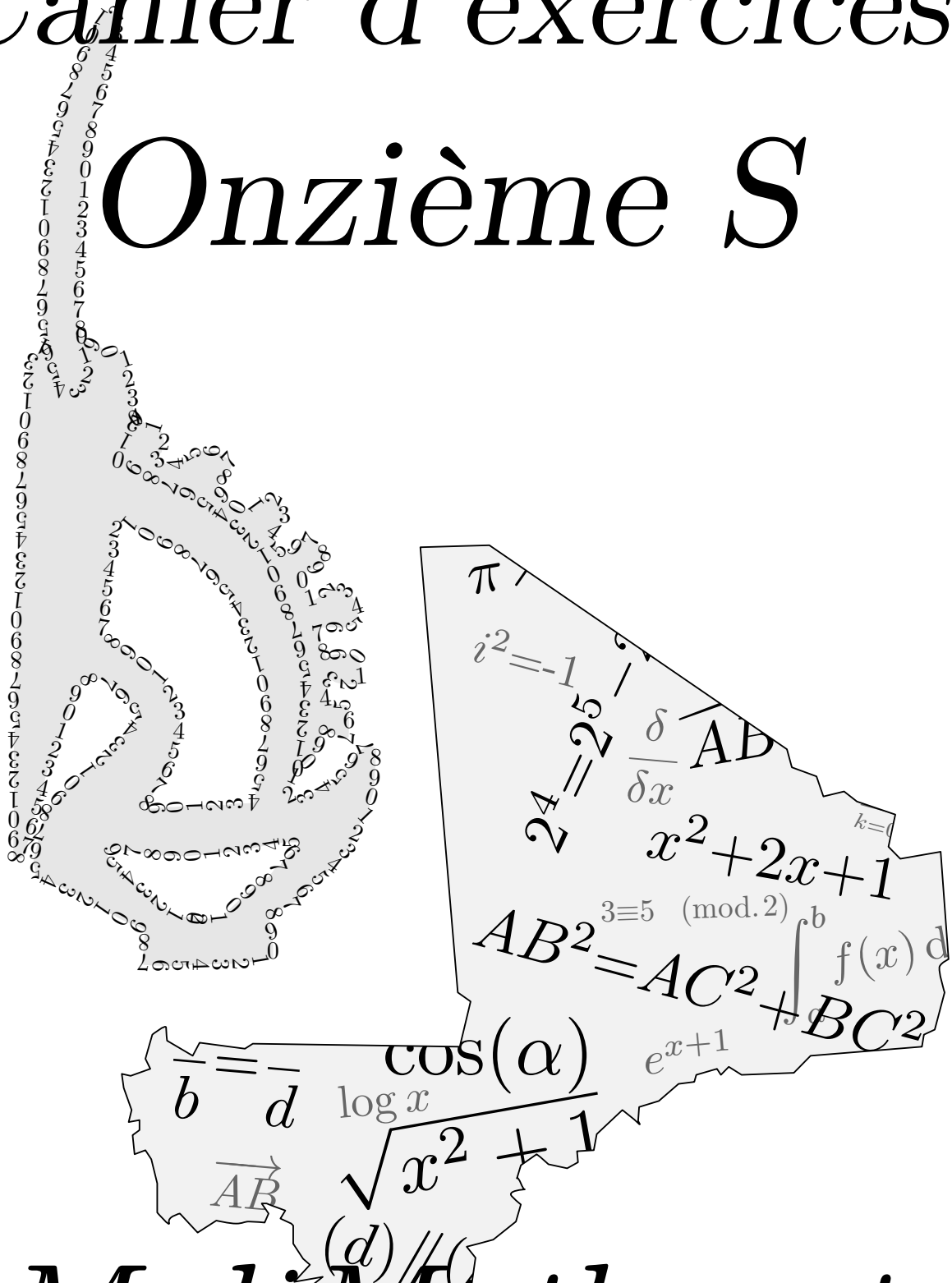


Cahier d'exercices

Onzième S



MaliMath.net

Onzième S

Sommaire:

A. Applications	1
B. Fonctions polynômes	3
C. Equations-inéquations	6
D. Trigonométrie	8
E. Fonctions numériques	15

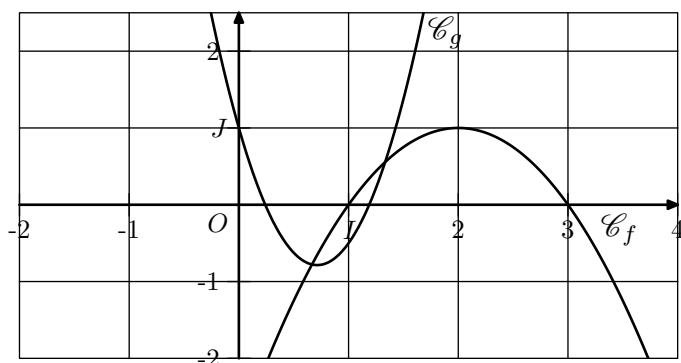
F. Suites numériques	41
G. Dénombrément - Probabilités	48
H. Barycentre	51
I. Géométrie plane	52
J. Statistiques	52
K. Géométrie dans l'espace	59

A. Applications:

Exercice A.1 (*)0

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g définies par:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{7}{2}x^2 - 5x + 1$$



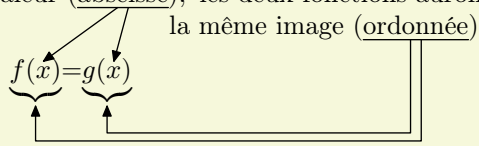
Les questions ci-dessous doivent être traitées algébriquement:

- Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g . On donnera les arrondies au centième près.
- Déterminer la position relative de ces deux courbes.

Exercice A.2 (*)0

Rappels:

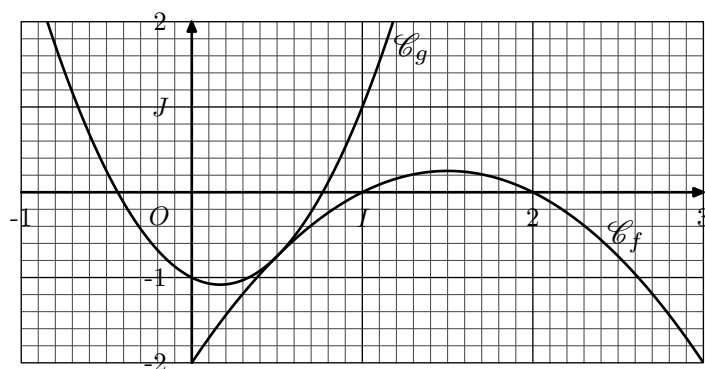
- Pour une fonction du second degré $f: x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, les antécédents de 0 sont les racines du polynôme.
- Les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g vérifient l'équation $f(x) = g(x)$. Car: Pour cette valeur (abscisse), les deux fonctions auront la même image (ordonnée)



On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont définies par les relations:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 - x - 1$$

Dans le repère $(O; I; J)$, on donne les représentations graphiques \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g :



- Graphiquement, donner les antécédents du nombre 0 par la fonction f .

Les questions suivantes se traiteront algébriquement:

- Déterminer les antécédents du nombre 0 par la fonction g . On donnera les valeurs arrondies au centième près.
- Résoudre l'équation: $f(x) = g(x)$
 - Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice A.3 (*)0

Soit f et g les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 3$$

- Déterminer $D_f, D_g, D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$
- Calculer $f \circ g(1)$ et $g \circ f(1)$

Exercice A.4 (*)0

Soit les fonctions f et g définies par: $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

- Trouver l'image directe par g de: $A = [-1; 4]$ $B = [-2; 0]$ $C =]3; +\infty[$
- Déterminer $f^{-1}(\{6; -4; -\frac{1}{2}\})$; $f^{-1}([-2; 0])$
- Déterminer $f([-1; 2])$

Exercice A.5 (*)0

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad ; \quad x \mapsto x - 2$$

- a) Les Fonctions f et g sont –elles égales ?
 b) Déterminer la plus grande A de \mathbb{R} sur laquelle f et g coïncident.

Exercice A.6 (*)0

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-1}, \quad x \mapsto \frac{3x+4}{2-x}$$

- Déterminer $Df, Dg; Df \circ g; D(f+g); Dg * f; Df/g$
- Calculer $f \circ g; g \circ f; f/g$
- Trouver la partie A de \mathbb{R} telle que $h : A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$
- Monter que h est injective.
- Trouver E et F tels que $i : E \rightarrow F \quad ; x \mapsto g(x)$ soit une bijection
- Déterminer i^{-1}

Exercice A.7 (*)0

Soient U et V deux fonctions numériques définies par :

$$U(x) = x + x^2; \quad V(x) = \frac{x}{x-2}$$

- Donner les domaines de définition D_U et D_V de U et de V .
- U et V sont –elles des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? justifier.
- L'application U est –elle injective ? surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? justifier.
- Soit $f(x) = V \circ U(x)$ et $g(x) = U \circ V(x)$, Calculer $f(x)$ et $g(x)$ puis donner D_f et D_g .

Exercice A.8 (*)0

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left| \frac{x+1}{x-2} \right|$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

- Exprimer f sans le signe de valeur absolue.
- Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et un ensemble B sur lequel $f \neq g$.

Exercice A.9 (*)0

Soient les fonctions h et t définies par :

$$h :]-3; 5] \rightarrow \mathbb{R} \quad t : [3; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x+1| + |2-x| \quad x \mapsto 2x-1$$

- Ecrire h sans le symbole valeur absolue.
- Quelle est la restriction de h à l'intervalle $[0; 1]$.
- L'application t est-elle la restriction de h dans $[3; 4]$.
- Trouver le prolongement de t à $[1; 5]$ (on donnera une représentation graphique de h)

Exercice A.10 (*)0

Exercice 1

- Trouver la partie B de \mathbb{R} telle que la fonction f définie par
 $f : [0; 1] \rightarrow B$
 $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
 soit une application injective.
- Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Montrer que pour tout nombre réel x , on a $|f(x)| < 1$
 L'application f est elle surjective?

Exercice A.11 (*)0

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = 2x - |2-2x| + |x+1| \quad \text{et} \quad g(x) = 3x - 3$$

- Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue
- Déterminer le plus grand ensemble B sur lequel f et g coïncident.

Exercice A.12 (*)0

Exercice 1

On considère l'équation

$$(E) : (m-2)x^2 + (m+2)x - 2 = 0$$

- Résoudre l'équation (E) pour $m = 2$
- On suppose que $m \neq 2$
 - Déterminer les valeurs de m pour que l'équation (E) admette deux solutions distinctes
 - Déterminer les valeurs de m pour que l'équation (E) admette une solution double
 - Déterminer les valeurs de m pour que l'équation (E) n'admette pas de solution
 - Déterminer les valeurs de m pour que l'équation (E) admette deux solutions de signes contraires
 - Déterminer les valeurs de m pour que l'équation (E) admette deux solutions opposées
- Trouver une relation indépendante de m entre les solutions x_1 et x_2

Exercice A.13 (*)0

Exercice 2

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = -x + 2 \quad ; \quad \text{si } x \leq -1$$

$$h(x) = 1 \quad ; \quad \text{si } -1 < x < 2$$

$$h(x) = x - 3 \quad ; \quad \text{si } x \geq 2$$

- Représenter graphiquement la fonction h
- Déterminer l'image par h des intervalles : $] -\infty; -1]$; $[2; +\infty[$; $[0; 1]$

Exercice A.14 (*)0

Soit g la fonction définie par :

$$g : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{3x-2}$$

Démontrer que g est bijective puis expliciter sa bijection réciproque.

Exercice A.15 (*)0

Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$

- Déterminer l'ensemble de définition de h .
- Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D_h$, $h(x) = a + \frac{b}{x-1}$.
puis Déterminer l'image directe par h de chacun des

ensembles suivants :

$A = [-1; 2]$; $B = [-1; 1]$; $C = \{-2; -1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 1\}$

Exercice A.16 (*)0

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = 2x - 1 - |x + 1|$ et $g(x) = x - 2$

- Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue
- Déterminer le plus grand ensemble A sur lequel f et g coïncident.

B. Fonctions polynômes :

Exercice B.1 (*)0

Pour chacune des égalités suivantes, donner la valeur de α (sans justification), puis vérifier l'égalité proposée :

- $(x + 2)^2 - 5 = x^2 + \alpha \cdot x - 1$
- $(x - 3)^2 + 7 = x^2 - 6x + \alpha$
- $2(x + 1)^2 - 9 = \alpha \cdot x^2 + 4x - 7$
- $7(x - 2)^2 + 1 = 7x^2 + \alpha \cdot x + 29$
- $(x - 5)^2 + \alpha = x^2 - 10x + 10$
- $3(x + \alpha)^2 + 4 = 3x^2 + 48x + 196$

Exercice B.2 (*)0

Tout polynôme du second degré $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ admet une expression de la forme :

$f : x \mapsto \alpha \cdot (x - \beta)^2 + \gamma$

où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha \neq 0$.

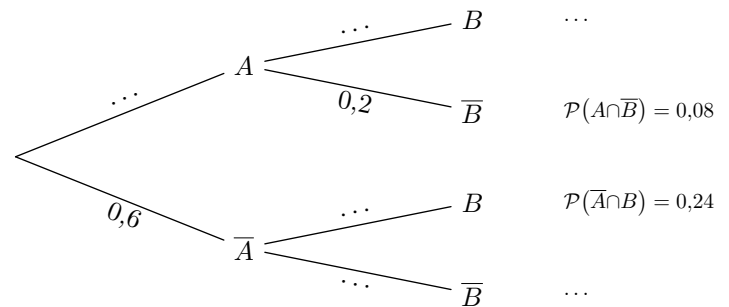
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| $4x^2 + 8x + 7 \circ$ | $\circ (x + 2)^2 - 5$ |
| $x^2 + 4x - 1 \circ$ | $\circ (x - 4)^2 - 4$ |
| $x^2 - 8x + 20 \circ$ | $\circ 4(x + 1)^2 + 3$ |
| $4x^2 - 16x + 6 \circ$ | $\circ 4(x - 2)^2 - 10$ |
| $-4x^2 - 16x - 12 \circ$ | $\circ (x - 4)^2 + 4$ |
| $x^2 - 8x + 12 \circ$ | $\circ -4(x - 2)^2 + 4$ |
| $-4x^2 + 16x - 12 \circ$ | $\circ -4(x + 2)^2 + 4$ |

Exercice B.3 (*)0

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Déterminer les probabilités suivantes :

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|--|
| a. $\mathcal{P}(A)$ | b. $\mathcal{P}_A(B)$ | c. $\mathcal{P}(A \cap B)$ |
| d. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)$ | e. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B})$ | f. $\mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$ |

Exercice B.4 (*)0

Etablir les égalités suivantes :

- $(x + 2)^2 - 4 = x^2 + 4x$
- $(x - 9)^2 + 11 = x^2 - 18x + 92$
- $(x + 3)^2 - 12 = x^2 + 6x - 3$
- $2(x + 1)^2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$

Exercice B.5 (*)0

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $x^2 + 2x - 3$ | b. $x^2 - 6x - 2$ |
| c. $x^2 + 12x + 5$ | d. $x^2 - 10x + 5$ |
| e. $x^2 + 4x$ | f. $x^2 - 14x + 9$ |

Exercice B.6 (*)0

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| a. $x^2 + 4x - 5$ | b. $x^2 - 2x - 1$ |
| c. $x^2 + x + 1$ | d. $x^2 + \frac{1}{4}x + 1$ |
| e. $2x^2 + 12x - 4$ | f. $7x^2 - 14x + 10$ |

Exercice B.7 (*)0

- a. Déterminer la forme canonique de l'expression :

$$x^2 - 10x - 2$$

- b. Justifier que cette expression admet pour valeur minimale -27 et que cette valeur est atteinte en 5 .

2. On considère l'expression $-2x^2 + 8x + 1$:

- a. Etablir l'égalité suivante:

$$-2x^2 + 8x + 1 = -2(x - 2)^2 + 9$$
- b. En déduire que cette expression atteint son maximum en $x = 2$. Quelle est sa valeur maximale?

Exercice B.8 (*)0

1. On considère le polynôme $x^2 - 6x + 12$:

- a. Déterminer la forme canonique de ce polynôme.
- b. Justifier que ce polynôme est strictement positif pour toute valeur de x .

2. On considère le polynôme $4x^2 + 40x + 84$.

- a. Déterminer la forme canonique de ce polynôme.
- b. Justifier que -16 est la valeur minimale prise par ce polynôme sur \mathbb{R} .

Exercice B.9 (*)0

Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant:

$$\{-2; -1; 1; 2\}$$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "rapidement" la factorisation de chacun des polynômes suivants:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a. $x^2 + 2x - 8$ | b. $2x^2 - 4x - 6$ |
| c. $x^2 + x - 6$ | d. $3x^2 - 4x + 1$ |
| e. $x^3 + x^2 - 2x$ | f. $5x^2 + 3x - 2$ |

Exercice B.10 (*)0

1. On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = a \cdot x^2 + 3x + 2 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

Sachant que sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $A(-2; -12)$, déterminer l'expression complète de la fonction f .

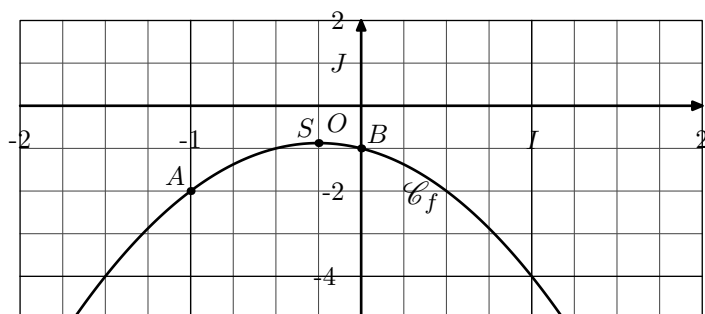
2. Soit g la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par:

$$g(x) = 3x^2 + b \cdot x + 1 \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$$

Sachant que le sommet de la parabole représentative de la fonction g a pour abscisse 1 , déterminer l'expression complète de la fonction g .

Exercice B.11 (*)0

La courbe \mathcal{C}_f est une parabole représentant une fonction f du second degré.



La courbe \mathcal{C}_f passe par les points $A(-1; -2)$, $B(0; -1)$ et admet pour sommet le point S dont l'abscisse est $-\frac{1}{4}$.

La fonction f étant définie par un polynôme du second degré, on en déduit l'existence de trois réels a , b et c tels que:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- A l'aide des coordonnées du point B , déterminer la valeur du nombre c .
- En utilisant les caractéristiques du sommet S de la parabole, justifier que la fonction f admet l'écriture:

$$f(x) = 2b \cdot x^2 + bx - 1$$
- A l'aide des coordonnées du point A , déterminer l'expression complète de la fonction f .

Exercice B.12 (*)0

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à l'aide d'un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est strictement négatif.

Sa courbe représentative \mathcal{C}_f est une parabole dont le sommet a pour coordonnée $(\frac{1}{4}; -\frac{7}{8})$.

- a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- En déduire le signe du discriminant du polynôme du second degré définissant la fonction f .
- La courbe \mathcal{C}_f passe par les points:
 $A(0; -1)$ et $B(-2; -11)$

Déterminer les réels a , b et c vérifiant l'égalité:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Exercice B.13 (*)0

1. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a. $f(x) = x^2 + x - 2$ | b. $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$ |
| c. $h(x) = -4x^2 + x + 2$ | d. $j(x) = 2x^2 + 2x + 2$ |

2. Pour chaque fonction de la question précédente, donner, sans préciser leurs valeurs, le nombre d'antécédent de 0 .

Exercice B.14 (*)0

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} définies par les relations:

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5$$

- Etablir le tableau de variations de chacune de ces fonctions.
- Etablir le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

Exercice B.15 (*)0

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$$

- a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- b. Justifier que la fonction f n'admet aucun antécédent du nombre 0 .

2. Soit g la fonction définie par la relation:

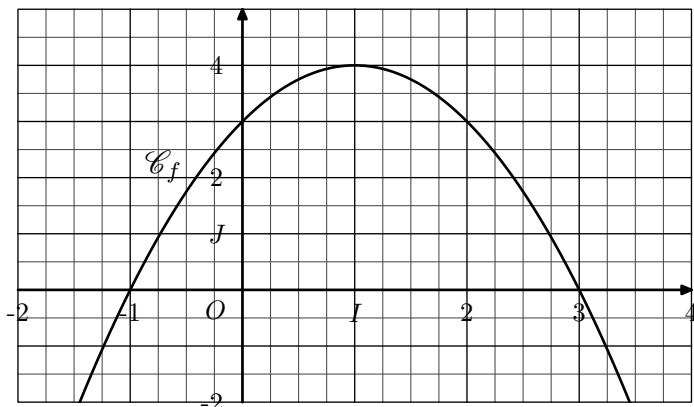
$$g(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 3$$

- a. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction g .

- b. Dresser le tableau de variations de la fonction g (on y apportera les résultats de la question précédente).
- c. En déduire le tableau de signes de la fonction g .

Exercice B.16 (*)0

On considère la fonction f dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère orthonormé $(O; I; J)$:



On s'intéresse à la fonction affine g définie par la relation:
 $g: x \mapsto x + 1$

- Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-dessus.
- Graphiquement, résoudre l'équation: $f(x) = g(x)$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x) \geq g(x)$.

Exercice B.17 (*)0

- Etablir l'égalité suivante:

$$(-2x^2 + 4x - 2)(ax^2 + bx + c) = -2ax^4 + (4a - 2b)x^3 + (-2c + 4b - 2a)x^2 + (4c - 2b)x - 2c$$

- Donner, sans justification, les valeurs de a, b, c réalisant l'égalité suivante:

$$(-2x^2 + 4x - 2)(ax^2 + bx + c) = -18x^4 + 18x^3 + 14x^2 - 10x - 4$$

- Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$-18x^4 + 18x^3 + 14x^2 - 10x - 4$$

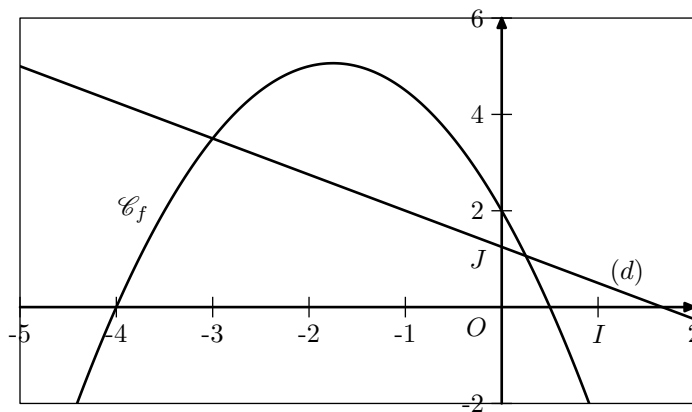
Exercice B.18 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation:

$$f(x) = -x^2 - \frac{7}{2}x + 2$$

Dans le plan munit d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f et la

droite (d) d'équation: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$



- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
 - Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des ordonnées.
- Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et (d) sur \mathbb{R} .

Exercice B.19 (*)0

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par les relations:

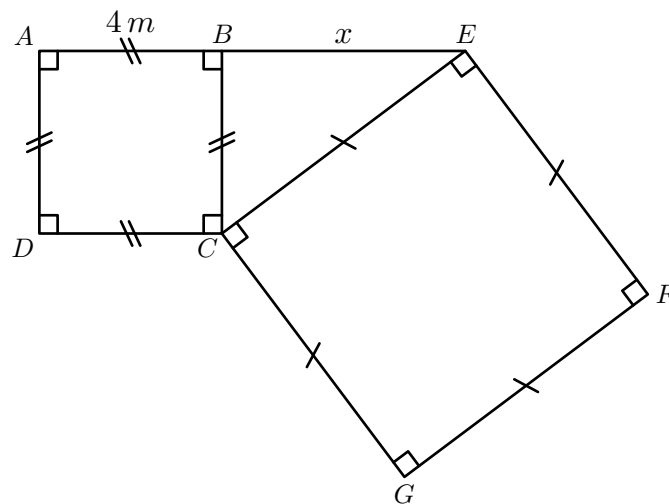
$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x + 12 \quad ; \quad g(x) = 2x - 4$$

On considère \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g .

- Montrer que 2 est solution de l'équation: $f(x) = g(x)$.
- Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant: $f(x) - g(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
 - En déduire la forme factorisée de l'expression: $f(x) - g(x)$.
- Dresser le tableau de signes de la différence: $f(x) - g(x)$
 - En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} .

Exercice B.20 (*)0

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous:

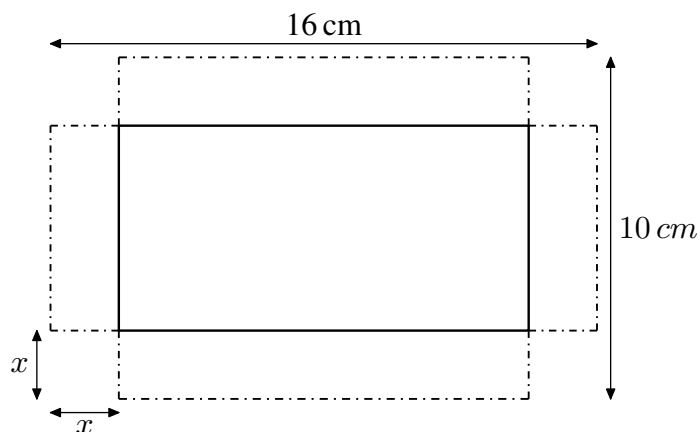


- Justifier que l'aire \mathcal{A} du champ a pour valeur en fonction de x :
 $\mathcal{A}(x) = x^2 + 2x + 32$
- En déduire la valeur de la longueur x afin que l'aire to-

tale du champ soit de 200 m^2 .

Exercice B.21 (*)0

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm .



1.
 - a. Lorsque la boîte sera construite, le nombre x représentera quelle dimension? La longueur, la largeur ou la hauteur?
 - b. Quelles valeurs peut prendre la variable x dans ce problème?
 - c. Donner l'expression du volume \mathcal{V} en fonction de la valeur de x .
2. Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de " x ", cette boîte possède un volume égal à 144 cm^3 :
 - a. Etablir l'égalité suivante:

$$4x^3 - 52x^2 + 160x - 144 = (2x - 4)(2x^2 - 22x + 36)$$
 - b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{V}(x)$ a pour valeur 144.

Exercice B.22 (*)0

Exercice C.1 (*)0

Résoudre les équations suivantes :

- a. $(4x + 2)(3x - 1) + x(6x + 3) = 0$
- b. $(x + 3)^2 = 2(2x + 6)(3x - 2)$
- c. $(-5x - 4)(2x + 1) = (-4x - 3)(3x + 2)$
- d. $(1 - 5x)(2x + 1) = (1 - 3x)(3x + 2)$

Exercice C.2 (*)0

Résoudre les équations suivantes :

- a. $(9 - 3x)(5 + 2x) + (x - 3)(5 + x) = 0$
- b. $\frac{2x - 3}{x - 2} - \frac{x + 3}{x - 1} = 0$

Exercice C.3 (*)0

On considère le polynôme du second degré (E): $x^2 + 3x + 3$.

1. Déterminer le discriminant du polynôme (E).
2. En effectuant un raisonnement par l'absurde et en supposant que l'expression (E) admette la forme factorisée: (E): $a(x - \alpha)(x - \beta)$
Etablir que l'expression (E) n'admet pas de forme factorisée.

