalité par un coefficient, de sorte qu'en ajoutant membre à membre ne restent que des multiples de a, b et leur PGCD.

• Connaissant leur PGCD, pour calculer leur PPCM, on utilise la relation :

$$\text{PGCD}\,(a\,;b) \times \text{PPCM}\,(a\,;b) = |ab| \ .$$

1° On applique l'algorithme d'EUCLIDE.

	4	1	4	5	2
9 042	1 881	1 518	363	66	33
1 518	363	66	33	0	

Le dernier reste non nul est $\boxed{33}$. Ainsi, on obtient **PGCD (9 042 ; 1 881) = 33**.

2° a) $33 = 11 \times 3$.

Les diviseurs communs à 9 042 et 1 881 sont les diviseurs de 33, c'est-à-dire :

$$-33\,,\ -11\,,\ -3\,,\ -1\,,\ 1,\ 3,\ 11 \text{ et } 33.$$

b) On écrit les divisions de l'algorithme d'EUCLIDE en ligne :

$$\begin{aligned}
9\,042 - 1\,881 \times 4 - 1\,518 &= 0 && \times(-26)\text{ , pour éliminer 1 518}\\
1\,881 - 1\,518 \times 1 - 363 &= 0 && \times 21\text{ , pour éliminer 363}\\
1\,518 - 363 \times 4 - 66 &= 0 && \times(-5)\text{ , pour éliminer 66}\\
363 - 66 \times 5 &= 33 && \text{aucune modification}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$9\,042 \times (-26) - 1\,881 \times 4 \times (-26) + 1\,881 \times 21 = 33\ ,$$

soit $9\,042 \times (-26) + 1\,881 \times 125 = 33$.

On a donc trouvé $\boldsymbol{u = -26}$ et $\boldsymbol{v = 125}$.

c) Comme $\text{PGCD}\,(9\,042\,;\,1\,881) = 33$, on en déduit :

$$\text{PPCM}\,(9\,042\,;\,1\,881) = \frac{9\,042 \times 1\,881}{33} = 515\,394\ .$$

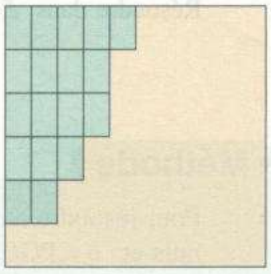
Voir Exercice 12

2 Un exemple concret d'équation $ax = by$

On veut réaliser une plaque carrée à découper en rectangles de dimensions 2,1 cm et 3,5 cm sans aucune perte.

On souhaite que le côté de cette plaque n'excède pas 0,5 m et que le nombre de rectangles soit le plus grand possible.

Combien peut-on obtenir de rectangles ?



• Méthodes

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ une équation de la forme $ax = by$, où a et b sont des entiers relatifs donnés, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

① diviser chaque membre par PGCD $(a\,;\,b)$ de façon à se ramener à une équation de la forme $a'x = b'y$, où a' et b' sont des entiers premiers entre eux, puis appliquer le théorème de GAUSS ;

② introduire l'inconnue auxiliaire $z = ax = by$, déterminer les valeurs de z en utilisant PPCM $(a\,;\,b)$, puis en déduire x et y.

Voir Exercice 20

De façon à travailler avec des entiers, les longueurs sont exprimées en millimètres.

Il n'y a pas de perte si, et seulement si, l'arête z est un multiple de 21 et de 35.
Si x et y sont des entiers tels que $z = 21x = 35y$, on doit avoir :

$$0 < z \leqslant 500 ,$$

et le nombre de rectangles obtenus est xy.

• On résout dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $21x = 35y$.

① Première méthode
PGCD $(21\,;\,35) = 7$.

L'équation $21x = 35y$ équivaut à $3x = 5y$.

Si $3x = 5y$, alors 3 divise $5y$ et comme 3 est premier avec 5, d'après le théorème de GAUSS, 3 divise y.

Donc, il existe un entier relatif k tel que $y = 3k$.

On en déduit que :

$$3x = 5 \times 3k \text{ , d'où } x = 5k .$$

Réciproquement, si $x = 5k$ et $y = 3k$, avec k dans $\mathbb{Z}$, alors $3x = 5y$.

Finalement, les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $3x = 5y$ sont les couples :

$$(5k\,;\,3k) \text{ , avec } k \text{ dans } \mathbb{Z} .$$

② Deuxième méthode
$z = 21x = 35y$, avec x et y entiers relatifs si, et seulement si, z est un multiple commun à 21 et 35.
On a $21 = 3 \times 7$ et $35 = 5 \times 7$, donc :

$$\text{PPCM}\,(21\,;\,35) = 3 \times 5 \times 7 = 105 ,$$

et les multiples communs à 21 et 35 sont les multiples de 105.
On en déduit que :

$z = 21x = 35y$, avec x et y entiers relatifs,

si, et seulement si, il existe un entier relatif n tel que $z = 105n$.
Comme :

$$21x = 105n \iff x = 5n$$
$$\text{et} \quad 35y = 105n \iff y = 3n ,$$

les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $21x = 35y$ sont les couples :

$$(5n\,;\,3n) \text{ , avec } n \text{ dans } \mathbb{Z} .$$

• On en déduit la solution du problème. On a :

$$z = 21x = 105k ,$$

et la condition $0 < z \leqslant 500$ se traduit par :

$$0 < 105k \leqslant 500 ,$$

c'est-à-dire $1 \leqslant k \leqslant 4$ puisque k est entier.

Comme $k > 0$, le produit $xy = 15k^2$ est maximum lorsque k est maximum, c'est-à-dire lorsque $k = 4$.
On obtient donc 240 rectangles avec une plaque carrée de 42 cm de côté.

exercices résolus

3 Équation $ax + by = \delta$ avec $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $189x + 255y = 3$, puis donner les couples solutions tels que :

$$-100 \leqslant x \leqslant 200 \quad \text{et} \quad -200 \leqslant y \leqslant 100 .$$

• Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ une équation du type $ax + by = \delta$, avec a et b entiers naturels non nuls et $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$:

• on divise chaque membre par δ ; en posant $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$, l'équation donnée est équivalente à $a'x + b'y = 1$, avec $\text{PGCD}(a' ; b') = 1$;

• on détermine une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de cette nouvelle équation, l'existence d'une solution est assurée par le théorème de BÉZOUT, et on met l'équation sous la forme :

$$a'(x - x_0) = -b'(y - y_0) ;$$

• on est ainsi ramené à une équation que l'on résout à l'aide du théorème de GAUSS.

Voir Exercices 27 à 29

On vérifie que $\text{PGCD}(255 ; 189) = 3$.

	1	2	1	6	3
255	189	66	57	9	3
66	57	9	3	0	

On a donc :

$$189x + 255y = 3 \iff 63x + 85y = 1 .$$

• Pour déterminer une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de :

$$63x + 85y = 1 ,$$

et s'il n'y en a pas d'évidente, on utilise les divisions successives de l'algorithme d'EUCLIDE appliqué à 85 et 63.

$$85 = 63 \times 1 + 22 \ ; \quad 63 = 22 \times 2 + 19 \ ;$$
$$22 = 19 \times 1 + 3 \ ; \quad 19 = 3 \times 6 + 1 \ ;$$

Ce sont les égalités que l'on « combine » en partant de l'avant dernière afin qu'il ne restent que des multiples de 85, 63 et de leur PGCD égal à 1.

$$\begin{aligned} 85 - 63 \times 1 - 22 &= 0 && \times(-20) \\ 63 - 22 \times 2 - 19 &= 0 && \times 7 \\ 22 - 19 \times 1 - 3 &= 0 && \times(-6) \\ 19 - 3 \times 6 &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$85 \times (-20) - 63 \times (-20) + 63 \times 7 = 1 ,$$

c'est-à-dire :

$$63 \times 27 + 85 \times (-20) = 1 .$$

• On peut alors écrire :

$$\begin{cases} 63x + 85y = 1 \\ 63 \times 27 + 85 \times (-20) = 1 \end{cases}$$
$$\iff 63(x - 27) = -85(y + 20) .$$

• Si $63(x - 27) = -85(y + 20)$, alors :

$$63 \mid -85(y + 20) .$$

Or, 63 est premier avec 85 ; donc, d'après le théorème de GAUSS, 63 divise $-(y + 20)$.

Il existe donc un entier relatif k tel que :

$$-(y + 20) = 63k .$$

$$\begin{cases} 63(x - 27) = -85(y + 20) \\ -(y + 20) = 63k \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 63(x - 27) = 85 \times 63k \\ -(y + 20) = 63k \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 27 = 85k \\ y + 20 = -63k . \end{cases}$$

Les solutions sont les couples de la forme :

$$(27 + 85k ; -20 - 63k) , \text{ avec } k \text{ dans } \mathbb{Z} .$$

Les conditions :

$$-100 \leqslant x \leqslant 200$$
$$\text{et } -200 \leqslant y \leqslant 100$$

se traduisent par :

$$-1 \leqslant k \leqslant 2 \quad \text{et } k \text{ entier.}$$

On obtient quatre couples :

$$(-58 ; 43) \ ; \ (27 ; -20) \ ;$$
$$(112 ; -83) \text{ et } (197 ; -146) .$$

4 Relation entre PGCD et PPCM

BAC

Énoncé

Déterminer les entiers naturels a et b non nuls, avec $a < b$, tels que leur PGCD, δ, et leur PPCM, μ, vérifient :

$$2\mu - \delta = 22 .$$

Analyse de l'énoncé

On cherche à utiliser la relation entre PGCD et PPCM afin de simplifier l'équation.

Pour des entiers naturels non nuls, cette relation s'écrit :

$$\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = ab .$$

• Méthode

On pose $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$, alors a' et b' sont premiers entre eux.

La relation $\mu\delta = ab$ entre PGCD et PPCM, pour des entiers positifs, s'écrit :

$$\mu\delta = a'\delta b'\delta \text{ , soit } \mu = a'b'\delta .$$

On transforme l'équation donnée en une équation équivalente faisant intervenir a', b' et δ ; équation que l'on résout par disjonction des cas, en raisonnant sur δ.

On pose $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.

a' et b' sont des entiers naturels premiers entre eux et comme $a < b$, on a $a' < b'$.

D'après la relation $\mu = a'b'\delta$, l'équation :

$$2\mu - \delta = 22$$

s'écrit :

$$2a'b'\delta - \delta = 22 ,$$

c'est-à-dire :

$$\delta(2a'b' - 1) = 22 .$$

δ est alors un diviseur de 22 et par définition, δ est positif.
Les diviseurs positifs de 22 sont 1, 2, 11 et 22.

On raisonne en examinant séparément chaque cas.

• $\delta = 1$ conduit à $2a'b' - 1 = 22$.
$2a'b'$ étant pair, $2a'b' - 1$ est impair, donc ne peut être égal à 22.
Cette équation n'a donc pas de solution.

• $\delta = 2$ conduit à $2a'b' - 1 = 11$, c'est-à-dire à $a'b' = 6$.

Donc :

$a' = 1$ et $b' = 6$, ou $a' = 2$ et $b' = 3$.

On obtient :

$a = 2$ et $b = 12$, ou $a = 4$ et $b = 6$.

On vérifie que ces nombres conviennent.
Pour 2 et 12, on a :

$$\text{PGCD}(2 ; 12) = 2 ,$$
$$\text{PPCM}(2 ; 12) = 12$$

et on a bien $2 \times 12 - 2 = 22$.
Pour 4 et 6, on a aussi le PGCD et le PPCM qui valent 2 et 12.
Donc $2\mu - \delta = 22$ est encore vérifié.

• $\delta = 11$ conduit à $2a'b' - 1 = 2$, qui n'a pas de solution, car $2a'b' - 1$ est impair.

• $\delta = 22$ conduit à $2a'b' - 1 = 1$, c'est-à-dire à $a'b' = 1$.
Cette équation n'a pas de solution, car a' et b' sont entiers naturels non nuls, avec $a' < b'$.

Les nombres cherchés sont donc :

2 et 12, puis 4 et 6.

Remarque

Si on veut déterminer les entiers relatifs a et b non nuls vérifiant les conditions de l'énoncé, la relation entre PGCD et PPCM s'écrit $\mu = |a'b'|\delta$.

Le problème se ramène alors à chercher a' et b' premiers entre eux, avec $a' < b'$, tels que :

$$\delta(2|a'b'| - 1) = 22 .$$

La résolution se mène ensuite de la même façon.

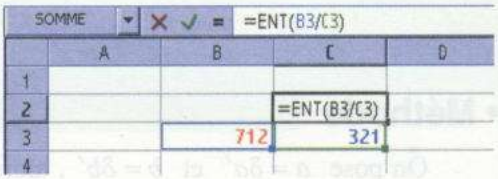
1 Algorithme d'EUCLIDE et PGCD

1.1 Avec un tableur

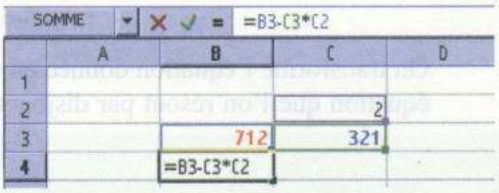
Avec un tableur, on peut obtenir la liste des quotients et restes successifs dans l'algorithme d'EUCLIDE appliqué à deux entiers naturels non nuls a et b.
On adopte la disposition pratique vue en cours, avec, par exemple, $a = 712$ et $b = 321$.

1 Dans les cellules B3 et C3, entrer a et b.

2 Dans la cellule C2, effectuer le quotient de a par b et, dans la cellule B4, calculer le reste r de la division euclidienne de a par b.



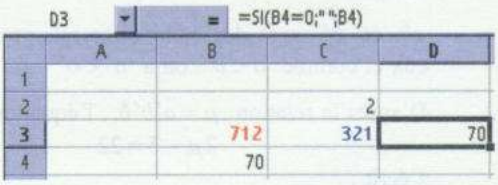
3 On reproduit ensuite le même schéma en sachant que l'on s'arrête lorsque l'on obtient un reste nul, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus rien à écrire dans les cellules.



a) La cellule D3 ne doit rien recevoir si $r = 0$, et doit recevoir r si $r \neq 0$.
Entrer la formule de calcul dans D3 :

$$= \text{SI}\,(B4 = 0\ ;\ "\ "\ ;\ B4)$$

condition ; contenu : rien, si la condition est réalisée, / le reste non nul, si la condition n'est pas réalisée.



b) La cellule D2 ne doit rien recevoir si B4 est vide, ou contient 0, et doit recevoir le quotient de C3 par D3 dans le cas contraire.
Entrer la formule de calcul dans D2 :

$$= \text{SI}\,(\text{OU}\,(B4 = 0\ ;\ B4 = "\ ")\ ;\ "\ "\ ;\ \text{ENT}(C3/D3))$$

c) La cellule C4 ne doit rien recevoir si B4 est vide, ou contient 0, et doit recevoir le reste de la division euclidienne de C3 par D3 dans le cas contraire.
Entrer la formule de calcul suivante dans C4, après l'avoir complétée :

$$= \text{SI}\,(\text{OU}\,(B4 = 0\ ;\ B4 = "\ ")\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots)$$

d) Recopier à droite ces trois formules de calcul dans un nombre suffisant de colonnes.

e) À la lecture du tableau, quel est le PGCD de 712 et 321 ?

4 On peut faire afficher le PGCD cherché.
Si le contenu de B4 est 0, le PGCD est b, contenu de C3 ;
si le contenu de C4 est 0, le PGCD est le reste précédent, contenu dans D3.
Ainsi, on entre en B6 la formule :

$$= \text{SI}\,(B4 = 0\ ;\ C3\ ;\ "\ ")$$

que l'on recopie à droite.
Au début de la ligne 6, on peut écrire le texte « PGCD $(a\ ;\ b) =$ » pour une meilleure lecture.

5 Donner à a et b les valeurs 40 425 et 4 788. Lire leur PGCD.

1.2 Programme sur une calculatrice

Le programme ci-dessous donne le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b.

T.I. 83	Commentaires	Casio 9930
...	nom du programme	...
Prompt A, B	entrée des entiers a et b	"A =" ? → A "B =" ? → B
Repeat R = 0 Int (A/B) → Q A – B × Q → R B → A : R → B End	exécution de l'algorithme d'EUCLIDE jusqu'à ce que le reste soit nul	Do Intg (A/B) → Q A – B × Q → R B → A : R → B LpWhile R ≠ 0
Disp "PGCD=", A	affichage du PGCD	"PGCD=" : A ◢

1 Saisir ce programme sur une calculatrice.

```
prgmPGCD2
A=?40425
B=?4788
PGCD=
                21
Done
```

2 À l'aide de celui-ci, retrouver le PGCD de 40 425 et 4 788.

2 PGCD de deux entiers dépendant de n

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les deux entiers $a = 2n - 1$ et $b = 9n + 4$.

1 Montrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de 17.

En déduire les valeurs possibles du PGCD de a et b.

2 Si $\text{PGCD}(a\,;\,b) = 17$, alors $a = 17a'$ et $b = 17b'$, avec a' et b' premiers entre eux.

a) Montrer, en utilisant le théorème de GAUSS, que a' et b' sont respectivement de la forme :

$$1 + 2k \quad \text{et} \quad 5 + 9k \text{, avec } k \text{ entier naturel.}$$

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est 17.

Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier où n vaut 26.

c) Déterminer n pour que le PGCD de a et b soit égal à 17 et le PPCM de a et b soit égal à 1 955.

3 Déterminer deux valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.

► *Voir Exercice 10*

3 Équations diophantiennes $ax + by = c$

Un peu d'histoire

DIOPHANTE d'ALEXANDRIE vécut vers le IIIe ou le IVe siècle de notre ère.
Dans son principal ouvrage, *l'Arithmétique*, il étudie des problèmes se ramenant à des équations qu'il résout en nombres entiers ou rationnels.
En théorie des nombres, une équation à coefficients entiers, dont on recherche les éventuelles solutions entières, est une **équation diophantienne**.

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls. On pose $\delta = \text{PGCD}(a\,;\,b)$, $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et (E) l'équation $ax + by = c$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$.

3.1 Existence de solutions

1 Montrer que (E) admet au moins une solution $(x_0\,;\,y_0)$ si, et seulement si, c est un multiple de δ.

2 **Application**
Dire si chacune des équations suivantes admet ou non au moins une solution :

a) $20x + 15y = 3$; **b)** $20x + 15y = 35$; **c)** $35x + 14y = 12$.

3.2 Si $c = \text{PGCD}\,(a\,;\,b)$

1 Vérifier que (E) est équivalente à $a'x + b'y = 1$, avec $\text{PGCD}\,(a'\,;\,b') = 1$.
Le théorème de BÉZOUT permet d'affirmer qu'il existe au moins une solution $(x_0\,;\,y_0)$. Il s'agit de les déterminer toutes.

2 Montrer que (E) est équivalente à $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$.
Achever la résolution de (E) en utilisant le théorème de GAUSS.

3 **Application**

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations (1) et (2), après avoir justifié que (2) est bien de la forme de (E) :

(1) $20x + 15y = 5$; (2) $35x - 14y = 7$.

b) Dans le plan muni d'un repère, $20x + 15y = 5$ est une équation de droite.
Donner une interprétation graphique des solutions de (1).

3.3 Si $c = \delta c'$, avec $c' \neq 1$

1 Vérifier que (E) est équivalente à $a'x + b'y = c'$, avec $\text{PGCD}\,(a'\,;\,b') = 1$.

2 Soit $(u_0\,;\,v_0)$ un couple d'entiers relatifs tels que $a'u_0 + b'v_0 = 1$.
Montrer que $(c'u_0\,;\,c'v_0)$ est solution de (E).

3 Montrer que (E) est équivalente à $a'(x - c'u_0) = b'(c'v_0 - y)$. Achever la résolution de (E).

4 **Application**

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : (3) $20x - 15y = 10$ et (4) $35x + 14y = 21$.

b) Indiquer les couples $(x\,;\,y)$ solutions de (3) tels que $-2 \leqslant x \leqslant 16$ et $-2 \leqslant y \leqslant 16$.

Voir Exercices 31, 32, 34 à 39

4 Petit théorème de FERMAT

4.1 Démonstration du théorème

On se propose de démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de **petit théorème de FERMAT** :

Si p est un nombre premier, pour tout entier a non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$.

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p.

1 On considère la liste des nombres a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$.

a) En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que, pour k et k' entiers distincts entre 1 et $(p-1)$, les restes dans la division euclidienne par p des nombres ka et $k'a$ sont distincts et non nuls.

b) En déduire que la liste des restes dans la division euclidienne par p de a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$ est formée des nombres 1, 2, ..., $(p-1)$.

2 On écrit :

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \ (p), \\ 2a &\equiv r_2 \ (p), \\ &\dots \\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \ (p). \end{aligned}$$

Les nombres r_1, r_2, ..., r_{p-1}, étant distincts deux à deux et formant la liste 1, 2, ..., $(p-1)$.

a) Donner une expression simple du produit $r_1 r_2 \dots r_{p-1}$.

b) En utilisant la compatibilité des congruences avec la multiplication, justifier que :

$$(p-1)!\,a^{p-1} \equiv (p-1)! \ (p).$$

Voir Chapitre 13

c) A et B étant deux entiers, on rappelle que $A \equiv B \ (p)$ si, et seulement si, $p \mid (A-B)$.

Déduire de **b)** que $p \mid a^{p-1} - 1$ et conclure.

4.2 Réciproque et conséquence

1 La **réciproque** du petit théorème de FERMAT est-elle vraie ?
Autrement dit, si p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier non divisible par p tel que $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$, l'entier p est-il nécessairement premier ?

2 **Conséquence**

a) Si p est un nombre premier, déduire du petit théorème de FERMAT que, pour tout entier a, on a $a^p \equiv a \ (p)$.
On pourra discuter suivant que p divise ou non a.

b) Applications
Soit a un entier.

- Montrer que $a^7 \equiv a \ (14)$.
- Justifier que si p ne divise pas $a^p - a$, alors p n'est pas premier.

Quelle utilisation peut-on faire de ce résultat ?

Voir Exercice 26

travaux dirigés

5 Cryptographie

Le but de la cryptographie est de permettre à deux personnes de communiquer de manière confidentielle. Ainsi, une tierce personne qui intercepte un message ne peut en comprendre la signification ou le modifier.

Soit A et B deux personnes qui veulent communiquer confidentiellement.
On note C l'algorithme de codage et D l'algorithme de décodage.
Si m est un message en langue naturelle, alors :

$C(m)$ est le message chiffré (traduit en langage codé)

et $D(C(m))$ est le message déchiffré (traduit en langage naturel) et on a $D(C(m)) = m$.

On distingue deux types d'algorithmes : ceux à **clés secrètes** et ceux à **clés publiques**.

5.1 Algorithmes à clés secrètes

Un algorithme est à **clés secrètes** si l'algorithme de décodage D se déduit facilement de l'algorithme de codage C.

Chiffrement par décalage



© L'illustration/Keystone

On dispose d'une clé qui peut être un mot, une phrase ..., et celle-ci fournit une suite de nombres : la liste des rangs dans l'alphabet dans l'ordre des lettres qui la forment.
Par exemple, MATH fournit la suite (13 ; 01 ; 20 ; 08) .
Avec cette clé, pour chiffrer un texte, on remplace chaque lettre par son rang x dans l'alphabet, on ajoute 13 au rang de la première lettre, 1 au rang de la deuxième lettre, 20 au rang de la troisième lettre, 8 au rang de la quatrième et on recommence avec la même clé, 13 au rang de la cinquième lettre...
On obtient les rangs des lettres qui remplacent.
Ces rangs sont les restes de la division euclidienne de $x + k$ par 26, et k varie pour chaque lettre en fonction de la clé.
L'intérêt est qu'une lettre n'est pas toujours codée par la même autre lettre.

Chiffrer le message « arrive demain » avec la clé MATH.

Ce procédé fut automatisé pendant la Seconde Guerre mondiale, notamment avec *Enigma*, machine de cryptage utilisée par l'Allemagne.

Voir Exercices 45 à 47

5.2 Algorithmes à clés publiques

Dans les algorithmes à clés secrètes, le problème le plus important réside dans l'échange de la clé entre celui qui émet le message et celui qui le reçoit. Si on intercepte la clé, le message pourra être déchiffré.
Les algorithmes modernes à clés publiques, nés vers 1976, ont fourni une parade : l'algorithme de codage et la clé sont connus de tous et il n'est pas possible de déduire l'algorithme de décodage de l'algorithme de codage.

• Principe

Chaque personne d'un réseau possède un algorithme de codage et l'algorithme de décodage correspondant. Les algorithmes de codage sont rendus publiques dans un annuaire.
Si une personne A veut communiquer un message m à une personne B, elle envoie le message $C_B(m)$ à B. Seule B pourra lire ce message, car elle est la seule à posséder l'algorithme de décodage D_B : $D_B(C_B(m)) = m$.

Ainsi, tout le monde peut chiffrer un message en cherchant dans l'annuaire les clés publiques, mais seule la personne à laquelle s'adresse le message peut le déchiffrer en utilisant les clés secrètes.

On a aussi $C_B(D_B(m)) = m$.
Pour plus de sécurité, la personne A peut transmettre le message $C_B(D_A(m))$, ainsi seule la personne B pourra le déchiffrer, mais elle pourra également en utilisant C_A publique, vérifier que A est bien l'auteur du message. Seule A connaissant D_A a pu construire $C_B(D_A(m))$.

Le système RSA

Le système RSA, du nom des trois auteurs (RIVEST, SHAMIR et ADLEMEN), est l'exemple d'algorithme à **clés publiques** actuellement utilisé par les services secrets.

Il est basé sur le fait qu'il est facile de multiplier entre eux deux nombres premiers p et q ; mais si $n = pq$ possède plus de 200 chiffres, il est impossible, même avec un ordinateur puissant et travaillant longtemps, de retrouver les facteurs p et q à partir de n .

Une personne B choisit deux nombres premiers, par exemple $p = 7$ et $q = 23$ et un nombre e premier avec le produit $(p-1)(q-1)$. On a $pq = 161$.

1 Vérifier que 5 convient pour e .
$n = 161$ et $e = 5$ sont rendus publiques dans un annuaire, p et q restent secrets.

2 Chiffrement
Le principe s'applique à un entier naturel strictement inférieur à n .

On chiffre chaque nombre x par le reste $C(x)$ de la division euclidienne de x^e par n .

$$x \xmapsto{chiffrement} x^e \equiv C(x) \ (n) , \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant C(x) < n .$$

Chiffrer le message « dix » que veut envoyer la personne A à la personne B en utilisant les clés publiques ci-dessus.
On commencera par remplacer chaque lettre par son rang dans l'alphabet.

3 Déchiffrement

a) Montrer qu'il existe un unique entier d tel que :

$$1 < d \leqslant (p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad ed \equiv 1 \ ((p-1)(q-1))$$

et le déterminer.

b) Montrer qu'il résulte du **petit théorème de FERMAT** que :

si p est premier et si $k \equiv 1 \ (p-1)$, alors, pour tout entier naturel a , $a^k \equiv a \ (p)$.

c) On admet que, pour p et q premiers distincts, on a :

si $k \equiv 1 \ ((p-1)(q-1))$, alors, pour tout entier naturel a , $a^k \equiv a \ (pq)$.

a et b étant deux entiers naturels, en déduire que si $a \equiv b^e \ (pq)$, alors $b \equiv a^d \ (pq)$.

d) Justifier alors le principe de déchiffrement : on déchiffre chaque nombre c en le remplaçant par le reste $D(c)$ de la division euclidienne de c^d par n .

$$c \xmapsto{déchiffrement} c^d \equiv D(c) \ (n) , \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant D(c) < n .$$

e) Déchiffrer le message « 01 84 84 14 87 66 72 » qu'a reçu la personne B.

Avec l'annuaire, tout le monde connaît n , donc on peut penser que tout le monde peut le factoriser, donc trouver p et q , puis d , donc déchiffrer les messages.
Pour de petites valeurs de n , c'est possible, mais en choisissant p et q premiers distincts, de sorte que leur produit s'écrive avec plus de 200 chiffres, c'est impossible, d'où une certaine sécurité et l'intérêt de poursuivre les recherches pour trouver des nombres premiers de plus en plus grands.

Faire le point

• PGCD, diviseurs communs

• Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Si b divise a, alors PGCD $(a\,;b)=b$.
Si b ne divise pas a, alors PGCD $(a\,;b)$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'EUCLIDE appliqué à a et b.

• Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. PGCD $(a\,;b)=$ PGCD $(|a|\,;|b|)$.

• Les diviseurs communs à a et b entiers relatifs non nuls sont les diviseurs de PGCD $(a\,;b)$.

• **Propriété fondamentale**
Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, il existe des entiers relatifs u et v tels que :

$$au+bv=\text{PGCD}\ (a\,;b)\ .$$

• Théorème de BÉZOUT

Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v vérifiant $au+bv=1$, égalité dite de BÉZOUT.

• Théorème de GAUSS

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

• PGCD et PPCM

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, PGCD $(a\,;b)\times$ PPCM $(a\,;b)=|ab|$.

savoir	comment faire ?
montrer que deux entiers relatifs non nuls sont premiers entre eux	• on prouve que leur PGCD est égal à 1 • on montre que l'égalité de BÉZOUT est satisfaite • on suppose qu'un entier non nul d les divise et on prouve que d vaut 1 ou -1
déterminer le PPCM de deux entiers relatifs non nuls a et b	• on utilise les décompositions en facteurs premiers de ces entiers : le PPCM est le produit de tous les facteurs premiers figurant dans ces décompositions, chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant • on utilise la relation avec le PGCD : PGCD $(a\,;b)\times$ PPCM $(a\,;b)=\lvert ab\rvert$
trouver deux nombres a et b connaissant une relation entre eux, leur PGCD et/ou leur PPCM	on se ramène à des nombres premiers entre eux a' et b', en posant : $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$ et on utilise la relation entre le PGCD et le PPCM

1 Diviseurs communs à deux entiers naturels

1 Vrai-faux

1 On donne la division euclidienne de 6 587 par 21 :

$$6\,587 = 21 \times 313 + 14 .$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Le dernier reste non nul de l'algorithme d'EUCLIDE, appliqué à 6 587 et 21, est 7.

2° Les diviseurs positifs communs à 6 587 et 21 sont 1 et 7.

3° 6 587 et 21 possèdent quatre diviseurs communs.

4° 1 est le seul diviseur positif commun à 6 587 et 313.

2 Algorithme d'EUCLIDE et diviseurs communs

2 Appliquer l'algorithme d'EUCLIDE aux deux entiers a et b et en déduire les diviseurs communs à a et b.

1° $a = 4\,851$; $b = 616$. **2°** $a = 8\,840$; $b = 4\,641$.

3° $a = 29\,295$; $b = 2\,480$. **4°** $a = 4\,004$; $b = 5\,698$.

3 On a dressé le tableau obtenu en appliquant l'algorithme d'EUCLIDE aux deux entiers a et b.

Dans chaque cas, retrouver a et b et donner les diviseurs positifs communs à a et à b.

1°

	2	2	3
a	b	r_1	r_2
r_1	18	0	

2°

	2	6	4
a	b	r_1	58
r_1	r_2	0	

3°

	4	1	1	3	8	3
a	b	r_1	r_2	r_3	r_4	1
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	0	

2 PGCD de deux entiers relatifs

1 Vrai-faux

4 Sans calcul de PGCD, les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) PGCD $(1\,284 ; 1\,846) = 3$; **b)** PGCD $(41 ; 12) = 7$;

c) PGCD $(-21 ; 105) = 21$; **d)** PGCD $(-35 ; -14) = 7$.

2 Détermination

5 **Propriétés du PGCD**

Soit A et B deux entiers non nuls :

$$\text{PGCD}(A ; B) = \text{PGCD}(|A| ; |B|) .$$

On suppose alors les entiers naturels et non nuls.

1° Montrer que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a)$.

2° Soit k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$.

a) Montrer que $k\delta \mid \text{PGCD}(ka ; kb)$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel ℓ non nul tel que :

$$\ell k\delta = \text{PGCD}(ka ; kb) .$$

b) Montrer que nécessairement $\ell = 1$ et énoncer le résultat obtenu.

3° Montrer que si a divise c et b divise d, alors :

PGCD $(a ; b)$ divise PGCD $(c ; d)$.

6 Déterminer le PGCD des entiers a et b dans les cas suivants :

1° $a = 924$; $b = 990$. **2°** $a = 945$; $b = 3\,150$.

3° $a = 1\,798$; $b = -2\,697$. **4°** $a = -1\,890$; $b = 5\,250$.

7 ★ Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer le PGCD de :

a) n et $n+1$; **b)** n et $2n+1$; **c)** $n+1$ et $2n+1$.

8 Soit a, b et n trois entiers non nuls.

1° Montrer que tout diviseur d de a et de b divise $a+bn$ et $a+b(n-1)$.

2° Montrer que tout diviseur d de $a+bn$ et $a+b(n-1)$ divise a et b.

3° En déduire que :

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a+bn ; a+b(n-1)) .$$

9 1° Soit a et b deux entiers naturels non nuls et k un entier relatif tel que $a+kb>0$. Montrer que :

$$\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(a+kb\,;b)\,,$$

ainsi on ne change pas le PGCD en ajoutant, ou en retranchant, à l'un des nombres un multiple de l'autre. D'où :

Une **recherche du PGCD** de deux entiers naturels non nuls par une « approche successive » :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(325\,;70)&=\text{PGCD}(325-4\times70\,;70)\\&=\text{PGCD}(45\,;70)\\&=\text{PGCD}(45\,;70-45)\\&=\text{PGCD}(45\,;25)\\&=\text{PGCD}(45-25\,;25)\\&=\text{PGCD}(20\,;25)\\&=\text{PGCD}(20\,;25-20)\\&=\text{PGCD}(20\,;5)\\&=5\,,\end{aligned}$$

car 5 est un diviseur de 20.

2° a) Déterminer, par ce procédé, PGCD (628 ; 103).

b) n étant un entier naturel strictement supérieur à 2, on pose $a=n^2-4n$ et $b=2n$.

Montrer que $\text{PGCD}(n^2-4n\,;2n)=n\text{PGCD}(n\,;2)$.

Étudier, suivant la parité de n, le PGCD de a et b.

10 ★ Soit n un entier naturel non nul.

1° Montrer que les nombres suivants sont des entiers naturels : $A=\dfrac{n(n+1)}{2}$; $B=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2° Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 3. En remarquant que $B=A\times\dfrac{2n+1}{3}$, montrer que :

a) $\text{PGCD}(A\,;B)=A \iff r=1$;

b) $\text{PGCD}(A\,;B)=\dfrac{A}{3} \iff r=0$ ou $r=2$.

PGCD et décomposition en facteurs premiers

Soit a et b deux entiers non nuls distincts de 1 et de -1. Comme $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(|a|\,;|b|)$, on peut se limiter à a et b positifs.

On pose $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers qui figurent soit dans la décomposition de a, soit dans celle de b, soit dans les deux, avec :

$$p_1<p_2<\ldots<p_n\,.$$

On peut alors écrire :

$$a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}\,,$$

avec $0\leqslant\alpha_1, 0\leqslant\alpha_2, \ldots, 0\leqslant\alpha_n$;

$$b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}\,,$$

avec $0\leqslant\beta_1, 0\leqslant\beta_2, \ldots, 0\leqslant\beta_n$.

Un nombre entier naturel d non nul divise a et b si, et seulement si, on a :

$$d=p_1^{\gamma_1}\times p_2^{\gamma_2}\times\ldots\times p_n^{\gamma_n}\,,$$

avec $0\leqslant\gamma_1\leqslant\min(\alpha_1,\beta_1)$,

$0\leqslant\gamma_2\leqslant\min(\alpha_2,\beta_2)$, …,

$0\leqslant\gamma_n\leqslant\min(\alpha_n,\beta_n)$, en notant $\min(\alpha,\beta)$ le plus petit des deux nombres α et β.

Ainsi, on a la décomposition en produit de facteurs premiers de PGCD $(a\,;b)$:

$$\text{PGCD}(a\,;b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\times p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\times\ldots\times p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}\,.$$

C'est le produit de tous les facteurs premiers communs à a et à b, chacun d'eux étant affecté de son plus petit exposant.

11 Déterminer le PGCD des entiers a et b en utilisant leurs décompositions en produit de facteurs premiers.

1° $a=735$; $b=525$. **2°** $a=840$; $b=1\,890$.

3° $a=8\,330$; $b=5\,575$. **4°** $a=5\,775$; $b=210$.

3 Utilisations

12 Appliquer l'algorithme d'EUCLIDE aux nombres 4 420 et 2 772. En déduire :

a) le PGCD de ces deux nombres ;

b) les diviseurs communs à ces deux nombres ;

c) deux entiers u et v tels que $4\,420u+2\,772v=4$.

Pour les exercices 13 *à* 17, *on pourra utiliser le résultat :*

Si $\text{PGCD}(a\,;b)=\delta$, alors il existe a' et b' tels que $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$.

La recherche de a et b se ramène à celle de a' et b' avec $\text{PGCD}(a'\,;b')=1$.

13 Le PGCD de deux entiers naturels non nuls est 36. Le plus grand de ces deux entiers est 180.

Trouver les valeurs possibles de l'autre entier.

14 Trouver tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $ab=1\,734$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=17$.

15 Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b dont le PGCD est 64 et la somme 1 152.

16 Trouver tous les entiers naturels non nuls inférieurs à 300 dont le PGCD est 15 et la différence 105.

17 Déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a^2-b^2=686$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.

3 Nombres premiers entre eux

1 Vrai-faux

18 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les nombres 8 415 et 3 496 sont premiers entre eux.

2° 8 415 est un nombre premier.

2 Théorème de Bézout – Théorème de Gauss

19 **1°** En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que 1 981 et 1 815 sont premiers entre eux.

2° Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que :
$$1\,981a + 1\,815b = 1 .$$

20 Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, les équations suivantes :

1° $11x = 16y$; **2°** $65x + 25y = 0$; **3°** $9x + 21y = 0$.

21 ★ Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

1° Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

2° a) Vérifier que $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$.

b) En déduire que $a+b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont soit premiers entre eux, soit divisibles par 3.

3° Démontrer l'égalité :
$$\text{PGCD}\,(a+b\,;\,a^2-ab+b^2) = \text{PGCD}\,(a+b\,;\,3) .$$

22 **1°** Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers relatifs n tels que $n-1$ divise $n+3$.

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, les entiers $n-1$ et n^2+2n-2 sont premiers entre eux.

3° Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des entiers naturels n tels que $(n-1)(2n^3+1)$ divise $(n+3)(n^2+2n-2)$.

23 Les entiers strictement positifs a, b, c, d et e forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec a .

On suppose $a \leqslant 100$.

Déterminer ces cinq nombres de façon à ce que $6a^2 = e - b$.

24 **1°** ★ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^n - x$.

Montrer que $P(x) = (x-1)\left(\sum_{p=1}^{n-1} x^p\right)$.

2° Soit p un entier naturel non nul et a un entier naturel différent de 0 et 1.

Démontrer les propriétés suivantes :

a) a et $a-1$ sont premiers entre eux ;

b) p divise $a^2 - a$ $\iff$ pour tout entier naturel n non nul, p divise $a^n - a$.

3° Déterminer les entiers a tels que, pour tout entier naturel n non nul, 6 divise $a^n - a$.

25 **Conséquences du théorème de Gauss**

1° a_1 , a_2 , b étant trois entiers relatifs non nuls, montrer que :
si a_1 divise b, a_2 divise b et $\text{PGCD}\,(a_1\,;\,a_2) = 1$,
alors $a_1 a_2$ divise b .

2° a et b étant deux entiers relatifs non nuls, et p un entier naturel, montrer que :
si p est premier et si p divise le produit ab ,
alors p divise a ou p divise b .

26 **Utilisation du petit théorème de Fermat**

1° a) Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{22} par 23 ?

b) Après avoir vérifié que $2\,002 = 22 \times 91$, donner le reste de la division euclidienne de $5^{2\,002}$ par 23.

2° Montrer que 23 divise $5^{2\,002} - 3^{2\,002}$.

3° Montrer que, pour tout entier naturel n :
23 divise $4 \times 5^{22n+1} + 3^{22n+1}$.

3 Équations $ax + by = 1$

27 On donne deux entiers naturels a et b et on considère l'équation $ax - by = 1$, où l'inconnue est le couple $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

1° Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'équation possède au moins une solution.

2° En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres 55 et 16, déterminer un couple $(x_0\,;\,y_0)$ d'entiers relatifs tels que $55x_0 - 16y_0 = 1$.

3° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $55x - 16y = 1$.

28 1° Appliquer l'algorithme d'EUCLIDE aux nombres 37 et 23.

En déduire une solution particulière de l'équation :

$$37x + 23y = 1 ,$$

où x et y sont des entiers relatifs.

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $37x + 23y = 1$.

29 1° Déterminer une solution particulière de l'équation :

$$17x + 8y = 1 ,$$

où x et y sont des entiers relatifs.

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $17x + 8y = 1$.

30 1° Appliquer l'algorithme d'EUCLIDE aux nombres 143 et 100.

En déduire une solution, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation :

$$143x - 100y = 1 .$$

2° **a)** Vérifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tous réels u et v, on a :

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}) .$$

b) a et b étant deux entiers relatifs non nuls, déduire de l'égalité précédente que :

tout diviseur d de a est un diviseur de $(a + b)^n - b^n$.

3° D'après 1°, $1\,000 = 143 \times 7 - 1$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $10^{3n} - (-1)^n$ est divisible par 7, 11 et 13.

b) En déduire que :

1 000 000 001 et 999 999 999 999 sont divisibles par 1 001.

4 Équations $ax + by = c$

31 1° **a)** Calculer, par la méthode des divisions successives, le PGCD de 900 et 84.

b) En déduire deux entiers naturels a et b tels que :

$$900a - 84b = 12 .$$

2° Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $900x - 84y = 12$.

32 1° Déterminer une solution particulière, dans $\mathbb{N}^2$, de l'équation :

$$41x - 27y = 1 .$$

2° Déduire du 1° une solution particulière, dans $\mathbb{N}^2$, de l'équation $41x - 27y = 5$.

3° Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $41x - 27y = 5$.

33 **Une méthode utilisée par EULER**

On souhaite résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation :

$$\textbf{(1)} \quad 18x + 7y = 3 .$$

La méthode utilisée par EULER consiste à remplacer la résolution d'une équation donnée par la résolution d'une équation analogue avec des coefficients plus petits.

1° **a)** y est l'inconnue ayant le coefficient le plus petit.

Vérifier que **(1)** équivaut à **(2)** $y = \dfrac{3 - 18x}{7}$.

b) Écrire la division euclidienne de 18 par 7 et en déduire que **(2)** équivaut à $y = -2x + \dfrac{3 - 4x}{7}$.

2° On pose $t = \dfrac{3 - 4x}{7}$ qui donne **(1′)** $7t + 4x = 3$, équation avec des coefficients plus petits que **(1)**.

En procédant comme en 1°, montrer qu'en résolvant l'équation **(1′)** suivant l'inconnue x affectée du plus petit coefficient, on a $x = -t + \dfrac{3 - 3t}{4}$.

3° On pose $u = \dfrac{3 - 3t}{4}$ qui donne $4u + 3t = 3$.

Montrer que $t = -u + \dfrac{3 - u}{3}$.

4° On pose $v = \dfrac{3 - u}{3}$ qui donne $u = 3 - 3v$, équation résolue en u .

a) Exprimer t en fonction de v .

b) En déduire que $\begin{cases} x = 6 - 7v \\ y = -15 + 18v \end{cases}$, avec $v \in \mathbb{Z}$.

c) Vérifier que les expressions trouvées pour x et y satisfont **(1)**.

Donner l'ensemble des solutions générales de **(1)** dans $\mathbb{Z}^2$, puis trois couples de cet ensemble.

34 Pour tout entier relatif x, on pose :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z}\} .$$

1° Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis le déterminer

2° Déterminer :

$$B = \{x \in A \text{ tels que } 4x^2 - 9f(x)^2 \text{ est divisible par } 7\} .$$

35 Marc a dans son porte-monnaie uniquement des pièces de 2 € et des billets de 5 €.

Sachant qu'il dispose de 30 €, combien peut-il avoir de pièces et de billets ?

36 1° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $6x - 13y = 5$ **(1)**.

2° Soit N un entier naturel.

Lorsqu'on divise N par 6, le quotient est q et le reste est 2.

Lorsqu'on divise N par 13, le quotient est q' et le reste 7.

Montrer que $(q\,;\,q')$ est solution de **(1)**.

En déduire la forme générale de l'entier N.

37 1° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $23X - 17Y = 6$.

2° Déduire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1 000 tels que, dans la division euclidienne de A par 23, le reste est 2 et, dans celle de A par 17, le reste est 8.

38 On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation **(E)** $6x + 10y = a$, où a désigne un entier relatif.

1° Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que **(E)** possède au moins une solution.

2° Résoudre l'équation **(E)** dans le cas où $a = 22$.

39 1° Soit $a \in \mathbb{Z}$.

Montrer que l'équation $6y - 3x = a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, a est un multiple de 3.

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, les équations suivantes :

a) $6y - 3x = -3$; **b)** $6y - 3x = 3$.

3° En déduire les solutions, dans $\mathbb{Z}^2$, de :

$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = -7\ .$$

40 ★ 1° On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des couples $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant la relation $13x - 7y = 1$.

a) Trouver un couple $(a\,;\,b)$ de $\mathscr{E}$ tel que $0 < a < 7$.

b) Déterminer $\mathscr{E}$.

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $13x - 7y = 2$.

Parmi les solutions, déterminer :

a) celles pour lesquelles PGCD $(x\,;\,y) = 2$;

b) celles pour lesquelles PGCD $(x\,;\,y) = 1$.

41 1° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $13x + 84y = 7$.

2° Montrer que, si $(x\,;\,y)$ est une solution, alors :

PGCD $(x\,;\,y)$ est 1 ou 7.

3° Déterminer les solutions $(x\,;\,y)$ telles que :

$$\text{PGCD}\ (x\,;\,y) = 7\ .$$

En déduire les solutions $(x\,;\,y)$ telles que x et y soient premiers entre eux.

42 1° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation :

$$5u - 2v = 1 \quad \textbf{(1)}.$$

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation :

$$5u - 2v = 19 \quad \textbf{(2)}.$$

3° Pour tout entier naturel n, on considère les nombres :

$$A = 2n + 3 \quad \text{et} \quad B = 5n - 2\ .$$

a) Vérifier que, pour tout n, $(A\,;\,B)$ est solution de l'équation **(2)**.

b) Quelles sont les valeurs possibles de PGCD $(A\,;\,B)$?

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que :

$$\text{PGCD}\ (A\,;\,B) = 19\ .$$

(On pourra utiliser **(1)**.)

43 On désigne par S l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation :

$$138x - 55y = 5 \quad \textbf{(1)}.$$

1° Montrer que, si $(x\,;\,y)$ est un élément de S, alors x est divisible par 5.

En déduire une solution $(x_0\,;\,y_0)$ de **(1)**.

2° Résoudre l'équation **(1)**.

3° k étant un entier naturel, on considère les nombres :

$$a = 55k + 10 \quad \text{et} \quad b = 138k + 25\ .$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $(a\,;\,b)$ appartient à S.

b) En déduire les valeurs possibles de PGCD $(a\,;\,b)$.

c) Déterminer pour quelles valeurs de k :

$$\text{PGCD}\ (a\,;\,b) = 5\ .$$

(On pourra introduire le quotient q et le reste r de la division euclidienne de k par 5.)

44 ★ On considère, lorsque n appartient à $\mathbb{N}^*$, les deux entiers a et b :

$$a = 11n + 3 \quad \text{et} \quad b = 13n - 1\ .$$

1° Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.

En déduire que :

$$\text{PGCD}\ (a\,;\,b) = \text{PGCD}(a\,;\,50)\ .$$

2° Résoudre, dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'équation :

$$50x - 11y = 3\ .$$

En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 pour plus grand commun diviseur.

3° Pour quelles valeurs de n, les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

5 Cryptographie

45 Pour chiffrer un message, on utilise comme clé le mot NATUREL, qui fournit la suite :

(14 ; 01 ; 20 ; 21 ; 18 ; 05 ; 12)

en remplaçant chaque lettre par son rang dans l'alphabet.

Chaque lettre du message est remplacée par son rang dans l'alphabet. Avec la clé, on ajoute 14 au premier rang, 1 au deuxième, 20 au troisième, ..., 12 au septième, et on recommence, 14 au huitième...

On obtient les rangs des lettres qui remplacent en prenant les restes modulo 26.

1° Avec ce procédé, chiffrer le message :

« informationOK ».

2° Déchiffrer le message obtenu avec l'algorithme ci-dessus :

« rfwgwsovflgguqfbndgsdcvaz ».

46 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} \equiv 5u_n + 2 \quad (33) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 . \end{cases}$$

Pour chiffrer un message, on utilise l'algorithme suivant :

– on remplace chaque lettre du message par son rang dans l'alphabet, on obtient une suite de nombres (x_n) ;

– on ajoute termes à termes les suites (x_n) et (u_n) ;

– on obtient les rangs des lettres qui remplacent en prenant les restes modulo 26.

1° Déterminer les 25 premiers termes de la suite (u_n) .

2° Chiffrer le message « débarquementlehuitjuin ».

3° Déchiffrer le message « elxkhujsahshzapwvyo ».

47 Chiffrement affine

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x + 1$.

Pour chiffrer un message :
on remplace chaque lettre par son rang x dans l'alphabet, le reste de la division euclidienne de $3x + 1$ par 26 est le rang de la lettre qui la remplace.

1° Chiffrer le message « opérationréussie ».

