Activités : Maths

Programme du Sénégal

Activités MATHS 4e

Pour élèves et enseignants

GRATUIT

A-Maths

GÉOMÉTRIE®

Triangle isocèle équilatéral rectangle

Sphère

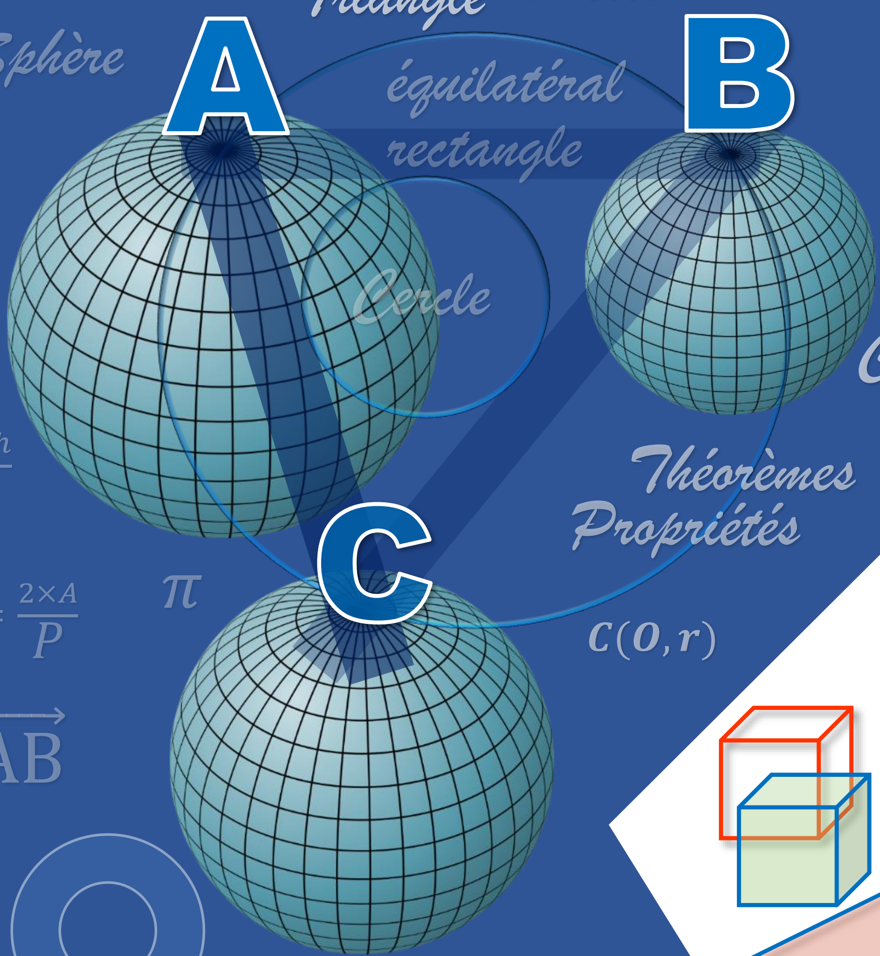
180°

$A = \frac{B \times h}{2}$

$r = \frac{2 \times A}{P}$

π

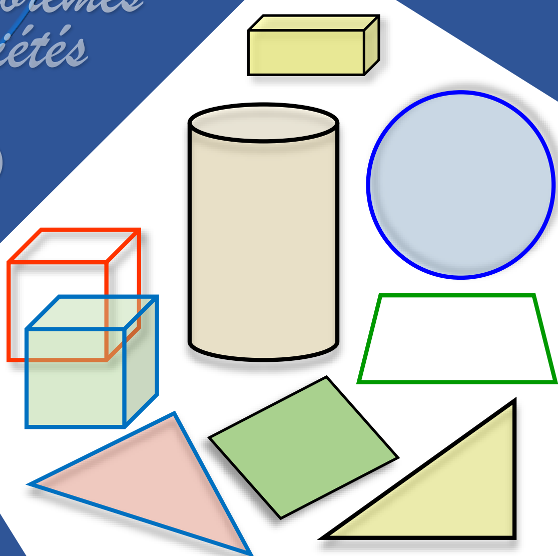
$\overrightarrow{AB}$



Bissectrices
Médianes
Hauteurs
Médiatrices
Orthocentre
Centre de gravité

Théorèmes
Propriétés

$C(O, r)$



2022-2023

Avant-Propos

A-Maths **Géométrie** est un manuel destiné aux élèves des classes de quatrième et à tous les enseignants de Mathématiques. Il est conçu pour permettre aux apprenants d'apprendre et de s'exercer efficacement.

Utilisé convenablement, ce livre peut offrir à son utilisateur, une bonne préparation en vue de réussir les contrôles de mathématiques en géométrie.

Afin d'améliorer le contenu et d'en faire un outil de travail de qualité, les critiques et suggestions venant surtout de la part des enseignants seront les bienvenues.

Il est important de rappeler que ce livre ne dispense pas l'élève d'aller à l'école. L'assiduité en classe est vivement conseillée.

L'élève qui utilise *A-Maths* doit :

- Bien lire et traiter chaque activité proposée.
- Lire et comprendre les commentaires.
- Lire, comprendre et mémoriser l'énoncé à retenir relatif à chaque activité.
- Reprendre les exemples s'il y en a.
- Faire la série d'exercices proposée en s'appuyant sur les acquis du cours et sur les connaissances des classes antérieures.

Pour l'enseignant :

L'enseignant qui utilise *A-Maths* est libre de modifier les contenus des activités et de reformuler les énoncés à retenir. Bien-sûr, il convient en début de chaque chapitre de déclarer les objectifs du cours. Les prérequis relatifs à chaque type d'activité doivent être vérifiés avant le déroulement.

Auteur
M. Diatta
Professeur de MSP

Programme et compétences exigibles

Chapitre n°1 : DISTANCE

Compétences

Savoir déterminer l'intersection (position relative) de deux cercles sans les tracer
Connaître le critère d'existence d'un triangle à partir de trois nombres donnés
Connaître et utiliser les propriétés de la médiatrice pour effectuer un régionnement du plan
Connaître et utiliser la distance d'un point à une droite. Trouver la distance d'un point à une droite.
Connaître et utiliser les propriétés de la bissectrice pour justifier une égalité de distances ou l'appartenance d'un point à la bissectrice d'un angle.
Connaître les configurations d'intersection d'un cercle et d'une droite
Démontrer qu'une droite et un cercle sont sécants, tangents, disjoints.
Construire une tangente à un cercle donné passant par un point donné extérieur au cercle.

Chapitre n°2 : DROITES DES MILIEUX

Compétences

Connaître et utiliser les propriétés et les configurations au programme relatives à la droite des milieux pour :
démontrer le parallélisme de droites ;
calculer des longueurs de segment ;
comparer des longueur de segment
démontrer qu'un point est milieu d'un segment.

Chapitre n°3 : DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

Compétences

Connaître la propriété : les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Connaître le vocabulaire : cercle inscrit dans un triangle.
Construire le cercle inscrit dans un triangle.
Connaître la propriété : les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Connaître le vocabulaire : centre de gravité.
Démontrer qu'un point est le centre de gravité d'un triangle.
Placer le centre de gravité d'un triangle connaissant une médiane
Utiliser les droites remarquables pour démontrer que :
- *trois points sont alignés,*
- *trois droites sont concourantes,*
- *un point est milieu d'un segment.*

Montrer qu'un triangle est isocèle à partir des propriétés de ses droites remarquables.

Chapitre n°4 : TRIANGLE RECTANGLE

Compétences

Connaître et utiliser le Théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs ou d'aires.
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
Connaître et utiliser pour des calculs de longueurs ou d'aires la relation :
$$AB \times AC = AH \times BC.$$
Connaître et utiliser les reconnaissances pour démontrer qu'un triangle est rectangle

Chapitre n°5 : TRANSLATIONS ET VECTEURS

Compétences

Construire l'image par une translation :
- *d'un point ; d'un segment ; d'une demi-droite,*
- *d'un angle ; d'une droite ; d'un triangle ; d'un cercle.*

Reconnaître une translation dans une configuration.
Connaître et utiliser les propriétés d'une translation pour justifier l'alignement de 3 points.
Connaître et utiliser les propriétés d'une translation pour justifier une égalité de distances, une égalité d'angles, le parallélisme de droites, la perpendicularité de droites.
Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour justifier : - une égalité de distances - le parallélisme de droites.
Étant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point A, construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour justifier qu'un point est le milieu d'un segment.

Chapitre n°6 : ROTATION ET POLYGONES REGULIERS

Compétences

Reconnaître un angle au centre
Reconnaître l'arc intercepté par un angle au centre.
Trouver la longueur d'un arc de cercle connaissant le rayon et la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.
Déterminer une rotation dans des cas simples (triangle isocèle, triangle équilatéral, carré…).
Construire l'image d'un point par une rotation.
Connaître et utiliser les propriétés de la rotation pour : - comparer des longueurs, - démontrer l'alignement de 3 points.
Connaître et utiliser les propriétés de la rotation pour comparer des angles, des aires.
Connaître et utiliser les propriétés de la rotation pour démontrer le parallélisme et l'orthogonalité de droites.
Reconnaître un polygone régulier.
Construire un polygone régulier à l'aide de la règle, du rapporteur et du compas.
Utiliser une rotation de centre O et d'angle 360° n pour construire un polygone régulier de centre O à n côtés
Caractériser le cercle inscrit dans un polygone régulier.
Caractériser le cercle circonscrit à un polygone régulier.
Connaître les éléments de symétrie d'un polygone régulier.

Chapitre n°7 : PROJECTION ORTHOGONALE DANS LE PLAN

Compétences

Construire l'image par une projection orthogonale d'un point, d'un segment.
Utiliser la propriété de conservation du milieu dans la résolution de problèmes.
Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment connaissant celles de ses extrémités dans un repère orthonormal.
Utiliser dans un repère orthonormal la formule $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ *pour :*
- calculer des carrés de longueurs
- démontrer qu'un triangle est rectangle.

Chapitre n°8 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Compétences

Connaître le vocabulaire : droites coplanaires, droites non coplanaires
Coder un angle droit dans l'espace.
Reconnaître deux droites orthogonales
Reconnaître sur des solides simples une droite perpendiculaire à un plan.
Représenter une droite perpendiculaire à un plan.
Reconnaître sur des solides simples deux plans parallèles.
Représenter deux plans parallèles.
Calculer le rayon du cercle intersection d'une sphère et d'un plan

I°- Positions relatives de deux cercles

1°/ Cercles tangents extérieurement :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] tel que AB=5cm

b°) Construis les cercles $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ tels que $r_1 = 2cm$ et $r_2 = 3cm$

c°) Calcule $r_1 + r_2$ puis compare $r_1 + r_2$ avec AB

d°) Donne la position relative des deux cercles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir*

Soient $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ deux cercles donnés ;

Si $r_1 + r_2 = AB$ alors, (C_1) et (C_2) sont tangents extérieurement.

2°/ Cercles tangents intérieurement :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] tel que $AB = 1cm$

b°) Construis les cercles $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ tels que $r_1 = 2cm$ et $r_2 = 3cm$

c°) Calcule $|r_1 - r_2|$ puis compare $|r_1 - r_2|$ et AB

d°) Donne la position relative des deux cercles

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir*

Soient $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ deux cercles donnés ;

Si $|r_1 - r_2| = AB$ alors, (C_1) et (C_2) sont tangents intérieurement.

3°/ Cercles disjoints extérieurement :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] tel que $AB = 6cm$

b°) Construis les cercles $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ tels que r_1=2cm et r_2=3cm

c°) Calcule $r_1 + r_2$ puis compare $r_1 + r_2$ avec AB

d°) Donne la position relative des deux cercles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir*

Soient $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ deux cercles donnés ;

Si $r_1 + r_2 < AB$ alors, (C_1) et (C_2) sont disjoints extérieurement.

4°/ Cercles disjoints intérieurement :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] tel que $AB = 2cm$

b°) Construis les cercles $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ tels que r_1=1,5cm et r_2=4cm

c°) Calcule $|r_1 - r_2|$ puis compare $|r_1 - r_2|$ et AB

d°) Donne la position relative des deux cercles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir* Soient $C_1(A\ ;r_1)$ et $C_2(B\ ;r_2)$ deux cercles donnés ;

Si $|r_1 - r_2| > AB$ alors, (C_1) et (C_2) sont disjoints intérieurement.

5°/ Cercles sécants :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] tel que $AB = 4cm$

b°) Construis les cercles $C_1(A\,;r_1)$ et $C_2(B\,;r_2)$ tels que $r_1 = 2cm$ et $r_2 = 3cm$

c°) Calcule $r_1 + r_2$ et $|r_1 - r_2|$. puis compare r_1+r_2 et AB

d°) Donne la position relative des deux cercles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Soient $C_1(A\,;r_1)$ et $C_2(B\,;r_2)$ deux cercles donnés ;

Si $|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2$ alors, (C_1) et (C_2) sont sécants.

Tableau de récapitulation

$C_1(A\,;r_1)$ et $C_2(B\,;r_2)$ sont deux cercles donnés. Il vient :

Résumé des propriétés : ***à retenir***

Comparaisons	Positions relatives des deux cercles
Si $r_1 + r_2 = AB$ alors	(C_1) et (C_2) sont tangents extérieurement
Si $|r_1 - r_2| = AB$ alors	(C_1) et (C_2) sont tangents intérieurement
Si $r_1 + r_2 < AB$ alors	(C_1) et (C_2) sont disjoints extérieurement
Si $|r_1 - r_2| > AB$ alors	(C_1) et (C_2) sont disjoints intérieurement
Si $|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2$ alors	(C_1) et (C_2) sont sécants

Exemple :

On donne les cercles $C_1(A\,;r_1)$ et $C_2(B\,;r_2)$ tels AB=54cm ; $r_1 = 40$cm et $r_2 = 97$cm

Détermine sans faire de figure la position relative des deux cercles.

Réponse :

$r_1 + r_2 = 40 + 97 = 137$

$|r_1 - r_2| = |40 - 97| = |-57| = 57$

Vérification des comparaisons :

$r_1 + r_2 = AB$	$|r_1 - r_2| = AB$	$r_1 + r_2 < AB$	$|r_1 - r_2| > AB$	$|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2$
$137 = 54$	$57 = 54$	$137 < 54$	$57 > 54$	$57 < 54 < 137$
FAUX	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX

Comme $|r_1 - r_2| > AB$ est **vrai** donc C_1 et C_2 sont disjoints intérieurement

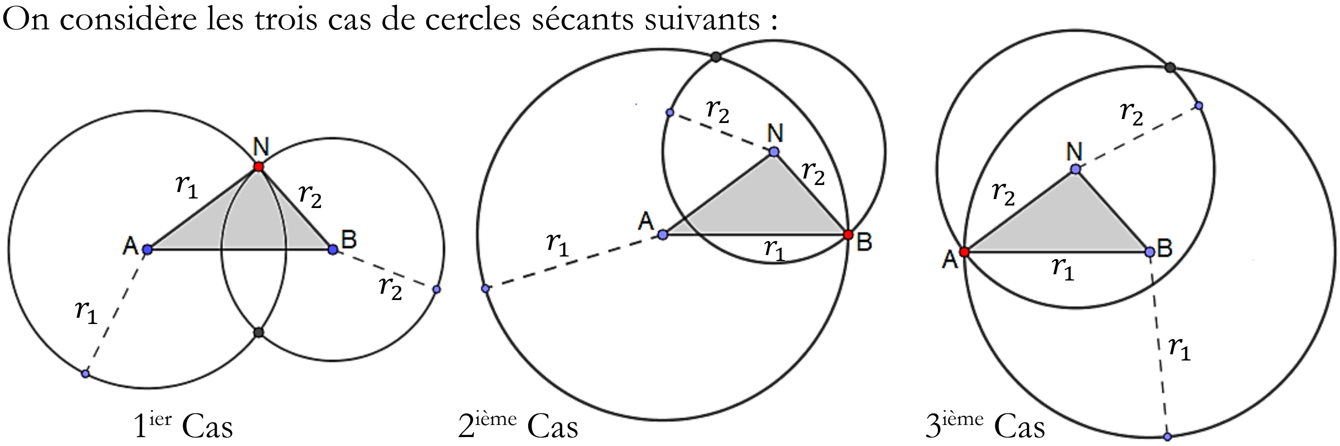
Conseil :

Pour déterminer la position de deux cercles $C_1(A\,;r_1)$ et $C_2(B\,;r_2)$, on peut procéder comme suit :

- On calcule $r_1 + r_2$ puis $|r_1 - r_2|$
- On vérifie les comparaisons du tableau ci-dessus
- On en déduit la position relative des cercles par rapport à la comparaison qui est vraie

II°- Critères d'existence d'un triangle (*inégalités triangulaires*)

On considère les trois cas de cercles sécants suivants :



1^{ier} Cas $\quad$ $2^{ième}$ Cas $\quad$ $3^{ième}$ Cas

- Dans le 1^{ier} cas on a : $|r_1 - r_2| < \text{AB} < r_1 + r_2$ on en déduit que $\text{AB} < \text{AN} + \text{NB}$
- Dans le $2^{ième}$ cas on a : $|r_1 - r_2| < \text{AN} < r_1 + r_2$ on en déduit que $\text{AN} < \text{AB} + \text{BN}$
- Dans le $3^{ième}$ cas on a : $|r_1 - r_2| < \text{BN} < r_1 + r_2$ on en déduit que $\text{BN} < \text{AB} + \text{AN}$

Quel que soit le cas, on constate que la longueur de chaque côté du triangle ABN est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Critères : *à retenir*

Soit a, b et c trois nombres positifs non nuls donnés, il est possible de construire un triangle ABC tel que AB=a, AC=b et BC $= c$ si :

- $a < b + c$ est vraie
- $b < a + c$ est vraie
- $c < a + b$ est vraie

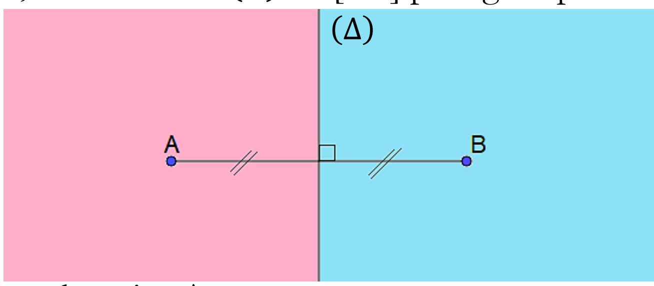
Remarque :

On peut juste se limiter à vérifier si $|a - b| < c < a + b$ est vraie ou fausse.

III°- Régionnement du plan et reconnaissance d'un demi-plan

1°/ Les régions du plan :

Soit [AB] un segment donné, la médiatrice (Δ) de [AB] partage le plan en trois parties ou régions.



- Le demi-plan contenant le point A
- Le demi-plan contenant le point B
- La médiatrice (Δ) frontière des deux demi-plans

2°/ Position d'un point M du plan :

Activité 1 :

a°) Trace un segment [AB] de longueur quelconque

b°) Construis la droite (Δ) médiatrice du segment [AB], elle coupe [AB] en I. Marque I.

c°) Marque un point M distinct de I sur la médiatrice (Δ)

d°) Justifie que les triangles AMI et BMI sont superposables. En déduis que MA=MB

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété 1 : ***à retenir***

Soit (Δ) la médiatrice d'un segment [AB] et M un point quelconque du plan.

- Si $M \in (\Delta)$ alors MA = MB.
- Si MA = MB alors $M \in (\Delta)$

NB : *La médiatrice d'un segment comporte l'ensemble des points situés à égal distance des extrémités de ce segment.*

Activité 2 :

a°) Trace un segment [AB] de longueur quelconque

b°) Construis la droite (Δ) médiatrice du segment [AB].

c°) Marque un point M sur le demi-plan contenant A.

d°) Marque le point I intersection des droites (MB) et (Δ).

e°) Par application de l'inégalité triangulaire au triangle AMI (MA<MI+IA) et de la **Propriété 1 :** montre que MA<MB.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété 2 : ***à retenir***

Soit (Δ) la médiatrice d'un segment [AB] et M un point du plan.

- Si M est du même côté que A par rapport à (Δ) alors MA < MB.
- Si MA < MB alors M est du même côté que A par rapport à (Δ)

Activité 3 :

a°) Trace un segment [AB] de longueur quelconque

b°) Construis la droite (Δ) médiatrice du segment [AB].

c°) Marque un point M sur le demi-plan contenant B.

d°) Marque le point I intersection des droites (MA) et (Δ).

e°) Par application de l'inégalité triangulaire au triangle BMI (MI+IB>MB) et de la **Propriété 1 :** montre que MA>MB

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété 3 : ***à retenir*** Soit (Δ) la médiatrice d'un segment [AB] et M un point du plan.