Exercice B.23 (*)0

La factorisation d'un polynôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ du second degré dépend de la valeur de son discriminant :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune factorisation	$a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2$	$a \cdot (x - \alpha)(x - \beta)$ où α et β sont les deux racines du polynôme

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

- a. $x^2 + 4x + 3$
- b. $5x^2 - 4x - 1$
- c. $3x^2 + 4x + 1$
- d. $4x^2 + 3x + 4$
- e. $12x^2 + 36x + 27$
- f. $3x^2 + 3x + 4$

Exercice B.24 (*)0

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

- a. $3x^2 + 4x + 1$
- b. $-3x^2 + 4x - 1$
- c. $-4x^2 + 5x$
- d. $-4x^2 + 12x - 9$
- e. $x^2 + 2x + 1$
- f. $3x^2 - 4x + 2$

Exercice B.25 (*)0

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

- a. $2x^2 + 3x + 1$
- b. $4x^2 + 9x + 2$
- c. $-3x^2 + 2x - 1$
- d. $8x^2 - 24x + 18$
- e. $-3x^2 + x + 1$
- f. $-4x^2 + x + 3$

C. Equations-inéquations :

On considère le polynôme du second degré: (E): $x^2 + 4x - 12$

1.
 - a. Justifier que le polynôme (E) admet pour forme canonique: $(x + 2)^2 - 16$.
 - b. Justifier que le polynôme (E) admet pour minimum -16 .
2.
 - a. Déduire de la question 1. a. la forme factorisée du polynôme (E).
 - b. En déduire les deux racines du polynôme (E).
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie par: $f(x) = x^2 + 4x - 12$

Exercice C.4 (*)0

On considère l'expression: (E): $x^2 + 3x + 10$

1. Déterminer l'expression de la forme canonique de (E).

2. Dédurre de la forme canonique de (E) que l'équation ci-dessous n'admet pas de solution:
 $x^2 + 3x + 10 = 0$

Exercice C.5 (*)0

Déterminer le discriminant des polynômes du second degré ci-dessous :

- a. $x^2 + 2x + 4$ b. $2x^2 + 4x + 1$ c. $x^2 - 2x + 1$
 d. $-2x^2 + 2x + 1$ e. $x^2 - x - 1$ f. $3x^2 + x - 2$

Exercice C.6 (*)0

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.

Pour un polynôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune solution	1 solution	2 solutions
	$-\frac{b}{2 \cdot a}$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$; $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

Déterminer les racines des polynômes du second degré :

- a. $x^2 + 2x - 35 = 0$ b. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 c. $5x^2 - 3x + 2 = 0$ d. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
 e. $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ f. $-3x^2 - x + 4 = 0$

Exercice C.7 (*)0

Résoudre les équations suivantes :

- a. $x^2 - 4x - 3 = 0$ b. $2x^2 - 3x - 2 = 0$
 c. $2x^2 - 4x - 8 = 0$ d. $x^2 - 3x + 1 = 0$

Exercice C.8 (*)0

Résoudre les équations suivantes :

- a. $3x^2 + 4x + 1 = 0$ b. $3x^2 - 4x + 2 = 0$
 c. $-x^2 + 2x + 3 = 0$ d. $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 e. $-3x^2 + 3x + 3 = 0$ f. $-x^2 + 4x + 3 = 0$

Exercice C.9 (*)0

Résoudre les équations suivantes :

- a. $-5x^2 - 4x + 1 = 0$ b. $-6x^2 + 8x + 8 = 0$
 c. $(3x - 2)(2x - 2) = x(2x + 2) - 5$

Exercice C.10 (*)0

Sans justification, répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation : $x^3 > 8$
 2. Résoudre l'inéquation : $x^3 \leq 27$

Exercice C.11 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = 2 \cdot (5 - x)^3 + 1$$

Etablir que la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .

Exercice C.12 (*)0

Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = -x^3 + 2$

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 10$
 2. Etablir que la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}

Exercice C.13 (*)0

Soit f et g deux fonctions définies sur $] -\infty ; 3]$ par les relations :

$$f(x) = \sqrt{-x + 3} \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

1. a. Résoudre l'équation : $-x + 3 = (x - 1)^2$
 b. Vérifier si les deux solutions trouvées à la question a. sont solutions de l'équation :
 $f(x) = g(x)$
 2. a. Sur $] -\infty ; 3]$, établir que la fonction f est décroissante.
 b. Justifier que la fonction g est croissante.
 3. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice C.14 (*)0

On considère les deux fonctions f et g définies sur $] -2 ; +\infty [$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \quad ; \quad g(x) = \frac{3 \cdot x - 3}{2 \cdot x + 4}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante :
 $f(x) - g(x) = \frac{-3 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)(2 \cdot x + 4)}$
 b. Déterminer la valeur des réels a , b et c vérifiant la relation suivante :
 $f(x) - g(x) = \frac{(x - 1)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)}{(x^2 + 1)(2 \cdot x + 4)}$
 2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
 $f(x) - g(x) = 0$
 3. a. Dresser le tableau de signes de : $f(x) - g(x)$.
(on admettra que le produit $(x^2 + 1)(2 \cdot x + 4)$ est strictement positif sur $] -2 ; +\infty [$).
 b. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur l'intervalle $] -2 ; +\infty [$.

Exercice C.15 (*)0

1. Soit f la fonction définie par la relation :
 $f(x) = \sqrt{-2 \cdot x^3 + 2}$
 Justifier que la fonction est décroissante sur $] -\infty ; 1]$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
 $g(x) = -\left(\frac{2}{x + 1}\right)^3$ Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $] -1 ; +\infty [$.

Exercice C.16 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x - 3}{2 \cdot x^2 - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 2. Soit g la fonction affine définie par la relation :

$$g(x) = x + 3$$

- a. Déterminer la valeur des réels a , b et c vérifiant l'égalité suivante :

$$f(x) - g(x) = \frac{(1-x)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)}{2 \cdot x^2 - 3}$$

- b. En déduire la forme factorisée de $f(x) - g(x)$.

3. a. Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

On admettra que l'expression $2x^2 - 3$ est négative sur $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

- b. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur l'intervalle $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

Exercice C.17 (*)0

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (E_m) où m est un paramètre réel, définie par :

$$x \in \mathbb{R}; (E_m) : (m+1)x^2 - (m-2)x + m - 3 = 0$$

- Pour quelles valeurs de m , l'équation (E_m) possède-t-elle des racines x' et x'' telles que : $x' < 2 < x''$.
- Pour quelle valeurs de m , l'équation (E_m) possède-t-elle deux racines x' et x'' vérifiant la relation : $3(x' + x'') = -2x'x''$.
- Quelle relation indépendante de m , les racines x' et x'' de l'équation (E_m) lorsqu'elles existent doivent vérifier ?
- En déduire de cette relation les solutions doubles de l'équation (E_m)

Exercice C.18 (*)0

Le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.

Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$ <small>α et β sont les deux racines</small>
$a > 0$	Signe $-\infty$ $+\infty$ +	Signe $-\infty$ $-b/2a$ $+\infty$ + 0 +	Signe $-\infty$ α β $+\infty$ + 0 - 0 +
$a < 0$	Signe $-\infty$ $+\infty$ -	Signe $-\infty$ $-b/2a$ $+\infty$ - 0 -	Signe $-\infty$ α β $+\infty$ - 0 + 0 -

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

- a. $2x^2 + x - 1$ b. $-3x^2 + 2x + 1$ c. $2x^2 - 1$
d. $4x^2 - 3x - 1$ e. $-x^2 - x - 1$ f. $-x^2 - 4x - 1$

A la question f., on pourra donner les valeurs approchées au centième des racines.

Exercice C.19 (*)0

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $x^2 - 3x + 2 > 0$ b. $x^2 - x - 2 < 0$ c. $-9x^2 + 12x - 4 \leq 0$

Exercice C.20 (*)0

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $x^2 + 5x + 4 > 0$ b. $-3x^2 + 4x + 4 < 0$
c. $4x^2 + 4x + 1 > 0$ d. $-2x^2 + 5x + 3 > 0$
e. $4x^2 - 3x + 2 \leq 0$ f. $12x^2 + 12x + 3 \leq 0$

Exercice C.21 (*)0

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $2x^2 + 3x - 5 > 0$ b. $-x^2 + 5x - 4 \leq 0$
c. $(-4x^2 + x + 5)(3 - 2x) \geq 0$

Exercice C.22 (*)0

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

- a. $3x^2 + 4x + 1$ b. $-3x^2 + 4x - 1$ c. $-4x^2 + 5x$
d. $x^2 + 2x - 1$ e. $-x^2 + 4x + 1$ f. $3x^2 - 4x + 2$

Exercice C.23 (*)0

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes sur \mathbb{R} :

- a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $(2x + 1)(3x^2 - 2x - 1)$

D. Trigonométrie :

Exercice D.1 (*)0

1. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a. $2 \sin 2x = 1$ b. $\cos 3x = 1$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a. $\sin 2x = \sin x$ b. $\cos 2x = \cos x$

Exercice D.2 (*)0

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a. $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $2 \sin x \leq 1$ c. $\cos x < -\frac{1}{2}$

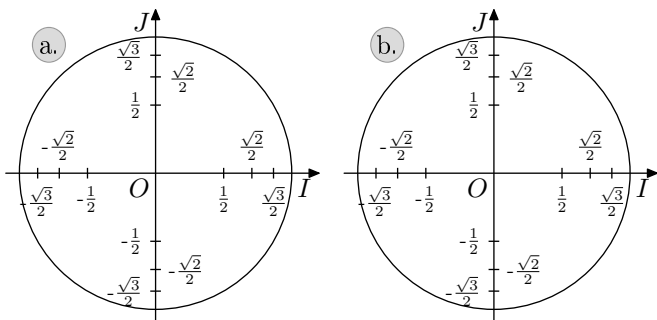
Exercice D.3 (*)0

Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

- a. $\tan(x+\pi)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ c. $\cos(x-\pi)$
 d. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ e. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ f. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice D.4 (*)0

Ci-dessous sont représentés deux cercles trigonométriques où sont indiqués sur les axes des valeurs remarquables :



1. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

- a. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\cos\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$

2. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

- a. $\sin\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]\right)$

Exercice D.5 (*)0

Dans cet exercice, on souhaite montrer que tous les nombres de l'ensemble $E = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ vérifient l'équation : $\sin 2x = \sin x$

1. a. Compléter, dans le tableau ci-dessous, la valeur de α quand k parcourt les valeurs proposées :

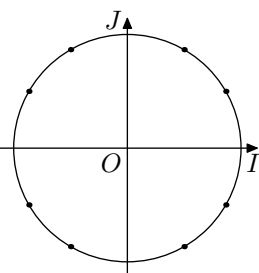
k	-2	-1	0	1	2	3	4
$\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$							

b. En se servant de la question précédente, donner la mesure principale de l'angle α en fonction de k :

k	-2	-1	0	1	2	3	4
Mesure principale de α							

c. Placer l'ensemble des points de E sur le cercle trigonométrique ci-dessous :

2. Montrer que **tous** les éléments de E vérifient l'équation : $\sin 2x = \sin x$



Exercice D.6 (*)0

1. Montrer que : $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} = 0$
 2. Simplifier au maximum le nombre suivant. (on exprimera le résultat à l'aide de $\cos \frac{\pi}{7}$ et $\sin \frac{\pi}{7}$).

$$2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + 3 \cdot \cos \frac{8\pi}{7} - 2 \cdot \sin \frac{6\pi}{7} + \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

Exercice D.7 (*)0

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

- a. $\cos x > 0$ b. $\sin x > 0$ c. $\sin x < -\frac{1}{2}$

Exercice D.8 (*)0

On considère l'ensemble E de nombres défini par :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Donner l'ensemble de nombres formé par l'ensemble des mesures principales des angles de l'ensemble E .
 2. Montrer que tous les nombres de E vérifient l'équation suivante :

$$\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice D.9 (*)0

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

- a. $\sin(3\pi+x)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$
 c. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$
 e. $\sin(\pi-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
 f. $3 \cdot \sin(\pi+x) - 2 \cdot \sin(\pi-x) + 4 \cdot \sin(x-\pi)$

Exercice D.10 (*)0

1. A l'aide de la représentation du cercle trigonométrique :

a. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble E :

$$E = \left\{ \cos x \mid x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right] \right\}$$

Exprimer l'ensemble E sous forme d'un intervalle.

b. Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble F :

$$\left\{ \sin x \mid x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right] \right\}$$

Exprimer l'ensemble F sous forme d'un intervalle.

2. Graphiquement et en s'aidant de la représentation du cercle trigonométrique, donner l'ensemble des solutions de chacune des inéquations ci-dessous :

- a. $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ c. $\cos x < 0$

Exercice D.11 (*)0

Lorsque k décrit l'ensemble \mathbb{Z} , alors l'expression $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ décrit un ensemble de nombre qu'on note E et qui peut s'écrire sous la forme :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Donner les mesures principales des angles représentés par cet ensemble.
 2. Vérifier que chaque nombre de l'ensemble E vérifie l'équation : $\cos 2x = 0$

Exercice D.12 (*)0

1. Résoudre dans l'ensemble $]-\pi; \pi]$ des mesures principales, les équations suivantes :

- a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{1}{2}$
 c. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\tan x = -1$

Exercice D.13 (*)0

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

- a. $2 \cdot \cos 2x = 1$ b. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 c. $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ d. $\sin 3x = \cos x$

Exercice D.14 (*)0

Résoudre, dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

- a. $2 \cos 2x = 1$ b. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 c. $\cos 2x = \cos x$ d. $\sin 3x = \cos x$

Exercice D.15 (*)0

1. a. Résoudre l'équation : $2x^2 + 7x + 3 = 0$.
 b. Résoudre l'équation ci-dessous dans $]-\pi; \pi]$:
 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
 $2 \cdot (\sin 2x)^2 + 7 \cdot \sin 2x + 3 = 0$

Exercice D.16 (*)0

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

- a. $\left\{ \cos x \mid x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$
 b. $\left\{ \sin x \mid x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \right\}$

2. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$:

- a. $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ c. $\cos x < 0$

Exercice D.17 (*)0

1. En remarquant que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$

Exercice D.18 (*)0

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin b$$

Exercice D.19 (*)0

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$
 2. $\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 3x$

Exercice D.20 (*)0

1. Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{(\sin 3x)^2}{\sin(2x) \cdot \sin(x)}$$

3. Résoudre, dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = \cos \frac{\pi}{7}$$

Exercice D.21 (*)0

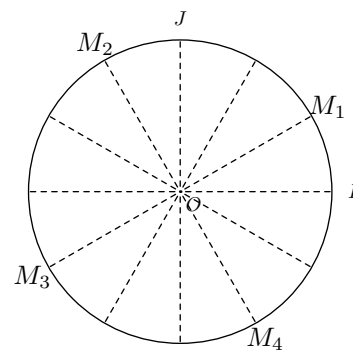
Résoudre, dans $]-\pi; \pi]$, les équations ci-dessous :

- a. $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ b. $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
 c. $\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{4}$ d. $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

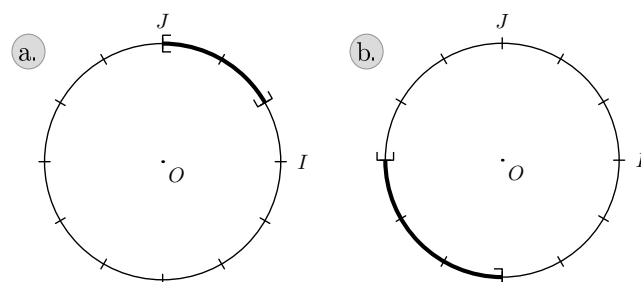
Exercice D.22 (*)0

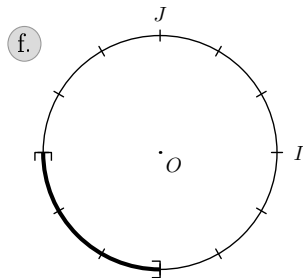
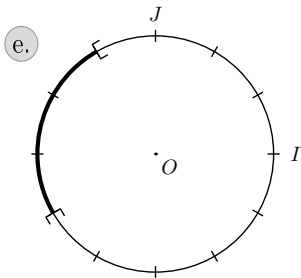
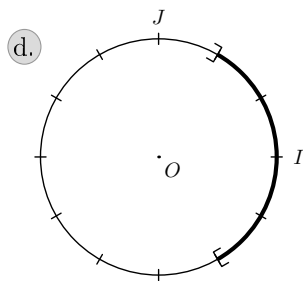
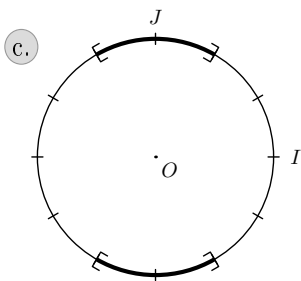
Dans l'ensemble de cet exercice, le cercle trigonométrique a été partagé en 12 parties égales.

1. Déterminer la mesure, en radian, des angles $(\vec{OI}; \vec{OM}_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$.

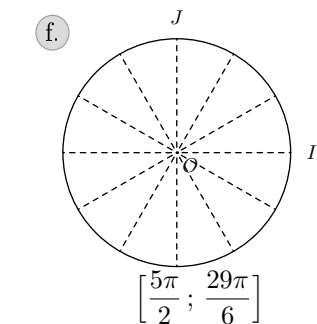
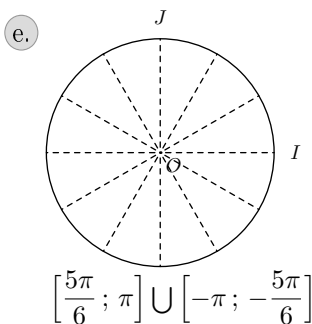
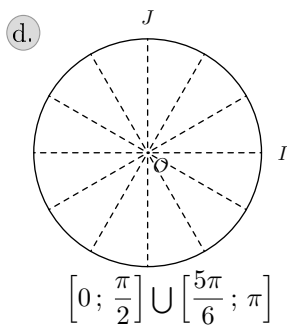
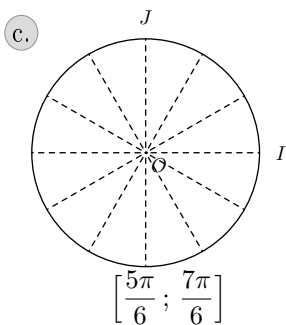
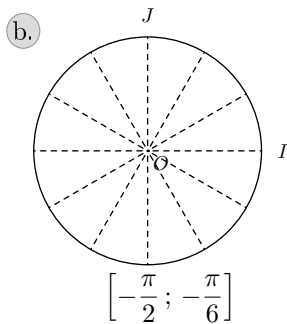
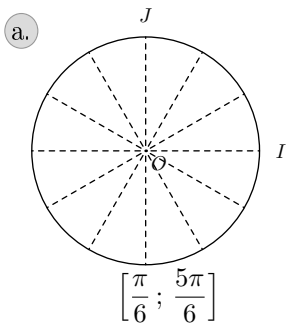


2. Pour chaque question, une partie du cercle trigonométrique a été surlignée. Ecrire, sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des mesures de l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ lorsque M décrit chacune de ces parties :



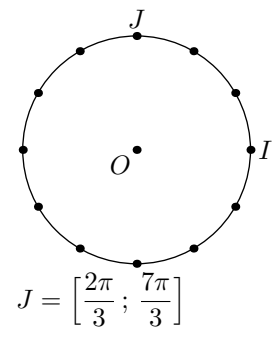
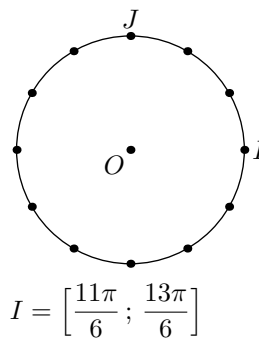


3. Pour chaque question, surligner l'ensemble des points M du cercle dont l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ appartient à l'intervalle indiqué :



Exercice D.23 (*)0

1. a. Pour chaque question, représenter sur le cercle l'ensemble des points repérés par un angle appartenant à l'intervalle donnée :



b. Donner l'expression de chacun de ses intervalles à l'aide de réunions d'intervalle exprimé par des mesures principales.

2. Associer chacun des intervalles de la ligne du haut avec un ensemble de la ligne du bas :

a. $[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}]$

b. $[\frac{23\pi}{6}; \frac{14\pi}{3}]$

c. $[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{6}]$

α. $]-\pi; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$

β. $]-\pi; -\frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$

γ. $[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}]$

Exercice D.24 (*)0

On considère les deux intervalles de nombres réels :

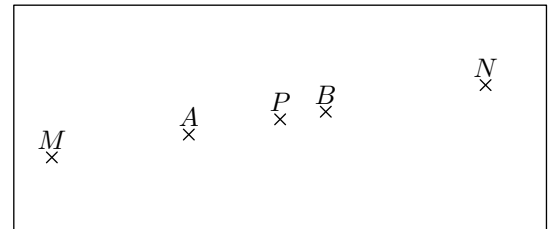
a. $I = [-\frac{19\pi}{6}; -\frac{11\pi}{4}]$

b. $J = [\frac{20\pi}{3}; \frac{49\pi}{6}]$

Supposons que ces deux intervalles représentent des mesures d'angles orientées; exprimer chacun de ces deux intervalles à l'aide des mesures principales associées de ces angles.

Exercice D.25 (*)0

On considère, dans le plan, cinq points M, A, P, B, N alignés dans cet ordre.



1. Déterminer la mesure des angles suivant :

a. \widehat{MAMB}

b. \widehat{PAPB}

c. \widehat{NANB}

d. \widehat{ABMP}

e. \widehat{ABPM}

2. Sur la figure ci-dessus, déterminer le lieu géométrique du Q vérifiant respectivement :

a. $(\vec{QA}; \vec{QB}) = \pi + 2k\pi$

b. $(\vec{QA}; \vec{QB}) = 0 + 2k\pi$

Exercice D.26 (*)0

Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant les relations suivantes : faire une représentation d'une telle situation en précisant les emplacements possibles du point M .

a. $(\vec{MA}; \vec{MB}) = \pi + 2k\pi$

b. $(\vec{MA}; \vec{MB}) = 0 + 2k\pi$

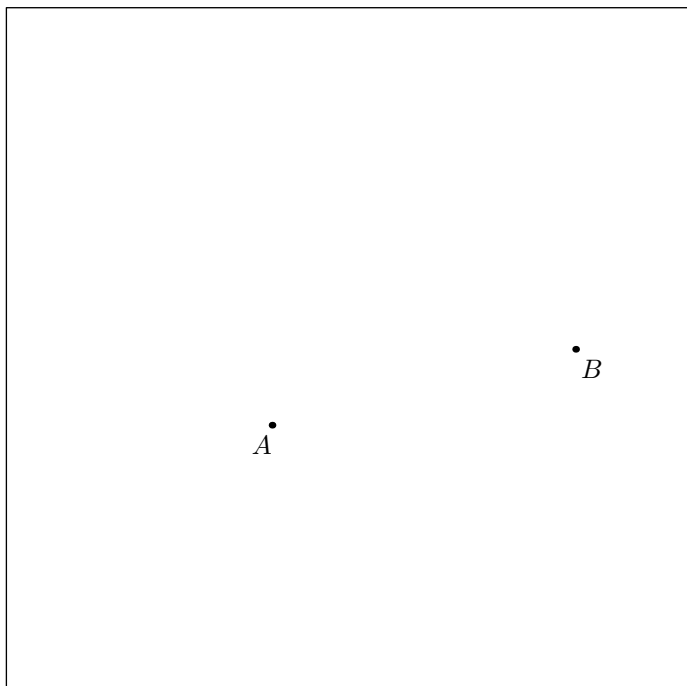
c. $(\vec{MA}; \vec{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

d. $(\vec{MA}; \vec{MB}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

e. $(\vec{MA}; \vec{MB}) = \pi + k\pi$

Exercice D.27 (*)0

On considère ci-dessous deux points A et B du plan :



Toutes les constructions demandées ne doivent être effectuées qu'à l'aide du compas et de la règle non-graduée. Les traits de constructions doivent rester présent sur la figure.

- Placer un point C vérifiant : $(\vec{CA}; \vec{CB}) = \frac{\pi}{3}$
- Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC .
- Mettre en évidence le lieu des points M vérifiant la relation suivante : $(\vec{MA}; \vec{MB}) = \frac{\pi}{3}$
Quel est le théorème utilisé?

Exercice D.28 (*)0

- a. Compléter le tableau ci-dessous :

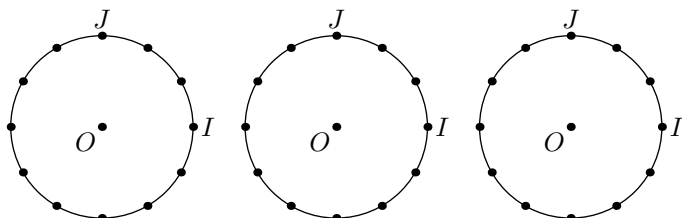
k	-2	-1	0	1	2
$\frac{\pi}{3} + k\pi$					

- Sur un des cercles trigonométrique ci-dessous, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation : $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation précisée :

- $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$
- $2(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{-2\pi}{3} + k\pi$

Les cercles suivants ont été partagés en douze parties égales.



Exercice D.29 (*)0

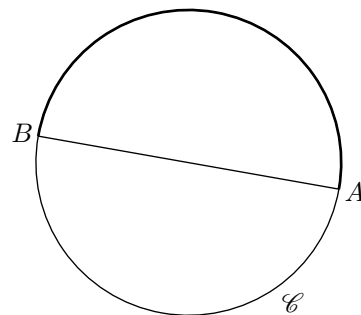
On considère les expressions suivantes, où k est un entier relatif :

- $\frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
- $\pi + \frac{k\pi}{3}$
- $\frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M , lorsque k décrit \mathbb{Z} , du cercle trigonométrique repérés par cette mesure d'angle .

Exercice D.30 (*)0

On représente ci-dessous un cercle de diamètre $[AB]$.



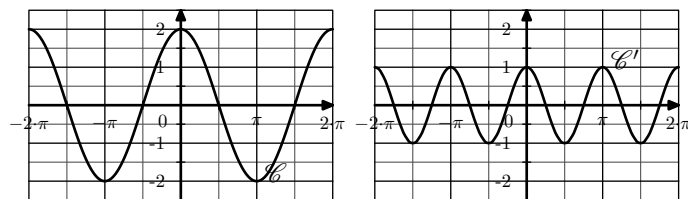
- Soit M un point du demi-cercle mis en gras sur la figure. Donner la mesure de $(\vec{MA}; \vec{MB})$.
- Déterminer l'ensemble des points N du plan vérifiant : $(\vec{NA}; \vec{NB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Quel sont les deux théorèmes utiles pour cet exercice?

Exercice D.31 (*)0

On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \cos(2x)$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



Exercice D.32 (*)0

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n , on pose :

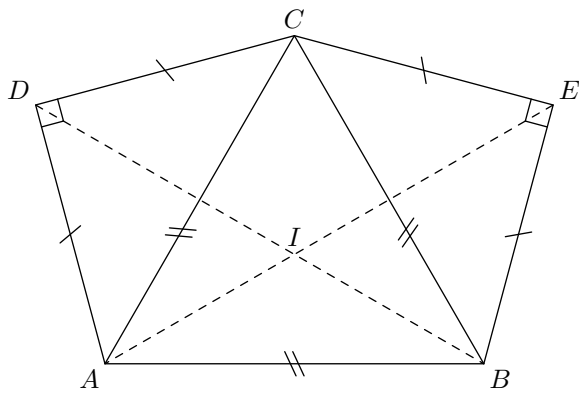
$$u_n = \sin(a_n).$$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie :

Proposition : "On peut choisir la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$."

Exercice D.33 (*)0

On considère la configuration ci-dessous où ABC est un triangle équilatéral, DCA et CEB sont des triangles isocèles rectangle respectivement en D et E .



1. Donner la mesure principale en radian des angles suivants :

- a. $(\vec{AD}; \vec{AC})$ b. $(\vec{AC}; \vec{AB})$
 c. $(\vec{BA}; \vec{BE})$ d. $(\vec{DC}; \vec{AD})$

2. a. Justifier que (DB) est la hauteur du triangle ADC issue de D et du triangle ABC issue de B .

b. Donner la mesure principale en radian des angles suivants :
 $(\vec{IA}; \vec{IB})$; $(\vec{IB}; \vec{IE})$

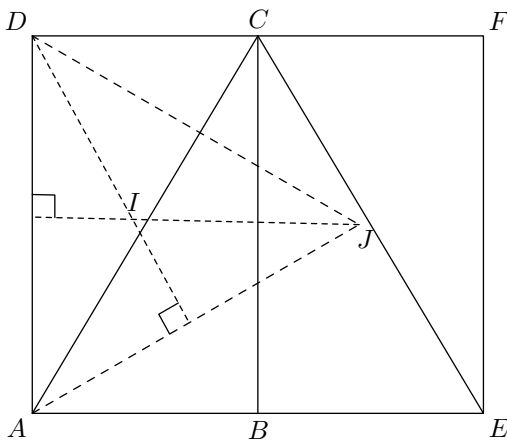
3. A l'aide de la relation de Chasles, déterminer la mesure principale en radian des angles suivants :

- a. $(\vec{CD}; \vec{AB})$ b. $(\vec{DC}; \vec{AB})$ c. $(\vec{IB}; \vec{CE})$

Exercice D.34 (*)0

On considère un triangle AEC équilatéral inscrit dans le rectangle $AEFD$. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I son centre.

Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement; le but de l'exercice est de montrer que le point I et J appartiennent respectivement aux segments $[AC]$ et $[BC]$.



On utilisera la propriété suivante :

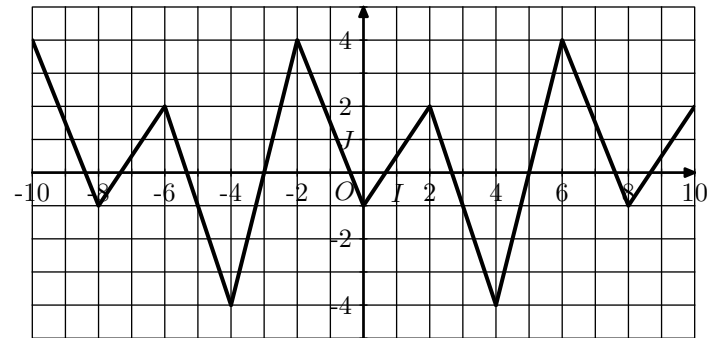
$$(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) \implies \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

1. a. Justifier que : $(\vec{AC}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{6}$.
 b. Justifier que l'angle au centre $(\vec{IA}; \vec{ID})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$.
 c. En déduire que les vecteurs \vec{AI} et \vec{AC} sont colinéaires.
2. a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en C .
 b. En déduire la mesure de l'angle $(\vec{CA}; \vec{CJ})$.

c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.

Exercice D.35 (*)0

Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} :



La fonction f est périodique de période T .

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur définissant une translation par laquelle la courbe \mathcal{C}_f est invariante.
 b. Déterminer la valeur de T .
2. Donner l'image, par la fonction f , des nombres suivants :
 a. 14 b. -16 c. 56 e. 58

Exercice D.36 (*)0

Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

- a. $f(x) = \sin(6x-3)$; $T = \frac{\pi}{3}$
 b. $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $T = \pi$
 c. $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$; $T = \pi$
 d. $f(x) = \left| \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right|$; $T = \frac{\pi}{2}$

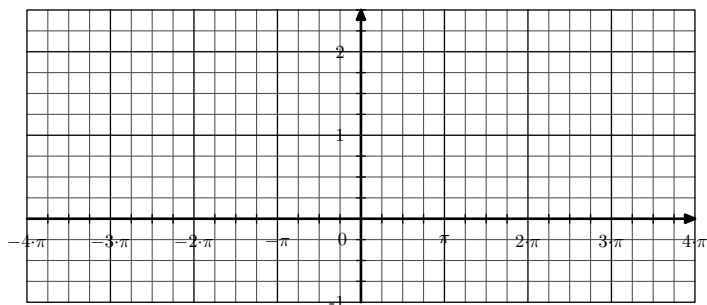
Exercice D.37 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \cos x + [\cos(x)]^2$$

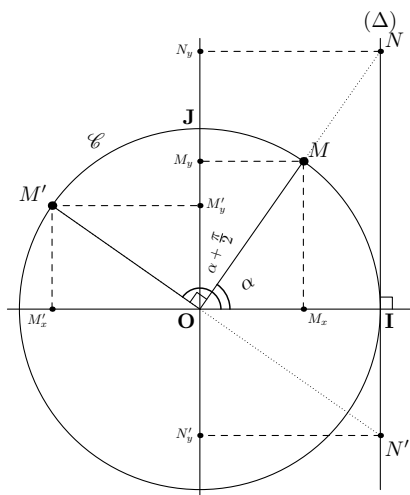
On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Etudier la parité de la fonction f .
2. Etudier la périodicité de la fonction f .
3. a. En étudiant les images des nombres suivants :
 0 ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$
 et en admettant les propriétés suivantes :
 • f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$;
 • f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$;
 • \mathcal{C}_f admet les tangentes horizontales aux points d'abscisse :
 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $-\frac{4\pi}{3}$
 effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f sur $[0; +\infty[$.
 b. Prolonger ce tracé à l'ensemble du graphique.

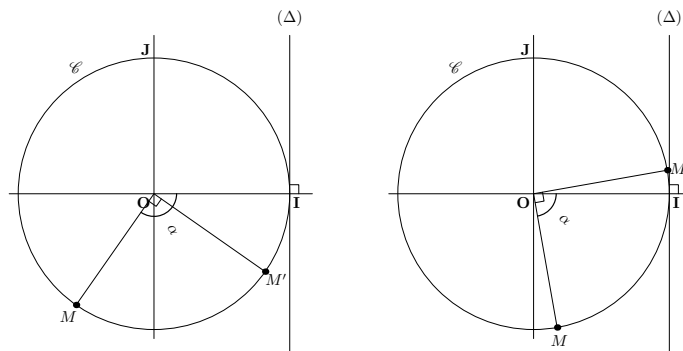
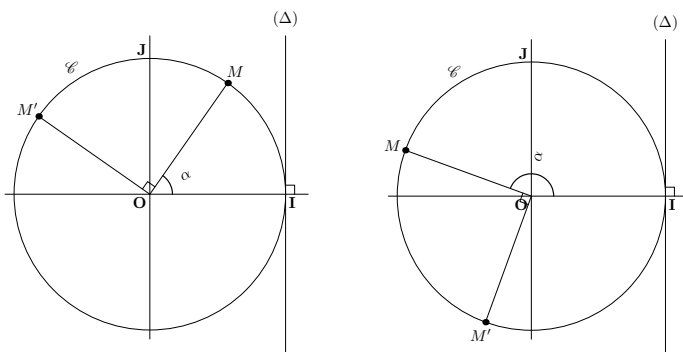


Exercice D.38 (*)0

Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'(\alpha + \frac{\pi}{2})$ du cercle trigonométrique.



1. A l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$.
2. a. Par quel transformation, le triangle OMM_x a pour image le triangle $OM'M'_y$?
 b. En déduire les valeurs de $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ et $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.
3. Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question 2. quel que soit la valeur de l'angle α :



	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
$\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$			
$\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$			

	$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$	$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$	$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$
$\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$			
$\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$			

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\tan \alpha.$$

Question subsidiaire :

Nous allons montrer d'une autre manière que :

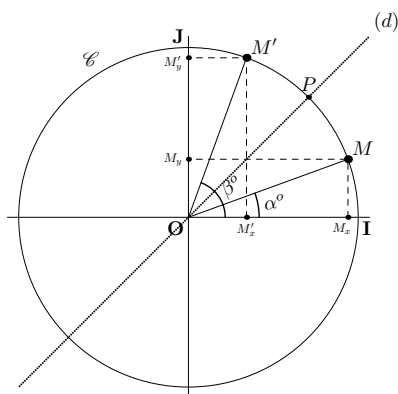
$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} :$$

4. a. Exprimer ON en fonction de α .
 b. En utilisant le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, exprimer la valeur de ON' en fonction de α
 c. En déduire l'aire du triangle ONN' .
5. En utilisant le fait que (OI) est la hauteur du triangle ONN' issue de O , calculer d'une seconde manière l'aire du triangle ONN' .
6. Etablir la formule suivante :

$$IN' + \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}$$
7. En déduire la relation : $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$.

Exercice D.39 (*)0

Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère le cercle \mathcal{C} trigonométrique : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.



On note les points M et M' respectivement repéré par les angles complémentaires α et β ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$). On note :

$$M(\alpha) \text{ et } M'(\beta)$$

On note (d) la bissectrice de l'angle \widehat{JOI} et P le point d'intersection de \mathcal{C} avec (d)

1. Dans cette question, nous allons montrer que les deux points M et M' sont symétriques relativement à la droite (d) . Pour cela, notons N le symétrique du point M par rapport à la droite (d) :

- Justifier que le point N est un point du cercle \mathcal{C} .
- Donner la mesure de l'angle \widehat{JON} en fonction de α .
En déduire que le point N appartient à la demi-droite $[OM']$.
- Justifier que le symétrique de M relativement à la droite (d) est le point M' .

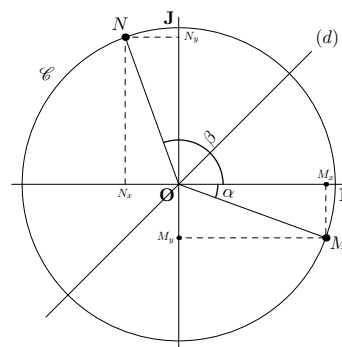
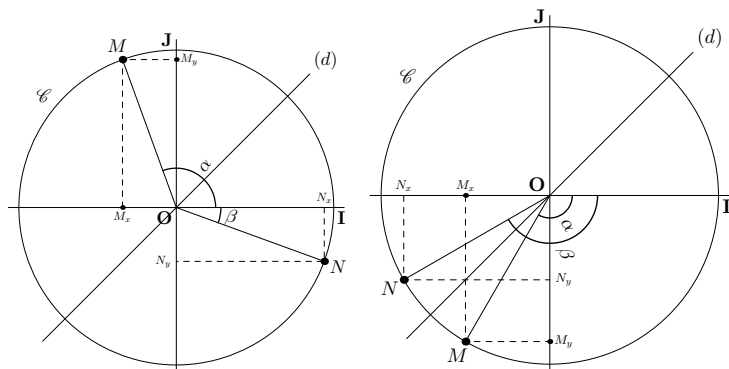
On note M_x (resp. M'_x) le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_y (resp. M'_y) le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point M (resp. M')

2. a. Etablir des liens entre les coordonnées des points M et M' dans le repère $(O; I; J)$.

b. En déduire les relations suivantes :

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad ; \quad \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaires, il faut aussi voir ce qui se passe si le point M se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points M et N du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles α et β ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :



3. a. Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :

Les angles α et β sont complémentaires si, et seulement si, les points M et N sont symétriques relativement à la droite (d)

b. Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de α , les égalités suivantes :

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad ; \quad \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

4. En déduire la relation liant $\tan \alpha$ et $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

E. Fonctions numériques :

Exercice E.1 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$$

- Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
- En traçant la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice, faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x)$$

3. a. Etablir la relation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{-5}{4x + 2} + \frac{3}{2}$$

b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

4. a. Que peut-on dire du signe de $3x - 1$ lorsque x se rapproche de $-\frac{1}{2}$?

b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x)$$

Exercice E.2 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 3}{3x - 1}$$

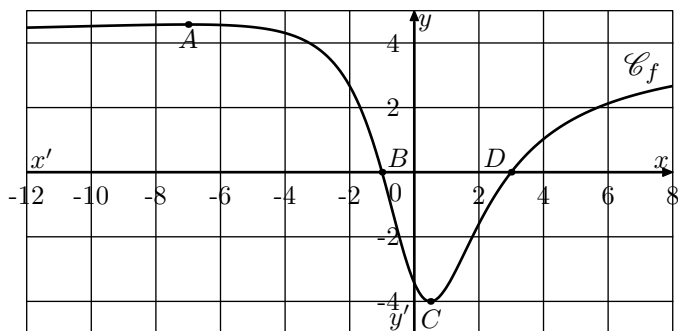
- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice.
 - En effectuant des "Zoom out", observer l'allure de la courbe au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Que pouvez-vous dire sur l'allure de la courbe?
- Etablir la relation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{3}{3x - 1} + x$$

- Donner la valeur des limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$
- En déduire les observations faites à la calculatrice.

Exercice E.3 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :

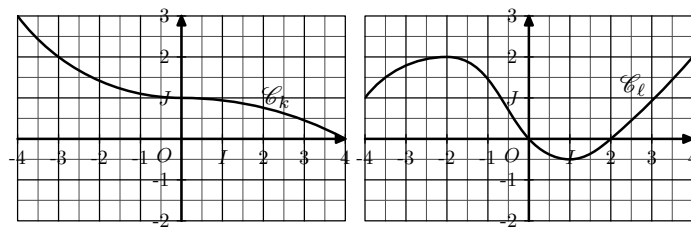
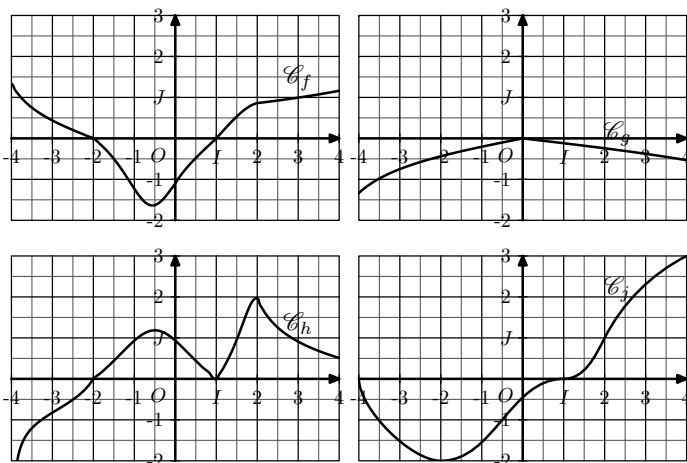


- La courbe \mathcal{C}_f admet deux tangentes horizontales aux points A et C d'abscisses respectives -7 et $\frac{1}{2}$;
- La courbe \mathcal{C}_f intercepte l'axe des abscisses aux points B et D de coordonnées respectives $(-1; 0)$ et $(3; 0)$.

- On considère la fonction g qui admet pour dérivée la fonction f ($g' = f$). Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- On considère la fonction h qui est la dérivée de la fonction f ($f' = h$). Dresser le tableau de signes de la fonction h .

Exercice E.4 (*)0

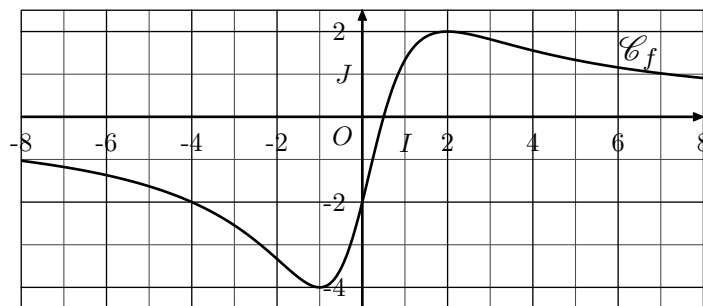
On considère les six fonctions f, g, h, j, k, l définies sur $[-4; 4]$ dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



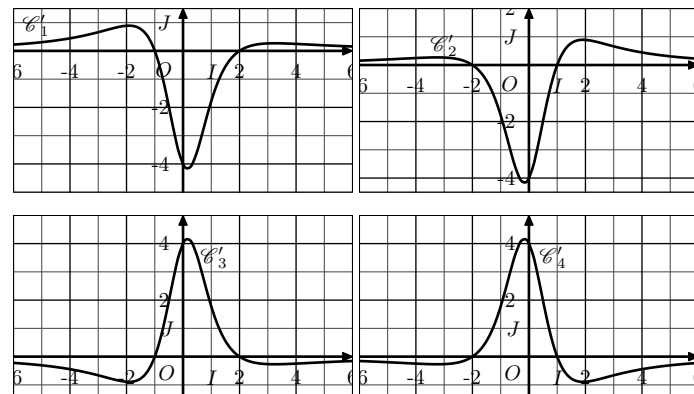
Associer à trois de ces fonctions leurs trois dérivées respectives.

Exercice E.5 (*)0

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} qui admet dans le repère $(O; I; J)$ la courbe \mathcal{C}_f pour représentation :



Parmi les quatre courbes $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3$ et \mathcal{C}'_4 présentées ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction f' , dérivée de la fonction f . Justifier votre choix :



Exercice E.6 (*)0

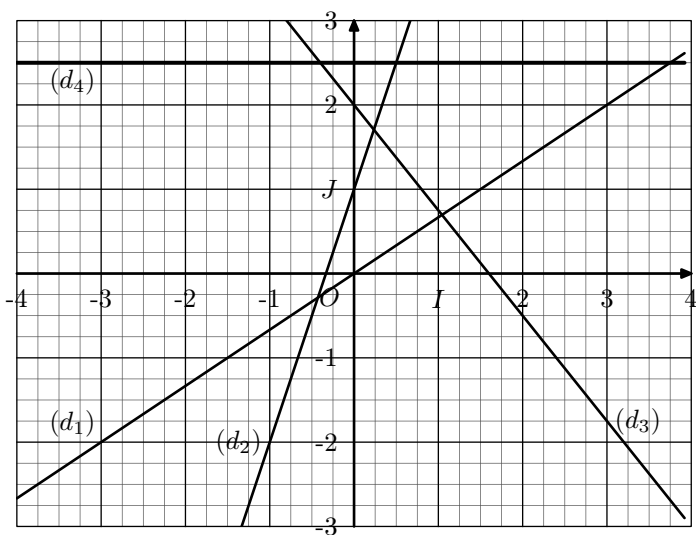
On considère la fonction f polynomiale de degré 2 qui vérifie les deux conditions ci-dessous :

- L'ensemble des zéros de la fonction f est : $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$
- $f'(1) = 5$

Déterminer l'expression développée et réduite de la fonction f .

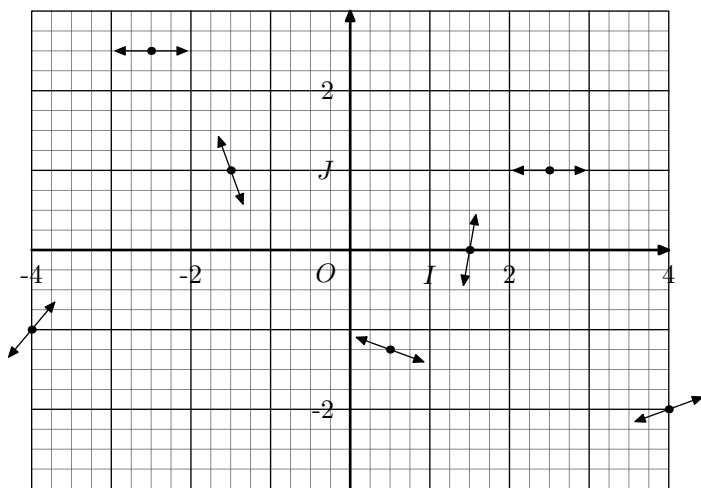
Exercice E.7 (*)0

Déterminer les coefficients directeurs des quatre droites représentées ci-dessous :



Exercice E.8 (*)0

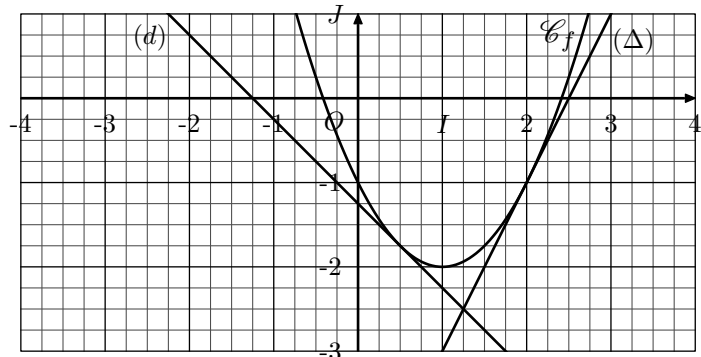
Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiqués et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :



Exercice E.9 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :
 $f(x) = x^2 - 2x - 1$

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé. On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de f .



On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 2.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe \mathcal{C}_f ayant respectivement $\frac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.
2. Graphiquement :
 - a. Déterminer les coefficients directeurs des droites (d)

et (Δ) .

- b. Déterminer les équations réduites des droites (d) et (Δ) .

Exercice E.10 (*)0

Déterminer les limites ci-dessous :

- | | |
|--|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (2x + 1)$ | b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 4x)(x + 1)$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 2x + \frac{3}{2x + 1}$ | d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{5 + \frac{1}{x}}$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x - 1}$ | f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x}$ |

Exercice E.11 (*)0

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée; donner la valeur des autres limites :

- | | |
|--|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 - x^3$ | b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 2x^2$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5 - 2x}$ | d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 + x^2}$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}$ | f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x^4 + x}$ |

Exercice E.12 (*)0

Déterminer les limites ci-dessous :

- | | |
|---|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{5 - 3x}$ | b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 1}$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 - 4x + 7}$ | d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3}{5 - 3x^2}$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 4}$ | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} - 5x^{44} + x^{14}}{3x^{102} - 5x^{56}}$ |

Exercice E.13 (*)0

Déterminer chacune des limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 - 7x$ | b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - 5x^6}{2}$ | d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - x^3 + 2}{-2x^2 - x + 2}$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 5}{x^4 + 3x + 1}$ | f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{-3x^2 + 5x - 1}$ |

Exercice E.14 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 - 2x + 3}$$

1. Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.
Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .
2. Etablir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-6x + 3}{(2x^2 - 2x + 3)^2}$$
3. a. Dresser le tableau de signes de f' sur \mathbb{R} .
 b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 On admettra les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

4. En déduire les extrémums de la fonction f .

Exercice E.15 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par l'expression :

$$f(x) = (5x^2 + 5x - 4) \cdot \sqrt{x}$$

1. Etablir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25 \cdot x^2 + 15 \cdot x - 4}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

2. Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur \mathbb{R}_+ .

3. En admettant les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice E.16 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par l'expression :

$$f: x \mapsto \sqrt{x} \cdot (-5x^2 - 5x - 1) + \frac{1}{2}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f .

2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

On admet la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3. a. Justifier que la fonction f s'annule une seule fois sur son ensemble de définition.

- b. Justifier, à l'aide de valeur approchée, que la fonction f s'annule entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{15}{100}$.

Exercice E.17 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 14x}{(2x^2 + x + 1)^2}$$

- b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

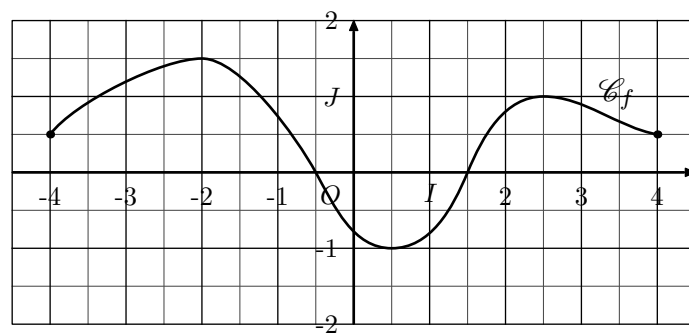
On admet les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2 .

Exercice E.18 (*)0

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



On répondra à l'ensemble des questions de cet exercice en se référant au graphique ci-dessus.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-4; 4]$.

2. a. On considère la tangente (T_1) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -3 . Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_1) .

- b. On considère la tangente (T_2) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 . Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_2) .

- c. On considère la tangente (T_3) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -2 . Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_3) .

3. a. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x = -1$?

- b. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x = 2$?

- c. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x = 2,5$?

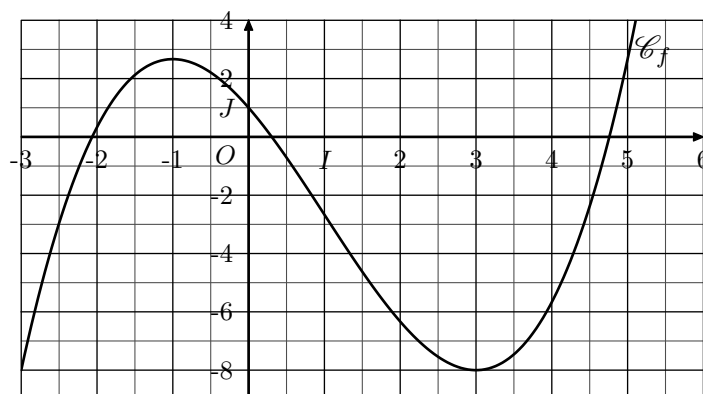
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Dresser le tableau de signes de la fonction f' .

Exercice E.19 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^2 - 3x + 1$$

La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthogonal ci-dessous :



1. Graphiquement, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3; 6]$. (on n'indiquera pas les valeurs des images)

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' .

- b. Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur \mathbb{R} .

3. Que remarque-t-on?

Exercice E.20 (*)0

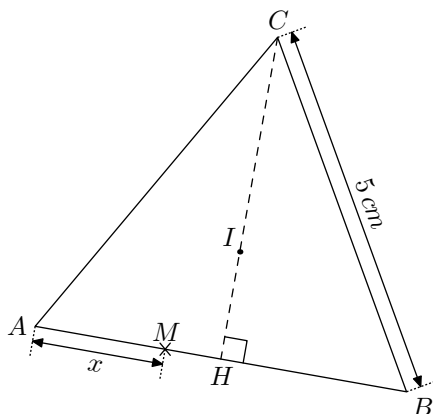
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 1}$$

- Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
 - Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
On admettra les deux limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- La fonction f admet-elle des extrémums? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

Exercice E.21 (*)0

On considère un triangle ABC équilatéral de côté 5 cm où le point I est le centre de gravité :



On considère un point M décrivant le triangle ABC ; on repère la position du point M sur le triangle à l'aide du nombre x représentant la longueur parcourue le long du triangle ABC par le point M à partir du point A :

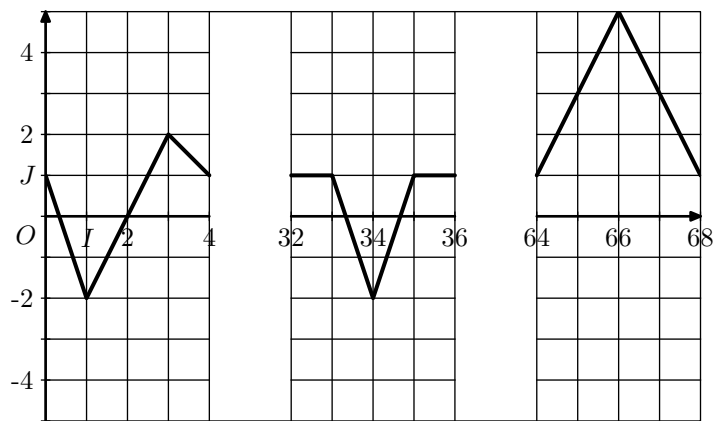
- x est positif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A \rightarrow B$ à partir du point A ;
- x est négatif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A \rightarrow C$ à partir du point A ;

On note f la distance IM mesurée en fonction de la valeur de x :

- Etudions la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$:
 - Montrer que l'image de x par la fonction f vérifie la relation suivante :
$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 + \frac{25}{9}}$$
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 5]$
- Emettre une conjecture quant à la périodicité de la fonction f .

Exercice E.22 (*)0

On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous est donnée quelques parties de la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f :



- Reconstruire le tracé de \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[0; 12]$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[38; 50]$.

Exercice E.23 (*)0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x}$$

- Montrer que : $f(10^{-2}) = \frac{101}{302}$
 - Montrer que : $f(10^{-2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{906}$
- Pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) :
 - Montrer que : $f(10^{-n}) = \frac{10^n + 1}{3 \times 10^n + 3}$
 - Montrer que : $f(10^{-n}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9 \times 10^n + 6}$
- A l'aide de la question 2. b), compléter le tableau ci-dessous :

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$f(x)$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{96}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{906}$			

 - En déduire la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(10^{-n})$

Exercice E.24 (*)0

Première approche de la notion de limite et de convergence :

Pour une valeur (*terme d'une suite ou image par une fonction*) assujéti à la variation d'un paramètre (*rang du terme ou variation de la variable*) lorsque celle-ci se "stabilise" vers une valeur, on parle alors de **convergence**.

Dans le cas d'une convergence, on parlera de **valeur limite**

- Saisir le code suivant dans votre éditeur Python :

```
x=1;
for i in range(1,10):
    x=x/10
    y=(x*x+x)/(2*x*x+3*x)
    print(x, "\t", y)
```

- Après l'exécution de ce code et en analysant l'affichage de la console, répondre aux questions suivantes :
 - Les valeurs successives prises par la variable x semble se stabiliser vers quelles valeurs?
 - Même question, pour les valeurs successives de la variable y ?

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x}$$

Le tableau de valeurs, ci-contre, de la fonction f présente des valeurs de x se stabilisant vers 0, on remarque que leurs images convergent vers $\frac{1}{3}$.

x	$f(x)$
1	0,4
0,1	0,34375
0,01	0,33343708...
0,001	0,33334444...
0,0001	0,33333444...
0,00001	0,33333334...