2° On se propose de déchiffrer le message « opcfflm ».

a) La lettre O correspond au rang 15.

Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation :

$$3X - 26Y = 14 ,$$

et vérifier qu'il existe un seul entier X, tel que :

$$1 \leqslant X \leqslant 26 \quad \text{et} \quad 3X + 1 \equiv 15 \ (26) .$$

Quelle est la lettre codée par o ?

On remarquera que, pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant 25$, l'équation :

$$3X - 26Y = n$$

admet toujours des solutions, car 26 et 3 sont premiers entre eux.

Les valeurs de X solutions sont définies modulo 26, donc chaque équation admet une seule solution pour X entre 1 et 26.

b) Poursuivre le déchiffrement et donner le message d'origine.

4 PPCM de deux entiers relatifs

1 Vrai-faux

48 Sans calcul de PPCM, les propositions sont-elle vraies ou fausses ?

1° PPCM $(2 ; 7) = 21$. 2° PPCM $(8 ; 2) = 16$.

3° PPCM $(9 ; 42) = 42$. 4° PPCM $(-12 ; 30) = 60$.

2 Détermination

49 Propriétés du PPCM

Comme pour le PGCD, on peut se limiter à démontrer les propriétés pour les entiers a , b , c , d et k , positifs non nuls.

Montrer que :

$$\text{PPCM}\ (a ; b) = \text{PPCM}\ (b ; a) ;$$

$$\text{PPCM}\ (ka ; kb) = k\ \text{PPCM}\ (a ; b)$$

et si a divise c et b divise d , alors :

$$\text{PPCM}\ (a ; b) \ \text{divise}\ \text{PPCM}\ (c ; d) .$$

On distinguera les cas suivants :

– a ou b est égal à 1 ;

– a et b sont supérieurs ou égaux à 2 et on utilisera les décompositions en produit de facteurs premiers.

50 Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers a et b , puis déterminer leur PPCM .

1° $a = 45$; $b = 60$. 2° $a = 50$; $b = 147$.

3° $a = 3\ 388$; $b = 630$. 4° $a = 8\ 330$; $b = 5\ 775$.

51 Soit n un entier naturel strictement supérieur à 4.

Dans la division euclidienne de n par 21 et 45, le reste est 4.

1° Justifier que $n-4$ est un multiple commun à 21 et 45.

2° Déterminer la plus petite valeur de n convenable.

3 PGCD et PPCM

52 **1° a)** À l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, déterminer le PGCD des nombres 1 548 et 1 044.

b) En déduire leur PPCM.

2° a) À l'aide des décompositions en produit de facteurs premiers, déterminer le PPCM des nombres 856 et 1 605.

b) En déduire leur PGCD.

Vérifier que l'on retrouve bien le produit des facteurs premiers communs à 856 et 1 605, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

53 Modifier le programme sur calculatrice, proposé dans le *T.D.* 1, afin d'obtenir aussi l'affichage du PPCM des deux entiers a et b entrés.

54 Trouver tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que :

$$\text{PGCD}\,(a\,;b)=15 \quad \text{et} \quad \text{PPCM}\,(a\,;b)=90\ .$$

55 Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

On pose m leur PPCM et d leur PGCD.

Exprimer, à l'aide de d, les couples $(a\,;b)$ tels que :

$$\begin{cases} b-a=d \\ b^2-a^2=m-d^2 \end{cases}.$$

56 **1°** Déterminer dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 30.

2° Trouver les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur Δ et le plus petit commun multiple M vérifient $3M-2\Delta=30$.

57 **1°** Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.

2° Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient $\begin{cases} m+3d=276 \\ 10<d<30 \end{cases}$.

58 **1°** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 400.

2° Trouver les paires d'entiers strictement positifs dont le plus grand commun diviseur est la différence des deux entiers, et dont le plus petit commun multiple est 400.

59 Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls, $(a\,;b)$ de PGCD et de PPCM, respectivement notés δ et μ, vérifiant la relation :

$$2\mu+3\delta=78\ .$$

60 a et b sont deux entiers naturels non nuls.

On note M leur plus petit commun multiple et Δ leur plus grand commun diviseur.

Déterminer a et b pour qu'ils vérifient les trois conditions suivantes :

$$a\leqslant b\ ,\ a+b=105 \ \text{ et } \ M=12\Delta\ .$$

61 **1°** Montrer que si deux entiers naturels non nuls sont premiers entre eux, il en est de même pour leur somme et leur produit.

2° Résoudre dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ le système :

$$\begin{cases} x+y=56 \\ \text{PPCM}(x\,;y)=105 \end{cases}.$$

62 ★ **1°** Montrer que si a' et b' sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $a'+b'$ et $a'b'$ sont aussi premiers entre eux.

2° Déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs non nuls admettant m pour plus petit commun multiple et tels que :

$$5\,(a+b)^2=147m\ .$$

63 Déterminer tous les couples d'entiers relatifs dont le PGCD, d, et le PPCM, m, vérifient la relation :

$$8m=105d+30\ .$$

64 **1°** Trouver toutes les paires d'entiers relatifs a et b telles que l'on ait :

$$\text{PGCD}\,(a\,;b)=42 \quad \text{et} \quad \text{PPCM}\,(a\,;b)=1\,680\ .$$

2° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation :

$$336x+210y=294\ .$$

65 Déterminer deux entiers naturels a et b tels que leur plus petit commun multiple soit 120 et la somme de leurs carrés soit 801.

66 Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$, le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3\text{PPCM}\,(a\,;\,b) = ab \end{cases}.$$

67 1° Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $x - 9y = 13$.

2° Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels qui vérifient la relation $\text{PPCM}\,(a\,;\,b) - 9\text{PGCD}\,(a\,;\,b) = 13$.

68 a et b étant deux entiers naturels non nuls, soit d leur PGCD et m leur PPCM.

Trouver tous les couples $(a\,;\,b)$ tels que $\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geqslant b \end{cases}$.

69 ★ On note n un entier naturel non nul, A l'entier naturel $3n + 1$ et B l'entier naturel $5n - 1$.

1° Démontrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8.

2° Pour quelles valeurs de n, ce PGCD est-il égal à 8 ? Calculer alors le PPCM de A et B.

3° Pour quelles valeurs de n, ce PGCD est-il égal à 2 ?

70 1° Montrer que si deux entiers naturels x et y sont premiers entre eux, il en est de même des entiers :

$$2x + y \quad \text{et} \quad 5x + 2y.$$

2° Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls $(a\,;\,b)$ vérifiant $\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 1\,620 \\ ab = 3\text{PPCM}\,(a\,;\,b) \end{cases}$.

71 Déterminer les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$a < b$; $a^2 + b^2 = 8\,765$ et $\text{PPCM}\,(a\,;\,b) = 2\,002$.

5 Problèmes

72 **Développement en fractions continues finies**

1° Soit $a = 49$ et $b = 17$.

a) Écrire la division euclidienne de 49 par 17, et en déduire que :

$$\frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{15}}.$$

b) Déduire de la division euclidienne de 17 par 15 que :

$$\frac{17}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{2}}$$

et $$\frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{15}{2}}.$$

c) Poursuivre le raisonnement avec la division euclidienne de 15 par 2 et montrer que :

$$\frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{2}{1}}}}.$$

La division euclidienne de 2 par 1 s'écrit :

$$2 = 1 \times 2 + 0.$$

Le calcul précédent s'arrête.

On a ainsi le développement en fraction continue finie de $\frac{49}{17}$:

$$\frac{49}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}},$$

on écrit $\frac{49}{17} = [2\,;\,1\,;\,7\,;\,2]$.

2° **a)** Déterminer le développement en fraction continue finie de $\frac{233}{177}$.

b) Calculer le nombre rationnel dont le développement en fraction continue finie est $[3\,;\,2\,;\,5\,;\,7]$.

3° Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

En appliquant l'algorithme d'EUCLIDE à a et b, on a :

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ &\ldots & \ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}. \end{aligned}$$

a) Que vaut r_n ?

b) Montrer que $\frac{a}{b}$ admet pour développement en fraction continue finie $[q_1\,;\,q_2\,;\,\ldots\,;\,q_{n+1}]$.

73 ★★ Soit n un entier naturel.

On considère les nombres :

$$a = n^3 - 2n + 5 \quad \text{et} \quad b = n + 1 .$$

1° Montrer que, pour tout n :

$$n^3 - 2n + 5 = (n+1)(n^2 - n - 1) + 6 .$$

En déduire que :

$$\text{PGCD}\,(a\,;\,b) = \text{PGCD}\,(b\,;\,6) .$$

2° Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6.

Pour quelles valeurs de r a-t-on :

a) PGCD $(a\,;\,b) = 6$?

b) PGCD $(a\,;\,b) = 3$?

c) PGCD $(a\,;\,b) = 2$?

d) PGCD $(a\,;\,b) = 1$?

3° Déterminer n pour que le nombre $\frac{a}{b}$ soit un entier.

74 ★★ Soit n un entier naturel non nul.

On considère les entiers :

$$A = 3n^2 \quad \text{et} \quad B = n(2n+1) .$$

1° Montrer que 3 divise B si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de n par 3 est soit 0, soit 1.

2° Suivant les valeurs de n, déterminer le PGCD de A et B.

75 Le nombre n est un entier naturel non nul.

On pose :

$$a = 4n + 3 \quad \text{et} \quad b = 5n + 2$$

et on note :

d le PGCD de a et b.

1° Donner la valeur de d dans les trois cas suivants :

$$n = 1 , \quad n = 11 \quad \text{et} \quad n = 15 .$$

2° Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3° a) Déterminer les entiers naturels n et k tels que :

$$4n + 3 = 7k .$$

b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que :

$$5n + 2 = 7k' .$$

4° Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.

Des questions précédentes, déduire la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

(D'après BAC)

76 **1°** On considère l'équation d'inconnue $(n\,;\,m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1 \quad \textbf{(1)} .$$

a) Montrer, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, déterminer une solution particulière de l'équation **(1)**.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation **(1)**.

2° Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

a) Montrer que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b) $(n\,;\,m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de **(1)**, montrer que l'on peut écrire :

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9 .$$

c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

On rappelle l'égalité :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1) ,$$

valable pour tout entier naturel n non nul.

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9 .$$

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

(D'après BAC)

77 Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

S est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tels que :

$$\text{PGCD}\,(x\,;\,y) = y - x .$$

1° a) Calculer le PGCD de 363 et 484.

b) Le couple $(363\,;\,484)$ appartient-il à S ?

2° Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n\,;\,n+1)$ appartient-il à S ?

Justifier la réponse.

3° a) Montrer que $(x\,;\,y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$x = k(y - x) \quad \text{et} \quad y = (k+1)(y-x) .$$

b) En déduire que, pour tout couple $(x\,;\,y)$ de S, on a :

$$\text{PPCM}(x\,;\,y) = k(k+1)(y-x) .$$

4° a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de S tels que :

$$\text{PPCM}\,(x\,;\,y) = 228 .$$

(D'après BAC)

78 **1°** On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation :

$$\textbf{(1)} \quad ax + by = 60 \ ,$$

a et b étant des entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$.

On note d le plus grand commun diviseur de a et b .

a) On suppose que l'équation **(1)** a au moins une solution $(x_0 \ ; y_0)$.

Montrer que d divise 60.

b) On suppose que d divise 60.

Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 \ ; y_0)$ à l'équation **(1)**.

2° On considère l'équation :

$$\textbf{(2)} \quad 24x + 36y = 60 \ ,$$

x et y entiers relatifs.

a) Donner le PGCD de 24 et 36.

Simplifier l'équation **(2)**.

b) Trouver une solution évidente pour l'équation **(2)** et résoudre cette équation.

On appelle S l'ensemble des couples $(x \ ; y)$ solutions.

c) Énumérer tous les couples $(x \ ; y)$ solutions de **(2)** et tels que $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de coordonnées $(x \ ; y)$ telles que :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R} \ .$$

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x \ ; y)$ de l'équation **(2)** appartiennent à $\mathscr{E}$.

Comment peut-on caractériser S ?

(D'après BAC)

79 Un astronome a observé, au jour J_0 , le corps céleste A , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours.

6 jours plus tard $(J_0 + 6)$, il observe le corps B , dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1° Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 .

Montrer que le couple $(u \ ; v)$ est solution de l'équation :

$$\textbf{(E}_1\textbf{)} : \quad 35x - 27y = 2 \ .$$

2° a) Donner un couple d'entiers relatifs $(x_0 \ ; y_0)$ solution particulière de l'équation :

$$\textbf{(E}_2\textbf{)} : \quad 35x - 27y = 1 \ .$$

b) En déduire une solution particulière $(u_0 \ ; v_0)$ de $\textbf{(E}_1\textbf{)}$.

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation $\textbf{(E}_1\textbf{)}$.

d) Déterminer la solution $(u \ ; v)$ permettant de donner J_1 .

3° Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ?

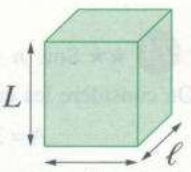
(L'année 2000 était bissextile.)

Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

(D'après BAC)

80 **1°** Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L , à base carrée de côté ℓ , où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < L$.

On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).



a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?

Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est $V = 77\ 760$.

On sait que, pour remplir la boîte B , la plus grande valeur possible de a est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2° On veut remplir une caisse cubique C , dont l'arête c est un entier non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1°**.

(Les boîtes B , empilées verticalement doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide.)

a) Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$.

Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?

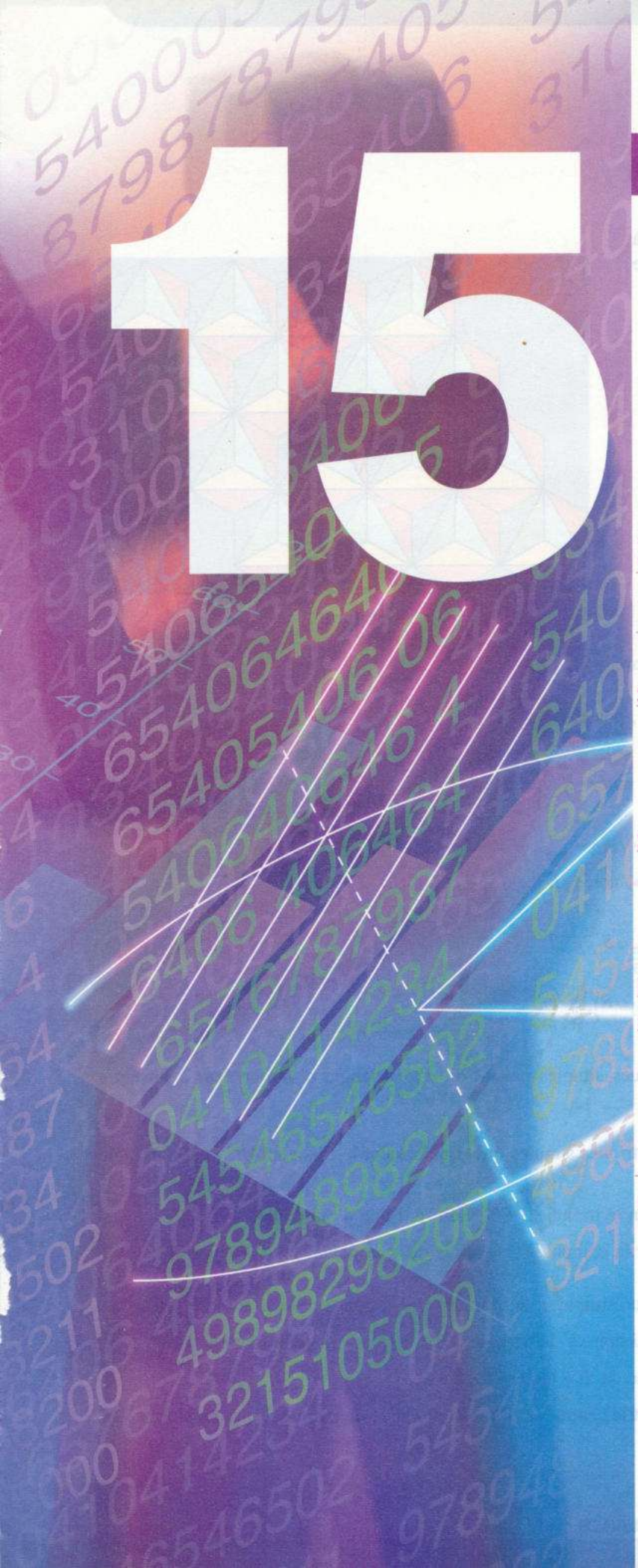
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435.

On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.

Quelles sont les dimensions ℓ et L de la boîte B ?

(D'après BAC)



CHAPITRE

15

Similitudes planes

Similitudes p. 402

- connaître la définition d'une similitude et de son rapport
- étudier la composée de deux similitudes

Similitudes directes p. 404

- connaître la définition d'une similitude directe et son expression complexe

Forme réduite d'une similitude directe p. 406

- savoir déterminer l'angle d'une similitude directe et sa forme réduite

Étude des similitudes quelconques p. 408

- caractériser les similitudes ayant deux points fixes distincts
- connaître l'expression complexe d'une similitude

Propriétés géométriques des similitudes p. 410

- connaître l'effet d'une similitude sur un barycentre, une droite, un segment, un cercle

1 Étude d'un pavage

Le pavage de la **figure 2** a été réalisé à partir de l'hexagone régulier $AGDECF$ de centre B de la **figure 1**.
On suppose le plan orienté.

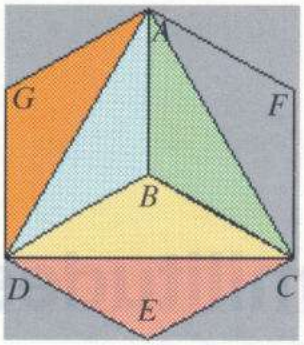


figure 1

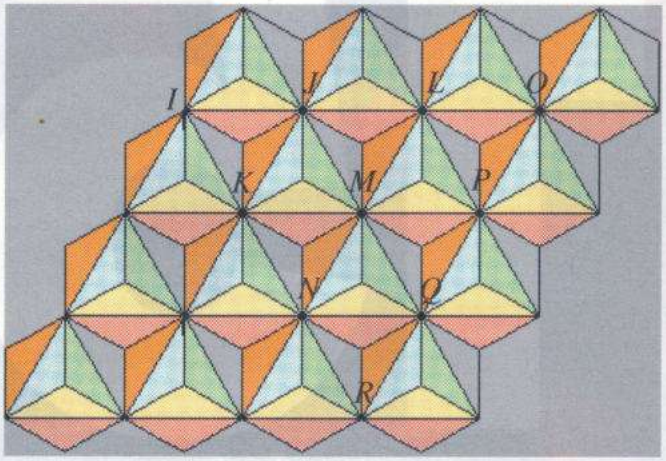


figure 2

1 Quelle est l'image du triangle ABC par :

a) la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, notée $R_{B,\frac{2\pi}{3}}$?

b) la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, notée $R_{C,\frac{\pi}{3}}$?

c) la symétrie axiale d'axe (BC), notée $S_{(BC)}$?

d) la composée « $S_{(BC)}$ suivie de $R_{D,\frac{\pi}{3}}$ », notée $R_{D,\frac{\pi}{3}} \circ S_{(BC)}$?

e) « $S_{(BD)}$ suivie de $R_{C,\frac{\pi}{3}}$ », notée $R_{C,\frac{\pi}{3}} \circ S_{(BD)}$?

f) « $R_{C,\frac{\pi}{3}}$ suivie de $S_{(BD)}$ », notée $S_{(BD)} \circ R_{C,\frac{\pi}{3}}$?

2 Par quelles transformations géométriques simples passe-t-on d'un triangle d'une couleur à un autre triangle de même couleur (**figure 2**) ?

3 **a)** Donner deux transformations géométriques simples qui transforment le triangle ABC en le triangle DBC. Soit f l'une d'entre elles.

b) Faire de même pour le triangle DBC en le triangle DEC. Soit g l'une d'entre elles.

c) Quelle est l'image du triangle ABC par la composée « f suivie de g », notée $g \circ f$?

4 **a)** Par quelle transformation géométrique simple t le triangle IJK a pour image le triangle JLM ?

b) Par quelle transformation géométrique simple h le triangle JLM a pour image le triangle JOQ ?

c) Quelle est l'image de IJK par « t suivie de h », notée $h \circ t$?

d) En imaginant la suite du pavage, quel est le centre Ω d'une homothétie de rapport 2 qui transforme IJK en JOQ ?

2 Transformation du plan

Soit f une application du plan dans lui-même.



Tout point M du plan possède une image unique N par f. Si, de plus, tout point N du plan possède un antécédent unique M par f, on dit que f est une **bijection du plan**, ou encore que f est une **transformation du plan**.

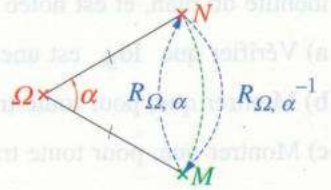
Dans ces conditions, l'application du plan dans lui-même, qui à tout point N associe son antécédent unique M par f, est elle-même une transformation du plan : on l'appelle **transformation réciproque de f** (ou, plus simplement, réciproque de f) et on la note f^{-1}.

1 **a)** Soit $\vec{V}$ un vecteur du plan et $t_{\vec{V}}$ la translation de vecteur $\vec{V}$.

Vérifier que $t_{\vec{V}}$ est une transformation du plan et que $t_{\vec{V}}{}^{-1} = t_{-\vec{V}}$.

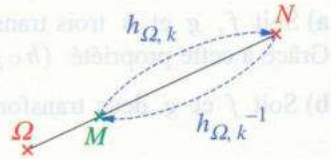
b) Soit Ω un point du plan et α un réel.

Vérifier que la rotation $R_{\Omega,\alpha}$, de centre Ω et d'angle α, est une transformation du plan et que $R_{\Omega,\alpha}{}^{-1} = R_{\Omega,-\alpha}$.



c) Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

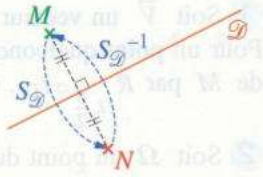
Vérifier que l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k est une transformation du plan et que $h_{\Omega,k}{}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.



d) Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et $S_{\mathscr{D}}$ la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$ (ou réflexion d'axe $\mathscr{D}$).

Vérifier que $S_{\mathscr{D}}$ est une transformation du plan et que $S_{\mathscr{D}}{}^{-1} = S_{\mathscr{D}}$.

On dit que $S_{\mathscr{D}}$ est une **involution du plan**.



e) Montrer que la projection orthogonale p sur $\mathscr{D}$ n'est pas une transformation du plan.

2 Soit a et b deux nombres complexes. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$, et l'application g du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe z'' telle que $z'' = a\bar{z} + b$.

a) Montrer que, si $a \neq 0$, f et g sont des transformations du plan.

Que peut-on dire de f et g lorsque $a = 0$?

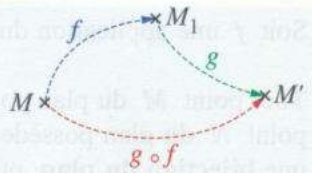
b) On suppose $a \neq 0$. Vérifier que f^{-1} est la transformation du plan qui, à tout point N d'affixe z, associe le point N_1 d'affixe z_1 telle que $z_1 = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$, et que g^{-1} est la transformation du plan qui à tout point N d'affixe z, associe le point N_2, d'affixe z_2 telle que $z_2 = \frac{1}{\bar{a}}\bar{z} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$.

c) On suppose $a \neq 0$ et $b = 0$. Démontrer que $g^{-1} = g$ si, et seulement si, $|a| = 1$.

activités

3 Composition de transformations

Composée de deux transformations du plan $\mathscr{P}$



Soit f et g deux transformations du plan $\mathscr{P}$. Pour tout point M du plan, soit M_1 l'image de M par f, et M' l'image de M_1 par g.
L'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même, qui à M associe M', est la composée de « f suivie de g », notée $g \circ f$.
Ainsi, $(g \circ f)(M) = g(f(M)) = g(M_1) = M'$.

Soit N' un point du plan, N_1 son unique antécédent par g et N l'unique antécédent de N_1 par f.
Quel est l'unique antécédent de N' par $g \circ f$?

La composée de deux transformations du plan est une transformation du plan.

Identité du plan

L'application du plan dans lui-même, qui à tout point M associe le point M lui-même, est appelée identité du plan, et est notée $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

a) Vérifier que $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ est une transformation du plan $\mathscr{P}$ et que $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

b) Montrer que, pour toute transformation f du plan $\mathscr{P}$, $f \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \circ f = f$.

c) Montrer que, pour toute transformation f du plan $\mathscr{P}$, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Propriétés

a) Soit f, g et h trois transformations du plan. Montrer que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
Grâce à cette propriété $(h \circ g) \circ f$ ou $h \circ (g \circ f)$ seront désormais notées $h \circ g \circ f$.

b) Soit f et g deux transformations du plan. Montrer que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque importante

1 Soit $\vec{V}$ un vecteur non nul du plan et Ω un point du plan.
Pour un point quelconque M du plan, construire l'image M' de M par $t_{\vec{V}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$, puis l'image M'' de M par $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ t_{\vec{V}}$. Que constate-t-on ?

2 Soit Ω un point du plan et $h_{\Omega, 2}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

a) Pour un point quelconque M du plan, construire l'image M' de M par $h_{\Omega, 2} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$, puis l'image M'' de M par $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ h_{\Omega, 2}$.

b) Montrer que, pour tout point M du plan, on a $M' = M''$. Ainsi, $h_{\Omega, 2} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ h_{\Omega, 2}$.

Si f et g sont deux transformations du plan, en général, on a $f \circ g \neq g \circ f$.

Dans certains cas, $f \circ g = g \circ f$: on dit alors que f et g sont **permutables**.

3 **Applications**

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites et Ω un point du plan.

Déterminer les transformations f vérifiant chacune des équations suivantes :

a) $h_{\Omega, \frac{1}{3}} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; **b)** $S_{\mathscr{D}} \circ f \circ S_{\mathscr{D}'} = S_{\mathscr{D}}$; **c)** $R_{\Omega, \frac{\pi}{3}} \circ f = R_{\Omega, \frac{\pi}{3}}$.

4 Expression complexe d'une transformation

Le plan $\mathscr{P}$ est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Définition

f étant une transformation du plan, la relation $z'=\varphi(z)$, qui traduit que le point M' d'affixe z' est l'image de M d'affixe z par f, est appelée **expression complexe de f** (ou **caractérisation complexe de f**) **relativement au repère** $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Rappels

Voir Chapitre 10

Soit $\vec{V}$ un vecteur du plan d'affixe b , Ω un point du plan d'affixe ω , k un réel non nul et θ un réel.

Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on a les correspondances suivantes :

transformation	notation	expression complexe
la translation de vecteur $\vec{V}$	$t_{\vec{V}}$	$z'=z+b$
l'homothétie de centre Ω et de rapport k	$h_{\Omega,k}$	$z'=k(z-\omega)+\omega$
la rotation de centre Ω et d'angle θ	$R_{\Omega,\theta}$	$z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)+\omega$

Les applications du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même d'expressions complexes $z'=az+b$ ou $z'=a\bar{z}+b$, où a est un complexe non nul et b un complexe, sont des transformations du plan $\mathscr{P}$.

Voir Activité 2

1 Soit f la transformation du plan d'expression complexe $z'=-\mathrm{i}z+2-\mathrm{i}$.

a) Montrer que f possède un point fixe unique Ω_1 ; calculer son affixe ω_1.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2 Soit g la transformation du plan d'expression complexe $z'=2z+3-2\mathrm{i}$.

a) Montrer que g possède un point fixe unique Ω_2 ; calculer son affixe ω_2.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g .

3 Déterminer les expressions complexes de $g\circ f$ et $f\circ g$. f et g sont-elles permutables ?

4 **a)** Montrer que $g\circ f$ possède un point invariant unique Ω ; calculer son affixe ω .

b) Déterminer les expressions complexes de la rotation $R_{\Omega,-\frac{\pi}{2}}$ et de l'homothétie $h_{\Omega,2}$.

c) Vérifier que $g\circ f=R_{\Omega,-\frac{\pi}{2}}\circ h_{\Omega,2}=h_{\Omega,2}\circ R_{\Omega,-\frac{\pi}{2}}$.

5 Soit s la transformation du plan d'expression complexe $z'=\bar{z}+2\mathrm{i}$.

a) Déterminer $s\circ s$. En déduire que $s^{-1}=s$.

b) Montrer que l'ensemble des points fixes de s est une droite $\mathscr{D}$; en donner une équation.

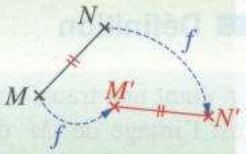
c) Montrer que s est la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$.

1 Similitudes

1.1 Isométrie du plan

définition

Une isométrie du plan est une **transformation** f du plan **qui conserve les distances** ; c'est-à-dire que si M et N sont des points quelconques d'images respectives M' et N' par f, alors $M'N' = MN$.



Exemples et contre-exemple

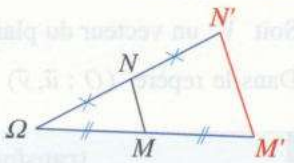
• Une translation, une rotation, une symétrie axiale et une symétrie centrale sont des isométries.

• Une homothétie h de rapport 2 n'est pas une isométrie puisque, pour tous points M et N, d'images respectives M' et N', on a $M'N' = 2MN$.

Cependant, si M_1, N_1, M_2 et N_2 sont des points quelconques avec $M_2 \neq N_2$, d'images respectives M_1', N_1', M_2' et N_2', alors on a :

$$\frac{M_1'N_1'}{M_2'N_2'} = \frac{2M_1N_1}{2M_2N_2} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2} .$$

Ainsi, h conserve les rapports de distances.

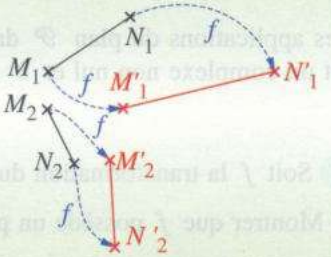


1.2 Similitude

définition

Une similitude du plan est une **transformation** f du plan **qui conserve le rapport des distances** ; c'est-à-dire que si M_1, N_1, M_2 et N_2 sont des points quelconques avec $M_2 \neq N_2$, d'images respectives M_1', N_1', M_2' et N_2' par f, alors :

$$\frac{M_1'N_1'}{M_2'N_2'} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2} .$$



Remarque

Si $M_2 \neq N_2$, on a automatiquement $M_2' \neq N_2'$, car f étant une transformation, M_2 et N_2 ne peuvent avoir la même image.

1.3 Rapport d'une similitude

proposition

Soit f une transformation du plan.

f est une **similitude** si, et seulement si, f **multiplie toutes les distances par un même réel**, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un **réel strictement** positif k tel que, pour tous les points M et N du plan, d'images respectives M' et N' par f, on a $M'N' = kMN$.

Démonstration

Soit A et B deux points distincts du plan. Si f est une similitude, alors, pour tous les points M et N du plan, on a $\frac{M'N'}{A'B'} = \frac{MN}{AB}$; donc $M'N' = kMN$, avec $k = \frac{A'B'}{AB}$ qui ne dépend pas de M et N.

Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Si, pour tous les points M et N du plan, $M'N' = kMN$, alors, pour tous les points M_1, N_1, M_2 et N_2 avec $M_2 \neq N_2$, on a :

$$\frac{M_1'N_1'}{M_2'N_2'} = \frac{kM_1N_1}{kM_2N_2} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2} .$$

Donc f est une similitude.

Remarque

Le réel k est alors unique car, si k_1 et k_2 sont deux réels strictement positifs tels que, pour tous les points M et N du plan, on ait $M'N' = k_1 MN$ et $M'N' = k_2 MN$, alors $k_1 MN = k_2 MN$ pour deux points M et N distincts ; on en déduit $k_1 = k_2$.

Définition

Soit f une similitude du plan.

Le **rapport de la similitude** f est l'unique réel **strictement positif** k tel que, pour tous les points M et N du plan, d'images respectives M' et N' par f, on a $M'N' = kMN$.

Exemples

- Une isométrie est une similitude de rapport 1.
- Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

En effet, pour tous les points M et N, d'images respectives M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN}$.
Donc $M'N' = |\lambda| MN$.

1.4 Composée de deux similitudes — proposition

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk', **produit des rapports**.
En particulier, la composée de deux isométries est une isométrie.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k et g une similitude de rapport k', où k et k' sont deux réels strictement positifs.

- f et g sont des transformations du plan, donc $g \circ f$ est une transformation.
- Pour tous points M et N du plan, on pose $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$, $M' = g(M_1)$ et $N' = g(N_1)$.

On a :

$$M_1N_1 = kMN \quad \text{et} \quad M'N' = k'M_1N_1, \quad \text{donc} \quad M'N' = kk'MN.$$

Ainsi $g \circ f$ est une similitude de rapport kk'.
Si f et g sont des isométries, on a $k = 1$ et $k' = 1$, donc $kk' = 1$ et $g \circ f$ est donc une isométrie.

1.5 Réciproque d'une similitude — proposition

La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
En particulier, la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k, réel strictement positif.

- f est une transformation, donc elle possède une réciproque f^{-1} qui est une transformation.
- Pour tous points M' et N' du plan d'antécédents respectifs M et N par f, on a :

$$M'N' = kMN, \quad \text{donc} \quad MN = \frac{1}{k} M'N'.$$

Ainsi f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
Si f est une isométrie, on a $k = 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{k} = 1$. f^{-1} est donc une isométrie.

2 Similitudes directes

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2.1 Transformations d'expression complexe $z' = az + b$ $(a \neq 0)$

a étant un complexe non nul et b un complexe, l'application du plan dans lui-même, d'expression complexe $z' = az + b$, est une similitude de rapport $|a|$, **qui conserve les angles orientés.**

Démonstration Voir Activité 2

• a étant non nul, f est une transformation du plan.

• M, N, P et Q sont quatre points quelconques du plan, avec $M \neq N$. On désigne par M', N', P' et Q' les images respectives de M, N, P et Q par f.
m, n, p, q, m', n', p' et q' sont les affixes respectives des points M, N, P, Q, M', N', P' et Q'. On a :

$$\frac{q'-p'}{n'-m'} = \frac{(aq+b)-(ap+b)}{(an+b)-(am+b)} = \frac{a(q-p)}{a(n-m)}\,, \quad \text{d'où l'égalité} \quad \frac{q'-p'}{n'-m'} = \frac{q-p}{n-m} \quad \textbf{(1)}.$$

Par égalité des modules, on a :

$$\frac{|q'-p'|}{|n'-m'|} = \frac{|q-p|}{|n-m|}\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}\,.$$

Ainsi, f conserve le rapport des distances, donc f est une similitude.

• De plus, si on suppose que $P \neq Q$, par égalité modulo 2π des arguments, on déduit de **(1)** que :

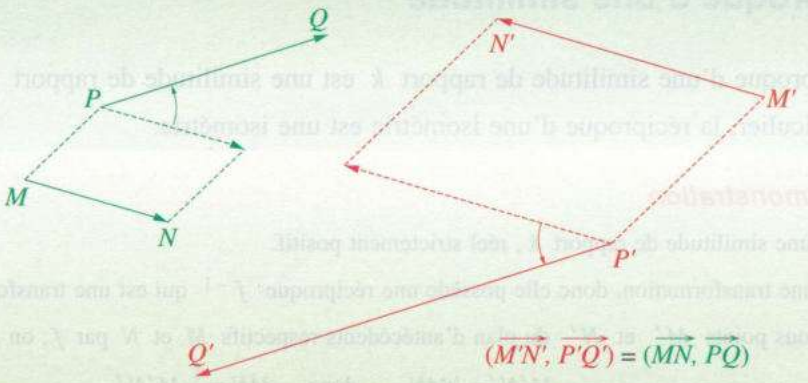
$$\arg\left(\frac{q'-p'}{n'-m'}\right) = \arg\left(\frac{q-p}{n-m}\right) \ (2\pi)\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \ (2\pi)\,.$$

Donc f conserve les angles orientés.

• Enfin, $\dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{|n'-m'|}{|n-m|} = \dfrac{|a||n-m|}{|n-m|} = |a|$, donc le rapport de similitude de f est $|a|$.

2.2 Similitude directe — définition

Une similitude **directe** du plan est une similitude qui **conserve tous les angles orientés.**



Exemple

Une translation, une rotation, une homothétie et une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ d'expression complexe $z' = az + b$ $(a \neq 0)$ sont des similitudes directes du plan.

2.3 Expression complexe d'une similitude directe — proposition

Soit un plan rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Une application f du plan dans lui-même est **une similitude directe** si, et seulement si, son expression complexe est du type :

$z' = az + b$, avec a complexe **non nul** et b complexe.

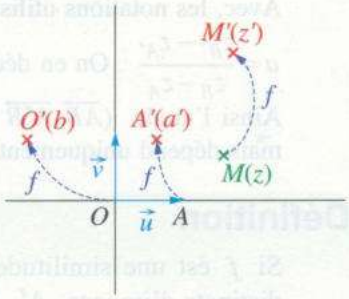
Démonstration

• Soit f une similitude directe du plan.
f transforme le point O en O' , le point A d'affixe 1 en A' .

On appelle b l'affixe de O' , a' l'affixe de A' .
Puisque $O \neq A$, alors $O' \neq A'$, donc $b \neq a'$.

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' , l'image de M par f.
f conserve le rapport des distances, donc :

$$\frac{O'M'}{O'A'} = \frac{OM}{OA} \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{z'-b}{a'-b}\right| = \left|\frac{z-0}{1-0}\right| = |z| \ .$$



f conserve les angles orientés, donc pour M distinct de O, on a :

$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ (2π) , c'est-à-dire $\arg\left(\frac{z'-b}{a'-b}\right) = \arg\left(\frac{z-0}{1-0}\right) = \arg z$ (2π) .

On en déduit $\frac{z'-b}{a'-b} = z$, car ces deux complexes ont le même module et des arguments égaux modulo 2π .
Ainsi $z' = (a'-b)\,z + b$.
En posant $a = a' - b$, avec $a \neq 0$, car $b \neq a'$; on a donc , pour M distinct de O , $z' = az + b$.

Cette relation est encore vérifiée lorsque M est en O , car alors $z = 0$ et $z' = b$.
L'expression complexe de f est $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.

• **Réciproquement**, il a été démontré dans le *paragraphe* 2.1 que toute application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, d'expression complexe $z' = az + b$ avec $a \neq 0$, est une similitude directe.

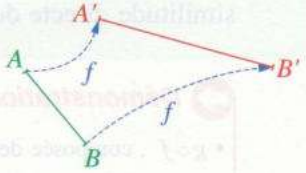
2.4 Similitude directe transformant A et B en A' et B'

Soit A , B , A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Alors il existe une **unique** similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Démonstration

Soit $z' = az + b$, avec $a \neq 0$, l'expression complexe d'une similitude directe f relativement au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par z_A , z_B , $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes des points A , B , A' et B' .



$$f(A) = A' \text{ et } f(B) = B' \iff \begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases} \iff \begin{cases} a(z_B - z_A) = z_{B'} - z_{A'} \\ b = z_{A'} - az_A \end{cases} \quad (1)$$

$A \neq B$, alors $z_A \neq z_B$, et ainsi $(1) \iff a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = z_{A'} - \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\, z_A$.

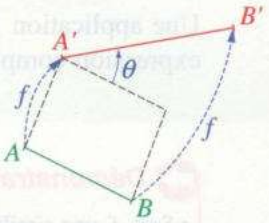
Et comme $A' \neq B'$, alors $z_{A'} \neq z_{B'}$, et ainsi $\dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \neq 0$; d'où $a \neq 0$.

Il existe donc un complexe non nul unique a et un complexe unique b tels que la similitude directe f d'expression complexe $z' = az + b$ transforme A en A' et B en B' ; d'où le résultat énoncé.

3 Forme réduite d'une similitude directe

3.1 Angle d'une similitude directe

Soit f une similitude directe et deux points distincts A et B du plan d'images A' et B' par f.



Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'expression complexe de f est $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.

Avec, les notations utilisées dans la démonstration précédente, on a :

$a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$. On en déduit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg a \quad (2\pi)$.

Ainsi l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ne dépend pas des deux points distincts A et B choisis initialement, mais dépend uniquement du complexe non nul a.

Définition

Si f est une similitude directe, il existe un réel θ tel que, pour tous les points A et B distincts d'images A' et B' par f, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi).$$

θ est appelé **angle de la similitude directe f**.

Exemples

- Une translation a pour angle 0 modulo 2π.
- Une homothétie de rapport λ non nul a pour angle 0 modulo 2π si $\lambda > 0$, et π modulo 2π si $\lambda < 0$.

Si f est une similitude directe de rapport k, réel strictement positif, et d'angle θ, réel, alors, pour tous les points A et B distincts d'images A' et B' par f, on a :

$$A'B' = kAB \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad (2\pi).$$

3.2 Composée et réciproque

propositions

- La composée d'une similitude directe f, de rapport k et d'angle θ, et d'une similitude directe g, de rapport k' et d'angle θ', est une similitude directe $g \circ f$, de rapport le **produit des rapports** kk' et d'angle la **somme des angles** $\theta + \theta'$.
- La réciproque f^{-1} d'une similitude directe f de rapport k et d'angle θ est une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

Démonstration

- $g \circ f$, composée de deux similitudes de rapports k et k', est une similitude de rapport kk'. De même, f^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

f et g conservant les angles orientés, la composée $g \circ f$ et la réciproque f^{-1} conservent les angles orientés, donc $g \circ f$ et f^{-1} sont des similitudes directes.

Enfin, si A et B sont deux points distincts du plan, d'images A_1 et B_1 par f, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \theta \quad (2\pi)$.

- A et B étant les images respectives de A_1 et B_1 par f^{-1}, l'angle de f^{-1} est $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AB}) = -\theta \quad (2\pi)$.
- Si A_1 et B_1 ont pour images A' et B' par g, on a $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta' \quad (2\pi)$.

On en déduit que A' et B' sont les images de A et B par $g \circ f$ et :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) \quad (2\pi)$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta + \theta' \quad (2\pi)$.

Ainsi $g \circ f$ a pour angle $\theta + \theta'$.

3.3 Forme réduite d'une similitude directe — proposition

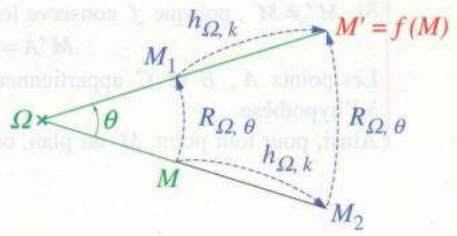
Soit f une similitude directe de rapport k, réel strictement positif, et d'angle θ, réel.
Alors :
• ou bien f est une translation, et alors $k=1$ et $\theta=0\ (2\pi)$,
• ou bien f possède un point fixe unique Ω, appelé **centre de f**, et alors f est la composée **permutable** de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et de la rotation de centre Ω et d'angle θ :

$$f = h_{\Omega,k} \circ R_{\Omega,\theta} = R_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}\ .$$

La décomposition de f sous cette forme est appelée **forme réduite de f**.

Démonstration

Relativement au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'expression complexe de f est $z'=az+b$, avec $a=ke^{i\theta}$, car $|a|=k$ et $\arg a=\theta\ (2\pi)$.
• Si $a=1$, alors $z'=z+b$ et f est une translation.
• Si $a\neq 1$, le point Ω d'affixe ω est fixe si, et seulement si, $a\omega+b=\omega$, c'est-à-dire $\omega=\dfrac{b}{1-a}$; donc f a un unique point fixe Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.



Soit M un point quelconque d'affixe z, et M' d'affixe z', son image par f.
M_1 d'affixe z_1, est l'image de M par la rotation $R_{\Omega,\theta}$; M_2 d'affixe z_2, est l'image de M par l'homothétie $h_{\Omega,k}$. On a $z_1=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ et $z_2=k(z-\omega)+\omega$.
L'image de M_1 par $h_{\Omega,k}$ a pour affixe :

$$k(z_1-\omega)+\omega = ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega = a\left(z-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a} = az+b = z'\ .$$

L'image de M_2 par $R_{\Omega,\theta}$ a pour affixe :

$$e^{i\theta}(z_2-\omega)+\omega = e^{i\theta}k(z-\omega)+\omega = a\left(z-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a} = az+b = z'\ .$$

Ainsi $M'=h_{\Omega,k}\circ R_{\Omega,\theta}(M)=R_{\Omega,\theta}\circ h_{\Omega,k}(M)$, donc $f=h_{\Omega,k}\circ R_{\Omega,\theta}=R_{\Omega,\theta}\circ h_{\Omega,k}$.

Si, relativement au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'expression complexe de f est $z'=az+b$ avec $a\neq 0$, alors :
• pour $a=1$, $f=t_{\vec{V}}$ avec $\vec{V}$ vecteur d'affixe b ;
• pour $a\neq 1$, $f=h_{\Omega,k}\circ R_{\Omega,\theta}=R_{\Omega,\theta}\circ h_{\Omega,k}$, avec $k=|a|$, $\theta=\arg a\ (2\pi)$ et Ω point d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.

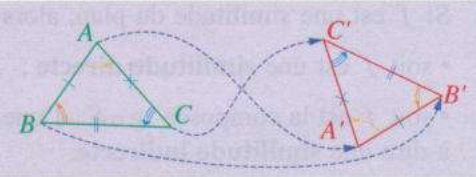
3.4 Déplacements — définition

Une similitude directe de rapport $k=1$ est appelée **déplacement du plan**.

Ainsi, un **déplacement** du plan est **une isométrie qui conserve les angles orientés**.

• Un déplacement transforme un triangle ABC en un triangle directement isométrique $A'B'C'$.

• Un déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.



4 Étude des similitudes quelconques

4.1 Similitude ayant trois points fixes non alignés — proposition

Une similitude ayant **trois points fixes non alignés** est l'identité du plan $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Démonstration

Soit f une similitude du plan ayant trois points fixes non alignés A, B et C.

On a $f(A)=A$ et $f(B)=B$; le rapport de f est $\dfrac{AB}{AB}=1$, donc f est une isométrie.

Soit M un point du plan et M' son image par f.

Si $M' \neq M$, puisque f conserve les distances :

$$M'A=MA \quad , \quad M'B=MB \quad \text{et} \quad M'C=MC \ .$$

Les points A, B et C appartiennent à la médiatrice de $[MM']$, donc ils sont alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse.

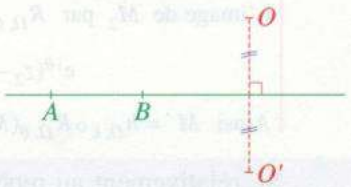
Ainsi, pour tout point M du plan, on a $M'=M$, c'est-à-dire $f(M)=M$, donc $f=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

4.2 Similitude ayant deux points fixes distincts — proposition

Une similitude, autre que l'identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, ayant **au moins deux points fixes distincts** A et B, est la symétrie axiale d'axe (AB).

Démonstration

On a $f(A)=A$ et $f(B)=B$; le rapport de f est $\dfrac{AB}{AB}=1$, donc f est une isométrie.



f n'étant pas $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, il existe un point O du plan dont l'image O' par f est distincte de O.

On a $f(A)=A$, $f(B)=B$ et $f(O)=O'$;

donc, par conservation des distances, $O'A=OA$ et $O'B=OB$; ainsi, la droite (AB) est la médiatrice de $[OO']$.

Soit $g=S_{(AB)}\circ f$ la composée de f et de la symétrie axiale d'axe (AB) ; g est une similitude.

On a $g(A)=(S_{(AB)}\circ f)(A)=S_{(AB)}(f(A))=S_{(AB)}(A)=A$; de même $g(B)=B$; puis :

$$g(O)=(S_{(AB)}\circ f)(O)=S_{(AB)}(f(O))=S_{(AB)}(O')=O \ .$$

Ainsi, g est une similitude qui possède trois points fixes non alignés A, B et O ; donc $g=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Ainsi $S_{(AB)}\circ f=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, donc $S_{(AB)}\circ S_{(AB)}\circ f=S_{(AB)}\circ \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$. Or $S_{(AB)}\circ S_{(AB)}=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, et donc $f=S_{(AB)}$.

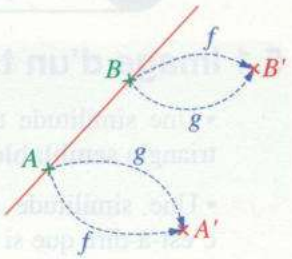
4.3 Forme géométrique d'une similitude — proposition

Si f est une similitude du plan, alors on a deux possibilités :

- soit f est une **similitude directe** ;
- soit f est la composée $g\circ S$ d'une similitude directe g et d'une symétrie axiale S, c'est-à-dire une **similitude indirecte**.

Démonstration

Soit f une similitude du plan qui n'est pas directe et deux points distincts A et B, d'images respectives A' et B' par f.
Il existe une similitude directe unique g telle que $g(A)=A'$ et $g(B)=B'$.
Dans ces conditions :



- $g^{-1}\circ f$, composée de deux similitudes, est une similitude ;
- $g^{-1}\circ f$ n'est pas l'identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, car, dans le cas contraire, on aurait $f=g$, ce qui est impossible, car f n'est pas directe et g est directe.
- $(g^{-1}\circ f)(A)=g^{-1}(f(A))=g^{-1}(A')=A$.

De même $(g^{-1}\circ f)(B)=B$.
Ainsi $g^{-1}\circ f$, similitude distincte de $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ avec deux points fixes distincts A et B, est la symétrie axiale d'axe (AB).
On a $g^{-1}\circ f=S_{(AB)}$; donc $g\circ g^{-1}\circ f=g\circ S_{(AB)}$, c'est-à-dire $f=g\circ S_{(AB)}$.