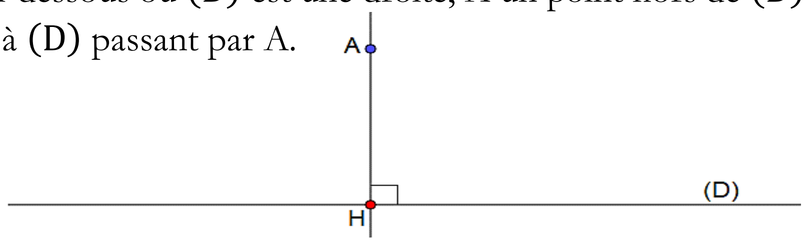
- Si M est du même côté que B par rapport à (Δ) alors MA > MB
- Si MA > MB alors M est du même côté que B par rapport à (Δ).

IV°- Distance d'un point à une droite-Ensemble de points :

1°/ Distance d'un point à une droite :

Activité 1 :

a°) Reproduis la figure ci-dessous où (D) est une droite, A un point hors de (D) et H, le pied de la perpendiculaire à (D) passant par A.



b°) Marque un point M distinct de H sur la droite (D). Quelle est la nature du triangle AHM ? Que représente le côté [AM] pour ce triangle ? Compare AH à AM.

c°) Marque un point N distinct de H et M sur la droite (D). Quelle est la nature du triangle AHN ? Que représente le côté [AN] pour ce triangle ? Compare AH à AN.

Correction (réservée aux élèves) :

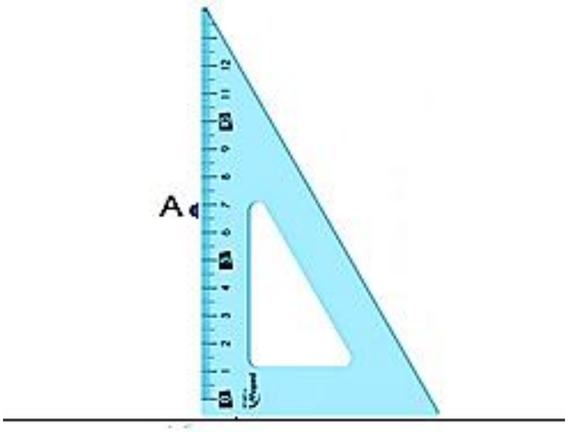
Commentaire : La longueur du segment **[AH]** est la plus petite distance qui existe entre le point **A** et la droite **(D)**. On l'appelle distance du point **A** à la droite **(D)**. On dit aussi que **H** est le point de la droite **(D)** le plus proche du point **A**.

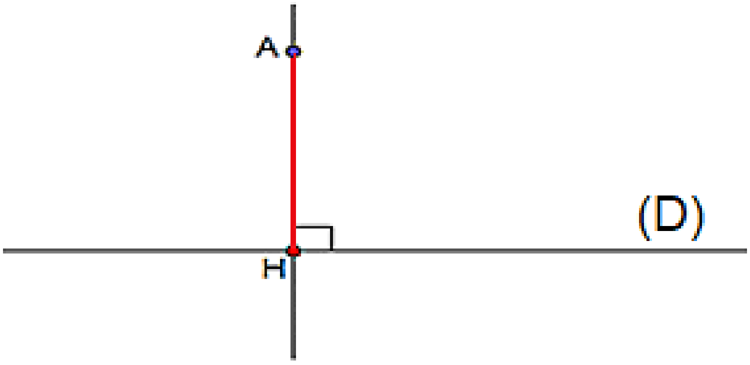
Définition : ***à retenir***

La distance d'un point à une droite est la plus courte longueur qui existe entre ce point et la droite.

2°/ Construction de la distance d'un point à une droite :

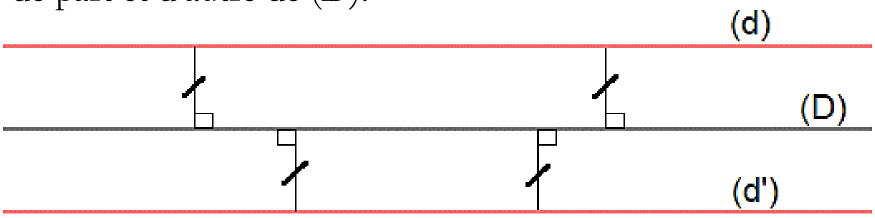
On peut construire la distance d'un point A à une droite (D) comme indiqué sur la figure suivante :





3°/ Ensemble des points situés à égale distance d'une droite donnée :

L'ensemble des points situés à égale distance d'une droite (D) est formé par deux droites (d) et (d') équidistantes de part et d'autre de (D).



(d) et (d') constituent l'ensemble des points situés à égale distance de (D).

V°- Propriétés de la bissectrice d'un angle :

1°/ Rappel de la définition :

Selon le contexte, une bissectrice peut être une droite ou une demi-droite qui partage un angle donné en deux angles de même mesure.

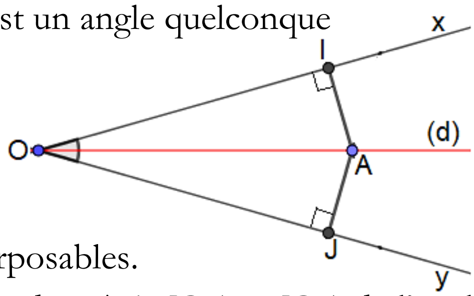
2°/ Propriétés :

Activité 1 : On considère la figure ci-contre où $x\widehat{O}y$ est un angle quelconque

(d) la bissectrice de $x\widehat{O}y$ et A un point de (d)

AI est la distance de A à $[Ox)$

AJ est la distance de A à $[Oy)$



a°) Reproduis la figure.

b°) Montre que les triangles AOI et AOJ sont superposables.

c°) En déduis que le point A se situe à égale distance des côtés [Ox) et [Oy) de l'angle $x\widehat{O}y$.

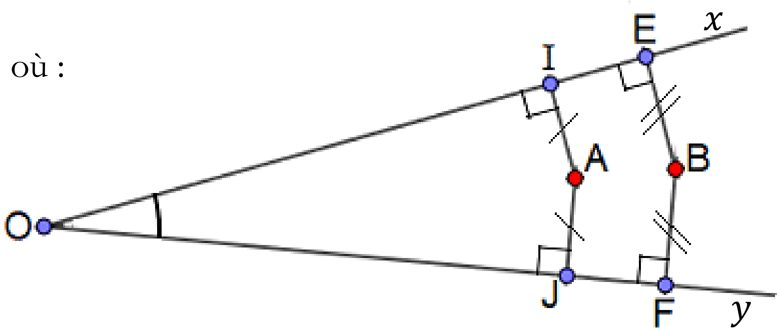
Correction (réservée aux élèves) :

Propriété 1 : ***à retenir***

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

Activité 2 :

On considère la figure codée ci-contre où :



- $x\widehat{O}y$ est un angle quelconque
- AI, la distance de A à $[Ox)$
- AJ, la distance de A à $[Oy)$
- BE, la distance de B à $[Ox)$
- BF, la distance de B à $[Oy)$

a°) Reproduis la figure

b°) Construis la droite (d) bissectrice de l'angle $x\widehat{O}y$.

c°) La bissectrice (d) passe-t-elle par les points A et B ?

Correction (réservée aux élèves) :

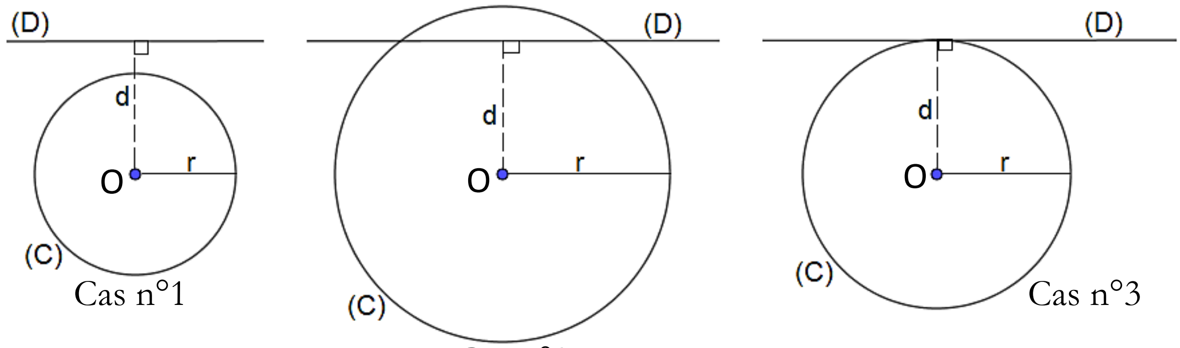
Propriété 2 : ***à retenir***

Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

VI°- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Activité : On considère les figures ci-dessous où on a : une droite (D), un point O situé à une distance d de la droite (D) et un cercle (C) de centre O et de rayon r.

Compare dans chaque cas r et d puis donne la position relative de la droite (D) et du cercle (C).



Cas n°1 Cas n°2 Cas n°3

Correction (réservée aux élèves) :

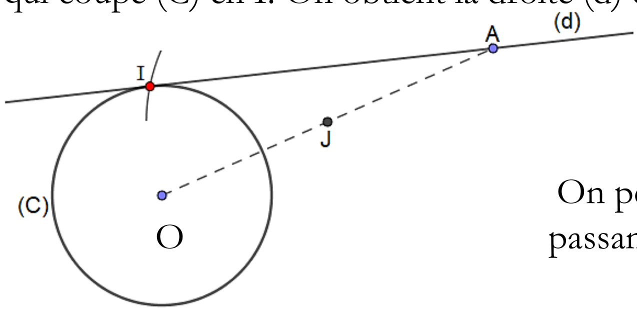
Propriétés : ***à retenir***

Soient (D) une droite et C(O; r) un cercle. On désigne par d, la distance de O à la droite (D).

- Si $r < d$ alors la droite (D) et le cercle (C) sont disjoints
- Si $r > d$ alors la droite (D) et le cercle (C) sont sécants
- Si $r = d$ alors la droite (D) et le cercle (C) sont tangents

VII°- Construction d'une droite tangente à un cercle

(C) étant un cercle et A un point hors de (C) ; pour construire la droite (d) passant par A et tangente à (C), on peut chercher le milieu J de [OA] puis tracer à l'aide du compas, l'arc de cercle de centre J et de rayon JA qui coupe (C) en I. On obtient la droite (d) en traçant la droite (AI).



On peut tracer deux droites passant par A et tangentes à (C)

Série d'exercices

Exercice 1 :

On considère deux cercles C(O,R) et C'(O',R'). Dans chacun des cas ci-dessous, donne la position relative des deux cercles sans faire de figure :

1. OO' = 37 cm ; R = 35 cm et R'= 38 cm.
2. OO' = 43 cm ; R = 14 cm et R'= 17 cm.
3. OO' = 26 cm ; R = 52 cm et R'= 18 cm.
4. OO' = 27 cm ; R = 12 cm et R'= 15 cm.
5. OO' = 14 cm ; R = 11 cm et R'= 25 cm.

Exercice 2 : Dans chacun des cas ci-dessous sans faire la figure dis si le triangle DEF existe.

1^{ier} cas :	DE= 5	EF= 2	DF= 2,5
$2^{iéme}$ cas :	DE=7,5	EF= 5	DF = 4
$3^{iéme}$ cas :	DE=14,2	EF=19	DF= 4,2
$4^{iéme}$ cas :	DE=105,6	EF=104,6	DF = 102,4

Exercice 3 :

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses a, b et c sont données dont une seule est juste. Ecris le numéro de l'énoncé et la réponse choisie.

1- (D) est une droite et (C) est un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Le centre O se situe à une distance de 6 cm du point (D).

a) (D) et (C) sont sécants.
b) (D) et (C) sont disjoints.
c) (D) et (C) sont tangents.

2- (C) est un cercle de centre A et de rayon 6 cm et (D) une droite à une distance de 6 cm du point A.

a) (D) et (C) sont sécants.
b) (D) et (C) sont disjoints.
c) (D) et (C) sont tangents.

3- (C) est un cercle de centre I et de rayon 6 cm et (D) une droite à une distance de 3 cm du point A.

a) (D) et (C) sont sécants.
b) (D) et (C) sont disjoints.
c) (D) et (C) sont tangents.

Exercice 4 :

1. Construis un cercle C(O, 3 cm) et marque un point A tel que OA= 5 cm.
2. Construis les droites (d) et (d') passant par A et tangentes à (C).
3. Propose une procédure de construction des droites (d) et (d').

Exercice 5 :

1. Trace une droite (D) et marque un point I situé à 5 cm de (D).
2. Construis l'ensemble des points situés à 3cm de I.
3. Construis l'ensemble des points situé à 2cm de (D)
4. Quel est l'ensemble des points situés à la fois à 3cm de I et 2cm de (D) ?

Exercice 6 :

1. Trace une droite (D) et marque un point I situé à 5 cm de (D).
2. Construis l'ensemble des points situés à 2cm de I.

3. Construis l'ensemble des points situé à 4cm de (D)

4. Quel est l'ensemble des points situés à la fois à 2cm de I et à 4cm de (D) ?

Exercice 7 : Soient A et B deux points distincts du plan distants de 2cm.

1. Construis l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : AM = AB.

2. Trace l'ensemble E_2 des points N du plan tels que : AN = BN.

3. Colorie en bleu l'ensemble E_3 des points M du plan tels que AM < MB et AM < AB.

Exercice 8 : Soit A et B deux points du plan tels que : AB= 4cm.

1. Trace en bleu l'ensemble des points M du plan tels que : AM=MB.

2. Colorie en jaune l'ensemble des points M du plan tels que : AM <MB.

3. Place un point C tel que: AC=3cm et BC=5cm.

4. Colorie en vert l'ensemble des points M du plan tels que : MB < MC.

5. Hachure l'ensemble des points M tels que : AM < MB < MC.

Exercice 9 :

1. Trace un segment [AB], puis trace sa médiatrice (D).
2. Marque un point M dans le demi-plan (P_B) de frontière (D) contenant le point B puis, trace le segment [MA] qui coupe (D) en I.
3. Montre que MA > MB.

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle et M un point intérieur à ce triangle. La droite (AM) coupe [BC] en I.

1°) Démontre que IC+IB=BC ; IA<IC+CA ; IA+IB<CA+CB

2°) Démontre que MA+MB<IA+IB (*Utilise le triangle BMI*).

3°) Déduis des résultats précédents que MA+MB<CA+CB

4°) Par analogie, complète les pointillés suivants : MA+MC<⋯+⋯ et MB+MC<⋯+⋯

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle et M un point intérieur à ce triangle.

1°) En utilisant les résultats obtenus aux questions 3°) et 4°) de l'**exercice10**, démontre que :
MA+MB+MC<AB+BC+CA

2°) Démontre que : $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} > \mathrm{AB}$; $\mathrm{MB} + \mathrm{MC} > \mathrm{BC}$; $\mathrm{MC} + \mathrm{MA} > \mathrm{AC}$.
En déduire que : $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} > \frac{\mathrm{AB+BC+CA}}{2}$

3°) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\frac{\mathrm{AB+BC+CA}}{2} < \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} < \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$$

Exercice 12 :

1. Construis un triangle quelconque ABC, et choisis un point I sur le segment [BC].
On désigne par *P* le périmètre du triangle ABC.

2. Démontre que AI < $\frac{p}{2}$.

I°- Théorème de la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle

Activité 1 :

a°) Trace un triangle ABC quelconque

b°) Marque les points I et J milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]

c°) Marque le point K symétrique de I par rapport à J

d°) Justifie que AICK est un parallélogramme puis complète les pointillés suivants :

$(AI)//(\cdots)$ et $\cdots\cdots = CK$

e°) Justifie que (IB)//(CK) puis que IB=CK

f°) Justifie que IBCK est un parallélogramme puis complète les pointillés suivants :

$(IK)//(\cdots)$

g°) En déduis que (IJ)//(BC)

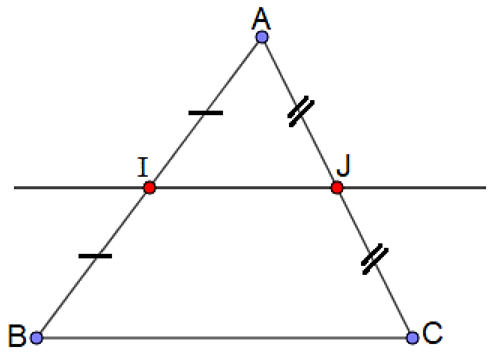
Correction (réservée aux élèves) :

Théorème 1 : ***à retenir***

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle à la droite support du troisième côté.

Déductogramme

ABC est un triangle	I milieu de [AB] J milieu de [AC]
(IJ)//(BC)	



II°- Théorème du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle

Activité 2 :

a°) Trace un triangle ABC quelconque

b°) Marque les points I et J milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]

c°) Marque le point K symétrique de I par rapport à J

d°) Montre en utilisant le **Théorème 1 :** que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. En déduis que (IK)//(BC)

e°) Montre que IBCK est un parallélogramme

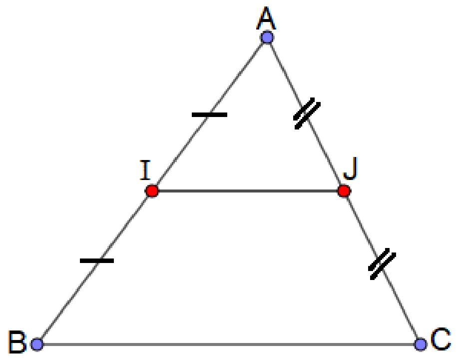
f°) Montre que $IJ = \frac{IK}{2} = \frac{BC}{2}$

Correction (réservée aux élèves) :

Théorème 2 : ***à retenir***

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté.

ABC est un triangle	I milieu de [AB] J milieu de [AC]
Donc $IJ = \frac{BC}{2}$	



III°- Théorème de la droite passant par le milieu d’un côté parallèlement au deuxième côté.

Activité 3 :

a°) Trace un triangle ABC quelconque

b°) Marque le point I milieu du côté [AB].

c°) Trac la droite (d) passant par I et parallèle à la droite (BC). Elle coupe [AC] en J.

d°) Marque le point M milieu du segment [AC]. Les points J et M, sont-ils distincts ou confondus justifie ta réponse.

Correction (réservée aux élèves) :

Théorème 3 : ***à retenir***

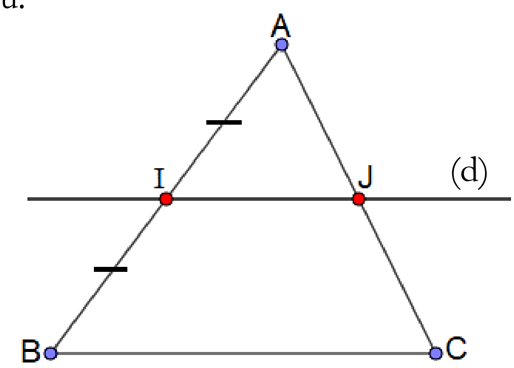
Si une droite est parallèle à la droite support d’un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un autre côté alors, elle coupe le troisième côté en son milieu.

Déductogramme

ABC est un triangle et I milieu de [AB]

La droite (d) passe par I et est parallèle à (BC)

(d) coupe [AC] en J donc J est le milieu de [AC].



IV°- Théorème des trois droites parallèles découpant sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur

Activité 4 :

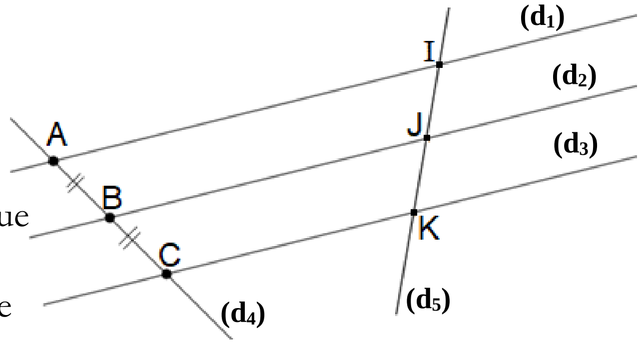
On considère les droites parallèles (d_1) ; (d_2) et (d_3) découpant sur la sécante (d_4) deux segments consécutifs [AB] et [BC] de même longueur. Elles découpent aussi sur la sécante (d_5) deux segments consécutifs [IJ] et [JK].

a°) Reproduis la figure

b°) Trace la droite (AK), elle coupe (d_2) en P

c°) Montre que P est le milieu de [AK] en déduis que AP=PK

d°) Montre que J est le milieu de [IK] en déduis que KJ=JI



Correction (réservée aux élèves) :

Théorème 4 : ***à retenir***

Si trois droites parallèles découpent sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur, alors elles découpent sur toute autre sécante deux segments consécutifs de même longueur.

Exercice 1 :

On suppose que AB = 7 cm, AC = 8 cm et BC = 12 cm. et on désigne par I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

On désigne par L et M les milieux respectifs de [KJ] et [KI].