On peut conjecturer que "la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 a pour valeur $\frac{1}{3}$ " et on note: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$

2. A l'aide du programme précédent, conjecturer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x}$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{x^2}$

Exercice E.25 (*)0

On considère trois fonctions f , g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2x^2+x}{5x}$$

1. Vérifier l'exactitude des égalités suivantes :

$$f(0,01) = \frac{2,01}{3,00101} \quad ; \quad g(0,0001) = \frac{-0,9998}{0,01} \quad ; \quad h(0,01) = \frac{0,0102}{0,05}$$

2. On donne, ci-dessous, les tableaux de valeurs des fonctions f , g et h :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2,1}{3,01}$	$\frac{2,01}{3,0001}$	$\frac{2,001}{3,00001}$	$\frac{2,0001}{3,000001}$

x	1	0,01	0,0001	0,000001
$g(x)$	1	$\frac{-0,98}{0,1}$	$\frac{-0,9998}{0,01}$	$\frac{-0,999998}{0,001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0,12}{0,5}$	$\frac{0,0102}{0,05}$	$\frac{0,001002}{0,005}$	$\frac{0,00010002}{0,0005}$

Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des valeurs arrondies au dix-millième près :

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1			
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
0,00001			
0,000001			

3. Conjecturer la valeur des trois limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

Exercice E.26 (*)0

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f: x \mapsto x^2 + \cos x$

b. $g: x \mapsto \sin(2x)$

c. $h: x \mapsto \cos x \cdot \sin x$

d. $j: x \mapsto (\sin x)^2$

Exercice E.27 (*)0

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

b. $g(x) = (3x^2 - 2) \cdot (\sin x)^2$

c. $h(x) = \frac{3}{2 \cdot \cos x}$

d. $j(x) = \frac{\cos x}{3x + \sin x}$

Exercice E.28 (*)0

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions f , g , h définies ci-dessous :

a. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

b. $g(x) = (5x - 3)^3 \cdot \cos x$

c. $h(x) = \frac{\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)}{x^2}$

Exercice E.29 (*)0

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x \cdot \sin(3x + 1)$ b. $g(x) = \frac{2 \cdot \cos(2x)}{3 - \sin(1 - 2x)}$

Exercice E.30 (*)0

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{3 - x}$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{4 - x}{3 - 2x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x - 5)(7 - x)}{2x - 10}$

e. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

f. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4x - 4}{2x + 4}$

Exercice E.31 (*)0

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4 - 2x^2}{5x^2 - x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x^{12} + 5x^6 - 3x^2}{3x^8 - 5x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin x}$

Exercice E.32 (*)0

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 + x - 6}$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \sqrt{3 - 2x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 3x + 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2 + x}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 4^-} 5x + 3 - \frac{2}{x - 4}$

Exercice E.33 (*)0

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ b. $\lim_{x \rightarrow -2^+} 3x - 2 - \frac{2x+1}{2+x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 + x) \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \right)$ d. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{10x^2 + x - 2}{-2x^2 - 5x - 2}$

Exercice E.34 (*)0

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+5}{4-2x}$
 c. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ d. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-5}{3x^2-11x+6}$
 e. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$ f. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

Exercice E.35 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- a. Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

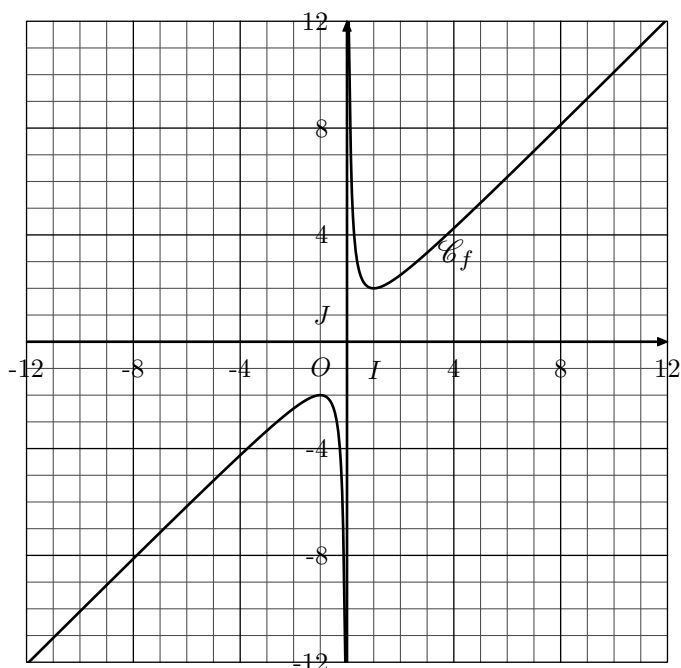
- b. Que peut-on dire de la valeur de " $f(x)$ " lorsque " x " grandit énormément?

- a. Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

- b. Que peut-on dire de la valeur de " $f(x)$ " lorsque " x " reste positif mais en devenant de plus en plus petit?

Ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormée :



- Interpréter graphiquement les résultats de la question 3.

Exercice E.36 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- a. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

x	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{40\pi}$	$\frac{1}{272\pi}$
$f(x)$				

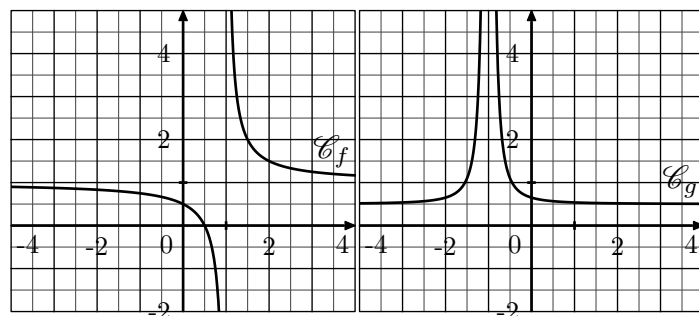
- b. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{41\pi}$	$\frac{2}{(2^{101}+1)\pi}$
$f(x)$				

- c. Peut-on parler de limite pour cette fonction lorsque x se rapproche de 0?
- Effectuer le tracé de la courbe représentative \mathcal{C}_f de cette fonction puis effectuer un zoom sur l'origine du repère. Que voyez-vous?

Exercice E.37 (*)0

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g :

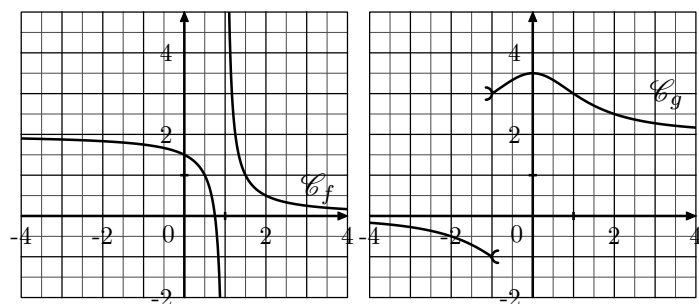


Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ f. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$

Exercice E.38 (*)0

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ f. $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$

Exercice E.39 (*)0

On considère la fonction f définie par :

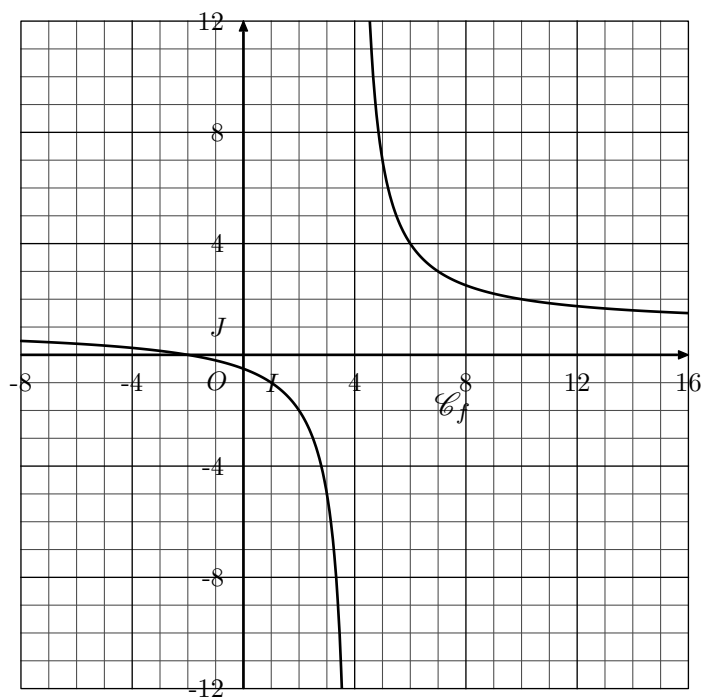
$$f: x \mapsto \frac{x+2}{x-4}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-4}$$

- A l'aide de l'expression obtenue à la précédente question :
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment ?
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4; 5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4 ?
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3; 4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4 ?

Ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormée :



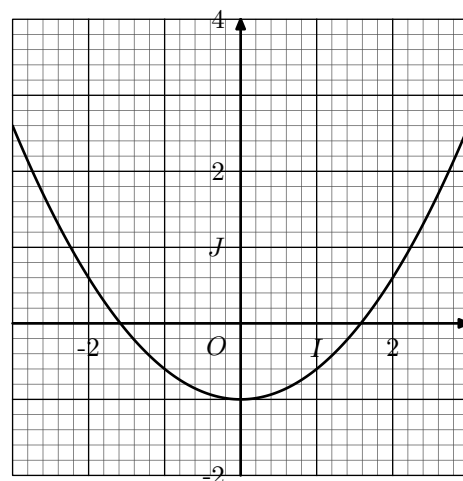
- Interpréter graphiquement les résultats précédemment obtenus.

Exercice E.40 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé donné ci-contre :



Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de la tangente, notée (T) , à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

- Montrer que pour h un nombre réel non-nul, on a : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \cdot h$.
 - En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.
- Justifier que l'expression de la tangente (T) est de la forme : $y = \frac{4}{5} \cdot x + b$
 - Donner les coordonnées du point appartenant à la courbe \mathcal{C}_f ayant pour abscisse 1.
 - Déterminer l'expression réduite de la tangente (T) .
- Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice E.41 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Exercice E.42 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{-2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} \frac{3x^2 - 1}{12x^2 + 23x + 10}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2 + x + 6}{4x^2 + 16x + 16}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{8 - x\sqrt{x}}{x - 4}$

Indication pour la question f. , déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant la factorisation suivante :

$$64 - x^3 = (x - 4)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

Exercice E.43 (*)0

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$

Exercice E.44 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^3 - 2}$ b. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x - 2}{-2x^2 + 7x - 3}$
- c. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{2+x}$ d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 12x + 9}{-x^2 + 5x - 6}$
- e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{2x^2 + 1}$ f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{2x^2 + 1}$

Exercice E.45 (*)0

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{x}}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^2}{x - 1}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin x}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$
- e. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{6-x} - 3}{2x^2 + 5x - 3}$ f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x\sqrt{x}}$

Exercice E.46 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 2x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x$
- c. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4 - 2\sqrt{x}}{x - 4}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 2} - x$
- e. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2 - 4x + 2}$

Exercice E.47 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^4 + 2x$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} \right) (3x^2 - 2x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 - 3x^2}{3x^2 + 7x}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sqrt{x}}{2x + 3}$

Exercice E.48 (*)0

Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$
- c. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2}{(x+5)^2}$ d. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{\sqrt{-x-2}}$
- e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1$ f. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{2x+2}$

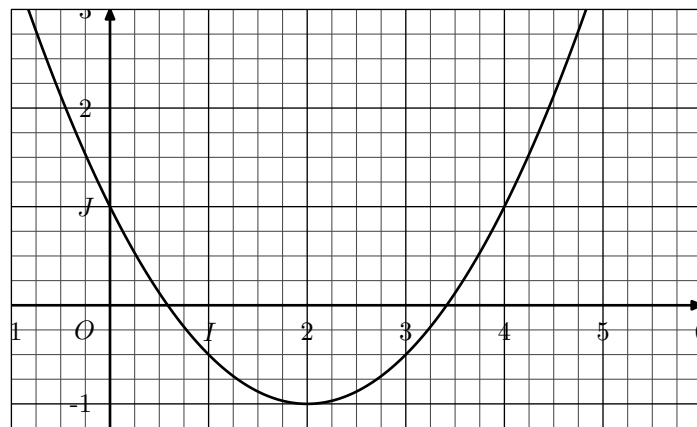
Exercice E.49 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$$

1. a. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(4+h) - f(4) = \frac{1}{2} \cdot h^2 + 2 \cdot h$$
- b. Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$
2. Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



- a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y = 2x - 7$
- b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe \mathcal{C}_f dont on précisera le point de contact.

Exercice E.50 (*)0

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = (\cos x)^2$ b. $g(x) = \sin x + \cos x$
- c. $h(x) = \tan(x^2 + x)$ d. $j(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^2 - 1}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2 + x)}{x}$ d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin x}$

Exercice E.51 (*)0

Déterminons les nombres dérivés de quelques fonctions de référence pour $x = 3$

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 3 :

- a. Pour $x \neq 3$, établir l'égalité suivante : $\frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = x + 3$
- b. Soit f la fonction carré.

En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

2. Le nombre dérivé de la fonction inverse en 3 :

- a. Pour $x \neq 3$, établir l'égalité suivante : $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \frac{-1}{3x^2}$
- b. Soit g la fonction inverse.

En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$

3. Le nombre dérivé de la fonction racine carrée en 3 :

- a. Pour $x \neq 3$, établir que : $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$
- b. Soit h la fonction racine carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$

Exercice E.52 (*)0

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \sin x$

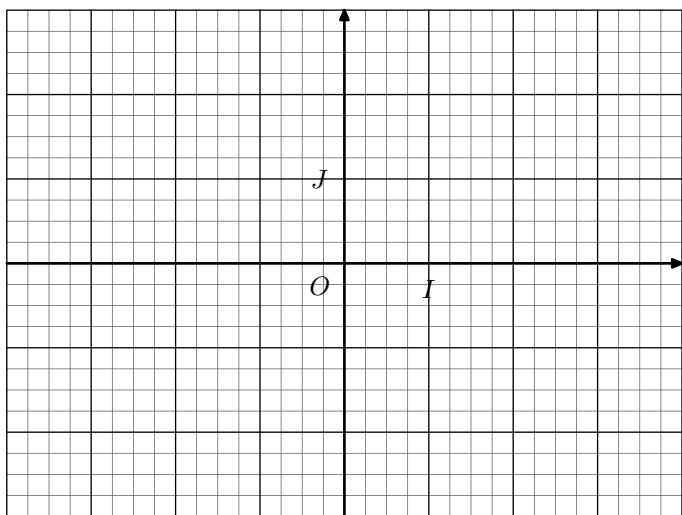
1. Donner le nombre dérivée de la fonction g en 0.

2. En déduire la valeur de la limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Exercice E.53 (*)0

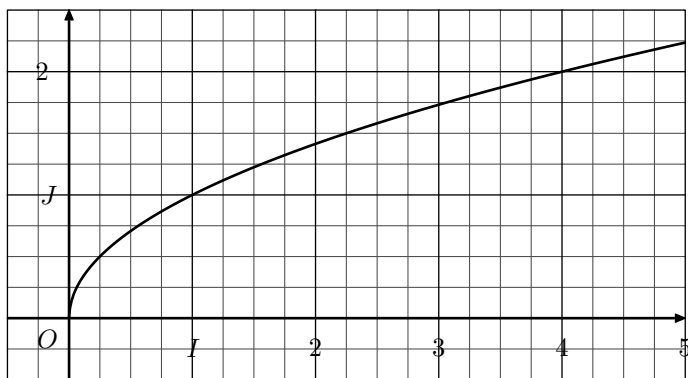
Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f admettant le tableau de valeurs et de nombres dérivés ci-dessous :

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	2,5	-2	2	0	-1,5
$f'(x)$	-2	0	0	-1	$\frac{5}{4}$



Exercice E.54 (*)0

On considère la courbe \mathcal{C} de la fonction racine carrée donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé.



1. Tracer la corde (\mathcal{D}) de la courbe \mathcal{C} passant par les points d'abscisse 2 et 4.

2. On considère la fonction u définie par: $u(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$

Justifier que le coefficient directeur de la corde (\mathcal{D}) est $u(2)$.

3. On considère la fonction v définie par: $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

a. Etablir l'égalité $u(x)=v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b. Les fonctions u et v sont-elles définies pour $x=4$?

4. a. Voici un tableau "presque" de valeurs pour chacune des fonctions u et v :

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$u(x)$	$\frac{0,1}{0,41}$	$\frac{0,01}{0,0401}$	$\frac{0,001}{0,004001}$	$\frac{0,0001}{0,00040001}$

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$v(x)$	$\frac{1}{4,1}$	$\frac{1}{4,01}$	$\frac{1}{4,001}$	$\frac{1}{4,0001}$

Donner les valeurs approchées à 10^{-5} des images par les fonctions u ou v dans le tableau ci-dessus.

b. Quelle valeur peut-on conjecturer pour la limite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} ?$$

Exercice E.55 (*)0

Déterminer les limites ci-dessous:

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - x}{1 - x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{-x^3}$

Exercice E.56 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x + 2$

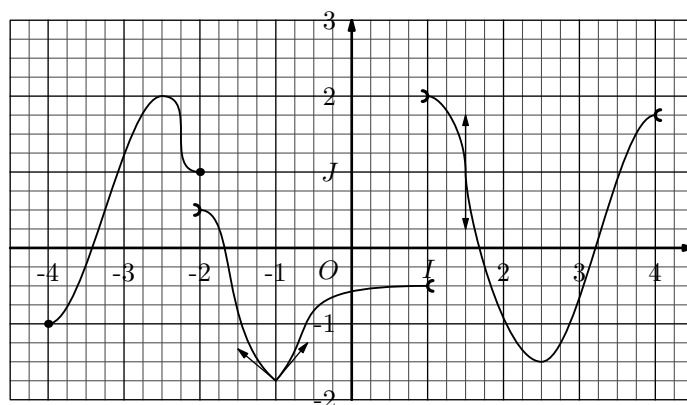
d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)(1 - x)$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{1}{x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x} + \frac{x}{x - 1}$

Exercice E.57 (*)0

Ci-dessous est donnée la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5:



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

3. Déterminer les limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres a tels que:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse a vérifiant une telle condition?

Exercice E.58 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par la relation :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

- Justifier que la fonction h n'est pas continue en 0.
- Déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x \neq 0}} f(x) ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \neq 0}} f(x)$$

Exercice E.59 (*)0

- On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer la valeur des deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$
- Peut-on dire que la fonction f est continue en 0?

- On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Justifier que la fonction g est continue en 0.

Exercice E.60 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{6x^2 - 11x + 3}$$

- Déterminer l'ensemble \mathcal{D}_f de définition de la fonction f .
- Est-il possible de **prolonger par continuité** la fonction f en $\frac{1}{3}$ afin qu'elle soit continue en cette valeur? C'est à dire existe-t-il un nombre a telle que la fonction g suivante soit continue en $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{3x - 1}{6x^2 - 11x + 3} & \text{pour } x \in \mathcal{D}_f \\ g\left(\frac{1}{3}\right) = a & \text{pour } x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice E.61 (*)0

- Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1$$

- En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

$$x^2 - x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

- Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2}$$

- En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

$$\frac{2x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2} = \frac{x^2 \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)}$$

- La limite ci-dessous est une forme indéterminée ; à l'aide d'une transformation adéquate, déterminer la valeur de cette limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 1}{2x + 1}$$

Exercice E.62 (*)0

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

- | | | | |
|----|---|----|---|
| a. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x^2 + 2x - 1}$ | b. | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2}$ |
| c. | $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - x - 2} \cdot (x - 2)$ | d. | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2 + x}$ |
| e. | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 1$ | f. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + 1$ |

Exercice E.63 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$
 - Montrer que, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(x) = x + 6$
 - En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a.

Exercice E.64 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 3x$ | b. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + \frac{2}{x}$ |
| c. | $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 - 3x^3$ | d. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - (x + 2)^2$ |
| e. | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x$ | f. | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2$ |

Exercice E.65 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{5x + 1}{-5x^2 + 4x + 1}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^+} f(x)$$

- Montrer que, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(x) = -\frac{1}{x-1}$
- En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a.

Exercice E.66 (*)0

Déterminer la valeurs des limites ci-dessous :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x^3$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x - 2$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x + 1}{x}$

Exercice E.67 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation: $f(x) = \frac{2 \cdot x^3 - x}{x^3 + 2 \cdot x^2}$

1. Etablir les identités suivantes:

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 \cdot x^2 - 1}{x \cdot (x + 2)}$$

2. Déterminer la valeur des limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Exercice E.68 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{2 \cdot x^2 - x - 6}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 3}{2 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 27}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 4}{(x - 1)^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 2}{x^2 + 7 \cdot x + 10}$

Exercice E.69 (*)0

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{5x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{3x^3 - x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{16} - x^3 + x}{x^3 - x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 - x^4}{x^6 - 2 \cdot x^4}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - x - 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

Exercice E.70 (*)0

1. On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \frac{3x^2 + 5x}{3x^3 + 4x + 1}$$

a. Etablir l'égalité suivante:

$$\frac{3x^2 + 5x}{3x^3 + 4x + 1} = \frac{3 + \frac{5}{x}}{x \cdot \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

b. En déduire la valeur de la limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g: x \mapsto \frac{4x^3 + 2x + 1}{2x^3 - 2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$

Exercice E.71 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 2 \cdot x}{x^2 + x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot x^2}{x^4 + x^3}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \cdot x^2}{x^4 + x^3}$

Exercice E.72 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3 \cdot x}{2 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 12}$$

1. Etablir les identités suivantes:

$$f(x) = \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{x \cdot (x + 3)}{(x - 2)(2 \cdot x - 6)}$$

2. Dresser le tableau de signes de l'expression $(x - 2)(2x - 6)$.

3. En déduire la valeur des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Exercice E.73 (*)0

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 16}$

c. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x + 4}{3 \cdot x^2 - x - 4}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 3}{3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 4}$

Exercice E.74 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x + 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{2 \cdot x^2 - 3}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2}{-3 \cdot x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^4}{x^3 - x}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3}{3 \cdot x^2 - 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot x^{10} + x}{6 \cdot x^{10} - 2 \cdot x^3}$

Exercice E.75 (*)0

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes:

1. $f: x \mapsto -3 \cdot x + 2$

2. $g: x \mapsto 4 \cdot x^2 - 4$

3. $h: x \mapsto 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

4. $j: x \mapsto 5 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$

5. $k: x \mapsto -2 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

6. $l: x \mapsto (3 \cdot x + 11)(4 - x)$

Exercice E.76 (*)0

Déterminer l'expression des fonction dérivées des fonctions polynomiales suivantes:

1. $f: \mapsto 3 \cdot x + 2$

2. $g: \mapsto x^2 + 4$

3. $h: \mapsto x^2 + x$

4. $j: \mapsto x^3 + 2 \cdot x^2$

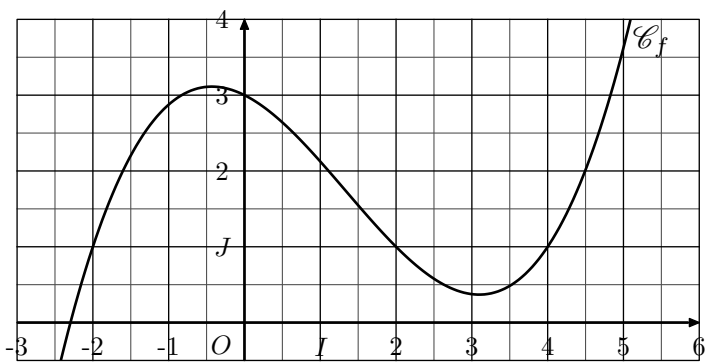
5. $k: \mapsto 3x^2 - 2 \cdot x$

6. $l: \mapsto (x + 1)(2 \cdot x - 4)$

Exercice E.77 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation:

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 3$$



On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
2. On considère la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
 - a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T) .
 - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .
 - c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T) .
3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite : $(d) : y = -x + 3$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice E.78 (*)0

Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| a. $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ | b. $g: x \mapsto 2 \times \frac{1}{x}$ |
| c. $h: x \mapsto \frac{-5}{x} + \sqrt{x}$ | d. $k: x \mapsto x^2 - \frac{1}{x}$ |

Exercice E.79 (*)0

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

- | | |
|---|---|
| 1. $f: x \mapsto x - \frac{1}{x}$ | 2. $g: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x}$ |
| 3. $h: x \mapsto \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ | 4. $j: x \mapsto 2 \cdot x^3 + \frac{2}{x}$ |

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

Exercice E.80 (*)0

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| a. $f(x) = 3x^2$ | b. $g(x) = \frac{1}{12} \cdot x^6$ | c. $h(x) = 4\sqrt{x}$ |
| d. $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ | e. $k(x) = \frac{1}{2x}$ | f. $l(x) = -\frac{2}{x}$ |

Exercice E.81 (*)0

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

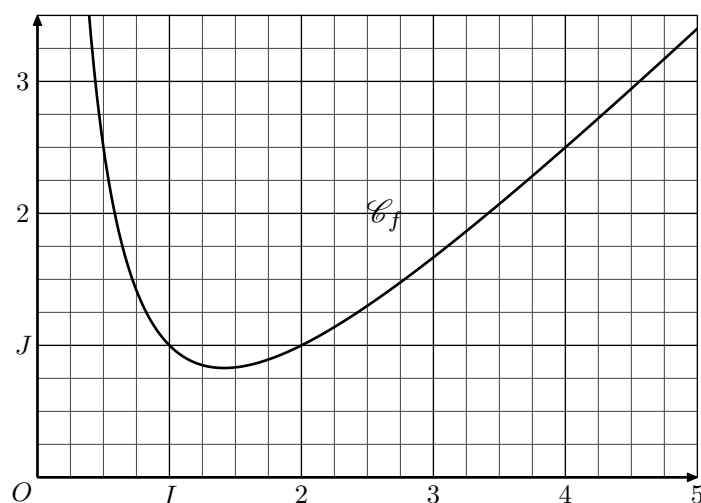
- | | |
|---|---|
| 1. $f: x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$ | 2. $g: x \mapsto 5 \cdot x^6 - 3 \cdot x^3 - 4$ |
| 3. $h: x \mapsto 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x$ | 4. $j: x \mapsto \frac{8 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2}{x}$ |

Exercice E.82 (*)0

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$$

La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



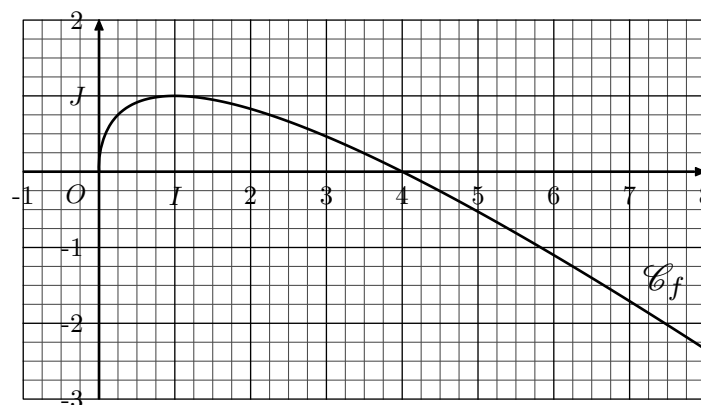
1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par : $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$
2. On souhaite déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
 - a. Donner le coefficient directeur de la tangente (T) . Justifier votre démarche.
 - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .
 - c. Tracer la droite (T) dans le repère ci-dessus.
3. On considère la droite (d) d'équation réduite : $(d) : y = \frac{1}{2} \cdot x$
 - a. Sur $]0; +\infty[$, étudier le signe de l'expression : $f(x) - \frac{1}{2} \cdot x$
 - b. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite (d) .

Exercice E.83 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = -x + 2\sqrt{x}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



1. a. Montrer que la fonction f admet pour dérivée, sur \mathbb{R}_+ , la fonction f' dont l'expression est donnée par : $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

- b. Déterminer la valeur des nombres dérivés de la fonction f en $\frac{1}{4}$ et en 4.