Remarques

- La décomposition de f sous la forme $g\circ S$ n'est pas unique, car, dans la démonstration précédente, l'axe (AB) de S dépend des deux points A et B choisis au départ.
- De plus, en général, la similitude directe g et la symétrie axiale S ne sont pas permutables.
- De la forme géométrique d'une similitude, on déduit sans difficulté que si f est une similitude qui n'est pas directe, alors elle transforme **tout angle orienté en son opposé**. C'est pourquoi on dit que f est une **similitude indirecte**.
- Si g est un déplacement, alors la composée $f=g\circ S$ est appelée **antidéplacement**.

4.4 Forme complexe d'une similitude — théorème

Soit $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan.
Soit f une transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

- f est une **similitude directe** du plan si, et seulement si, il existe un nombre complexe non nul a et un nombre complexe b tels que :

pour tout point M d'affixe z, on a $z'=az+b$.

- f est une **similitude indirecte** du plan si, et seulement si, il existe un nombre complexe non nul a et un nombre complexe b tels que :

pour tout point M d'affixe z, on a $z'=a\bar{z}+b$.

Démonstration

- Le résultat a été établi en **2.3** pour une similitude directe.
- D'après la démonstration de **4.3**, où A est le point d'affixe 0 et B celui d'affixe 1, f est une similitude indirecte si, et seulement si, $f=g\circ S$, où S est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et g une similitude directe.

L'expression complexe de S est $z_1=\bar{z}$, et celle de g est de la forme $z'=az_1+b$, avec $a\neq 0$; donc $g\circ S$ a pour expression complexe $z'=a\bar{z}+b$, avec $a\neq 0$.
Ainsi, f est une similitude indirecte si, et seulement si, son expression complexe est $z'=a\bar{z}+b$, avec $a\neq 0$.

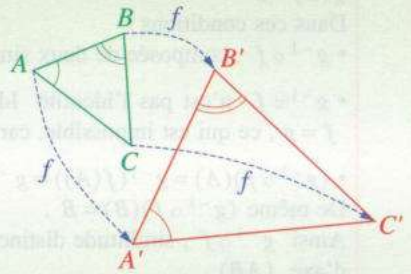
5 Propriétés géométriques des similitudes

5.1 Image d'un triangle, d'un angle géométrique

• Une similitude transforme tout triangle ABC en un triangle **semblable** $A'B'C'$.

• Une similitude **conserve les angles géométriques**, c'est-à-dire que si trois points A, B et C deux à deux distincts, ont pour images A', B' et C' par la similitude f, on a :

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$



• Si f est une similitude **directe**, alors le triangle $A'B'C'$ est **directement** semblable au triangle ABC.

Démonstration

• Si k désigne le rapport de la similitude f, on a :

$$A'B' = kAB \ , \quad A'C' = kAC \quad \text{et} \quad C'B' = kCB \ , \quad \text{donc} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \ .$$

Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ayant leurs côtés proportionnels sont donc semblables.

On en déduit que $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

• On sait déjà que $A'B'C'$ et ABC sont semblables. De plus, f conservant les angles orientés, on a :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \ ;$$

donc les triangles $A'B'C'$ et ABC sont directement semblables.

5.2 Effet d'une similitude sur un barycentre — proposition

Une similitude f **conserve le barycentre**.
Cela signifie que si n points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), …, (A_n, α_n) admettent un barycentre G et si A_1', A_2', …, A_n' sont les images des points A_1, A_2, …, A_n par f, alors les n points pondérés (A_1', α_1), (A_2', α_2), …, (A_n', α_n) admettent pour barycentre le point G', image de G par la similitude f.

Démonstration

Dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan, on note z_M l'affixe de tout point M et on pose $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. $\alpha \neq 0$, car le barycentre G existe.

Soit H le barycentre des points pondérés (A_1', α_1), …, (A_n', α_n) ; son affixe est $z_H = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k'}$.

• Si l'expression complexe de f est de la forme $z' = a\overline{z} + b$, avec $a \neq 0$, on a :

$$z_H = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (a\overline{z_{A_k}} + b) = \frac{1}{\alpha} \left(a \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{z_{A_k}} + b\alpha \right) = a \overline{\left(\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k} \right)} + b \ ,$$

car les α_k sont des réels. Donc $z_H = a\overline{z_G} + b = z_{G'}$. Ainsi H est confondu avec l'image G' de G par f.

• On obtient le même résultat si l'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$, en supprimant les barres de conjugaison.

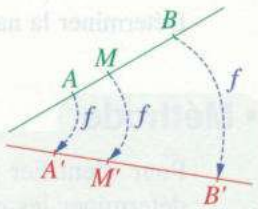
5.3 Image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment

Soit A et B deux points distincts du plan, d'images A' et B' par une similitude f.

- L'image par f de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image par f de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.

Démonstration

- $M \in (AB)$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ **(1)**.
(1) peut s'écrire $(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Ainsi, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres M des points pondérés $(A, 1-k)$ et (B, k) lorsque k décrit $\mathbb{R}$.
On en déduit que l'image par f de la droite (AB) est l'ensemble des barycentres M', images des points M par f des points pondérés $(A', 1-k)$ et (B', k) lorsque k décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite $(A'B')$.



- $M \in [AB)$ si, et seulement si, il existe un réel positif k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Donc en remplaçant « k décrit $\mathbb{R}$ » par « k décrit $[0 ; +\infty[$ », on obtient que l'image de $[AB)$ est $[A'B')$.
- $M \in [AB]$ si, et seulement si, il existe un réel k dans $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Donc en remplaçant « k décrit $\mathbb{R}$ » par « k décrit $[0 ; 1]$ », on obtient que l'image de $[AB]$ est $[A'B']$.

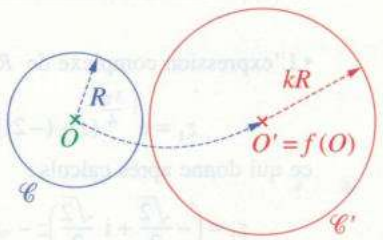
5.4 Image d'un cercle

L'image du cercle de centre O et de rayon R par une similitude f de rapport k est le cercle de centre O', image de O par f, et de rayon kR.

Démonstration

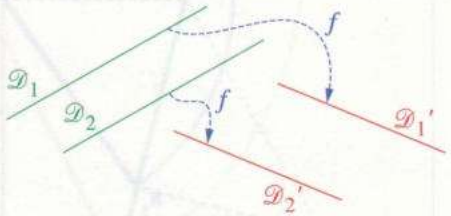
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, d'image M' par f, on a $O'M' = kOM$, car f multiplie les distances par k ; donc, pour tout point M de $\mathscr{C}$, son image M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon kR.

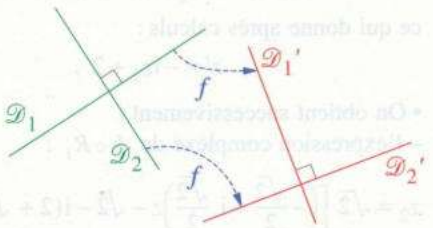
Réciproquement, soit M' un point de $\mathscr{C}'$ et M son unique antécédent par f ; on a $O'M' = kR$ et $O'M' = kOM$, alors $OM = R$, et donc M appartient à $\mathscr{C}$.
Ainsi, l'image de $\mathscr{C}$ par f est $\mathscr{C}'$.



5.5 Conséquences

- Une similitude **conserve l'alignement des points**, c'est-à-dire que trois points alignés ont pour images trois points alignés.
- Une similitude **conserve le parallélisme et l'orthogonalité**, c'est-à-dire que deux droites parallèles (respectivement orthogonales) ont pour images deux droites parallèles (respectivement orthogonales).





- Une similitude **conserve la cocyclicité**, c'est-à-dire que quatre points sur un cercle ont pour images quatre points sur le cercle image.

1 Identification d'une similitude directe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère :

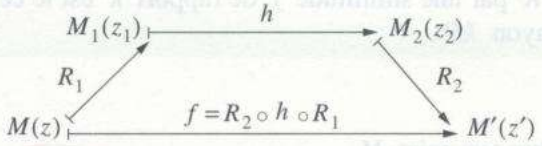
- la rotation R_1 de centre $\Omega(0\,;-2)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$;
- l'homothétie h de centre $A(-2-2\sqrt{2}\,;-2)$ et de rapport $\sqrt{2}$;
- la rotation R_2 de centre $B(1\,;-1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = R_2 \circ h \circ R_1$.

• Méthode

Pour identifier une similitude g, composée de deux transformations g_1 et g_2, on peut déterminer les expressions complexes de g_1 et g_2, et en déduire l'expression complexe de $g = g_2 \circ g_1$.
À partir de cette expression complexe, avec les théorèmes du cours, on détermine la nature et les éléments caractéristiques de g.

Notations



• L'expression complexe de R_1 est :

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-(-2i))+(-2i)\ ,$$

ce qui donne après calculs :

$$z_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z-\sqrt{2}-i\,(2+\sqrt{2})\ .$$

• L'expression complexe de h est :

$$z_2 = \sqrt{2}\,(z_1-(-2-2\sqrt{2}-2i))+(-2-2\sqrt{2}-2i)\ ,$$

ce qui donne après calculs :

$$z_2 = \sqrt{2}\,z_1+2+2\,(\sqrt{2}-1)\,i\ .$$

• L'expression complexe de R_2 est :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_2-(1-i))+1-i\ ,$$

ce qui donne après calculs :

$$z' = -iz_2+2\ .$$

• On obtient successivement :
– l'expression complexe de $h \circ R_1$:

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z-\sqrt{2}-i(2+\sqrt{2})\right] +2+2\,(\sqrt{2}-1)\,i\ ,$$

ce qui donne $z_2 = (-1+i)\,z-4i$;

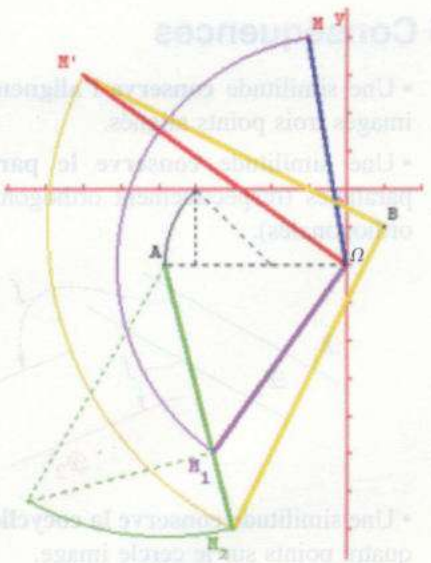
– l'expression complexe de f :

$$z' = -i\,((-1+i)\,z-4i)+2$$
$$= (1+i)\,z-2\ .$$

Cette expression complexe est du type $z' = az+b$, avec $a = 1+i$ et $b = -2$.
On en déduit que f est la similitude directe :
• de rapport $|a| = \sqrt{2}$,
• d'angle $\arg a = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$,
• et de centre Ω' d'affixe ω', avec :

$$\omega' = \frac{b}{1-a} = \frac{-2}{1-1-i} = -2i\ .$$

Ω' est donc le point $\Omega\,(0\,;-2)$.



2 Étude d'une configuration

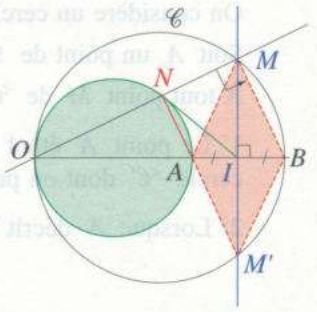
Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OB]$.

Soit A un point du segment $[OB]$, distinct de O et de B, et I le milieu de $[AB]$.

La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et M', M étant le point tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Soit N le point commun aux droites (AM') et (OM).

On appelle $\mathscr{S}$ la similitude directe de centre N qui transforme M en A : $\mathscr{S}(M) = A$.



1° Préciser l'angle de $\mathscr{S}$. Déterminer les images par $\mathscr{S}$ des droites (MI) et (NA), puis l'image par $\mathscr{S}$ du point M'.

2° Quelle est l'image I' par $\mathscr{S}$ du point I ? En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

• Méthode

Dans les études de configurations du plan, on utilise souvent les propriétés suivantes :

• par une similitude, l'image du point d'intersection de deux droites est le point d'intersection des deux droites images ;

• par une similitude, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image ;

• par une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$), l'image d'une droite Δ est une droite Δ' perpendiculaire à Δ ;

• par une similitude, deux courbes tangentes en un point A ont pour image deux courbes tangentes au point A' image de A.

1° Le quadrilatère $AMBM'$, dont les diagonales ont le même milieu I et sont perpendiculaires, est un losange.

Les droites (AM') et (MB) sont donc parallèles.

(MB) étant perpendiculaire à (OM), on en déduit que (AM') est perpendiculaire à (OM).

L'angle de la similitude directe $\mathscr{S}$ est :

$$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \ ;$$

donc toute droite et son image par $\mathscr{S}$ sont perpendiculaires.

L'image de la droite (MI) par $\mathscr{S}$ est la droite passant par $\mathscr{S}(M) = A$ et perpendiculaire à (MI), c'est-à-dire la droite (AB).

L'image de la droite (NA) par $\mathscr{S}$ est la droite passant par $\mathscr{S}(N) = N$ et perpendiculaire à (NA), c'est-à-dire la droite (NO).

M' est le point d'intersection de (MI) et (NA), donc son image par $\mathscr{S}$ est le point d'intersection des droites images (AB) et (NO), c'est-à-dire O :

$$\mathscr{S}(M') = O \ .$$

2° L'image I' par $\mathscr{S}$ du point I, milieu de $[MM']$, est le milieu du segment image $[AO]$.

L'image par $\mathscr{S}$ de la droite (NI) est donc la droite (NI').

L'angle de $\mathscr{S}$ étant $-\frac{\pi}{2}$, ces deux droites sont perpendiculaires ; donc (NI) est la tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$, dont le centre est I'.

3 Détermination de lieux géométriques à l'aide de transformations

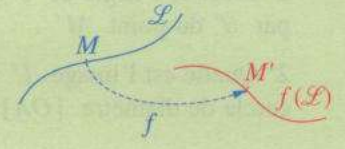
On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R, et une droite $\mathscr{D}$ ne coupant pas $\mathscr{C}$.
Soit A un point de $\mathscr{D}$.
À tout point M de $\mathscr{C}$, on associe le point M' tel que AMM' soit un triangle équilatéral direct.

1° Le point A étant fixe, montrer que l'ensemble des points M', lorsque M décrit $\mathscr{C}$, est un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre O' et le rayon.

2° Lorsque A décrit $\mathscr{D}$, déterminer l'ensemble des points O'.

• Méthode

Lorsqu'un point M décrit une ligne $\mathscr{L}$ et qu'un point M' est l'image de M par une transformation f connue, alors le point M' décrit l'image de $\mathscr{L}$ par f.

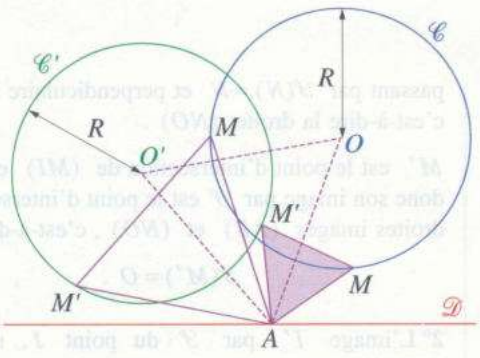


1° Pour tout point M de $\mathscr{C}$, par hypothèse AMM' est équilatéral direct, donc M' est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$M' = R_{A,\frac{\pi}{3}}(M) .$$

A étant fixe, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$, M' décrit l'image de $\mathscr{C}$ par $R_{A,\frac{\pi}{3}}$.

Cette image est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' image de O par la rotation, et de rayon R.
L'ensemble des points M' est donc le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon R.



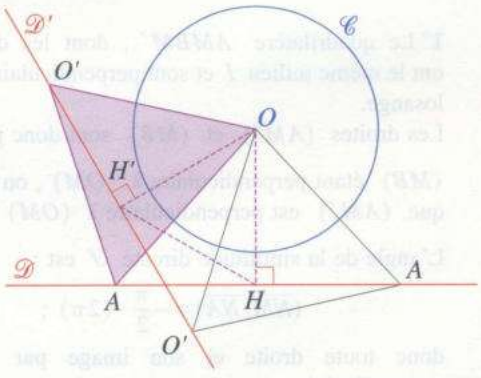
2° O' est l'image de O par $R_{A,\frac{\pi}{3}}$, donc le triangle AOO' est équilatéral direct.
Ainsi, O' est l'image de A par $R_{O,-\frac{\pi}{3}}$.

O étant fixe, lorsque A décrit la droite $\mathscr{D}$, O' décrit l'image de $\mathscr{D}$ par $R_{O,-\frac{\pi}{3}}$.

Soit $\mathscr{D}'$ cette image.
Pour construire la droite $\mathscr{D}'$, on considère le projeté orthogonal H de O sur $\mathscr{D}$ et on construit l'image H' de H par $R_{O,-\frac{\pi}{3}}$.

La droite $\mathscr{D}'$ est la perpendiculaire à (OH') passant par H'.

L'ensemble des points O' est la droite $\mathscr{D}'$.



4 Problème de construction

Dans le plan, on considère un triangle ABC, un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R et un point donné M.

Construire un triangle MNP, directement semblable à ABC, tel que N et P appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

• Méthode

Un problème de construction se traite en trois parties :

• **analyse** : on suppose la figure construite et on met en évidence des propriétés qui permettent de faire la construction ;

• **synthèse** : on explique comment construire la figure demandée, si elle existe ;

• **discussion** : on détermine le nombre de solutions en fonction des données.

Analyse de l'énoncé

On suppose qu'un tel triangle existe.

MNP est directement semblable à ABC, donc la similitude directe S de centre M, de rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, transforme N en P.

En effet, on a :

$$\frac{MP}{AC} = \frac{MN}{AB},$$

donc $MP = \dfrac{AC}{AB} MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Or N appartient à $\mathscr{C}$, donc $S(N)$ appartient à $S(\mathscr{C})$ et ainsi, P appartient à $S(\mathscr{C})$.

Ainsi, P appartient à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}$ par la similitude directe S.

Synthèse

On construit le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par la similitude directe S de centre M, de rapport $\dfrac{AC}{AB}$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

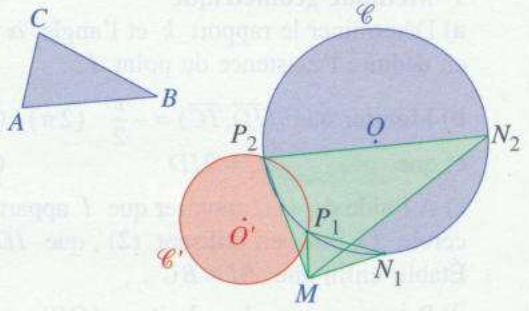
Ce cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre $O' = S(O)$ et pour rayon $R' = \dfrac{AC}{AB} R$.

Le point P est un point d'intersection, s'il en existe, de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

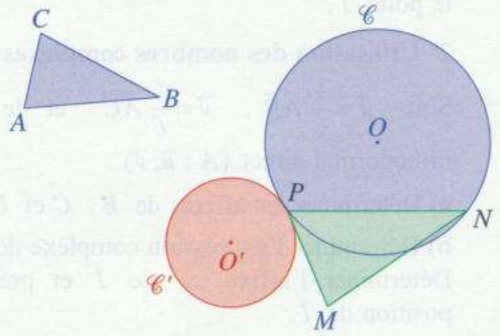
Le point N est alors l'image de P par la similitude directe S^{-1}, réciproque de S.

Discussion

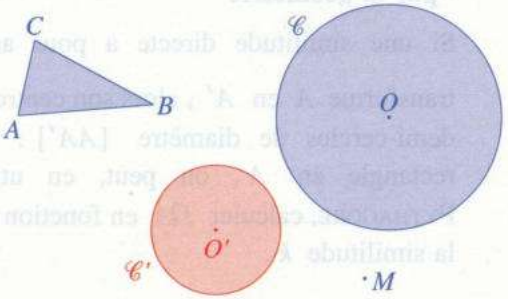
• **1er cas** : si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants, il existe deux triangles MN_1P_1 et MN_2P_2 qui répondent à la question.



• **2e cas** : si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents, il existe un seul triangle MNP qui répond à la question.



• **3e cas** : si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ n'ont pas de point commun, le problème n'a pas de solution.



BAC

5 Détermination du centre d'une similitude directe

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle et isocèle ABC tel que $AB = AC = \ell$, où ℓ est un réel fixé strictement positif, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de $[CD]$ et Γ le cercle de diamètre $[CD]$.

On désigne par S la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, son centre I.

1° Méthode géométrique

a) Déterminer le rapport k et l'angle α de S ; en déduire l'existence du point I.

b) Montrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ **(1)**

et que $IC = 2ID$ **(2)**.

c) À l'aide de **(1)**, montrer que I appartient au cercle Γ, puis, en utilisant **(2)**, que $ID = \ell$. Établir enfin que $BI = BC$.

d) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de $[IC]$.
Préciser la nature du quadrilatère $CADI$. Placer le point I.

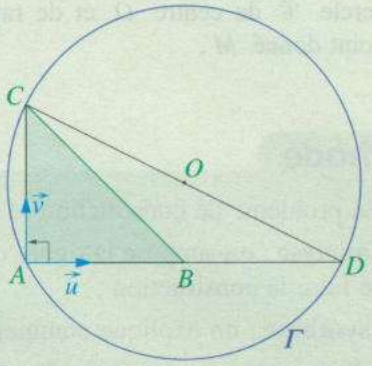
2° Utilisation des nombres complexes

Soit $\vec{u} = \frac{1}{\ell}\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \frac{1}{\ell}\overrightarrow{AC}$ et le repère orthonormal direct $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer les affixes de B, C et D.

b) Déterminer l'expression complexe de S.
Déterminer l'affixe z_0 de I et préciser la position de I.

Analyse de l'énoncé



1° a) Les similitudes directes qui n'ont pas de centre sont les **translations**.

b) On peut remarquer que :
$S \circ S(I) = I$ et $S \circ S(D) = C$.

c) $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, donc ICD est un triangle rectangle d'hypoténuse $[CD]$.

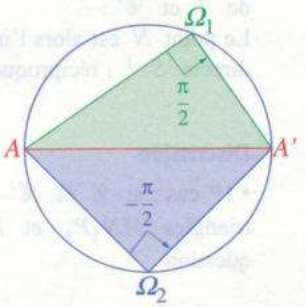
d) La médiatrice de $[IC]$ est l'ensemble des points équidistants de I et de C.

2° L'expression complexe d'une similitude directe est du type $z' = az + b$, avec a complexe non nul et b complexe.
Le centre d'une similitude directe autre qu'une translation est son point fixe.

• Méthodes

• par la géométrie

Si une similitude directe a pour angle $\frac{\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$) et transforme A en A', alors son centre Ω appartient à l'un des demi-cercles de diamètre $[AA']$. De plus, $\Omega AA'$ étant rectangle en A, on peut, en utilisant le théorème de PYTHAGORE, calculer ΩA en fonction de AA' et le rapport de la similitude k.



• par les complexes

Si la similitude directe a pour expression complexe $z' = az + b$, avec $a \neq 1$, son centre est le point fixe Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.

1° Méthode géométrique

a) S transforme D en B et B en C, donc son rapport est :

$$k = \frac{BC}{DB} = \frac{\ell\sqrt{2}}{\ell} = \sqrt{2} ,$$

et son angle a pour mesure :

$$\alpha = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi) .$$

Le rapport de S est $\sqrt{2}$, qui est différent de 1, donc S est une similitude directe qui n'est pas une translation.

Ainsi, S a un point fixe unique : son centre I.

b) I étant invariant par S, on a $S \circ S(I) = I$.

De plus $S(D) = B$ et $S(B) = C$, donc :

$$S \circ S(D) = C .$$

Or, $S \circ S$ est une similitude directe :

• de rapport $k \times k = 2$,

• d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

Donc $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ **(1)**

et $IC = 2ID$ **(2)**

c) Comme $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$, alors ICD est un triangle rectangle en I qui est inscrit dans le cercle de diamètre $[CD]$. Ainsi le point I appartient à Γ.

D'après le théorème de PYTHAGORE, on a :

$$IC^2 + ID^2 = CD^2 .$$

Mais, d'après **(2)** , on a :

$$IC^2 + ID^2 = 4ID^2 + ID^2 = 5ID^2 ,$$

et, dans le triangle rectangle CAD :

$$CD^2 = CA^2 + AD^2 = \ell^2 + 4\ell^2 = 5\ell^2 ;$$

donc $5ID^2 = 5\ell^2$ ou encore $ID = \ell$.

Enfin, $S(I) = I$ et $S(D) = B$, donc :

$$IB = \sqrt{2}\, ID = \sqrt{2}\, \ell = BC \quad \text{et} \quad BI = BC .$$

d) Le point I appartient à Γ, donc $OI = OC$.

Le point O est donc équidistant de I et de C.

D'après **c)**, $BI = BC$; donc B est équidistant de I et de C.

Ainsi, O et B appartiennent à la médiatrice de $[IC]$; donc cette médiatrice est (OB) .

La médiatrice de $[AD]$ est aussi la droite (OB) , donc le quadrilatère $CADI$, qui admet (OB) pour axe de symétrie et qui a un angle droit en A , est un rectangle.

Le point I est donc le quatrième sommet du rectangle $CADI$.

2° Méthode avec les complexes

a) On a $\overrightarrow{AB} = \ell\vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \ell\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\ell\vec{u}$, donc les affixes de B , C et D sont respectivement :

$$z_B = \ell , \quad z_C = \mathrm{i}\ell \quad \text{et} \quad z_D = 2\ell .$$

b) L'expression complexe de la similitude directe S est du type $z' = az + b$, avec a complexe non nul et b complexe ; $S(D) = B$ et $S(B) = C$, donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} az_D + d = z_B \\ az_B + b = z_C \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2a\ell + b = \ell \\ a\ell + b = \mathrm{i}\ell \end{cases} .$$

On trouve immédiatement :

$$\begin{cases} a\ell = \ell(1-\mathrm{i}) \\ b = \ell(1-2a) . \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} a = 1-\mathrm{i} \\ b = \ell(-1+2\mathrm{i}) . \end{cases}$

L'expression complexe de S est alors :

$$z' = (1-\mathrm{i})z + \ell(-1+2\mathrm{i}) .$$

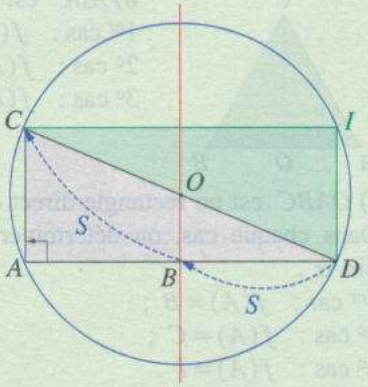
Le centre de S a pour affixe ω , telle que :

$$\omega = S(\omega)$$

$$\omega = (1-\mathrm{i})\omega + \ell(-1+2\mathrm{i}) .$$

D'où $\omega = \dfrac{\ell(-1+2\mathrm{i})}{\mathrm{i}} = \ell(2+\mathrm{i})$.

Les coordonnées de I sont $(2\ell\,;\,\ell)$, donc I est le quatrième sommet du rectangle $CADI$.

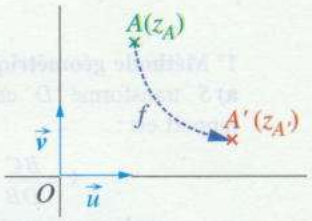


1 Déterminations de similitudes directes

Une similitude directe est parfaitement déterminée lorsqu'on connaît :

1.1 Son rapport, son angle, un point et son image

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit f une similitude directe de rapport k, réel strictement positif, d'angle α, qui transforme le point A d'affixe z_A, en A' d'affixe $z_{A'}$.



1 Montrer que l'expression complexe de f est :

$$z' = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - z_A) + z_{A'}\ .$$

En déduire l'existence et l'unicité de f, ainsi que l'affixe de son centre Ω (s'il existe).

2 Dans les cas suivants, déterminer l'expression complexe de f et calculer l'affixe du centre Ω de f (s'il existe).

a) $k = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (2π) , sachant que $z_A = \sqrt{2}$ et $z_{A'} = 4 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

b) $k = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$ (2π) , sachant que $z_A = -6\mathrm{i}$ et $z_{A'} = -2\sqrt{3}$.

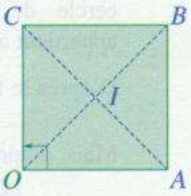
c) $k = 2$, $\alpha = \pi$ (2π) , sachant que $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_{A'} = -1 + 5\mathrm{i}$.

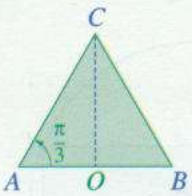
1.2 Son centre, un point et son image

1 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit f une similitude directe de centre O qui transforme le point A d'affixe z_A en A' d'affixe $z_{A'}$. On suppose A et A' distincts du point O.
Démontrer l'existence et l'unicité de f.
Préciser son rapport et son angle à l'aide des points O, A et A'.

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer la similitude directe de centre O, qui vérifie la condition indiquée :

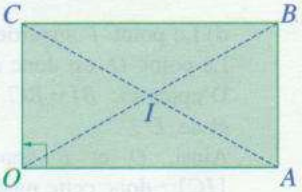
a) $OABC$ est un carré direct de centre I.
1er cas : $f(A) = B$;
2e cas : $f(A) = C$;
3e cas : $f(A) = I$.





b) ABC est un triangle équilatéral direct et O est le milieu de $[AB]$.
1er cas : $f(A) = C$;
2e cas : $f(A) = B$;
3e cas : $f(B) = C$.

c) $OABC$ est un rectangle direct de centre I tel que $OA = 2OC$.
Dans chaque cas, on déterminera l'angle α de f par $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
1er cas : $f(A) = B$;
2e cas : $f(A) = C$;
3e cas : $f(A) = I$.



2 Étude de lieux géométriques à l'aide de transformations

Dans le plan, soit O un point et Δ une droite ne passant pas par O.
Pour tout point M de Δ, on construit le carré $OMNP$ de sens direct ayant pour centre I.
Le but de cet exercice est de déterminer les lieux géométriques $\mathscr{E}_1$ des points P, $\mathscr{E}_2$ des points N et $\mathscr{E}_3$ des points I, lorsque M décrit la droite Δ.

2.1 Conjecture des résultats grâce au logiciel GeoplanW

1 Construction de la figure

Définir les points O, A et B comme points libres dans le plan :

créer / point / point libre / dans le plan

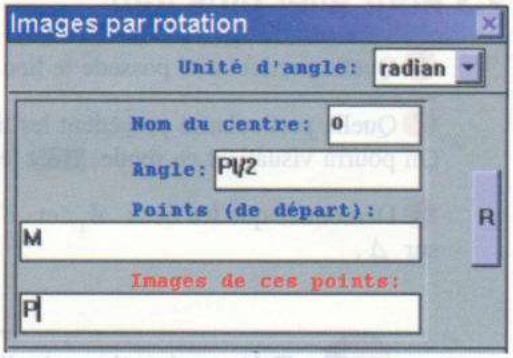
Faire en sorte que O, A et B ne soient pas alignés en déplaçant éventuellement le point O avec la souris.

Tracer la droite (AB), qui sera la droite Δ :

créer / ligne / droite(s) / définies par 2 points

Définir le point M quelconque sur la droite (AB) ou Δ :

créer / point / point libre / sur une droite



Construire le point P :

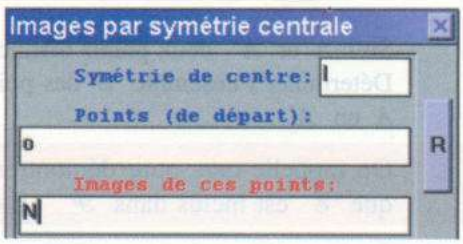
créer / point / point image par / rotation (angle mesuré)

Construire le point I, milieu du segment $[MP]$:

créer / point / milieu

Construire le point N par symétrie de centre I :

créer / point / point image par / symétrie centrale

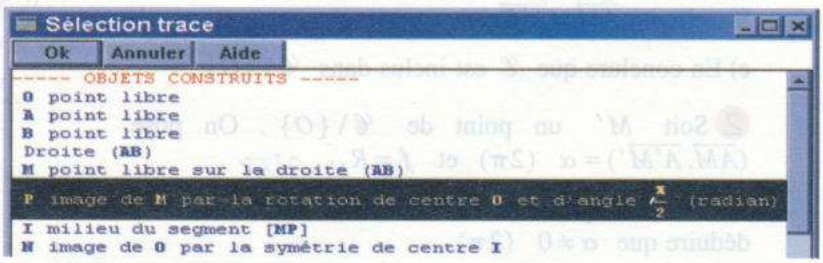


Tracer les segments $[OM]$, $[MN]$, $[NP]$, $[PO]$, $[ON]$ et $[MP]$:

créer / ligne / segments.

2 Conjectures sur les lieux recherchés

a) Déplacer le point M à l'aide de la souris, et observer le déplacement des points P, N et I.
Visualiser la trace du point P ; pour cela, faire :



afficher / selection trace, cliquer sur la ligne définissant le point P puis Ok.

Cliquer ensuite sur le bouton T et déplacer le point M sur la droite Δ.

b) Émettre alors une conjecture sur le lieu géométrique des points P.

Pour sortir du mode « Trace », cliquer sur le bouton N_T.

c) Procéder de même pour émettre des conjectures concernant les lieux géométriques des points N et I.

2.2 Démonstration des conjectures émises

1 Par quelle transformation géométrique obtient-on le point P à partir du point M ?
En déduire le lieu géométrique $\mathscr{E}_1$ du point P.

2 Par quelle transformation géométrique obtient-on le point N à partir du point M ?
En déduire le lieu géométrique $\mathscr{E}_2$ du point N.

3 Par quelle transformation géométrique obtient-on le point I à partir du point N ?
En déduire le lieu géométrique $\mathscr{E}_3$ du point I.

2.3 Pour aller plus loin

1 Quelle particularité possède le lieu $\mathscr{E}_1$ par rapport à la droite Δ ?

2 Quelle particularité possèdent les lieux $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ l'un par rapport à l'autre ?
On pourra visualiser en mode Trace et démontrer le résultat observé.

3 Démontrer que les lieux $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ ont un unique point d'intersection J et que ce point J est sur Δ.

3 Détermination de lieux géométriques par égalité d'ensembles

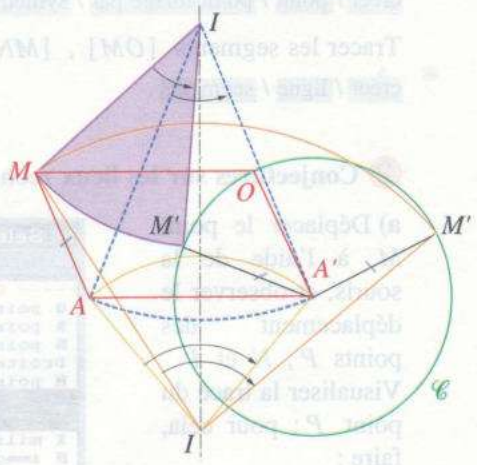
Soit A et A' deux points distincts du plan et M un point du plan distinct de A.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M', images du point M par les rotations qui transforment A en A'.

On rappelle que, pour démontrer l'égalité de deux ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, il suffit d'établir que $\mathscr{E}$ est inclus dans $\mathscr{F}$ $(\mathscr{E} \subset \mathscr{F})$, et que $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathscr{E}$ $(\mathscr{F} \subset \mathscr{E})$.

1 **a)** Soit $R_{I,\alpha}$ une rotation qui transforme A en A', et M' l'image de M par cette rotation.
Montrer que M' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A' et de rayon AM.

b) Montrer que $\alpha \neq 0 \ (2\pi)$.
En déduire que M' ne peut être le point O du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'O}$.

c) En conclure que $\mathscr{E}$ est inclus dans $\mathscr{C} \setminus \{O\}$.



2 Soit M' un point de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$. On pose $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha \ (2\pi)$ et $f = R_{A',\alpha} \circ t_{\overrightarrow{AA'}}$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha \ (2\pi)$ et en déduire que $\alpha \neq 0 \ (2\pi)$.

b) Montrer que f est un déplacement du plan. Quel est l'angle de f ? En déduire que f est une rotation d'angle α vérifiant $f(A) = A'$.

c) Montrer que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MO}$. En déduire $t_{\overrightarrow{AA'}}(M)$ puis $f(M)$.

d) En conclure que $\mathscr{C} \setminus \{O\}$ est inclus dans $\mathscr{E}$.

3 **Conclusion**
Quel est donc l'ensemble $\mathscr{E}$?

Faire le point

• Isométries du plan, similitudes du plan

• f est une isométrie du plan $\iff$ f conserve les distances

• f est une similitude du plan $\iff$ f conserve les rapports de distances

$\iff$ f multiplie toutes les distances par un même réel k $(k>0)$.

• Similitudes ayant deux points fixes

Une similitude du plan ayant deux points fixes est soit l'identité, soit une symétrie axiale.

• Caractérisation complexe d'une similitude

f est une similitude du plan si, et seulement si, son expression complexe est de la forme :

• $z \mapsto az+b$ (avec $a \neq 0$)	• $z \mapsto a\bar{z}+b$ (avec $a \neq 0$)
f est une **similitude directe** ;	f est une **similitude indirecte** ;
f conserve tous les angles orientés.	f transforme tout angle orienté en son opposé.

• Similitudes directes

• Similitude directe définie par deux points et leurs images

Soit A , B , A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe f transformant A en A' et B en B' .

• Forme réduite d'une similitude directe

Une similitude directe f qui n'est pas une translation a un unique point fixe : son centre Ω .

Si k est son rapport et θ son angle, on a alors :

$$f = h_{\Omega,k} \circ R_{\Omega,\theta} = R_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k} .$$

savoir	comment faire ?
déterminer le rapport k d'une similitude f	• si $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$ et $A \neq B$, alors $k=\dfrac{A'B'}{AB}$ • si f a pour forme complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$, alors $k=\lvert a \rvert$ • si f est la composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 , alors $k=k_1k_2$ • si f est la réciproque d'une similitude de rapport k' , alors $k=\dfrac{1}{k'}$
déterminer l'angle θ d'une similitude directe	• si $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$ et $A \neq B$, alors $\theta=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$ (2π) • si f a pour forme complexe $z \mapsto az+b$, alors $\theta=\arg(a)$ (2π) • si f est la composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 , alors : $\theta=\theta_1+\theta_2$ (2π) • si f est la réciproque d'une similitude directe d'angle θ' , alors : $\theta=-\theta'$ (2π)
Construire l'image M' de M par une similitude directe f	• si $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$ et $A \neq B$, tout triangle ABM a pour image le triangle $A'B'M'$ directement semblable au triangle ABM • si f est la similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle θ , alors M' est le point tel que $\Omega M'=k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$ (2π)

1 Similitudes

1 Vrai-faux

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Une homothétie de rapport -3 est une similitude de rapport -3.

2° Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, une similitude qui transforme A en B et B en C a pour rapport $\sqrt{2}$.

3° Si f est une similitude de rapport 3, sa réciproque f^{-1} a pour rapport -3.

4° Si A, B, C sont trois points distincts du plan, il existe une similitude f qui transforme A en C et B en C.

2 Définitions – Rapport

2 1° Construire un triangle ABC tel que :
$AB = 2$ cm ; $BC = 4$ cm et $CA = 3$ cm.

2° On considère deux points M et N tels que $MN = 6$ cm, et une similitude f telle que :
$f(A) = M$ et $f(B) = N$.
Construire les images possibles de C par f.

3 A et B sont deux points du plan ; $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites du plan.

Justifier que les composées suivantes sont des similitudes et pour chacune d'elles, déterminer le rapport.

a) $f = S_{\mathscr{D}} \circ S_{\mathscr{D}'} \circ h_{A,3}$; **b)** $g = h_{A,-3} \circ R_{B,-\frac{\pi}{3}}$;

c) $h = h_{A,-2} \circ S_{\mathscr{D}}$; **d)** $k = t_{\overrightarrow{AB}} \circ R_{B,\frac{\pi}{2}} \circ h_{A,-2}$.

4 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distinct de O, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z^2}{|z|}$ et qui transforme O en O.

a) Déterminer les points fixes de f.

b) f est-elle une similitude ?

5 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui, à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x' ; y')$ telles que $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une similitude dont on déterminera le rapport.

2 Similitudes directes

1 Vrai-faux

6 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Une similitude directe transforme un angle de mesure π en un angle de mesure $-\pi$.

2° a étant un complexe non nul et b un complexe, la transformation d'expression complexe $z' = \overline{az} + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$.

3° Une homothétie de rapport négatif n'est pas une similitude directe.

4° A et B étant deux points distincts du plan il existe une similitude directe unique qui transforme A en B et B en A.

2 Similitude directe transformant A et B en A' et B'

Dans les exercices 7 à 9, le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'expression complexe $z' = az + b$ de la similitude directe S qui transforme A en A' et B en B'. Dans chaque cas, préciser le rapport de S, un argument du complexe a et examiner l'existence éventuelle d'un point fixe de S.

7 1° $z_A = 0$; $z_{A'} = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$; $z_B = 2\sqrt{3}$; $z_{B'} = 18\mathrm{i}$.

2° $z_A = 1 + \mathrm{i}$; $z_{A'} = -1 + 4\mathrm{i}$; $z_B = 3 - 2\mathrm{i}$; $z_{B'} = 1 + \mathrm{i}$.

3° $z_A = 3 - 2\mathrm{i}$; $z_{A'} = -3 - 2\mathrm{i}$; $z_B = -3\mathrm{i}$; $z_{B'} = 3$.

8 1° $z_A = i$; $z_{A'} = -4 - i$; $z_B = 1 - i$; $z_{B'} = -1 - 2i$.

2° $z_A = 3 + 4i$; $z_{A'} = 5 - 2i$; $z_B = 2$; $z_{B'} = 1 - i$.

3° $z_A = 4$; $z_{A'} = 4i$; $z_B = 2 - i$; $z_{B'} = 6 + 7i$.

9 1° $z_A = 2 + i$; $z_{A'} = -2 + i$; $z_B = 1$; $z_{B'} = -3 + 2i$.

2° $z_A = 1$; $z_{A'} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_B = 1 - i$; $z_{B'} = 1 - \sqrt{3}$.

3° $z_A = 0$; $z_{A'} = 2i$; $z_B = 1$; $z_{B'} = i$.

3 Forme réduite d'une similitude directe

1 Vrai-faux

10 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Toute similitude directe admet un point fixe unique, son centre.

2° La réciproque d'une similitude directe n'est pas une similitude directe.

3° Si f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A en un point B distinct de A, alors le centre Ω de f appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

4° Un déplacement d'angle nul est une translation.

2 Éléments caractéristiques d'une similitude directe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans les exercices 11 *et* 12, *déterminer dans chaque cas l'expression complexe de la similitude directe* S *de centre* Ω, *d'affixe* ω, *de rapport* k *et d'angle* α .

11 1° $\omega = 1 + i$; $k = 3$; $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

2° $\omega = -2i$; $k = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3° $\omega = 2$; $k = \sqrt{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4° $\omega = i$; $k = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

5° $\omega = 3$; $k = 1$; $\alpha = \pi$.

6° $\omega = 2i$; $k = 3$; $\alpha = 0$.

12 1° $\omega = 2 - 3i$; $k = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2° $\omega = 2 - i$; $k = 1$; $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

3° $\omega = 0$; $k = 5$; $\alpha = \pi$.

4° $\omega = -1 + i$; $k = 3$; $\alpha = 0$.

Dans les exercices 13 *et* 14, *on donne l'expression complexe d'une transformation* f *du plan. Déterminer la nature de* f *et ses éléments caractéristiques.*

13 1° $z' = -iz + 2$. 2° $z' = (1 - i)z + 1 - 2i$.

3° $z' = -3z + 8i$. 4° $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

14 1° $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - 3i$. 2° $z' = 2z + 6 - 9i$.

3° $z' = (-1 - i)z - 4 - 2i$. 4° $z' = z + 1 + 2i$.

15 On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = u^2 z + u - 1 ,$$

où u est un complexe donné.

1° Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une translation ; caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.

2° Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une symétrie centrale ; caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.

3° Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2 ; caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.

4° Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.

5° Caractériser f pour $u = 1 - i$.

Dans les exercices 16 *à* 18, *on désigne par* $S_{\Omega, k, \alpha}$ *la similitude directe de centre* Ω, *de rapport* k *et d'angle* α.
Déterminer k *et* α.

16 ABC est un triangle rectangle et isocèle direct de sommet A.

a) $S_{B, k, \alpha}(A) = C$; **b)** $S_{C, k, \alpha}(A) = B$;
c) $S_{A, k, \alpha}(C) = B$; **d)** $S_{B, k, \alpha}(C) = A$.

17 ABC est un triangle équilatéral direct de centre G.

a) $S_{B, k, \alpha}(C) = A$; **b)** $S_{B, k, \alpha}(C) = G$;
c) $S_{G, k, \alpha}(B) = C$; **d)** $S_{G, k, \alpha}(B) = A$.

18 $ABCD$ est un carré direct de centre O.

a) $S_{A, k, \alpha}(C) = D$; **b)** $S_{A, k, \alpha}(O) = B$;
c) $S_{A, k, \alpha}(O) = C$; **d)** $S_{B, k, \alpha}(A) = O$.

3 Composition de similitudes directes

Dans les exercices 19 *à* 21, *on donne les expressions complexes de deux similitudes directes* S_1 *et* S_2 *relativement au repère orthonormal direct* $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. *On demande de déterminer les expressions complexes de* $f = S_2 \circ S_1$ *et* $g = S_1 \circ S_2$, *puis de déterminer les éléments caractéristiques de* S_1, S_2, f *et* g.

19 $S_1 : z' = 2\mathrm{i}z + 1 - 2\mathrm{i}$;
$S_2 : z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

20 $S_1 : z' = -2\mathrm{i}z - 2 + \mathrm{i}$;
$S_2 : z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z$.

21 $S_1 : z' = (1 - \mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i}$;
$S_2 : z' = -2z$.

4 Composition de déplacements

22 Cas de deux translations

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ étant deux vecteurs du plan, montrer que :

$$t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1} = t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} .$$

23 Cas d'une translation et d'une rotation

1° On considère la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et la rotation $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$ de centre Ω d'affixe $-\mathrm{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les expressions complexes de :

$$t_{\vec{w}} , R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} , f = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ t_{\vec{w}} \quad \text{et} \quad g = t_{\vec{w}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} .$$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

$t_{\vec{w}}$ et $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$ sont-elles permutables ?

2° On considère la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b et la rotation $R_{\Omega, \alpha}$ de centre Ω d'affixe ω et d'angle α.

a) Déterminer les expressions complexes de :

$$t_{\vec{w}} , R_{\Omega, \alpha} , f = R_{\Omega, \alpha} \circ t_{\vec{w}} \quad \text{et} \quad g = t_{\vec{w}} \circ R_{\Omega, \alpha} .$$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

c) Montrer que $t_{\vec{w}}$ et $R_{\Omega, \alpha}$ sont permutables si, et seulement si :

$$\vec{w} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \alpha = 0 \ (2\pi) .$$

Les composées $t_{\vec{w}} \circ R_{\Omega, \alpha}$ et $R_{\Omega, \alpha} \circ t_{\vec{w}}$ d'une translation de vecteur $\vec{w}$ et d'une rotation d'angle $\alpha \neq 0 \ (2\pi)$ sont des rotations d'angle α.
Si $\vec{w} \neq \vec{0}$ et $\alpha \neq 0 \ (2\pi)$, $t_{\vec{w}}$ et $R_{\Omega, \alpha}$ ne sont pas permutables.

24 ★ Cas de deux rotations

1° Soit Ω_1 et Ω_2 les points d'affixes respectives 0 et 1.

a) Déterminer les expressions complexes de :

$$R_{\Omega_1, \frac{\pi}{6}} , R_{\Omega_2, \frac{\pi}{3}} ,$$
$$f = R_{\Omega_1, \frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega_2, \frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad g = R_{\Omega_2, \frac{\pi}{3}} \circ R_{\Omega_1, \frac{\pi}{6}} .$$

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f et g.

$R_{\Omega_1, \frac{\pi}{6}}$ et $R_{\Omega_2, \frac{\pi}{3}}$ sont-elles permutables ?

2° Soit Ω_1 et Ω_2 les points précédents.

a) Déterminer les expressions complexes de :

$$R_{\Omega_1, \frac{\pi}{2}} , R_{\Omega_2, \frac{3\pi}{2}} ,$$
$$f = R_{\Omega_1, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega_2, \frac{3\pi}{2}} \quad \text{et} \quad g = R_{\Omega_2, \frac{3\pi}{2}} \circ R_{\Omega_1, \frac{\pi}{2}} .$$

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f et g.

$R_{\Omega_1, \frac{\pi}{2}}$ et $R_{\Omega_2, \frac{3\pi}{2}}$ sont-elles permutables ?

3° Ω_1 et Ω_2 sont deux points d'affixes respectives ω_1 et ω_2 ; α_1 et α_2 sont deux réels.

a) Déterminer les expressions complexes de :

$$R_{\Omega_1,\alpha_1}\ ,\ R_{\Omega_2,\alpha_2}\ ,$$

$$f = R_{\Omega_1,\alpha_1} \circ R_{\Omega_2,\alpha_2} \quad \text{et} \quad g = R_{\Omega_2,\alpha_2} \circ R_{\Omega_1,\alpha_1}\ .$$

b) On suppose que $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \ \ (2\pi)$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g .

c) On suppose que $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0 \ \ (2\pi)$.