1. Fais la figure.

2. Prouve que la droite (LM) est parallèle à la droite (AB).

3. Montre que $LM=\frac{1}{4}AB$

Exercice 2 :

ABC est un triangle qui n'est pas rectangle en B.

E est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) et

F le symétrique du point A par rapport au point B.

Démontre que la droite (BC) est parallèle à la droite (EF).

Exercice 3 : ABC est un triangle quelconque

Soient I le milieu du segment [AB], J le milieu du segment [AC], K le milieu du segment [AI] et L le milieu du segment [AJ]. La parallèle à (AJ) passant par K coupe (IJ) en M.

1. Fais une figure.
2. Démontre que : 4KL=BC.
3. Démontre que : 4KM=AC.

Exercice 4 : On considère un triangle ABC,

Soient I le milieu du segment [AB] et J celui de [AC].

Le point C' est le symétrique de C par rapport à I et le point B', celui de B par rapport à J.

1. Fais une figure complète et code-la.

2.

a) Démontre que : (IJ)//(AB') et 2IJ=AB'

b) Démontre que : (IJ)//(AC') et 2IJ= AC'.

3. Démontre que A est le milieu de [B'C'].

Exercice 5 :

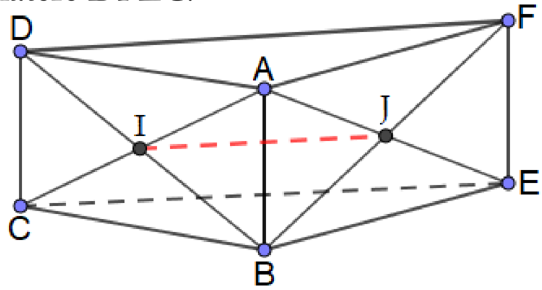
ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC]. Soit M le milieu de [AD] et P celui de [BD]

1. Démontre que (MP)//(AB).
2. La droite (MP) coupe la droite (BC) en N. Prouve que N est le milieu de [BC].
3. Prouve que $MN = \frac{AB+DC}{2}$

Exercice 6 : Dans la figure ci-dessous ;

ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes de centres respectifs I et J

1. Montre que les droites (CE) et (DF) sont parallèles (indication : on pourra utiliser (IJ)).
2. Déduis-en la nature du quadrilatère DFEC.



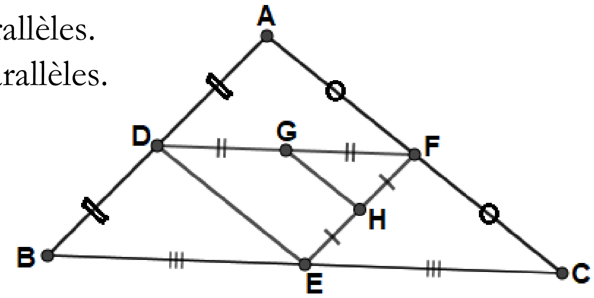
Exercice 7 : On considère la figure codée ci-dessous ;

1°) Démontre que les droites (DF) et (BC) sont parallèles.

2°) Démontre que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

3°) Démontre que les droites (GH) et (AC) sont parallèles.

4°) Démontre que ADEF est un parallélogramme.



I°- Bissectrices des angles d'un triangle

1°/ Propriétés :

Activité :

a°) Trace un triangle ABC quelconque.
b°) Construis les demi-droites [Ax) et [By) bissectrices respectives des angles $B\widehat{A}C$ et $A\widehat{B}C$.
c°) On admet que les bissectrices [Ax) et [By) se coupent en O. Marque O.
d°) OI est la distance de O à (AB), OJ la distance de O à (BC), OK la distance de O à (AC). Marque les points I, J et K.
e°) Justifie que OI=OJ et que OJ=OK
f°) Montre que la bissectrice [Cz) de l'angle $\widehat{ACB}$ passe par O. En déduis que les trois bissectrices sont concourantes.
g°) Trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OI. Montre qu'il est tangent aux côtés de ABC.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriétés : *à retenir*

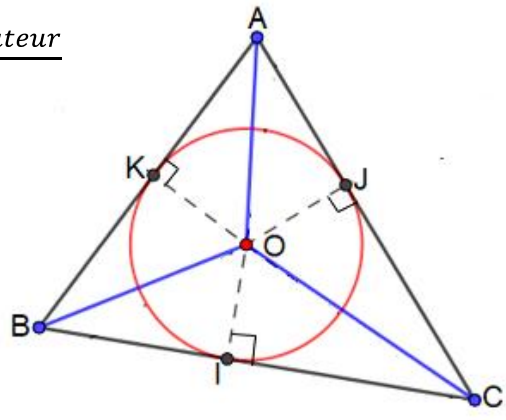
- Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concours des bissectrices d'un triangle est le ***centre du cercle inscrit*** dans ce triangle
- Le cercle inscrit dans un triangle est tangent à chaque côté de ce triangle.

2°/ Rayon du cercle inscrit :

Activité : on considère la figure ci-dessous où ABC est un triangle et ($\mathcal{C}$) son cercle inscrit de rayon r=OI=OJ=OK

Sachant que l'aire d'un triangle a pour formule : $\frac{base \times hauteur}{2}$

a°) Donne l'expression de l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle AOB
b°) Donne l'expression de l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle AOC
c°) Donne l'expression de l'aire $\mathcal{A}_3$ du triangle BOC
d°) Soient $\mathcal{A}$ l'aire de ABC et $\mathcal{P}$ son périmètre, montre que $\mathcal{A} = \frac{r \times P}{2}$. En déduis que $r = \frac{2 \times A}{P}$



Correction (réservée aux élèves) :

Formule *à retenir :*

Le rayon du cercle inscrit dans un triangle est égal à deux fois l'aire de ce triangle divisée par son périmètre.

II°- Médianes d'un triangle

1°/ Rappel de la définition :

Selon le contexte, une médiane dans un triangle peut être une droite ou une demi-droite ou un segment qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

2°/ Propriétés :

Activité :

a°) Trace un triangle ABC quelconque et marque les points I, J et K milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

b°) Construis les droites (AI), (BJ) et (CK) médianes respectives des côtés [BC], [AC] et [AB]
c°) On admet que les trois médianes se coupent en G. Marque G.
d°) Marque le point M symétrique de G par rapport à I. Donne en le justifiant la nature "parallélogrammatique" du quadrilatère GBMC.
e°) Montre que les droites (GK) et (BM) sont parallèles.
f°) Montre que G est le milieu de [AM].
g°) On veut montrer que $AG=\frac{2}{3}AI$, pour cela, complète les pointillés suivants :

$AG=\cdots$	car G est le milieu de [AM]
$=2\cdots$	car I est le milieu de [GM]
$=2(AI-\cdots)$	car A,G et I sont alignés dans cet ordre
$=2\cdots-2\cdots$	par développement
$AG+2\cdots=2\cdots$	
$3AG=2\cdots$	donc $AG=\frac{2}{3}\cdots$

Commentaire :

Il sera établi de la même manière que $BG=\frac{2}{3}BJ$ **et** $CG=\frac{2}{3}CK$

Correction (réservée aux élèves) :

Propriétés : ***à retenir***

- Les médianes d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concours des médianes d'un triangle est appelé ***centre de gravité***
- Le centre de gravité d'un triangle se situe au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

III°- Hauteurs d'un triangle

1°/ Rappel de la définition :

Une hauteur pour un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire à la droite support du côté opposé à ce sommet.

2°/ Propriétés :

Activité :

a°) Trace un triangle ABC quelconque.
b°) Construis les droites (d), (D) et (L) hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C
c°) Les trois hauteurs sont-elles concourantes ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriétés : ***à retenir***

- Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé **orthocentre.**

Remarques :

- L'orthocentre d'un triangle rectangle est le sommet de son angle droit.
- L'orthocentre d'un triangle qui comporte un angle obtus se trouve à l'extérieur de ce triangle.
- L'orthocentre d'un triangle qui comporte que des angles aigus se trouve à l'intérieur de ce triangle.

IV°- Médiatrices d'un triangle

Activité :

a°) Trace un triangle ABC quelconque.

b°) Construis les droites (d), (D) et (L) médiatrices respectives de [AB], [AC] et [BC]

c°) Les trois médiatrices sont-elles concourantes ?

d°) Soit I le point d'intersection entre les droites (d) et (L), trace le cercle de centre I et de rayon IA. Passe-t-il par les sommets B et C ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriétés : ***à retenir***

- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concours des médiatrices d'un triangle est appelé **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.

V°- Droite d'Euler

Activité :

a°) Trace un triangle ABC tel que AB=4cm ; AC=6cm et BC=7cm

b°) Construis son centre de gravité G, son orthocentre H, son centre du centre circonscrit I et son centre du cercle inscrit O.

c°) Trace la droite (Δ) passant par G et H. Passe-t-elle I ? Passe-t-elle par O ?

Correction (réservée aux élèves) :

Ce qu'il faut retenir :

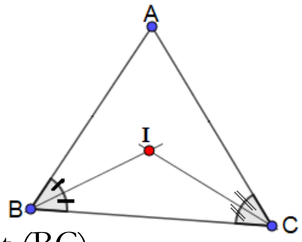
Pour un triangle, on appelle **droite d'Euler,** la droite qui passe par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit de ce triangle.

VI°- Reconnaissance d'un triangle isocèle

Si dans un triangle une hauteur est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.
Si dans un triangle une médiane est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.
Si dans un triangle une médiatrice est en même temps bissectrice alors ce triangle est isocèle.

Série d'exercices

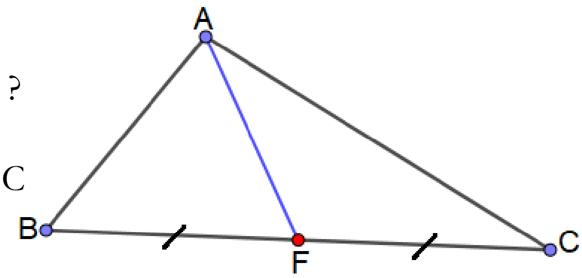
Exercice 01 : On considère le triangle codé suivant :



1°) Quelle droite remarquable représente (BI) pour le triangle ABC ?
2°) Quelle droite remarquable représente (CI) pour le triangle ABC ?
3°) Comment appelle-t-on le point I ?
4°) Quelle droite remarquable représente (AI) pour le triangle ABC ?
5°) Démontre que le point I est à égale distance des droites (AB), (AC) et (BC).

Exercice 02 :

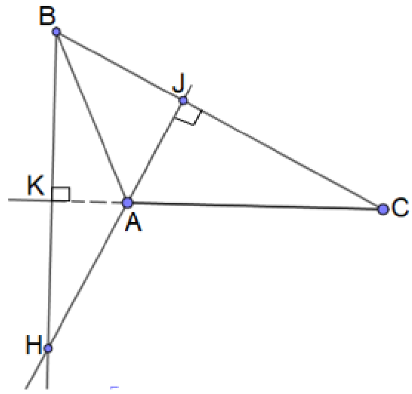
On considère la figure codée ci-contre



1°) Que représente la droite (AF) dans le triangle ABC ?
2°) Reproduis la figure sachant que AF=3cm
3°) Marque le point G centre de gravité du triangle ABC
4°) Trace les droites (CG) et (BG).
Que représente-t-elles pour le triangle ?

Exercice 03 :

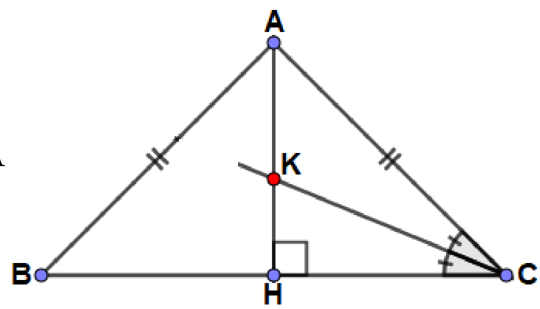
On considère la figure codée ci-contre :



1°) Que représentent les droites (AJ) et (BK) pour le triangle ABC ? Justifie ta réponse
2°) Comment appelle-t-on les points J et K ? Justifie
3°) Comment appelle-t-on le point H ? Justifie
4°) Pourquoi H se trouve-t-il hors du triangle ? Justifie
5°) Que représente la demi-droite [CH) pour le triangle ? Justifie

Exercice 04 : choisis la ou les bonne(s) réponse(s)

On considère la figure codée ci-contre :



1°) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Réponse(s) : à justifier

a) rectangle en A b) équilatéral c) isocèle en A

2°) Quel type de droite remarquable est la droite (CK) ?

Réponse(s) : à justifier

a) médiane issue de C b) hauteur issue de C
c) bissectrice issue de C d) médiatrice du segment [AB]

3°) Quel type de droite remarquable est la droite (AH) ?

Réponse(s) : à justifier

a) médiane issue de A
b) hauteur issue de A
c) bissectrice issue de A
d) médiatrice du segment [BC]

4°) Que représente le point K pour le triangle ABC ?

Réponse(s) : justifier

a) orthocentre
b) centre du cercle circonscrit
c) centre de gravité
d) centre du cercle inscrit

Exercice 05 : Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit E le symétrique du point C par rapport à B et G le point d'intersection des droites (AB) et (OE) .
1°) Fais une figure.
2°) Que représente le point G pour le triangle AEC ?
3°) En déduire que la droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu.

Exercice 06 : ABC est un triangle de centre de gravité G. E, D et F sont les milieux respectifs de [AC], [AB] et [BC]. On donne: AE = 2 cm, AG = 3 cm, GD = 1 cm et BE = 6 cm.
Calcule AC, GF, GC, BG et GE.

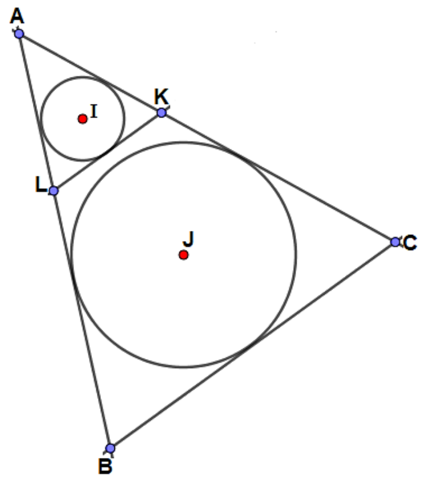
Exercice 07 : Soit ABC un triangle tel que AB = 10cm, BC = 11cm et CA = 12cm.
1°) Construis l'orthocentre H du triangle ABC.
2°)
a) Soit I le point d'intersection des droites (AH) et (BC); J le point d'intersection des droites (BH) et (CA); K le point d'intersection des droites (CH) et (AB).
Construis le centre du cercle inscrit au triangle IJK.
b) Que constate-t-on ?

Exercice 08 :
1°) Construis le triangle ABC tel que : AB =BC=5cm et $\widehat{ABC}$=98°cm.
2°) Construis le cercle $\mathcal{C}$ (I, IA) circonscrit au triangle ABC.
2°) I est-il un point intérieur ou extérieur au triangle ABC ? Cette position de I était-elle prévisible ?

Exercice 09 :
1°) Trace un parallélogramme quelconque ABCD.
2°) Trace la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (BC) en I.
3°) Trace la droite (d') passant par C et perpendiculaire à (AB) en J.
4°) (d) et (d') se coupent en H, marque H.
5°) Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC) ?

Exercice 10 :
1. Construis le triangle ABC tel que AB=14cm, AC=10 cm et BC=12 cm.
2. Construis ses médiatrices, ses médianes, ses hauteurs et ses bissectrices respectivement en rouge, vert, bleu et noir
3. Place le point G centre de gravité du triangle, le point O centre du cercle circonscrit, le point I centre du cercle inscrit et le point H orthocentre du triangle.
4. Pour ce triangle ABC, construis les cercles circonscrit et inscrit.
5. Trace la droite qui passe par O et H. Vérifie qu'elle passe par G. Comment appelle-t-on une telle droite ?

Exercice 11 :
Dans la figure ci-contre, les droites (KL) et (BC) sont parallèles
1°) Démontre que les points A, I et J sont alignés
2°) Démontre que ALK=ABC
3°) Démontre que ILK=JBC
4°) Démontre que les droites (IL) et (JB) sont parallèles



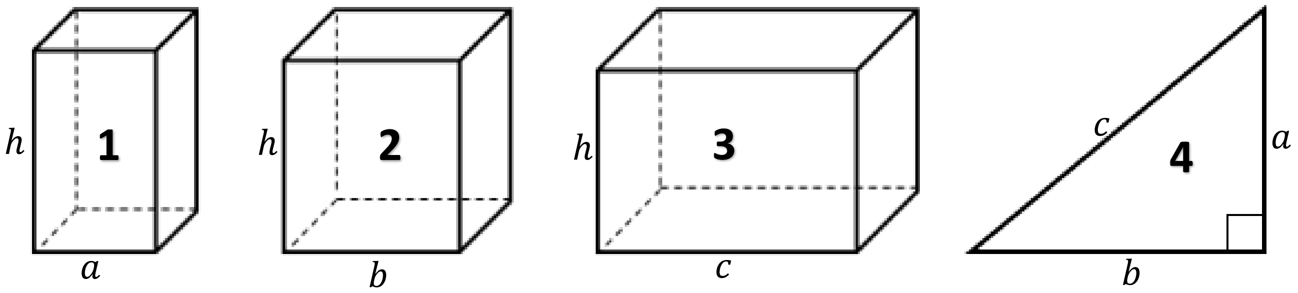
I°- Propriétés

1°/ Théorème de Pythagore :

Activité pratique :

On a confectionné avec des cartons les solides suivants :

- **1 :** Un parallélépipède rectangle de hauteur h dont la base est un carré de côté a
- **2 :** Un parallélépipède rectangle de hauteur h dont la base est un carré de côté b
- **3 :** Un prisme parallélépipède rectangle de hauteur h dont la base est un carré de côté c
- **4 :** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse est c et les cathètes sont a et b



On a rempli de sable les deux premiers puis on a versé les contenus dans le troisième. L'expérience a montré que le troisième se remplit parfaitement bien avec les contenus de sable des deux autres.

a°) Rappelle la formule du volume d'un parallélépipède rectangle.

b°) Donne l'expression du volume de chacun des parallélépipède.

c°) Sachant que $V_3 = V_1 + V_2$ montre que $a^2 + b^2 = c^2$

Correction (réservée aux élèves) :

Commentaire :

L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ ci-dessus établie est appelée *égalité du théorème de Pythagore*

Activité :

ABC est un triangle rectangle en A, on adosse à ses côtés les carrés AEFC, ABPQ et BCHG de côtés respectifs a, b et c. On donne $a = 3cm$, $b = 4cm$ et $c = 5cm$

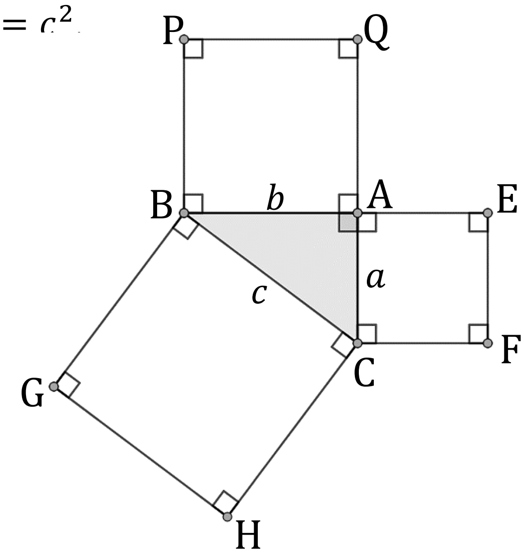
a°) Exprime en fonction de a l'aire $\mathcal{A}_1$ du carré AEFC puis calcule sa valeur.

b°) Exprime en fonction de b l'aire $\mathcal{A}_2$ du carré ABPQ puis calcule sa valeur.

c°) Exprime en fonction de c l'aire $\mathcal{A}_3$ du carré BCHG puis calcule sa valeur.

d°) Exprime en fonction de a et b la somme $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ puis calcule sa valeur.

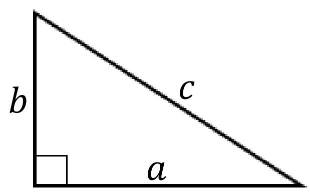
e°) Compare $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}_3$ puis établie que $a^2 + b^2 = c^2$



Correction (réservée aux élèves) :

Commentaire :

L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ ci-dessus établie est appelée *égalité du théorème de Pythagore*



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Enoncé du théorème de Pythagore : ***à retenir***

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Remarque :

Le théorème de Pythagore sert à calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle.

Exemple :

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB= 8cm et AC= 10cm. Calculons BC.