2. On note (d) et (Δ) les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f aux points d'abscisse respectifs $\frac{1}{4}$ et 4.

- a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ) .

- b. Montrer que les deux droites (d) et (Δ) s'intersectent au point de coordonnées $(1; \frac{3}{2})$.

- c. Tracer sur le graphique les droites (d) et (Δ) .

Exercice E.84 (*)0

1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse -2 .

2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 3.

Exercice E.85 (*)0

Soit f définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$

1. Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

Exercice E.86 (*)0

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1}}{x - 1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}} = -2$$

Exercice E.87 (*)0

Chacune des limites ci-dessous présente une forme indéterminée. Démontrer le résultat attendu en mettant en évidence la bonne transformation algébrique :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = +\infty$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{5}{2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x}} = 0$ d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$

e. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$ f. $\lim_{x \rightarrow \frac{9}{4}} \frac{2x - 1}{3x + 2} \cdot \sqrt{3x + 2} = -\infty$

Exercice E.88 (*)0

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} - x$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 + x - 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}$ d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 2}$

Exercice E.89 (*)0

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{\sqrt{x + 3} - 2}$ b. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 + 4x + 3}$

Exercice E.90 (*)0

1. Montrer que, pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, on a :

$$\sqrt{3x^2 - 1} + x = x \cdot \left(1 - \sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

2. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 1} + x$$

Exercice E.91 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f: x \mapsto \frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. a. Pour $x \in [-1; 0[$, établir l'égalité : $f(x) = -\sqrt{x + 1}$

- b. Déterminer la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

3. Déterminer la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

4. Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

Exercice E.92 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{-x^2 - 2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^3 - 2x^2}{x^4 + x^3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 6}{2x^2 - 15x + 27}$ d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 5x + 3}{-x^2 + x + 2}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{x + 1}}$ f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}$

Exercice E.93 (*)0

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 + 2x^3}{2x^8 - x^3}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 - x^3}{x^4 + x^3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{-2x^2 + 4x + 6}$ d. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{-3x^2 + 5x + 2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3 - x}}{2x^2 - 5x - 3}$ f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{5 - x} - 2}$

Exercice E.94 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{2x^2 - 4x^4}$ b. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x - 1}{2x^2 + 5x + 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - 2x}{3x^2 - 4x - 4}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$

Exercice E.95 (*)0

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 6x + 3}{2 \cdot x^2 + x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 14x - 4}{x + 5} - 3x + 1$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Exercice E.96 (*)0

En observant chacun des tableaux de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser si la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variation de f	3 \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow $-\infty$

b.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ \nearrow -1	-1 \nearrow $+\infty$	

c.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
Variation de f	0 \searrow $-\infty$	2 \nearrow $+\infty$	$-\infty$ \nearrow $+\infty$	

Exercice E.97 (*)0

1. a. Etudier la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{2(x + 1)} - \frac{1}{2}x - 1$$

b. Donner l'équation de l'asymptote oblique de la fonction f en $+\infty$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{2(x + 1)}$$

2. a. Déterminer les valeurs de a et de b afin que :

$$a \cdot x + b + \frac{2}{x + 2} = \frac{-6x^2 - 11x + 8}{3(x + 2)}$$

b. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{-6x^2 - 11x + 8}{3(x + 2)}$$

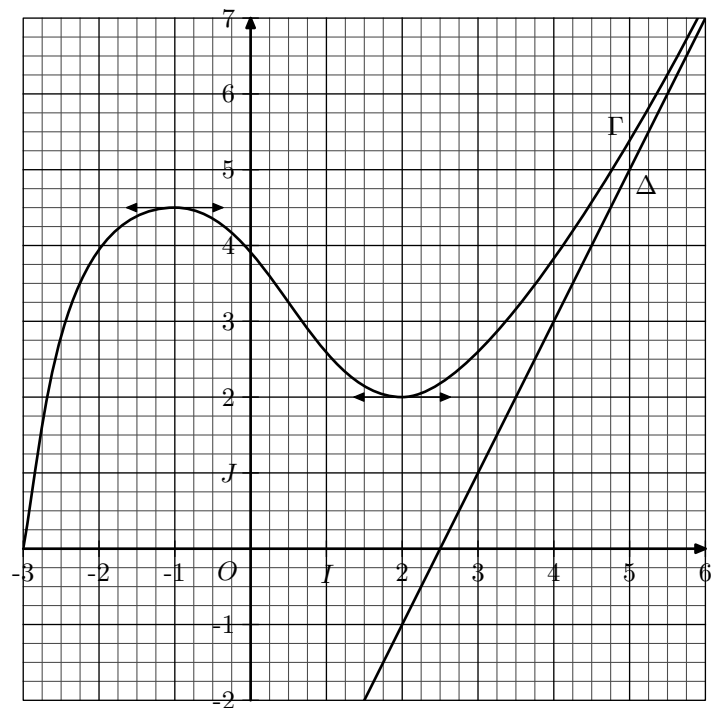
Exercice E.98 (*)0

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; +\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3; -1]$ et $[2; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1; 2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3; 0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - (2x - 5)| = +\infty$.

4. $f'(0) = 1$

5. $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2; 1]$

Exercice E.99 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x - 4}{x + 1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Préciser si la courbe \mathcal{C}_f , représentative de la fonction f admet des asymptotes ; on précisera leurs caractéristiques.

Exercice E.100 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} et dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2(2x + 3)}{2x^2 + 2x + 1}$$

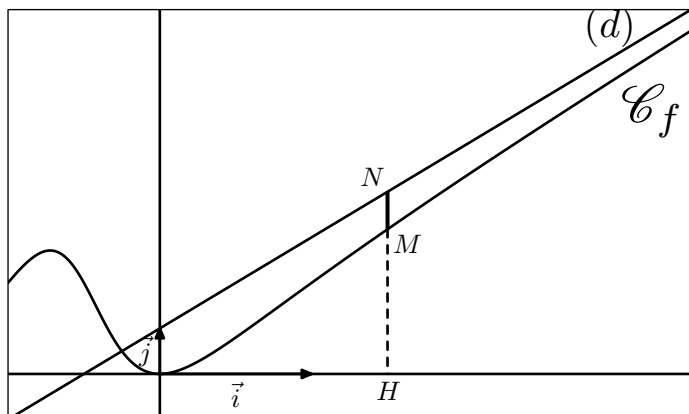
1. a. Déterminer les deux nombres réels a et b vérifiant la relation :

$$f(x) = a \cdot x + b - \frac{4x + 1}{2x^2 + 2x + 1}$$

b. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f admet une

asymptote oblique (d) en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on précisera l'équation réduite.

2. Voici une représentation de cette courbe et de son asymptote oblique :



On considère le point M de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse x et N est le point de la droite (d) d'abscisse x .

Le point H est la projection orthogonale de ces deux points sur l'axe des ordonnées; il a pour coordonnée $H(x; 0)$.

Dans les prochaines questions, on étudie la distance MN pour des valeurs de x appartenant à \mathbb{R}^+ :

- a. Exprimer la distance MN en fonction de x .

- b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

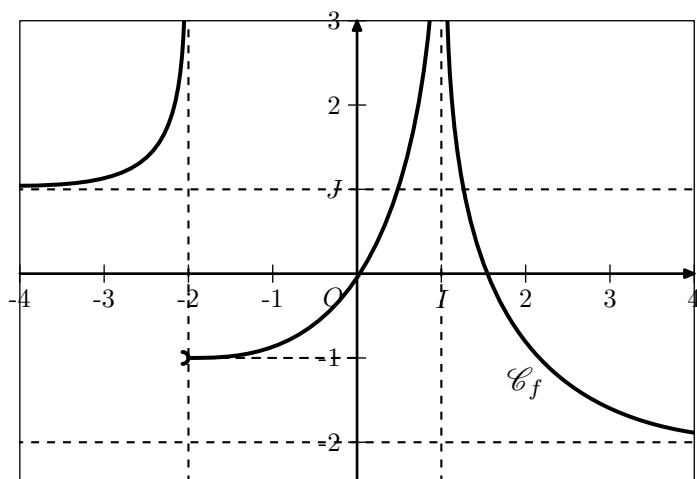
$$\left| \frac{4x+1}{2x^2+2x+1} \right| \leq \frac{2}{x}$$

Indication : on pourra se servir du fait que chaque terme est positif sur \mathbb{R}^+

- c. En déduire l'existence d'un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ sur lequel $MN \leq 10^{-6}$.

Exercice E.101 (*)0

Ci-dessous est représentée la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe \mathcal{C}_f a été représentées en pointillés.

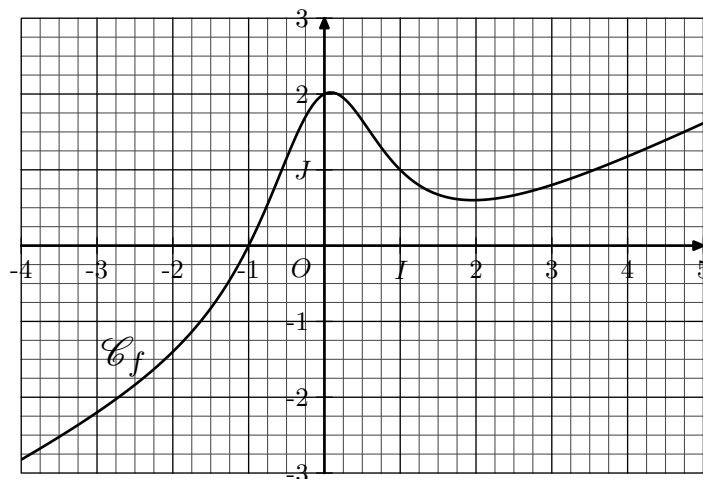
Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

Exercice E.102 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{2(x^2 + 1)}$$

On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$:



1. a. Déterminer trois réels a , b et c vérifiant la relation :

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c}{x^2 + 1}$$

- b. En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$
- c. Tracer la droite (Δ)

2. On considère une fonction g définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative \mathcal{C}_g a pour position relative avec \mathcal{C}_f :

- \mathcal{C}_g est en dessous de \mathcal{C}_f sur $]-\infty; 1[$;
- \mathcal{C}_g est au dessus de \mathcal{C}_f sur $]1; +\infty[$.

- a. Effectuer le tracé d'une fonction g vérifiant les conditions ci-dessus.

- b. Faire une conjecture quant à la valeur des deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Exercice E.103 (*)0

En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

- a. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ b. $g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$
- c. $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1}$ d. $j(x) = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$

Exercice E.104 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{4x^2 + 10x - 2}{x + 3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a , b , c vérifiant :

$$a \cdot x + b + \frac{c}{x + 3} = \frac{4x^2 + 10x - 2}{x + 3}$$

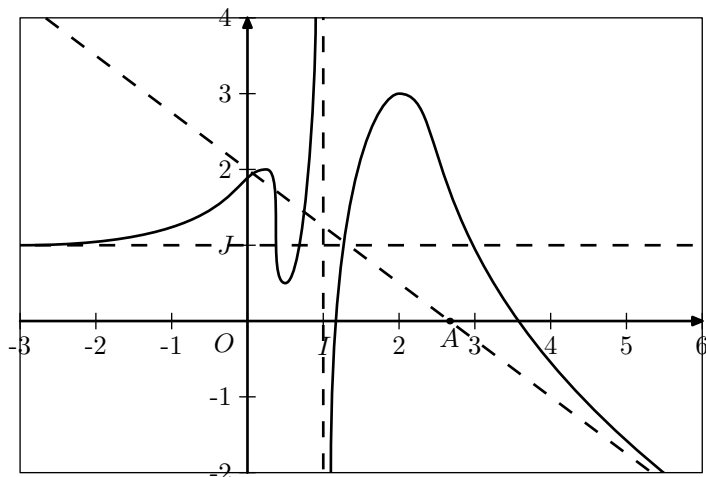
- b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .

- c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (n'oublier aucune valeur dans le tableau).

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice E.105 (*)0

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on a représenté la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie sur $[-3; 6] \setminus \{1\}$



Les asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice E.106 (*)0

1. On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{6x^3 + x^2 + 7x + 9}{2x^2 - x + 3}$$

Montrer que la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$ est l'asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 5}{3 - 2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (a \cdot x + b)] = 0$$

Exercice E.107 (*)0

Soit f a fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot x}$$

et soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1.
 - a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Préciser les équations des asymptotes de \mathcal{C} (pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)$).
 - c. Tracer la courbe \mathcal{C} .
2.
 - a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de Δ et de \mathcal{C} .
 - b. Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de \mathcal{C} . Soit I le milieu du seg-

ment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y$.

Exercice E.108 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 2x - 5}{2x + 1}$$

1. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant l'égalité : $f(x) = a \cdot x + b + \frac{c}{2x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
2. Justifier que la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

Exercice E.109 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 - a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
 - b. Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
 - c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
 - d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.
2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y = 3x - 1$ pour asymptote oblique.

Exercice E.110 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1.
 - a. Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.
 - b. Dresser le tableau de variations de la fonction f . (On indiquera également les deux racines de la fonction f)
2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
Variation de g		1	-3	$+\infty$

-1 \nearrow \searrow \nearrow

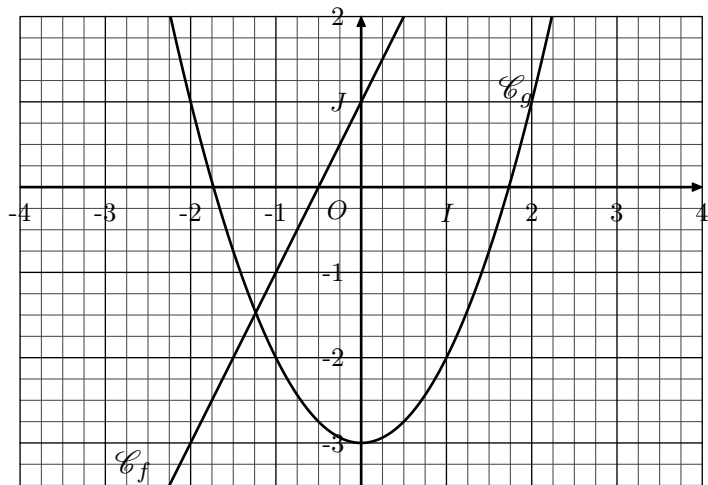
- a. Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x)$
- b. Justifier que la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
- c. Justifier et préciser la monotonie de la composée $g \circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants : $]-\infty; -3[$; $[-3; 1]$

Exercice E.111 (*)0

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4; 4]$ par les relations :

$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$

On donne les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ;
on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ;
on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaîne :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

- a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$$g[f(-1)] \quad ; \quad g\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

- b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g[f(x)]$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{g \circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x , de la fonction $g \circ f$.

Exercice E.112 (*)0

Pour chaque question, déterminer la limite de $g \circ f$ en a :

a. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{5-x}{x^2} \quad ; \quad a = 3$

b. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+3}} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad a = -3$

c. $f(x) = \frac{\cos x - 2}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^3 + x^2} \quad ; \quad a = +\infty$

Exercice E.113 (*)0

On considère les fonction numériques f et g dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-1	3	4	$+\infty$
Variation de f	0	$+\infty$	$-\infty$	0

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	3	1	4

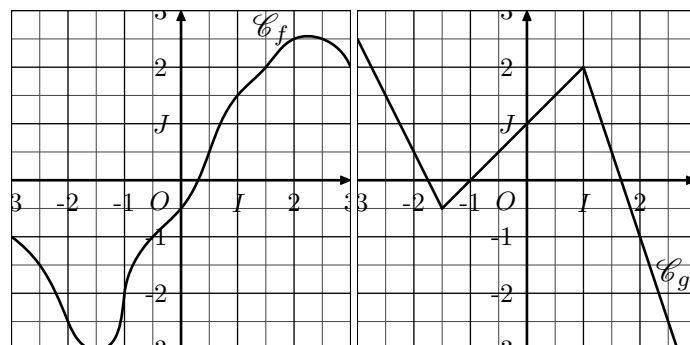
1. Préciser l'ensemble de définition pour chacune de ces deux fonctions.
2. Justifier que la fonction f admet un unique zéro.
3. Déterminer et justifier la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} (g \circ f)(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f \circ g)(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x)$

Exercice E.114 (*)0

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont les courbes, respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , représentatives sont données dans un repère $(O; I; J)$ orthonormée :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(f \circ g)(-2)$ b. $(f \circ g)(1,5)$ c. $(f \circ g)(2)$

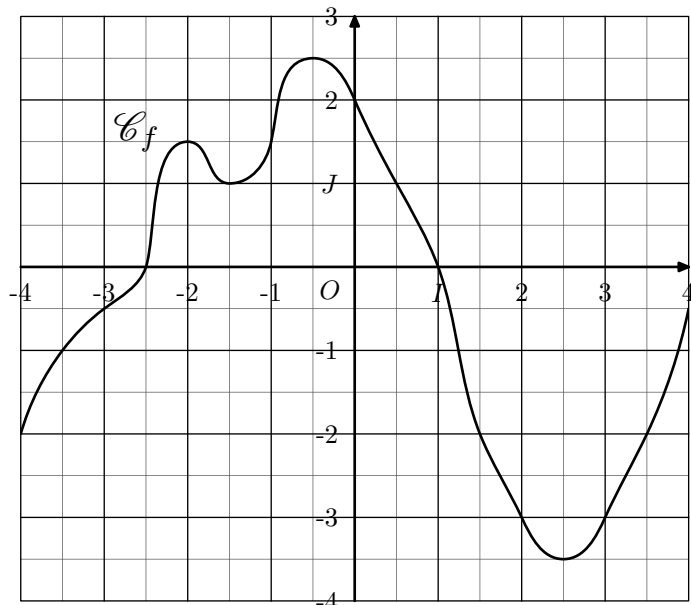
2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g \circ f)(-3)$ b. $(g \circ f)(0)$ c. $(g \circ f)(1)$

Exercice E.115 (*)0

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont

la courbe \mathcal{C}_f représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- Calculer les images suivantes :
 - $(f \circ f)(1)$
 - $(f \circ f)(-2)$
 - $(f \circ f)(3)$
- On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :
 - $f^3(1)$
 - $f^3(-3)$
 - $f^4(-1)$

Exercice E.116 (*)0

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :
 $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

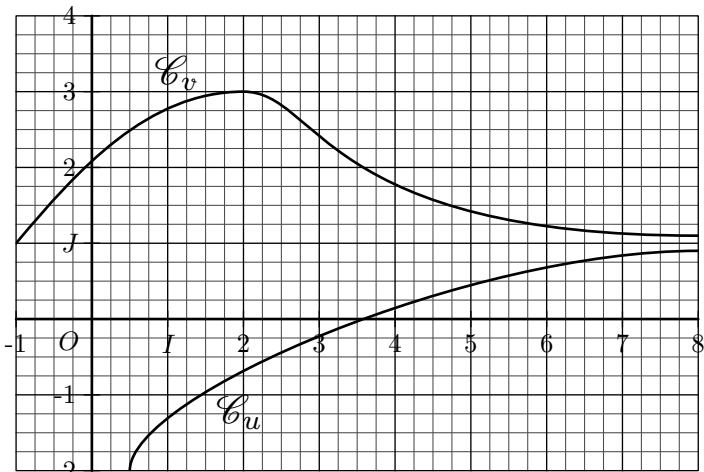
On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Déterminer la limite de la fonction g en 0.
- Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g . Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe \mathcal{C} ?

Exercice E.117 (*)0

On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur \mathbb{R} dont les courbes représentatives \mathcal{C}_u et \mathcal{C}_v sont données dans le repère ci-dessous :



- Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

- Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1$$

Faire une conjecture quand à la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice E.118 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 2 - \cos x}$$

- Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- Établir l'encadrement suivant :

$$\frac{5}{x^2 + 3} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2 + 1}$$

- En déduire la valeur de la limite suivante :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice E.119 (*)0

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2 + \cos x}{4} + \sin x$

Exercice E.120 (*)0

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x - 1}{3x^3 + 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4 - 2x}{x^3 + x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{-2x^2 + 10x - 12}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2x^2 + x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 7} + x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{1 + x}$

Exercice E.121 (*)0

faire un truc avec

$$2x + 2 + \frac{2x - 4}{e}$$

qui a pour dérivée $\frac{2(x - 4)(x - 2)}{(x - 3)^2}$

Super pour étudier dérivée et tableau de signe.

Exercice E.122 (*)0

Après avoir dresser le tableau de variation, donner le maximum

trace la courbe pour faire exo

$$y = (4x^2 - 12x + 9)/(-x^2 + 5x - 6)$$

Exercice E.123 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{-2x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .
- Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Dresser le tableau de signes de l'expression $x^2 - 2x -$

3.

b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

4. a. Etablir que la dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = \frac{6x(x+3)}{[(x-3)(x+1)]^2}$$

b. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

5. a. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 100$

b. Le résultat de la question précédente correspond-t-il à ceux de la question 3.? Justifier votre réponse.

6. a. Résoudre l'inéquation : $f(x)+2 \leq 6 \times 10^2$

b. Résoudre l'inéquation : $-6 \times 10^{-2} \leq f(x)+2$

c. En déduire les solutions de l'encadrement suivant :

$$|f(x) + 2| \leq 6 \times 10^{-2}$$

7. Les résultats trouvés à la question précédente sont-ils concordants avec les résultats obtenus à la question 2.?

Exercice E.124 (*)0

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "à gauche" et "à droite".

$$f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2} ; \quad g : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h : x \mapsto \frac{x+2}{4x^2+4x+1} ; \quad j : x \mapsto \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k : x \mapsto \frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

Exercice E.125 (*)0

Etablir les égalités suivantes :

a. $\frac{x}{x+1} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{3-x^2}{x^2-1}$

b. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{x \cdot (x+1)^2}$

c. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = \frac{4x+1}{x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}$

Exercice E.126 (*)0

Exprimer chacune des expressions algébriques ci-dessous sous la forme d'un quotient où le numérateur et le dénominateur sont des produits de facteurs du premier degré :

a. $\frac{3x}{x+2} + \frac{x+2}{1-x}$ b. $\frac{x^2+x+3}{x+1} - \frac{x^2+4x}{x+2}$

Exercice E.127 (*)0

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I , la fonction produit $u \cdot v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u \cdot v)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

1. Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' (resp. v') est la fonction dérivée de la fonction u (resp. v) :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$	$2 \cdot x + 2$		
$2 \cdot x^2 + 1$	\sqrt{x}		
$\frac{1}{x}$	$3 - x^2$		
$\frac{2}{x}$	\sqrt{x}		

2. Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$(3 \cdot x^2 + 3 \cdot x)(2 \cdot x + 2)$	$18 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 6$
$(2 \cdot x^2 + 1)\sqrt{x}$	$\frac{10 \cdot x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x} \cdot (3 - x^2)$	$\frac{-x^2 - 3}{x^2}$
$\frac{2}{x} \cdot \sqrt{x}$	$-\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

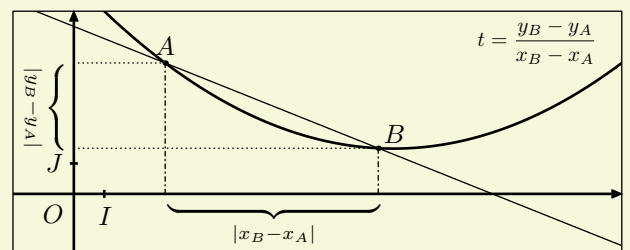
Exercice E.128 (*)0

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux nombres réels appartenant à I .

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b , le nombre t défini par :

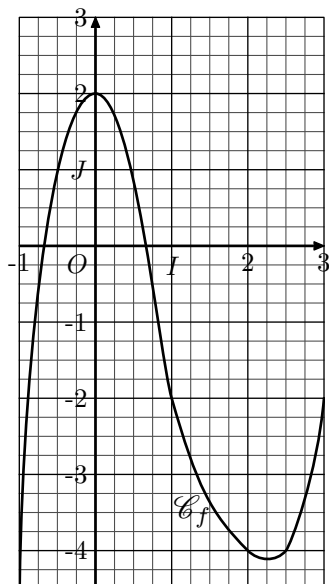
$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque : Dans un repère et en considérant la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f sur I , le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b correspond au coefficient directeur de la courbe entre les points A et B d'abscisse respective a et b :



Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .

On considère les points A, B, C de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisses respectives 0, 1 et 2



- Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.
- Calculer le taux d'accroissement de la fonction f :
 - entre 0 et 2
 - entre 1 et 2

Exercice E.129 (*)0

On considère la fonction f définie sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ par la relation: $f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 1}$

- Etablir l'égalité suivante:

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot h + 9} + 3}$$
 - En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 4: $f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$
- Donner les coordonnées du point A de la courbe \mathcal{C}_f ayant pour abscisse 4.
 - Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 4.

Exercice E.130 (*)0

- Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' (resp. v') dérivée de la fonction u (resp. v):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 - 2x$	$x + 1$		
$x^2 + 4x - 1$	$2x - 1$		
4	$x^2 - 2 \cdot x + 3$		

- Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{3 - 2 \cdot x}{x + 1}$	$-\frac{5}{(x + 1)^2}$
$\frac{x^2 + 4 \cdot x - 1}{2 \cdot x - 1}$	$\frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2}{(2 \cdot x - 1)^2}$
$\frac{4}{x^2 - 2x + 3}$	$\frac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

Exercice E.131 (*)0

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous:

- $f: x \mapsto \frac{2 - 2x}{5x + 1}$
- $g: x \mapsto (3x - 2)(2x^2 + 1)$
- $h: x \mapsto \frac{1}{3x + 1}$
- $j: x \mapsto (2x^2 + 3x) \cdot \sqrt{x}$

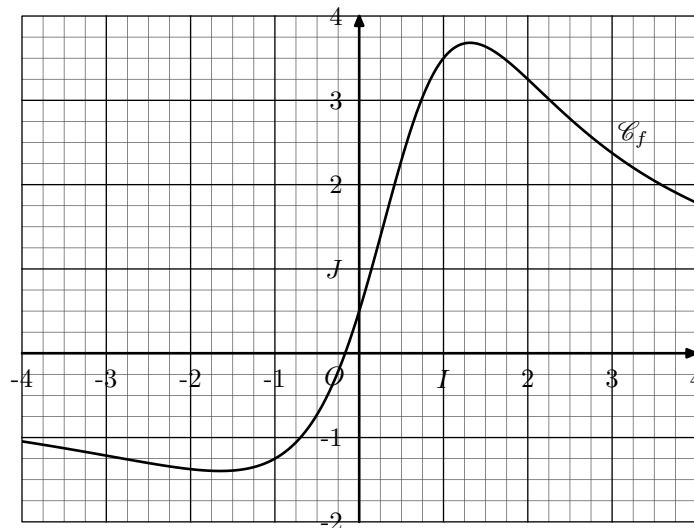
Exercice E.132 (*)0

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{6x + 1}{x^2 - x + 2}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Etablir l'égalité suivante:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-7h + 5}{2(h^2 + h + 2)}$$
- En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1.
- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f en 1.
- Tracer dans le repère ci-dessous, la tangente (T) :



Exercice E.133 (*)0

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes:

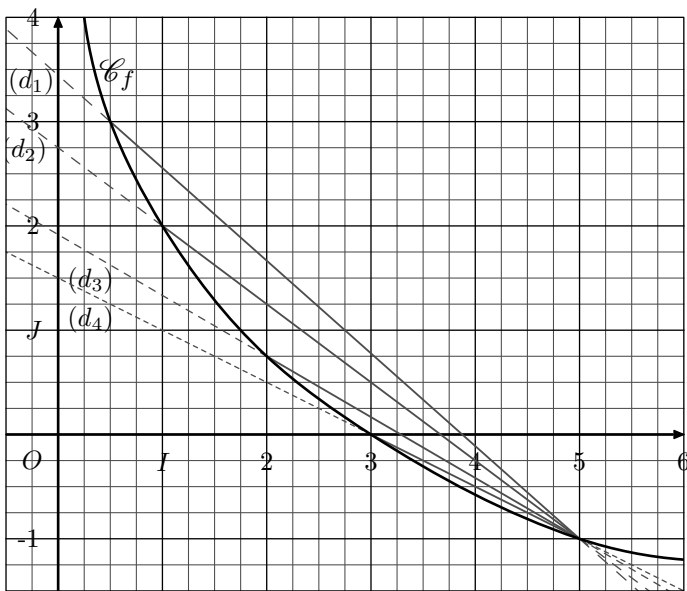
- $f: x \mapsto (3 - x) \cdot \frac{1}{x}$
- $g: x \mapsto (x^2 - 3) \cdot \sqrt{x}$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

Exercice E.134 (*)0

On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ dans lequel sont représentées:

- La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f ;
- Les cordes $(d_1), (d_2), (d_3)$ et (d_4) à la courbe \mathcal{C}_f respectivement aux points d'abscisses 0,5 et 5, 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5.