Montrer que f et g sont des rotations d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

d) Pour aller plus loin :

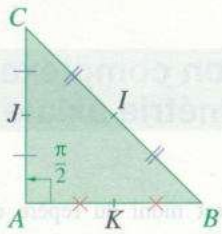
Montrer que R_{Ω_1,α_1} et R_{Ω_2,α_2} sont permutables si, et seulement si :

$$\omega_1 = \omega_2 \ \text{ ou } \ \alpha_1 = 0 \ \ (2\pi) \ \text{ ou } \ \alpha_2 = 0 \ \ (2\pi)\ .$$

Les composées de deux rotations d'angles respectifs α_1 et α_2 sont :
- des translations, si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \ \ (2\pi)$;
- des rotations d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$, si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0 \ \ (2\pi)$.

25 ★ Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, tel que :

$$AB = AC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \ \ (2\pi)\ .$$



Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose :

$$f = R \circ t \quad \text{et} \quad g = t \circ R\ .$$

1° a) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g .

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g .

2° a) Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.

b) Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser, alors, cette application.

c) Soit M un point du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g .

Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

(D'après BAC)

5 Composition d'homothéties et de translations

26 ★ **Cas d'une homothétie et d'une translation**

On considère la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b et l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω d'affixe ω et de rapport k réel non nul.

On pose $f = h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{w}}$ et $g = t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,k}$.

1° Déterminer les expressions complexes de $t_{\vec{w}}$, $h_{\Omega,k}$, f et g .

2° Montrer que pour $k \neq 1$, f et g sont des homothéties de rapport k .

3° Montrer que, $h_{\Omega,k}$ et $t_{\vec{w}}$ sont permutables si, et seulement si :

$$k = 1 \quad \text{ou} \quad b = 0\ .$$

4° On suppose $k \neq 1$ et $b \neq 0$. On appelle Ω_1 le centre de f et Ω_2 le centre de g .

Déterminer les affixes ω_1 de Ω_1 , et ω_2 de Ω_2 .

Montrer que :

$$\overrightarrow{\Omega\Omega_1} = \frac{k}{1-k}\,\vec{w} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega\Omega_2} = \frac{1}{1-k}\,\vec{w}\ .$$

27 ★★ **Cas de deux homothéties**

Ω_1 et Ω_2 sont deux points d'affixes ω_1 et ω_2 , et k_1 et k_2 sont deux réels non nuls.

On pose $f = h_{\Omega_1,k_1} \circ h_{\Omega_2,k_2}$.

1° Déterminer les expressions complexes de h_{Ω_1,k_1} , h_{Ω_2,k_2} et f .

2° On suppose que $k_1 k_2 = 1$.

Montrer que f est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

3° On suppose que $k_1 k_2 \neq 1$.

a) Montrer que f est une homothétie de rapport $k_1 k_2$ dont le centre Ω est aligné avec Ω_1 et Ω_2 .

Si k est un réel non nul et différent de 1, les composées $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,k}$ et $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{w}}$ sont des homothéties de rapport k .

Si k_1 et k_2 sont deux réels non nuls, alors :
- $h_{\Omega_1,k_1} \circ h_{\Omega_2,k_2}$ est une translation, si $k_1 k_2 = 1$;
- $h_{\Omega_1,k_1} \circ h_{\Omega_2,k_2}$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$, si $k_1 k_2 \neq 1$.

b) Pour aller plus loin

Montrer que h_{Ω_1,k_1} et h_{Ω_2,k_2} sont permutables si, et seulement si :

$$\Omega_1 = \Omega_2 \quad \text{ou} \quad k_1 = 1 \quad \text{ou} \quad k_2 = 1\ .$$

4 Étude de similitudes quelconques

1 Vrai-faux

28 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude directe.

2° Une similitude ayant trois points fixes distincts deux à deux est $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

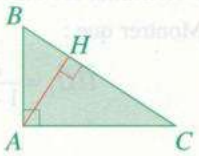
3° Une similitude, autre que $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, ne peut avoir quatre points fixes.

4° Une similitude ne peut pas transformer un triangle ayant un angle de 30° en un triangle ayant un angle de 60°.

5° ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A.

a) Il existe une similitude indirecte qui transforme A en H, B en A et C en B.

b) Il existe une similitude indirecte qui transforme A en H, B en A et C en C.



2 Similitude indirecte transformant A et B en A' et B'

29 **Unicité de la similitude indirecte S qui transforme A en A' et B en B' avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$**

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. A, B, A' et B' sont quatre points du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$, tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Soit S la similitude indirecte d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec a complexe non nul et b complexe.

1° Déterminer a et b tels que :

$$S(A) = A' \quad \text{et} \quad S(B) = B'.$$

2° En déduire l'unicité de S.

3° Déterminer l'expression complexe de S dans les cas suivants :

a) $z_A = \mathrm{i}$; $z_{A'} = 2 - 3\mathrm{i}$; $z_B = 1$; $z_{B'} = 2 - \mathrm{i}$.

b) $z_A = \mathrm{i}$; $z_{A'} = 1 - 3\mathrm{i}$; $z_B = 1 - \mathrm{i}$; $z_{B'} = 3 - 4\mathrm{i}$.

c) $z_A = 2$; $z_{A'} = -3 + \mathrm{i}$; $z_B = 1 - \mathrm{i}$; $z_{B'} = -3 - 3\mathrm{i}$.

Dans chaque cas, calculer le rapport de S.

30 ★ Dans le plan, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives :

$$2 + \mathrm{i}, \quad 1, \quad -2 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad -3 + 2\mathrm{i}.$$

a) Soit f une similitude indirecte d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe.

Déterminer a et b pour que :

$$f(A) = A' \quad \text{et} \quad f(B) = B'.$$

Quel est le rapport de f ?

b) Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

c) Montrer que $f \circ f$ est une translation dont on déterminera le vecteur $\vec{w}$.

d) Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par f.

Montrer que le milieu I de $[MM']$ appartient à la droite Δ d'équation $y = 1$.

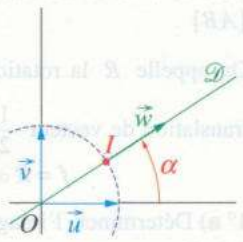
e) Déterminer l'expression complexe de la symétrie axiale d'axe Δ.

f) Vérifier que $f = t_{\frac{1}{2}\vec{w}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$.

3 Expression complexe d'une symétrie axiale

31 ★★ Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1° Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par l'origine O du repère et de vecteur directeur $\vec{w}$. On désigne par α une mesure de $(\vec{u},\vec{w})$.



a) Montrer que le point I d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ appartient à $\mathscr{D}$.

b) $S_{\mathscr{D}}$ est une similitude indirecte de rapport 1, donc son expression complexe est de la forme :

$$z' = a\bar{z} + b,$$

avec a complexe de module 1 et b complexe.

En exprimant que O et I sont des points fixes de $S_{\mathscr{D}}$, montrer que $a = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ et $b = 0$.

L'expression complexe de la symétrie axiale $S_{\mathscr{D}}$ d'axe $\mathscr{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que α soit une mesure de $(\vec{u},\vec{w})$ est :

$$z' = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\bar{z}.$$

c) Réciproquement, soit a un complexe de module 1 et d'argument β et f la similitude d'expression complexe $z' = a\bar{z}$. Montrer que f est la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel qu'une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$ est $\frac{1}{2}\beta$.

> Si a est un complexe de module 1, la similitude d'expression complexe $z' = a\bar{z}$ est la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $\frac{1}{2}\arg a$ soit une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$.

2° Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par le point $A(z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que α soit une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$.

a) Montrer que le point I d'affixe $z_A + e^{i\alpha}$ appartient à $\mathscr{D}$.

b) L'expression complexe de $S_{\mathscr{D}}$ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, avec a complexe de module 1 et b complexe.

En exprimant que A et I sont des points fixes de $S_{\mathscr{D}}$, montrer que :

$$a = e^{2i\alpha} \quad \text{et} \quad b = z_A - e^{2i\alpha}\bar{z}_A .$$

> L'expression complexe de la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que α soit une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$ est de la forme :
> $$z' = e^{2i\alpha}\bar{z} + b .$$
> Pour trouver le complexe b on exprime que A est un point fixe de $S_{\mathscr{D}}$.

c) Montrer que l'expression complexe de la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est $z' = i\bar{z} - 1 + i$.

d) Soit f la transformation du plan d'expression complexe $z' = i\bar{z} + 2i$.

Chercher l'ensemble des points fixes de f.

En déduire que, tout en ayant une expression complexe du type $z' = e^{2i\alpha}\bar{z} + b$, avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $b = 2i$, f n'est pas une symétrie axiale.

Montrer que f est la composée $t_{\vec{v}} \circ S_{\mathscr{D}}$, où $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe $1 + i$ et $S_{\mathscr{D}}$ la symétrie axiale du **c)**.

Cette composée est-elle permutable ?

32 **Application de l'*Exercice* 31**

1° $\mathscr{D}$ est une droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

Déterminer l'expression complexe de $S_{\mathscr{D}}$ dans les cas suivants :

a) $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{8}\ (2\pi)$; **b)** $(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$;

c) $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$; **d)** $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

2° Déterminer l'axe $\mathscr{D}$ des symétries axiales d'expressions complexes :

a) $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$; **b)** $z' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\bar{z}$;

c) $z' = -i\bar{z}$; **d)** $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{z}$.

3° Déterminer les expressions complexes des symétries axiales d'axes $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

a) $\mathscr{D}$ a pour équation $y = -x + 1$.

b) $\mathscr{D}$ a pour équation $x - y\sqrt{3} + 2 = 0$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

33 ★ Soit f la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + \sqrt{3} - i(2 + \sqrt{3}) .$$

1° On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.

Montrer que f possède un point invariant unique Ω dont on calculera l'affixe ω.

2° Quel est le rapport k de f ?

Déterminer l'expression complexe de l'homothétie $h_{\Omega, k}$ de centre Ω et de rapport k (rapport de f).

3° a) Déterminer un argument β de $1 + i\sqrt{3}$.

b) Soit I le point tel que $\overrightarrow{\Omega I}$ ait pour affixe $e^{i\frac{\beta}{2}}$.

On désigne par Δ la droite (ΩI).

Déterminer l'expression complexe de S_Δ (on posera $z' = a\bar{z} + b$ et on écrira que Ω et I sont fixes pour S_Δ).

4° Vérifier que :

$$f = S_\Delta \circ h_{\Omega, k} = h_{\Omega, k} \circ S_\Delta .$$

4 Composition de symétries axiales

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

34 On considère les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = x + 1$.

a) Déterminer les expressions complexes des symétries axiales S_Δ et $S_{\Delta'}$.

b) Déterminer l'expression complexe de $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$.

Montrer que $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ dont on déterminera l'affixe.

Vérifier que $\vec{w}$ est un vecteur normal à Δ et Δ' et que $t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$ transforme Δ en Δ'.

35 On considère les applications f et g du plan dans lui-même d'expressions complexes respectives :

$$z' = -\bar{z} \quad \text{et} \quad z' = \mathrm{i}\bar{z}\ .$$

a) Montrer que f et g sont des symétries axiales dont on déterminera les axes respectifs Δ et Δ'.

b) Déterminer l'expression complexe de $g \circ f$. Montrer que $g \circ f$ est une rotation de centre O, point commun de Δ et Δ' et d'angle β, dont on déterminera une mesure.

c) Vérifier que la rotation de centre O et d'angle $\frac{1}{2}\beta$ transforme Δ en Δ'.

5 Propriétés géométriques des similitudes

1 Vrai-faux

36 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Une similitude transforme un triangle équilatéral en un triangle isocèle.

2° Une similitude qui transforme A en B et B en A admet le milieu de $[AB]$ comme point fixe.

3° Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables et ont le même centre de gravité G.

2 Construction d'images

37 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B.
Une similitude f transforme A en B et B en C.

a) Quel est son rapport ?

b) Construire les images possibles de C par f.

38 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 30°$. Une similitude f transforme A en B et C en A.

a) Montrer que f est une isométrie.

b) Construire les images possibles B_1', B_2' de B par f.

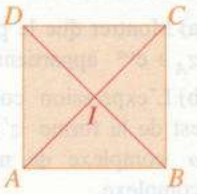
c) Quelle est la nature du triangle $BB_1'B_2'$?

39 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A.
Une similitude f transforme A en B et B en C.

a) Quel est son rapport ?

b) Construire les images possibles C_1' et C_2' de C par f.
Quel est le milieu de $[C_1'C_2']$?

40 $ABCD$ est un carré direct de côté 1 et de centre I.



Une similitude directe f transforme B en C et a pour point fixe A.

a) Quel est son rapport ?

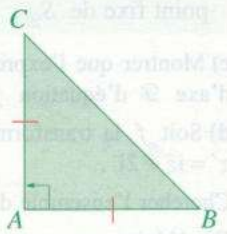
b) Déterminer l'image de I par f.

c) Construire les images de C et de D par f.

d) Déterminer l'expression complexe de f relativement au repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Dans les exercices 41 *à* 43, *on note* $S_{\Omega,\,k,\,\alpha}$ *la similitude directe de centre* Ω, *de rapport* k *et d'angle* α. *Construire les images de la figure* $\mathscr{F}$ *par les similitudes données.*

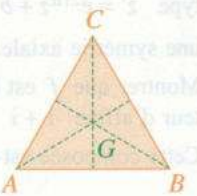
41 $\mathscr{F}$ est un triangle isocèle rectangle direct ABC de sommet A.



a) $S_{A,\,2,\,\frac{\pi}{2}}$; **b)** $S_{B,\,\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{\pi}{4}}$;

c) $S_{C,\,1,\,-\frac{\pi}{4}}$; **d)** $S_{A,\,2,\,\pi}$.

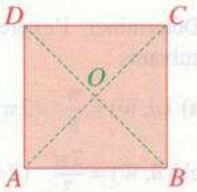
42 $\mathscr{F}$ est un triangle équilatéral direct ABC de centre de gravité G.



a) $S_{B,\,2,\,-\frac{\pi}{3}}$; **b)** $S_{G,\,1,\,-\frac{2\pi}{3}}$;

c) $S_{G,\,\frac{1}{2},\,-\frac{\pi}{3}}$; **d)** $S_{G,\,\frac{1}{2},\,\pi}$.

43 $\mathscr{F}$ est un carré direct $ABCD$ de centre O.



a) $S_{A,\,\frac{1}{2},\,\frac{\pi}{2}}$; **b)** $S_{A,\,\sqrt{2},\,\frac{\pi}{4}}$;

c) $S_{A,\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{\pi}{4}}$; **d)** $S_{O,\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{\pi}{4}}$.

3 Études de configurations

44 ★ Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 5 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$\mathrm{i}\,,\quad \sqrt{2}\quad \text{et}\quad \sqrt{2}+\mathrm{i}\,.$$

On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[AC]$ et $[BC]$ et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B. Faire une figure.

1° a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Donner l'expression complexe de s.

c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de s. Représenter Ω.

d) Quelle est l'image par s du rectangle $AOBC$?

2° On considère la transformation $s^2 = s \circ s$.

a) Quelles sont les images des points O, B et A par s^2 ?

b) Montrer que s^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.

(D'après BAC)

45 Soit ABC un triangle direct.

Sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC, on construit les triangles rectangles isocèles ABI et ACJ tels que :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

On désigne par O le milieu de $[BC]$ et par K le symétrique de B par rapport au point A.

Le but du problème est de montrer que $IJ = 2AO$ et que les droites (OA) et (IJ) sont perpendiculaires.

1° Première méthode

a) Quelles sont les images respectives de O et A par l'homothétie h de centre B et de rapport 2 ?

b) Déterminer la rotation R de centre A qui transforme C en J et K en I.

c) En déduire la similitude directe S qui transforme O en J et A en I. Déterminer son rapport et son angle.

d) Conclure.

2° Seconde méthode

On munit le plan du repère orthonormal $(A\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

On désigne par b et c les affixes des points B et C.

a) Calculer les affixes de O, I et J.

b) Quelle relation lie les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{IJ}$?

c) Conclure.

3° Pour aller plus loin

a) La droite (AO) coupe (IJ) en O'.

Montrer que le centre Ω de la similitude S du **1°** est le point commun, autre que O', des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de diamètres respectifs $[IA]$ et $[OJ]$.

b) Les notations étant celles du **2°**, déterminer l'expression complexe de la similitude directe S et, en fonction de b, l'affixe du centre Ω.

46 ★ Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit quatre points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d. On considère un complexe α non nul de module r et d'argument θ.

La similitude directe $S_{A,\,r,\,\theta}$ transforme B en Q.

La similitude directe $S_{B,\,r,\,\theta}$ transforme C en M.

La similitude directe $S_{C,\,r,\,\theta}$ transforme D en N.

La similitude directe $S_{D,\,r,\,\theta}$ transforme A en P.

Soit q, m, n et p les affixes des points Q, M, N et P.

1° Déterminer q en fonction de α, a et b.

De même, calculer m en fonction de α, b et c ; n en fonction de α, c et d ; et p en fonction de α, a et d.

2° Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $ABCD$ est un parallélogramme.

3° On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que :

$$\alpha = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,.$$

Montrer que $MNPQ$ est un carré et faire une figure dans ce cas.

47 ★★ Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}z + \frac{1-3\mathrm{i}}{2}\,.$$

1° Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.

2° Soit M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3\mathrm{i}$.

Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par :

$$M_{n+1} = f(M_n)\,.$$

a) En utilisant la question **1°**, calculer ΩM_n en fonction de n.

b) Placer le point M_0 et construire M_1, M_2, M_3 et M_4.

c) À partir de quel rang n_0 a-t-on la proposition :

« Pour tout $n \geqslant n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0{,}05$. »

3° a) Calculer M_0M_1.

b) Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_nM_{n+1}$.

Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) On note $\ell_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$.

Calculer ℓ_n en fonction de n ; en déduire la limite de la suite (ℓ_n) en $+\infty$.

4° Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points M_0, M_1, M_2, ..., M_n .

Montrer que, pour tout $n > 0$, on a $\Omega G_n \leqslant \dfrac{16}{n+1}$.

En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(D'après BAC)

4 Études de lieux géométriques

48 Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et M un point de la droite (CD) .

La perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe (BC) en N .

On désigne par I le milieu de $[MN]$.

1° Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image par R de la droite (CD) .

En déduire l'image de M par R et la nature du triangle AMN .

2° Déterminer la similitude directe f, de centre A, qui transforme M en I .

Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit la droite (CD) ?

49 ★ Soit O un point du plan et ℓ une longueur non nulle.

À tout point M du plan, distinct de O, on associe son image M' par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1° On suppose $MM' = \ell$.

Calculer OM en fonction de ℓ .

En déduire que M appartient à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on précisera le rayon.

2° Soit M un point de $\mathscr{C}$. Montrer que $MM' = \ell$.

3° Des deux questions précédentes, déduire le lieu géométrique des points M tels que $MM' = \ell$.

50 ★★ Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle AHH' tel que $(\overrightarrow{HH'}, \overrightarrow{HA}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite (HH') , M un point quelconque de $\mathscr{D}$ et M' le point tel que le triangle AMM' soit rectangle isocèle et vérifie $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

1° Faire une figure. Préciser la similitude directe S de centre A qui transforme M en M' .

2° Montrer que l'ensemble (E) des points M' , quand M décrit $\mathscr{D}$, est la droite perpendiculaire en H' à (AH') .

3° Soit J le milieu de $[MM']$ et J_0 le milieu de $[HH']$.

a) Calculer $\dfrac{AJ}{AM}$.

b) Montrer que les triangles AHJ_0 et AMJ sont directement semblables.

θ_0 désignant une mesure de $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AJ})$, calculer $\cos\theta_0$ et $\sin\theta_0$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points J lorsque M décrit $\mathscr{D}$.

Représenter $\mathscr{F}$ sur la figure.

51 ★ Soit O un point du plan et α un réel distinct de $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

À tout point M du plan distinct de O, on associe son image M' par la rotation $R_{O,\alpha}$.

On désigne par H le milieu de $[MM']$.

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et Δ la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par O .

1° On suppose que (MM') est parallèle à $\mathscr{D}$; exprimer $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM})$ en fonction de α .

En déduire que M appartient à la droite Δ' image de Δ par la rotation $R_{O,-\frac{\alpha}{2}}$.

2° Réciproquement, soit M un point de Δ' , distinct de O .

Montrer que (MM') est parallèle à $\mathscr{D}$.

3° Des deux questions précédentes, déduire l'ensemble des points M du plan tels que (MM') soit parallèle à $\mathscr{D}$.

5 Problèmes de construction

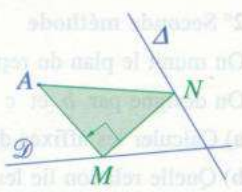
52 Soit A un point et $\mathscr{D}$ et Δ deux droites du plan ne passant pas par A .

On veut construire un point M de $\mathscr{D}$ et un point N de Δ, tels que AMN soit rectangle isocèle direct de sommet M .

1° On suppose qu'un tel triangle AMN existe.

Déterminer la similitude directe S de centre A qui transforme le point M de $\mathscr{D}$ en N .

Montrer que N appartient à l'image $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{D}$ par S .



2° En déduire la construction de N puis celle de M.

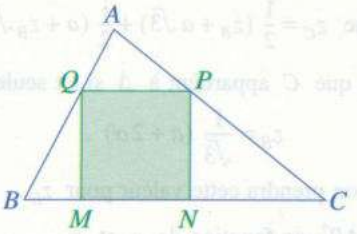
3° Discuter.

53 Reprendre les questions de l'*Exercice* 52 avec le triangle AMN rectangle isocèle direct de sommet N.



54 Soit ABC un triangle.

On veut construire un carré $MNPQ$ tel que M et N appartiennent à $[BC]$, P à $[AC]$ et Q à $[AB]$.



Si $MNPQ$ existe, quelle est son image par l'homothétie de centre A qui transforme Q en B ?

En déduire la construction du carré $MNPQ$.

55 Soit ABC un triangle et I un point du segment $[AB]$.

Construire un point J sur la droite (BC) et un point K sur la droite (AC) tel que le triangle IJK soit équilatéral.

6 Problèmes

56 ★ **1°** Soit a un complexe non nul et b un complexe.

Montrer que l'équation $z = a\bar{z} + b$ possède une solution unique ω dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $|a| \neq 1$.

On pourra poser $a = \alpha + i\alpha'$; $b = \beta + i\beta'$ et $z = x + iy$, avec α, α', β, β', x, y réels.

2° Soit S la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = a\bar{z} + b,$$

avec a complexe non nul et b complexe.

Déduire du **1°** que S a un point fixe unique Ω si, et seulement si, son rapport est différent de 1.

On suppose dans la suite, cette condition réalisée et on désigne par w l'affixe de Ω.

3° Déterminer l'expression complexe de l'homothétie $h_{\Omega,|a|}$.

4° Soit γ un argument de a.

On considère le point I d'affixe $w + e^{i\frac{\gamma}{2}}$ et on désigne par Δ la droite (ΩI).

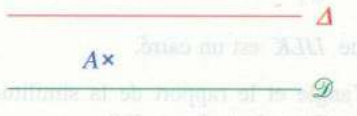
Montrer que l'expression complexe de la symétrie axiale S_Δ d'axe Δ est $z' = e^{i\gamma}\bar{z} + w - e^{i\gamma}\bar{w}$.

5° Vérifier que $S = h_{\Omega,|a|} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{\Omega,|a|}$.

Toute similitude indirecte S de rapport k **différent de 1** possède un point fixe unique Ω et est la composée permutable de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et d'une symétrie axiale d'axe Δ passant par Ω.
Ω est le centre de S et Δ est l'axe de S.

57 ★ **A. Construction d'un triangle équilatéral**

On considère la figure suivante, où Δ et $\mathscr{D}$ sont deux droites parallèles et A un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'elles.



On se propose de construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartienne à $\mathscr{D}$ et C à Δ.

Dans toute la suite, on note R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1° Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par R.

Montrer que $\mathscr{D}'$ coupe Δ en un point C.

2° Soit $B = R^{-1}(C)$.

Montrer que ABC répond au problème posé.

3° Construire $\mathscr{D}'$ et placer B et C.

B. Calcul de l'aire de ce triangle équilatéral

Soit O le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et $\vec{v}$ est choisi de sorte que le point A ait pour affixe $a \times i$, avec a réel positif.

On note α la distance du point A à la droite Δ.

Soit B un point de $\mathscr{D}$ d'affixe z_B (z_B est donc réel).

On appelle z_C l'affixe du point C image de B par R.

1° Montrer que $z_C = \frac{1}{2}(z_B + a\sqrt{3}) + \frac{i}{2}(a + z_B\sqrt{3})$.

2° En déduire que C appartient à Δ si, et seulement si :

$$z_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha) .$$

Dans la suite on prendra cette valeur pour z_B .

3° Exprimer AB^2 en fonction de a et α .

En déduire que l'aire du triangle équilatéral ABC est :

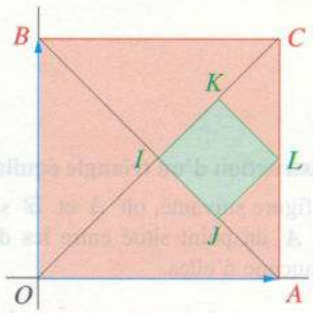
$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + a\alpha + \alpha^2) .$$

(D'après BAC)

58 ★ Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O .

Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i .

I est le centre du carré $OACB$, J le milieu de $[AI]$, K le milieu de $[CI]$ et L le milieu de $[AC]$.



1° Montrer que $IJLK$ est un carré.

2° Quel est l'angle et le rapport de la similitude directe S qui transforme O en I et B en K ?

Calculer l'affixe du centre Ω de S .

Quelle est l'image du carré $OBCA$ par S ?

3° Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte S' qui transforme O en I et B en J .

Déterminer le rapport de S' .

Montrer que S' possède un unique point invariant Ω' dont on calculera l'affixe.

Quelle est l'image du carré $OBCA$ par S' ?

4° Montrer que $S' = S_{(IL)} \circ S$, où $S_{(IL)}$ est la symétrie axiale d'axe (IL) .

5° Vérifier que C , Ω et Ω' sont alignés.

59 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; l'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont O est le centre du cercle circonscrit, M le milieu de $[BC]$, N celui de $[CA]$ et P celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M , N et P sont notées m , n et p .

1° Dans cette question $m = -1 - 3i$ et $n = 2$.

Construire les triangles MNP et ABC .

2° On considère la transformation f du plan d'expression complexe $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p)$.

Quelle est la nature de f et ses éléments caractéristiques ?

3° a , b et c désignent les affixes respectives de A , B et C .

a) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que $a = n + p - m$.

b) Exprimer de manière analogue b et c en fonction de m , n et p .

4° On pose $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

a) Montrer que les affixes respectives a' , b' et c' de A' , B' et C' vérifient :

$a' = (1 + i)m$, $b' = (1 + i)n$ et $c' = (1 + i)p$.

b) En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que A' appartient à la droite (BC) .

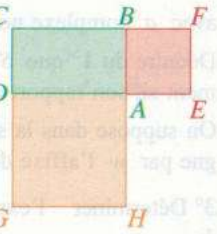
c) Montrer de même que B' appartient à (AC) et que C' appartient à (AB) .

5° Montrer que MNP et $A'B'C'$ sont directement semblables et déterminer la similitude directe qui transforme MNP en $A'B'C'$.

6° Compléter avec A' , B' et C' la figure réalisée en **1°**.

(D'après BAC)

60 ★ Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de sens direct, $AEFB$ et $ADGH$ sont des carrés de sens direct.



1° Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC) , (EG) et (FH) sont concourantes.

Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E et l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H .

a) Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.

b) Déterminer l'image de la droite (CF) par $h_1 \circ h_2$.

c) Justifier l'égalité $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

En déduire que la droite (AC) passe aussi par I .

2° On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD . On note O le milieu de $[EH]$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et conclure.

3° Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.

On pose $AB = 1$ et $AD = k$ $(k > 0)$.

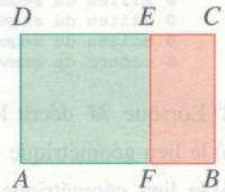
a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO) par S.

c) En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de S.

(D'après BAC)

61 Dans la figure ci-contre $AFED$ est un carré direct de côté 1 et $ABCD$ est un rectangle.



On pose $\ell = AB$ $(\ell > 1)$.

Soit f la similitude directe qui transforme A en B et B en C.

1° **a)** Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Montrer que f transforme C en E si, et seulement si :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'or).}$$

Dans ces conditions, montrer que f transforme D en F.

Dans la suite on suppose que $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2° Soit Ω le centre de f.

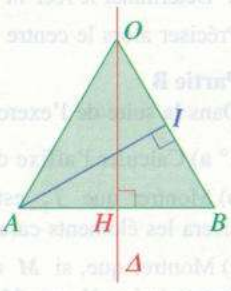
a) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie de centre Ω.

b) Déterminer $f \circ f(A)$ et $f \circ f(B)$.

En déduire le centre Ω de f.

62 ★ Soit ABO un triangle équilatéral du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \dfrac{\pi}{3}$ (2π).

On note H le milieu de $[AB]$, I celui de $[OB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.



Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O transformant le point A en I.

M désigne un point quelconque du plan et M' son image par $\mathcal{S}$.

1° **a)** Déterminer l'angle et le rapport de $\mathcal{S}$.

b) Construire le point C du plan tel que $\mathcal{S}(C) = A$.

On justifiera soigneusement cette construction.

c) Exprimer AM' en fonction de CM.

2° On note M'' l'image du point M par la réflexion d'axe Δ. On se propose de déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que A soit équidistant de M' et M''.

a) Montrer que $AM'' = BM$.

b) Montrer que M appartient à Γ si, et seulement si :

$$CM = 2BM.$$

c) Montrer que $CM = 2BM$ si, et seulement si :

$$(\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{BM}) = 0.$$

d) En déduire la nature de Γ, puis construire Γ.

63 ★★ **Le parcours de l'indécis**

I. On considère un triangle ABC.

On désigne par h_A, h_B et h_C les homothéties de centres respectifs A, B et C et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

1° Montrer que $h_C \circ h_B$ est une homothétie dont le centre A' vérifie $\overrightarrow{CA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Quel est le rapport de cette homothétie ?

2° Déterminer de même les centres respectifs B' et C' des homothéties $h_A \circ h_C$ et $h_B \circ h_A$.

3° On pose :

$f = h_C \circ h_B \circ h_A$, $g = h_A \circ h_C \circ h_B$ et $h = h_B \circ h_A \circ h_C$.

a) Montrer que f est une homothétie dont le centre K appartient à (AA') et (CC').

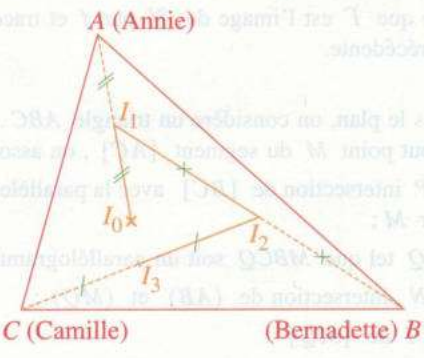
Quel est le rapport de f ?

b) Déterminer de même les centres respectifs L et M des homothéties g et h.

II. Application

Isidore a trois amies Annie, Bernadette et Camille disposées comme sur la figure ci-dessous.

Isidore se dirige vers Annie ; à mi-chemin, il change d'avis et se dirige vers Bernadette ; à mi-chemin il change de nouveau d'avis et se dirige vers Camille : à mi-chemin il change encore d'avis et se dirige vers Annie et ainsi de suite.



On désigne par I_0 la position initiale d'Isidore, I_1 sa position lorsqu'il change pour la première fois d'avis, I_2 sa position lorsqu'il change pour la deuxième fois d'avis et ainsi de suite.

1° Montrer que $I_3 = f(I_0)$, $I_4 = g(I_1)$ et $I_5 = h(I_2)$.

2° Soit n un entier naturel.

On pose $f^{(0)} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, $f^{(1)} = f$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois } f}.$$

Montrer que $\begin{cases} I_{3n} = f^{(n)}(I_0) \\ I_{3n+1} = g^{(n)}(I_1) \\ I_{3n+2} = h^{(n)}(I_2) \end{cases}$.

3° En déduire que $\begin{cases} \overrightarrow{KI}_{3n} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{KI}_0 \\ \overrightarrow{LI}_{3n+1} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{LI}_1 \\ \overrightarrow{MI}_{3n+2} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{MI}_2 \end{cases}$.

Quelles sont les positions limites des points I_{3n}, I_{3n+1} et I_{3n+2} lorsque n tend vers $+\infty$?

64 La plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On appelle Γ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :

$$x^2 - y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}xy + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0.$$

1° On considère la transformation f de $\mathscr{P}$ en $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels. Calculer x et y en fonction de x' et y'.

2° On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ d'affixe z vérifiant $\mathrm{Im}(z^2) = 2$. Définir $\mathscr{H}$ et le tracer.

3° Démontrer que $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{H}$ si, et seulement si, $M'(x'\,;y')$ appartient à Γ.

En déduire que Γ est l'image de $\mathscr{H}$ par f et tracer Γ sur la figure précédente.

65 Dans le plan, on considère un triangle ABC.
À tout point M du segment $[AC]$, on associe :

- le point P intersection de $[BC]$ avec la parallèle à (AB) passant par M ;
- le point Q tel que $MBCQ$ soit un parallélogramme ;
- le point N, intersection de (AB) et (MQ) ;
- le milieu I de $[MQ]$;
- le milieu J de $[NP]$.

On désigne par O le milieu de $[BC]$ et par D celui de $[AB]$.

1° Réaliser la figure à l'aide du logiciel GeoplanW.
(*Un conseil* : faire apparaître en rouge les éléments fixes, c'est-à-dire indépendants de la position de M sur $[AB]$, et dans d'autres couleurs les éléments qui dépendent de la position de M.)

```
----- OBJETS CONSTRUITS -----
A point libre
B point libre
C point libre
t polygone ABC
M point libre sur le segment [AC]
d droite parallèle à (AB) passant par M
P point d'intersection des droites d et (BC)
Q image de C par la translation de vecteur BM
p polygone MBCQ
N point d'intersection des droites (AB) et (MQ)
I milieu du segment [MQ]
J milieu du segment [NP]
O milieu du segment [BC]
D milieu du segment [AB]
G centre de gravité du triangle CMQ
```

2° Lorsque M décrit le segment $[AC]$, déterminer :

a) le lieu géométrique du point I ;

b) le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle CMQ ;

c) le lieu géométrique du point J.

On pourra conjecturer les résultats en faisant apparaître ces lieux sur la figure GeoplanW : pour cela, aller dans le menu Afficher/Sélection/trace, sélectionner les points I, G et J, puis cliquer sur le bouton **T** du menu et faire bouger le point M à l'aide de la souris.

66 ★ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + \mathrm{i})z + m - 1 - \mathrm{i}.$$

Partie A

1° Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

2° Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation.
Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $m = 1$.

1° a) Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_1.

b) Montrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

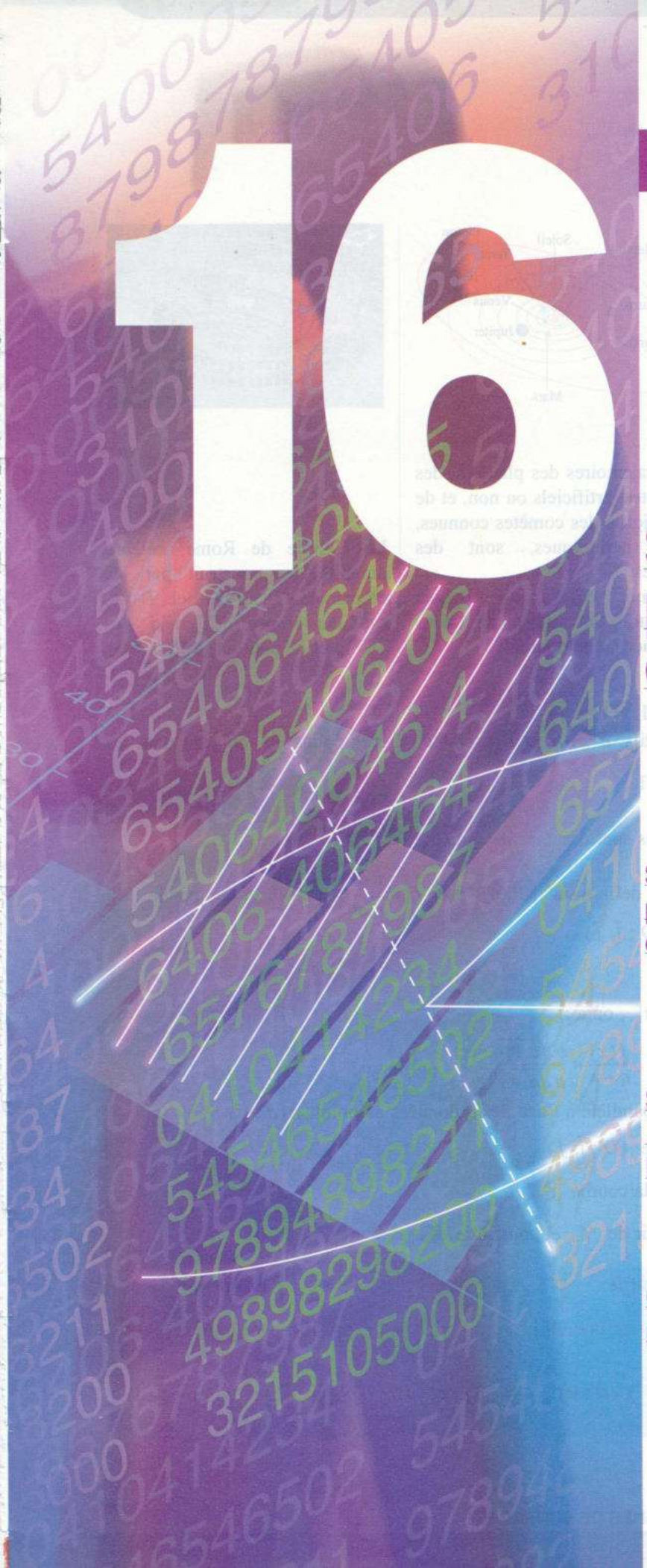
c) Montrer que, si M est distinct de Ω, alors $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

2° On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant $M_0 = O$, $M_1 = T(M_0)$, ..., et, pour tout entier naturel n non nul, $M_n = T(M_{n-1})$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4.

b) Pour tout entier n, on pose $d_n = \Omega M_n$.

Démontrer que la suite (d_n) est géométrique.
Converge-t-elle ?



CHAPITRE

16

Sections planes de surfaces

Section par des plans parallèles aux plans de coordonnées p. 440

- reconnaître les intersections d'un plan avec un cylindre, avec un cône

Surfaces d'équation $z = f(x ; y)$

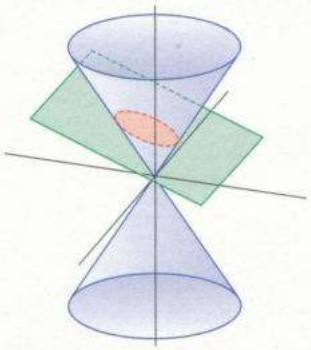
Lignes de niveau p. 440

- déterminer les lignes de niveau d'une surface

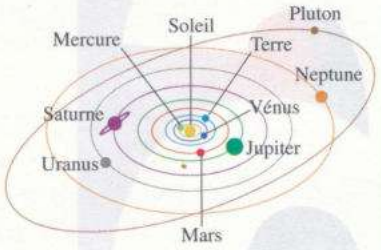
Quelques surfaces particulières p. 441

- identifier des surfaces de base

1 Ellipses



MÉNECHME (mathématicien grec, 375-325 avant J.-C.) est l'auteur de travaux sur les **coniques** (courbes de MÉNECHME) qu'il définit comme l'**intersection d'un cône et d'un plan coupant l'axe du cône**.



Les trajectoires des planètes, des satellites, artificiels ou non, et de la majorité des comètes connues, dites périodiques, sont des ellipses.
Le mot *ellipse* est, depuis KEPLER, un substantif pour désigner ladite courbe.



© G.A. Rossi/Altitude

Le Colisée de Rome, célèbre amphithéâtre construit par les empereurs VESPASIEN et TITUS, est une ellipse de grand axe 187 m et de petit axe 155 m.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On considère deux réels strictement positifs a et b et l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

1 Démontrer que les axes de coordonnées sont des axes de symétrie de $\mathscr{E}$.

2 On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;a]$ par $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a) Étudier les variations de f.

b) Vérifier que, pour x élément de $[0\,;a[$, on a :

$$\frac{f(x)}{a-x}=\frac{b\sqrt{a+x}}{a\sqrt{a-x}}.$$

En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point $A(a\,;0)$.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

3 Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est une partie de la courbe $\mathscr{E}$.

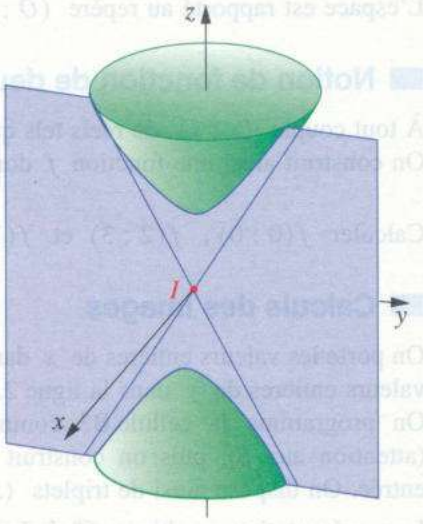
4 Indiquer comment construire $\mathscr{E}$ à partir de $\mathscr{C}_f$ et construire $\mathscr{E}$.

a et b sont deux réels strictement positifs.
La courbe $\mathscr{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse qui admet les axes du repère comme axes de symétrie.
Les points de coordonnées $(a\,;0)$, $(-a\,;0)$, $(0\,;b)$ et $(0\,;-b)$ sont les sommets de l'ellipse.

2 Intersection d'un cône avec un plan parallèle au plan (yOz)

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le cône $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ et le plan $\mathscr{P}_a$ d'équation $x=a$.



1 Démontrer que le plan $\mathscr{P}_0$ coupe le cône $\mathscr{C}$ suivant deux droites passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{u}(0\,;1\,;\sqrt{3})$ et $\vec{v}(0\,;1\,;-\sqrt{3})$.

2 Lorsqu'ils existent, on appelle $\mathscr{H}_a$ l'ensemble des points d'intersection du plan $\mathscr{P}_a$ et du cône $\mathscr{C}$.

a) Vérifier que $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathscr{H}_a$ si, et seulement si, on a $\begin{cases} x=a \\ \frac{1}{3}z^2-y^2=a^2 \end{cases}$.

b) Soit I_a le point de coordonnées $(a\,;0\,;0)$. Vérifier que $(I_a\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan $\mathscr{P}_a$.

c) Soit M un point du plan $\mathscr{P}_a$ qui a pour coordonnées $(Y\,;Z)$ dans le repère $(I_a\,;\vec{u},\vec{v})$ et $(a\,;y\,;z)$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

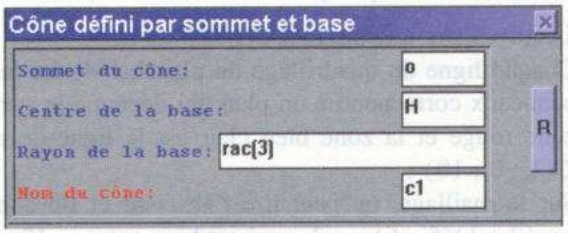
Démontrer que $\begin{cases} y=Y+Z \\ z=\sqrt{3}(Y-Z) \end{cases}$.

d) Déterminer une équation de la courbe $\mathscr{H}_a$ dans le repère $(I_a\,;\vec{u},\vec{v})$.
En déduire que $\mathscr{H}_a$ est une hyperbole qui admet les droites passant par I_a et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme asymptotes.

Par intersection d'un cône de révolution d'axe (Oz) avec les plans strictement parallèles au plan (yOz), on obtient une famille d'hyperboles centrées sur (Ox) et ayant des asymptotes deux à deux parallèles.

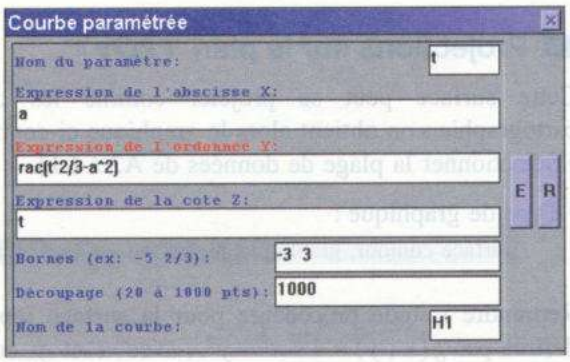
Construction de la figure sous GEOSPACW

• Construire les points H et H' de coordonnées $(0\,;0\,;3)$ et $(0\,;0\,;-3)$ puis les cônes $c1$ et $c2$ (en fait le logiciel ne construit qu'un demi-cône à la fois).



• Créer la variable numérique a.

• Créer l'intersection du plan $\mathscr{P}_a$ avec les plans d'équations respectives $z=-3$, $z=3$, $y=3$ et $y=-3$ pour visualiser le plan $\mathscr{P}_a$.



• Créer la courbe H en la paramétrant (attention, il y a deux branches).

• Le pilotage de a au clavier déplace le plan $\mathscr{P}_a$.

activités

3 Surface avec un tableur

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Notion de fonction de deux variables

À tout couple $(x\,;y)$ de réels tels que $x\in[0\,;8]$ et $y\in[0\,;10]$, on associe le réel $(x+1)(5-y)$.
On construit ainsi une fonction f dont l'image du couple $(x\,;y)$ est le réel noté :

$$f(x\,;y)=(x+1)(5-y)\,.$$

Calculer $f(0\,;0)$, $f(2\,;3)$ et $f(1\,;5)$. Déterminer les couples $(x\,;y)$ vérifiant $f(x\,;y)=0$.

Calculs des images

On porte les valeurs entières de x dans la colonne A et les valeurs entières de y dans la ligne 2.
On programme la cellule B3 comme indiqué ci-contre (attention aux \$), puis on construit le tableau à double entrée. On dispose ainsi de triplets $(x\,;y\,;f(x\,;y))$.

SOMME | =($A3+1)*(5-B$2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Surface : z = (x + 1) (5 - y)									
2		0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0	=($A	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
4	1	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6
5	2	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9
6	3	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12

La représentation graphique $\mathcal{S}$ de la fonction f à deux variables est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y\,;f(x\,;y))$, avec $x\in[0\,;8]$ et $y\in[0\,;10]$.

Visualisation de $\mathcal{S}$

• Sélectionner la plage de données de A2 à L11.

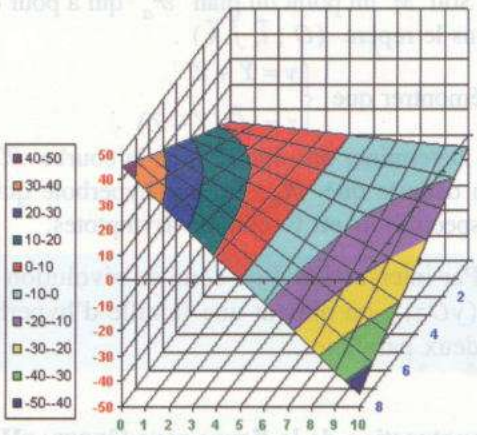
• Type de graphique : surface 3D, série en lignes.

• Préciser ensuite les formats des axes. Choisir :

☐ L'axe des ordonnées (Z) coupe l'axe des abscisses

pour que l'axe des cotes débute à 0.

• Améliorer le dessin en utilisant les possibilités du tableur utilisé. On remarque que l'ensemble $\mathcal{S}$ est une surface.



Lectures sur une surface 3D

Chaque ligne du quadrillage du plancher donne le maillage de la surface et chaque ligne horizontale des panneaux correspond à un plan qui découpe la surface selon une courbe de niveau. Ainsi la ligne entre la zone rouge et la zone bleu clair est la ligne de niveau zéro ; on lit $A(4\,;1\,;20)$, $B(4\,;9\,;-20)$ et $C(1\,;0\,;10)$.
Sur le maillage, on peut lire l'abscisse et l'ordonnée de D, et calculer la cote à l'aide de la fonction $z=(2+1)(5-6)=-3$, qui est bien entre -10 et 0 ; d'où $D(2\,;6\,;-3)$.

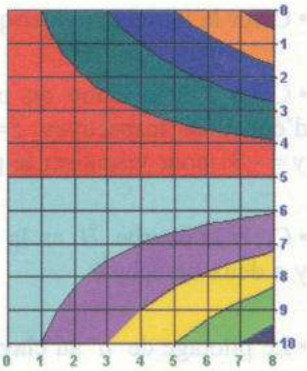
Projections sur le plan (xOy)

Cette surface peut se projeter comme les courbes de niveau en cartographie ; on obtient alors le graphique ci-contre.

• Sélectionner la plage de données de A2 à L11.

• Type de graphique :

surface contour, graphique en surface vu du dessus, série en colonnes.



Reprendre l'étude précédente pour la surface représentant la fonction g définie par $g(x\,;y)=4-x^2-y^2$, avec x et y compris entre 0 et 2.