Réponse :

D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2+BC^2=AC^2$ donc $BC^2=AC^2-AB^2$, il vient : $BC^2=10^2-8^2=100-64=36=6^2$; $BC^2=6^2$; $BC=6$ cm

2°/ Théorème de la hauteur issue du sommet de l'angle droit :

Activité 1 :

a°) Trace un triangle ABC rectangle en A

b°) Trace la hauteur issue de A. Elle coupe (BC) en H

c°) Rappelle la formule de l'aire d'un triangle

d°) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les aires respectives des triangles ABC, AHB et AHC. Sachant que

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ montre que $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{BC}$

Correction (réservée aux élèves) :

Théorème : ***à retenir***

Si un triangle ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A sur (BC) alors $AH \times BC = AB \times AC$

Activité 2 :

a°) Trace un triangle ABC rectangle en A

b°) Trace la hauteur issue de A. Elle coupe (BC) en H

c°) Exprime AH^2 dans le triangle ABH puis dans le triangle ACH.

d°) Recopie et complète les pointillés suivants par le côté qui convient en tenant compte du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AH}^2 &= \mathrm{AB}^2 - \cdots^2 + \mathrm{AC}^2 - \cdots^2 \\
&= \cdots^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BH}^2 - \cdots^2 \\
&= \mathrm{BC}^2 - \mathrm{BH}^2 - \mathrm{CH}^2 \qquad \text{Or} \quad \mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \cdots \\
&= (\mathrm{BH} + \cdots)^2 - \mathrm{BH}^2 - \mathrm{CH}^2 \\
&= \cdots^2 + 2 \times \mathrm{BH} \times \cdots + \mathrm{CH}^2 - \mathrm{BH}^2 - \mathrm{CH}^2 \\
2 \cdots^2 &= 2 \times \mathrm{BH} \times \cdots \\
\cdots^2 &= \mathrm{BH} \times \cdots
\end{aligned}$$

Correction (réservée aux élèves) :

Théorème : ***à retenir***

Si un triangle ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A sur (BC) alors $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$

II°- Propriétés de reconnaissance d'un triangle rectangle

a) Propriété : ***à retenir***

Soit un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A sur (BC)

- Si $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{BC}$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

b) Réciproque du Théorème de Pythagore :

Propriété : ***à retenir***

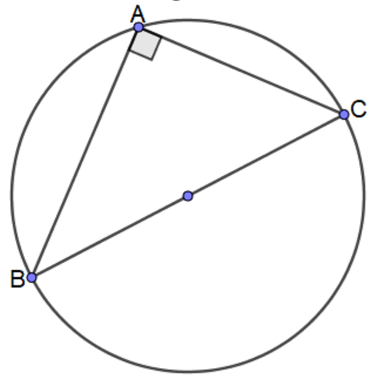
Soit ABC un triangle donné ;

Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

III°- Autres propriétés de reconnaissance d'un triangle rectangle

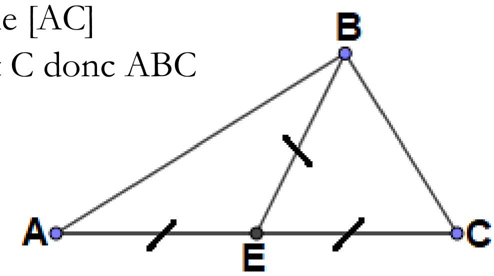
a) Un triangle inscrit dans un cercle est rectangle si un de ses côtés est un diamètre de ce cercle.

Dans la figure ci-contre,
Le triangle ABC est rectangle car il est inscrit dans le cercle de diamètre BC.



b) Si le milieu du côté d'un triangle est équidistant de ses sommets alors ce triangle est rectangle

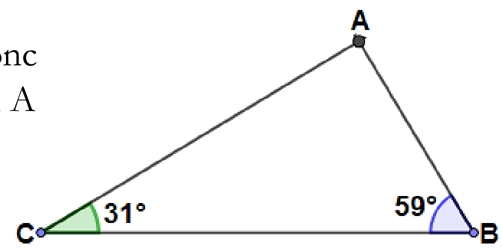
- ABC est un triangle, E est le milieu de [AC]
- Comme E est équidistant des A, B et C donc ABC
- Est un triangle rectangle en B.



c) Un triangle qui a deux angles complémentaires est un triangle rectangle

$\hat{B} + \hat{C} = 31° + 59° = 90°$

$\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires donc
ABC est un triangle rectangle en A



Série d'exercices

Exercice 1 :

Recopie puis complète chacune des phrases ci-dessous :

1-Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal…..la somme…………………..……

2-Dans un triangle rectangle, la somme des ……………………..……est égal au carré de …...……….

3-Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle ….……est égal au …………… de ……………..par la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

Exercice 2 :

1°) Quelle est la bonne réponse ?

Si ABC est un triangle rectangle en A alors, on a :

Réponse 1 : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Réponse 2 : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Réponse 3 : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

2°) Si AIM est un triangle rectangle en I et H le pied de la hauteur issue de I sur (AM) alors, on a:

Réponse 1 : $AI \times AM = AMAH$

Réponse 2 : $AI \times AH = AI \times AM$

Réponse 3 : $AI \times MI = AM \times AH$

Mets une croix sur la bonne réponse.

Exercice 3 :

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que, AB = 4 et AC = 3. Calcule BC.
2. EFG est un triangle rectangle en G tel que, EF = 2,5 et GF = 2. Calcule GE.
3. IJK est un triangle rectangle en K tel que JK=8 et IJ=10. Calcule IK
4. TOP est un triangle rectangle en P tel que TO=6 et TP=3. Calcule OP^2.
5. DEC est un triangle rectangle en E tel que ED=1 et EC=1. Calcule CD^2

Exercice 4 :

Dans quels cas le triangle ABC est-il rectangle ? Précise le sommet de l'angle droit.

1) AB=24	AC=7	BC=25
2) AB=12	AC=35	BC=37
3) AB=13	AC=5	BC=12
4) AB=20	AC=22	BC=16
5) AB=16	AC=14	BC=10
6) AB=17	AC=15	BC=8
7) AB=299	AC=276	BC=115
8) AB=60	AC=100	BC=8

Exercice 5 :

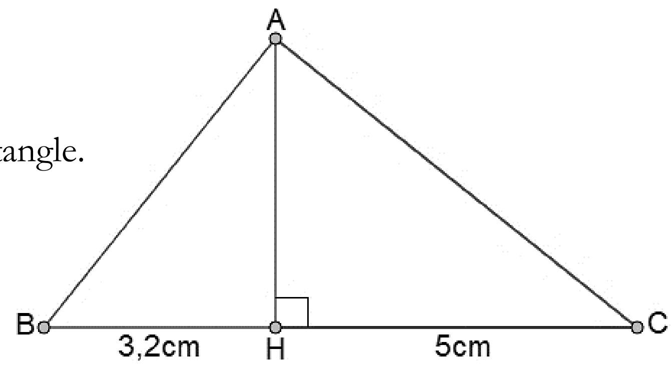
ABC est un triangle rectangle et H le pied de la hauteur issue de I sur (BC)

Tel que BH=3,2cm et CH=5cm

a°) Calcule AH^2 puis en déduis AH

b°) Calcule AB et AC

c°) Montre que ABC est un triangle rectangle.



Exercice 6 :

a°) Place trois points B, A et C alignés dans cet ordre tels que BA=4,5cm et BC=8cm

b°) Trace la droite (d) perpendiculaire à (BC) en A.

c°) Trace le demi-cercle de diamètre [BC]. Il coupe (d) en I.

d°) Quelle est la nature du triangle BIC ? justifie ta réponse.

e°) Que représente AI pour le triangle BIC ?

f°) Calcule AI^2, BI^2 et CI^2

Exercice 7 :

L'unité de mesure est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=6,4 et AC=4,8

1. Sans faire de figure, calcule BC^2 puis en déduis BC.
2. Fais la figure que tu complèteras au fur et à mesure
3. Sur la demi-droite [BA) place le point K tel que BK=10.
4. Calcule AK et CK.
5. Montre que BCK est un triangle rectangle en un point que tu préciseras.
6. Trace le cercle circonscrit au triangle CBK.

Exercice 8 :

1°) Trace le cercle (C) de centre I et de diamètre AB=6cm.

2°) Marque sur ce cercle le point J tel que AJ=4cm. Quelle est la nature du triangle ABJ ?

3°) Calcule le carré du côté BJ.

Exercice 9 : **Recherche.**

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montre que :

$AB^2 = BH \times BC$

$AC^2 = BC \times CH$.

Exercice 10 :

Une personne dispose de deux échelles de même longueur L représentées par [NM] et [FM].
Elle souhaite les disposer contre deux murs [NG] et [FK] comme indiquée sur la figure ci-dessous.

1) Applique le théorème de Pythagore à chacun des triangles rectangles NGM et FKM.

2) Note x la longueur GM (en mètres). Exprime MK en fonction de x.

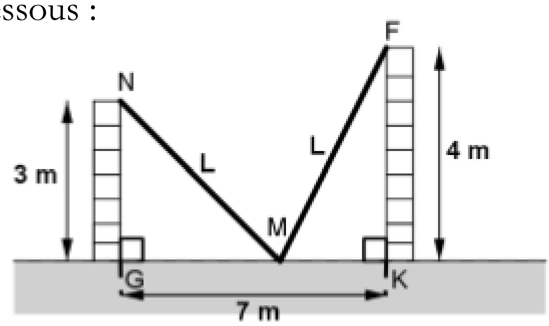
3)

a) A l'aide de la question 1), établis l'équation ci-dessous :

$$x^2 + 9 = (7 - x)^2 + 16$$

b) Résous cette équation.

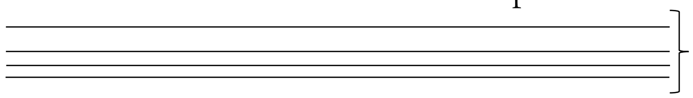
4) Déduis-en la longueur L des deux échelles.



I°- Droites de même direction – Sens sur une direction :

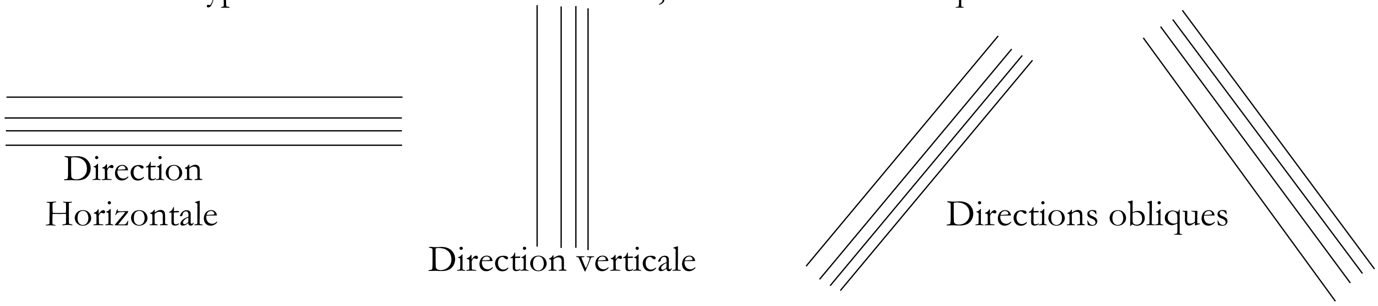
1°/ Définition d'une direction :

Une direction est un ensemble de droites toutes parallèles à une droite donnée.


Une direction

2°/ Les types de direction :

Il existe trois types de direction : l'horizontale, la verticale et l'oblique.



Remarque : Une droite peut déterminer une direction.

3°/ Les sens sur une direction :

Il existe toujours deux sens de déplacement sur une direction. **Exemples :**

●Sur une droite de ***direction horizontale***, le déplacement se fait vers la **Gauche** ou vers la **Droite**.

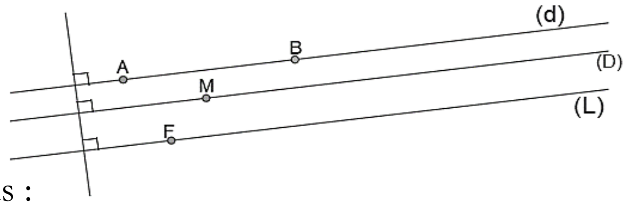
●Sur une droite de ***direction verticale***, le déplacement se fait vers le **Haut** ou vers le **Bas**.

●Sur une droite (AB) de ***direction oblique***, le déplacement se fait de A vers B ou de B vers A

II°- Translation : définition et procédure de construction

1°/ Définition :

Activité :



a°) Reproduis la figure ci-dessus :
b°) Prouve que les droites (d), (D) et (L) ont la même direction
c°) Marque le point M' sur (D) tel que [AB) et [MM') soient de même sens et AB=MM'
d°) Marque le point F' sur (L) tel que [AB) et [FF') aient le même sens et AB=FF'

Correction (réservée aux élèves) :

Commentaire : **Dans cette activité, il est mis en évidence une application mathématique appelée translation et notée par t . Ainsi, on dit que :**

- *M' est l'image de M par la translation t qui transforme A en B. On note t(M)=M'*
- *F' est l'image de F par la translation t qui transforme A en B. On note t(F)=F'*

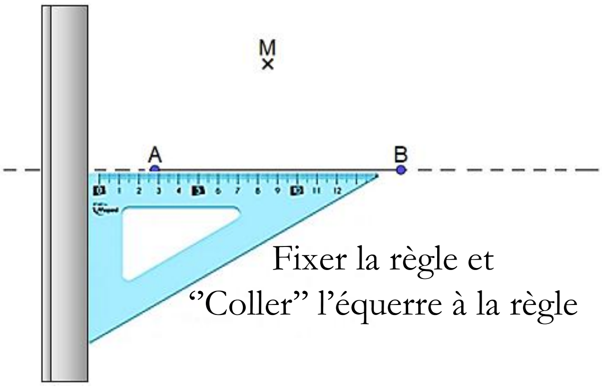
Définition : ***à retenir***

Soit $\mathcal{P}$ un plan, A et B deux points de $\mathcal{P}$. Une translation t qui transforme A en B est une application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' telle que :

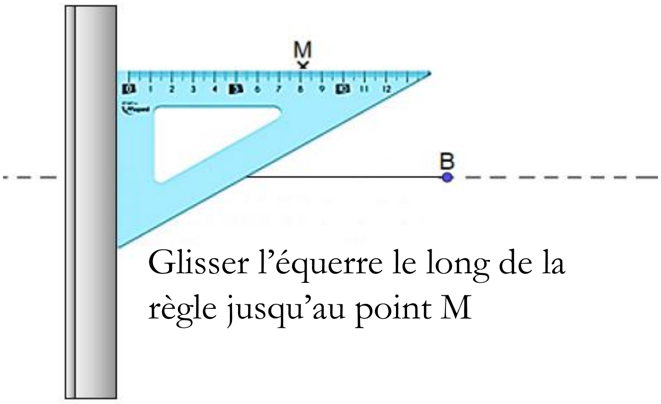
- (AB)//(MM')
- Le sens déplacement de M vers M' est celui de A vers B
- AB=MM'

2°/ Procédure de construction (règle-équerre-compas-crayon) :

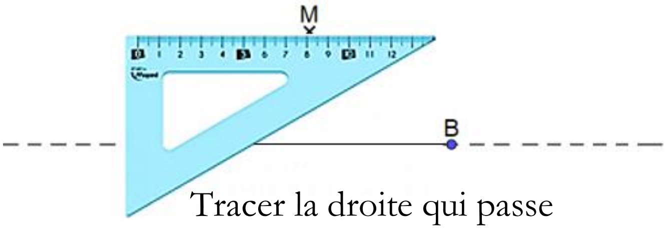
Soient A,B et M trois points quelconques du plan, pour construire le point M’ image de M par la translation qui transforme (amène) A en B, on peut procéder comme suit (voir images) :



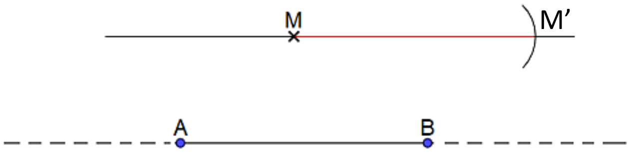
Fixer la règle et
’’Coller’’ l’équerre à la règle



Glisser l’équerre le long de la règle jusqu’au point M



Tracer la droite qui passe
Par M et qui est parallèle à (AB)



Marquer avec le compas le point M’ tel que AB=MM’

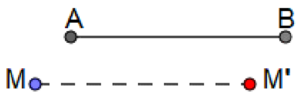
Remarque :

Avec le compas et la règle, il convient de chercher le milieu de [MB] puis de construire le point M’ symétrique de A par rapport à ce milieu.

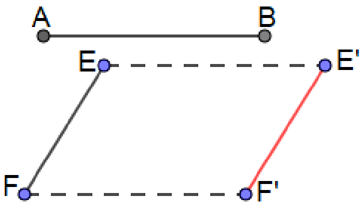
III°- Propriétés d'une translation :

1°/ Images : d’un point – d’un segment - d’une droite - d’une demi-droite :

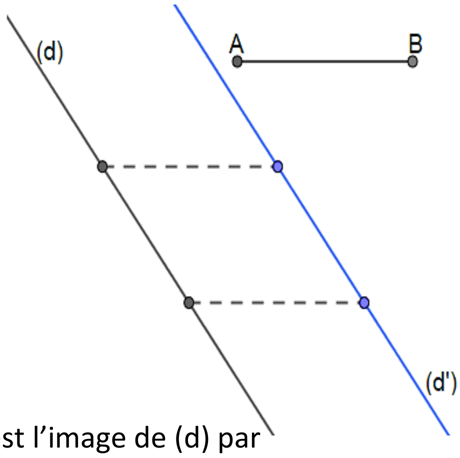
- Dans une translation, l’image d’un point est un point.
- Dans une translation l'image d'un segment est un segment qui lui est parallèle et de même longueur.
- Dans une translation l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- Dans une translation l'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de même sens.



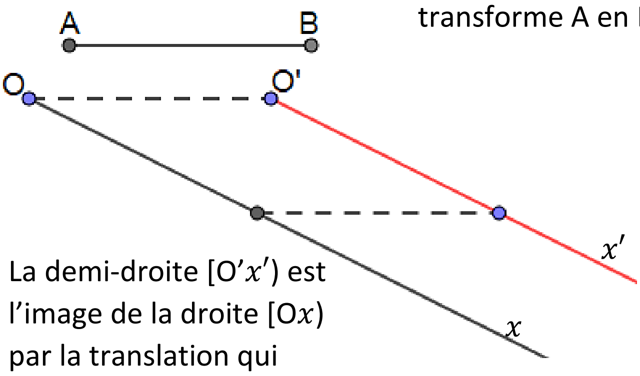
M’ est l’image de M par la translation qui transforme A en B.



Le segment [E‘F’] est l’image du segment [EF] par la translation qui transforme A en B.



(d’) est l’image de (d) par la translation qui transforme A en B.



La demi-droite [O’$x’$) est l’image de la droite [Ox) par la translation qui transforme A en B.

2°/ Images de deux droites parallèles :

Activité :

a°) Marque deux points A et B distincts.
b°) Trace deux droites parallèles (d_1) et (d_2) toutes deux non sécantes [AB].
c°) Marque deux points I et J sur (d_1) puis deux points F et E sur (d_2).
d°) Construis les points I' et J' images respectives de I et J par la translation t (A)=B
e°) Construis les points E' et F' images respectives de E et F par la translation t (A)=B
f°) Trace la droite (d_1') passant par I' et J' puis la droite (d_2') passant par E' et F'
g°) Que représentent (d_1') pour (d_1) et (d_2') pour (d_2) ?
h°) Vérifie que (d_1') et (d_2') sont parallèles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Par une translation, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

3°/ Images de deux droites perpendiculaires :

Activité :

a°) Marque deux points A et B distincts.
b°) Trace deux droites perpendiculaires (d_1) et (d_2) toutes deux non sécantes [AB].
c°) Marque les points I et J sur (d_1), F et E sur (d_2).
d°) Construis les points I' et J' images respectives de I et J par la translation t(A)=B
e°) Construis les points E' et F' images respectives de E et F par la translation t(A)=B
f°) Trace la droite (d_1') passant par I' et J' et la droite (d_2') passant par E' et F'
g°) Que représentent (d_1') pour (d_1) et (d_2') pour (d_2) ?
h°) Vérifie que (d_1') et (d_2') sont perpendiculaires.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Par une translation, les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

4°/ Image d'un cercle :

Activité :

a°) Marque trois points A, B et O non alignés.
b°) Trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $r = 2cm$.
c°) Marque deux points I et J distincts sur $(\mathcal{C})$.
d°) Construis les points O', I' et J' images respectives de O, I et J par la translation t(A)=B
e°) Trace le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' et rayon O'I'. Passe-t-il par J' ?
f°) Vérifie que $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C})$ ont le même rayon. Que représentent $(\mathcal{C}')$ pour $(\mathcal{C})$?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Dans une translation, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon. Le centre du cercle image est l'image du centre du cercle initial.