- Déterminer les coefficients directeurs des quatre cordes à la courbe \mathcal{C}_f .
On donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième près.
- Tracer, à l'aide d'un règle, la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point de coordonnées $(5; -1)$.
 - Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T) .

Exercice E.135 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

- Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{h+3}{\sqrt{h^2 + 3h + 1} + 1}$$

- En déduire la valeur de la limite suivante :

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3.

Exercice E.136 (*)0

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a. } f(x) = \frac{x+1}{3x+1}$$

$$\text{b. } g(x) = \frac{5x+1}{3-2x}$$

$$\text{c. } h(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x + 1}$$

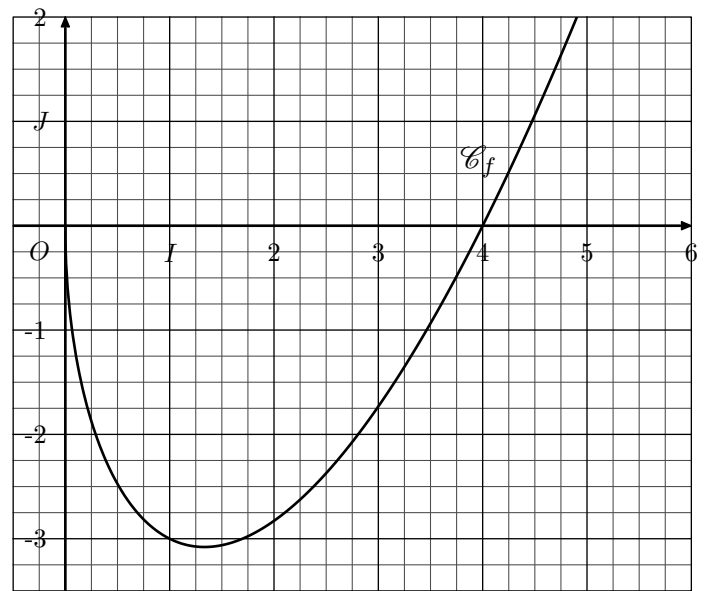
$$\text{d. } j(x) = \frac{3 - 2x}{x^2 - 3x - 1}$$

Exercice E.137 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = (x-4) \cdot \sqrt{x}$$

La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 4. Tracer la tangente (T_1) dans le repère.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1. Tracer la tangente (T_2) dans le repère.

Exercice E.138 (*)0

On considère la fonction f définie sur $[-\frac{5}{2}; +\infty[$ par la relation : $f(x) = \sqrt{2x+5}$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

- Justifier l'égalité suivante pour $h \in [-1; 1] \setminus \{0\}$:
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2}{\sqrt{2h+9} + 3}$$
 - En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f pour $x=2$.
- En déduire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

Exercice E.139 (*)0

On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto 3x^2 - 2x$$

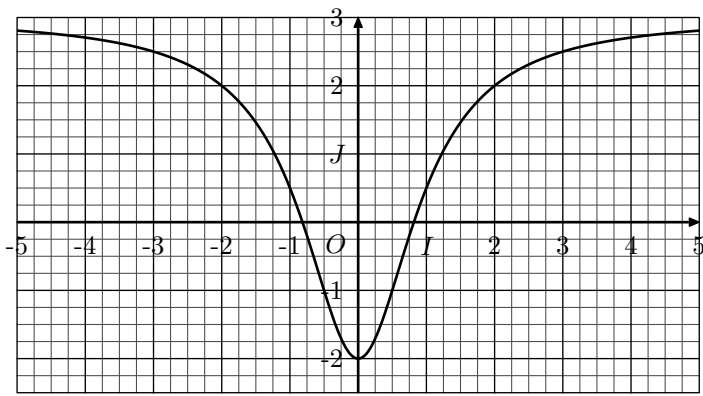
Montrer que : $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 10$

Exercice E.140 (*)0

Soit f la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie

par la relation : $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$

- Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'égalité :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5h + 10}{2h^2 + 4h + 4}$$
 - En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.
- On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .



- a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
- b. Tracer la tangente (T) dans le repère.

3. Déterminer les coordonnées des différents points d'intersection de (T) et de \mathcal{C}_f .

Exercice E.141 (*)0

On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

Exercice E.142 (*)0

On considère les deux fonctions f et g par :

$$f(x) = (2x+1)(3x^2-x+1) \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+5}{1-4x}$$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.

Exercice E.143 (*)0

1. Soit f la fonction définie par la relation :

$$f : x \mapsto \sqrt{-2x^2 + x + 1}$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- b. Déterminer la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

- c. En déduire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :

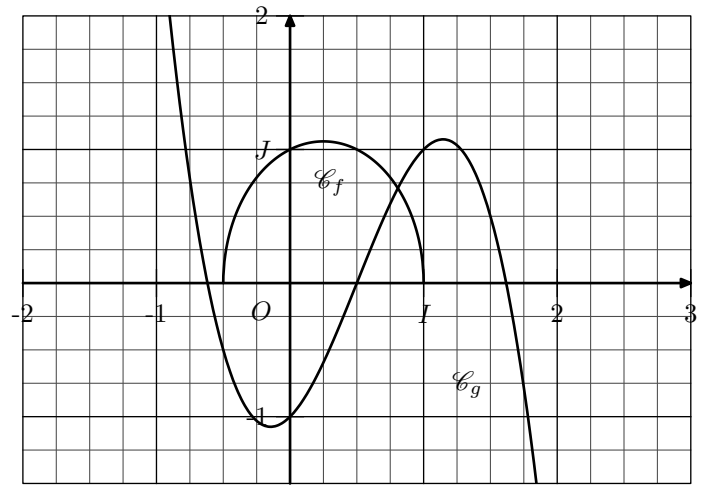
$$g : x \mapsto -2x^3 + 3x^2 + x - 1$$

- a. Déterminer la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

- b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1.

3. La représentation des courbes représentatives de ces deux fonctions est donnée ci-dessous :



Tracer les deux tangentes obtenues précédemment dans le repère ci-dessus.

Exercice E.144 (*)0

Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivé en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$\frac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\frac{-x+1}{2\sqrt{x} \cdot (x+1)^2}$
g	$(x^2-3) \cdot \sqrt{x}$	$\frac{5x^2-3}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Exercice E.145 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f . On note (T) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'identité :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2h^2 + 3h - 1$$

- b. Quel est le coefficient directeur de la tangente (T)? Justifier votre démarche.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f .

3. a. Déterminer la valeur des réels a , b et c réalisant l'identité :

$$f(x) + x = (x-1) \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

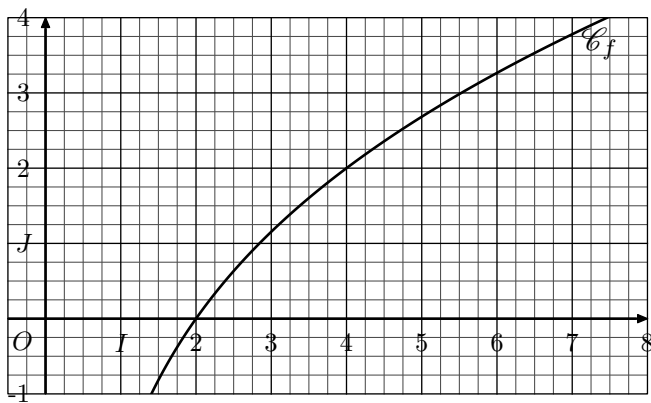
- b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec la tangente (T).

Exercice E.146 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$$

On donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = \frac{x+2}{x\sqrt{x}}$$

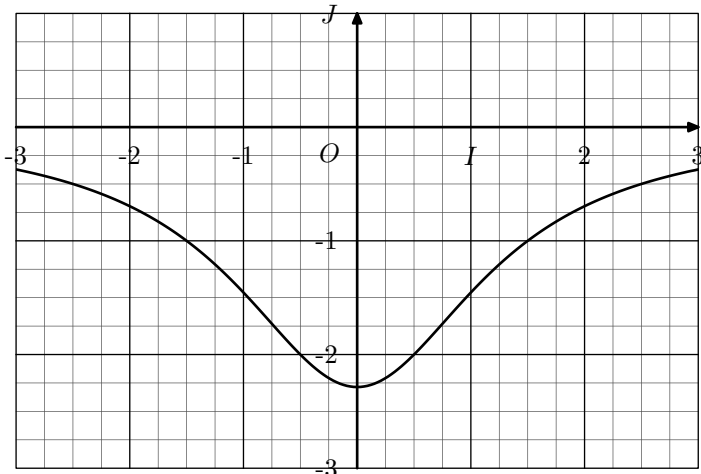
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 4.
 b. Tracer la tangente (T) .

Exercice E.147 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-16}{4x^2 + 7}$$

1. a. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
 b. Le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous représente la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f . Tracer la représentation graphique de (T) .
 2. a. Etablir la factorisation suivante :
 $8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = (2x + 1)^2 \cdot (2x + 3)$
 b. Etudier la position relative de la droite (T) relativement à la courbe \mathcal{C}_f .

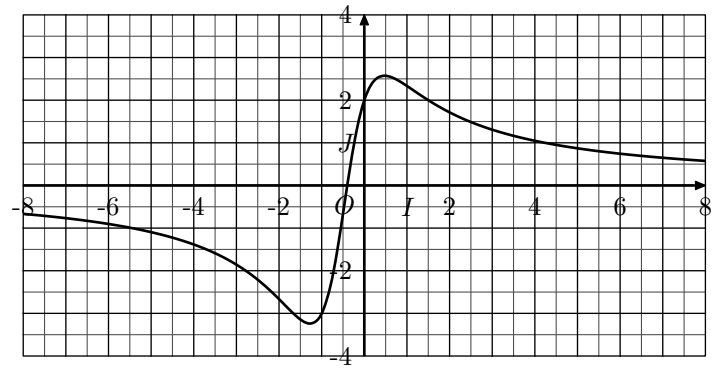


Exercice E.148 (*)0

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5x+2}{x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f donnée ci-dessous :



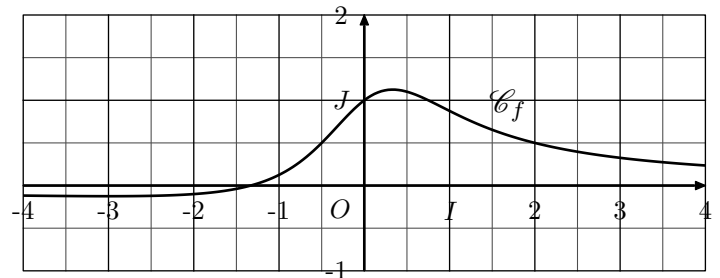
1. Justifier que la fonction f est définie pour tout nombre réel.
 2. Etablir le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} . On y indiquera seulement les valeurs approchées, au dixième près, des extrémums.
 3. On note (T) la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite (T) .

Exercice E.149 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un réel x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+4}{4x^2+4}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$:



1. Démontrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est définie par :
 $f'(x) = \frac{-4(3x^2 + 8x - 3)}{(4x^2 + 4)^2}$
 2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
 b. Tracer, dans le repère ci-dessus, la tangente (d) .
 3. Justifier que toutes les tangentes à la courbe \mathcal{C} , dont l'abscisse des points de contact appartient à l'intervalle $]-3; \frac{1}{3}[$, sont associées à des fonctions affines croissantes.

Exercice E.150 (*)0

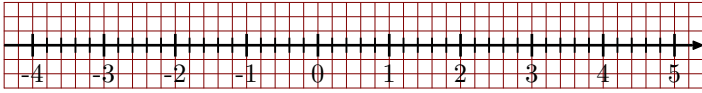
Refaire entièrement cet exercice, il est piqué d'un autre cite :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

f passe par $(0; 5)$ et sa tangente est horizontale au point d'abscisse 1 coeff directeur de -3
 déterminer f .

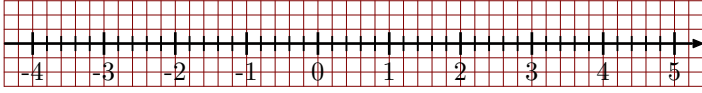
Exercice E.151 (*)0

1. a. Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-1; 3]$ et $[0; 4]$:



- b. Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $[-1; 3]$ et $[0; 4]$.

2. a. Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-3; 1]$ et $[-1; 2]$:



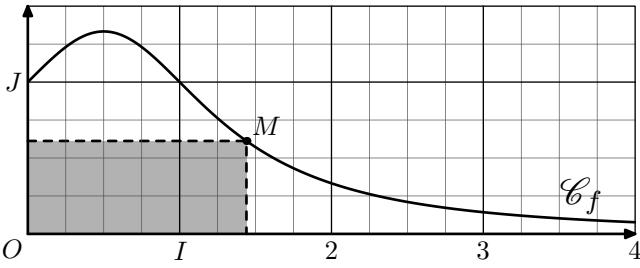
- b. Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $[-3; 1]$ et $[-1; 2]$.

Exercice E.152 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x .

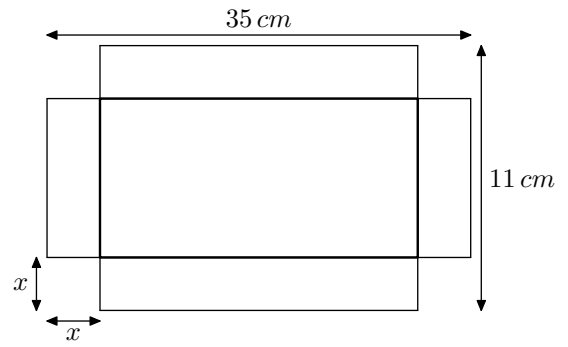
1. Donner l'expression de la fonction \mathcal{A} .
2. a. Montrer que la fonction \mathcal{A}' dérivée de la fonction \mathcal{A} admet pour expression :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

- b. Dresser le tableau de signes de la fonction \mathcal{A}' .
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction \mathcal{A} .
3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

Exercice E.153 (*)0

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm .



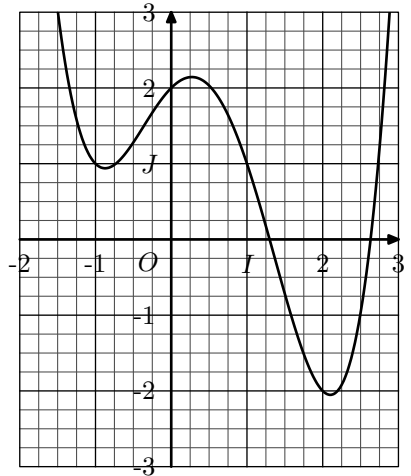
1. a. Quelles valeurs peut prendre la variable x dans ce problème?
- b. Donner l'expression du volume \mathcal{V} en fonction de la valeur de x .
2. a. Déterminer l'expression de la fonction \mathcal{V}' dérivée de la fonction \mathcal{V} .
- b. Dresser le tableau de variations de la fonction \mathcal{V} .
- c. Justifier que la fonction \mathcal{V} admet une valeur maximale sur l'intervalle $\left[0; \frac{11}{2}\right]$.
3. Quelle est le volume maximale qu'on obtient avec ce type de boîte?

Exercice E.154 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + x + 2$$

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dans lequel est représentée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



1. a. Tracer la droite (d) d'équation : $y = -x$.
- b. Effectuer une conjecture sur les coordonnées en lesquels la droite (d) est une tangente à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Etablir vos conjectures de la question 1. b).

Exercice E.155 (*)0

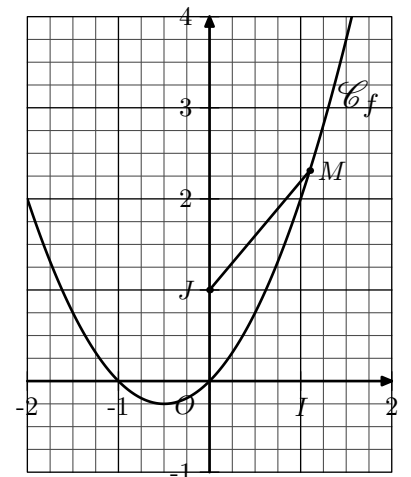
On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = x^2 + x$$

La représentation graphique est donnée ci-contre :

On considère le point J de coordonnée $(0; 1)$ et M un point de la courbe \mathcal{C}_f .

Déterminer la position du point M pour lequel la longueur JM est minimale.



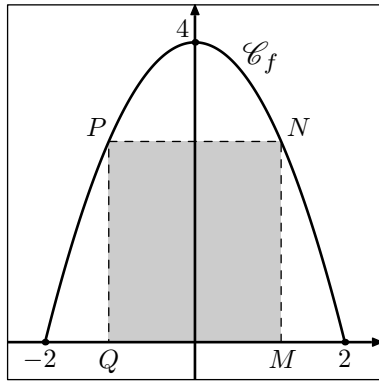
On pourra utiliser la factorisation :
 $4x^3 + 6x^2 - 2 = 2(x+1)(2x^2 + x - 1)$

Exercice E.156 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = 4 - x^2$$

Ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O; IJ)$:



Le point M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(x; 0)$ où $x \in [0; 2]$. A partir du point M , on construit le rectangle $MNPQ$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

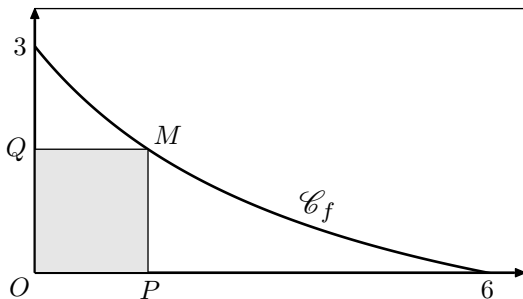
Dans cet exercice, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice E.157 (*)0

On considère la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{12 - 2x}{x + 4}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



Soit M un point de la courbe \mathcal{C}_f . On considère les points P et Q appartenant respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées de sorte à ce que le quadrilatère $OPMQ$ soit un rectangle.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale.

Exercice E.158 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x , pour $x \in [1; +\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x - 2}$$

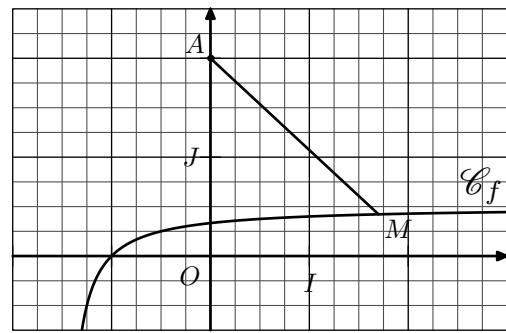
1. Donner une forme simplifiée de : $\frac{f(1+h)}{h}$ pour $h > 0$
2. En déduire le nombre dérivée de la fonction f en 1.

Exercice E.159 (*)0

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x + 1}{2x + 3}$$

La représentation graphique est donnée ci-dessous :



On considère le point A de coordonnée $(0; 2)$ et M un point de la courbe \mathcal{C}_f .

Déterminer la position du point M pour laquelle la longueur AM est minimale.

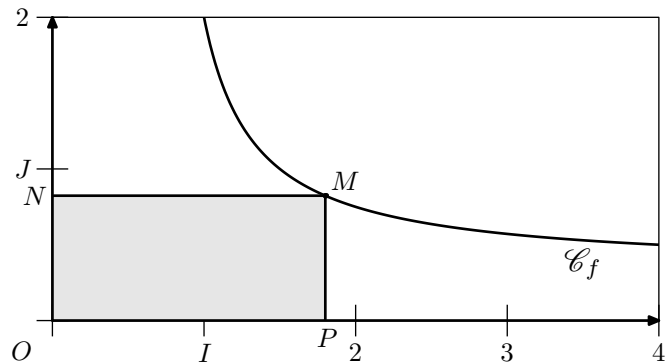
On pourra utiliser la factorisation :
 $16x^5 + 96x^4 + 216x^3 + 210x^2 + 62x - 15 = (2x + 3)(2x^2 + 6x + 5)(4x^2 + 6x - 1)$

Exercice E.160 (*)0

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x + 1}{3x - 2}$$

La représentation \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe \mathcal{C}_f et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M . Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x , l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de \mathcal{A} .
3. Etablir le sens de variation de la fonction \mathcal{A} .
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

Exercice E.161 (*)0

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f: x \mapsto 2x^2 - 5x + 2 \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{3x - 2}{1 - 2x}$$

Dans un repère $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g , et la droite (T) d'équation réduite : $y = -x$

Montrer que la droite (T) est une tangente pour la courbe \mathcal{C}_f et la courbe \mathcal{C}_g .

(on donnera les abscisses des points de contact de (T) avec chacune de ces deux courbes)

Exercice E.162 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \sqrt{5-2x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. a. Pour tout nombre réel h vérifiant :
 $h \neq 0$; $-2+h \in \mathcal{D}_f$
 Etablir l'égalité :
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-2}{\sqrt{9-2h+3}}$$
- b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en -2 .
3. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -2 .

Exercice E.163 (*)0

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{4x - 1}$$

1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :

$$f': x \mapsto -\frac{8x^2 - 4x + 5}{(4x - 1)^2}$$
2. a. La fonction f admet-elle des tangentes dont le coefficient directeur soit -1 ?
 b. Si oui, déterminer leurs équations réduites.

Exercice E.164 (*)0

Déterminer la fonction f polynomiale du second degré vérifiant les conditions suivantes :

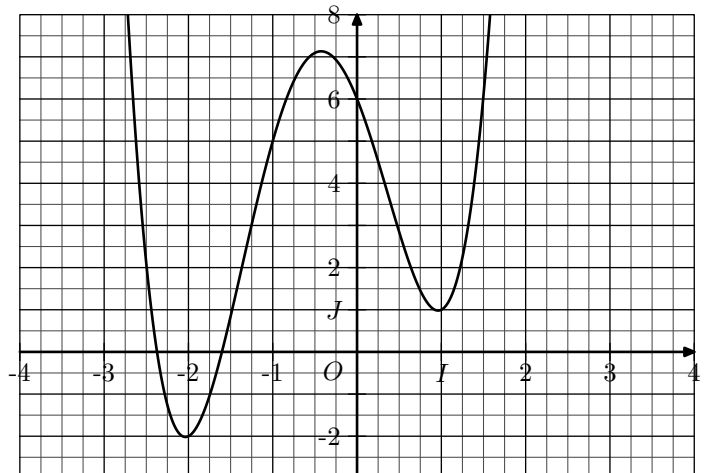
- ➔ L'image de 2 est -2. ➔ $(-1; 1) \in \mathcal{C}_f$
- ➔ La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.

Exercice E.165 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f : x \mapsto \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 5x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$:



La courbe \mathcal{C}_f représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

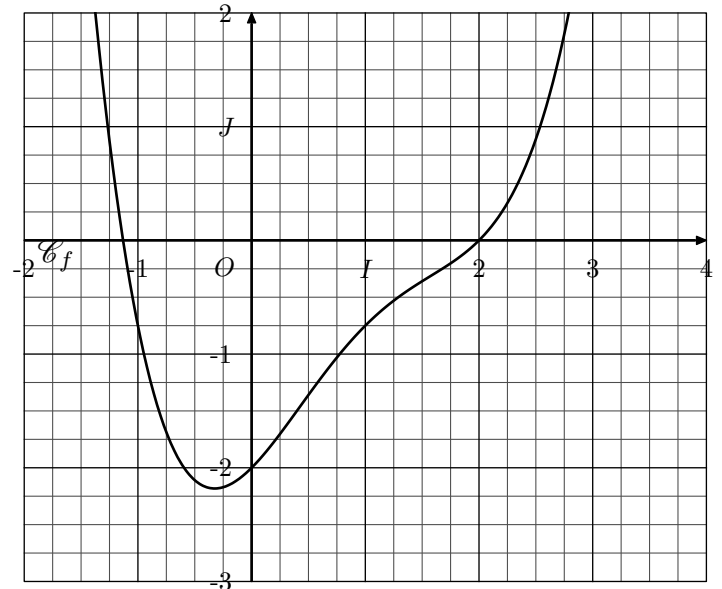
Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice E.166 (*)0

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f : x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x - 2$$

Voici la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$:



Nous allons montrer qu'il existe une droite (d) de coefficient directeur 1 qui est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en deux points distincts.

1. Résoudre l'équation : $f'(x) = 1$
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) .

Exercice E.167 (*)0

On considère la fonction f , définie sur $[-\frac{1}{5}; +\infty[$, dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{5x + 1}$$

1. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $(x+h) \in \mathcal{D}_f$, établir l'égalité suivante :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{5}{\sqrt{5x + 5h + 1} + \sqrt{5x + 1}}$$

2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

F. Suites numériques:

Exercice F.1 (*)0

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

- a. $u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$ b. $v_n = \frac{2 \cdot n + 1}{2 - 3 \cdot n}$
 c. $w_n = \sqrt{3n + 25}$ d. $x_n = 3 \cdot [1 + (-1)^n] + 2$

Exercice F.2 (*)0

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite (u_n) .

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice F.3 (*)0

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

$$u_n = 5 + 2 \times n \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- Exprimer la valeur u_{n-3} en fonction de n .
- Donner la forme simplifiée de $u_{n-3} + u_3$.
- Donner la forme simplifiée de $u_{n-5} + u_5$.
- Soit k et n deux entiers tels que $k \leq n$. Montrer que $u_k + u_{n-k}$ a sa valeur indépendante de k .

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

$$v_n = 2n^2 - 3n + 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) :

- Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n .
- Étudier la valeur de $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n .

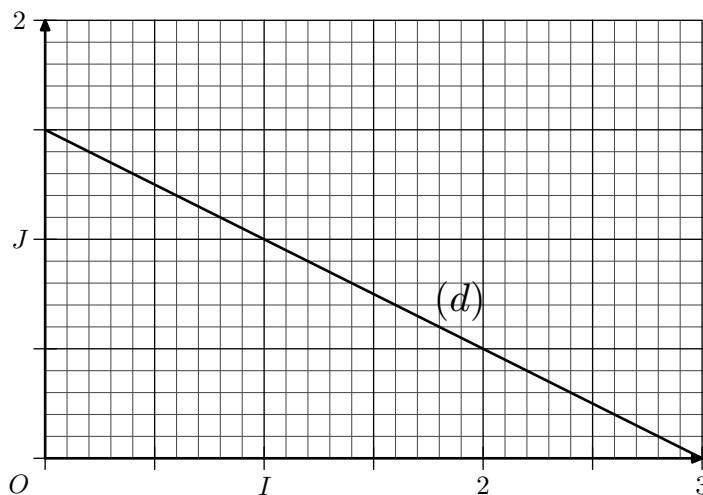
Exercice F.4 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite (*les constructions doivent être laissées*).

2. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,5	0,25	1,38	0,81	1,09					

b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice F.5 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$.

a. Déterminer la somme de ses 10 premiers termes :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_8 + u_9$$

b. Déterminer la somme des termes de la suite (u_n) allant de u_4 à u_{22} :

$$S' = u_4 + u_5 + \dots + u_{21} + u_{22}$$

2. On considère la somme numérique suivantes :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Déterminer la valeur de S_n en fonction de n .

3. Soit S_3 la somme numérique suivante :

$$S_3 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 8\sqrt{2}$$

a. Donner les caractéristiques de la suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont la somme des premiers termes est S_3 .

b. En déduire la valeur de S_3 .

Exercice F.6 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on a connaissance des deux termes suivants :

$$u_7 = 3 \quad \text{et} \quad u_{19} = 11$$

Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique dont les termes de rangs 4 et 8 valent respectivement 3 et $\frac{16}{27}$

Déterminer les deux valeurs possibles de la raison. Donner la valeur du premier terme des deux suites.

Exercice F.7 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{3}{5}$, déterminer la valeur de la somme suivante:

$$S = u_5 + u_6 + \dots + u_{21}$$

2. On considère la somme suivante dont les termes sont ceux d'une suite géométrique:

$$S' = 16 + 24 + 36 + \dots + \frac{3^{10}}{2^6}$$

Déterminer la valeur de la somme S' .