4 Surface avec une calculatrice graphique

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

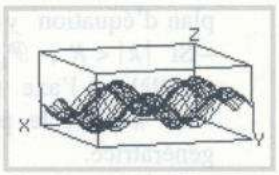
On considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient :

$$z = 4\sin x - 2\sin y\ .$$

$\mathscr{S}$ est la représentation graphique de la fonction de deux variables :

$$f : (x\,;y) \mapsto 4\sin x - 2\sin y\ .$$

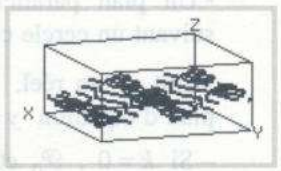
Visualisation de la surface



- Afficher la boîte de dialogue MODE et choisir **GRAPH : 5 : 3D**.
- Entrer l'équation cartésienne de la courbe à construire (Z1=).
- Visualiser la courbe.
- L'écran **WINDOW** permet de définir les bornes choisies pour X, Y et Z (on a ici $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-2\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ et $-6 \leqslant z \leqslant 6$ avec **Zoom ; 5: ZoomSqr**).



- On peut aussi modifier le point de vue (eyeθ, eyeφ, eyeψ) pour faire pivoter la figure dans l'espace ; essayer en utilisant les curseurs.



- En mode GRAPH, le mode FORMAT permet de choisir plusieurs modes de représentation. En particulier, on peut visualiser les coupes de la surface par des plans d'équations $z = \text{Cte}$ (CONTOUR LEVELS) (figure ci-contre).

Étude de cette surface

On a visualisé la partie de la surface $\mathscr{S}$ obtenue pour $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ et $-2\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, mais elle est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1 Calculer $f(\pi\,;\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

2 Démontrer que le point O est un centre de symétrie de $\mathscr{S}$.

3 Démontrer que $\mathscr{S}$ est invariante par la translation de vecteur $2n\pi\vec{i} + 2m\pi\vec{j}$ (n et m entiers relatifs).

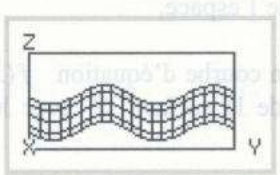
4 Déterminer deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ parallèles au plan d'équation $z = 0$, tels que la surface est contenue entièrement dans la bande d'espace limitée par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

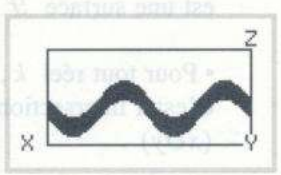
5 **a)** Déterminer une équation de l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $x = 0$.

b) Soit k un réel. La touche X permet de visualiser les intersections de $\mathscr{S}$ et des plans d'équations $x = k$.

Donner une équation cartésienne de ces courbes.

c) Même question pour les plans d'équations $y = k$.



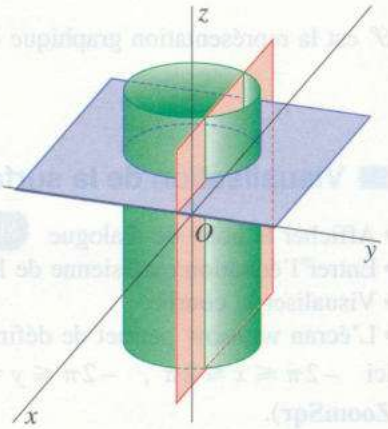


Dans ce chapitre, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Section par des plans parallèles aux plans de coordonnées

1.1 Cylindre

On appelle $\mathscr{C}$ le cylindre d'équation $x^2+y^2=R^2$.

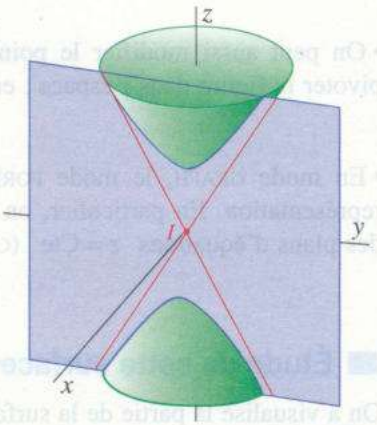


• Un plan parallèle au plan d'équation $z=0$ coupe $\mathscr{C}$ suivant un cercle centré sur (Oz) et de rayon R.

• Soit k un réel, $\mathscr{P}_k$ le plan d'équation $x=k$ et $\mathscr{Q}_k$ le plan d'équation $y=k$.
– Si $|k|<R$, $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{Q}_k$ coupent $\mathscr{C}$ suivant deux droites parallèles à l'axe (Oz).
– Si $k=R$, le plan est tangent au cylindre suivant une génératrice.
– Si $|k|>R$, $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{Q}_k$ ne coupent pas $\mathscr{C}$.

1.2 Cône

On appelle $\mathscr{C}$ le cône d'équation $x^2+y^2=a^2z^2$ (a réel non nul).



• Un plan parallèle au plan d'équation $z=0$ coupe $\mathscr{C}$ suivant un cercle centré sur l'axe (Oz).

• Soit k un réel, $\mathscr{P}_k$ le plan d'équation $x=k$ et $\mathscr{Q}_k$ le plan d'équation $y=k$.
– Si $k=0$, $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{Q}_0$ coupent $\mathscr{C}$ suivant deux génératrices.
– Si $k\neq 0$, $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{Q}_k$ coupent $\mathscr{C}$ suivant une hyperbole.

Voir Activité 2

2 Surfaces d'équation $z=f(x\,;y)$. Lignes de niveau

L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $z=f(x\,;y)$, où f est une fonction numérique des deux variables, x appartenant à un intervalle I et y à un intervalle J, est une surface $\mathscr{S}$ de l'espace.

• Pour tout réel k, la courbe d'équation $f(x\,;y)=k$ est **la ligne de niveau k** de la fonction f. C'est l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z=k$; on la dessine dans le plan (xOy).

• La représentation graphique de la fonction $x\mapsto f(x\,;k)$ est la coupe de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y=k$ rapporté au repère $(A_k\,;\vec{i},\vec{k})$, avec $A_k(0\,;k\,;0)$.

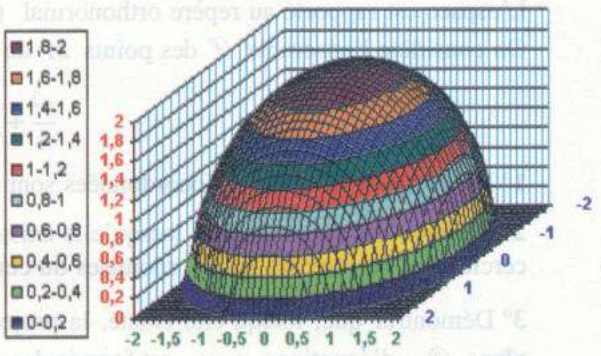
• La représentation graphique de la fonction $y\mapsto f(k\,;y)$ est la coupe de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $x=k$ rapporté au repère $(B_k\,;\vec{j},\vec{k})$, avec $B_k(k\,;0\,;0)$.

3 Quelques surfaces particulières

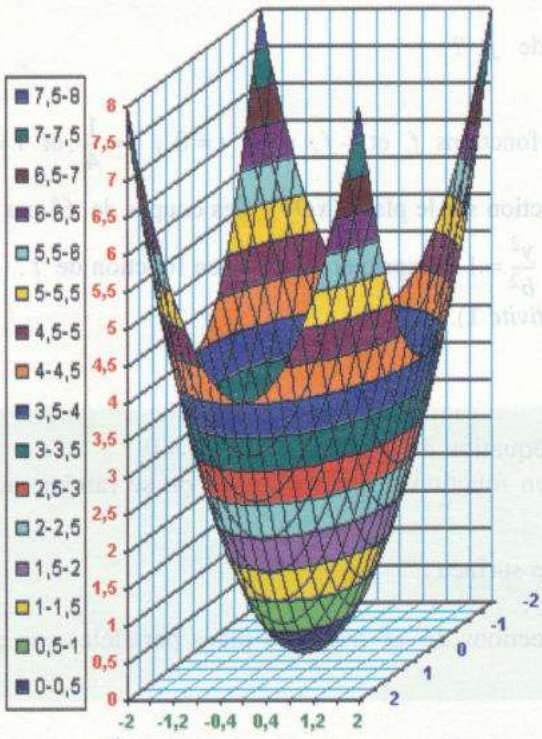
• On visualise à l'aide d'un tableur la **demi-sphère** de centre O et de rayon 2 qui est située au-dessus du plan (xOy) et d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
Elle représente la fonction :

$$f : (x\,;\,y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ ,$$

avec $x \in [-2\,;\,2]$ et $y \in [-2\,;\,2]$.
Les couleurs de la légende donnent des surfaces de niveau : en jaune, par exemple, nous avons les points de la demi-sphère qui ont une cote comprise entre 1 et 1,15.

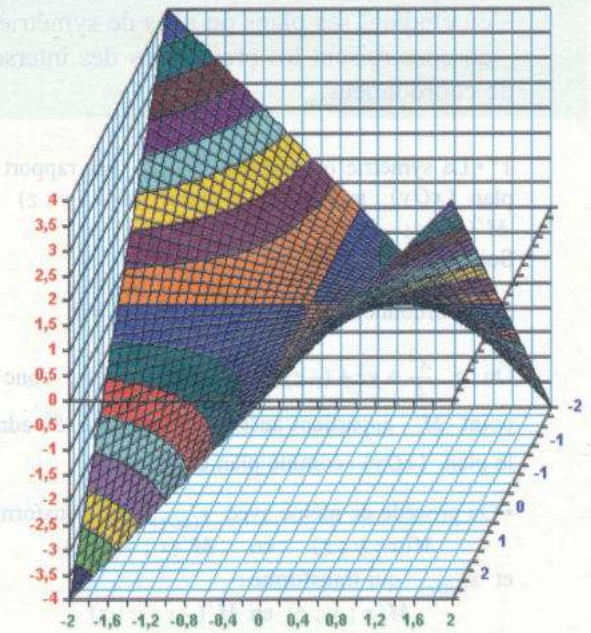


Voir Activité 3



• La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ est un **paraboloïde de révolution**.
– Les lignes de niveau sont des cercles.
– Les coupes par des plans parallèles aux plans (xOz) et (yOz) sont des paraboles.
– Si on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $z = x^2$ dans le plan d'équation $y = 0$, la surface est obtenue par la rotation de $\mathcal{P}$ autour de l'axe (Oz) .

• La surface d'équation $z = xy$ est un **hyperboloïde de révolution**.
Les lignes de niveau de cette surface sont des hyperboles d'équations $xy = k$ (k étant un réel non nul).
Si $k = 0$, on obtient la réunion des axes (Ox) et (Oy) .



Surface donnée par une équation implicite

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1\ .$$

1° Prouver que les plans de coordonnées sont des plans de symétrie de $\mathscr{S}$.

2° Montrer que l'intersection, lorsqu'elle existe, de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_m$ d'équation $x=m$ est un cercle dont on donnera les coordonnées du centre et le rayon en fonction de m.

3° Démontrer que, lorsqu'elle existe, la projection sur le plan (xOy) des coupes de $\mathscr{S}$ par les plans $\mathscr{P}_t$, d'équations $z=t$, est formée des courbes d'équations $y=f_t(x)$ et $y=-f_t(x)$, avec $f_t(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-4t^2-x^2}$.

4° a) Quel est l'ensemble de définition D_t de f_t ?

b) Étudier les variations de f_t sur D_t.

c) Construire les courbes représentatives des fonctions f_t et $-f_t$ pour $t=0$, $t=\frac{1}{4}$ et $t=\frac{1}{2}$.

5° Démontrer que, lorsqu'elle existe, la projection sur le plan (xOy) des coupes de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{P}_t$ est formée de courbes d'équations $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Exprimer a et b en fonction de t.
En déduire la nature de ces courbes (voir *Activité* 1).

• Méthode

Lorsque la surface $\mathscr{S}$ est donnée par une équation du type $h(x\,;y\,;z)=0$:
• si on peut exprimer l'une des variables en fonction des deux autres, on se ramène au cas d'une fonction de deux variables ;

• sinon, on peut se donner une idée de cette surface :
– en étudiant ses plans ou axes de symétrie ;
– en construisant les projections des intersections de $\mathscr{S}$ avec des plans parallèles aux plans de coordonnées.

1° • La symétrie orthogonale $s_{(xOy)}$ par rapport au plan (xOy) transforme le point $M(x\,;y\,;z)$ en $M'(x\,;y\,;-z)$.
Soit M un point de $\mathscr{S}$.

Ses coordonnées vérifient $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$.

On a $\frac{x^2}{4}+y^2+(-z)^2=\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$, donc le point M' appartient aussi à $\mathscr{S}$, et donc $\mathscr{S}$ admet le plan (xOy) comme plan de symétrie.

• On procède de même avec $s_{(xOz)}$ qui transforme :
$M(x\,;y\,;z)$ en $M'(x\,;-y\,;z)$.
et $s_{(yOz)}$ qui transforme :
$M(x\,;y\,;z)$ en $M'(-x\,;y\,;z)$.

2° Les coordonnées des points d'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}_m$, s'ils existent, vérifient :

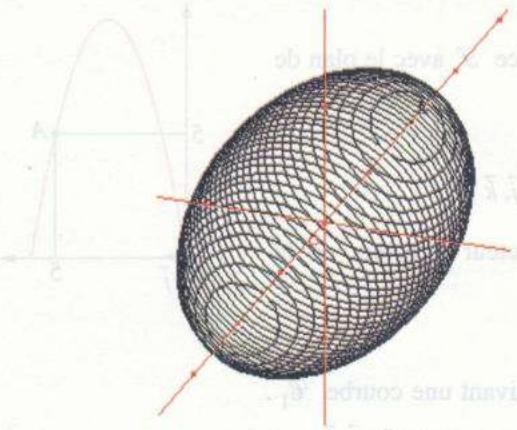
$$\begin{cases} x=m \\ y^2+z^2=\dfrac{4-m^2}{4} \end{cases}.$$

On a donc nécessairement $\frac{4-m^2}{4}\geqslant 0$.
Le plan $\mathscr{P}_m$ ne coupe $\mathscr{S}$ que si $m\in[-2\,;2]$ et, dans ce cas, on reconnaît un cercle de centre A_m de coordonnées $(m\,;0\,;0)$ et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{4-m^2}$.
On peut visualiser ces cercles avec le logiciel GEOSPACW.

• Créer une variable réelle dans l'intervalle $[-2\,;2]$.
• Créer le point A_m.
• Créer le plan P_m d'équation $X=m$.
• Créer le cercle C_m dans le plan P_m de centre A_m et de rayon :

$$\frac{1}{2}\sqrt{4-m^2}\ .$$

En utilisant le mode TRACE, après avoir sélectionné C_m et en pilotant m au clavier, on obtient le graphique ci-dessous.



3° Le plan $\mathscr{P}_t$ a pour équation $z=t$.
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}_t$ et de la surface $\mathscr{S}$ vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1-t^2 \\ z=t \end{cases}.$$

Les courbes projetées orthogonales sur (xOy) de l'intersection (si elle existe) entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}_t$ ont pour équation cartésienne dans le plan (xOy) :

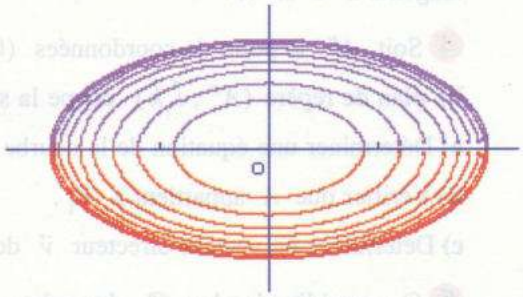
$$\frac{x^2}{4}+y^2=1-t^2\ .$$

L'intersection est la réunion des courbes d'équations respectives $y=f_t(x)$ et $y=-f_t(x)$ avec $f_t(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-4t^2-x^2}$, pour t appartenant à l'intervalle $]-1\,;1[$.
Pour $t=1$ ou $t=-1$, la courbe est réduite à un point $K(0\,;0\,;1)$ ou $K(0\,;0\,;-1)$.

4° On prend t dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
a) $D_t=[-\sqrt{4-4t^2}\,;\sqrt{4-4t^2}]$.
b) La fonction f_t est paire.
Sur $I=[0\,;\sqrt{4-4t^2}]$, la fonction $x\mapsto -x^2$ est décroissante ; donc $x\mapsto 4-4t^2-x^2$ est décroissante sur I et, en composant avec la fonction racine carrée (croissante sur $[0\,;+\infty[$), on peut affirmer que f_t est décroissante sur I.
On vérifie que la courbe représentative de f_t présente une tangente parallèle à l'axe des abscisses en :

$$\left(0\,;\frac{1}{2}\sqrt{4-4t^2}\right),$$

et une tangente parallèle à l'axe des ordonnées en $(\sqrt{4-4t^2}\,;0)$.



5° On a $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1-t^2$.
Pour $t\in\,]-1\,;1[$, on obtient :

$$\frac{x^2}{4(1-t^2)}+\frac{y^2}{1-t^2}=1,$$

soit $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,
avec $a=2\sqrt{1-t^2}$ et $b=\sqrt{1-t^2}$.
Donc, d'après l'*Activité* 1, ce sont des ellipses.

Remarque
Les courbes obtenues au **2°** et **4°** sont respectivement des cercles et des ellipses. La surface est un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire, plus concrètement, un ballon de rugby.

Plan tangent à une surface

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

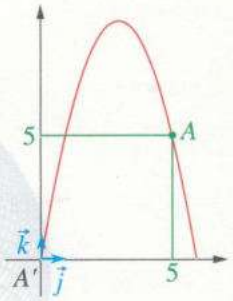
$$z = 9-(x-2)^2-(y-3)^2\ .$$

1 Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}_0$ d'équation $z=9$ avec la surface $\mathscr{S}$.

2 Vérifier que le point $A(2\,;5\,;5)$ est un point de $\mathscr{S}$.

3 **a)** Soit A' le point de coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

On a représenté ci-contre l'intersection $\mathscr{C}$ de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan de repère $(A'\,;\vec{j},\vec{k})$.



Vérifier que A appartient à ce plan.

Déterminer une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(A'\,;\vec{j},\vec{k})$.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{u}=\vec{j}-4\vec{k}$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

4 Soit A'' le point de coordonnées $(0\,;5\,;0)$.

Le plan de repère $(A''\,;\vec{i},\vec{k})$ coupe la surface $\mathscr{S}$ suivant une courbe $\mathscr{C}_1$.

a) Déterminer une équation de la courbe $\mathscr{C}_1$ dans le repère $(A''\,;\vec{i},\vec{k})$.

b) Vérifier que A appartient à $\mathscr{C}_1$.

c) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente à $\mathscr{C}_1$ en A.

5 On considère le plan $\mathscr{P}_1$ de repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.

a) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ a pour équation $4y+z-25=0$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

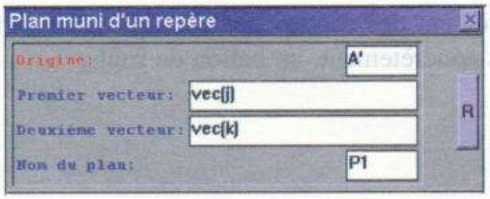
b) Déterminer les points d'intersection éventuels entre la surface $\mathscr{S}$ et le plan $\mathscr{P}_1$.

Les plans $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont deux plans tangents à la surface $\mathscr{S}$.

6 **Visualisation de la surface $\mathscr{S}$ avec GEOPLANW**

• Créer le plan P1 passant par $A'(a\,;0\,;0)$ et parallèle au plan (yOz).

• Créer la courbe c1 dans le plan P1, intersection de P1 avec $\mathscr{S}$.





• Créer de la même manière le plan P2 passant par $A''(0\,;a+3\,;0)$ et parallèle au plan (xOz), puis la courbe c2 intersection de P2 avec $\mathscr{S}$.

En mode TRACE, choisir les courbes c1 et c2 et faire varier la variable numérique a dans l'intervalle $[-10\,;10]$.

Sauf mention contraire, dans tous ces exercices, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $x-3y=5$ n'est pas une surface.

2° L'intersection du paraboloïde de révolution d'équation $z=x^2+y^2$ et d'une sphère de centre O est un cercle.

3° La surface d'équation $z=f(x\,;y)=\sqrt{|x|}$ admet le plan d'équation $y=0$ comme plan de symétrie et les lignes de niveau de f sont formées de deux droites parallèles à l'axe des abscisses.

2 On considère la surface d'équation :

$$z=f(x\,;y)=2x+y+4\ .$$

1° Déterminer les coordonnées du point A de la surface d'abscisse -2 et d'ordonnée 5.

2° Quelle est la nature de cette surface ?

3° Identifier la ligne de niveau 10 et en donner un système d'équations paramétriques.

3 On considère la surface d'équation :

$$z=f(x\,;y)=2x-4y+5\ .$$

1° Calculer $f(-3\,;5)$.

2° Quelle est la nature de cette surface ?

3° Déterminer les lignes de niveau de la fonction f.

4 On considère une surface $\mathscr{S}$ d'équation $z=f(x\,;y)$.

Pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est la droite passant par $A(0\,;1-k\,;k)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;3\,;0)$.

Identifier $\mathscr{S}$ et en donner une équation cartésienne.

5 On considère une surface $\mathscr{S}$ d'équation $z=f(x\,;y)$.

Pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est la droite passant par $A(-k\,;k+1\,;k)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-2\,;0)$.

Identifier $\mathscr{S}$ et en donner une équation cartésienne.

6 Les gaz d'échappement d'une voiture libèrent du dioxyde de carbone (CO_2), non toxique et du monoxyde de carbone (CO), toxique.

Lors d'un contrôle anti-pollution, on mesure les taux T_1 de CO_2 et T_2 de CO, puis on détermine le taux T de CO corrigé :

$$T=\frac{15T_2}{T_1+T_2}\ .$$

La réglementation exige que T soit inférieur à 4,5.

1° Déterminer la nature des lignes de niveau de la fonction T de deux variables T_1 et T_2 .

2° Visualiser dans un plan l'ensemble des couples $(T_1\,;T_2)$ pour lesquels le taux T est admissible.

7 On considère la surface $\mathscr{S}$ définie par :

$$z=4-x^2-y^2\ .$$

Elle est représentée ci-dessous (figure **1**).

On a aussi représenté les projections des courbes obtenues par l'intersection de $\mathscr{S}$ et de plans parallèles à (yOz) sur le plan (yOz) (figure **2**) et des plans parallèles à (xOz) sur (xOz) (figure **3**).

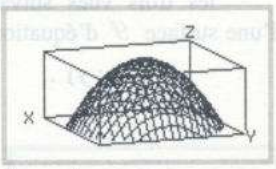


figure **1**

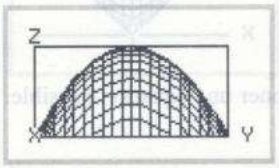


figure **2**

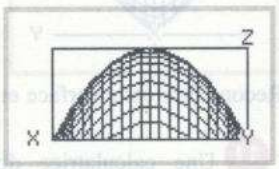


figure **3**

1° Déterminer les équations des courbes de la figure **2**.

2° Déterminer les équations des courbes de la figure **3**.

3° Déterminer les lignes de niveau de la fonction f définie par $f(x,y)=4-x^2-y^2$.

8 On considère la surface $\mathscr{S}$ définie par :

$$z=y^2-x^2+1\ .$$

Elle est représentée ci-dessous (figure **1**).

On a aussi représenté les projections des courbes obtenues par l'intersection de $\mathscr{S}$ et de plans parallèles à (yOz) sur le plan (yOz) (figure **2**) et des plans parallèles à (xOz) sur (xOz) (figure **3**).

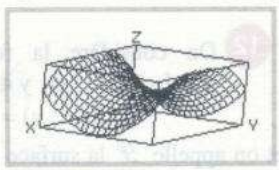


figure **1**

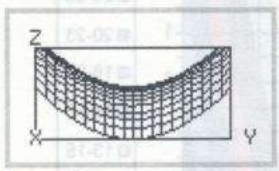


figure **2**

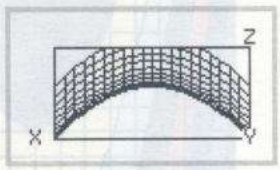


figure **3**

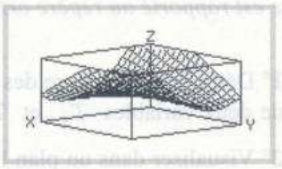
1° Déterminer les équations des courbes de la figure **2**.

2° Déterminer les équations des courbes de la figure **3**.

3° Déterminer les lignes de niveau de la fonction f définie par $f(x\,;y)=y^2-x^2+1$.

9 On considère la surface $\mathscr{S}$ définie par :

$z = f(x\,;y) = x^2 + xy$.



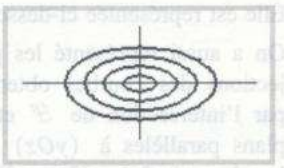
Elle est représentée ci-contre.

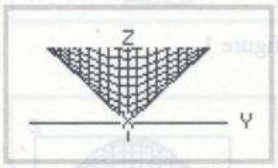
1° Démontrer que la ligne de niveau 0 de f est formée de deux droites que l'on déterminera.

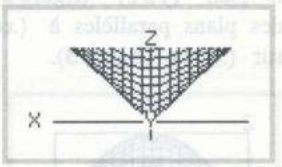
2° Étudier les lignes de niveau k de f $(k \in \mathbb{R}^*)$, en particulier ses asymptotes.

10 Une calculatrice donne les trois vues suivantes d'une surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = f(x\,;y)$.



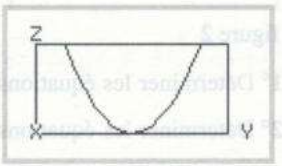


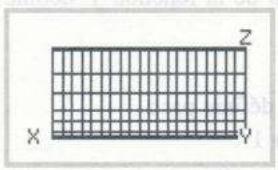


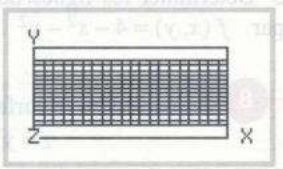
Reconnaître cette surface et en donner une équation possible.

11 Une calculatrice donne les trois vues suivantes d'une surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = f(x\,;y)$.





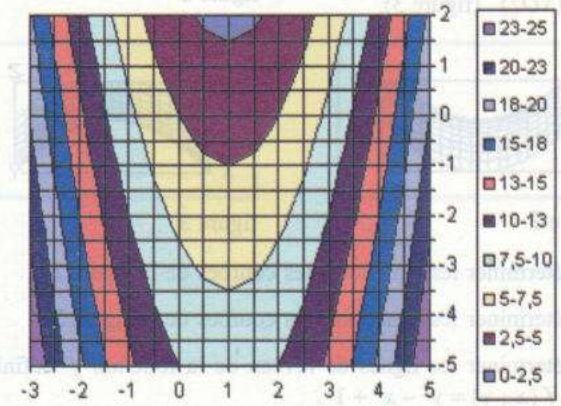


Donner une équation possible de cette surface.

12 On considère la fonction f des deux variables $x \in [-3\,;5]$ et $y \in [-5\,;2]$ définie par :

$f(x\,;y) = x^2 - 2x - y + 5$,

et on appelle $\mathscr{S}$ la surface qui la représente dans l'espace.



On a visualisé ci-avant les lignes de niveau de la fonction f en projection sur le plan (xOy) .

1° Déterminer une équation cartésienne de la ligne de niveau zéro.

2° Démontrer que la surface $\mathscr{S}$ admet un plan de symétrie.

3° Déterminer les intersections de $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations $y = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

13 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = x^2$.



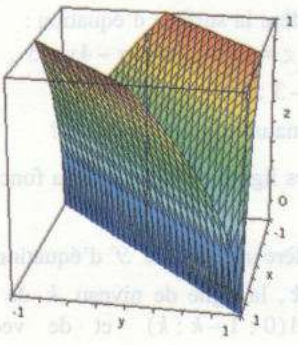
1° Déterminer l'intersection de $\mathscr{S}$ avec des plans parallèles au plan (xOy) .

2° Déterminer l'intersection de $\mathscr{S}$ avec des plans parallèles au plan (xOz) .

3° Démontrer que $\mathscr{S}$ admet un plan de symétrie.

14 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = \sqrt{|x-y|}$.



1° $\mathscr{S}$ est représentée ci-dessus. Il semble qu'elle possède un plan de symétrie. En donner une équation cartésienne.

2° Déterminer les lignes de niveau de la fonction f définie par $f(x\,;y) = \sqrt{|x-y|}$.

15 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = (x-1)^2 + (y-3)^2$,

et le point $\Omega(1\,;3\,;0)$.

1° Déterminer une équation de $\mathscr{S}$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2° En déduire la nature de $\mathscr{S}$ et ses éléments de symétrie.

16 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6$,

et le point $\Omega(-1\,;-2\,;1)$.

1° Déterminer une équation de $\mathscr{S}$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2° En déduire la nature de $\mathscr{S}$ et ses éléments de symétrie.

17 On considère la fonction f de deux variables $x \in [-4\,;4]$ et $y \in [-4\,;4]$ définie par :

$$f(x\,;y) = \frac{5}{x^2+y^2+1}\,.$$



1° Déterminer les lignes de niveau de f.

En déduire que la surface $\mathscr{S}$ représentant la fonction f est une surface de révolution.

2° a) Déterminer les couples $(x_0\,;y_0)$ tels que, pour tous les réels x et y, on ait $f(x\,;y) \leqslant f(x_0\,;y_0)$.

b) Démontrer que la surface $\mathscr{S}$ est comprise entre deux plans parallèles au plan (xOy).

18 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$z = x^2+y^2-5\,,$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+4y-z-10=0$.

Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la surface $\mathscr{S}$.

Que peut-on en déduire ?

19 On considère la fonction de deux variables :

$$f : (x\,;y) \mapsto f(x\,;y) = xe^{-x^2-y^2}+3\,.$$

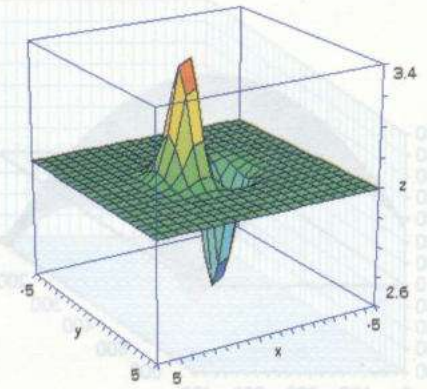
On appelle $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z = f(x\,;y)$.

1° Démontrer que $\mathscr{S}$ admet le plan d'équation $y=0$ comme plan de symétrie.

2° Soit la fonction $g : x \mapsto f(x\,;0)$.

Étudier les variations de g. En déduire la valeur du « pic » de la surface $\mathscr{S}$ (en admettant qu'elle n'en a qu'un).

3° Soit M un point de $\mathscr{S}$. Que se passe-t-il lorsque la distance de M à O devient infinie ?



20 On considère la fonction :

$$f : (x\,;y) \mapsto 1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\,.$$

1° Résoudre l'équation $f\left(\frac{1}{4}\,;y\right) = \frac{1}{2}$.

2° Soit k un réel positif inférieur ou égal à 1.

Démontrer que la ligne de niveau k est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3° Démontrer qu'il existe un couple $(x_0\,;y_0)$ tel que, pour tous réels x et y, $f(x\,;y) \leqslant f(x_0\,;y_0)$.

Problèmes

21 La marque VMSPD vend des blousons produits dans deux centres de confection A et B.

On note x le nombre de blousons fabriqués dans le centre A et y dans le centre B. Toute la fabrication est vendue au prix unitaire de 17 €.

Les coûts de production sont (en euros) :

- dans le centre A : $C_1(x) = 0{,}02x^2+4x+500$;
- dans le centre B : $C_2(y) = 0{,}05y^2+4y+275$.

Le centre A ne fabrique pas plus de 600 blousons et le centre B pas plus de 400 blousons.

1° a) Exprimer le coût total en fonction de x et y.

b) Exprimer le chiffre d'affaires en fonction de x et y.

c) En déduire l'expression du profit :

$$P(x\,;y) = -0{,}02x^2-0{,}05y^2+13(x+y)-775\,.$$

2° Un problème d'approvisionnement conduit à la contrainte :

$$2x+y \geqslant 1\,000\,.$$

a) Lorsque cette contrainte est saturée, c'est-à-dire lorsqu'il y a égalité, exprimer le profit uniquement en fonction de x ; on le note $f(x)$ pour $x \in [0\,;600]$.

b) Étudier cette fonction f et prouver l'existence d'un maximum.

En déduire le nombre de blousons x_0 à produire dans le centre A pour satisfaire cette contrainte.

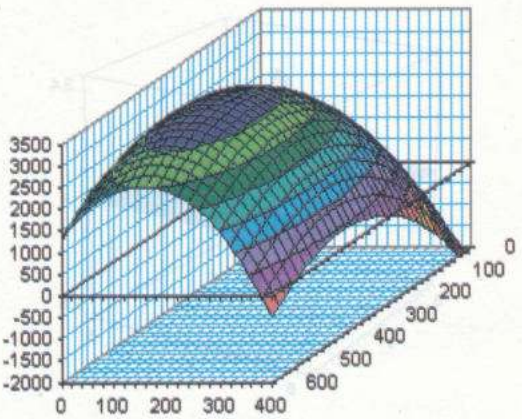
c) Déterminer alors le nombre de blousons y_0 produits par le centre B. Calculer le profit z_0 correspondant.

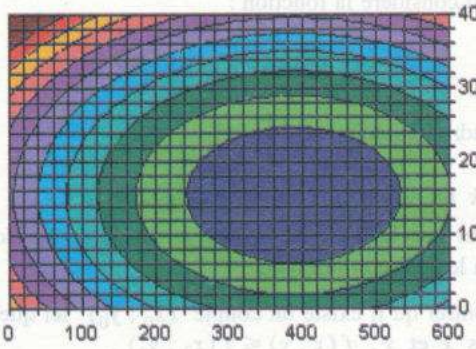
3° On a représenté la surface d'équation $z = P(x\,;y)$ à l'aide d'un logiciel.

a) Dans quelle zone se situe le point $S(x_0\,;y_0\,;z_0)$ déterminé précédemment ?

b) Existe-t-il des points de la surface où le profit est plus grand ?

c) Expliquer pourquoi la contrainte d'approvisionnement ne permet pas d'obtenir le profit maximal ?





4° Reprendre le problème précédent avec un prix unitaire de 19,5 €, les coûts de fabrication restant inchangés, mais la contrainte d'approvisionnement étant :

$$3x + y \geqslant 1\,200 \ .$$

22 On désire créer une structure en verre de la forme d'un prisme, comme l'indique la figure. On pose $x = OH$, $y = OC$ et on fixe à 10 la hauteur du triangle isocèle ABC. Les dimensions sont des réels de $]0\,;+\infty[$, exprimées en m. On étudie le volume de cette structure.



1° a) Calculer le volume lorsque $x = 6$ et $y = 8$.

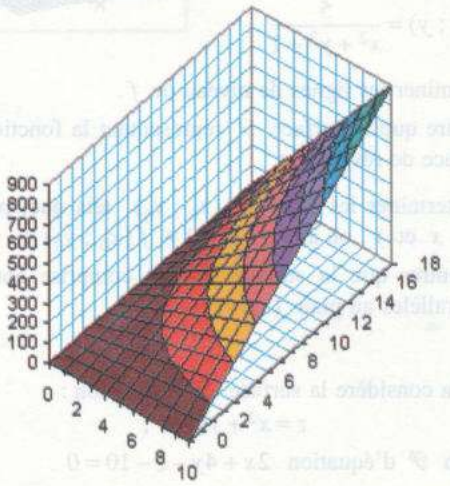
b) Exprimer le volume V en fonction de x et y .

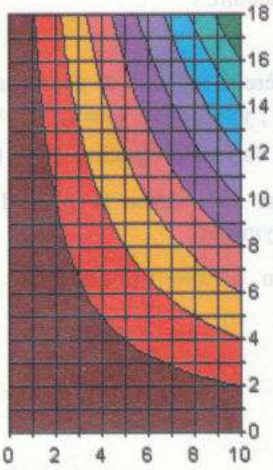
2° Dans cette question on suppose que le volume est de 300 m³.

a) Exprimer y en fonction de x sous la forme $y = g(x)$. Quelle est la nature de la fonction g et son sens de variation ?

b) Si on augmente la dimension x de 20 %, de quel pourcentage faut-il diminuer y ?

Ci-dessous, la visualisation du volume et des courbes de niveau $z = V(x\,;y)$ pour z variant de 100 m³ en 100 m³.





3° La structure est un bâti métallique. Le coût de ce bâti, en euros, est donné par la formule :

$$C(x\,;y) = 48x + 20y + 120 \ .$$

Or on ne peut dépasser un coût de 600 €.

On désire déterminer les dimensions qui satisfont cette contrainte et conduisent à une structure de volume maximal.

a) Si $x = 10$ et $y = 4$, la contrainte de coût est-elle satisfaite ?

b) Exprimer la contrainte de coût en une inégalité.

Si la contrainte est saturée, c'est-à-dire si $C(x\,;y) = 600$, exprimer y en fonction de x .

En donner une interprétation graphique. Comment la représenter sur chacun des deux graphiques ?

c) En déduire le volume V en fonction de x sous cette contrainte saturée.

On note $V = f(x)$.

d) Montrer que la fonction f admet un maximum.
En déduire les dimensions x_0 puis y_0. Calculer alors le volume, et retrouver ce point sur les graphiques ci-dessus.

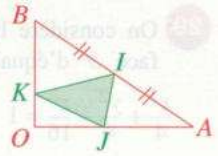
4° a) D'après la visualisation du volume dans le repère de l'espace, expliquer pourquoi ces dimensions donnent l'optimisation sous la contrainte.

b) Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2{,}4x + 24$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ représentant la fonction g dans le même repère orthonormal du plan.

Quelle est la position relative de ces deux courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_g$?

Le démontrer, et en donner une interprétation pour le problème posé.

23 On considère un triangle OAB rectangle en O, tel que :
$OA = 6$ et $OB = 4$.



Sur $[AB]$, on place le milieu I.

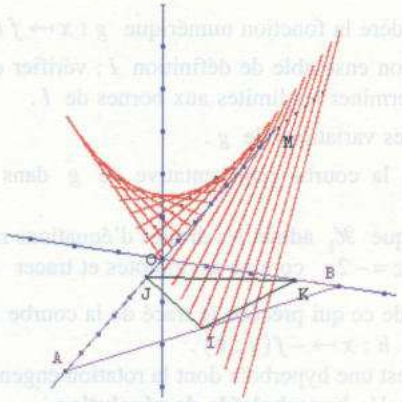
Sur $[OA]$, on place le point J, tel que $OJ = x$.

Sur $[OB]$, on place le point K, tel que $OK = y$.

On s'intéresse à l'aire $f(x\,;y)$ du triangle IJK.

1° Visualisation de f à l'aide de GEOSPACW

- Construire le triangle OAB dans le plan (xOy).
- Définir les variables x et y.
- Construire le triangle IJK.
- Définir z comme l'aire de IJK.
- Placer le point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.
- Construire le lieu d des points M lorsque y varie.
- Construire les traces de d lorsque x varie.



2° Déterminer $f(x\,;y)$.

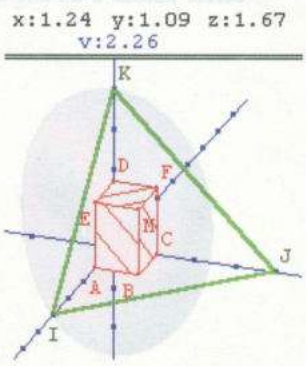
3° Déterminer les lignes de niveau de f.

24 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation :
$x + y + z = 4$.

Soit M un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$, tel que :
$x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

On considère le parallélépipède rectangle $OABCEMFD$ tel que le rectangle $OABC$ est dans le plan (xOy).

On se propose de déterminer la position du point M (si elle existe) qui rend maximum le volume V du parallélépipède $OABCEMFD$.



1° En utilisant le logiciel GEOSPACW, conjecturer la position du point M.

2° Démontrer que l'on peut exprimer le volume du parallélépipède en fonction de x et de y par la fonction de deux variables $v : (x\,;y) \mapsto 4xy - x^2y - xy^2$.

3° y étant un réel fixé dans l'intervalle $]0\,;4[$, on pose :
$g : x \mapsto v(x\,;y)$.

a) Démontrer que g possède un maximum pour $x_0 = 2 - \frac{y}{2}$.

b) On pose $h : y \mapsto v(x_0\,;y)$.

Étudier les variations de la fonction h sur $]0\,;4[$.

4° Conclure.

25 Anneau de MOEBIUS avec GEOSPACW

- Créer une variable numérique t dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
- Créer le point M de coordonnées $(\cos t\,;\sin t\,;0)$.

1° Quelle est la courbe décrite par M lorsque t varie dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$?

- Créer le vecteur $\vec{u}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$, puis le vecteur :

$$\vec{w}(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{u}(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{k}.$$

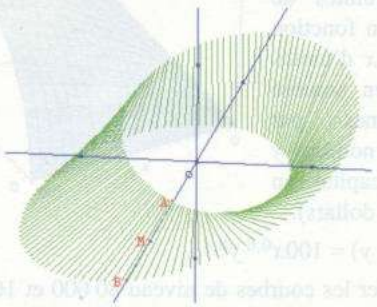
2° Quelle est la norme du vecteur $\vec{w}(t)$?

- Créer les points A et B tels que :

$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\,\vec{w}(t) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\,\vec{w}(t).$$

En utilisant le mode TRACE après avoir sélectionné le segment $[AB]$, faire varier t dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

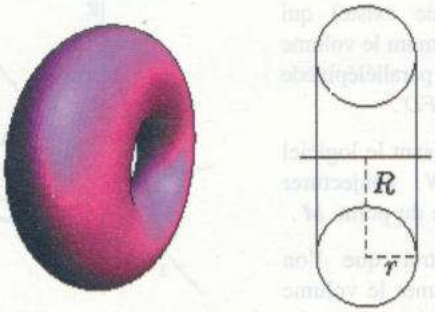
On obtient une surface appelée **anneau de MOEBIUS**.



3° Choisir un point sur un côté de la surface.

En le déplaçant de façon continue, que constate-t-on après avoir fait un tour ?

26 Un tore est la surface obtenue par la rotation d'un cercle autour d'un axe contenu dans le plan du cercle.



Construction d'un tore à l'aide de GEOSPACW

On pose $R=4$ et $r=2$.

1° Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant la droite de repère $(O\,;\vec{k})$.

Ce plan coupe le plan (xOy) suivant une droite d de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$.

En orientant le plan (xOy) par le choix :

$$(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)\ .$$

On pose $(\vec{i},\vec{u})=a\quad(2\pi)$.

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA}=4\vec{u}$.

Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne :

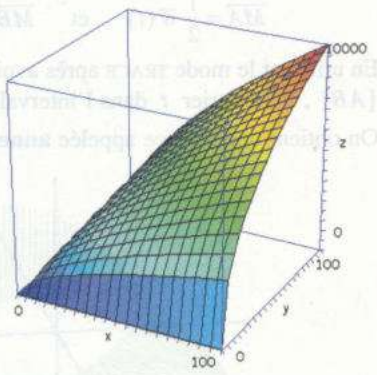
$$\sin(a)\,x-\cos(a)\,y=0\ .$$

2° Soit $\mathscr{C}$ le cercle obtenu comme intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère de centre A et de rayon 2.

Quel est l'ensemble des cercles $\mathscr{C}$ lorsque a décrit l'intervalle $[0\,;2\pi]$?

En déduire une construction du tore proposé.

27 La fonction de production de COBB-DOUGLAS est utilisée en économie pour représenter le nombre $f(x\,;y)$ d'unités de production en fonction du nombre x d'unités de travail (en nombre de personnes par heure) et du nombre y d'unités de capital (en centaines de dollars).



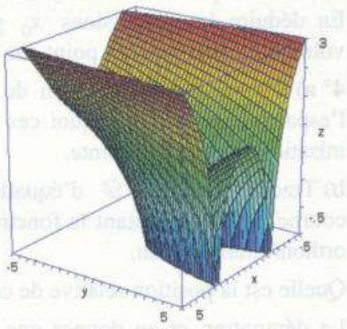
On a $f(x\,;y)=100x^{0,6}\,y^{0,4}$.

1° Représenter les courbes de niveau 80 000 et 160 000.

2° Si on double le nombre d'unités de travail et le nombre d'unités de capital, que devient le nombre d'unités de production ?

28 On considère la fonction f de deux variables telle que :

$f(x\,;y)=\ln\left|y-x^2\right|$.



1° Déterminer les couples $(x\,;y)$ de réels pour lesquels f n'est pas définie.

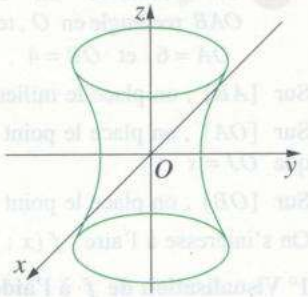
2° Soit $\mathscr{S}$ sa surface représentative.

Montrer que $\mathscr{S}$ admet un plan de symétrie.

3° Déterminer les lignes de niveau de f.

29 On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1\ .$$



1° Démontrer que la surface $\mathscr{S}$ admet les plans d'équations respectives $x=0$, $y=0$ et $z=0$ comme plans de symétrie.

2° Déterminer l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec les plans $\mathscr{P}_a$ d'équations $z=a\quad(a\in\mathbb{R})$.

La surface $\mathscr{S}$ est une surface de révolution d'axe $(O\,;\vec{k})$.

3° On considère la fonction f de deux variables telle que :

$$f(x\,;y)=4\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-1}\ ,$$

et $\mathscr{S}_1$ sa surface représentative.

Montrer que $\mathscr{S}_1$ est incluse dans la surface $\mathscr{S}$.

4° On considère la fonction numérique $g : x\mapsto f(x\,;0)$.

a) Donner son ensemble de définition I ; vérifier que g est paire et déterminer les limites aux bornes de I.

b) Donner les variations de g.

c) Soit $\mathscr{H}_1$ la courbe représentative de g dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{k})$.

Démontrer que $\mathscr{H}_1$ admet les droites d'équations respectives $z=2x$ et $z=-2x$ comme asymptotes et tracer $\mathscr{H}_1$.

5° Déduire de ce qui précède le tracé de la courbe $\mathscr{H}_2$ représentative de $h : x\mapsto -f(x\,;0)$.

$\mathscr{H}_1\cup\mathscr{H}_2$ est une hyperbole dont la rotation engendre la surface $\mathscr{S}$ appelée **hyperboloïde de révolution**.

6° Soit m un réel non nul.

On considère les droites $\mathscr{D}_m$ passant par :

$$A_m\left(0\,;m+\frac{1}{m}\,;2\left(m-\frac{1}{m}\right)\right)\ ,$$

et de vecteur directeur $\vec{u}_m(2m\,;m^2-1\,;2(m^2+1))$.

Démontrer que, pour tout réel m non nul, la droite $\mathscr{D}_m$ est incluse dans $\mathscr{S}$.

Chapitre 1

1. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° F ; 5° V.

2. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V.

3. $f'(-4)=\frac{1}{2}$; $f'(-2)=\frac{7}{4}$; $f'(2)=-3$.

6. 1° La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O est l'axe des abscisses car $f'(0)=0$, puisque pour tout x dans $[0\,;+\infty[$, $f'(x)=2x$.
2° Pour a et b dans $[0\,;+\infty[$, $b=a^2 \iff a=\sqrt{b}$, donc :
$M(a\,;b)\in\mathscr{C}_f \iff M'(b\,;a)\in\mathscr{C}_g$.
$\mathscr{C}_g$ est la transformée de $\mathscr{C}_f$ par la transformation $s : M(x\,;y)\mapsto M'(x'\,;y')$ tel que $x'=y$ et $y'=x$. On vérifie facilement que l'ensemble des points fixes de s est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$, et que si $M\notin\mathscr{D}$, alors $(MM')\perp\mathscr{D}$ et le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathscr{D}$.
$\mathscr{C}_g$ est donc l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.
3° La tangente à $\mathscr{C}_g$ en O est donc l'image de l'axe des abscisses par s , c'est-à-dire l'axe des ordonnées. La fonction g n'est donc pas dérivable en 0.

8. f semble dérivable en -2 . Pour $h>0$, $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\sqrt{h}$, qui a pour limite 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, $f'(-2)=0$.

10. 1° $D_f=\mathbb{R}^*$; $D_{f'}=\mathbb{R}^*$;
$f'(x)=6x-5-\dfrac{1}{x^2}$.
2° $D_f=\mathbb{R}^*$; $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; $f'(x)=6x+\dfrac{10}{x^3}$.
3° $D_f=\mathbb{R}$; $D_{f'}=\mathbb{R}$;
$f'(x)=6(2x+1)^2$.
4° $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$; $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$;
$f'(x)=\dfrac{2x(3x-1)-x^2\times 3}{(3x-1)^2}=\dfrac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$.

12. 1° $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\,;1\right\}$;
$f'(x)=\dfrac{3(x^2-6x+4)}{(2x^2-3x+1)^2}$.
2° $D_f=\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$; $D_{f'}=\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$;
$f'(x)=\dfrac{17-6x}{2(2x+3)^2\sqrt{3x-2}}$.
En $\frac{2}{3}$, on a, pour $h>0$,
$\dfrac{f\left(\frac{2}{3}+h\right)-f\left(\frac{2}{3}\right)}{h}=\dfrac{\sqrt{3h}}{h\left(\frac{13}{3}+h\right)}$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{(13+3h)}\times\dfrac{1}{\sqrt{h}}$
qui a pour limite $+\infty$ lorsque h tend vers 0 ; donc f n'est pas dérivable en $\frac{2}{3}$.