5°/ Images de trois points alignés :

Activité :

a°) Marque deux points A et B distincts.

b°) Marque trois points alignés I, J et K hors de (AB).
d°) Construis les points I', J' et K' images respectives de I, J et K par la translation t(A)=B
e°) Trace la droite (IK), passe-t-elle par J ? I', J' et K' sont-ils alignés ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Par une translation, les images de points alignés sont des points alignés.

6°/ Image d'un angle :

Activité :

a°) Trace un segment [AB] et un angle $x\widehat{O}y$ quelconques.
b°) Marque un points I sur la demi-droite $[Ox)$ et un point J sur la demi-droite $[Oy)$.
c°) Construis les points O' ; I' et J' images respectives de O, I et J par la translation t(A)=B
d°) Trace la demi-droite $[O'x')$ passant par I' et la demi-droite $[O'y')$ passant par J'.
e°) Vérifie que les angles $x\widehat{O}y$ et $x'\widehat{O'}y'$ont la même mesure. Que représente $x'\widehat{O'}y'$ pour $x\widehat{O}y$?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir :*** Par une translation, l'image d'un angle est un angle de même mesure.

Remarques : Une translation conserve : l'alignement des points, les longueurs, les mesures des angles, les aires, le parallélisme, l'orthogonalité, ...

IV°- Vecteur et parallélogramme

1°/ Notion de vecteur et notation :

A et B sont deux points du plan et t la translation qui amène A à B, M à N et E à F. Les couples de points (A,B) ; (M,N) et (E,F) sont caractérisés chacun par :

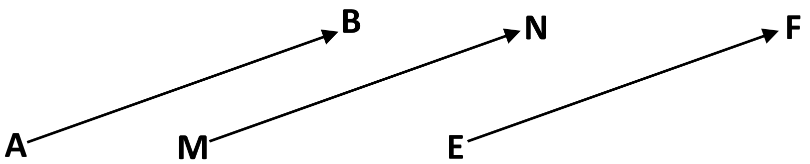
- Une même direction
- Un même sens
- Une même longueur

Ces trois caractéristiques définissent chaque couple de points comme un vecteur. Il vient :

- Le couple (A,B) représente le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$
- Le couple (M,N) représente le vecteur noté $\overrightarrow{MN}$
- Le couple (E,F) représente le vecteur noté $\overrightarrow{EF}$

2°/ Présentation d'un vecteur :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, et $\overrightarrow{EF}$ peuvent être présentés comme suit :



Remarques :

- Les points A, M et E sont appelés origines. Les points B, N et F sont appelés extrémités.
- Deux points confondus forment un vecteur **nul**.
- Un vecteur **nul** n'a ni sens, ni direction et sa longueur est nulle.
- Un vecteur **nul** est noté $\overrightarrow{0}$.
- On peut désigner un vecteur par une seule lettre minuscule surmontée d'une flèche.

Exemples :

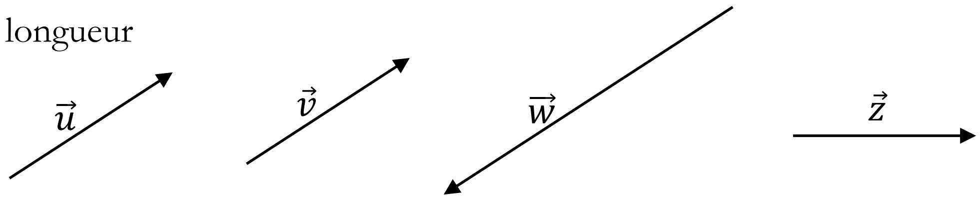
Le vecteur u se notera $\vec{u}$; le vecteur i se notera $\vec{i}$; le vecteur k se notera $\vec{k}$

3°/ Vecteurs égaux :

Définition : *à retenir* Deux vecteurs sont égaux s'ils présentent les mêmes caractéristiques :

- Même direction
- Même sens
- Même longueur

Exemple :



$\vec{u} = \vec{v}$ car les deux présentent les mêmes caractéristiques (*même direction-même sens-même longueur*)

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas égaux car ils n'ont pas la même longueur (*même direction-sens opposés-longueurs différentes*)

$\vec{u}$ et $\vec{z}$ ne sont pas égaux car ils n'ont pas la même direction (*directions et sens différents-même longueur*)

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas égaux car ils n'ont pas la même la même longueur (*même direction-sens opposé-même longueur*)

4°/ Cas du parallélogramme :

Activité :

a°) Marque trois points A, B et D non alignés.

b°) Construis le point C image de D par la translation t qui transforme A en B.

c°) Trace le quadrilatère ABCD. Justifie que ABCD est parallélogramme.

d°) Donne en le justifiant tous les vecteurs égaux de la figure.

Correction (réservée aux élèves) :

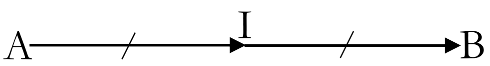
Propriétés : *à retenir*

Si ABCD est un parallélogramme alors on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

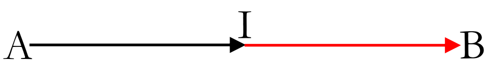
Si dans un quadrilatère ABCD on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

V°- Milieu d'un segment et Vecteur

a) - Si un point I est le milieu d'un segment [AB] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



b) - Si des points I, A et B sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu du segment [AB].



VI°- Vecteur et translation

Activité :

Soient $\vec{u}$ un vecteur quelconque et A un point hors de la droite support de $\vec{u}$

a°) Fais une figure.

b°) Construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

c°) Construis le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

d°) B et C sont-ils distincts ou confondus ?

Correction (réservée aux élèves) :

Commentaire :

Dans cette activité, il est mis en évidence translation de vecteur $\vec{u}$ dont la notation est $t_{\vec{u}}$. Ainsi, il vient :

- *A' est l'image de A par la translation de vecteur* $\vec{u}$. *On note* $t_{\vec{u}}(A) = A'$
- $t_{\vec{u}}(A) = A'$ *Signifie que* $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AA'}}$

Propriété : ***à retenir***

Étant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point A du plan, il existe un unique point B du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Dans cette égalité vectorielle, B est appelé image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Série d'exercices

<u>Exercice 1 :</u> Dans chacun des cas suivants, dis si M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B.

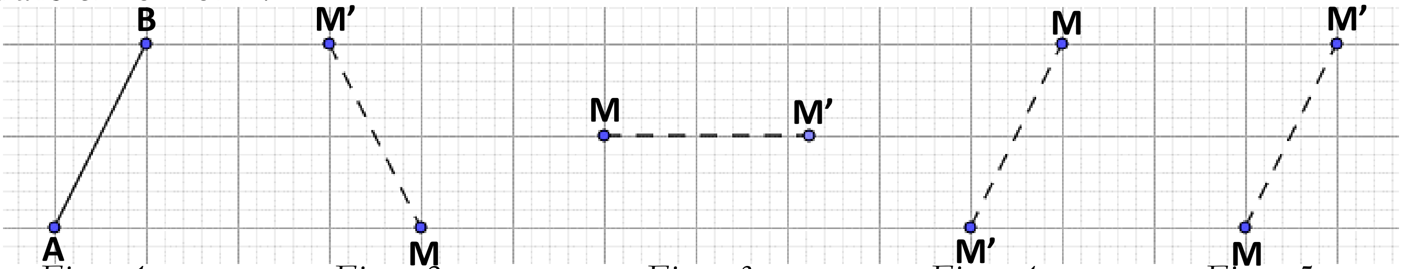


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4* *Figure 5*

<u>Exercice 2 :</u>

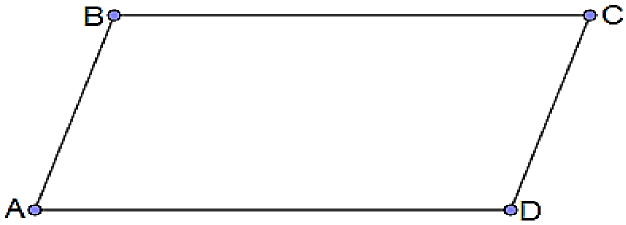
Recopie puis complète les phrases ci-dessous.

1. Si trois points sont alignés alors leurs images par une translation ………………………..
2. L'image d'un segment par une translation est un segment………………………………
3. L'image d'une droite par une translation est une droite…………………………………
4. L'image d'un cercle par une translation est un cercle de……………… et ……………..
5. L'image d'un angle par une translation est un ………………………………………..

<u>Exercice 3 :</u> Répond par **vrai** ou **faux** à chacune des affirmations ci-dessous.

1. Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
2. Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
3. Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
4. Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$.
5. Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.

<u>Exercice 4 :</u> Soit ABCD un parallélogramme de centre O.



Parmi les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{OB}$ indique :

a) Ceux de même direction.
b) Ceux de même sens.
c) Ceux de même longueur.
d) Ceux qui sont égaux.

<u>Exercice 5 :</u> Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4cm.

I, J et K les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC]

1) Fais une figure.

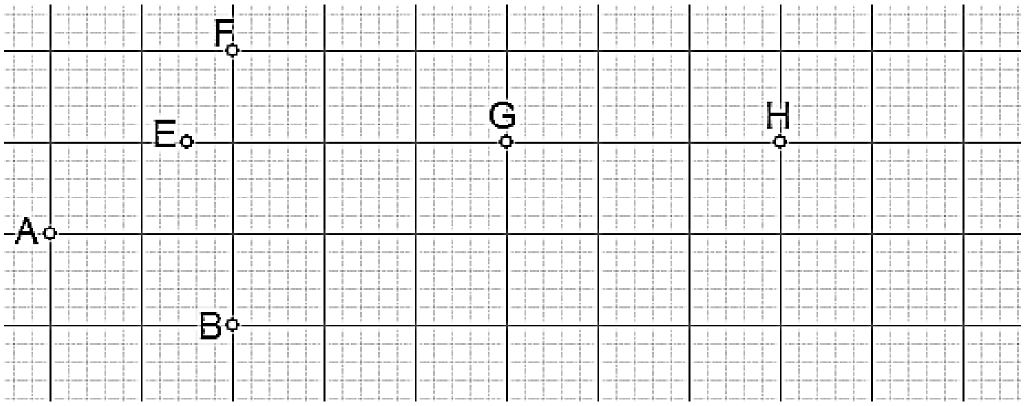
2) Parmi les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{CK}$ indique :

a) Ceux de même direction.
b) Ceux de même sens.
c) Ceux de même longueur.
d) Ceux qui sont égaux.

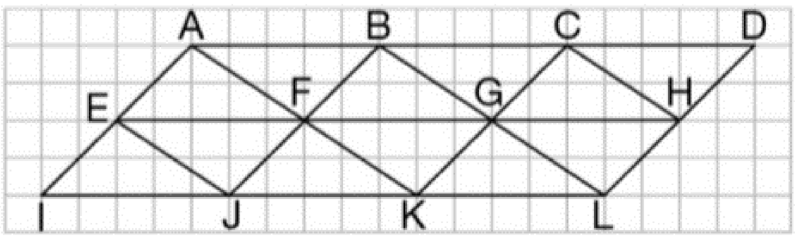
Exercice 6 :

1) Marque quatre points A, B, C et D non alignés.
2) Construis le point E image de B par la translation qui amène A sur D.
3) Construis de même l'image F de C par la même translation.
4) Donne tous les parallélogrammes de la figure.

Exercice 7 : On considère les points ci-dessous, place les points E', F', G' et H' images respectives des points E, F, G et H par la translation qui transforme A en B.



Exercice 8 : Observe la figure puis recopie et complète le tableau suivant :

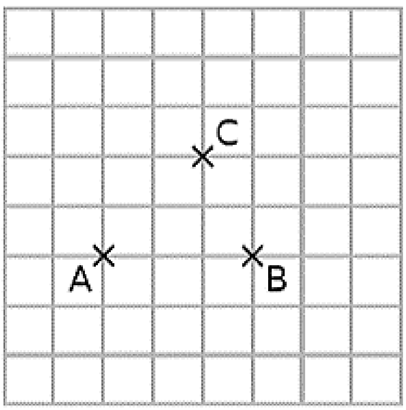


Translations	Point initial	Point image	Figure initiale	Figure image
1	E	F	BCG	
2	L	G	KGHL	
3	H	K		EIJF
4	I		ABF	CDH

Exercice 9 :

On considère les points A, B et C de la grille ci-contre :

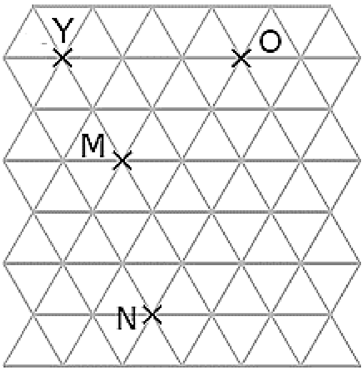
1. Place le point D image de C par la translation qui amène A en B
2. Place le point E image de C par la translation qui amène B en A
3. Place le point F image de A par la translation qui amène C en B
4. Place le point I image de F par la translation qui amène A en B



Exercice 10 :

On considère les points M, N et O de la grille dessous :

1. Place le point A image de N par la translation qui transforme M en O.
2. Place le point K image de O par la translation qui amène Y en M.
3. Place le point U image de N par la translation qui amène Y en O.



Exercice 11 :

Soit A, F, G trois points d'une droite (D) et E un point n'appartenant pas à (D).

1. Construis les points M et N images respectives des points F et G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
2. Démontre que les points E, M et N sont alignés.
3. Construis les points E', M' et N' images respectives des points E, M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
4. Démontre que les points E', M' et N' sont alignés.

Exercice 12 : ABC est un triangle rectangle en C tel que AB = 5 cm, AC=3cm et BC = 4 cm. Soit I le milieu de [AC]

1. Fais une figure puis montre que ABC est un triangle rectangle en un point à préciser.
2. Construis la droite d'Euler relative à ce triangle.
3. Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
4. Construis la droite d'Euler du triangle image.
5. Quelle est la position relative des deux droites ? Justifie ta réponse.

I°- Angle au centre :

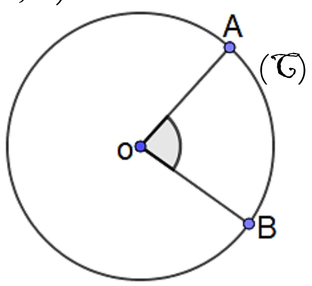
1°/ Définition :

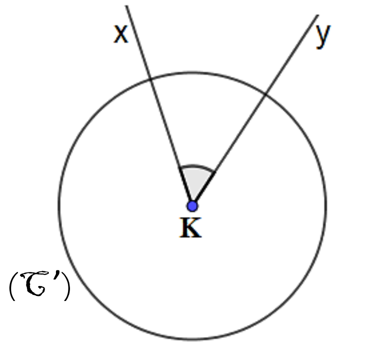
Soit $\mathcal{C}(O, r)$ un cercle donné, on appelle angle au centre tout angle dont le sommet est le centre O du cercle $(\mathcal{C})$.

2°/ Présentation :

On considère les deux cercles $\mathcal{C}(O, r)$ et $\mathcal{C}'(K, r')$ ci-dessous

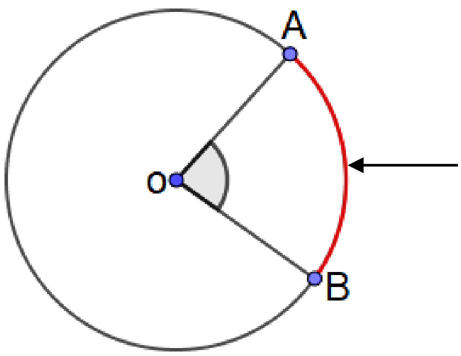
- L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre car son sommet O est le centre de $(\mathcal{C})$
- L'angle $\widehat{xKy}$ est un angle au centre car son sommet K est le centre de $(\mathcal{C}')$





3°/ Arc intercepté par un angle au centre :

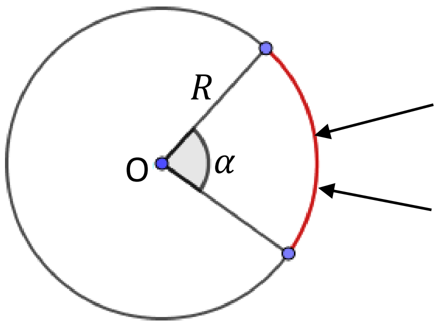
L'arc intercepté par un angle au centre est la portion de cercle délimitée par les côtés de cet angle.



Arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$

4°/ Longueur d'un arc intercepté par un angle au centre :

La longueur L de l'arc intercepté est proportionnelle à la mesure α de l'angle qui l'intercepte.



Formules : *à retenir*

$L = \frac{\alpha \pi R}{180°}$ si α est en degré

$L = \alpha R$ si α est en radian

R est le rayon du cercle

II°- Rotation – Sens de rotation :

1°/ Définition d'une rotation :

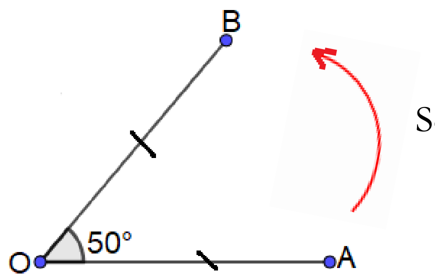
Activité :

On considère l'angle ci-contre où

OA=OB et $\widehat{AOB} = 50°$

a°) Reproduis la figure

b°) Marque un point M distinct des points A et B. Trace [OM]



Sens : de A vers B

c°) Dans le sens de la flèche, marque le point M' tel que $\widehat{MOM'} = 50°$ et OM=OM'

Correction (réservée aux élèves) :

Commentaire :

Dans cette activité, il est mis en évidence une application mathématique appelée rotation r de centre O et d’angle 50°. Ainsi, on dit que :

M’ est l’image de M par la rotation de centre **O** et d’angle **50°** qui transforme A en B. On note $r_{(O,50°)}(M)=M'$

Définition : ***à retenir***

Soit $\mathcal{P}$ un plan, $\widehat{AOB}=\alpha$ un angle tel que $OA=OB$. Une rotation r de centre O et d’angle α qui transforme A en B est une application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M’ telle :

- $\widehat{AOB}=\widehat{MOM'}=\alpha$
- Le sens de déplacement de M vers M’ est celui de A vers B.
- $OM=OM'$

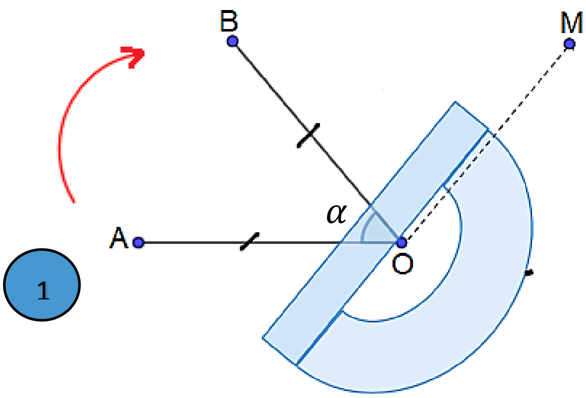
2°/ Les différents sens de rotation :

Il existe deux sens de rotation :

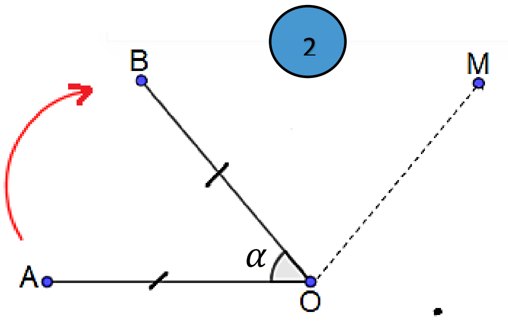
- la rotation dans le sens des aiguilles d’une montre (sens horaire) et
- la rotation dans le sens contraire à celui des aiguilles d’une montre (sens anti-horaire).