Exercice F.8 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence et vérifiant les conditions:

$$u_7 = 5 ; u_{10} = 11 ; u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Justifier que la différence de deux termes consécutifs est constante.
 b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. a. Déterminer les éléments caractéristiques de (u_n) .
 b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n .

Exercice F.9 (*)0

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
 2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
 3. Déterminer la valeur de la suite suivante:

$$S = u_5 + u_6 + \dots + u_{12}$$

Exercice F.10 (*)0

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.
 2. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$.

Exercice F.11 (*)0

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.
 2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$.

Exercice F.12 (*)0

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des questions, donner le nombre de termes composant la somme:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a. $u_0 + u_1 + \dots + u_{32}$ | b. $u_5 + u_6 + \dots + u_{15}$ |
| c. $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ | d. $u_5 + u_6 + \dots + u_n$ |
| e. $u_k + u_{k+1} + \dots + u_{100}$ | f. $u_k + u_{k+1} + \dots + u_n$ |
| g. $u_0 + u_2 + \dots + u_{88}$ | h. $u_{3k} + u_{3k+3} + \dots + u_{99}$ |
| i. $\sum_{k=0}^{64} u_k$ | j. $\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$ |

Exercice F.13 (*)0

On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 0 ; u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
 2. On considère la suite (v_n) définie par:

$$v_n = u_n - \frac{2}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
 b. Etablir que pour tout entier naturel n , on a:

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot v_n$$
 c. Donner la nature et les valeurs des éléments caractéristiques de la suite (v_n) .
3. a. Déterminer la valeur de la somme S' définie par:

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{14}$$
 b. Déterminer la valeur de la somme S définie par:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{14}$$
4. a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n .
 b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n .

Exercice F.14 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation:

$$u_0 = 8 ; u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 5 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$v_n = u_n + 10 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$$
 b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
 c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n .
2. Dédire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n) .

Exercice F.15 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$
 a. Calculer la somme des 13 premiers termes de (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{11} + u_{12}$$

- b. Calculer la somme des termes de (u_n) allant de u_5 à u_{20} : $S' = u_5 + u_6 + \dots + u_{19} + u_{20}$

2. On considère les deux sommes suivantes:

$$S_1 = 1 + \frac{5}{2} + 4 + \frac{11}{2} + \dots + 100$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \dots + \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

- a. Déterminer les caractéristiques des suites arithmétiques (v_n) et (w_n) définissant respectivement les termes des sommes S_1 et S_2 .
- b. En déduire la valeur des sommes S_1 et S_2 .

Exercice F.16 (*)0

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

- a. Déterminer la somme de ses 8 premiers termes:
 $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$
- b. Déterminer la somme des termes suivants:
 $S' = u_3 + u_4 + u_5 + u_6$

2. Les termes de chaque somme sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de ces deux sommes:

a. $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$

b. $S_2 = 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{8}$

Exercice F.17 (*)0

1. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique telle que:

$$u_{13} = 7 \quad ; \quad u_{20} = \frac{35}{2}$$

- a. En justifiant votre démarche, retrouver les éléments caractéristiques de cette suite.
- b. En déduire la valeur de la somme S définie par:
 $S = u_5 + u_6 + \dots + u_{22}$

2. On considère une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique telle que:

$$v_9 = \frac{5^6}{7^4} \quad ; \quad v_{16} = \frac{5^{13}}{7^{11}}$$

- a. En justifiant votre démarche, retrouver les éléments caractéristiques de cette suite.
- b. En déduire la valeur de la somme S' définie par:
 $S' = v_5 + v_6 + \dots + v_{22}$

Exercice F.18 (*)0

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante:
 $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{16}$

Exercice F.19 (*)0

1. On considère la suite (u_n) définie par:
 $u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n) .

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n) ?

2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme 1 et de raison 3 vérifie la relation:

$$v_{n+1} = 2 \cdot v_n + 3^n.$$

Exercice F.20 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on connaît deux termes:

$$u_4 = 12 \quad ; \quad u_{22} = -24$$

Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on connaît deux termes:

$$v_4 = 8 \quad ; \quad v_7 = \frac{64}{27}$$

Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

Exercice F.21 (*)0

Un coureur se lance un défi: il souhaite faire le tour de l'Europe.

Le premier jour, il parcourt 50 km. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1%.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n -ième jour. En supposant que le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n) .

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .

b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n .

c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres:

n	10	100	500	750	1000
u_n					

c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand?

Exercice F.22 (*)0

Considérons la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Soit (v_n) la suite définie par la relation:

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

a. Etablir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison de cette suite.

- b. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n .

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice F.23 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique dont on connaît la valeur de deux termes : $u_{14} = 2$; $u_{20} = 0$

- Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.
- a. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de la valeur de n .
- b. Déterminer le rang du terme valant $\frac{10}{3}$

Exercice F.24 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$. Déterminer la valeur de la somme :
 $S = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{21}$

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $-\frac{1}{2}$. Déterminer la valeur de la somme :
 $S' = v_7 + v_8 + \dots + v_{12}$

Exercice F.25 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme -3 et de raison 4.

- Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n .
- Quel est le rang du terme de la suite (u_n) ayant pour valeur 605
- Déterminer la valeur de la somme S définie par :
 $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$

Exercice F.26 (*)0

Soit x un nombre réel différent de 1.

- Exprimer la somme suivante en fonction de x :
 $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
- En déduire une factorisation du polynôme $1 - x^{n+1}$.

Exercice F.27 (*)0

- Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
 $u_4 = 3$; $u_7 = 15$
 - Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n)
- Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
 $v_2 = 2$; $v_5 = 54$
 - Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n) .
 - Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n)

Exercice F.28 (*)0

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointe-

ment par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 0,40 \\ b_0 = 0,41 \end{cases} ; \begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,3a_n + 0,6b_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Donner la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n) .
- On définit les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :
 $u_n = a_n + b_n$; $v_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9. On précisera également le premier terme.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice F.29 (*)0

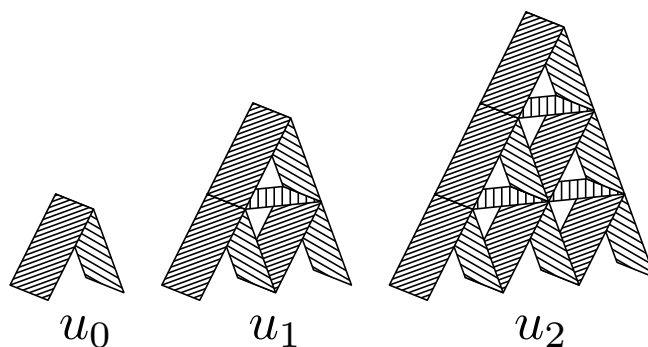
Déterminer les progressions géométriques de sept termes (à termes réels) telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1250

Exercice F.30 (*)0

- On définit la suite par récurrence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation :
 $u_0 = 5$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- On définit la suite par récurrence $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la relation :
 $v_1 = -2$; $v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice F.31 (*)0

On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n .

- Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- Pour tout entier naturel n , déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent et du rang n .
- A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes?

Exercice F.32 (*)0

- Pour chaque suite, déterminer la formule explicite définissant les termes de la suite en fonction de n :

- a. $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$
- b. $(3, 7, 11, 15, 19, \dots)$
- c. $(-1, 2, -4, 8, -16, 32, \dots)$
- d. $(1, 3, \sqrt{17}, 5, \sqrt{33}, \sqrt{41}, \dots)$
- e. $(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots)$

2. Pour chaque suite, déterminer la formule de récurrence reliant un terme à son prédécesseur.

- a. $(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$
- b. $(2, 6, 18, 54, 162, \dots)$
- c. $(6, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$
- d. $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$

Exercice F.33 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante:

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. Montrer qu'on a la relation suivante:
 $u_{n+2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite?
4. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant la relation suivante:

$$u_n = a \cdot [1 - (-1)^n] + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice F.34 (*)0

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $u_n \geq 0$.

Exercice F.35 (*)0

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice F.36 (*)0

1. Soit (u_n) une suite dont le terme de rang n est définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \frac{2 \cdot n}{n+1}$$

Donner l'expression simplifiée des termes u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n .

2. Soit (v_n) une suite dont le terme de rang n s'écrit en fonction de n :

$$v_n = 3^{n-1} + 4^{n+1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Donner une expression des termes v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de n .

3. Pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Donner l'écriture de cette identité au rang $(n+1)$.

Exercice F.37 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Etablir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 3$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice F.38 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence et vérifiant les conditions :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- b. Emettre une conjecture quant à la nature de la suite (u_n) .
- c. Que reste-t-il à montrer pour établir cette récurrence?
2. a. Donner l'expression simplifiée de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
- b. Cela suffit-il pour justifier la conjecture?

Exercice F.39 (*)0

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Exercice F.40 (*)0

Etablir la propriété suivante, à l'aide d'un raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice F.41 (*)0

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{(n+2) \cdot (1+2 \cdot n) + 1}{n+1} = 1 + 2 \cdot (n+1)$$

Exercice F.42 (*)0

Pour $x \neq 1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Exercice F.43 (*)0

On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 24 et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
2. Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n .
3. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice F.44 (*)0

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que cette suite est décroissante.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$v_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que cette suite est croissante.

3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice F.45 (*)0

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{5^n}{n+2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est une suite croissante sur \mathbb{N} .

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

- a. Donner l'expression réduite de : $v_{n+1} - v_n$.
 b. En déduire que la suite (v_n) est croissante pour n supérieur à 2.

Exercice F.46 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Calculer les 6 premiers termes de la suite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur : $v_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- a. Donner la valeur de v_1 .
 b. Donner l'expression réduite de l'expression : $v_{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)$
 c. En déduire que : $v_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{v_n}}$

3. Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice F.47 (*)0

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3^n + n - 1$$

1. a. Donner l'expression du terme u_{n+1} en fonction de n .
 b. Simplifier l'écriture de l'expression : $3 \cdot u_n - 2n + 3$
2. Comparer les deux suites (u_n) et (v_n) où (v_n) est définie par :
- $$v_n = 0 \quad ; \quad v_{n+1} = 3 \cdot v_n - 2 \cdot n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice F.48 (*)0

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$ b. $u_n = \frac{n - 3}{n^2 + 1}$

c. $u_n = \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

Exercice F.49 (*)0

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

Exercice F.50 (*)0

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par :
- $$u_n = 9n - 5$$

- a. Déterminer la nature de la suite (u_n) en précisant ses caractéristiques.
 b. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par :

$$v_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- a. Déterminer la nature de la suite (v_n) en précisant ses caractéristiques.
 b. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Exercice F.51 (*)0

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n + 1}$$

2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :

$$u_n = \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$$

Exercice F.52 (*)0

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n = \frac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice F.53 (*)0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -1 .

- a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n .
 b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S_n en fonction de n .
 c. En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

- Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n .
- On note $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S'_n en fonction de n .
- En déduire la limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

Exercice F.54 (*)0

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1% tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

- Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
- Quelle est précisément la nature de la suite? Déterminer la valeur de d_n en fonction de n .
- On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.

$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$
 - Déterminer l'expression de L_n en fonction de n .
 - En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner?
 - A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour par-

courir 4 999 km

Exercice F.55 (*)0

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite (R_n) définie, pour $n \geq 2$, par la somme:

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite (R_n) .

Exercice F.56 (*)0

On définit:

- la suite (u_n) par:

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- la suite (S_n) , pour tout entier naturel n , par:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

- Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
 - Calculer S_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (S_n) .

G. Dénombrement - Probabilités:

Exercice G.1 (*)0

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire l'une après l'autre deux cartes de ce jeu; l'ordre de tirage des cartes a une importance:

- Déterminer le nombre possible de réalisation de chacun des évènements suivants:
 - A : "La première carte tirée est l'as de pique; la seconde carte est un carreau".
 - B : "La première carte tirée est une figure de pique; la seconde carte est un carreau".
 - C : "La première carte tirée est une figure de coeur; la seconde carte est un coeur".
 - D : "La première carte tirée est une figure; la seconde carte est un coeur".
- Combien de tirages différents est-il possible de réaliser?
 - En déduire la probabilité de chacun des évènements de la question 1.

Exercice G.2 (*)0

- On considère l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés à six faces et on effectue la somme de la valeur de chaque dés.

On considère les évènements suivants:

- Evènement A : "on obtient 8".
- Evènement B : "on obtient une valeur supérieure ou égale à 6".
- Evènement C : "Un des dés a la valeur 4 et la somme est supérieure ou égale à 7".

- Compléter le tableau suivant:

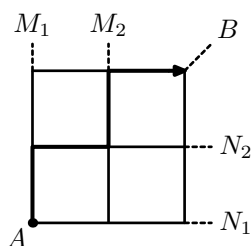
+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Déterminer les probabilités des évènements A, B et C .
- On change d'expériences aléatoires. On jette toujours ces deux dés mais on s'intéresse maintenant à la valeur de chacun des dés.
 Déterminer la probabilité pour les évènements suivants:
 - Evènement D : "les deux dés ont la même valeur".

- b. Evénement E: "on obtient 6 et 4".
- c. Evénement F: "un des dés a la valeur 3 et l'autre a une valeur paire".

Exercice G.3 (*)0

On considère un mobile dont le départ est le point A et se déplaçant sur le quadrillage ci-dessous uniquement par des déplacements vers le haut et vers la droite:



En choisissant une sortie (représentée en pointillé), le jeu s'arrête.

1. Combien de chemins permettent au mobile de quitter le plateau de jeu en M_1 ? en M_2 ?

Par symétrie de la figure et des déplacements du mobile, on admet qu'il y a respectivement autant de chemins permettant au mobile sortant en N_1 et en N_2 que en M_1 et M_2 :

2. Déterminer le nombre de chemins permettant au mobile de sortir en B.
3. En choisissant au hasard un de ces chemins, quelle est la probabilité que ce chemin fasse sortir le mobile en B.

Exercice G.4 (*)0

Une urne contient quatre boules portant respectivement les lettres A, B, C et D. Un participant au jeu doit tirer tour à tour trois boules sans les remettre dans l'urne et noter le mot formé par ses trois lettres.

1. Construire l'arbre de choix correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - a. A: "Le mot commence par la lettre A et termine par la lettre D";
 - b. B: "Le mot contient la lettre A et la lettre D";
 - c. C: "Le mot contient la séquence AB".

Exercice G.5 (*)0

On considère un jeu de 32 cartes représenté ci-contre. L'expérience aléatoire consiste à choisir une carte au hasard dans ce jeu.

1. Pour chacun des événements ci-dessous, déterminer le nombre d'événements élémentaire le composant:
 - a. A: "La carte tirée est un carreau".
 - b. B: "La carte tirée est un as".
 - c. C: "La carte tirée est une figure".
 - d. D: "La carte tirée est de couleur rouge".

♥	♦	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

2. Déterminer le cardinal de chacun des événements suivants:

- a. $A \cap B$
- b. $B \cap C$
- c. $B \cup D$

Exercice G.6 (*)0

On considère un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère les trois événements suivants:

- A: "Le nombre obtenu est 5";
- B: "Le nombre obtenu est strictement supérieur à 3";
- C: "Le nombre obtenu est impair";

1. Déterminer la probabilité des événements A, B, C.
2. On considère les événements ci-dessous:

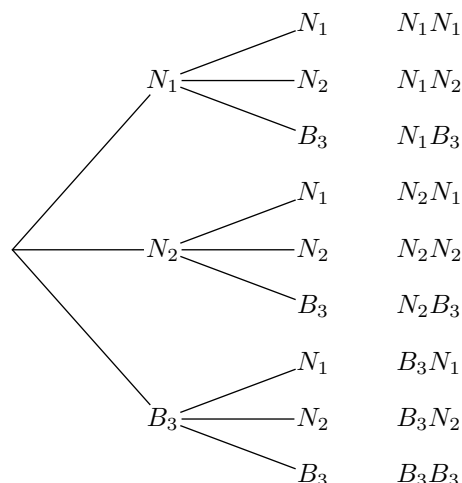
- a. $A \cup B$
- b. $B \cap C$
- c. $A \cup \bar{B}$
- d. $B \cap \bar{C}$

Décrire chacun de ces événements en citant les événements élémentaire qui les composent, puis donner leur probabilité.

Exercice G.7 (*)0

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche; chacune d'elles est numérotée de 1 à 3. Le jeu consiste à tirer deux boules successivement avec remise: c'est à dire une première boule est tirée, puis remise dans l'urne avant de tirer une seconde boule.

Voici un arbre de décision basé sur le tirage de deux boules:

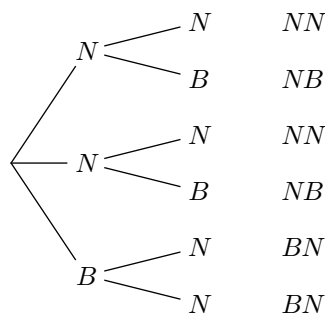


Une fois tirées les deux boules, on considère les deux couleurs obtenues et leur ordre de tirage

1. Combien d'expériences élémentaires composent cette expérience aléatoire?
2. Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - a. A: "La première boule tirée est blanche".
 - b. B: "Les deux boules tirées sont de couleurs différentes".
 - c. C: "La seconde boule est une boule noire".

Exercice G.8 (*)0

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche; le jeu consiste à extraire deux boules de l'urne sans remise: la première boule tirée ne sera pas remise dans l'urne.



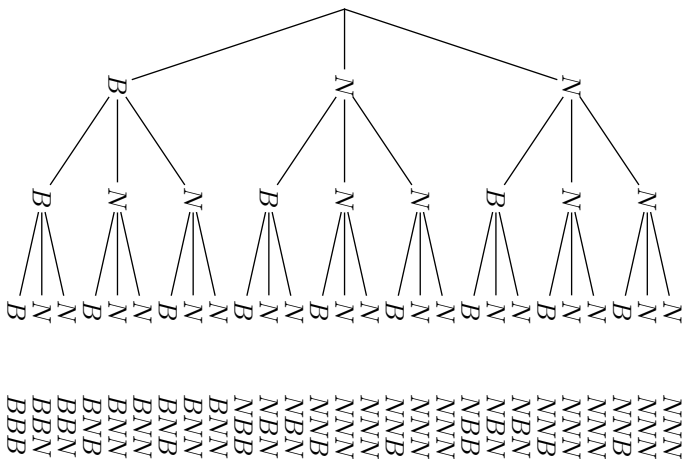
Ci-contre un arbre de choix représentant les tirages de ce jeu.

- En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents?
- Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - A : "La première boule tirée est blanche".
 - B : "La seconde boule tirée est blanche".
 - C : "Les deux boules tirées sont de couleurs distinctes".
- Donner les probabilités des événements suivants:
 - $A \cap B$
 - $A \cap C$
 - \bar{C}

Exercice G.9 (*)0

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche; le jeu se fait avec remise de la boule tirée: c'est à dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basé sur le tirage de trois boules:



- En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents?
- Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - A : "La première boule tirée est blanche".
 - B : "Les trois boules tirées sont de même couleur".
 - C : "Au moins deux boules tirées sont de la même couleur".
- Donner les probabilités des événements suivants:
 - $A \cap B$
 - $A \cap C$
 - \bar{C}

Exercice G.10 (*)0

On considère une expérience consistant à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et les quatre événements associés:

	♥	♦	♠	♣
As	As	As	As	As
R	R	R	R	R
D	D	D	D	D
V	V	V	V	V
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7

- A : "la carte tirée est un roi";
- B : "la carte tirée est une figure rouge";
- C : "la carte tirée est un coeur";
- D : "la carte tirée est un nombre"

- Déterminer la probabilité des quatre événements A, B, C et D .
- Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - \bar{A}
 - $\bar{A} \cap C$
 - $A \cap C$
 - $B \cap C$
 - $C \cup B$
 - $\bar{B} \cup C$
 - $B \cup \bar{C}$

Exercice G.11 (*)0

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

	♥	♦	♠	♣
As	As	As	As	As
R	R	R	R	R
D	D	D	D	D
V	V	V	V	V
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7

- Déterminer les probabilités des événements suivants:
 - A : "La carte tirée est un pique";
 - B : "La carte tirée est une figure";
 - C : "La carte tirée est noire";
 - D : "La carte tirée est le valet";
- Déterminer les probabilités des événements suivants:
 - $A \cap B$
 - $A \cap C$
 - $A \cup B$
 - $B \cup C$
 - $C \cap D$
 - $C \cup D$
 - $C \cap \bar{D}$
 - $\bar{C} \cup \bar{D}$

Exercice G.12 (*)0

Un dé dodécaédrique comporte 12 faces identiques numérotées de 1 à 12. On suppose que ses faces ont chacune la même probabilité de sortie.

Lors d'un jet, on note la face supérieure du dé.

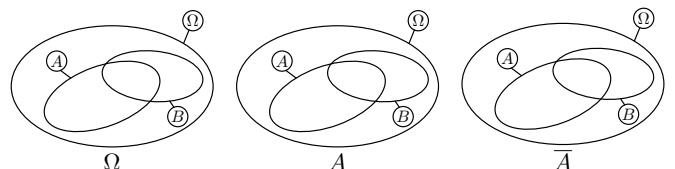
On considère les événements:

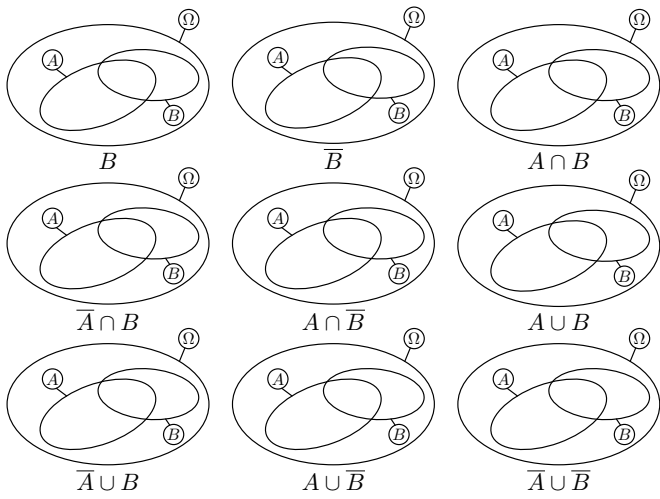
- A : "Le nombre obtenu est pair"
- B : "Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 9"
- C : "Le nombre obtenu est strictement inférieure à 6"

- Déterminer les probabilités des événements A, B et C .
- Donner, sans justification, les probabilités des événements suivants:
 - $A \cap B$
 - $\bar{A} \cap B$
 - $B \cap C$
 - $B \cup C$
 - $B \cap \bar{C}$
 - $A \cup \bar{C}$

Exercice G.13 (*)0

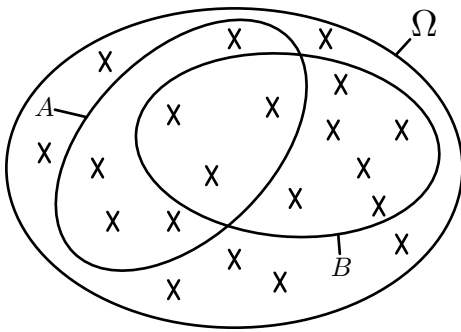
Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux événements A et B de Ω . Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.





Exercice G.14 (*)0

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est représenté ci-dessous. On considère également deux événements A et B de Ω :



Les croix représentent les événements élémentaires composant Ω ; chacun des événements élémentaires sont équiprobables.

1. Combien d'événements élémentaires composent l'univers Ω .
2. Déterminer les probabilités de A et de B .
3. a. Déterminer les probabilités des deux événements suivants : $A \cup B$; $A \cap B$
 b. Ecrire une relation entre les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(B)$; $\mathcal{P}(A \cup B)$; $\mathcal{P}(A \cap B)$

Exercice G.15 (*)0

Une urne contient vingt boules numérotés de 1 à 20 ; les cinq premières sont rouges, les sept suivantes sont bleues, les huit suivantes sont jaunes.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
 - a. A : "La boule tirée porte un numéro pair" ;
 - b. B : "La boule tirée est rouge" ;
 - c. C : "La boule tirée est rouge ou porte un numéro pair" ;
 - d. D : "La boule tirée est rouge et porte un numéro pair".
2. L'égalité suivante est-elle vérifiée ?
 $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$
 Justifier votre réponse.

Exercice G.16 (*)0

Soit $(\Omega ; \mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$\mathcal{P}(A) = 0,36$; $\mathcal{P}(B) = 0,27$

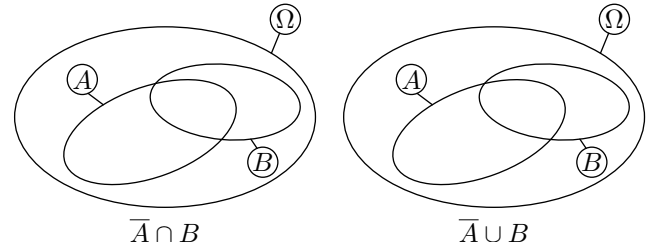
1. Que peut-on dire de A et de B si : $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,63$?
2. On suppose que : $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,5$
 - a. Que peut-on dire de A et de B ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'un événement réalise simultanément les événements A et B .

Exercice G.17 (*)0

Dans un univers Ω muni de la loi de probabilité \mathcal{P} , on considère les deux événements A et B tels que :

$\mathcal{P}(A) = 0,37$; $\mathcal{P}(B) = 0,48$; $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,62$

1. Déterminer la valeur de $\mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Représenter ci-dessous les deux ensembles indiqués sous chacune des figures :



3. a. Déterminer la probabilité des événements suivants : \bar{A} ; $\bar{A} \cap B$
 b. En déduire la probabilité de l'événement $\bar{A} \cup B$.

Exercice G.18 (*)0

Dans un établissement du secondaire, un événement sportif regroupe les élèves de seconde pratiquant le football et le basket-ball. L'expérience aléatoire considérée consiste à choisir au hasard un élève parmi les élèves de seconde. On considère les deux événements :

- F : "L'élève choisit pratique le football"
- B : "L'élève choisit pratique le basket-ball"

1. On donne la probabilité suivante : $\mathcal{P}(\overline{B \cup F}) = 0,6$
 Donner la probabilité de choisir un élève participant à cet événement.
2. On donne les probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(F) = 0,28$; $\mathcal{P}(B) = 0,22$
 Sachant que dans cet établissement, il y a 30 élèves de seconde pratiquant à la fois le basket-ball et le football, déterminer le nombre d'élèves de seconde dans cet établissement.

Exercice G.19 (*)0

Une entreprise d'horlogerie vérifie son stock composé de 500 montres d'un même modèle. Il est particulièrement attentif aux défauts sur le bracelet et sur le cadran de chaque montre.

- On considère les deux événements suivants :
- B : "la montre possède un défaut sur le bracelet"
 - C : "la montre possède un défaut sur le cadran"
1. Sachant que sur son stock, 20 montres présentent un défaut sur le bracelet et 36 présentent un défaut sur le cadran, déterminer la probabilité des événements B et C .

2. La probabilité de choisir au hasard une montre possédant au moins un défaut est de 0,1.

- a. Déterminer la probabilité de choisir une montre présentant les deux défauts.
- b. En déduire le nombre de montres possédant les deux défauts recherchés.

Exercice G.20 (*)0

Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire deux boules au hasard simultanément.

1. On considère l'évènement :
A: "les deux boules tirées sont de la même couleur".

Déterminer la probabilité de l'évènement A.

2. On considère l'évènement :
A: "une seule des deux boules tirées est rouge".

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice G.21 (*)0

Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes. Aucune justification n'est attendue :

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

- a. $\frac{5}{8}$
- b. $\frac{21}{32}$
- c. $\frac{11}{32}$
- d. $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

- a. $\frac{105}{248}$
- b. $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$
- c. $\frac{21^2}{32^2}$
- d. $\frac{5^2}{8^2}$

H. Barycentre :

Exercice H.1 (*)0

On considère un triangle PQR. G le barycentre de (P; -2), (Q; 2), (R; 1).

1. Montrer que (RG) est parallèle à (PQ).

2. a. Construire le barycentre O de (Q; 2) et (R; 1).
b. Montrer que les points P, O et G sont alignés; en déduire une construction simple G.

I. Géométrie plane :

Exercice I.1 (*)0

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle C de centre I et M un point quelconque de ce cercle C.