3° $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $f'(x)=\dfrac{-6}{(2x-1)^4}$.
4° $D_f=]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1]$;
$D_{f'}=]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[$.
$f'(x)=\dfrac{-x^2-3x+2}{2(x+1)^2\sqrt{1-x}}$.
En 1, on a pour $h<0$:
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{(1+h)\sqrt{-h}}{h(2+h)}$
$=-\dfrac{1+h}{2+h}\times\dfrac{1}{\sqrt{-h}}$
qui a pour limite $-\infty$ lorsque h tend vers 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

14. 1° $f' : x\mapsto 15x^2-6x+\frac{3}{2}$;
$f'' : x\mapsto 30x-6$; $f^{(3)} : x\mapsto 30$;
$f^{(4)} : x\mapsto 0$.
2° $f' : x\mapsto 5x^4+6x^2-2x-6$;
$f'' : x\mapsto 20x^3+12x-2$;
$f^{(3)} : x\mapsto 60x^2+12$; $f^{(4)} : x\mapsto 120x$.
3° $f' : x\mapsto 12(3x+1)^3$;
$f'' : x\mapsto 108(3x+1)^2$;
$f^{(3)} : x\mapsto 648(3x+1)$; $f^{(4)} : x\mapsto 1\,944$.

17. 1° Pour tout x dans $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$,
$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$; $f'(2)=1$; la tangente a pour équation $y=x-1$.
2° $f'(-2)=14$; $f(-2)=13$;
la tangente a pour équation $y=14x+41$.
3° $f'(1)=\frac{2}{9}$; $f(1)=0$;
la tangente a pour équation $y=\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}$.
4° $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;
la tangente a pour équation $y=-2x+\frac{\pi}{2}$.

19. T a pour équation $y=-4x-3$.
$d(x)=f(x)-(-4x-3)=x^3+3x^2+3x+1$
$=(x+1)^3$
a le même signe que $(x+1)$.
Donc :
• sur $]-\infty\,;-1[$, $d(x)<0$ et $\mathscr{C}$ est en-dessous de T .
• sur $]1\,;+\infty[$, $d(x)>0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de T .

22. La droite d'équation $4x-9y+1=0$ a pour coefficient directeur $\frac{4}{9}$.
Le problème se ramène à la résolution, dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, de l'équation $f'(x)=\frac{4}{9}$,
c'est-à-dire $\dfrac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{4}{9}$.
Cette équation équivaut à :
$18x(x+1)=4(2x+1)^2$
ou encore $x^2+x-2=0$.
Cette équation a exactement deux solutions, -2 et 1.
• La tangente en $A\left(-2\,;-\frac{4}{3}\right)$ a pour équation :
$y=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}$.
• La tangente en $B\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ a pour équation :
$y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$.

25. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V ; 5° F .

26. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V .

27. $x\in D \iff x\in\mathbb{R}$ et $x^2+x+1>1$
$\iff x(x+1)>0$.
Ainsi, $D=]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$.
• Pour x dans $\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, donc f est la composée $u_1\circ v_1\circ w_1$ des fonctions $w_1 : x\mapsto x+\frac{1}{2}$, $v_1 : x\mapsto x^2$ et $u_1 : x\mapsto x+\frac{3}{4}$.
On en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↗	

• g est la composée $u_2\circ w_2\circ v_2$ des fonctions $w_2 : x\mapsto x-1$, $v_2 : x\mapsto\frac{1}{x}$, $u_2 : x\mapsto x+2$.
On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

• Sur $]-\infty\,;-1[$, f est décroissante et prend ses valeurs dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et sur cet intervalle, g décroît ; donc $g\circ f$ est croissante sur $]-\infty\,;-1[$.
• Sur $]0\,;+\infty[$, f est croissante et prend ses valeurs dans $]1\,;+\infty[$, intervalle sur lequel g décroît ; donc $g\circ f$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

32. 1° $f=u\circ v\circ w$ avec $w : x\mapsto x-1$, $v : x\mapsto x^2$ et $u : x\mapsto x+2$.
• f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, car w croît sur $]-\infty\,;1]$ et est à valeurs dans $]-\infty\,;0]$, v décroît sur $]-\infty\,;0]$ et est à valeurs dans $[0\,;+\infty[$, et u croît sur $[0\,;+\infty[$.
• f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, car w croît sur $[1\,;+\infty[$ et est à valeurs dans $[0\,;+\infty[$, v croît sur $[0\,;+\infty[$ et est à valeurs dans $[0\,;+\infty[$, et u croît sur $[0\,;+\infty[$.
2° $f=u\circ v\circ w$ avec $w : x\mapsto x+1$, $v : x\mapsto\frac{1}{x}$ et $u : x\mapsto 3-2x$.
f est croissante sur $]-\infty\,;-1[$ car w croît sur $]-\infty\,;-1[$ et prend ses valeurs dans $]-\infty\,;0[$, v décroît sur $]-\infty\,;0[$ et u décroît sur $\mathbb{R}$.

3° $f = u \circ v \circ w \circ \varphi$ avec $\varphi : x \mapsto x^2$, $w : x \mapsto x+2$, $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto x-1$. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4° $f = u \circ v \circ w$, avec $w : x \mapsto x+2$, $v : x \mapsto x^3$ et $u : x \mapsto x-3$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ (composée de trois fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$).

35. 1° $D_f = \mathbb{R}^*$; $D_{f'} = \mathbb{R}^*$;

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x^2}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-1	↘	‖	↘	3	↗	

2° $D_f = \mathbb{R}^*$; $D_{f'} = \mathbb{R}^*$;

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	0	↗	

3° $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x \neq -2$, $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2[$ et $]-2 ; +\infty[$.

4° $D_f = D_{f'} = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$;

$f'(x) = \dfrac{x-3}{(2x-3)\sqrt{2x-3}}$ a le même signe que $(x-3)$ sur D_f. On en déduit que f décroît sur $\left]\frac{3}{2} ; 3\right]$ et croît sur $[3 ; +\infty[$.

41. • Si f admet un extremum en -2, alors $f'(-2) = 0$.

Or, pour tout x dans $]-\infty ; -1[$:

$$f'(x) = \frac{-x^2-2ax-a}{x^2(x+1)^2} ;$$

donc $f'(-2) = \dfrac{3a-4}{4}$

et $f'(-2) = 0 \iff a = \dfrac{4}{3}$.

• Réciproquement, si $a = \frac{4}{3}$, alors sur $]-\infty ; -1[$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(-3x-2)}{3x^2(x+1)^2}$$

Comme $-3x-2 > 0$, $x^2 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur $]-\infty ; -1[$, $f'(x)$ a le même signe que $(x+2)$. Donc f décroît sur $]-\infty ; -2]$ et croît sur $[-2 ; -1[$. Ainsi, f admet un minimum en -2.

43. 1° En notant y la mesure de l'autre côté de l'angle droit et h celle de l'hypoténuse, on a :

$$h = \sqrt{x^2+y^2}, \ x > 0, \ y > 0$$
et $p = x + y + h$.

Donc $h > x$ et $p > 2x$; d'où $0 < x < \frac{p}{2}$.

De plus, $\sqrt{x^2+y^2} = p - x - y$

$\iff x^2 + y^2 = (p-x-y)^2$

$\iff y = \dfrac{p(p-2x)}{2(p-x)}$.

• Si $x \in \left]0 ; \frac{p}{2}\right[$, on pose $y = \dfrac{p(p-2x)}{2(p-x)}$.

On a alors $0 < y < \frac{p}{2}$, car $0 < p - 2x < p - x$.

Donc $x + y < p$ et $\sqrt{x^2+y^2} = (p-x-y)$, d'où $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = p$.

Le triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures x et y, a pour périmètre p.

2° $\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2} xy = \dfrac{px(p-2x)}{4(p-x)}$.

3° $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{p(2x^2-4px+p^2)}{4(p-x)^2}$ est du signe du trinôme $2x^2 - 4px + p^2$.

On en déduit le tableau des variations de $\mathscr{A}$ sur $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$.

x	0		$p\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$		$\frac{p}{2}$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	↗	M	↘	0

L'aire du triangle T est maximale pour $x = p\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$. On a alors $y = p\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ et $h = p(\sqrt{2}-1)$.

47. 1° V ; 2° V ; 3° F ; 4° V ; 5° F.

48. 1° V ; 2° F ; 3° F ; 4° F.

49. $f([-2 ; 1]) = [-1 ; 1]$;
$f([-2 ; 2]) = [-1 ; 1]$;
$f([-3 ; 0]) = [-1 ; 2]$.

53. 1° Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3 + 5x$. Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 5$, donc $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et continue ; de plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 6$, donc f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre 0 et 6.

En particulier, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $[0 ; 1]$.

On a $0{,}38 < \alpha < 0{,}39$ car :

$$f(0{,}38) < 2 < f(0{,}39),$$

puisque $f(0{,}38) \approx 1{,}955$
et $f(0{,}39) \approx 2{,}009$ à 10^{-3} près.

2° Soit f définie sur $I = [-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = x^5 - 5x + 1.$$

L'étude des variations de f fournit le tableau des variations suivant :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-21	↗	5	↘	-3	↗	23

Ainsi, f s'annule exactement trois fois sur l'intervalle $[-2 ; 2]$. Les solutions de l'équation proposée sont des réels α, β, γ tels que :

$$-1{,}55 < \alpha < -1{,}54 \ ; \ 0{,}20 < \beta < 0{,}21 \ ;$$
$$1{,}44 < \gamma < 1{,}45.$$

3° Soit f la fonction définie sur $I = [1 ; 4]$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$.

f est dérivable sur I et

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	3	↗	$\frac{17}{4}$

Comme $\frac{9}{2} \in [3 ; 5]$ et $\frac{9}{2} \notin \left[3 ; \frac{17}{4}\right]$, l'équation $f(x) = \frac{9}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1 ; 4]$.

On a $1{,}08 < \alpha < 1{,}09$ car :

$$f(1{,}08) > \frac{9}{2} > f(1{,}09)$$

et f est décroissante sur $[1 ; 2]$.

58. f est dérivable sur $[-2 ; 2]$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

On en déduit le tableau des variations de f.

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	11

D'où le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ selon les valeurs de λ.

• Si $\lambda < -1$ ou $\lambda > 11$: pas de solution.

• Si $-1 \leqslant \lambda < \frac{22}{27}$ ou $2 < \lambda \leqslant 11$: une solution.

• Si $\lambda = \frac{22}{27}$ ou $\lambda = 2$: deux solutions.

• Si $\frac{22}{27} < \lambda < 2$: trois solutions.

Chapitre 2

1. 1° V ; 2° F ; 3° F ; 4° F ; 5° F ; 6° V ; 7° F.

3. a) • Pour tout entier naturel $n \neq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{n(n+1)} < 0.$$

La suite (u_n) est décroissante.

• $L = 0$.

• $0 \leqslant \frac{2}{n} \leqslant 10^{-4}$ équivaut à $n \geqslant 2 \cdot 10^4$.

• Dès que $n \geqslant 2 \cdot 10^4$, alors $u_n \in [0 ; 10^{-4}]$.

• De même, dès que $n \geqslant 2 \cdot 10^8$, alors : $u_n \in [0 ; 10^{-8}]$.

b) • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$

$= \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n}+1)}$.

La fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc (u_n) est décroissante.

• $L = 0$.

• $u_{10^8} = \dfrac{1}{10^4+1} < 10^{-4}$ comme (u_n) est décroissante, pour tout $n \geqslant 10^8$,

$u_n \in]0 ; 10^{-4}[$.

• De même, pour $n \geqslant 10^{16}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 10^{-8}$.

6. **a)** $-5n$ est négligeable devant n^2 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

12. **a)** $u_n = \dfrac{3^n}{(2^2)^n} = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(Suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et $|q| < 1$.)

b) $v_n = \dfrac{\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$;

(Suite géométrique de raison $q = \frac{3}{7}$ et $0 < q < 1$.)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -1$.

14. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V.

17. **a)** $f(x) - (x-3) = \dfrac{4}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$,

donc $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

b) $f(x) - (2x-1) = \dfrac{-2}{x+1}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x+1} = 0$,

donc $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

c) $f(x) - (-x+2) = \dfrac{4}{(x-1)^2}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{(x-1)^2} = 0$,

donc $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

18. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V.

23. **1°** F ; **2°** F ; **3°** F.

24. **1°** V ; **2°** F ; **3°** V.

26. **a)** Pour tout entier naturel n :

$\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) Pour tout entier naturel n :

$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$,

donc $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

32. • $f(x) - 3 = \dfrac{3 + \sin x}{x-1}$.

Pour tout $x \geqslant 2$:

$2 \leqslant 3 + \sin x \leqslant 4$ et $x - 1 > 0$,

donc $|f(x) - 3| = \dfrac{3 + \sin x}{x-1} \leqslant \dfrac{4}{x-1}$.

• Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

35. **1°** F ; **2°** F.

40. **a)** • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, car $x > 0$,

et $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 1) = -1$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right) = 2$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, car $x < 0$, et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (x^2 - 1) = -1$;

donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right) = 2$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$,

alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

c) • $\lim\limits_{x \to 1} (3 - 2x)^3 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) = 0$ par valeurs positives, car $x < 1$, donc :

$\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$.

• En $-\infty$, $(3 - 2x)^3$ se comporte comme $-8x^3$ et $1 - x$ comme $-x$, donc $h(x)$ se comporte comme $8x^2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 8x^2 = +\infty$.

42. **a)** $f(x) = \tan x(\tan x - 1)$,

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, car $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x - 1) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

On démontre de même que :

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, car $x > -\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} (\tan x - 1) = 0$ par valeurs positives

et comme $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} g(x) = +\infty$.

$g(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\tan x}}$:

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} g(x) = 1$.

48. **a)** • $D = \mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• En $+\infty$, on ne peut pas conclure (forme « $+\infty - \infty$ »), on transforme l'écriture de $f(x)$.

$f(x) = |x| \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 2x$

$= x\left[\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 2\right]$ pour $x > 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, alors :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 2\right] = -1$,

donc, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) • $D = \mathbb{R}$.

• En $-\infty$, voir le **a)** ci-dessus.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

• En $+\infty$, la transformation utilisée au **a)** est inefficace.

$g(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty$, donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

53. • La fonction f admet 2 pour minimum sur $]-\infty ; 0[$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty ; 0[$.

• f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty ; +\infty[$, $0 \in]-\infty ; +\infty[$; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Chapitre 3

1. 1° V ; 2° F ; 3° F ; 4° F.

2. 1° F ; 2° V ; 3° F ; 4° V.

3. Dans chacun des cas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) $f' : x \mapsto -9(4-3x)^2$;

b) $f' : x \mapsto 15(3x+1)^4$;

c) $f' : x \mapsto 6x(2x^2-1)(x^4-x^2+1)^2$;

d) $f' : x \mapsto 5(2x-1)(4-3x)^2(5-6x)$.

4. **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$ et

$$f'(x) = \frac{15}{(4-5x)^4} .$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et

$$f'(x) = \frac{-5(3x-1)^3}{4(x-2)^5} .$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{6(4x-3)^2(2x^2+3x+2)}{(3x^2+1)^2} .$$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ et

$$f'(x) = \frac{-(3x-2)^2(12x+7)}{(1-4x)^3} .$$

5. **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} .$$

b) f est dérivable sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right[\cup]1 ; +\infty[$

et $f'(x) = \frac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$.

c) f est dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

et $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

d) f est dérivable sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

et $f'(x) = \frac{8x^2-1}{\sqrt{4x^2-1}}$.

9. **a)** $f'(x) = 6\cos 2x(1+\sin 2x)^2$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 6\sin^2 2x \cos 3x \cos 5x$ sur $\mathbb{R}$.

c) $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ sur $\mathbb{R}$.

d) $f'(x) = 2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left[1+\tan^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$ sur les intervalles de la forme $\left]-\frac{5\pi}{6}+k\pi ; \frac{\pi}{6}+k\pi\right[$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

12. 1° $D_f = [1 ; +\infty[$.

Pour h réel strictement positif,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{h^3+3h^2+3h} = \sqrt{h+3+\frac{3}{h}} .$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$ et f n'est pas dérivable en 1.

2° $D_f = [0 ; +\infty[$.

Pour $h>0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h}$;

$\sqrt{h}$ a pour limite 0 lorsque h tend vers 0.

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3° $D_f = [0 ; +\infty[$.

Pour $h>0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sin h}{h}\sqrt{h}$

a pour limite 0 lorsque h tend vers 0, car :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$$

et $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$.

14. • $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (2-x^2) = 1$ et $\frac{1}{1} = 1$, donc f est continue en 1.

Pour $h \neq 0$: $t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

• Si $h<0$, on a :

$$t(h) = \frac{2-(1+h)^2-1}{h} = -2-h ;$$

donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} t(h) = -2$.

f est dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1) = -2$.

• Si $h>0$, on a :

$$t(h) = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = -\frac{1}{1+h} ;$$

donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} t(h) = -1$.

f est dérivable à droite en 1 et $f_d'(1) = -1$.

• f n'est pas dérivable en 1 car :

$$f_g'(1) \neq f_d'(1) .$$

17. 1° $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ (formule de duplication), donc :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-2\sin^2 x}{x^2} = -2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 .$$

2° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$; donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -2 .$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

20. 1° Pour $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}$; donc $f'(2) = \frac{3}{2}$.

Or $f(2) = 1$, donc la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$y = \frac{3}{2}(x-2)+1$ c'est-à-dire $y = \frac{3}{2}x - 2$.

2° T a pour équation : $y = 4x+4$.

3° T a pour équation : $y = \frac{13}{3}x - \frac{8}{3}$.

22. $\mathscr{D}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ et passe par A ; donc $A\left(1 ; \frac{3}{4}\right)$.

$\mathscr{C}$ passe par A si, et seulement si :

$$\frac{3}{4}(1+a)^2 = 1+b$$

c'est-à-dire $b = \frac{3}{4}(1+a)^2 - 1$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4+b}{(x^2+a)^2}$,

avec $b = \frac{3}{4}(1+a)^2 - 1$.

$\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en A si, et seulement si :

$$f'(1) = -\frac{1}{2} .$$

Or pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{4x(ax^2-b)}{(x^2+a)^3} ;$$

donc :

$$f'(1) = \frac{4(a-b)}{(1+a)^3} = \frac{4\left(a+1-\frac{3}{4}(1+a)^2\right)}{(1+a)^3} = \frac{1-3a}{(1+a)^2} .$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \iff 2(1-3a) = -(1+a)^2$$
$$\iff a^2-4a+3 = 0$$
$$\iff a = 1 \text{ ou } a = 3 .$$

On obtient ainsi deux couples $(a ; b)$ qui conviennent :

$a = 1$ et $b = 2$

ou $a = 3$ et $b = 11$.

35. 1° F ; 2° V ; 3° F ; 4° F.

36. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V.

37. **a)** $F : x \mapsto \frac{3}{4}x^4 - x^2 + 2x + k$;

b) $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x} + k$;

c) $F : x \mapsto -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$, où k désigne une constante réelle.

38. **a)** $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$, $F(-1) = -\frac{29}{6} + k$.

Donc $F(-1) = 0 \iff k = \frac{29}{6}$.

Ainsi, $F : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{29}{6}$.

b) $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} - \frac{7}{2}$.

39. **a)** $F : x \mapsto \frac{1}{4}(-3x-2)^4$;

b) $F : x \mapsto -\frac{1}{12}(-2x+1)^6$;

c) $F : x \mapsto \frac{1}{12}(x^4-1)^3$;

d) $F : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2-3x+3)^2$.

41. **a)** $F : x \mapsto 2\sqrt{2x-1}$;

b) $F : x \mapsto 2\sqrt{x^2-x}$;

c) $F : x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3}$;

d) $F : x \mapsto 3\sqrt{x^2-1}$.

47. **a)** $x \mapsto \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\cos 3x$;

b) $x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$;

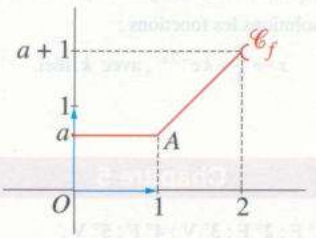
c) $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

d) $x \mapsto x\cos x$ (on reconnaît la forme $u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$).

53. **1°** $F' = f$, donc $F'(x) = 0$ sur $[0\,;1[$; F est donc constante sur $[0\,;1[$, et comme $F(0) = a$, pour tout $x \in [0\,;1[$, $F(x) = a$.
F est continue en 1, donc :

$$F(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = a .$$

De plus, $F'(x) = 1$ sur $[1\,;2[$, donc $F(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Or $F(1) = a$, donc $k = a - 1$.
Ainsi, $F(x) = x + a - 1$ sur $[1\,;2[$.



Il est clair que F n'est pas dérivable en 1 puisque $F_g'(1) = 0$ car la demi-tangente à gauche en A est horizontale, et $F_d'(1) = 1$ car la demi-tangente à droite en A a pour coefficient directeur 1.
F n'est donc pas dérivable sur $[0\,;2[$; ce qui contredit le fait que F soit une primitive de f.
Ainsi, f n'a pas de primitive sur $[0\,;2[$.

56. **1° a)** En prenant $x = 0$ et $y = 0$ dans **(1)**, on obtient $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.
En prenant x réel quelconque et $y = -x$ dans **(1)**, on obtient :

$$f(0) = f(x) + f(-x) .$$

Donc $f(-x) = -f(x)$, puisque $f(0) = 0$.
Ainsi f est impaire.
b) En prenant y réel fixé quelconque.
D'après **(1)**, les fonctions $g : x \mapsto f(x+y)$ et $h : x \mapsto f(x) + f(y)$ sont égales, donc $g' = h'$.
Or, pour tout réel x , $g'(x) = f'(x+y)$ et $h'(x) = f'(x)$.
Ainsi, pour tout réel x , $f'(x+y) = f'(x)$.
On en déduit que $f'(y) = f'(0)$ pour tout réel y .
Donc f' est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
2° D'après **1°**, si f vérifie **(1)**, alors f' est une constante k sur $\mathbb{R}$.
Donc $f : x \mapsto kx + \ell$, où ℓ est une constante arbitraire.
Comme on a $f(0) = 0$, on doit avoir $\ell = 0$.
Ainsi $f : x \mapsto kx$ est une fonction linéaire.
• Réciproquement, toute fonction linéaire $x \mapsto \alpha x$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) vérifie **(1)**.
• Finalement, les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant **(1)** sont les fonctions linéaires.

61. **1°** Pour $x \in I$, la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x\,;f(x))$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\f'(x)\end{pmatrix}$ et la droite (OM) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}1\\f(x)\end{pmatrix}$.

$$\vec{v} \perp \overrightarrow{OM} \iff \vec{v}.\overrightarrow{OM} = 0$$
$$\iff x + f'(x)f(x) = 0 .$$

2° Pour $x \in I$, $f'(x)\,f(x) = -x$.
Or $\frac{1}{2}f^2$ est une primitive de $f'f$ et $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $x \mapsto -x$ sur I , donc :
pour $x \in I$, $\frac{1}{2}(f(x))^2 = -\frac{1}{2}x^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
On en déduit que pour tout x dans I , $x^2 \leqslant 2k$ et $f(x) = \sqrt{2k - x^2}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est incluse dans le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2k$, de centre O .
• **Réciproquement**, on sait que la tangente à un arc de cercle de centre O en l'un de ses points M est orthogonale à (OM) .

Chapitre 4

1. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V ; **4°** F .

2. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** V .

3. **1°** $f' = 2f$; **2°** $f' = -2f$;
3° $f' = \frac{1}{3}f$; **4°** $f' = -3f$.

5. Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f' = 3f$, sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ke^{3x}$, avec k réel.
Or $f(0) = k$, donc $f(0) = 2 \iff k = 2$.
Ainsi, $f(x) = 2e^{3x}$.

8. Chaque courbe représente une fonction de la forme $x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
• $\mathscr{C}_1$ passe par $A_1(0\,;3)$, donc $\mathscr{C}_1$ représente la fonction $x \mapsto 3e^{-\frac{1}{2}x}$ et a pour équation $y = 3e^{-\frac{1}{2}x}$.
• $\mathscr{C}_2$ passe par $A_2(0\,;1)$, donc $\mathscr{C}_2$ a pour équation $y = e^{-\frac{1}{2}x}$.
• $\mathscr{C}_3$ passe par $A_3(-4\,;-4)$, donc $\mathscr{C}_3$ a pour équation $y = -4e^{-2}e^{-\frac{1}{2}x}$ ou encore $y = -4e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$.
• $\mathscr{C}_4$ passe par $A_4(0\,;-2)$ et a pour équation $y = -2e^{-\frac{1}{2}x}$.

12. $A = 1$; $B = 3e^x$; $C = e^x$; $D = e^x$.

18. **1°** V ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** V .

19. **1°** V ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** V .

20. **1°** $e^{3-x} = 1 \iff 3 - x = 0$
$\iff x = 3$.
Solution : 3

2° $e^{2x+1} = \sqrt{e} \iff e^{2x+1} = e^{\frac{1}{2}}$
$\iff 2x + 1 = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{4}$.
Solution : $-\frac{1}{4}$

3° $(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$
$\iff e^{x-1} + 2 = 0$ ou $e^{x+2} - 1 = 0$.
Or, pour tout réel x , $e^{x-1} + 2 \neq 0$, car $e^{x-1} > 0$, et :
$e^{x+2} - 1 = 0 \iff e^{x+2} = 1$
$\iff x + 2 = 0 \iff x = -2$.
L'équation proposée a pour unique solution -2 .

4° $e^{2x-1} = e^{\frac{x}{2}+1} \iff 2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$
$\iff x = \frac{4}{3}$.
Solution : $\frac{4}{3}$

22. **1°** $2X^2 + 3X - 5 = 0 \iff X = 1$ ou $X = -\frac{5}{2}$.
2° L'équation s'écrit $2X^2 + 3X - 5 = 0$, avec $X = e^x$; elle est donc équivalente à :

$$e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{-5}{2} .$$

Or $e^x > 0$, et $e^x = 1 \iff x = 0$; donc l'équation proposée a pour unique solution 0.

25. **1°** $e^x < 1 \iff x \in]-\infty\,;0[$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;0[$.
2° $e^x \geqslant -2$ est toujours vrai puisque, pour tout réel x , $e^x > 0$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^x \geqslant -2$ est $\mathbb{R}$.
3° $e^{-x} \leqslant 1 \iff -x \leqslant 0 \iff x \geqslant 0$.
L'ensemble des solutions est $[0\,;+\infty[$.

4° $e^{2x-1} > \sqrt{e} \iff e^{2x-1} > e^{\frac{1}{2}}$.
$\iff 2x - 1 > \frac{1}{2} \iff x > \frac{3}{4}$.
L'ensemble des solutions est $\left]\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$.

28. **1°** $\lim\limits_{+\infty} u = 0$; $\lim\limits_{-\infty} u = -\infty$;
$\lim\limits_{+\infty} v = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} v = 0$.
2° $\lim\limits_{+\infty} f = 1$; $\lim\limits_{-\infty} f = 0$; $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$;
$\lim\limits_{-\infty} g = 1$.

29. **a)** $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

b) $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

c) $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ car, $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

d) $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, car $f(x) = e^x(2 - e^x)$.

$\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

e) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$.

$\lim\limits_{-\infty} f = \sqrt{1} = 1$.

f) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$.

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$.

32. **a)** $\lim\limits_{-1} f = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, car « l'exponentielle de x l'emporte sur tout polynôme en $+\infty$ ».

b) $\lim\limits_{-\infty} f = \frac{1}{2}$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{+\infty} f = 1$, car $f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} f = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} \frac{x+1}{2x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}$.

35. **a)** $\frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \frac{e^{3x} - 1}{x} - \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim\limits_{h \to 0} 3\,\frac{e^h - 1}{h} = 3$ en posant $h = 3x$.

De même, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$ (poser $h = 2x$) ;

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = 3 - 2 = 1$.

b) $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \frac{e^x - 1}{x} \times \sqrt{x}$; or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = 0$.

37. **1°** **a)** $f' : x \mapsto 3x^2 + e^x$;

b) $f' : x \mapsto 4(x+1)e^x$;

c) $f' : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

d) $f' : x \mapsto 6e^{3x} - 2e^{-2x}$

2° **a)** $f' : x \mapsto \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$;

b) $f' : x \mapsto \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$;

c) $f' : x \mapsto 2(-x^2 + x - 4)e^{-2x}$;

d) $f' : x \mapsto 2xe^{x^2}$.

42. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

a) $F : x \mapsto e^{-x^2+3x-1} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

b) $F : x \mapsto \frac{3}{2} e^{x^2-1} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

c) $F : x \mapsto -\frac{1}{3(3e^x + 2)} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

d) $F : x \mapsto \sqrt{2e^x + 1} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

47. **1°** $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2) = -\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$.

2° f est la somme des fonctions $x \mapsto x - 2$ et $x \mapsto e^x$ qui sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$; donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3° **a)** f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$;

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = e - 1$, donc $f(0) < 0 < f(1)$; d'où $0 < \alpha < 1$ puisque f est croissante.

b) $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$,

car $f(0{,}44) < 0 < f(0{,}45)$

puisque $f(0{,}44) \approx -0{,}007$

et $f(0{,}45) \approx 0{,}018$ à 10^{-3} près.

51. **1°** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = e$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = e$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = 0$.

Les droites d'équations $y = e$ et $x = -2$ sont asymptotes à la courbe représentative de g .

2° Pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

$$g'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} e^{\frac{x-1}{x+2}} .$$

On en déduit le tableau des variations de g

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	e	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	e

55. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V ; **4°** V .

56. L'équation différentielle $2y' = -y + b$ a pour solution la fonction constante $x \mapsto b$, donc les solutions sont les fonctions :

$x \mapsto b + ke^{-\frac{1}{2}x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Leurs courbes représentatives ont pour asymptote la droite d'équation $y = b$ en $+\infty$.

Or $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ont pour asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$, donc $b = 3$.

- $\mathscr{C}_1$ passe par $A_1(0 ; 6)$ et a pour équation : $y = 3 + 3e^{-\frac{1}{2}x}$.
- $\mathscr{C}_2$ passe par $A_2(0 ; 4)$ et a pour équation : $y = 3 + e^{-\frac{1}{2}x}$.
- $\mathscr{C}_3$ passe par $A_3\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$ et a pour équation : $y = 3 - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$.
- $\mathscr{C}_4$ passe par $A_4(0 ; 1)$ et a pour équation : $y = 3 - 2e^{-\frac{1}{2}x}$.

57. **1°** Les solutions de l'équation $y' = 2y + 1$ sont les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} + ke^{2x} , \text{ avec } k \text{ réel.}$$

2° L'équation s'écrit $y' = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3}$. Elle a pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} + ke^{\frac{2}{3}x} , \text{ avec } k \text{ réel.}$$

3° L'équation s'écrit $y' = -3y + 2$. Elle a pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{3} + ke^{-3x} , \text{ avec } k \text{ réel.}$$

Chapitre 5

1. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** F ; **5°** V .

3. $x = \ln(2^3 \times 3^3) - 3\ln 2 - 3\ln 3$
$= 3\ln 2 + 3\ln 3 - 3\ln 2 - 3\ln 3 = 0$.

$y = 3\ln 3 + 3\ln 5 - \ln 3^3 - 2\ln(2 \times 5) + \ln 2^2 = \ln 5$.

7. **1°** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

donc $v_n = \ln\left(2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.

Soit $v_n = \ln 2 - (n-1)\ln 3$.

On a :

$v_{n+1} - v_n = (\ln 2 - n\ln 3) - (\ln 2 - (n-1)\ln 3) = -\ln 3$;

donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 3$ et de terme initial $v_1 = \ln 2$.

2° $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$
$= n\ln 2 - \ln 3(1 + 2 + \ldots + n - 1)$

$= n\ln 2 - \frac{(n-1)n\ln 3}{2}$,

donc :

$$\frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \ln 2 - \frac{(n-1)\ln 3}{2} .$$

9. **1°** **a)** Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont symétriques, l'une de l'autre, par rapport à la droite d'équation $y = x$.

b) $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc Γ n'admet pas de tangentes parallèles à l'axe des ordonnées.

2° **a)** La fonction ln est continue et strictement croissante de $]0 ; +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$;

donc, pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.
φ est la fonction qui à $m \in \mathbb{R}$ associe l'unique solution de l'équation $\ln x = m$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$.
c) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3° a) φ et ln sont dérivables, donc :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 1 .$$

Donc, pour tout réel x, $\varphi'(x) = \varphi(x)$.
b) Par définition, comme $\varphi(0) = 1$ (voir *chapitre* 4), φ est la fonction exponentielle.

10. **1°** F ; **2°** V ; **3°** F ; **4°** V.

12. **a)** Il faut et il suffit que $x > -1$. Comme $\ln a = \ln b \iff a = b$, l'équation s'écrit $x + 1 = 3$, soit $x = 2$ et $x = 2 > -1$.
Une solution : 2.
b) Il faut et il suffit que $x > -3$ et $x < 2$; c'est-à-dire :

$$x \in]-3 ; 2[= I .$$

L'équation s'écrit $x + 3 = 2 - x$, soit $2x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \in I$.
Une solution : $-\frac{1}{2}$.
c) Il faut et il suffit que $x^2 - 4 > 0$ et $1 - 4x > 0$, soit $x \in I = \left]-2 ; \frac{1}{4}\right[$.
L'équation s'écrit $x^2 + 4x - 5 = 0$, qui admet pour solutions 1 et -5, qui n'appartiennent pas à I.
Donc l'équation proposée n'a pas de solution.
d) Il faut et il suffit que $x^2 - 2x + 2 > 0$; ce qui est toujours vrai ($\Delta = -4$).
L'équation s'écrit $x^2 - 2x + 2 = e$, soit $x^2 - 2x + 2 - e = 0$ qui admet les solutions :

$$1 + \sqrt{e-1} \quad \text{et} \quad 1 - \sqrt{e-1} .$$

18. L'équation est définie sur $I =]0 ; +\infty[$.

$(\ln x)^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
$\iff (\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$
$\iff X^2 + X - 2 = 0$ et $\ln x = X$
$\iff (X = 1$ ou $X = -2)$ et $\ln x = X$
$\iff \ln x = 1$ ou $\ln x = -2$
$\iff x = e$ ou $x = e^{-2}$. Solutions : e et e^{-2}.

24. **a)** L'inéquation est définie sur $]0 ; +\infty[$. En tenant compte du sens de variation de la fonction ln, on a le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{e^3}$		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		+		+	0	−	
$3 + \ln x$		−	0	+		+	
$(1 - \ln x)(3 + \ln x)$		−	0	+	0	−	

Solutions : $\left[\frac{1}{e^3} ; e\right]$.
b) L'inéquation est définie sur $]0 ; +\infty[$. On a le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{e}$		5		$+\infty$
$x - 5$		−		−	0	+	
$\ln x + 1$		−	0	+		+	
$(x-5)(\ln x + 1)$		+	0	−	0	+	

Solutions : $\left]\frac{1}{e} ; 5\right[$.
c) Pour $x \in]0 ; +\infty[$,
$(\ln x)^2 \leqslant 1 \iff (\ln x + 1)(\ln x - 1) \leqslant 0$
$\iff -1 \leqslant \ln x \leqslant 1$.
Solutions : $\left[\frac{1}{e} ; e\right]$.
d) Il faut et il suffit que
$x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[= I$.
Sur I :
$\ln(x^2 - 4) \leqslant 0 \iff x^2 - 4 \leqslant 1$
$\iff x^2 - 5 \leqslant 0$
$\iff x \in [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$.
Solutions $[-\sqrt{5} ; -2[\cup]2 ; \sqrt{5}]$.

30. La suite étant géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de terme initial $u_0 = 2$, on a $u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

$u_n > 10^3 \iff 2\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 10^3$
$\iff \ln 2 + n \ln\left(\frac{3}{2}\right) \geqslant 3 \ln 10$
$\iff n \geqslant \frac{3 \ln 10 - \ln 2}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 15{,}3$. La réponse est : à partir du rang 16.

33. **a)** Il faut et il suffit que $x \in]0 ; +\infty[$ et $y \in]0 ; +\infty[$.
Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad (1) \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$(1) \iff X = x^2$ et $X^2 - 10X + 9 = 0$; cette équation admet 1 et 9 comme solutions.
$(1) \iff x^2 = 1$ ou $x^2 = 9$, soit -1, 1, -3 et 3 comme solutions.
Les solutions du système proposé sont $(1 ; 3)$ et $(3 ; 1)$.
b) Il faut que et il suffit que $x > 0$ et $y > 0$.
Le système s'écrit $\begin{cases} x^2 y^3 = e^{-4} \\ \frac{x^3}{y^4} = e^{11} \end{cases}$.
De la première équation, on tire $x^6 = e^{-12} y^{-9}$ et de la seconde $x^6 = e^{22} y^8$;
donc $y^{17} = e^{-34}$.
Comme y^{17} est de même signe que y, on a :
$y > 0$ et $y = (e^{-34})^{1/17}$, soit $y = e^{-2}$.
On obtient $\begin{cases} x^2 = e^2 \\ x^3 = e^3 \end{cases}$ donc $x = e$.
Le système admet la solution $(e ; e^{-2})$.

38. **a)** Il faut et il suffit que $\frac{2x}{x^2+4} > 0$, c'est-à-dire $x \in]0 ; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x^2+4} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ par limites et composées.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+4} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ par limites et composées.

b) Il faut et il suffit que $\frac{x-5}{x+2} > 0$, soit :

$$x \in]-\infty ; -2[\cup]5 ; +\infty[.$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-5}{x+2} = 1$, donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 1 = 0 ;$$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x-5}{x+2} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty ;$$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \frac{x-5}{x+2} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -\infty ;$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-5}{x+2} = 1$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0 .$$

c) Il faut et il suffit que $\frac{x-1}{2-x} > 0$, soit $x \in]1 ; 2[$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{2-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$;

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x-1}{2-x} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty .$$

d) Il faut et il suffit que $\frac{x^2}{x+2} > 0$, soit :

$$x \in]-2 ; 0[\cup]0 ; +\infty[.$$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty ;$$

• $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x+2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$;

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

41. **a)** • Pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} .$$

• Si $x \in]0 ; 1[$, $f'(x) < 0$.
Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
b) • Pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln x$.
• Si $x \in]0 ; 1[$, $f'(x) < 0$.
Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
c) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
• Si $x > e$, $f'(x) < 0$.
• Si $0 < x < e$, $f'(x) > 0$.
• Si $x = e$, $f'(x) = 0$.

44. **1°** $\lim\limits_{x\to 0}(x-4)=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

$\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x=0$ comme asymptote.

2° f est la somme de deux fonctions croissantes $x\mapsto x-4$ et $x\mapsto\frac{1}{4}\ln x$, donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3° a) f est une fonction continue et strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, comme $f(3)\approx -0{,}7$ et $f(4)\approx 0{,}3$ à 0,1 près. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la solution α de l'équation $f(x)=0$ est dans l'intervalle $]3\,;4[$.

b) $3{,}674<\alpha<3{,}675$.

48. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}-1\right)=-1\ ;$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ (Théorème), donc $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)\ln x=0$.

c) Pour $x>0$,

$$\frac{x\ln x^3}{x^2+1}=\frac{3x}{x^2+1}\ln x=\frac{3x^2}{x^2+1}\,\frac{\ln x}{x}\ .$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+1}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (théorème), donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d) Pour $x>0$:

$$2x+1-\ln x=x\left(2+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\ .$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (théorème), donc :

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1-\ln x)=+\infty\ .$$

52. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V ; **4°** F.

54. **a)** $f'(x)=\dfrac{-1}{(3-2x)^2}\Big/\dfrac{1-x}{3-2x}$

$$=-\frac{1}{(3-2x)(1-x)}\ ;$$

b) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$; **c)** $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$;

d) $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

60. **a)** En posant $u(x)=3x-6$, on a $u(x)>0$ sur I et $u'(x)=3$; donc :

$$f(x)=-\frac{2}{3}\,\frac{u'(x)}{u(x)}\ .$$

f admet pour primitive F définie sur I par :

$$F(x)=-\frac{2}{3}\ln(3x-6)+k\quad(k\in\mathbb{R})\ .$$

b) On pose $u(x)=3+x^2$. On a $u(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x$; donc $F(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

f admet pour primitives :

$$F:x\mapsto\ln(3+x^2)+k\quad(k\in\mathbb{R})\ .$$

c) On pose $u(x)=x^2+x+1$. On a $x^2+x+1>0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x+1$; donc $f(x)=-2\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

f admet pour primitives :

$$F:x\mapsto-2\ln(x^2+x+1)+k\quad(k\in\mathbb{R})\ .$$

d) Sur I, $x+1>0$ et $x+2>0$, donc f admet pour primitives les fonctions :

$$F:x\mapsto 3\ln(x+1)-2\ln(x+2)+k$$

$$(k\in\mathbb{R})\ .$$

63. **a)** On pose $u(x)=e^x+2$. On a $u(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=e^x$; donc $f(x)=\dfrac{2u'(x)}{u(x)}$ qui admet pour primitives :

$$F:x\mapsto 2\ln(e^x+2)+k\quad(k\in\mathbb{R})\ .$$

b) On pose $u(x)=e^{2x}+4x^2$. On a $u(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2e^{2x}+8x$; donc $f(x)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui admet pour primitives :

$$F:x\mapsto\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4x^2)+k\quad(k\in\mathbb{R})\ .$$

67. **1° a)** Pour $x\in\,]-2\,;2[$,

$$f(-x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

$$=-f(x)\ ;$$

donc f est impaire.

b) Pour $x\in\,]-2\,;2[$:

$$f'(x)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{(2-x)(2+x)}>0\ ;$$

donc f est strictement croissante sur $[0\,;2[$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)=+\infty$, donc :

$$\lim_{x\to 2}f(x)=+\infty\ .$$

La droite Δ d'équation $x=2$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Il en est de même pour la droite Δ' d'équation $x=-2$, car $\mathscr{C}$ admet O comme centre de symétrie.

2° Pour $x\in\,]-2\,;2[$:

$$f(x)=\frac{1}{3}\iff\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=1$$

$$\iff\frac{2+x}{2-x}=e\ ,\text{ soit }x=\frac{2(e-1)}{e+1}\ .$$

Une solution : $\dfrac{2(e-1)}{e+1}$.

3° La tangente T a pour équation $y=\dfrac{1}{3}x$.

T et $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à O, donc $\mathscr{C}$ est de part et d'autre de T à l'origine.

69. **1°** V ; **2°** F ; **3°** F ; **4°** V.

71. $A=x^{4-3}=x$; $B=x^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=x^{2\sqrt{2}}$;

$C=x^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}=x^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=x^{\frac{5}{6}}$;

$D=x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-0,1}=x^{0,15}$; $E=x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$;

$F=(x^{\frac{1}{10}})^5=x^{\frac{1}{2}}$; $G=(x^{\frac{1}{5}})^3=x^{\frac{3}{5}}$;

$H=(x^{\frac{1}{2}})^3x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}=x^{\frac{13}{6}}$.

74. **a)** $e^{6x}-4e^{3x}+3=0$

$\iff X=e^{3x}$ et $X^2-4X+3=0$

$\iff e^{3x}=1$ ou $e^{3x}=3$

$\iff x=0$ ou $x=\dfrac{1}{3}\ln 3$.

Solutions : 0 et $\dfrac{1}{3}\ln 3$.

b) $2e^x-5+2e^{-x}=0$

$\iff 2e^{2x}-5e^x+2=0$

$\iff e^x=X$ et $2X^2-5X+2=0$

$\iff e^x=2$ ou $e^x=\dfrac{1}{2}$

$\iff x=\ln 2$ ou $x=-\ln 2$.

Solutions : $\ln 2$ et $-\ln 2$.

c) $e^{2x}-4e^{-2x}=3$

$\iff e^{4x}-3e^{2x}-4=0$

$\iff e^{2x}=X$ et $X^2-3X-4=0$

$\iff e^{2x}=4$ ou $e^{2x}=-1$ $\iff 2x=\ln 4$.

Solution : $\ln 2$.

d) $e^x+e^{1-x}-(e+1)=0$

$\iff e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$

$\iff X=e^x$ et $X^2-(e+1)X+e=0$

$\iff e^x=e$ ou $e^x=1$

$\iff x=1$ ou $x=0$.

Solution : 0 et 1.

77. **a)** $10^x-10^{-x}-2=0$

$\iff 10^{2x}-10^x-2=0$

$\iff X=10^x$ et $X^2-X-2=0$

$\iff 10^x=-1$ ou $10^x=2$

$\iff x\ln 10=\ln 2$, car $10^x>0$ sur $\mathbb{R}$

$\iff x=\dfrac{\ln 2}{\ln 10}$.

Solution : $\dfrac{\ln 2}{\ln 10}$.

b) $2^{x+1}+3\times 2^{-x}=7$

$\iff 2\cdot 2^{2x}-7\cdot 2^x+3=0$

(en multipliant par 2^x)

$\iff 2^x=X$ et $2X^2-7X+3=0$

$\iff 2^x=3$ ou $2^x=\dfrac{1}{2}$

$\iff x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ ou $x=-1$.

Solutions : -1 et $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

c) $x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+4=0$

$\iff x^{\frac{1}{3}}=X$

et $X^2-5X+4=0$

$\iff x^{\frac{1}{3}}=1$ ou $x^{\frac{1}{3}}=4$ $\iff x=1$ ou $x=64$. Solutions : 1 et 64.

d) $3x^{\frac{1}{12}}+\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{6}}-2\sqrt{5}=0$

$\iff X=x^{\frac{1}{12}}$ et $\sqrt{5}\,X^2+3X-2\sqrt{5}=0$

$\iff x^{\frac{1}{12}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $x^{\frac{1}{12}}=-\sqrt{5}$

$\iff x=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^{12}$. Solution : $\dfrac{2^{12}}{5^6}$.

80. **a)** $2^x \geqslant 4 \iff 2^x \geqslant 2^2$.
Comme $x \mapsto 2^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, les solutions sont les réels supérieurs à 2.
b) $x \mapsto 3^x$ est croissante, donc l'inéquation équivaut à $-x < 2x$, soit à $x > 0$.
Ensemble solution : $]0 ; +\infty[$.
c) $x^\pi > 2 \iff e^{\pi \ln x} > e^{\ln 2}$
$\iff \pi \ln x > \ln 2$
$\iff \ln x > \dfrac{\ln 2}{\pi} \iff x > e^{\frac{\ln 2}{\pi}}$.
Ensemble solution : $]e^{\frac{\ln 2}{\pi}} ; +\infty[$.
d) $1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 5 \iff \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 4$
$\iff -x \ln 3 > \ln 4$
$\iff x < -\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.
Ensemble solution : $\left]-\infty ; -\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right[$.

87.
1° $5^{2x} - 1 = 0 \iff 5^{2x} = 1 \iff x = 0$.
f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2° $f(-x) = \dfrac{5^{-x}}{5^{-2x} - 1}$, soit, en multipliant par 5^{2x}, $f(-x) = \dfrac{5^x}{1 - 5^{2x}} = -f(x)$.
f est donc impaire.
3° $f'(x) = \dfrac{-\ln 5 \cdot 5^x(5^{2x} + 1)}{(5^{2x} - 1)^2} < 0$, donc f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
Comme f est impaire, il en est de même sur $]-\infty ; 0[$.
4° **a)** $f(x) = \dfrac{2}{3} \iff 2 \cdot 5^{2x} - 3 \times 5^x - 2 = 0$
$\iff X = 5^x$ et $2X^2 - 3X - 2 = 0$
$\iff 5^x = 2$ ou $5^x = -\dfrac{1}{2}$, mais $5^x > 0$ sur $\mathbb{R}$
$\iff x \ln 5 = \ln 2 \iff x = \dfrac{\ln 2}{\ln 5}$.
Solution : $\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$.
b) f étant impaire, l'équation $f(x) = -\dfrac{2}{3}$ a pour unique solution $-\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$.

Chapitre 6

3. Soit $P(n)$ la propriété « $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7 ».
Initialisation avec $n = 0$:
$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$,
donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, on a :
$3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7,
c'est-à-dire $3^{2n} - 2^n = 7k$, où k est un entier ; alors :
$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n} \times 9 - 9 \times 2^n \\ &\quad + 9 \times 2^n - 2^{n+1} \\ &= 9(3^{2n} - 2^n) + 2^n(9 - 2) \\ &= 9 \times 7k + 7 \times 2^n \\ &= 7(9k + 2^n) \end{aligned}$$
$3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est bien aussi un multiple de 7 ; la propriété $P(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : la propriété $P(n)$ étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie, par récurrence, pour tout entier naturel n .

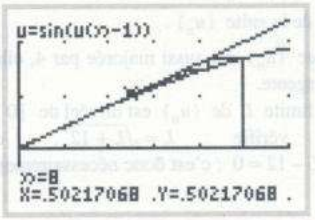
11. Soit $P(n)$ la propriété :
« $u_{n+1} - u_n > 0$ »
Initialisation avec $n = 0$:
$u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 1 > 0$,
donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, on a :
$u_{n+1} - u_n > 0$
alors :
$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \end{aligned}$$
or le dénominateur et le numérateur de ce quotient sont tous deux strictement positifs, et, par suite, on a :
$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$,
c'est-à-dire $P(n+1)$ vraie.
Conclusion : la propriété $P(n)$ étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie, par récurrence, pour tout entier naturel n , ce qui prouve la stricte croissance de la suite (u_n) .