3°/ Procédure de construction (règle-rapporteur-compas-crayon) :

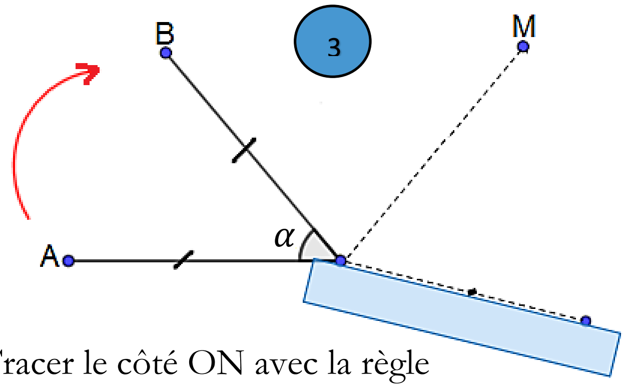
$\widehat{AOB}$ est un angle de mesure α tel que OA=OB. Soit M un point quelconque du plan. Pour construire le point N image de M par la rotation de centre O et d’angle α qui transforme (amène) A en B, on peut procéder comme suit (voir image) :



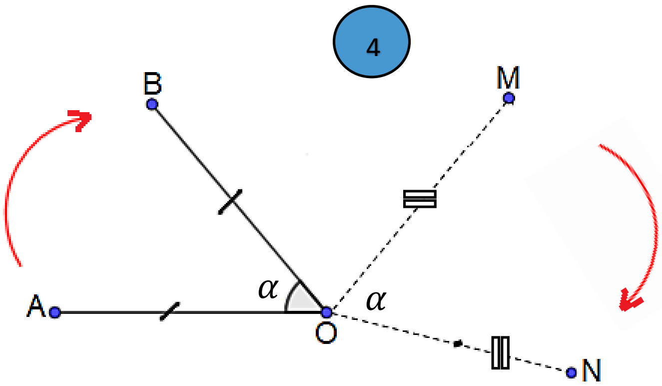
Tracer le côté OM, placer le rapporteur
Compter jusqu’à atteindre la mesure α



Enlever le rapporteur



Tracer le côté ON avec la règle
tel ON=OM



Mettre le codage sur les côtés OM et ON
N est l’image de M par la rotation de centre O et d’angle α.

III°- Propriétés

1°/ Image d'un segment et de son milieu :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB}$ et un segment [IJ] tels que $\widehat{AOB} = 80°$, OA=OB=3cm et IJ=4cm

b°) Marque le point E milieu de [IJ]

c°) Construis les points I', J' et E' images respectives de I, J et E par la rotation de centre O et d'angle $80°$ qui transforme A en B

d°) Les segments [IJ] et [I'J'] ont-ils la même longueur ? E' est-il le milieu de [I'J'] ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Dans une rotation, l'image d'un segment est un segment de même longueur. Une rotation conserve les longueurs.

Dans une rotation, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.

2°/ Images de points alignés :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 45°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Marque trois points alignés I, J et K.

c°) Construis les points I', J' et K' images respectives des points I, J et K par la rotation de centre O et d'angle $45°$ qui transforme B en A

d°) Trace la droite (I'K'). Passe-t-elle par J' ? Les points I', J' et K' sont-ils alignés ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir*** Dans une rotation, des points alignés ont des images alignées. La rotation conserve l'alignement des points.

3°/ Image d'une droite :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 45°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Trace une droite (d) et marque deux points I et J sur (d)

c°) Construis les points I' et J'images respectives des points I et J par la rotation de centre O et d'angle $45°$ qui transforme B en A.

d°) Trace la droite (d'). Que représente-t-elle pour la droite (d) ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir*** Dans une rotation, l'image d'une droite est une droite.

4°/ Image d'un cercle :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 45°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Marque un point I puis trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre I et de rayon $r = 2cm$

c°) Marque le point J sur ($\mathcal{C}$) puis construis les points I' et J' images respectives des points I et J par la rotation de centre O et d'angle $45°$ qui transforme B en A.

d°) Trace le cercle ($\mathcal{C}'$) de centre I' et de rayon r' =I'J'

e°) Montre que $r = r'$. Que représente ($\mathcal{C}'$) pour ($\mathcal{C}$) ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir*** Dans une rotation, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

5°/ Images de deux droites perpendiculaires :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 45°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Trace deux droites (d) et (L) perpendiculaires en I.

c°) Construis les droites (d') et (L') images respectives des droites (d) et (L) par la rotation de centre O et d'angle $45°$ qui transforme B en A.

d°) Vérifie que (d') et (L') sont perpendiculaires.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir*** Dans une rotation, des droites perpendiculaires ont des images perpendiculaires. Une rotation conserve la perpendicularité.

5°/ Images de deux droites parallèles :

Activité :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 45°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Trace deux droites parallèles (d) et (L).

c°) Construis les droites (d') et (L') images respectives des droites (d) et (L) par la rotation de centre O et d'angle $45°$ qui transforme B en A.

d°) Vérifie que (d') et (L') sont parallèles.

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir*** Dans une rotation, des droites parallèles ont des images parallèles. Une rotation conserve le parallélisme des droites.

IV°- Polygones réguliers

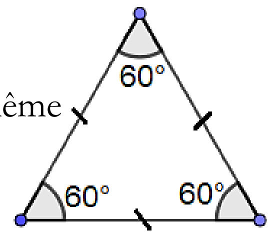
1°/ Définition :

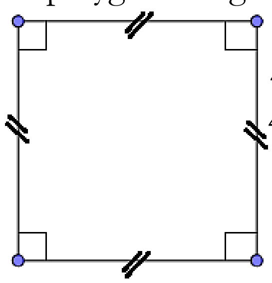
Un polygone est dit régulier s'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

2°/ Exemples :

Le triangle équilatéral et le carré sont des exemples de polygones réguliers.

Trois côtés égaux
Trois angles de même mesure





4 côtés égaux
4 angles de même mesure

3°/ Constructions

Activité 1 :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 72°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Par la rotation de centre O et d'angle 72° qui amène A en B marque les points C, D et E comme suit : C image de B D image de C et E image de D.

c°) Trace le polygone ABCDE. Trouve par le calcul les mesures de $\widehat{EAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$

d°) Montre que les côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA] ont la même longueur.

e°) Justifie que ABCDE est un polygone régulier.

f°) Trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA. Passe-t-il par tous les sommets de ABCDE ?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir*

Un polygone qui a cinq côtés égaux et cinq angles de même mesure est un **pentagone régulier**
Un pentagone régulier est inscriptible dans un cercle appelé cercle circonscrit
Les angles au sommet d'un pentagone régulier mesurent chacun 108°.

Activité 2 :

a°) Construis un angle $\widehat{AOB} = 60°$ tel que OA=OB=3cm

b°) Par la rotation de centre O et d'angle 60° qui amène A en B marque les points C, D, E et F comme suit : C image de B D image de C E image de D F image de E

c°) Trace le polygone ABCDEF.

d°) Trouve par le calcul les mesures de $\widehat{EAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$

e°) Montre que les côtés [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA] ont la même longueur.

f°) Justifie que ABCDEF est un polygone régulier.

g°) Trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA. Passe-t-il par tous les sommets de ABCDEF?

Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : *à retenir*

Un polygone qui a six côtés égaux et six angles de même mesure est un **hexagone régulier**
Un hexagone régulier est inscriptible dans un cercle appelé **cercle circonscrit**
Les angles aux sommets d'un hexagone régulier mesurent chacun 120°.

Remarques :

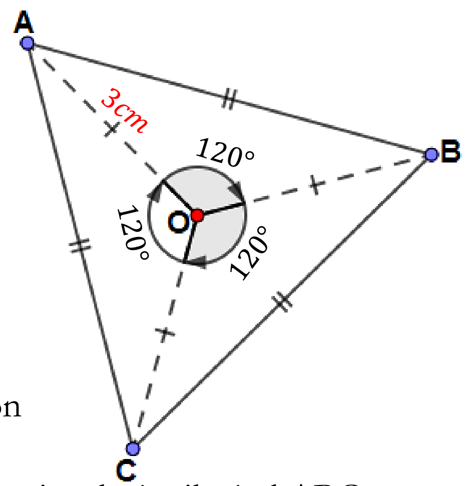
- *Un angle au sommet d'un polygone a pour mesure* $180° - \frac{360°}{n}$
- *Un polygone qui a neuf côtés égaux et neuf angles de même mesure est un* ***ennéagone régulier***
- *Un polygone qui a dix côtés égaux et dix angles de même mesure est un* ***décagone régulier***
- *Un polygone régulier de centre O admet un cercle inscrit de centre O et de rayon OI où I est le milieu d'un de ses côté.*
- *La médiatrice de chaque côté d'un polygone régulier est un axe de symétrie de ce polygone*

Méthodes de construction : *à retenir*

Pour construire un polygone régulier de centre O à n côtés, on peut :

- utiliser une rotation de centre O et d'angle α dont la mesure en degré vaut $\alpha = \frac{360°}{n}$ dans un des sens de rotation.

Exemple : Construire un triangle équilatéral ABC de centre O en effectuant une rotation de centre O tel que OA=3cm



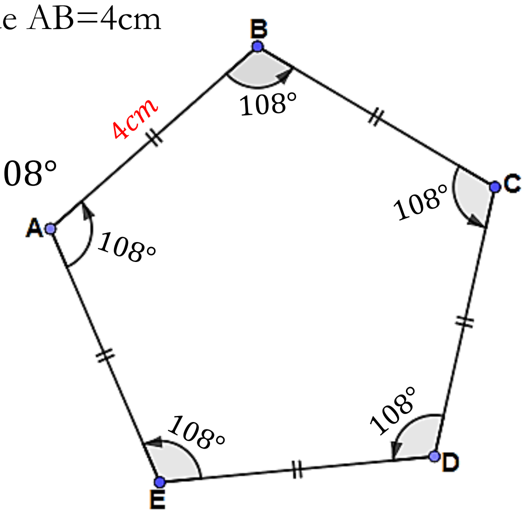
Ce qu'il faut faire :

- Calculer la mesure de l'angle de rotation α :
  $\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{3} = 120°$
- Tracer en pointillés le segment [OA]
- Construire le point B image de A par la rotation de centre O et d'angle 120° dans le sens horaire
- Construire le point C est image de B par la rotation de centre O et d'angle 120° dans le sens horaire
- Tracer les côtés [AB], [BC] et [CA] pour former le triangle équilatéral ABC

❖ effectuer des rotations successives de centre A, B, C, … et d'angle β dont la mesure en degré vaut $\beta = 180° - \frac{360°}{n}$ suivant un des sens de rotation.

Exemple : Construire un pentagone régulier ABCDE tel que AB=4cm

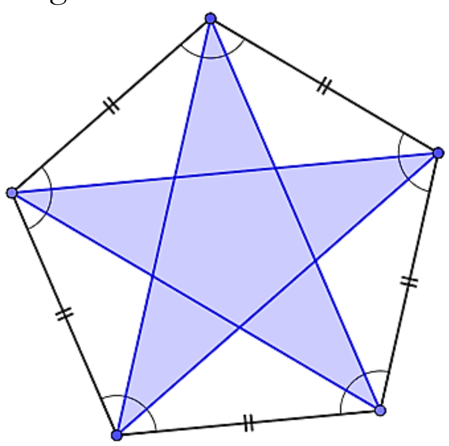
Ce qu'il faut faire :



- Calculer la mesure de l'angle de rotation β :
  $\beta = 180° - \frac{360°}{n} = 180° - \frac{360°}{5} = 180° - 72° = 108°$
- Tracer le segment [AB]
- Construire le point C image de A par la rotation de centre B et d'angle 108° dans le sens anti-horaire
- Construire le point D est image de B par la rotation de centre C et d'angle 108° dans le sens anti-horaire
- Construire le point E image de C par la rotation De centre D et d'angle 108° dans le sens anti-horaire
- Tracer les côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA] pour former le pentagone ABCDE

Remarque :

Les diagonales d'un pentagone régulier forment une étoile à cinq branches



4°/ Périmètre d'un polygone régulier :

Un polygone régulier à n côtés a pour périmètre :

$$\boxed{P = n \times longueur\ d'un\ côté}$$

5°/ Nombre de diagonales dans un polygone :

Pour un polygone (convexe) à n sommets, le nombre N de diagonales se détermine à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Exemples :

Pour un carré (et pour tout quadrilatère) : $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2$ diagonales

Pour un hexagone : $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$ diagonales

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, dis si l'angle tracé est ou n'est pas un angle au centre du cercle ($\mathscr{C}$)

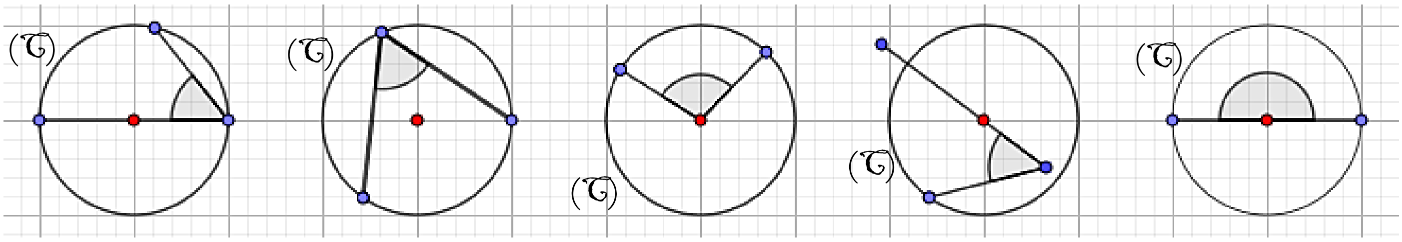


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4* *Figure 5*

Exercice 2 :

Dans quels cas, A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens contraire au sens des aiguilles d'une montre.

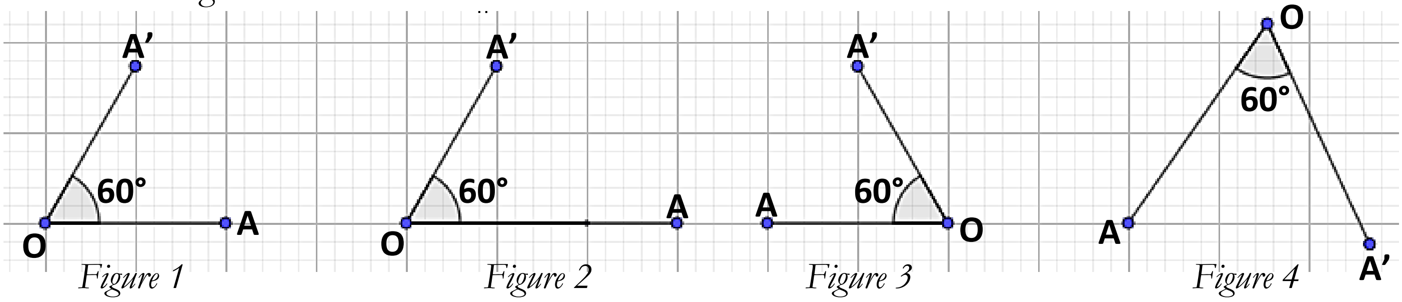


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

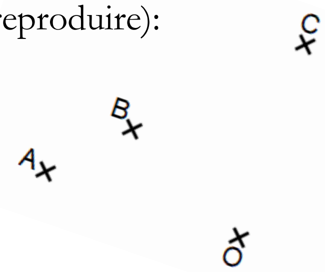
Exercice 3 :

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et de rayon 3cm et α, la mesure d'un angle au centre de ce cercle.

Complète le tableau suivant :

Mesure de l'angle α	30°		126°		60°	π
Longueur de l'arc intercepté par l'angle de mesure α en cm.		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		

Exercice 4 : On considère les points A, B et C ci-dessous (à reproduire):



1- Vérifie qu'ils sont alignés

2- Construis les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens horaire.

3- Les points images sont-ils alignés ? Justifie

Exercice 5 : On considère le segment [AB] et le point O ci-dessous (à reproduire) :

1- Construis le segment [A'B'] par la rotation de centre O et d'angle 100°.

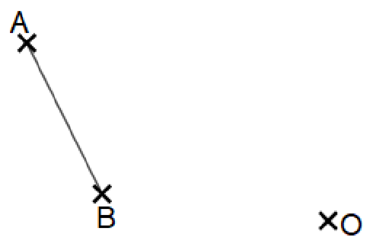
2- [AB] et [A'B'] ont-ils la même longueur ? Justifie

3- Quelle est l'image de la droite (AB) par cette même rotation ? Justifie.

4- Quelle est l'image de la demi-droite [BA) par cette même rotation ? Justifie.

5- Marque le point I milieu [AB] puis construis son image I' par la même rotation.

6- I' est-il le milieu de [A'B'] ? Justifie ta réponse.



Exercice 6 :

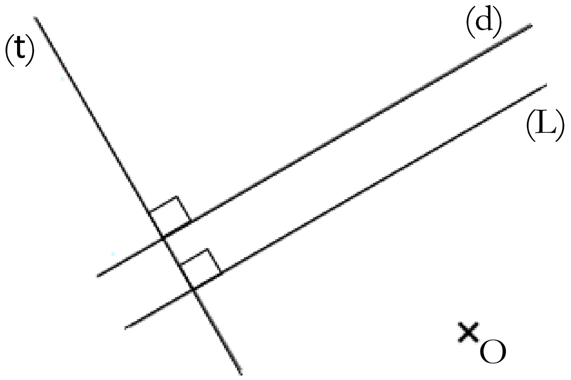
On considère les droites (d), (L) et (t) ci-dessous où (d)//(L) (à reproduire) :

1- Construis les droites (d'), (t') et (L') images respectives des droites (d), (t) et (L) par la rotation de centre O et d'angle 120°.

2- Quelle est la position relative de (d') et (L') ? Ce résultat était-il prévisible ? Justifie.

3- Quelle est la position relative de (t') et (d') ? Ce résultat était-il prévisible ? Justifie

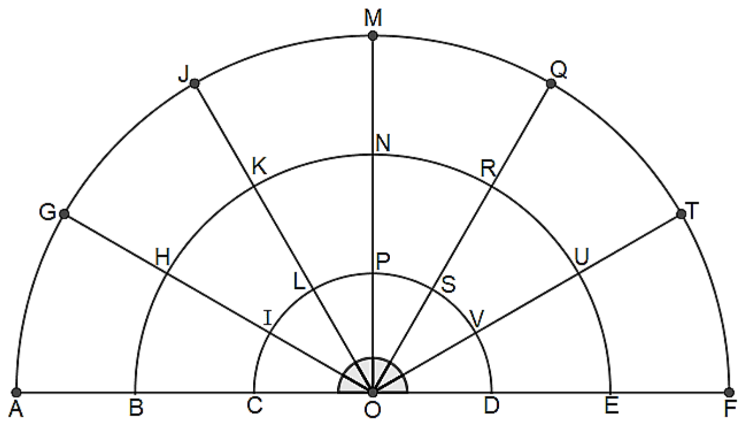
4- Quelle est la position relative de (t') et (L') ? Ce résultat était-il prévisible ? Justifie



Exercice 7 :

1°) Complète le tableau ci-dessous en indiquant l'image de chaque point par la rotation de centre O et d'angle α.

Angles α	Sens de rotation	Points	Points image
30°	Anti-horaire	M	
90°	Anti-horaire	S	
60°	Horaire		J
120°	Horaire	P	
30°	Anti-horaire	R	
150°			G
60°		V	P
		U	B

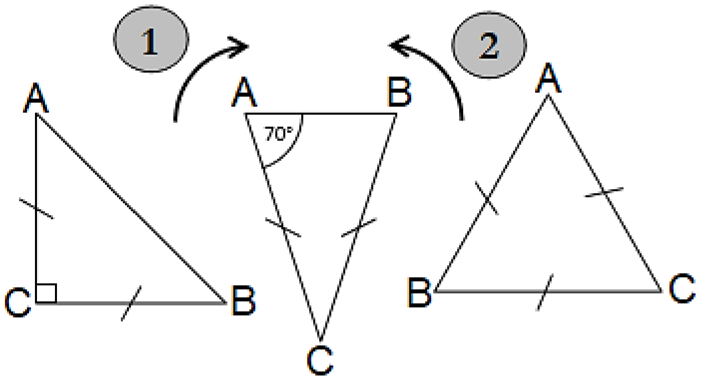


2°) Trace la médiatrice de [JM] puis celle de [TF] passent-elles par le centre O ?

Exercice 8 :

Indique les caractéristiques (angle et sens) de la rotation de centre C qui transforme A en B dans chacun des cas de figures ci-contre :

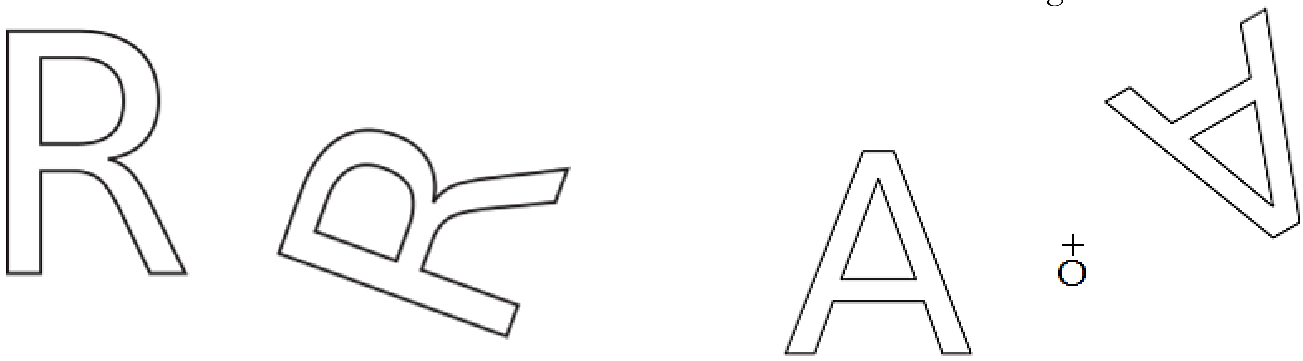
1ier Cas	2ième Cas	3ième Cas
Angle :…...	Angle :…...	Angle :…...
Sens :……	Sens :……	Sens :……



Exercice 9 : On considère les lettres A et R avec leur image ci-dessous :

1- Détermine le centre de la rotation

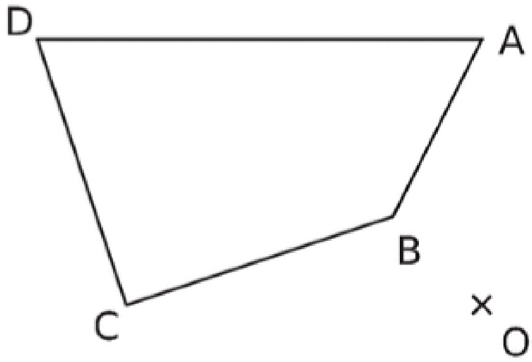
2- Détermine l'angle de la rotation



Exercice 10 : On considère les lettres M suivantes où les M colorés sont les images par une rotation. Pour chaque M coloré, détermine le centre et l'angle de la rotation.