13. **a)** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
$2n \geqslant 0$ et $n + 1 \geqslant 1 > 0$
donc $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 0$; d'autre part :
$\dfrac{2n}{n+1} - 2 = -\dfrac{2}{n+1} < 0$
ce qui achève de prouver l'encadrement :
$0 \leqslant \dfrac{2n}{n+1} < 2$.
b) Pour tout entier n , on a :
$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$.
Comme la fonction affine $t \mapsto \dfrac{3 - t}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$\dfrac{2}{2} \leqslant \dfrac{3 - \sin n}{2} \leqslant \dfrac{4}{2}$
et par suite $0 < 1 \leqslant \dfrac{3 - \sin n}{2} \leqslant 2$.
c) Pour tout entier n, on a aussi $0 \leqslant \sin^2 n \leqslant 1$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2 + t}{4}$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$0 < \dfrac{2}{4} \leqslant \dfrac{2 + \sin^2 n}{4} \leqslant \dfrac{3}{4} < 2$.

16. **a)** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^n + 4}{5} > 0$ pour tout entier n, donc la suite (u_n) est strictement croissante. De ce fait, elle est minorée par son premier terme $u_0 = \dfrac{2}{5}$.
Elle n'est pas majorée, car pour tout entier n, $u_n > \dfrac{4}{5} n$, suite arithmétique de raison $\dfrac{4}{5}$ strictement positive et donc de limite $+\infty$.
b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ pour tout entier n, donc la suite (u_n) est strictement croissante. De ce fait, elle est minorée par son premier terme $u_0 = 0$.
La suite est aussi majorée par 1, car pour tout entier n :
$u_n - 1 = -\dfrac{1}{n+1} < 0$.

19. **a)** En posant $f(x) = x^2 + 4x + 3$, pour $x \in [0 ; +\infty[$, on a :
$f'(x) = 2x + 4$
et $f'(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$; par suite, la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, il en est de même pour la suite (u_n) , puisque $u_n = f(n)$.
b) Tous les termes de la suite sont strictement positifs : on compare donc le rapport de 2 termes consécutifs à 1 :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \times \dfrac{n+1}{n+2}$
or $\dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{n-1}{3(n+2)}$ et, par suite, si $n \geqslant 1$ on a :
$\dfrac{n+1}{n+2} \geqslant \dfrac{2}{3}$,
d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{4}{3} > 1$:
la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 1$.
(**Remarque :** $u_0 = 1 = u_1 < u_2 < \dots$)
c) En posant $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x + 2}$, pour tout réel x positif, on a :
$g'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x - 1}{(x+2)^2}$
et comme g' est négative sur $[0 ; +\infty[$, la fonction g décroît, et il en est de même de la suite (u_n) , puisque, pour tout entier n, $u_n = g(n)$.
d) $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n+1} < 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$;
la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

30. **1°** On peut conjecturer que la suite est convergente vers 0, la tangente à la courbe d'équation $y = \sin x$ en O étant la droite d'équation $y = x$.



2° Par récurrence, on montre que :
« $u_n \in]0 ; 1]$ ».
Initialisation avec $n = 0$:
$u_0 = 1 \in]0 ; 1]$.
Hérédité : on suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on a :
$u_n \in]0 ; 1]$.
Alors, comme la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :
$0 < \sin u_n \leqslant \sin 1 \leqslant \sin \dfrac{\pi}{2} \leqslant 1$
et donc $u_{n+1} \in]0 ; 1]$.
Par récurrence, la propriété « $u_n \in]0 ; 1]$ » est vraie pour tout entier n .
3° On pose $f(x) = x - \sin x$, pour $x \in [0 ; 1]$.
$f'(x) = 1 - \cos x$.

Or $1-\cos x>0$, si $x\in\,]0\,;\,\pi]$; par suite, la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ et, comme $f(0)=0$, on a :

$f(x)>0$ si $x\in\,]0\,;\,1]$.

En appliquant ce résultat avec $x=u_n$ (qui est élément de $]0\,;\,1]$ pour tout entier n), on obtient :

$u_n-\sin u_n>0$.

Ce qui donne $u_n>u_{n+1}$, et prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4° La suite est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers un réel L de $[0\,;\,1]$ qui vérifie $L=\sin L$, c'est-à-dire $f(L)=0$; l'étude du **3°** montre que, nécessairement, $L=0$.

32. **1°** Par récurrence :

Initialisation avec $n=0$:

$u_0=1\in[0\,;\,4]$.

Hérédité : On suppose que, pour un certain entier $n\geqslant 0$, on a :

$u_n\in[0\,;\,4]$.

Alors, comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a :

$\sqrt{12}\leqslant\sqrt{u_n+12}\leqslant\sqrt{16}$,

et donc $u_{n+1}\in[0\,;\,4]$.

Par récurrence, la propriété « $u_n\in[0\,;\,4]$ » est vraie pour tout entier n .

2° a) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+12}-u_n$

$=\dfrac{u_n+12-u_n^2}{\sqrt{u_n+12}+u_n}$

or le trinôme $-X^2+X+12$ a pour racines -3 et 4, et est positif ou nul lorsque X appartient à $[-3\,;\,4]$; par suite, comme $u_n\in[0\,;\,4]$, $\dfrac{u_n+12-u_n^2}{\sqrt{u_n+12}+u_n}\geqslant 0$ (le dénominateur étant strictement positif) et donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (u_n) .

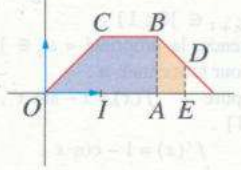
Puisque (u_n) est aussi majorée par 4, elle est convergente.

b) La limite L de (u_n) est un réel de $[0\,;\,4]$ qui vérifie $L=\sqrt{L+12}$, donc $L^2-L-12=0$; c'est donc nécessairement 4.

Chapitre 7

1. **1°** Vrai. f est positive sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$. L'intégrale est la somme des aires des deux trapèzes $OABC$ et $ABDE$.

$\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$.



2° Vrai. $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$.

3° Vrai. L'intégrale est la somme des aires du triangle OIC et d'un rectangle de dimensions 1 et $(\beta-1)$.

$\displaystyle\int_0^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+(\beta-1)\times 1=\beta-\frac{1}{2}$.

7. **1°** V ; **2°** F ; **3°** V.

8. **1°** f est positive sur $[0\,;\,4]$.

$\displaystyle\int_0^{2} f(t)\,\mathrm{d}t=2+\pi$;

$\displaystyle\int_0^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=2+\pi+5=7+\pi$.

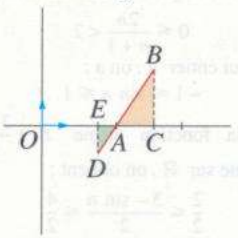
2° g est négative sur $[0\,;\,4]$.

L'intégrale est l'opposée de l'aire du domaine délimité par la courbe de g , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.

Les courbes de f et g sont symétriques par rapport à (Ox) , donc :

$\displaystyle\int_0^{4} g(t)\,\mathrm{d}t=-(7+\pi)$.

3° Sur $[2\,;\,4]$, la courbe de h coupe (Ox) au point A d'abscisse $\dfrac{8}{3}$.



$\displaystyle\int_2^{4} h(t)\,\mathrm{d}t=-\text{Aire }(AED)+\text{Aire }(ACB)$

$=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}=1$.

10. **1°** Vrai. C'est le théorème admis du cours page 175.

2° Faux. F étant une primitive de f sur $[0\,;\,3]$, on a $F'=f$.

3° Vrai. $F'(x)=\ln(1+x)$ et comme $x\in[0\,;\,3]$, on a $1+x\geqslant 1$ donc $\ln(1+x)\geqslant 0$.

11. **1°** V ; **2°** V ; **3°** F.

12. **a)** $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)\,\mathrm{d}x$

$=\left[\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{0}=-4$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_{-1}^{1}=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

c) $\displaystyle\int_2^{0} t(t^2-4)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}(t^2-4)^2\right]_2^{0}=4$.

d) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{3\ln 3}-\mathrm{e}^{3\ln 2})=\dfrac{19}{3\mathrm{e}}$.

16. **1°** V ; **2°** V ; **3°** F ; **4°** F.

20. **1°** En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients, on a $a=2$ et $b=3$.

2° $\displaystyle\int_2^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

$=2\displaystyle\int_2^{3}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+3\int_2^{3}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$,

par linéarité.

Pour $x\in[2\,;\,3]$, on a $x-1>0$ et $x+1>0$. Ainsi :

$\displaystyle\int_2^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=2\,[\ln(x-1)]_2^3+3\,[\ln(x+1)]_2^3$

$=8\ln 2-3\ln 3$.

31. **1°** f est de la forme e^u avec u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x : $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=-2xf(x)$.

$x\mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que f , car dérivable, donc f' est continue sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x :

$\displaystyle\int_0^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t=[f(t)]_0^x=f(x)-f(0)$,

d'où le résultat.

2° a) Si $t\in[0\,;\,1]$, alors $0\leqslant t^2\leqslant 1$;

donc $-1\leqslant -t^2\leqslant 0$ puis $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 1$.

On déduit :

$-\dfrac{2t}{\mathrm{e}}\geqslant -2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\geqslant -2t$

soit $-2t\leqslant f'(t)\leqslant -\dfrac{2}{\mathrm{e}}t$.

b) En intégrant de 0 à x , la double inégalité, pour x dans $[0\,;\,1]$, on obtient :

$\displaystyle\int_0^{x}-2t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}-\frac{2}{\mathrm{e}}t\,\mathrm{d}t$

soit $\displaystyle[-t^2]_0^x\leqslant\int_0^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}t^2\right]_0^x$

$-x^2\leqslant\displaystyle\int_0^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}x^2$.

c) En utilisant **1°** , on obtient :

$-x^2\leqslant f(x)-f(0)\leqslant-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2$

soit $-x^2+1\leqslant f(x)\leqslant-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2+1$.

3° En intégrant de 0 à 1, on obtient :

$\displaystyle\int_0^{1}(-x^2+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\leqslant\displaystyle\int_0^{1}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}x^2+1\right)\mathrm{d}x$

soit $\dfrac{2}{3}\leqslant\displaystyle\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 1-\frac{1}{3\mathrm{e}}$.

38. **1°** F est la primitive, qui s'annule en 1 sur $]0\,;+\infty[$, de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. Donc F a pour dérivée f .

Pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^x>0$, donc $f(x)>0$. On en déduit que F est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2° a) Pour $t>0$, on a $e^t>1$ d'où, en multipliant par $\frac{1}{t}$, $\frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}$.

b) Pour $x>0$,

$$\varphi(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt-\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=\int_1^x \left(\frac{e^t}{t}-\frac{1}{t}\right)dt .$$

Quel que soit $t>0$, d'après **a)**, $\frac{e^t}{t}-\frac{1}{t}>0$.

D'après le résultat de cours sur le signe d'une intégrale, on a :

si $x>1$, alors $\varphi(x)>0$;

si $0<x<1$, alors $\varphi(x)<0$;

et $\varphi(1)=0$.

c) On déduit :

• pour $x>1$ $F(x)>\ln x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, par comparaison, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.

• pour $0<x<1$ $F(x)<\ln x$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$, par comparaison, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=-\infty$.

41. **1°** V ; **2°** V ; **3°** V.

44. **1°** Par linéarité, on a :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24} .$$

et $$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx .$$

Cette deuxième intégrale se calcule par parties.

On pose $u(x)=x^2$ et $v'(x)=\cos 2x$.

On a $u'(x)=2x$ et on prend, par exemple, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Ainsi

$$I-J=\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx .$$

Une seconde intégration par parties est nécessaire.

On pose $w(x)=x$ et $z'(x)=\sin 2x$.

On a $w'(x)=1$ et on prend, par exemple, $z(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

Ainsi :

$$I-J=\left[\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\left[-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi}{4} .$$

2° Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi^3}{24} \\ I-J=-\frac{\pi}{4} \end{cases} .$$

On a $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ et $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$.

54. **1°** V ; **2°** V.

57. Par définition,

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}mx^2+px\right]_a^b$$

$$\mu=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}m(b^2-a^2)+p(b-a)\right)$$

$$\mu=\frac{1}{2}m(b+a)+p .$$

Ainsi, $\mu=g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

C'est l'image par g du centre de l'intervalle $[a\,;b]$.

61. La courbe d'équation $y=(4-x)\ln x$ coupe (Ox) en deux points d'abscisses 1 et 4.

Sur $[1\,;4]$, on a $(4-x)\ln x\geqslant 0$.

En unités d'aire, l'aire cherchée est :

$$\mathcal{A}=\int_1^4 (4-x)\ln x\,dx .$$

On calcule cette intégrale par parties.

On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=4-x$.

On a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et on choisit, par exemple :

$$v(x)=4x-\frac{1}{2}x^2 .$$

$$\mathcal{A}=\left[\left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x\right]_1^4-\int_1^4 \left(4-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=8\ln 4-\left[4x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^4$$

$$=8\ln 4-\left(8+\frac{1}{4}\right)$$

$$=16\ln 2-\frac{33}{4} .$$

1 u.a. $=2\times 3=6$ cm^2.

Ainsi :

$$\mathcal{A}=6\left(16\ln 2-\frac{33}{4}\right)=96\ln 2-\frac{99}{2}\text{ cm}^2$$

et $\mathcal{A}\approx 1\,704$ mm^2.

Chapitre 8

1. **1°** V ; **2°** V ; **3°** V ; **4°** F ; **5°** V.

4. $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$=0,2$;

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{7}$;

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}$.

7. Soit B l'événement : « le dé rouge affiche 3 », on a :

$B=\{(3\,;1)\,;(3\,;2)\,;(3\,;3)\,;$
$(3\,;4)\,;(3\,;5)\,;(3\,;6)\}$

et $P(B)=\frac{1}{6}$.

Soit S l'événement : « la somme des faces est paire et le dé rouge affiche 3 » :

$S=\{(3\,;1)\,;(3\,;3)\,;(3\,;5)\}$

et $P(S)=\frac{1}{12}$.

$P_B(S)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(*Remarque* : $\frac{P(S)}{P(B)}=\frac{1/12}{1/6}=\frac{1}{2}$.)

8. Soit V l'événement : « l'individu est vacciné », on a $P(V)=\frac{1}{3}$.

Soit G l'événement : « l'individu est grippé », on a $P(G)=\frac{1}{4}$ et $P_G(V)=\frac{1}{10}$.

On cherche à calculer $P_V(G)=\frac{P(G\cap V)}{P(V)}$, or :

$$P(G\cap V)=P(G)\times P_G(V)=\frac{1}{40} ;$$

d'où $P_V(G)=\frac{3}{40}$.

11. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** V.

12. **1°** $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,4\times 0,3$
$=0,12$;

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=0,4+0,3-0,12=0,58$.

2° Si A et B sont incompatibles, alors :

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0$ et

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,7$.

13. **1°** On obtient, par différence :

$P(A\cap B)=0,12$.

On constate donc que :

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$,

donc A et B sont indépendants.

2° $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$
$=1-P(A\cup B)=0,42$

$P(\overline{A})=1-P(A)=0,6$ et

$P(\overline{B})=1-P(B)=0,7$;

donc $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\times P(\overline{B})$.

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

14. Par différence, on obtient :

$P(A\cap B)=0,24$;

donc :

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,24}{0,3}=0,8=P(A) .$$

Donc A et B sont indépendants.

19. **1°** $P(A)=\frac{90}{150}=0,6$;

$P(B)=\frac{18}{150}=0,12$; $P(C)=\frac{27}{150}=0,18$.

2° a) $\frac{33}{78}=\frac{11}{26}$; **b)** non : $\frac{11}{26}\neq\frac{60}{150}$;

c) si V désigne l'événement : « le stagiaire pratique la voile », on a :

$$P_V(A)=\frac{27}{45}=0,6=P(A) ,$$

donc A et V sont indépendants.

22. **1°** $P_R(S)=\frac{9}{18}=0,5$;

or $P(S)=\frac{18}{36}=0,5$, donc S et R sont indépendants.

2° Comme les dés rouge et vert jouent des rôles symétriques, on a de même S et V indépendants.

3° Mais, comme $P_{R\cap V}(S)=1\neq P(S)$:
S et $R\cap V$ ne sont pas indépendants.

26. **1°** Il faut lire :
$P((X=0)\cap(Y=0))=0,18$.

2° On a, en faisant les sommes en colonnes puis en lignes :
$P(X=0)=0,3 \quad P(X=1)=0,7$
$P(Y=0)=0,6 \quad P(Y=1)=0,4$
On vérifie alors que :
$P((X=0)\cap(Y=0))=P(X=0)\times P(Y=0)$
$P((X=0)\cap(Y=1))=P(X=0)\times P(Y=1)$
$P((X=1)\cap(Y=0))=P(X=1)\times P(Y=0)$
$P((X=1)\cap(Y=1))=P(X=1)\times P(Y=1)$
X et Y sont donc indépendantes, il n'y a *a priori* pas de concertation chez les Silem pour l'achat du pain.

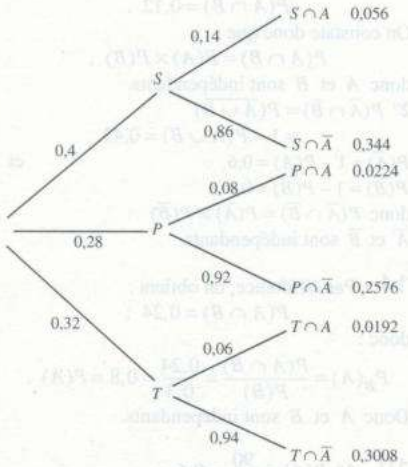
28. **1°** V ; **2°** V ; **3°** V.

29.

	2de	1re	Term.	total
participe	70	28	24	122
ne participe	430	322	376	1 128
	500	350	400	1 250

1° $\frac{70}{500}=0,14$.

2° a) A désigne l'événement : « l'élève participe à l'atelier ».

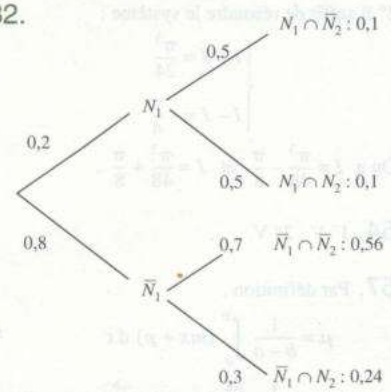


b) $P(S\cap A)=0,4\times 0,14=0,056$,
c'est aussi $\frac{70}{1\,250}=\frac{7}{125}$.

c)
$P(A)=P(S \text{ et } A)+P(P \text{ et } A)+P(T \text{ et } A)$
$=0,4\times 0,14+0,28\times 0,08+0,32\times 0,06$
$=0,0976$.

d) $\frac{28}{122}=\frac{14}{61}\approx 0,23$.

32.



$P(N_2)=P(N_1\cap N_2)+P(\overline{N}_1\cap N_2)$
$=0,1+0,24=0,34$.

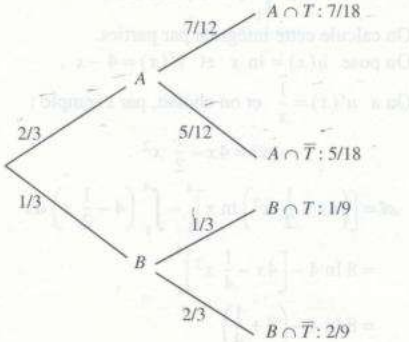
35. **1°** V ; **2°** F ; **3°** F ; **4°** V.

37. **1° a)** On applique le principe multiplicatif :
$\left(\frac{7}{12}\right)^3$;

b) $\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{432}$;

c) $6\times\frac{7}{432}=\frac{7}{72}$.

2° a) Soit T l'événement : « la case 3 est atteinte ».



D'après l'énoncé, on a $P_A(T)=\frac{7}{12}$ et donc :
$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=\frac{2}{3}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{18}$.

De même, $P_B(T)=\frac{1}{3}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$; d'où :
$P(B\cap T)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

$P(T)=P(A\cap T)+P(B\cap T)$, car $B=\overline{A}$.

D'où $P(T)=\frac{7}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}$.

b) $P_T(A)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{9}$.

38. On note S_i l'événement : « le i-ième téléviseur n'a pas connu de panne pendant la période de garantie » pour $i=1, 2, 3$ et 4 .
$P(S_i)=0,95$.

1° En appliquant le principe multiplicatif :
$P(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4)=0,95^4\approx 81\%$.
La probabilité qu'au moins l'un des téléviseurs tombe en panne sur la période est donc :
$1-0,95^4\approx 19\%$.

2° Il y a quatre événements élémentaires du type $S_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3\cap\overline{S}_4$, ayant la même probabilité $0,95\times 0,05^3$, deux à deux disjoints et dont la réunion est l'événement cherché.
La probabilité qu'exactement 3 téléviseurs tombent en panne est donc :
$4\times 0,95\times 0,05^3\approx 0,05\ \%$.

Chapitre 9

1. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V ; **4°** V .

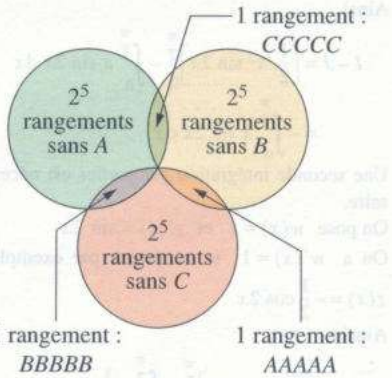
2. **1°** V ; **2°** F ; **3°** V .

4. Soit N le nombre de personnes dans le groupe, on a :
$\frac{3}{5}N+\frac{1}{3}N-42+\frac{1}{5}N=N$,
d'où $N=315$.

7. **1°** En notant A , B et C les trois tiroirs et en numérotant les pulls que l'on peut considérer de couleurs différentes, on peut coder un rangement par une suite de 5 lettres choisies parmi A , B ou C (exemple : $AABAC$) .
L'arbre de choix montre que l'on a trois possibilités pour le 1er pull, trois pour le 2e et ainsi de suite jusqu'au 5e.
Il y a donc $3^5=243$ rangements possibles.

2° Ci-dessous le schéma des rangements n'utilisant pas un tiroir :
- les rangements qui n'utilisent pas le tiroir A : 2^5 ;
- les rangements qui n'utilisent pas le tiroir B : 2^5 ;
- les rangements qui n'utilisent pas le tiroir C : 2^5 .

Comme il y a pour chaque tiroir un seul rangement qui n'utilise que ce tiroir, le nombre de rangements qui n'utilisent pas un tiroir est :
$3\times(2^5-2)+3=3\times(2^5-1)$.
Le nombre de rangements pour lesquels chaque tiroir a au moins un pull est donc :
$3^5-3\times(2^5-1)=150$.



10. Il y a 16 possibilités pour choisir un président, 15 pour un secrétaire et 14 pour un trésorier.
Il y a donc $16\times 15\times 14=3\,360$ choix possibles.

12. 1° V ; 2° F ; 3° V .

14. 1° $5! = 120$. 2° $4! = 24$. 3° $\frac{5!}{2} = 60$.

15. 1° $7!$.
2° a) $5 \times 6!$; b) $5 \times 4 \times 5!$; c) $2 \times 6!$;
d) $2 \times 5 \times 5!$; e) $5!$.
3° $\frac{8!}{2!} = 4 \times 7!$.

18. 1° V ; 2° F ; 3° V .

19. 1° F ; 2° F ; 3° F .

20. 1° $\binom{n+1}{p+1}$.
2° a) Il reste à choisir p éléments parmi les n éléments de E autres que a, d'où : $\binom{n}{p}$.
b) Il reste à choisir $p+1$ éléments parmi les n éléments de E autres que a, d'où :
$$\binom{n}{p+1} .$$
3° Comme une combinaison de E comporte l'élément a ou ne le comporte pas, les deux cas s'excluant, on a :
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} .$$

22. a) $\binom{5}{2} \times 3^3 \times (-1)^2 = 270$;
b) $\binom{6}{4} \times 2^4 = 240$;
c) $\binom{7}{2} \times 2^2 \times (-3)^5 = -20\,412$.

24. 1° a) $\binom{n}{2}$; b) 10 ;
c) $\binom{n}{2} = 21 \iff n = 7$.
2° a) $\binom{n}{3}$; b) n .

27. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° F .

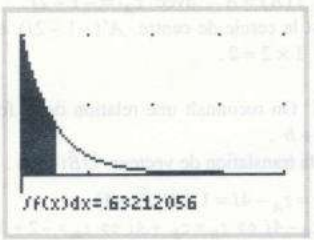
29. 1° $P(E) = \frac{8}{23}$.
2° a) Les tirages successifs lors d'une partie sont indépendants, puisque l'on remet les 2 jetons tirés dans l'urne avant chaque nouveau tirage.
X suit la loi binomiale de paramètres 7 et $\frac{8}{23}$.
b) $P(A) = P(X = 3) = \binom{7}{3} \times \left(\frac{8}{23}\right)^3 \times \left(\frac{15}{23}\right)^4 \approx 0{,}2664$.
c) $P(B) = P(X \geqslant 6) = P(X = 6) + P(X = 7)$
$= \binom{7}{6} \times \left(\frac{8}{23}\right)^6 \times \left(\frac{15}{23}\right) + \binom{7}{7} \times \left(\frac{8}{23}\right)^7 \approx 0{,}0087$

31. 1° X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{2}{3}$.
2° $E(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$, soit en moyenne 4 obstacles franchis « sans faute » et donc 2 obstacles avec faute qui pénalisent le cavalier de deux minutes. La durée moyenne du parcours est donc de $(9+2) = 11$ minutes .

33. 1° V ; 2° V ; 3° V ; 4° a) F ;
b) V, car $\int_0^{\ln 2} 0{,}5e^{-0{,}5t}\,dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$;
c) F : $P([0 ; \ln 4]) = 1 - P([\ln 4 ; +\infty[)$.

34. 1° $f'(t) = -4e^{-2t}$; f' est donc strictement négative sur $[0 ; +\infty[$ et f strictement décroissante.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	−	
$f(t)$	2 ↘	0



2° a) $P([0 ; 0{,}5]) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321$.
b) $P([1 ; 2]) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4} \approx 0{,}1170$.
c) $P([3 ; +\infty[) = \frac{1}{e^6} \approx 0{,}0025$

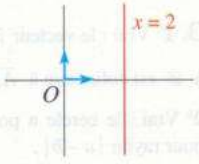
35. $\int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{e^4 - 1}{e^4}$
$\iff [-e^{-\lambda t}]_0^2 = 1 - \frac{1}{e^4}$
$\iff 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-4}$
$\iff \lambda = 2$.

39. 1° $P([0 ; 1]) = 1 - 0 = 1$;
$P(\varnothing) = P([0{,}5 ; 0{,}5[) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$.
2° $P([0 ; a[\cup]b ; 1])$
$= P([0 ; a[) + P(]b ; 1]) = a - 0 + 1 - b$
$= 1 - (b - a) = 1 - P([a ; b])$.

Chapitre 10

1. 1° V ; 2° V ; 3° V ; 4° F .

3. 1° $\mathrm{Re}(z) = 2 \iff z = 2 + iy$, avec y quelconque dans $\mathbb{R}$.
$\iff M(2 ; y)$, avec y quelconque dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble est la droite d'équation $x = 2$.



5. 1° V ; 2° V ; 3° F ; 4° V .

6. 1° V ; 2° F ; 3° F .

7. 1° V ; 2° V ; 3° F .

9. 1° $z_A = 1 - 3i$, $z_B = 4 + 5i$ et $z_C = -3 + 2i$.
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 8i$, de la même façon :
$z_{\overrightarrow{AC}} = -4 + 5i$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = -7 - 3i$.
2° $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\iff z_D - z_A = 2z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}}$
$\iff z_D = 2(3 + 8i) + (-4 + 5i) + 1 - 3i$
$\iff z_D = 3 + 18i$.
En raisonnant de manière identique, $z_E = \frac{5}{3} + 4i$.
3° On a $z_{\overrightarrow{AD}} = 2 + 21i$ et $z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{2}{3} + 7i$,
donc $z_{\overrightarrow{AD}} = 3z_{\overrightarrow{AE}}$. On en déduit :
$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$ et A, D, E sont alignés.

18. $z_1 = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = \frac{(8i - 1)(2 + 3i)}{4 + 9}$
$= \frac{-26 + 13i}{13} = -2 + i$.
$z_2 = 2i + \frac{5}{i} = 2i - 5i = -3i$.
$\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{5} = \frac{1 + 3i}{5}$;
donc $z_3 = \frac{(1 + 3i)^2}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}\,i$.
$\frac{4 - i}{2 + i} = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}\,i$, $\frac{i}{3 + i} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\,i$;
donc $z_4 = \frac{3}{2} - \frac{9}{10}\,i$.

23. Sous forme algébrique :
$z = [-a(2a - b) - (a + b)^2] + i[(a + b)(-a + b)]$
z est réel $\iff \mathrm{Im}(z) = 0$
$\iff (a + b)(-a + b) = 0$
$\iff a = b$
ou $a = -b$.
z est réel si, et seulement si, a et b sont égaux ou opposés.

32. 1° V ; 2° V ; 3° F .

35. a) $\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(2 - z_1) = 17 \\ z_2 = 2 - z_1 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} z_1^2 - 2z_1 + 17 = 0 \\ z_2 = 2 - z_1 \end{cases}$
$z^2 - 2z + 17 = 0$ a pour solutions : $1 + 4i$ et $1 - 4i$.
Le système donné est donc équivalent à :
$\begin{cases} z_1 = 1 + 4i \\ z_2 = 1 - 4i \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_1 = 1 - 4i \\ z_2 = 1 + 4i \end{cases}$.
On a deux couples solutions :
$(1 + 4i ; 1 - 4i)$ et $(1 - 4i ; 1 + 4i)$.

42. 1° V ; 2° V ; 3° V ; 4° V .

43. 1° F ; 2° F ; 3° F ; 4° F .

44. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V .

50. • $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$; donc :

$z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Un argument de z_1 est θ_1 tel que :

$\cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{3\pi}{4}$ convient.

• $|z_2| = 1$ et $z_2 = 1(0+1i)$.

Un argument de z_2 est θ_2 tel que :

$\cos\theta_2 = 0$ et $\sin\theta_2 = 1$.

$\frac{\pi}{2}$ convient.

• $|z_3| = 2\sqrt{2}$, donc $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$.

Un argument de z_3 est θ_3 tel que :

$\cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_3 = \frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{6}$ convient.

• $|z_4| = 1$, $\frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Un argument de z_4 est $-\frac{\pi}{3}$.

59. • $z_1 = 5 - 5i = 5(1-i)$

$= 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Or $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

donc $z_1 = 5\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

• $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} = 2(1 + i\sqrt{3})$

$= 4\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

• $z_3 = (-1-i)\,i = -(1+i)\,i$

$= -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Comme $e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$,

on a $z_3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $(-\sqrt{2} < 0)$.

On écrit $-1 = e^{i\pi}$ et on obtient :

$z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, soit $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

• $z_4 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)\times 2\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 4e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

63. 1° F ; 2° V ; 3° V ; 4° V .

64. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V .

67. 1° **a)** On introduit les points A et B d'affixes respectives 1 et i :

$|z-1| = |z-i| \iff AM = BM$.

L'ensemble est la médiatrice de $[AB]$.

b) On introduit le point C d'affixe $-i$.

$|z+i| = 4 \iff CM = 4$.

L'ensemble est le cercle de centre C et de rayon 4.

2° **a)** $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, la médiatrice de $[AB]$ est la bissectrice intérieure de $(\vec{u}, \vec{v})$. Elle a pour équation $y = x$.

b) $CM = 4 \iff x^2 + (y+1)^2 = 4$.

82. 1° $z' + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$

$\iff z' - (-3+4i) = 2[z - (-3+4i)]$.

On reconnaît une relation de la forme :

$z' - \omega = k(z - \omega)$, avec $k \in \mathbb{R}$.

f est l'homothétie de centre $\Omega(-3+4i)$ et de rapport 2 .

2° Une homothétie h transforme un cercle $\mathscr{C}_1$ en un cercle $\mathscr{C}_2$.

Le centre de $\mathscr{C}_2$ est l'image par h du centre de $\mathscr{C}_1$ et le rayon de $\mathscr{C}_2$ est le rayon de $\mathscr{C}_1$ multiplié par la valeur absolue du rapport de h .

$f(A) = A'$, avec $z_{A'} = -1 - 2i$.

$\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $A'(-1-2i)$ et de rayon $1 \times 2 = 2$.

95. 1° On reconnaît une relation de la forme $z' = z + b$.

f est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}(-4i)$.

2° $z_{A'} = z_A - 4i = 1 + i(\sqrt{3} - 4)$.

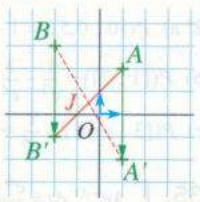
$z_{B'} = z_B - 4i \iff z_B = z_{B'} + 4i \iff z_B = -2 + 3i$.

3° Par définition d'une translation :

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$;

donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.

J milieu de $[AB']$ est donc aussi celui de $[A'B]$, donc A' , J et B sont alignés.



Chapitre 11

1. 1° Faux : $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$

$= AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 28$.

2° Vrai : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$

$= AH^2 - AH^2 + AH^2 = AH^2$.

3° Vrai : on a $\overrightarrow{HA} = k\vec{n}$;

$\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HA}\cdot\vec{n} = k\|\vec{n}\|^2$, donc $k = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$.

2. 1° Vrai : Si on appelle I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$, il s'agit du demi-plan limité par la perpendiculaire à (AI) en A et ne contenant pas I.

2° Faux.

3° Faux : c'est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon 1 .

3. 1° Vrai : le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2° Vrai : le cercle a pour centre $\Omega(a\,;\,b)$ et pour rayon $|a-b|$.

3° Faux : le cercle a pour centre $\Omega(1\,;\,4)$ et pour rayon 5.

Comme $A\Omega < 5$, la droite ne peut pas être tangente au cercle, car A est intérieur au cercle.

6. On a :

• $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DC}\right)$.

Comme $(AB)\perp(AD)$ et $(BC)\perp(DC)$ et, en posant $AB = AD = c$, on obtient :

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\,AB^2 + \frac{1}{2}\,AD^2 = \frac{5}{6}\,c^2$.

• $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = AI\cdot AJ\cos(\widehat{IAJ})$

ADJ est rectangle en D, donc en utilisant le théorème de PYTHAGORE :

$AJ^2 = AD^2 + DJ^2 = c^2 + \frac{1}{9}\,c^2 = \frac{10}{9}\,c^2$

donc $AJ = \frac{\sqrt{10}}{3}\,c$.

De même $AI = \frac{\sqrt{5}}{2}\,c$; donc :

$\frac{\sqrt{5}}{2}\,c \times \frac{\sqrt{10}}{3}\,c \times \cos(\widehat{IAJ}) = \frac{5}{6}\,c^2$

donc $\cos\widehat{IAJ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\widehat{IAJ} = 45°$.

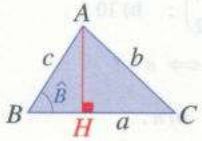
7. 1° Soit $[AH]$ la hauteur issue du sommet A.

$\sin\widehat{B} = \frac{AH}{BA}$, donc :

$AH = BA\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

L'aire de ABC est égale à $\frac{BC\cdot AH}{2}$, donc :

Aire $ABC = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2}$.



En utilisant les autres hauteurs, on exprime l'aire de ABC par :

$\frac{ab\sin\widehat{C}}{2}$ et $\frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$.

On a donc :

$\frac{ac\sin\widehat{B}}{2} = \frac{ab\sin\widehat{C}}{2} = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$,

Soit, en multipliant par $\frac{2}{abc}$:

$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$;

ces calculs restent valables dans le cas où le triangle ABC a un angle obtus, car $\sin(180 - x) = \sin x$.

2° On a donc :

$\widehat{BAC} = 180° - (20° + 50°) = 110°$,

soit $\frac{\sin 110°}{8} = \frac{\sin 20°}{b} = \frac{\sin 50°}{c}$.

On a $b = \frac{8\sin 20°}{\sin 110°}$; $b \approx 2{,}9$ à 0,1 près.

$c = \frac{8\sin 50°}{\sin 110°}$; $c \approx 6{,}5$ à 0,1 près.

12. 1° Soit I le milieu de $[BC]$.
On a $(OI) \perp (BC)$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$.
$\vec{V} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC}$
$= (\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{OI}) \cdot \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$
H étant l'orthocentre du triangle ABC, $(HA) \perp (BC)$, donc $\vec{V} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
On démontre de même que :
$\vec{V} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

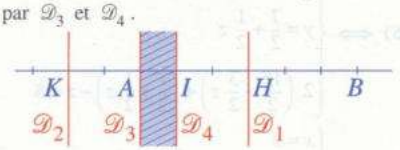
2° $\vec{V}$ est un vecteur du plan orthogonal à deux droites non parallèles, donc $\vec{V} = \vec{0}$, soit :
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

3° On a :
$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} + \vec{0}$,
car G est l'isobarycentre de A, B et C.
O et G sont distincts si, et seulement si, ABC n'est pas équilatéral.
Si le triangle ABC n'est pas équilatéral, (OG) est la droite d'Euler du triangle ABC.

15. **a)** Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$.
$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens
et $AH \cdot AB = 18$, soit $6AH = 18$, donc $AH = 3$. Alors H est le milieu de $[AB]$.
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18 \iff (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} = 18$
$\iff \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$
$\iff \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
L'ensemble cherché est la droite $\mathscr{D}_1$ perpendiculaire en H à (AB).

b) Si K est le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$, l'ensemble cherché est la droite $\mathscr{D}_2$ passant par K et perpendiculaire à (AB).

c) Soit $\mathscr{D}_3$ la droite perpendiculaire à (AB) passant par A et $\mathscr{D}_4$ la droite passant par I tel que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.
L'ensemble cherché est la bande de plan limitée par $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.



16. 1° • Si $\alpha \neq -1$, le système de points $(A ; \alpha)$, $(B ; 1)$, $(C ; 1)$ et $(D ; \alpha)$ admet un barycentre G, donc dans ce cas :
$\alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD} = (2 + 2\alpha)\overrightarrow{MG}$,
donc $\overrightarrow{MM'} = (2 + 2\alpha)\overrightarrow{MG}$.
Pour tout point M du plan :
$\overrightarrow{GM'} = -(2\alpha + 1)\overrightarrow{GM}$,
• Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, la transformation est l'homothétie de centre G et de rapport $-(2\alpha + 1)$.
• Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, tout point M a pour image G.
• Si $\alpha = -1$:
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant du point M.
La transformation est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

2° Le système de points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(C ; 1)$, $(D ; 1)$ admet pour barycentre le centre O du carré.
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$
$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2$,
$= 4MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$
$= 4MO^2 + 4OA^2$, car $ABCD$ est un carré.
Comme $OA^2 = \frac{1}{2}c^2$, on a :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2$
$\iff 4MO^2 + 2c^2 = 4c^2$
$\iff OM^2 = \frac{1}{2}c^2$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$. C'est le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

3° • $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
$= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$;
• $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$;
$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2$
$\iff 2\overrightarrow{BA} \cdot 4\overrightarrow{MO} = 2c^2$
$\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}c^2$.
Soit H le point de la parallèle à (AB) passant par O, tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}c^2$, on a $OH = \frac{1}{4}c$.
L'ensemble des points cherchés est la droite perpendiculaire à (AB) en H.

20. 1° La hauteur d issue de C a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc :
$M(x ; y) \in d \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
$\iff -5x + 20 - y + 2$.
Comme $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 2 \end{pmatrix}$.
d a pour équation $5x + y - 22 = 0$.

2° La hauteur issue de A a pour équation $x = 6$.
Ces deux hauteurs se coupent en $I(6 ; -8)$.
L'orthocentre du triangle ABC est le point I.

31. 1° Vrai : C, D, E appartiennent aux plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

2° **a)** Vrai ; **b)** Faux : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = a^2$;
c) Faux : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = -a^2$; **d)** Vrai.

32. 1° Vrai.

2° Faux : il faut que $k + \frac{AB^2}{4} > 0$.

33. 1° Faux : les vecteurs normaux aux deux plans ne sont pas orthogonaux.

2° Faux : $\overrightarrow{AD}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

3° Vrai : car le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

4° Faux.

34. **a)** SAB est un triangle équilatéral :
$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}a^2$
où I est le milieu de $[SA]$.

b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$, car $(SA) \perp (SC)$, en effet, on a $AC^2 = SA^2 + SC^2$.

c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{-a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2$, avec O centre du carré $ABCD$.

39. On a $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI}) \cdot \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$.
$\mathscr{D} \perp \mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ le plan contenant $\mathscr{C}$.
$(OI) \perp (BC)$, car $[BC]$ est une corde du cercle $\mathscr{C}$.
Donc $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
Le point M de $\mathscr{D}$ se projette orthogonalement en I sur (BC).

43. 1° F ; 2° F ; 3° F ; 4° F.

44. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V.

49. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ et on pose $AH = h > 0$.
Soit $\mathscr{E}_\ell$ l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ qui sont à la distance ℓ de A.
• Si $\ell < h$, $\mathscr{E}_\ell$ ne contient pas de points.
• Si $\ell = h$, $\mathscr{E}_\ell$ est réduit au point H.
• Si $\ell > h$, on a $AM^2 = AH^2 + HM^2$, donc :
$M \in \mathscr{E}_\ell \iff HM^2 = \ell^2 - h^2$
$\iff HM = \sqrt{\ell^2 - h^2}$;
$\mathscr{E}_\ell$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{\ell^2 - h^2}$.

56. 1° $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$;
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$;
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 10$.
2° $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5}$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{11}$;
$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{14}$.
$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{55}}$;
$\widehat{BAC} \approx 82{,}3°$,
$\cos \widehat{CBA} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BA}\|} = \frac{4}{\sqrt{70}}$;
$\widehat{CBA} \approx 61{,}4°$, donc $\widehat{ACB} \approx 36{,}3°$.

Chapitre 12

1. 1° F ; 2° F ; 3° V ; 4° F .

3. $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) .$$
Intersection avec $(O\,;\vec{i},\vec{j})$:
$$A\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{-11}{3}\,;\,0\right) ;$$
avec $(O\,;\vec{j},\vec{k})$: $B(0\,;-7\,;-5)$;
avec $(O\,;\vec{i},\vec{k})$: $C\left(\frac{7}{2}\,;\,0\,;\,\frac{11}{2}\right)$.

5. 1° $A \in \mathscr{D}$; $B \notin \mathscr{D}$.
2° Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$: $\vec{u}(1\,;-2\,;-3)$.
3° $\mathscr{D}'$ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

8. On considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$: $A(0\,;0\,;0)$; $B(1\,;0\,;0)$; $C(0\,;1\,;0)$; $M(0\,;0\,;t)$ avec $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{t}{4}\right)$.
L'ensemble $\mathscr{F}$ est la droite passant par $E\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;0\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}(0\,;0\,;1)$ privée de E .

12. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V .

13. 1° F ; 2° V ; 3° V.

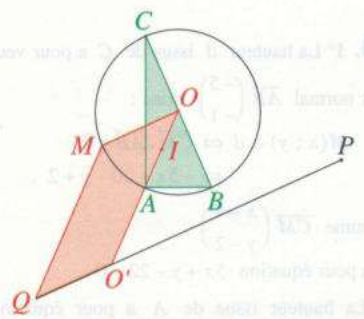
16. I milieu de $[AB]$: $I(0\,;3\,;1)$.
$\mathscr{P}$ passe par I et admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal :
$$\mathscr{P} : x + 2y - 2z - 4 = 0 .$$

19. • Les coordonnées des points formant l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ vérifient :
$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ -x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7} \end{cases} .$$
$\mathscr{D}$ la droite d'intersection des deux plans a pour vecteur directeur :
$$\vec{u}(1\,;5\,;7) .$$
• $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont pour vecteur normaux $\vec{n}_1(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{n}_2(-1\,;3\,;-2)$, et $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$ et comme $A\left(\frac{1}{7}\,;\frac{-9}{7}\,;0\right)$ appartient à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{Q}$ la droite $\mathscr{D}$ est bien l'intersection des deux plans.

22. $\vec{u}_{\mathscr{D}}(1\,;2\,;1)$; $\vec{u}_{\mathscr{D}'}(-1\,;2\,;1)$; $\overrightarrow{AB}(5\,;-2\,;-1)$.
On a $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}_{\mathscr{D}} - 3\vec{u}_{\mathscr{D}'}$, donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

26. $\overrightarrow{AB}(-2\,;-4\,;-1)$; (AB) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = 5 - t \end{cases} , \; t \in \mathbb{R} .$$
(AB) coupe $\mathscr{P}$ en I tel que t vérifie :
$2(1-2t) - 2(1-4t) + 5 - t - 2 = 0$,
donc $t = -1$.
I a pour coordonnées $(3\,;5\,;6)$.

33. 1° Le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ est le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(O,2)$ (associativité du barycentre), donc le milieu de $[AO]$. C'est I .
2° On a $\overrightarrow{MP} = 4\overrightarrow{MI}$, soit $\overrightarrow{IP} = -3\overrightarrow{IM}$. P est l'image de M par l'homothétie de centre I et de rapport -3 .
Pour tout point M ,
$$\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AO} .$$
Q est l'image de M par la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AO}$.
3° **a)** • Lorsque M décrit $\mathscr{C}$, P décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' tel que $\overrightarrow{IO'} = -3\overrightarrow{IO}$, et de rayon $3OB$.
• Lorsque M décrit $\mathscr{C}$, Q décrit le cercle $\mathscr{C}''$ de centre O'' tel que $\overrightarrow{OO''} = -2\overrightarrow{AO}$, et de rayon OB.
b) • On a $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OO'} = -2\overrightarrow{AO}$ donc $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OO'}$.
$OMQO'$ est un parallélogramme.



• On a $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'I} + \overrightarrow{IP}$
$= \overrightarrow{O'I} - 3\overrightarrow{IM}$
$= 3\overrightarrow{IO} + 3\overrightarrow{MI}$
$= 3\overrightarrow{MO}$.
Comme $\overrightarrow{QO'} = \overrightarrow{MO}$, on a $\overrightarrow{O'P} = 3\overrightarrow{QO'}$, donc Q , O' et P sont alignés ; de plus, $QP = 4OM = 4OA$, donc la longueur QP est constante.

36. 1° $3 + \lambda - 2 - \lambda + 1 = 2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $3 + \lambda - 2 - \lambda + 1 \neq 0$ donc G_λ existe.
2° Pour tout réel λ ,
$2\overrightarrow{AG_\lambda} = (\lambda - 2)\overrightarrow{AB} + (-\lambda + 1)\overrightarrow{AC}$,
donc $\overrightarrow{AG_\lambda} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
On pose $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc :
$$\overrightarrow{EG_\lambda} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CB} .$$
Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\frac{\lambda}{2}$ décrit $\mathbb{R}$, donc : l'ensemble des points G_λ est la droite passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$.

38. 1° V ; 2° V ; 3° F .

41. 1° $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(-1\,;1\,;-2)$. $\mathscr{Q}$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(-1\,;-1\,;-1)$. $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.
Les points de $\mathscr{D}$ ont des coordonnées qui vérifient :
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}z \\ y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}t \\ y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} , \; t \in \mathbb{R} .$$
La droite $\mathscr{D}$ passe par $A\left(\frac{15}{2}\,;\frac{7}{2}\,;0\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.
2° Le plan $\mathscr{R}$ d'équation $2x + y - z = 8$ a pour vecteur normal $\vec{n}_3(2\,;1\,;-1)$.
$\vec{n}_3 \cdot \vec{u} \neq 0$ donc $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{R}$. Le système (S) a une solution unique.
3°
$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}z \\ y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}z \\ 2\left(\frac{15}{2} - \frac{3}{2}z\right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}z\right) - z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

43. **a)** $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.
Pas de solution, car $1 \neq -1$.
b) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 7y + 4z = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 5y + 5z = 5 \\ 5y + 5z = 5 \end{cases}$
$$\iff \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 1 - z \end{cases} .$$
Solutions : $(1 + z\,;1 - z\,;z)$ et $z \in \mathbb{R}$.

Chapitre 13

Dans les exercices 2 à 7, on considèrera seulement les diviseurs entiers naturels.

1. 1° V ; 2° V ; 3° F ; 4° V ; 5° V ; 6° F ; 7° F.

2. Si $c \mid 328$ et $c \mid 299$, alors $c \mid 328 - 299$; donc $c \mid 29$.
Or, 29 est premier et 29 ne divise pas 299, donc $c = 1$.
Si c divise 1 093 et 1 000, il divise leur différence $93 = 3 \times 31$; comme ni 3, ni 31 ne divise 1 000, alors $c = 1$.

5.
• $55 \times 279 - 16 \times 959 = 15\,345 - 15\,344 = 1$.
Si c divise 279 et 959, il divise aussi $55 \times 279 - 16 \times 959$; c'est donc 1.
• Si c divise 70 et 325, il divise 5 : c'est donc 1 ou 5 ; comme 5 divise 70 et 235, 5 et 1 sont leurs seuls diviseurs communs.

6. Si $c \mid n+1$ et $c \mid n$, alors $c \mid (n+1) - n$, donc $c \mid 1$. Et par suite, $c = 1$.
Si $c \mid n$ et $c \mid 2n+1$, alors :
$$c \text{ divise } n+1 = (2n+1) - n .$$
On en déduit $c \mid n$ et $c \mid n+1$, et donc $c = 1$.
Par suite, la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible.

7. 1° $a \mid 3(5n+31) - 5(3n+12)$, donc $a \mid 33$.
2° $a = 1$ ou $a = 3$ ou $a = 11$ ou $a = 33$.

11. 1° F ; 2° F ; 3° V ; 4° V ; 5° V ; 6° V ; 7° V.

12. a) oui ; b) non : $11 \mid 649$; c) oui ; d) non : $7 \mid 1\,001$.

14. a) non ;
b) oui, $n = 2$ donne $u_2 = 3$;
si $n > 2$, $u_n = (n-1)(n+1)$, avec :
$$n+1 > n-1 > 1 ;$$
c) oui, $n = 1$ donne $u_1 = 19$; si $n > 1$, $u_n = n(7n+12)$, avec $7n+12 > n > 1$.

19. 1° $A + k = 2\,001! + (k+1)$; or si $1 \leqslant k \leqslant 2\,000$, $2 \leqslant k+1 \leqslant 2\,001$, donc $k+1$ divise $2\,001!$ et lui-même, donc aussi $A + k$.
Les 2 000 entiers consécutifs $A+1$, $A+2$, ..., $A+2\,000$ ne sont donc pas premiers.
2° Soit $A = (N+1)! + 1$. Si $1 \leqslant k \leqslant N$, alors :
$$2 \leqslant k+1 \leqslant N+1 ;$$
l'entier $k+1$ est donc un diviseur de $(N+1)!$;
si on considère $A + k = (N+1)! + k + 1$, on en déduit donc que $(k+1)$ divise $A + k$ et on a :
$$2 \leqslant k+1 < A + k .$$
Finalement, pour tout $k \in \{1 ; ... ; N\}$, l'entier $A + k$ n'est pas premier. On obtient ainsi N entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.
3° • Si $1 \leqslant k \leqslant 2\,000$, alors :
$$2 \leqslant k+1 \leqslant 2\,001$$
et, d'autre part, $B + k = 2P + (k+1)$.
• Si $k+1$ est pair, alors 2 divise $k+1$ et $2P$; donc 2 divise $B + k$ qui n'est pas premier.
• Si $k+1$ est impair, alors $k+1$ est un des facteurs du produit P, donc $k+1$ divise $B + k$ qui n'est pas premier.
$B+1$, $B+2$, ..., $B+2\,000$ sont donc 2 000 entiers consécutifs non premiers.

20. 1° F ; 2° F ; 3° V ; 4° V ; 5° F.

21. a) $72^2 = 2^6 \times 3^4$; b) $2^{10} \times 3^7$;
c) $2^6 \times 3^4 \times 5^2$; d) $2^3 \times 3 \times 31$.

23. $n = 7^4 = 2\,401$.

27. 1° F ; 2° V ; 3° F ; 4° V ; 5° V ; 6° F ; 7° F ; 8° F ; 9° F.

29. a) $q = 3$ et $r = 2$;
b) $q = -4$ et $r = 3$;
c) $q = -3$ et $r = 2$;
d) $q = 4$ et $r = 3$.

32. On a $524 = 15b + r$, avec $0 \leqslant r < b$, donc $15b \leqslant 524 < 16b$, ce qui donne $\dfrac{524}{16} < b \leqslant \dfrac{524}{15}$; d'où $b = 33$ ou $b = 34$.
Avec $b = 33$, on a $r = 29$; avec $b = 34$, on a $r = 14$.

35. $377 = bq + 8$, donc :
$$bq = 369 = 3^2 \times 41 ,$$
et on doit avoir $b > 8$ (le reste) ; les diviseurs de 369 sont 1, 3, 9, 41, 123 et 369.
On peut donc avoir : $b = 9$ et $q = 41$, $b = 41$ et $q = 9$, $b = 123$ et $q = 3$ ou $b = 369$ et $q = 1$.

38. $a = 155q + 65 = 161q + 23$; d'où $6q = 42$, donc $q = 7$ et $a = 1\,150$.

42. $0 \leqslant r < 4$ et r impair, sinon l'entier est divisible par 2, donc $r = 1$ ou $r = 3$.
Si n est impair, on peut donc écrire $n = 4k+1$ ou $n = 4k+3$;
et, comme
$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, on a :
• soit $n^2 - 1 = 4k(4k+2) = 8k(2k+1)$,
• soit $n^2 - 1 = (4k+2)(4k+4)$
$= 8(2k+1)(k+1)$.
Dans les deux cas, on voit que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

47. 1° V ; 2° F ; 3° V ; 4° V ; 5° V ; 6° V.

48. a) $0^{27} = 0$; b) $1^{35} = 1$; c) $(-1)^{20} = 1$.

52. $3^0 \equiv 1$ (13) ; $3^1 \equiv 3$ (13) ; $3^2 \equiv 9$ (13) et $3^3 \equiv 3$ (13).
Donc, pour tout entier k, on a :
$3^{3k} \equiv 1$(13) ; $3^{3k+1} \equiv 3$ (13) ; $3^{3k+2} \equiv 9$ (13).
Les restes sont 1, 3 ou 9.
Comme :
$48 \equiv 9$ (13), $48^{2\,004} \equiv 3^{2(2\,004)}$ (13)
et, comme $2\,004 = 3 \times 668$:
$48^{2\,004} \equiv 3^{3(1\,336)} \equiv 1$ (13).

55. 1° $1\,001 = 13 \times 77$, donc :
$1\,001 \equiv 0$ (13) et $1\,000 \equiv -1$ (13).
$10^{3n} \equiv (-1)^n$ (13) ; si n est pair, le reste est donc 1 ; sinon, c'est -1.
2° $10^{3(n+1)} + 10^{3n} \equiv (-1)^{n+1} + (-1)^n$
$\equiv 0$ (13),
car n et $n+1$ sont de parités différentes, et donc $(-1)^{n+1}$ et $(-1)^n$ sont opposés.
Par suite, $10^{3(n+1)} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

Chapitre 14

1. 1° V ; 2° V ; 3° V ; 4° V.

3. 1° Le dernier reste non nul est 18, c'est r_2.
On a :
$$\begin{cases} a = 2b + r_1 \\ b = 2r_1 + 18 \\ r_1 = 3r_2 = 3 \times 18 , \end{cases}$$
d'où $r_1 = 54$, $b = 126$ et $a = 306$.
Comme PGCD $(a ; b) = 18$, les diviseurs positifs communs à a et b sont les diviseurs positifs de 18, c'est-à-dire 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

4. 1° F ; 2° F ; 3° V ; 4° V.

8. Le raisonnement est construit à partir de la propriété démontrée dans le *Chapitre* 13 : pour tous entiers non nuls, si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors, pour tous entiers α et β, $c \mid (\alpha a + \beta b)$.
1° • Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (a + bn)$ (en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = n$).
• Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (a + b(n-1))$ (en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = n-1$).
2° • Si $d \mid (a + bn)$ et $d \mid (a + b(n-1))$, alors d divise la différence des deux nombres, c'est-à-dire $d \mid b$.
• Si $d \mid (a + bn)$ et $d \mid (a + b(n-1))$, alors :
$d \mid -(n-1)(a + bn) + n(a + b(n-1))$,
soit $d \mid a$.

3° On déduit que l'ensemble des diviseurs de a et b est l'ensemble des diviseurs de $a+bn$ et $a+b(n-1)$. Ainsi :

$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(a+bn\,;a+b(n-1))$.

13. **1re méthode** : On utilise les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres 180 et 36.

$36=2^2\times3^2$ et $180=2^2\times3^2\times5$.

L'entier cherché est de la forme $36q=2^2\times3^2q$, avec q entier entre 1 et 4.

On a quatre entiers possibles :

36, 72, 108 et 144.

2e méthode : On utilise la remarque de l'encadré. En notant a et b les entiers avec $0<a<b$, on a :

$a=36a'$, $b=36b'=180$,

donc $b'=5$, et $\text{PGCD}(a'\,;5)=1$.

On est ramené à chercher a' tel que :

$0<a'<5$ et a' et 5 premiers entre eux.

a' peut donc prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4.

On retrouve ainsi les nombres 36, 72, 108 et 144.

15. On a $a=64a'$, $b=64b'$, avec :

$\text{PGCD}(a'\,;b')=1$.

On est ramené à chercher a' et b' entiers naturels non nuls premiers entre eux, tels que $64(a'+b')=1\,152$, c'est-à-dire tels que $a'+b'=18$.

Les entiers a' et b' sont :

1 et 17 ou 5 et 13 ou 7 et 11.

En multipliant ces nombres par 64, on obtient les entiers a et b cherchés :

64 et 1 088, 320 et 832, 448 et 704.

18. 1° V ; 2° F.

23. On note q la raison de cette suite. On a :

$q\in\mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(a\,;q)=1$,

$b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$,

$e=aq^4$ et $0<a\leqslant100$.

$6a^2=e-b \iff 6a^2=aq(q^3-1)$

$\iff 6a=q(q^3-1)$.

Ainsi $q\mid6a$, mais q est premier avec a, donc, d'après le théorème de Gauss, $q\mid6$.

On a $q=1$ ou $q=2$ ou $q=3$ ou $q=6$.

• $q=1$ conduit à $a=0$, qui est un cas à écarter compte tenu des hypothèses.

• $q=2$ conduit à $6a=14$, qui est encore un cas à écarter, car il ne mène pas à une valeur entière de a.

• $q=3$ conduit à $a=13$.

• $q=6$ conduit à $a=215$, qui est un cas à écarter, car on veut $a\leqslant100$.

La seule valeur possible de q est 3.

Les cinq termes de la suite sont :

13, 39, 117, 351 et 1 053.

32. 1° (2 ; 3) est une solution particulière dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation donnée.

On la trouve intuitivement et on vérifie qu'elle convient, ou bien on la détermine par l'algorithme d'Euclide.

Une solution particulière de $41x-27y=5$ est alors $(5\times2\,;5\times3)$, c'est-à-dire $(10\,;15)$.

2° $\begin{cases}41x-27y=5\\41\times10-27\times15=5\end{cases}$

$\iff 41(x-10)=27(y-15)$.

Si $41(x-10)=27(y-15)$, alors :

$41\mid27(y-15)$.

Or 41 est premier avec 27, donc, d'après le théorème de Gauss, $41\mid y-15$.

Il existe donc un entier relatif k tel que :

$y-15=41k$.

$\begin{cases}41(x-10)=27(y-15)\\y-15=41k\end{cases} \iff \begin{cases}x-10=27k\\y-15=41k\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=10+27k\\y=15+41k\end{cases}$.

Les solutions dans $\mathbb{N}^2$ sont les couples $(10+27k\,;15+41k)$ avec k entier naturel.

41. 1° 13 est premier et 84 n'est pas un multiple de 13, donc 13 et 84 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $13u+84v=1$.

On applique l'algorithme d'Euclide :

	6	2	6
84	13	6	1
6	1	0	

$84\quad -13\times6\quad -6\quad =0\quad \big|\times(-2)$

$13\quad -6\times2\quad =1$

En multipliant par (-2) les membres de la première égalité, et en ajoutant membre à membre avec la deuxième, on obtient :

$84\times(-2)-13\times6\times(-2)+13=1$

soit $84\times(-2)+13\times13=1$

$(-2\,;13)$ est une solution particulière de $84u+13v=1$, donc $(91\,;-14)$ est une solution particulière de $13x+84y=7$.

On poursuit la résolution comme dans l'*Exercice* 32, et on obtient :

les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples $(91+84k\,;-14-13k)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

2° $\text{PGCD}(x\,;y)\mid x$ et $\text{PGCD}(x\,;y)\mid y$, donc $\text{PGCD}(x\,;y)\mid13x+84y$, c'est-à-dire $\text{PGCD}(x\,;y)\mid7$.

7 est premier et $\text{PGCD}(x\,;y)$ est positif, donc :

$\text{PGCD}(x\,;y)=1$ ou $\text{PGCD}(x\,;y)=7$.

3° • $91+84k=7(13+12k)$ et $13+12k$ est entier, donc $7\mid91+84k$.

• $7\mid-14-13k \iff -14-13k\equiv0\ (7)$

$\iff 13k\equiv0\ (7)$

$\iff k\equiv0\ (7)$.

Les solutions $(x\,;y)$ telles que $\text{PGCD}(x\,;y)=7$ sont les couples :

$(91+84k\,;-14-13k)$,

avec $k\in\mathbb{Z}$ et $k\equiv0\ (7)$.

En posant $k=7k'$, $k'\in\mathbb{Z}$, ces couples sont de la forme :

$(91+588k'\,;-14-91k')$ avec $k'\in\mathbb{Z}$.

Les solutions $(x\,;y)$ telles que x et y soient premiers entre eux sont les couples :

$(91+84k\,;-14-13k)$

avec $k\in\mathbb{Z}$ et k non multiple de 7.

48. 1° F ; 2° F ; 3° F ; 4° V.

55. On a $a=da'$ et $b=db'$, avec :

$\text{PGCD}(a'\,;b')=1$.

La relation $md=ab$ entre PGCD et PPCM, pour des nombres positifs, donne $m=a'b'd$.

Le système s'écrit :

$\begin{cases}b'-a'=1\\db'^2-da'^2=a'b'-d\end{cases}$,

soit $\begin{cases}b'=a'+1\\a'^2+a'(1-2d)-2d=0\end{cases}$

$\begin{cases}b'=a'+1\\(a'-2d)(a'+1)=0\end{cases}$ **(1)**

(1) équivaut à $a'=2d$ ($a'=-1$ ne convient pas, car $a'\in\mathbb{N}$).

Le système donné est donc équivalent à :

$\begin{cases}b'=2d+1\\a'=2d\end{cases}$.

Les nombres $2d$ et $2d+1$ sont deux entiers consécutifs, donc premiers entre eux, on le vérifie avec le théorème de Bézout :

$1\times(2d+1)-1\times(2d)=1$.

Ils conviennent donc.

Les couples cherchés sont de la forme :

$(2d^2\,;2d^2+d)$, $d\in\mathbb{N}^*$.

Chapitre 15

1. 1° F ; 2° V ; 3° F ; 4° F.

4. **a)** L'ensemble des points fixes de f est la demi-droite $[O\,;\vec{u})$.

b) f n'est pas une transformation du plan, car les points I et J d'affixes respectives 1 et -1 ont la même image I.

Ainsi f n'est pas une similitude.

6. 1° V ; 2° V ; 3° F ; 4° V.

8. 1° $z'=(1+\mathrm{i})z-3-2\mathrm{i}$.

• le rapport de S est $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

• $\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

• le point fixe est $\Omega(2-3\mathrm{i})$.

2° $z'=-\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}$.

• le rapport de S est $|-\mathrm{i}|=1$, donc S est une isométrie.

• $\arg(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

• le point fixe de S est $\Omega(1)$.

$S=R_{\Omega,-\frac{\pi}{2}}$.

3° $z'=-3z+12+4\mathrm{i}$.

• le rapport de S est $|-3|=3$.

• $\arg(-3)=\pi\ (2\pi)$.

• le point fixe de S est $\Omega(3+\mathrm{i})$.

$S=h_{\Omega,-3}$.

10. **1°** F ; **2°** F ; **3°** V ; **4°** V.

13. **1°** f est la rotation de centre $\Omega(1-\mathrm{i})$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2° f est la similitude directe de centre $\Omega(-2-\mathrm{i})$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
3° f est l'homothétie de centre $\Omega(2\mathrm{i})$ et de rapport -3.
4° f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

17. **a)** $k=1$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (2π).

b) $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ (2π).

c) $k=1$, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ (2π).

d) $k=1$, $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ (2π).

20. f a pour expression complexe :
$z'=2(\sqrt{3}-\mathrm{i})z-2-\sqrt{3}+\mathrm{i}(1-2\sqrt{3})$.
g a pour expression complexe :
$z'=2(\sqrt{3}-\mathrm{i})z-2+\mathrm{i}$.
$S_1=S_{\Omega_1,2,-\frac{\pi}{2}}$, avec Ω_1 d'affixe i.
$S_2=S_{O,2,\frac{\pi}{3}}$.
$f=S_{\Omega,4,-\frac{\pi}{6}}$, avec :
$\Omega\left(\frac{90+7\sqrt{3}}{241}+\frac{265+34\sqrt{3}}{241}\mathrm{i}\right)$.
$g=S_{\Omega',4,-\frac{\pi}{6}}$, avec :
$\Omega'\left(\frac{48+68\sqrt{3}}{241}+\frac{61-14\sqrt{3}}{241}\mathrm{i}\right)$.

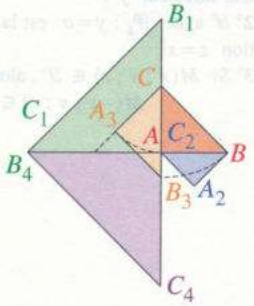
28. **1°** F ; **2°** F ; **3°** F ; **4°** F. **5° a)** F ; **b)** V.

30. **a)** $a=1$, $b=-4+2\mathrm{i}$.
Rapport de $f=|a|=1$.
b) L'ensemble des points fixes de f est vide.
c) L'expression complexe de $f\circ f$ est :
$z'=\overline{\bar{z}-4+2\mathrm{i}}-4+2\mathrm{i}$
soit $z'=z-8$,
donc $f\circ f$ est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe -8.
d) I a pour affixe $\frac{z+z'}{2}=\frac{z+\bar{z}}{2}-2+\mathrm{i}$.
$\frac{z+\bar{z}}{2}$ est réel, donc l'ordonnée de I est 1, et donc I appartient à la droite Δ d'équation $y=1$.
e) L'expression complexe de S_Δ est :
$z'=\bar{z}+2\mathrm{i}$.
f) L'expression complexe de $t_{\frac{1}{2}\vec{w}}\circ S_\Delta$ est :
$z'=(\bar{z}+2\mathrm{i})-4$, soit $z'=\bar{z}-4+2\mathrm{i}$.
L'expression complexe de $S_\Delta\circ t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$ est :
$z'=\overline{z-4}+2\mathrm{i}$, soit $\bar{z}=z-4+2\mathrm{i}$.
Dans les deux cas, on retrouve l'expression complexe de f, donc :
$f=t_{\frac{1}{2}\vec{w}}\circ S_\Delta=S_\Delta\circ t_{\frac{1}{2}\vec{w}}$.

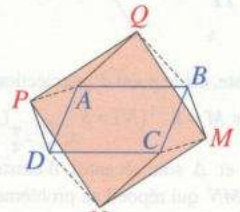
33. **1°** $\omega=1-\mathrm{i}$.
2° $k=|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=2$.
L'expression complexe de $H_{\Omega,k}$ est :
$z'=2z-1+\mathrm{i}$.
3° a) $\beta=\frac{\pi}{3}$ (2π).
b) $\overrightarrow{\Omega I}$ a pour affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
Le point I a pour affixe $\omega+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
a et b sont les solutions du système :
$$\begin{cases}\omega=a\bar{\omega}+b\\ \omega+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=a\left(\bar{\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)+b\end{cases}.$$
Par soustraction, on trouve $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, puis $b=\omega-a\bar{\omega}$.
Ainsi, après calculs, l'expression complexe de S_Δ est :
$z'=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bar{z}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
4° L'expression complexe de $S_\Delta\circ H_{\Omega,k}$ est :
$z'=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\overline{(2z-1+\mathrm{i})}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,
soit $z'=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z}+\sqrt{3}-\mathrm{i}(2+\sqrt{3})$.
L'expression complexe de $H_{\Omega,k}\circ S_\Delta$ est :
$z'=2\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\bar{z}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right]-1+\mathrm{i}$,
soit $z'=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z}+\sqrt{3}-\mathrm{i}(2+\sqrt{3})$.
Dans les deux cas, on retrouve l'expression complexe de f, donc :
$f=S_\Delta\circ H_{\Omega,k}=H_{\Omega,k}\circ S_\Delta$.

36. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V.

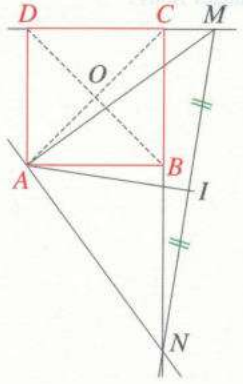
41. L'image de ABC est :
a) AB_1C_1 ;
b) A_2BC_2 ;
c) A_3B_3C ;
d) AB_4C_4.



46. **1°** L'expression complexe de $S_{A,r,\theta}$ est :
$z'=\alpha(z-a)+a$,
soit $z'=\alpha z+a(1-\alpha)$;
$S_{A,r,\theta}(B)=Q$, donc $q=\alpha b+a(1-\alpha)$.
De même, $m=\alpha c+b(1-\alpha)$;
$n=\alpha d+c(1-\alpha)$;
$p=\alpha a+d(1-\alpha)$.
2° $MNPQ$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, soit $n-m=p-q$ **(1)**.
$(1)\iff\alpha(d-c)+(1-\alpha)(c-b)$
$=\alpha(a-b)+(1-\alpha)(d-a)$
$\iff\alpha(d-c-a+b)+(\alpha-1)(d-c-a+b)=0$
$\iff(2\alpha-1)(d-c-a+b)=0$
$\iff\alpha=\frac{1}{2}$ ou $b-a=c-d$.
Donc $MNPQ$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\alpha=\frac{1}{2}$ ou $ABCD$ est un parallélogramme.
3° $ABCD$ est un parallélogramme, donc $MNPQ$ est un parallélogramme d'après **2°**.
On a $\frac{m-q}{m-n}=\frac{\alpha(c-b)+(1-\alpha)(b-a)}{\alpha(c-d)+(1-\alpha)(b-c)}$.
En remplaçant α par $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$, et $1-\alpha=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$, on obtient :
$\frac{m-q}{m-n}=\frac{c-a+\mathrm{i}(c+a-2b)}{b-d+\mathrm{i}(2c-b-d)}$,
mais $ABCD$ est un parallélogramme, donc :
$a+c=b+d$.
D'où $\frac{m-q}{m-n}=\frac{c-a+\mathrm{i}(d-b)}{b-d+\mathrm{i}(c-a)}$
$=\frac{-\mathrm{i}[b-d+\mathrm{i}(c-a)]}{b-d+\mathrm{i}(c-a)}$.
Ainsi, $\frac{m-q}{m-n}=-\mathrm{i}$. On en déduit ;
$\frac{MQ}{MN}=|-\mathrm{i}|=1$,
$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})=\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}$ (2π),
donc $MNPQ$ est un carré.



48.



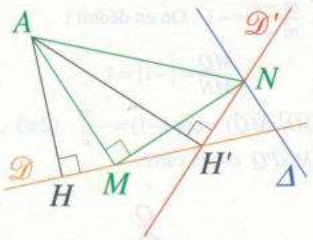
1° $R(D)=B$.
(CD) est perpendiculaire en D à (AD) , donc l'image de (CD) est la perpendiculaire en B à (AB) . Ainsi, $R((CD))=(BC)$.
M est le point d'intersection de (CD) et (AM) , donc $R(M)$ est le point d'intersection de $R((CD))$ et $R((AM))$.
Or $R((CD))=(BC)$, et $R((AM))=(AN)$, donc $R(M)=N$.
On en déduit que AMN est rectangle isocèle en A .

2° $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI})=-\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, et $AI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AM$, donc $f=S_{A,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}}$.
Lorsque M décrit (CD) , I décrit $f((CD))$; or $f(D)=O$ et $f(C)=B$, donc $f((CD))=(OB)$.
L'ensemble des points I est donc la droite (BD) .

52. **1°** AMN est rectangle et isocèle direct en M , donc N est l'image de M par $S_{A,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}}$.
M appartient à $\mathscr{D}$, donc N appartient à :

$$S_{A,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}}(\mathscr{D})=\mathscr{D}' .$$

2° On construit $\mathscr{D}'$ comme indiqué sur la figure .



N , s'il existe, est le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et Δ , puis $M=S^{-1}(N)=S_{A,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}}(N)$.

3° Si $\mathscr{D}'$ et Δ sont sécantes, il existe un seul triangle AMN qui répond au problème.
Si $\mathscr{D}'$ et Δ sont strictement parallèles, il n'existe pas de triangle AMN .
Si $\mathscr{D}'$ et Δ sont confondues, il existe une infinité de triangles AMN .

Chapitre 16

1. **1°** F ; **2°** V ; **3°** V .

3. **1°** $f(-3\ ;5)=-21$.

2° Cette surface est un plan passant par $A(-3\ ;5\ ;-21)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\ ;-4\ ;-1)$.

3° Par exemple, les points de la ligne de niveau 10 ont des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases}2x+y+4=10\\ z=10\end{cases}\iff\begin{cases}x=x\\ y=6-2x\\ z=10\end{cases}.$$

C'est la droite passant par $B(0\ ;6\ ;10)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;-2\ ;0)$.

7. **1°** Les courbes de la figure 2 ont pour équations $z=-y^2+4-k^2$, avec $k\in\mathbb{R}$.

2° Les courbes de la figure 3 ont pour équations $z=-x^2+4-k^2$, avec $k\in\mathbb{R}$. Ce sont des paraboles et on retrouve les mêmes.

3° La ligne de niveau k a pour équation $x^2+y^2=4-k$.
• Si $k\leqslant 4$, alors on obtient des cercles centrés en O et de rayon $\sqrt{4-k}$.
• Si $k>4$, pas de lignes de niveau.

10. Il s'agit d'un cône d'axe $(O\ ;\vec{k})$.

13. **1°** Les points de l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z=k$ ont des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases}x^2=k\\ z=k\end{cases}.$$

• Si $k<0$, l'intersection est vide.
• Si $k=0$, on obtient la droite intersection des plans d'équations respectives $x=0$ et $z=0$, soit la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j}$.
• Si $k>0$ $\begin{cases}x=\sqrt{k}\\ z=k\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-\sqrt{k}\\ z=k\end{cases}$, qui sont deux droites parallèles passant par $A(\sqrt{k}\ ;0\ ;k)$ et $B(-\sqrt{k}\ ;0\ ;k)$ et de vecteur directeur $\vec{j}$.

2° $\mathscr{S}$ avec $\mathscr{P}_k : y=a$ est la parabole d'équation $z=x^2$.

3° Si $M(x\ ;y\ ;z)\in\mathscr{S}$, alors :
$M(-x\ ;y\ ;z)\in\mathscr{S}$,
donc $\mathscr{S}$ admet le plan d'équation $x=0$ comme plan de symétrie.

16. **1°** Soit $M(x\ ;y\ ;z)$ dans $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $M(X\ ;Y\ ;Z)$ dans $(\Omega\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$.
$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}+X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$,
donc $\begin{cases}x=-1+X\\ y=-2+Y\\ z=1+Z\end{cases}$.

$$\begin{aligned}z=x^2+y^2+2x+4y+6&\iff z=(x+1)^2+(y+2)^2+1\\&\iff z-1=(x+1)^2+(y+2)^2\\&\iff Z=X^2+Y^2.\end{aligned}$$

2° $\mathscr{S}$ est un paraboloïde de révolution d'axe $(\Omega\ ;\vec{k})$.
Il admet les plans passant par Ω et perpendiculaires au plan de repère $(\Omega\ ;\vec{i},\vec{j})$ comme plans de symétrie.

19. **1°** Si $M(x\ ;y\ ;z)\in\mathscr{S}$, alors :
$M(x\ ;-y\ ;z)\in\mathscr{S}$,
donc $\mathscr{S}$ admet le plan d'équation $y=0$ comme plan de symétrie.

2° $g(x)=xe^{-x^2}+3$.
• Pour $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$;
• $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=3$ car e^{-x^2} l'emporte sur x en $+\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=3$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	↘	m	↗	M	↘	3

$m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}+3$; $M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}+3$.
Le « pic » semble être en $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;0\ ;M\right)$.

3° Si M s'éloigne de O , alors x^2+y^2 tend vers l'infini, donc $f(x\ ;y)$ tend vers 3. La surface $\mathscr{S}$ se rapproche du plan d'équation $z=3$.

Enseignement obligatoire

ANALYSE

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Limites de suites et de fonctions Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$. Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a. Théorème « des gendarmes » pour les fonctions. Limites de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions ; limite de la composée de deux fonctions, de la composée d'une suite et d'une fonction.	Pour exprimer que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, on dira que : « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. » On montrera qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini. On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax+b+h(x)$, où h tend vers 0 à l'infini. On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou au tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées. On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini. On étendra ce théorème au cas des limites infinies. On complétera les résultats énoncés en classe de première ; on se bornera à une justification intuitive (calculatoire ou graphique).
Langage de la continuité et tableau de variations Continuité en un point a. Continuité d'une fonction sur un intervalle. Théorème (dit des *valeurs intermédiaires*) : « soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$ ».	On définira la continuité de f en un point a par : $\lim\limits_{a} f = f(a)$ ou $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$. On illustrera la notion de continuité sur un intervalle en parlant de tracé sans lever le crayon. On présentera à titre de contre-exemple le cas de la fonction partie entière. Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : « si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a\,;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $[a\,;b]$ ». On étendra ce corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. On pourra approcher la solution de l'équation $f(x)=k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur.
Dérivation Rappels sur les règles de dérivation et sur le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. Application à l'étude de la fonction tangente. Dérivation d'une fonction composée.	On rappellera en particulier le théorème suivant qui sera utilisé à propos des primitives : une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. On fera remarquer que toute fonction dérivable est continue. Écriture différentielle $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Le principe de la démonstration sera indiqué. La notation différentielle est ici un moyen mnémotechnique de retrouver la formule.
Introduction de la fonction exponentielle Étude de l'équation $f'=kf$. Théorème : « il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. » Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f'=kf$.	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y)=f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k=1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h\mapsto \mathrm{e}^h$.

Programme

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Étude des fonctions logarithmes et exponentielles	
Fonction logarithme népérien ; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.	On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$.
Fonctions $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$. Comportement asymptotique ; allure des courbes représentatives.	On positionnera, à l'aide d'un grapheur, les courbes représentatives de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \ln x$ par rapport à celles des fonctions $x \mapsto x^n$.
Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme.	On établira la limite en $+\infty$ de e^x/x et de $\ln x/x$; on en déduira la limite en $-\infty$ de xe^x ; on aboutira aux règles opératoires : *« à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x »* et *« les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x »*.
Fonction racine n-ième	On étudiera les fonctions $x \mapsto e^{-kx}$, ou $x \mapsto e^{-kx^2}$, avec $k > 0$, et on illustrera leur décroissance rapide. La racine n-ième sera introduite et expliquée ; on utilisera aussi la notation $x^{1/n}$.
Suites et récurrence	
Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique. On étudiera numériquement, sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	La notion de suites adjacentes sera introduite en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires (par exemple aire d'un cercle par la méthode d'Archimède, aire sous une parabole). On montrera le lien avec l'écriture décimale d'un réel.
Théorème de convergence des suites croissantes majorées.	
Intégration	
Pour une fonction f continue positive sur $[a\,;\,b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme *aire sous la courbe*. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.
Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles. Inégalité de la moyenne.	On interprétera ces propriétés en terme d'aire ou en terme de valeur moyenne pour les rendre conformes à l'intuition. On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres : – expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée ; – expression intégrale du volume d'un solide dont on connaît les aires des sections avec les plans d'équation $z =$ constante ; – calculs de probabilités d'intervalles pour des lois de probabilités à densité.
Intégration et dérivation	
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. »	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de $(u')/u$, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.
Intégration par parties.	
Équations différentielles $y' = ay + b$	On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné. On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$.

GÉOMÉTRIE

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Géométrie plane : nombres complexes	
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z = z_\omega + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ou $x = x_\omega + r\cos\theta$, $y = y_\omega + r\sin\theta$). La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels. Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.
Produit scalaire dans l'espace	
Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.	Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Équation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace.
Droites et plans dans l'espace	
Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace. Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion géométrique ; discussion algébrique.	On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de première. On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement. On traitera aussi quelques situations numériques (issues de l'analyse, de situations économiques ou autres) s'y ramenant.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Conditionnement et indépendance	
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes… efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.
Formule des probabilités totales.	Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.

Programme

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Statistique et modélisation Expériences indépendantes. Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.	Application aux expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes…).
Lois de probabilité *Exemples de lois discrètes* Introduction des combinaisons, notées $\binom{n}{p}$. Formule du binôme.	On introduira la notation $n!$. L'élève devra savoir retrouver les formules : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$ $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$
Loi de Bernoulli, loi binomiale ; espérance et variance de ces lois. *Exemples de lois continues* Lois continues à densité : – loi uniforme sur [0 ; 1] ; – loi de durée de vie sans vieillissement. Statistique et simulation	On appliquera ces résultats à des situations variées. Application à la désintégration radioactive : loi exponentielle de désintégration des noyaux. Étude d'un exemple traitant de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie.

Enseignement de spécialité

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Arithmétique Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux. Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM. Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini. Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.
Similitudes planes Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$ (a non nul). Étude des similitudes directes.	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale. Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'. Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.
Sections planes de surfaces	Sections de cônes et cylindres illimités d'axes (Oz) par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Surfaces d'équation $z=x^2+y^2$ ou $z=xy$ coupées par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

A

affixe 258
aire 173
ALEA() 210, 216
AL-KASHI 293
APPOLLONIUS de PERGE 34
angle de l'espace 295
antidéplacement 411
antiprisme 302
arbre
  de choix 230, 232, 239
  pondéré 212
ARCHIMEDE 35, 344
argument 263
asymptote 38, 46
  oblique 39, 46
AVOGADRO 102
axe de symétrie 58

B

barycentre 300, 318, 321, 412
BERNOULLI 236
BERTRAND 204, 228
BEZOUT (théorème de) 374, 379
bijection 401
binôme (formule du) 235
binomiale (loi) 236
BOMBELLI 256
BOREL 204, 228
BRIGGS 117

C

calculatrice
  aires 185
  dérivée 17
  diviseurs 343
  équation 20, 21
  euclide 371
  nombre premier 352
  PGCD et PPCM 372, 376, 383
  TI-92 surface 439
CARDAN 256
CHASLES (relation de) 176
combinaison 233, 240
comparaison
  fonctions 71
  limite par 41
complexe et transformation 403, 407
composée 43, 49
  de transformations 402, 408, 426, 427
  dérivation 62, 64
cône 437, 440
  de révolution 87
congruence 345, 350
coniques 34, 309, 436
conjugué 259
continuité 13
convergence, suite-géométrique 37
coordonnées polaires 257, 263
CRAMER 316
croissance comparée 95
Cryptographie 386
cylindre 439

D

D'ALEMBERT 116
dénombrement 232
densité 237, 253
déplacement 409
dérivabilité 11
  aire 74
  dérivabilité en *a* 68
dérivée
  calculatrice 17
  composée 64
  seconde 11
DESCARTES 256
dichotomie 20, 90
différentielle
  équation 96
  notation 64
DIOCLES (cissoïde) 80
DIOPHANTE 384
distribution normale 254
diviseurs communs 371
divisibilité (critères de) 351, 354, 356, 364
divisibilité 346
division euclidienne 349, 356
droite(s) de l'espace 320
droites orthogonales 297
DURER 290

E

e 93, 199
egyptien (numération) 342
ellipse 436
équation
  complexe 263
  différentielle 96
  diophantienne 384
  d'un plan 322, 298
  résolution approchée 15, 17
ERATOSTHENE (crible de) 354
escalier (fonction en) 170
EUCLIDE (algorithme) 368, 370
EULER 72, 91, 93
excentricité 313
exponentielle
  base *a* 123
  fonction 92

F

factorielle 233
FERMAT 359, 385
fonction(s)
  de deux variables 438
  en escalier 170
  puissances 130
  réciproque 142
  tangente 48
forme
  algébrique 259
  complexe 411
  exponentielle 265
  réduite 408
  trigonométrique 263
fraction (continue) 396
fréquences 205

G

GALTON 229
GAUSS 256, 316
  (théorème de) 375
gendarmes (théorème des) 41
GEOPLANW (similitude) 421
GEOSPACW 318, 331, 340, 437

H

HERMITE 93
homothétie 267, 403, 427
hyperbole 313

I

image
  d'intervalle 9
  d'un nombre complexe 258
imaginaire 256, 258

impaire, fonction 191
indépendance 207
inflexion (point d') 31
intégrale 173
intégration et primitive 175
intégration par parties 178, 180
isométrie 404

K

KEPLER 313, 436

L

lieu géométrique 416, 421
lignes de niveau 440
limite
  en *a* 10, 40
  et suite 37
par comparaison 41
linéarité et intégrale 176
logarithme
  décimal 117
  népérien 118
loi
  binomiale 236
  continue 237
  de durée de vie 237, 253
  uniforme 231, 238

M

majorée, minorée (suite) 41
MENECHME 436
méthane 312
module 263
moyenne (inégalités de la) 177

N

n ! 201, 233
NEPER 116
NEWTON 103
nombre(s)
  complexe 258
  premier 347, 352
  dérivé 10
  premiers entre eux 358, 374

O

optimisation 32, 71

P

paire, fonction 191
paramétrique (représentation) 320, 322
parie entière (fonction) 13
PASCAL (triangle de) 229, 234
pavage 400
périodique (fonction) 191
PGCD 372, 390
plan(s)
  de l'espace 322, 298
  perpendiculaires 302
polaires (coordonnées) 257, 263
polyèdres réguliers 290
positivité (intégrale) 176
PPCM 369, 376
primitive 66
probabilité(s)
  conditionnelle 206
  totales 209
produit scalaire 294
programmation linéaire 340
puissances (fonctions) 130

R

racine *n*-ième 123
radioactivité 102, 242, 253
rapport de similitude 405
réciproque (transformation) 401, 408
régionnement du plan 319
rotation 267, 403, 426
RSA 387

S

semblables (triangles) 283
sens de variation
  fonction 12
  suite 51
similitude directe 404
simulation 210, 216, 229
somme intégrale 171
suite(s)
  arithmétique 36, 116
  géométrique 36, 37, 116
  et intégrale 181
  adjacentes 171
surface 3D 438
symétrie
  axiale 428
  d'une courbe 58
systèmes
  et plans 324
  paramétrés 332
  résolution 316

T

tableur
  méthode d'Euler 72
  PGCD 382
  probabilité 229
  simulation 210, 216, 229, 254
  surface 438
  valeurs d'une fonction 21, 34
tangente
  à une courbe 10, 16
  fonction 48
test de dépistage 214, 251
tétraèdre
  méthane 312
  régulier 303
TI-92 ..... 317, 439
tirages
  simultanés 230
  successifs 230
transformation 401
  et complexes 406
translation 267, 403
triangle(s)
  (intérieur d'un) 323
  relations métriques 293
  semblables 283, 412

V

valeur moyenne 173
valeurs intermédiaires
  (théorème des) 14, 43
vecteur(s)
  normal 295
  orthogonaux 294
vitesse 63
volume 183, 197
VON KOCH (flocon) 47

Z

zéros (d'une fonction) 19

Dépôt légal : 75393 – 07/2006 édition n° 03 – Collection n° 68 – 13/5297/0
Imprimé en Italie par Vincenzo Bona - Torino.

Formulaire

Dérivées et primitives

• Fonctions logarithme, exponentielle, puissances

• $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ • $\exp'(x) = e^x$

• Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$

• Formules de dérivation

Produit, quotient : • $(uv)' = u'v + uv'$ • $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Composée : • $(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$

• $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ • $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ • $(e^u)' = u'e^u$

• Fonctions trigonométriques

• $\sin'(x) = \cos x$ • $\cos'(x) = -\sin x$

• $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

• Formules de primitivation

• $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$.

• Si $n \neq -1$, alors $u'u^n$ a pour primitive : $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.

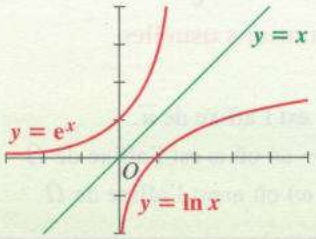
Logarithmes et exponentielles

• Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre : pour $x > 0$ et y réel, $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

• En $+\infty$ ou en $-\infty$, e^x « l'emporte » sur toute puissance de x.



• $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = +\infty$

• En $+\infty$ ou en 0, toute puissance de x « l'emporte » sur $\ln x$.

• Fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

• $a^x = e^{x \ln a}$ • $a^0 = 1$ • $a^x a^y = a^{x+y}$ • $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ • $(a^x)^y = a^{xy}$

• Fonction ln

• $\ln 1 = 0$ • $\ln e = 1$ • $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ • $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ • $\ln a^x = x \ln a$

Intégrale d'une fonction continue

• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,
où F est une primitive de f sur un intervalle I contenant a et b.

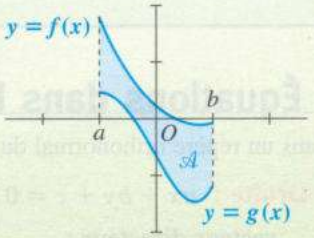
• **Valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

• **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

• **Linéarité :** $\alpha\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx$
(α et β) réels

• **Intégration par parties :** $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \Big[u(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$

• Calcul d'aire



Si $a < b$ et $g \leqslant f$,
alors $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$.

Formulaire

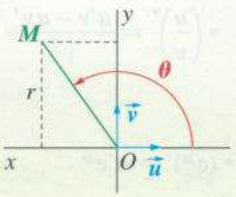
Équation différentielle $y' = ay + b$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$, avec a et b réels, sont les fonctions $x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$, avec K réel, où $x \mapsto \alpha$ est la fonction constante qui est solution.

En particulier, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

Nombres complexes

- **Forme algébrique**
  - $z = x + iy$ avec x et y réels.
  - Partie réelle : $\mathrm{Re}(z) = x = r\cos\theta$.
  - Partie imaginaire : $\mathrm{Im}(z) = y = r\sin\theta$.
  - Conjugué : $\overline{z} = x - iy$.



- **Forme trigonométrique**
  - $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.
  - Module :
  - $|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$
  - Argument : $\theta = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.

- **Calculs dans $\mathbb{C}$**

$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ $\quad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad |zz'| = |z||z'|$ $\quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $\quad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\quad \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad |e^{i\theta}| = 1$

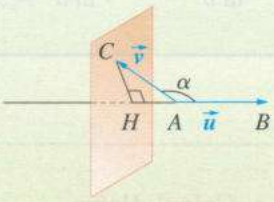
- **Expressions complexes des transformations usuelles**
  - Symétrie axiale $S_{(Ox)}$: $z' = \overline{z}$
  - Translation $t_{\vec{u}}$: $z' = z + b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.
  - Rotation $R_{\Omega,\theta}$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ où ω est l'affixe de Ω
  - Homothétie $h_{\Omega,k}$: $z' - \omega = k(z - \omega)$ où ω est l'affixe de Ω

Produit scalaire dans l'espace

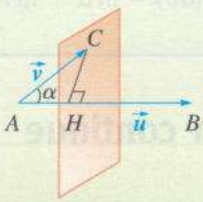
- **En repère orthonormal,** si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

- **Avec le projeté orthogonal :**

$$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos\alpha$$

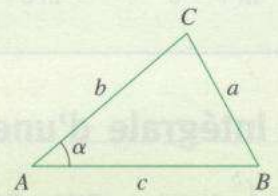


Si $H \notin [AB]$, alors $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$.



Si $H \in [AB]$, alors $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$.

Relation d'Al-Kashi :



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Équations dans le plan ou dans l'espace

Dans un repère orthonormal du plan.

- **Droite :** $ax + by + c = 0$, avec a ou b non nuls.

vecteur directeur : $\vec{u}(-b\,;a)$ **vecteur normal :** $\vec{n}(a\,;b)$

- **Cercle :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

centre : $\Omega(a\,;b)$; **rayon :** R.

Dans un repère orthonormal de l'espace.

- **Plan :** $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c non tous nuls.

vecteur normal : $\vec{n}(a\,;b\,;c)$

- **Sphère :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

centre : $\Omega(a\,;b\,;c)$; **rayon :** R.

Où trouver les instructions

Fonctions

	TI-83 ou 82	Casio graph 35 ou 60
• Fonction $y = f(x)$	Y=	MENU GRAPH
	VARS Y-VARS 1:Function 1:Y1	VARS GRPH Y 1
	TI-82 : Y–VARS	⚠ Ne pas utiliser Y.
Nombre dérivé	MATH MATH nDeriv(	OPTN CALC d/dx
Intégrale	MATH MATH fnInt(	OPTN CALC ∫dx
Maximum, minimum	MATH MATH fMin(fMax(	G–Solv MAX MIN
• Sur la courbe :	GRAPH	MENU GRAPH
valeur y, solution de $f(x) = 0$,	CALC value zéro	G–Solv Y-CAL ROOT
intersection de courbes	intersect	ISCT
nombre dérivé, intégrale	dy/dx $\int f(x)\,dx$	pas de nombre dérivé ∫dx
tangente,	DRAW DRAW Tangent(	Sketch Tang
droite horizontale, verticale	Horizontal Vertical	HZtl Vert

Listes et probabilités

	STAT EDIT ...	MENU LIST
• Rappel de la liste 1	• L1	• OPTN LIST List 1
• Tri en ordre croissant	• LIST OPS SortA(	• MENU LIST SRT-A
• Calculs sur une liste : Sum, Mean, Seq...	• LIST MATH ou OPS	• OPTN LIST ►
• Rappel des valeurs	VARS Statistics ...	MENU STAT STAT
variable aléatoire (x_i)	XY $\bar{x}$ σx	X $\bar{x}$ $x\sigma n$

Programmation

	PRGM	MENU PRGM
• Nouveau programme	• NEW 1:Create New ENTER NAME = A	• NEW EXE Program Name [A]
• Une ligne de programme	• commence par :	• finit par ↵
• Entrée (Input)	• PRGM I/O 1:Input	• PRGM ► ?
sortie (Disp)	• PRGM I/O 2:Disp	PRGM ► ◢
• Guillemets "	• "	• QUIT ► "
• Séparateur d'instructions	• :	• PRGM ► ► :
• Stocker, mettre en mémoire	• STO►	• →
• For, If, Then, Else, End, Pause, While (Casio : I-End, To, LpWhile, Do) ...	• PRGM CTL	• PRGM COM ►
• Lbl, Goto (Casio : ⇒)	• PRGM CTL	• PRGM JUMP
• Test : =, <, >, ≠ ...	• TEST	• PRGM ► ► REL
• Effacer la liste L1	• STAT 4:ClrList ENTER L1	• PRGM ► CLR List 1
• Exécuter un programme	• PRGM EXEC	• PRGM EXE

Enseignement de spécialité

Expression complexe d'une similitude du plan

• **Similitude directe** $z' = az + b$, avec $a \neq 0$.

• **rapport** : $k = |a|$ • **angle** : $\theta = \arg(a)\ (2\pi)$

Si $a \neq 1$, son centre a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$; on a $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

• **Similitude indirecte** $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$.

Arithmétique

a, b, a', b', d et k désignent des entiers relatifs.

• **Division euclidienne de a par b avec b entier naturel non nul.** $a = bq + r$, avec $0 \leqslant r < b$.

• **Divisibilité**

• $a \mid b \Leftrightarrow b = ak$ avec k dans $\mathbb{Z}$. • $a \mid b$ et $b \mid a \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

• p premier $\Leftrightarrow$ p a exactement deux diviseurs naturels : 1 et p.

• **Congruences**

• $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow$ a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

• Si $a \equiv b\ (n)$ et $a' \equiv b'\ (n)$, alors $a + a' \equiv b + b'\ (n)$ et $aa' \equiv bb'\ (n)$.

• **Décomposition en facteurs premiers**

Tout entier $n \geqslant 2$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des entiers naturels premiers tels que $p_1 < p_2 < \dots < p_k$,

et les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

• **PGCD**

$\delta = \text{PGCD}(a\ ;\ b) \Leftrightarrow$ { $\delta \in \mathbb{N}$; δ divise a et b ; tout diviseur commun à a et b divise δ. }

Propriétés

• $d \mid a$ et $d \mid b \Leftrightarrow d \mid \text{PGCD}(a\ ;\ b)$

• $\text{PGCD}(ka\ ;\ kb) = |k| \times \text{PGCD}(a\ ;\ b)$

• Si $a \mid c$ et $b \mid d$, alors $\text{PGCD}(a\ ;\ b) \mid \text{PGCD}(c\ ;\ d)$

• **PPCM**

$\mu = \text{PPCM}(a\ ;\ b) \Leftrightarrow$ { $\mu \in \mathbb{N}^*$; μ est un multiple de a et b ; tout multiple commun à a et b est divisible par μ. }

Propriétés

• $a \mid m$ et $b \mid m \Leftrightarrow \text{PPCM}(a\ ;\ b) \mid m$

• $\text{PPCM}(ka\ ;\ kb) = |k| \times \text{PPCM}(a\ ;\ b)$.

• Si $a \mid c$ et $b \mid d$, alors $\text{PPCM}(a\ ;\ b) \mid \text{PPCM}(c\ ;\ d)$.

• $\text{PGCD}(a\ ;\ b) \times \text{PPCM}(a\ ;\ b) = |ab|$.

• **Nombres premiers entre eux**

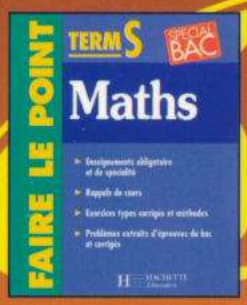
Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = 1$.

• **Théorème de Bézout** :

Si a et b sont premiers entre eux, alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

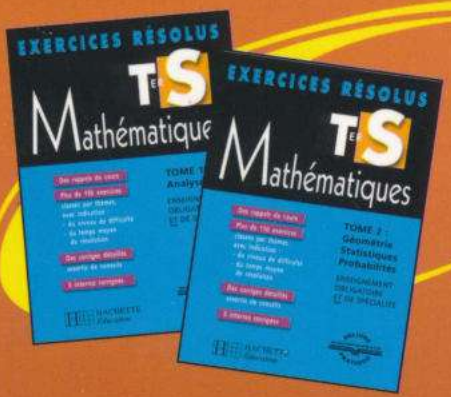
• **Théorème de Gauss** : Si $a \mid bc$ et $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = 1$, alors $a \mid c$.

Chez HACHETTE ÉDUCATION, des outils pour réussir



Collection Faire le point

un ouvrage de méthodes pour se préparer à l'épreuve du bac



Collection Exercices Résolus

des batteries d'exercices pour un entraînement intensif

www.hachette-education.com

13/5297/0
9 782011 352972