Exercice 11 :

On considère le quadrilatère ABCD et le point O suivants :



1°) Reproduis la figure

2°) Construis le quadrilatère A'B'C'D' image de ABCD par la rotation de centre O et d'angle 100°.

Exercice 12 :

1. Trace un triangle ACD rectangle et isocèle de sommet principal A.
2. Place le point B, image de D par la rotation de centre A et d'angle 60°.
   On prendra le sens des aiguilles d'une montre comme sens de rotation.
3. Démontre que le triangle ABD est un triangle équilatéral.
4. Place E, image du point D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
5. Démontre que ACED est un carré

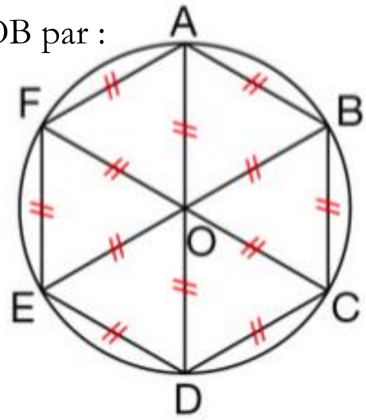
Exercice 13 :

1) Construit un carré inscrit dans un cercle de rayon 3cm
2) Construit un pentagone inscrit dans un cercle de rayon 3cm. Détermine son nombre diagonales
3) Construit un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 3cm. Détermine son nombre diagonales
4) Construit un octogone inscrit dans un cercle de rayon 4cm. Détermine son nombre diagonales
5) Construit un ennéagone inscrit dans un cercle de rayon 4cm. Détermine son nombre diagonales

Exercice 14 :

On considère la figure ci-dessous :

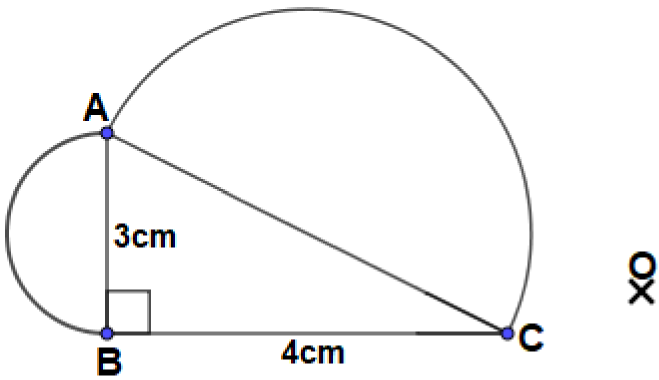
1) Donne le nom précis du polygone ABCDEF.
2) Que représente le point O pour ce polygone ?
3) Comment appelle-t-on le cercle qui passe par les sommets de ce polygone ?
4) On considère la rotation de centre O dans le sens des aiguilles d'une montre.
 Quel triangle obtient-on quand on transforme le triangle AOB par :
 a) La rotation d'angle 60° ?
 b) La rotation d'angle 240° ?
 c) La rotation d'angle 300° ?
5) Calcule le nombre de diagonales de ce polygone.



Exercice 15 :

On considère la figure ci-dessous :

1) Reproduis cette figure
2) Construis l'image de cette figure par la rotation de centre O et d'angle 60°.
3) Calcule l'aire totale de la figure image en valeur exacte.



Exercice 16 :

A/

1) Construis un hexagone régulier ABCDEF de côté 3cm. Tu expliqueras la méthode utilisée.
2) Construis le centre O de ce polygone (explique la procédure utilisée).
3) Calcule le périmètre de ce polygone.
4) Calcule le nombre de diagonales de ce polygone.

B/

1) Construis un octogone régulier ABCDEFGH de côté 2,5cm.
2) Construis le centre O de ce polygone (explique la procédure utilisée).
3) Calcule le périmètre de ce polygone.
4) Calcule le nombre de diagonales de ce polygone.

I°- Définition et présentation

1/ Définition :

Soit (D) une droite du plan et M un point, on appelle projection orthogonale de M sur (D) le point M' de (D) tel que (D) $\perp$ (MM').

Le point M' est appelé projeté orthogonal de M sur (D).

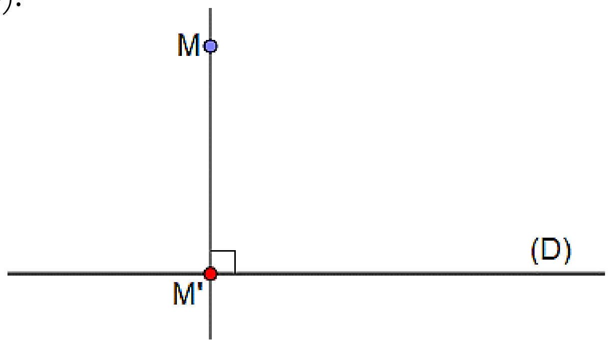
2/ Présentation :

Sur la figure ci-contre ;

M' est le projeté orthogonal de M sur la droite (D)

On dit aussi que M' est l'image de M par la projection orthogonale de M sur (D).

MM' est la distance de M à la droite (D)



II°- Propriétés

1°/ Projeté orthogonal d'un segment :

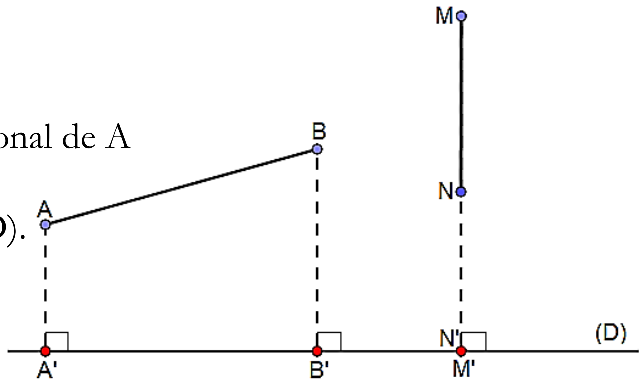
Dans la figure ci-contre, A' est le projeté orthogonal de A Sur la droite (D).

B' est le projeté orthogonal de B sur la droite (D).

M' est le projeté orthogonal de M sur (D)

N' est le projeté orthogonal de N sur (D)

Dans ces conditions, on dit que :



Le segment [A'B'] est l'image de [AB] par la projection orthogonale de [AB] sur (D)

L'image du segment [MN] se réduit à un point car (MN)$\perp$(D)

Propriété : ***à retenir***

Le projeté orthogonal d'un segment est un segment qui peut être réduit à un point.

2°/ Projeté orthogonal du milieu d'un segment :

Activité :

Dans la figure ci-contre, I est le milieu de [AB]

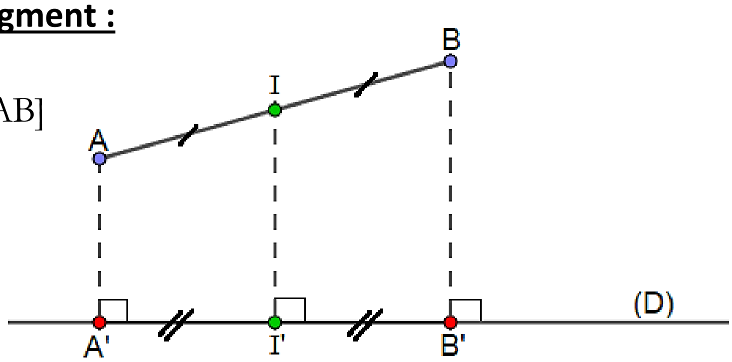
[A'B'] est l'image de [AB] par la projection orthogonale de [AB] sur (D)

I' est le projeté de I sur (D)

a°) (AB') coupe (II') en M. Marque M

b°) Montre que M est le milieu de [AB']

c°) Montre que I' est le milieu de [A'B']



Correction (réservée aux élèves) :

Propriété : ***à retenir***

Le milieu d'un segment se projette au milieu du segment image.

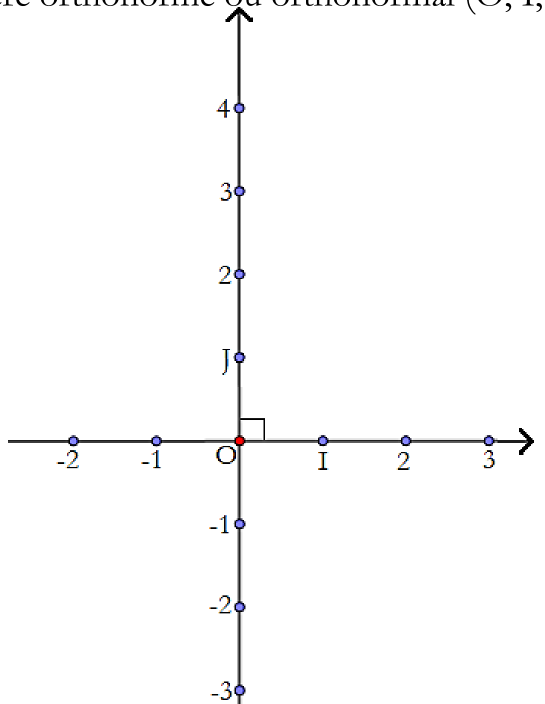
La projection orthogonale conserve les milieux des segments.

Remarque :

Le projeté orthogonal sur une droite (D) d'un point A qui appartient à (D) est A lui-même.

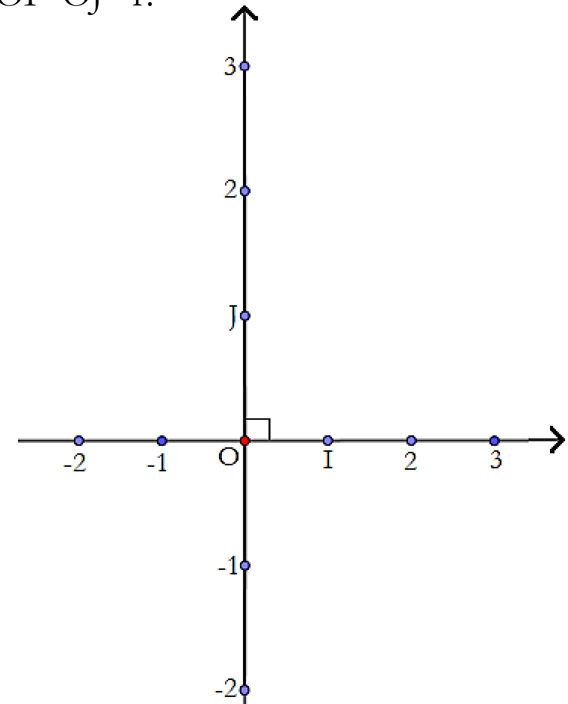
III°- Types de repères d'axes perpendiculaires

On a deux types de repères d'axes perpendiculaires : le repère orthogonal (O, I, J) où OI ≠ OJ et le repère orthonormé ou orthonormal (O, I, J) où OI=OJ=1.



Repère orthonormé (O, I, J)

OI=OJ=1

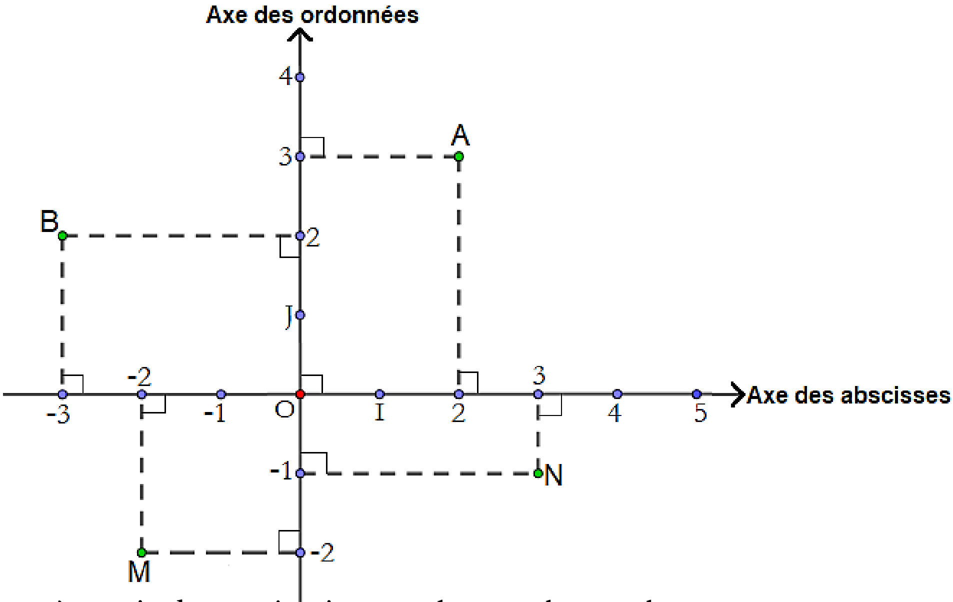


Repère orthogonal (O, I, J)

OI ≠ OJ

IV°- Coordonnées d'un point dans un repère d'axes perpendiculaires

On a placé dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-dessous les points A, B, M et N



On a établi le tableau suivant à partir des projections orthogonales sur les axes :

Points	Projection sur l'axe des abscisses	Projection sur l'axe des ordonnées	Points avec ses coordonnées
A	2	3	A(2 ; 3)
B	-3	2	B(-3 ; 2)
M	-2	-2	M(-2 ; -2)
N	3	-1	N(3 ; -1)

Ce qu'il faut retenir :

- Dans un repère d'axes perpendiculaires, un point est repéré par son abscisse et son ordonnée
- L'abscisse d'un point est le nombre qui correspond à la projection orthogonale de ce point sur l'axe des abscisses (OI).
- L'ordonnée d'un point est le nombre qui correspond à la projection orthogonale de ce point sur l'axe des ordonnées (OJ).

Remarque :

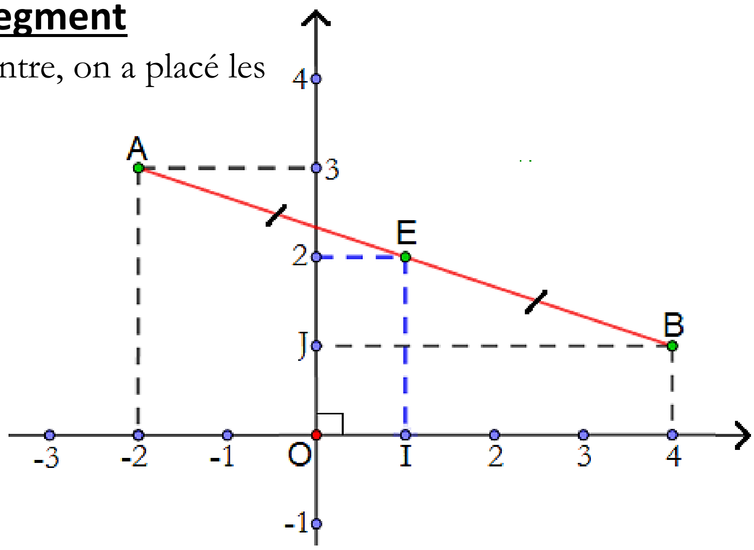
Le point O appelé origine du repère et a pour coordonnées (0 ; 0)

V°- Coordonnées du milieu d'un segment

Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, on a placé les points A(-2 ; 3), B(4 ; 1) et E(1 ; 2)
le point E est le milieu de [AB].
Les coordonnées de E se calculent à partir des coordonnées des points A et B
Comme suit :

Abscisse : $x_E = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

Ordonnée : $y_E = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$



Formule à retenir :

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points dans un repère d'axes perpendiculaires, les coordonnées de E milieu du segment [AB] se calculent comme suit :

$$x_E = \frac{x_A+x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_E = \frac{y_A+y_B}{2}$$

VI°- Carré de la distance de deux points

Formule à retenir :

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points dans un repère quelconque, le carré de la distance AB noté AB² se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exemple :

On donne les points $A(1\ ;\ 2)$; $B(5; 7)$ et $C(-6\ ;\ 8)$, calcule AB², AC² et CB²

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (5-1)^2 + (7-2)^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

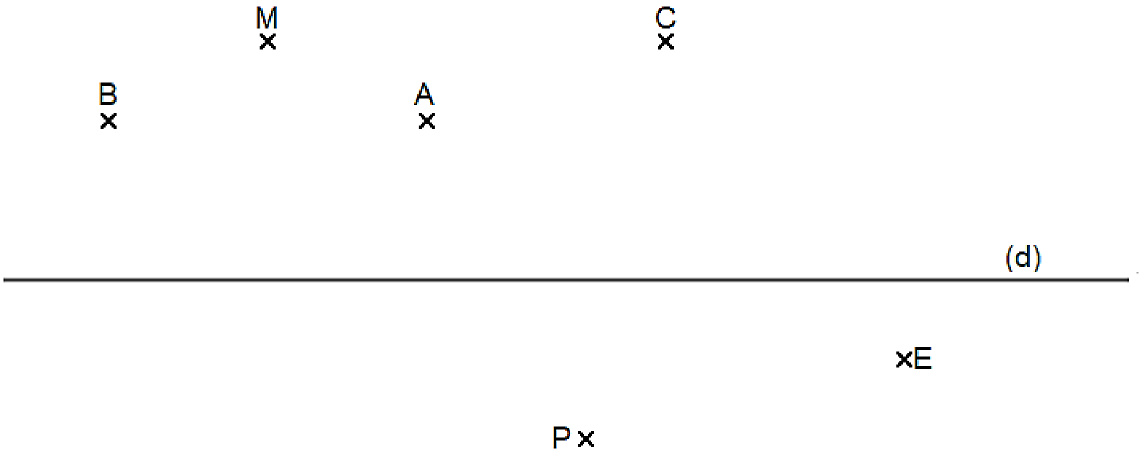
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-6-1)^2 + (8-2)^2 = (-7)^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$

$CB^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = (5-(-6))^2 + (7-8)^2 = 11^2 + (-1)^2 = 121 + 1$
$= 122$

Série d'exercices

Exercice 1 :

Reproduis la figure et construis les points images par la projection sur la droite (d)



Exercice 2 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1.

a) Quel est le projeté orthogonal de B sur (BC) ?

b) Quel est le projeté orthogonal de C sur la (AB) ?

2.

a) Marque le point H, projeté orthogonal de A sur (BC).

b) Que représente [AH] pour le triangle ABC ?

3.

a) Quel est le projeté orthogonal de [AC] sur (BC) ?

b) Quel est le projeté orthogonal de [AB] sur (BC) ?

Exercice 3 :

Tracer un triangle ABC rectangle en A.

1. Quel est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) ? Celui de C sur (AB) ?

2. Marque le point H, projeté orthogonal de A sur (BC). Que peut-on dire de [AH] ?

3. Soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de H sur (AB) et (AC).
Quelle est la nature du quadrilatère AIHJ ?

Exercice 4 :

Soit ENS un triangle isocèle en E ; I est le milieu du segment [EN] et J le projeté orthogonal de I sur la droite (NS). Démontre que : $\mathrm{BJ} = \frac{1}{4}\mathrm{EN}$.

Exercice 5 :

1. Trace un triangle MNP, placer A milieu de [MN], puis le point C, pied de la hauteur issue de N.

2. Construis le projeté orthogonal B de A sur (MP).

3. Démontre que B est le milieu de [MC].

Exercice 6 : Dans chacun des cas ci-dessous, calcule les coordonnées de I milieu du segment [AB].

1- A(-3 ; 0) et B(5 ; 2)
2- A(-2 ; 2) et B(4 ; 0)
3- A(4 ; 1) et B(1 ; 1)
4- A(-3 ; 7) et B(4 ; 3)
5- A(-7 ; 0) et B(0 ; 12)
6- A(1,6 ; 1) et B(14,6 ; 8)

Exercice 7 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I; J)
On donne les points A (-2 ; 4) B (7 ; 2) C (5 ; -7) et D (-4 ; -5).

1. Calcule AB^2 ; BC^2 ; CD^2 ; AD^2 et BD^2
2. Montre que le triangle ABD est rectangle en A.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O; I; J).
On donne A (-2 ; 4) ; B (-2 ; - 4) ; C (2 ; 0).

1. Place les points A ; B et C.
2. Calcule les carrés des distances : AB ; AC et BC. En déduis la nature du triangle ABC ?
3. Calcule les coordonnées de E centre du cercle (C) circonscrit à ABC.

Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, OI, OJ).

1. Place les points A, B, C et D tel que : A (-2 ; 1)   ;   B (2 ; 3) ; C (2 ; 0)   et D (-2 ; -2).
2. Calcule les coordonnées de E milieu [AC] et F celui de [DB].
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifie.

Exercice 10 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I; J). On donne A (-2 ; 4) ; B (-2 ; 4) ; C (2 ; 0).

1. Place les points A ; B et C.
2. Calcule AB^2 ; AC^2 et BC^2 puis en déduis la nature du triangle ABC ?
3. Calcule les coordonnées du point E centre du cercle ($\mathcal{C}$) circonscrit à ABC.

Exercice 11 :

(O, OI, OJ) est un repère orthonormé du plan, l'unité est le centimètre. Tu pourras utiliser une feuille de papier millimétré.

1. Place les points A(3;1) , B(-1;4) , C(-3;4) , D(-1;3) et E(-1;2).
2. Dans cette question, on ne demande aucun trait de construction ni aucune justification. On appelle P la figure représentée par le polygone ABCDE. Trace sur le même graphique :
   a. L'image P_1 de P par la rotation de centre E, d'angle 90°, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
   b. L'image P_2 de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{CJ}$. On placera les lettres P_1 et P_2 sur le graphique.

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé (O, OI, OJ) :

1. Place les points A(1;−4) et B(4;−2) puis trace le triangle OAB que tu colores en vert.
2. Construis le triangle OGH, image du triangle OAB par la symétrie de centre O. colore-le en rouge
3. Construis le triangle OMN, image du triangle OAB par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Colore-le en jaune.
4.
   a. Construis le point C, image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifie.

I°- Positions relatives de deux droites dans l'espace :

1/ Droites coplanaires, droites non coplanaires :

On considère les représentations de plan $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ suivantes :

Les droites (AD) et (BD) appartiennent au plan $(\mathcal{P}_1)$, elles sont dites coplanaires

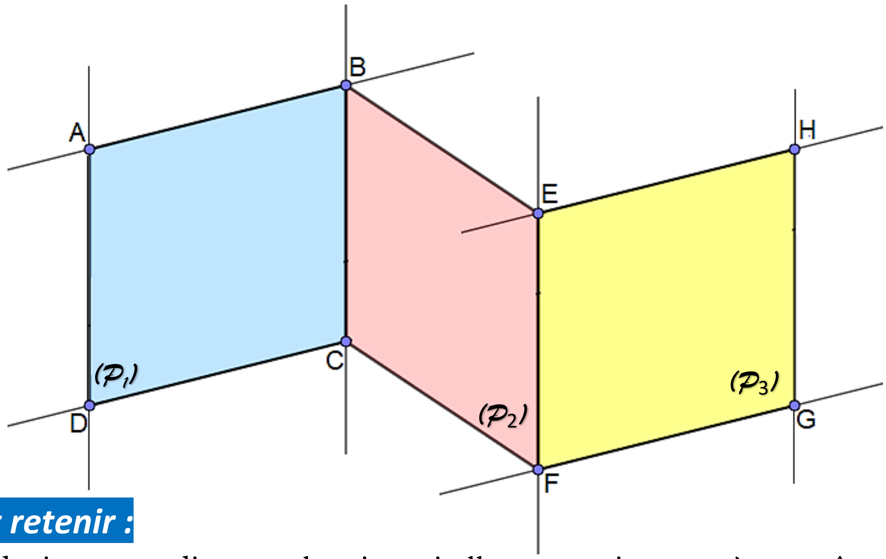
Les droites (CE) et (BF) appartiennent au plan $(\mathcal{P}_2)$, elles sont dites coplanaires

Les droites (EF) et (FH) appartiennent au plan $(\mathcal{P}_3)$, elles sont dites coplanaires

Les droites (AD) et (EF) n'appartiennent pas au même plan, elles dites non coplanaires

Les droites (AB) et (HG) n'appartiennent pas au même plan, elles sont dites non coplanaires

Les droites (CD) et (CF) n'appartiennent pas au même plan, elles sont dites non coplanaires



Ce qu'il faut retenir :

- Deux droites sont dites coplanaires si elles appartiennent à un même plan
- Deux droites sont dites non coplanaires si elles n'appartiennent pas à un même plan
- Le plan $(\mathcal{P}_1)$ peut être aussi noté plan (ABC) ou plan (ADC) ou plan (BDC)

Remarques :

- Deux droites parallèles sont toujours coplanaires
- Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas toujours parallèles

II°- Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace :

1/ Droite et plan perpendiculaires :

Ce qu'il faut retenir : ***Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.***

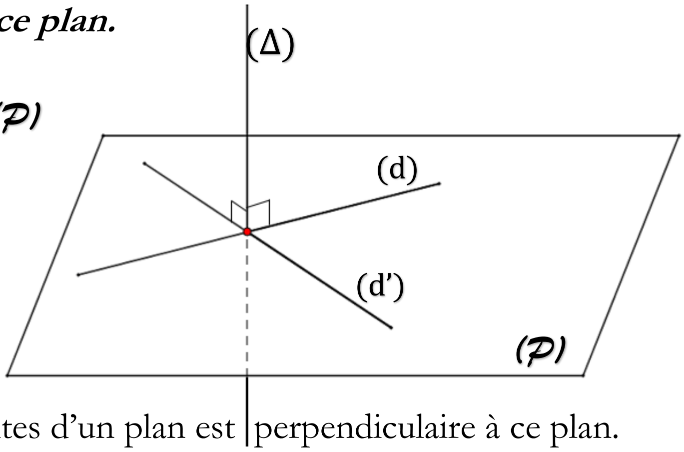
Dans la figure ci-contre ;

(d) et (d′) sont deux droites sécantes du plan $(\mathcal{P})$

$(\Delta) \perp (d)$ et $(\Delta) \perp (d')$

Dans cette disposition, on dit que

la droite (Δ) est perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$



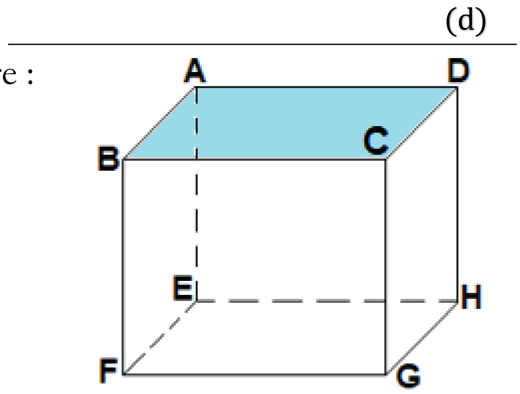
Ce qu'il faut retenir :

Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan.

2/ Droite et plan parallèles :

Ce qu'il faut retenir : ***Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle parallèle à une droite de ce plan.***

On considère le cube ABCDEFGH et la droite (d) ci-contre :

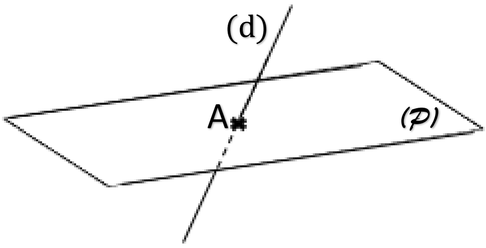


La droite (d) est parallèle à la droites (AD) donc elle est parallèle au plan (ABC) en bleu contenant la droite (AD)

La droite (d) est parallèle à la droite (EH) donc elle est parallèle au plan (FEH) contenant la droite (EH).

3/ Droite et plan sécants :

Une droite et un plan sont sécants lorsqu'ils ont un seul point en commun.



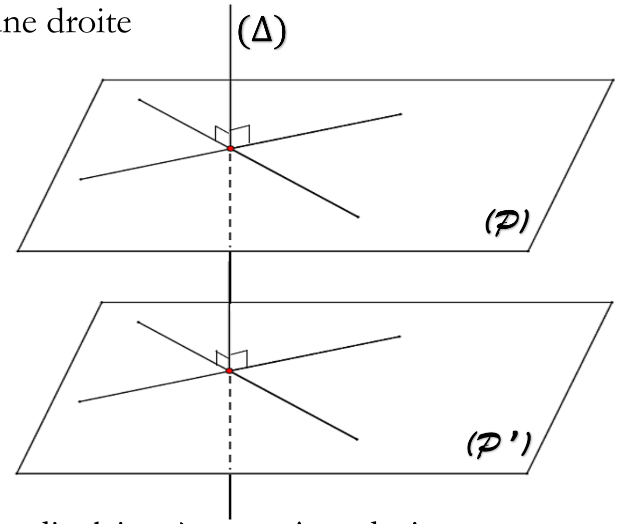
Le plan (P) et la droite (d) sont sécants en A.

III°- Positions relatives de plans dans l'espace : plans parallèles

Dans la figure ci-dessous, on a deux plans et une droite

$(\Delta) \perp (\mathcal{P})$

$(\Delta) \perp (\mathcal{P}')$



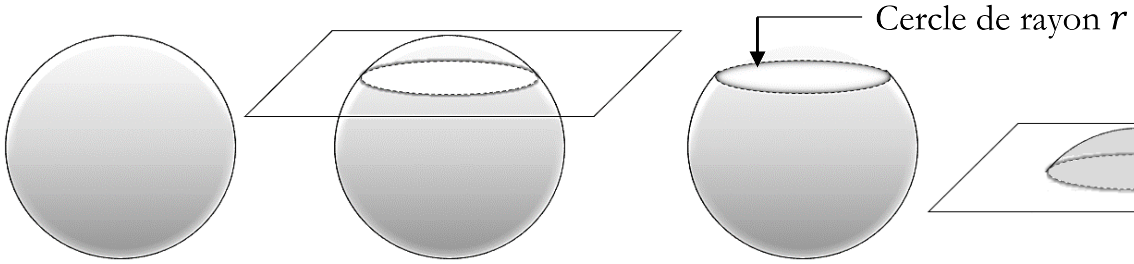
Dans cette disposition, on dit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

Ce qu'il faut retenir :

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils sont perpendiculaires à une même droite.

IV°- Section d'une sphère par un plan

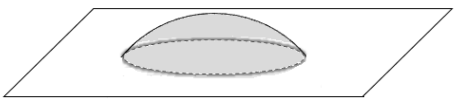
a) La section d'une sphère par un plan est toujours un cercle.



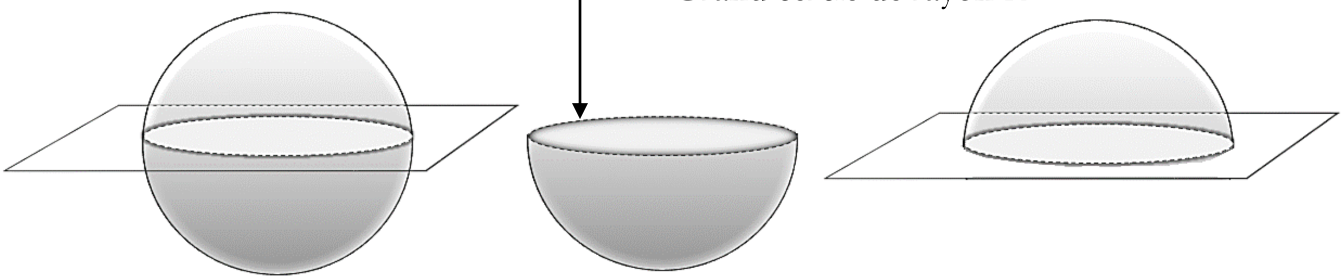
Sphère entière

sphère sectionnée Par un plan

calotte sphérique



b) <u>La section d'une sphère par un plan qui passe par son centre O est appelée un grand cercle.</u>

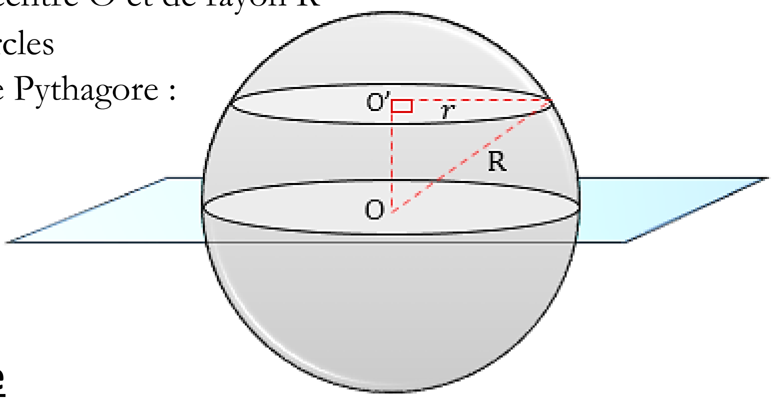


<u>Orange entière</u>

<u>Orange sectionnée</u>

c) <u>Relation entre</u> r et R

On a réalisé sur la sphère ci-dessous deux sections avec des plans parallèles
La petite section donne un cercle de centre O' et de petit rayon r
La grande section donne un cercle de centre O et de rayon R
OO' est la hauteur h entre les deux cercles
Il vient par application du théorème de Pythagore :



$$r^2 + h^2 = \mathrm{R}^2$$
$$r^2 = \mathrm{R}^2 - h^2$$

Formule *à retenir :* $r^2 = \mathrm{R}^2 - h^2$

<u>V°- Aire et volume d'une sphère</u>

Formules : *à retenir*

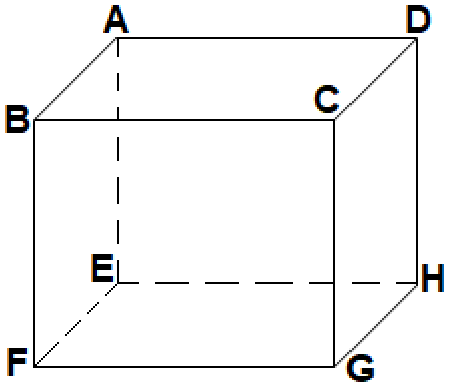
L'aire et le volume d'une sphère ont respectivement pour formules :

$$\boxed{\mathcal{A} = 4\pi \mathrm{R}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{V = \frac{4\pi \mathrm{R}^3}{3}}$$

Comme $R = \dfrac{diamètre\ (d)}{2} = \dfrac{d}{2}$ donc $\boxed{\mathcal{A} = 4\pi \dfrac{\mathrm{d}^2}{4} = \pi d^2}$ et $\boxed{V = \dfrac{4\pi \mathrm{R}^3}{3} = \dfrac{\pi d^3}{6}}$

Exercice 1 :

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



1°) Donne toutes les droites parallèles à la droite (AB)

2°) Donne deux droites coplanaires à la droite (AB)

3°) Donne deux droites non coplanaires à la droite (AB)

4°) Montre que les droites (EF) et (CD) sont coplanaires

5°) Montre que les droites (EH) et (BC) sont coplanaires

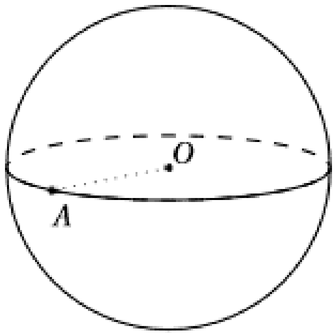
6°) Montre que la droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC)

7°) Montre que la droite (BF) est perpendiculaire au plan (EFC)

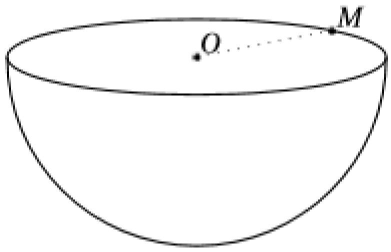
8°) En déduis la position relative des plans (ABC) et (EFG)

Exercice 2 : Calcule l'aire et le volume de chacun des solides suivants :

Cas n°1 : OA = 25 cm



Cas n°2 : AB = 3476 km



Exercice 3 :

1°) Soit une sphère S de centre O et de rayon R = OA = 5 cm.

a) Calcule le diamètre du grand cercle.

b) Calcule l'aire de la sphère S.

c) Calcule le volume de la sphère S.

2°) Soit une demi-sphère de rayon R = 8 cm. Calcule l'aire et le volume de cette demi-sphère.

3°) Calculer le volume d'une sphère de rayon 6cm. Donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} cm^3 près.

4°) Calcule le rayon d'une sphère dont l'aire est égale à 240 cm^2.

5°) Soit une sphère dont l'aire est égale 400 cm^2. Détermine le volume que peut contenir cette sphère ?

6°) Calcule l'aire et le volume de chacune des planètes suivantes. Donne les résultats en écriture scientifique.

Planètes :	Mars	Terre	Jupiter
Rayons (en Km) :	3 395	6371	71 600

Exercice 4 :

1. Quel est le rayon d'une sphère dont l'aire est égale à 200 cm^2 ? Quel est le volume que peut contenir cette sphère ?

2. Puis-je verser le contenu (liquide) d'une sphère de 5 cm de rayon dans un cylindre creux de 5 cm de rayon et de 7 cm de hauteur ?

3. Un verre parallélépipédique (longueur 3cm, largeur 3 cm, hauteur 8 cm) contient 63mL d'eau. Quelle est la hauteur d'eau dans ce récipient ? On y plonge deux glaçons sphériques de 2 cm de diamètre. L'eau va-t-elle déborder du verre ?

Exercice 5 :

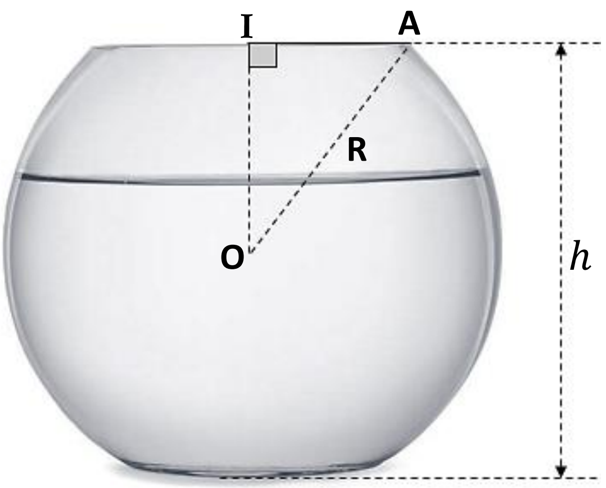
Un aquarium a la forme d'une calotte sphérique de centre O, de rayon R = 12cm et de hauteur h égale à 19cm. (voir images)

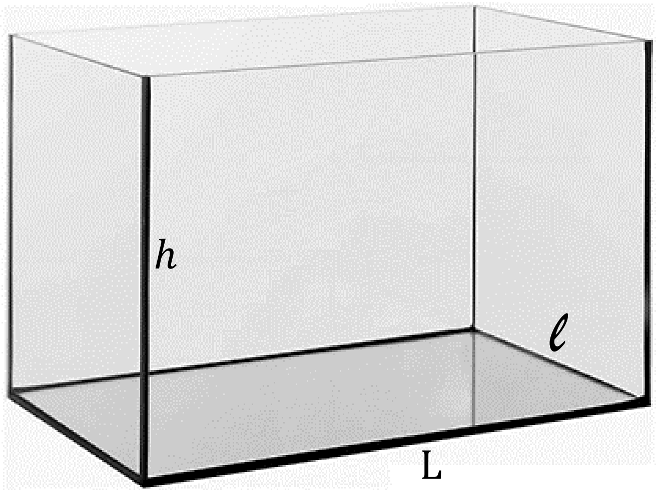
1. Calcule la longueur OI puis la longueur IA.
2. Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule :

$V=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$ où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte sphérique.

Calcule le volume de cet aquarium (tu remplaceras pi par 3).

3. On verse six virgule quatre litres d'eau dans l'aquarium. Au moment de changer l'eau de l'aquarium, on transvase son contenu dans un récipient parallélépipédique de 25 cm de longueur et de 12,8 cm de largeur. Détermine la hauteur h' d'eau dans le récipient.





Exercice 6 :

Une boule de pétanque, pour homme, utilisée en compétitions officielles, a pour diamètre variant de 74 mm et 75 mm.

a) Calcule le volume de la boule de pétanque B_1, arrondi à l'unité si son diamètre est de 74 mm.

b) Calcule le volume de la boule de pétanque B_2, arrondi à l'unité si son diamètre est de 75 mm.

c) Sachant que la masse volumique de l'alliage constituant la boule de pétanque est de 3,48 g/cm^3. Calcule la masse de B_1 et celle de B_2.