Le point D est défini par : $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IM} = \vec{ID}$

1. Prouver que les produits scalaires $\vec{AD} \cdot \vec{BM}$ et $\vec{BD} \cdot \vec{AM}$ sont nuls.

En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer \vec{ID} en fonction de \vec{IG} .

par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace :
 $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = MI^2 - IA^2$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que :
 $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$

Exercice I.4 (*)0

Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Caractériser l'ensemble des points tels que :

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0$
- b. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB^2$
- c. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -AB^2$

2. On suppose que AB=6. Caractériser l'ensemble des points tels que :

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 18$
- b. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -1$

Exercice I.2 (*)0

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Exercice I.3 (*)0

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne

Exercice I.5 (*)0

Dans l'espace, on considère deux points A et B distincts tels que AB=4. On note I le milieu du segment [AB] :

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a l'égalité:

$$MA^2 - MB^2 = 2 \cdot \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

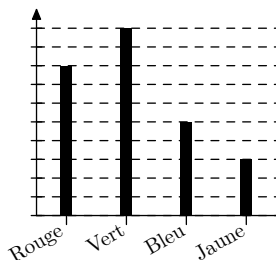
2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant:
 $MA^2 - MB^2 = 16$

J. Statistiques:

Exercice J.1 (*)0

On a demandé à des étudiants d'indiquer leur couleur préférée parmi le rouge, le vert, le bleu et le jaune. Les résultats de cette étude est donnée dans le diagramme ci-dessous:

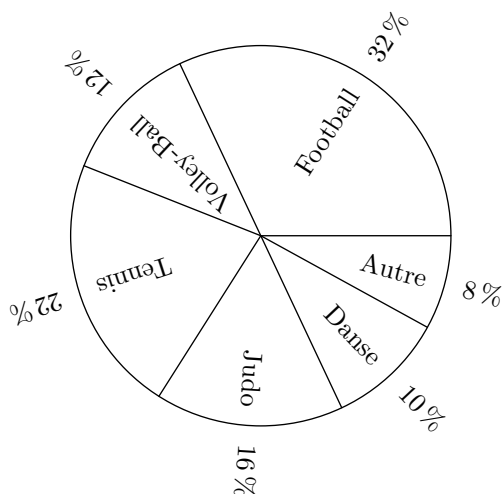
Malheureusement la graduation de l'axe des ordonnées a été effacée.



- Quel est le pourcentage des personnes ayant choisies la couleur "rouge".
- Dresser le diagramme circulaire correspondant à cette étude.

Exercice J.2 (*)0

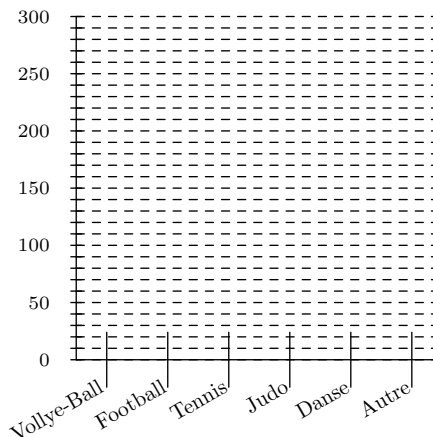
Dans un établissement, une étude a porté sur le sport préféré des adolescents de 14 ans et 16 ans. Les résultats sont résumés dans le diagramme ci-dessous:



- Cette étude a porté sur une population dont l'effectif total était de 879 individus. Compléter le tableau des effectifs, à l'unité près:

Sport	Volley ball	Football	Tennis	Judo	Danse	Autre
Effectif						

- Compléter le graphique ci-dessous pour obtenir le diagramme en baton associé à cette série statistique.



Exercice J.3 (*)0

Le tableau ci-dessous donne les prix du litre d'essence trois années distinctes:

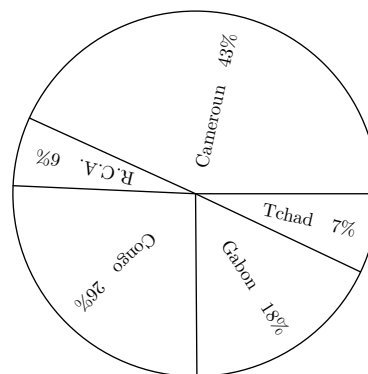
Année	1973	1980	1998
Prix (en centimes)	121	327	638

On donnera les résultats aux questions suivantes arrondies au dixième près.

- Calculer les pourcentages d'augmentation de 1973 à 1980, puis de 1980 à 1998.
- Calculer le pourcentage d'augmentation de 1973 à 1998.

Exercice J.4 (*)0

Le diagramme circulaire représente l'endettement en 2003 de 5 pays d'Afrique centrale. Il a été obtenu sur le site de la Banque Mondiale. On sait uniquement que le Cameroun avait une dette de 9,1 milliard de dollars en 2003.



On arrondira toutes les valeurs trouvés au dixième de milliard.

- En déduire la dette de l'ensemble de ces cinq pays d'Afrique centrale.
- Donner l'endettement du Tchad en 2003.

(Chiffres tirées de Jeune Afrique 2006)

Exercice J.5 (*)0

Paul, Marie et Laurent se réunissent pour acheter a Plaga-Station3. Voici le tableau récapitulatif des sommes versées par chacun d'eux :

	Paul	Marie	Laurent
	172	135	251

- Pour chaque personne, déterminer le pourcentage de la somme versée relativement au prix total. On arrondira le résultat au dixième près.
- S'ils avaient partagé équitablement l'achat de cette console de jeux, quelle aurait-elle la somme versée par chacun d'eux?

Exercice J.6 (*)0

Un métal précieux est obtenu par un mélange dont le poids est constitué de 60 % de cuivre et de 40 % d'argent. 100 g de cuivre coûte 2 euros et 100 g d'argent coûte 25 euros.

- Un bijoutier confectionne une bague de 120 g de cet alliage. Calculer le prix de revient de cette bague.
 - Souhaitant réaliser un bénéfice de 15 % sur la vente de la bague, quel doit être le prix de vente de cette bague?
- Sur un an, les cours des métaux précieux ont évolués : le cuivre a augmenté de 30 % et l'argent de 7 %.
 - Déterminer le nouveau prix de confection de cette bague.
 - Donner le pourcentage d'augmentation du prix de confection de cette bague sur un an.

Exercice J.7 (*)0

Dans une usine de conditionnement des bouteilles d'eau minérale, une étude statistique s'est intéressée à mesurer le remplissage des bouteilles en bout de chaînes.

Voici un tableau récapitulant les données recueillies :

Volume d'eau (en l)	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
Nombre de bouteilles	23	79	378	562	35	4

Les machines procédant au remplissage des bouteilles sont considérées comme "bien réglées" si elles vérifient les deux conditions suivantes :

- ➔ Les bouteilles dépassant un volume d'eau de 1,5 l ne doivent pas représenter plus de 5 % des bouteilles testées.
- ➔ La fréquence des bouteilles non-contenues dans l'intervalle [1,45 ; 1,55] ne doit pas dépasser 10 %.

Déterminer si les machines de cette usine sont "bien réglées". Justifier toutes vos affirmations.

Exercice J.8 (*)0

- Donner la moyenne de la série statistique suivante arrondie au centième près :

8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 10 ; 5,5 ; 7
- On donnera les valeurs demandées arrondies au centième près :
 - Donner la moyenne de cette série si on retranche 2 à

chacune des valeurs de la série.

- Donner la moyenne de cette série si on multiplie chacune des valeurs de la série par 2.

Exercice J.9 (*)0

Voici les moyennes annuelles et les coefficients du baccalauréat que chacun d'eux présentent.

	FR.	Ph	Ma	LV1	LV3	HGE	ESC	EPS	ECO	SPE
Alain	11	12	5	12	9	12	1	7	×	8
Bac L	5	7	2	4	4	4	2	2	×	4

	FR.	Ph	Ma	LV1	LV3	HGE	ESC	EPS	ECO	SPE
Anne	12	5	9	12	11	5	5	13	15	9
Bac ES	4	4	5	3	3	5	2	2	7	2

	FR.	Ph	Ma	LV1	HGE	SVT	PHY	EPS	SPE
Henry	5	2	15	8	10	9	12	11	15
Bac S	4	3	7	3	3	6	6	2	2

- En ayant au baccalauréat les mêmes notes que ses moyennes annuelles, Henry aura-t-il le bac?
- Justifier qu'Alain n'aura pas le baccalauréat avec ses moyennes annuelles et qu'il passera au rattrapage.
 - En choisissant les mathématiques comme matière de rattrapage, quel note minimale doit-il avoir pour obtenir le baccalauréat.

Exercice J.10 (*)0

Voici les 25 notes d'élèves de troisième lors d'un contrôle :

10,5 - 4,5 - 9,25 - 11 - 8,5 - 8,5 - 15,5 - 5 - 13,5
 7,5 - 6,5 - 12,5 - 15 - 13,25 - 17,25 - 5,75 - 2 - 13,25
 15,5 - 6,5 - 7,25 - 12,75 - 7,25 - 15 - 8,75

- Calculer la moyenne de ces notes.
- On décide maintenant d'étudier cette série statistique via le tableau des effectifs correspondants :
 - Compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

Note	[0;2[[2;4[[4;6[[6;8[[8;10[[10;12[
Effectif						

Note	[12;14[[14;16[[16;18[[18;20]
Effectif				
 - Déterminer la moyenne de cette série mais calculée à partir du tableau des effectifs.

Exercice J.11 (*)0

Dans un lycée, nous étudions la taille de trois groupes d'élèves participant à l'A.S. Voici un tableau récapitulatif de leurs tailles :

Groupe A		
[1,50 ; 1,60[[1,60 ; 1,70[[1,70 ; 1,80[
2	5	3

Groupe B		
[1,50 ; 1,60[[1,60 ; 1,70[[1,70 ; 1,80[
0	5	6

Groupe C		
[1,50 ; 1,60[[1,60 ; 1,70[[1,70 ; 1,80[
3	4	1

Les différents calculs seront arrondis au centième près.

- Calculer la taille moyenne de chaque groupe d'étude.
- En ne considérant plus les trois groupes mais les 29 élèves participant à l'AS, déterminer la moyenne des participants.
- On admet les résultats suivants :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Effectif total	10	11	8
Taille moyenne du groupe	1,66	1,70	1,63

- Déterminer la taille moyenne des trois groupes en vous servant du tableau ci-dessus.
- Que remarque-t-on?

Exercice J.12 (*)0

Une série statistique a une moyenne de 21 alors que la somme de la liste de ses valeurs vaut 273.

De combien de nombres cette série statistique est-elle composée?

Exercice J.13 (*)0

Ci-dessous, le tableau représente le nombre de couples dont les enfants, de moins de 25 ans, vivent encore sous le toit familial.

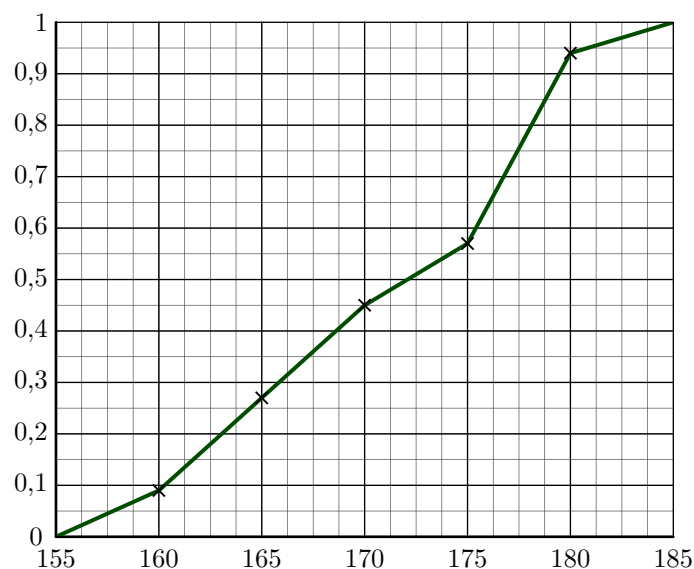
Nombre d'enfants	Nombre de couples (en milliers)
0	5420
1	3048
2	2880
3	1233
4 et plus	651

- Quelle est la classe modale de cette série statistique?
- Si chacun des 651 000 couples de la ligne "4 et plus" avait exactement 4 enfants, quelle serait le nombre d'enfants, en moyenne, par couple?
- Une autre étude affirme que le nombre moyen d'enfants de moins de 25 ans vivant encore chez leur parent est de 1,18. Calculer le nombre moyen d'enfants, parmi les 651 000 couples qui ont 4 enfants et plus, vivants encore

dans leur foyer.

Exercice J.14 (*)0

Le graphique ci-contre représente le polygone des fréquences cumulées croissantes d'une série statistique représentant la taille d'un échantillon d'élève d'un lycée.



Ce diagramme a été tracé à partir d'un tableau des effectifs où les élèves ont été rangés dans les classes :

[155 ; 160[; [160 ; 165[; [165 ; 170[
[170 ; 175[; [175 ; 180[; [180 ; 185[

- Déterminer, approximativement la fréquence associée à la classe [155 ; 160[
 - Déterminer, approximativement la fréquence associée à la classe [175 ; 180[
- En laissant les traits de construction sur le graphique :
 - Déterminer la médiane de cette série statistique.
 - Déterminer le premier et troisième quartile de la série.

Exercice J.15 (*)0

On dispose d'une série statistique qu'on partage en deux sous-groupes.

- Le premier sous-groupe a une moyenne de 12 et la somme des valeurs de la série vaut 288. Déterminer l'effectif du premier sous-groupe.
- Le second groupe a une moyenne de 11,5 et son effectif est de 20. Calculer la moyenne de la série complète au centième près.

Exercice J.16 (*)0

Durant une compétition, on effectue la pesée de 40 judokas. Le poids moyen calculé est de 72 kg.

Une vérification de la balance montre qu'elle était mal réglée et quelle indique 500 g de moins que le poids réel sur chacune des pesées.

Quel est le poids moyen réel des 40 judokas? Quelle propriété utilise-t-on pour cet affirmation?

Exercice J.17 (*)0

Dans un lycée sont répartis de la manière suivante :

- 7 classes de Seconde avec en moyenne 32 élèves par classe.
- 5 classes de première avec en moyenne 28 élèves par classe.
- 4 classes de Terminales avec une moyenne 25 élèves par classe.

1. Déterminer le nombre d'élèves que comporte chaque niveau.
2. Combien de classe cet établissement compte-t-il au total?
3. En déduire la moyenne du nombre d'élèves par classe pour cet établissement.

Exercice J.18 (*)0

Dans un lycée, il y a quatre classes de seconde contenant respectivement 30, 35, 28 et 25 élèves. Les moyennes des notes d'éducation physique de ces classes sont respectivement 12, 11, 13 et 14. Quelle est la moyenne des notes d'éducation physique pour l'ensemble des quatre classes de seconde du lycée.

Exercice J.19 (*)0

La fin du trimestre arrive et les derniers contrôle se rapprochent. Un élève réfléchit à améliorer sa moyenne :

1. Au bout de quatre contrôles, sa moyenne était de 11. Quel était la somme de ses notes?
2. Sa cinquième note est 13. Quel est sa nouvelle moyenne?
3. Un sixième et dernier contrôle se préparant, il souhaite terminer ce trimestre avec une moyenne de 12. Quelle note doit-il obtenir à ce dernier contrôle?

Exercice J.20 (*)0

1. Dans une classe de 31 élèves, la moyenne d'âge des élèves est de 15,5 ans. En tenant compte de l'âge du professeur de mathématique, la moyenne de la classe passe à 15,86 ans.

Déterminer l'âge du professeur en arrondissant à l'année près.

2. Dans une classe de 33 élèves, la moyenne annuelle des notes de mathématiques des 18 filles est de 12,4, et celle des garçons est 11,2.

Quelle est la moyenne des notes en mathématiques de la classe? On arrondira cette moyenne au centième près.

Exercice J.21 (*)0

1. En milieu de trimestre, un élève a 11 de moyenne. Au contrôle suivant, l'élève obtient une note de 13 et sa moyenne passe à 11,5. Combien alors a-t-il eu de notes?
2. Avant la fin du trimestre, cet élève a une moyenne de 12,75 avec 5 notes. Quelle note doit-il obtenir, à la dernière note du trimestre, afin d'avoir une moyenne de 13?

Exercice J.22 (*)0

Voici Les résultats du recensement démographique de la population française organisée en 2007.

Classe d'âge	[0 ; 20[[20 ; 65[[65 ; 100]	Effectif total
Population	24,9 %	58,8 %	16,3 %	63 753 140

(pour cet exercice, on suppose la population âgée de plus de 100 ans d'effectif négligeable)

1. Déterminer le nombre d'individu de la population française ayant moins de 20 ans.
2. Déterminer l'âge moyen des français à l'année près.

Exercice J.23 (*)0

Une étude est portée sur la population de trois pays : l'Allemagne, l'Espagne et la France.

Voici un tableau précisant la démographie de chacun de ces pays en 1998 :

Pays	Allemagne	Espagne	France
Population (en millions)	82,3	39,4	58,8
Personnes de plus de 25 ans (en %)	68,3	56	70,7

Déterminer la fréquence, en pourcentage arrondi au dixième près, des personnes agée de plus de 25 ans sur l'ensemble des ces trois pays

Exercice J.24 (*)0

Dans un groupe d'étude, on a relevé la taille de chacun des élèves. Ce qui nous a permis d'obtenir la série statistique suivante :

1m 62 ; 1m 55 ; 1m 58 ; 1m 51 ; 1m 60 ; 1m 73 ; 1m 69 ; 1m 65
 1m 62 ; 1m 54 ; 1m 66 ; 1m 56 ; 1m 59 ; 1m 60 ; 1m 64 ; 1m 57
 1m 72 ; 1m 58 ; 1m 67 ; 1m 52 ; 1m 70 ; 1m 62 ; 1m 51 ; 1m 74

1. Donner l'effectif total de ce groupe.
2. Calculer la taille moyenne de ce groupe ; on arrondira cette valeur au centimètre près.
3. On construit des classes d'amplitude de cinq centimètres. Compléter le tableau suivant :

Classes	[1,50;1,55[[1,55;1,60[[1,60;1,65[[1,65;1,70[[1,70;1,75[
Effectif					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					
Fréquence (en %)					
Fréquence cumulé décroissante (en %)					

4. a. Combien de personnes mesurent au plus 1m 65?
 b. Combien de personnes mesurent plus de 1m 65?

c. Combien de personnes mesurent au moins 1m 60?

Exercice J.25 (*)0

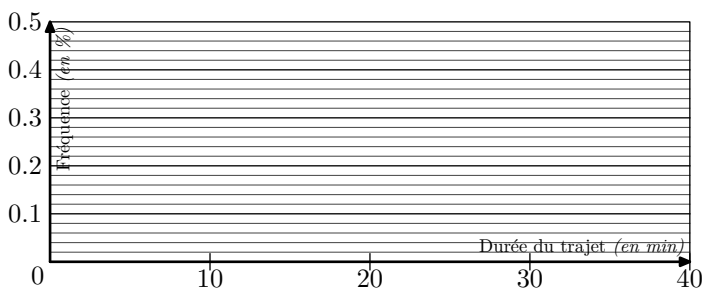
En étudiant, sur une classe, la durée du déplacement pour se rendre à l'école. Voici l'ensemble de ces durées :

5 ; 15 ; 15 ; 25 ; 5 ; 38 ; 37 ; 20 ; 3 ; 15 ; 7 ; 2 ; 30 ; 10
16 ; 2 ; 5 ; 5 ; 20 ; 25 ; 25 ; 30 ; 3 ; 11 ; 25 ; 8 ; 13

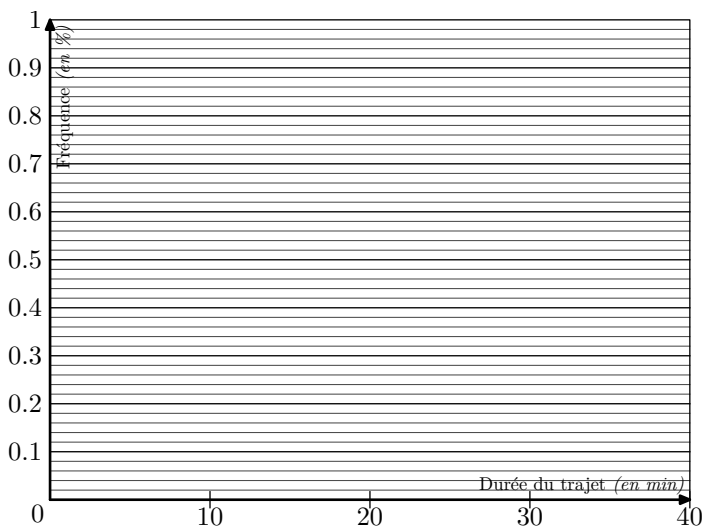
1. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les fréquences au millième près.

Classe (en min)	[0; 10[[10; 20[[20; 30[[30; 40[
Effectif				
Fréquence				
Fréquence Cumulé Croissant				

2. Construire l'histogramme des fréquences ci-dessous :



3. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes :



Exercice J.26 (*)0

On a relevé la taille, en centimètre, de vingt athlètes :

178 - 176 - 172 - 184 - 182 - 182 - 174 - 176 - 184 - 180
180 - 176 - 180 - 174 - 172 - 176 - 180 - 182 - 176 - 180

1. Calculer la taille moyenne de cette série statistique (arrondir au dixième près).

2. a. Ordonner l'ensemble des tailles relevées.
b. En déduire la valeur médiane de cette série statistique.

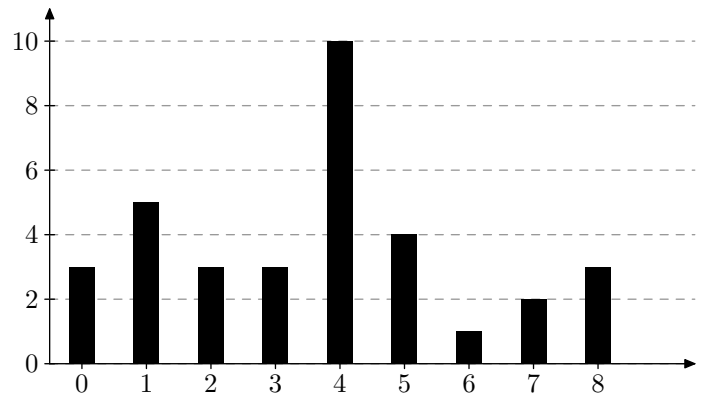
3. En regroupant les tailles relevées en classe de 5 cm d'amplitude :

[170;175[; [175;180[; [180;185[; [185;190[

Construire l'histogramme associé.

Exercice J.27 (*)0

On a demandé à des adolescents de 14 ans à 18 ans, combien de fois ils allaient au cinéma par mois. Le diagramme en barres ci-dessous présente leurs réponses



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de séance par mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif									
Effectif. cum. croissant									

2. Combien, en moyenne, un adolescent voit-il de films par mois ? (arrondir au dixième près).

3. Donner l'étendue de cette série statistique.

4. Quel est la classe modale?

5. A l'aide de la ligne des effectifs cumulés croissants :

- a. Déterminer la médiane de cette série statistique.
- b. Déterminer le premier et troisième quartile.

Exercice J.28 (*)0

1. Voici les notes de quatres groupes d'élèves au brevet blanc. Compléter les cases des différents indicateurs ci-dessous :

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4
Notes	5 - 6 - 10 10 - 11 - 12 12 - 14	6 - 8 - 8 - 8 10 - 11 - 14 15	8 - 8,5 - 8,5 9 - 11 - 11 12 - 12	6 - 6 - 7 - 8 10 - 11 - 11 15
Moyenne				
Etendue				
Médiane				

2. Comparer d'un point de vue qualitatif à la lueur des indicateurs calculées précédemment :

- a. Le groupe 1 et le groupe 2;
- b. Le groupe 2 et le groupe 4;
- c. Le groupe 1 et le groupe 3.

Exercice J.29 (*)0

Un sondage a été effectué auprès des élèves des classes de seconde d'un établissement afin de connaître la distance qui

séparent ces élèves de leur établissement. Voici le tableau résumant cette étude :

Distance (en km)	[0;5[[5;10[[10;15[[15;20[[20;25[[25;30[
Fréquence (en %)	14	30	25	18	8	5

- Déterminer en moyenne la distance parcourue par un élève pour rejoindre son établissement.
- Déterminer la médiane de cette série statistique.
 - Déterminer le premier et le troisième quartile.

Exercice J.30 (*)0

Voici le tableau des effectifs des notes des élèves lors du brevet des collèges :

Note	[0 ; 4[[4 ; 8[[8 ; 12[[12 ; 16[[16 ; 20[
Effectif	5	32	61	80	15
Fréquence en %					
Fréquence cumulée croissante					

- Donner la classe modale de cette série statistique.
- Calculer la moyenne de l'établissement lors de cet examen.
- Compléter les lignes des fréquences et fréquences cumulées croissantes du tableau ci-dessus.
 - Construire un repère orthonormé où sera représenté sur l'axe des abscisses les notes ($1\text{ cm} = 2\text{ points}$) et sur les ordonnées ($1\text{ cm} = 10\% \text{ élèves}$). Représenter dans ce repère la courbe des fréquences cumulées croissantes.
 - En déduire la valeur de la médiane. (*Laisser vos traits de constructions apparents*)

Exercice J.31 (*)0

On a étudié sur un groupe de 60 sportifs les fréquences cardiaques au repos (FCR). C'est à dire le nombre de battements de coeur par minute après une longue période de calme et de repos. Voici les âges et les FCR de la population

Age	FCR	Age	FCR	Age	FCR	Age	FCR
42	42	50	50	37	52	41	54
41	43	35	50	42	52	31	55
61	45	24	50	21	52	50	55
51	45	23	50	40	53	32	55
41	46	52	50	34	53	22	55
27	46	36	51	35	53	42	55
33	46	31	51	28	53	52	55
40	48	35	51	55	53	18	57
55	48	60	51	49	53	51	59
31	48	29	52	31	53	22	59
32	48	30	52	35	53	23	59
35	48	49	52	38	54	53	59
44	49	32	52	53	54	50	59
40	50	40	52	42	54	28	59
36	50	47	52	54	54	47	60

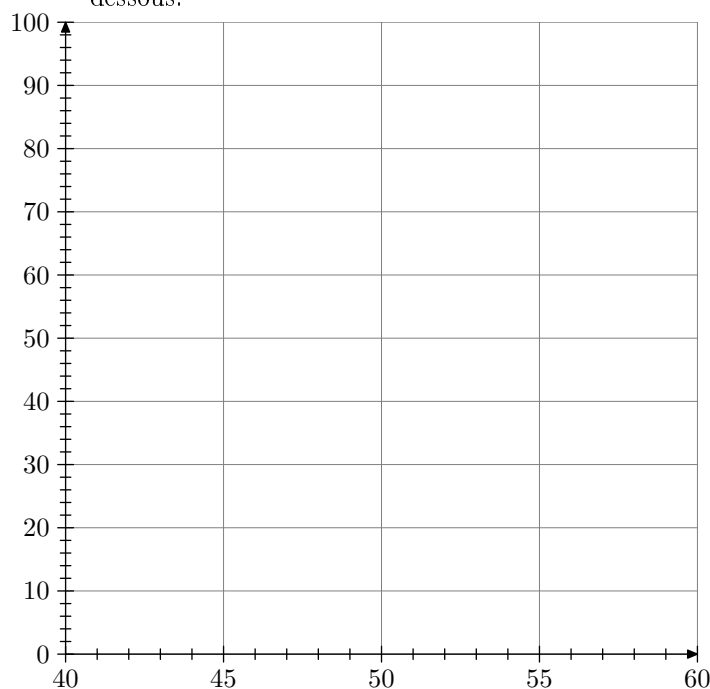
On prendra comme caractères d'étude le FCR de la population d'étude :

- Donner la médiane de cette série statistique.
- Compléter le tableau suivant :

Classe	[40 ; 45[[45 ; 50[[50 ; 55[[55 ; 60]
Effectif				
Fréquence				
Fréq cum croissante				

Les fréquences seront exprimés en pourcentage à 0,1% près.

- Tracer dans le tableau ci-dessous, la courbe des fréquences cumulées croissantes dans le repère ci-dessous.



- b. En laissant vos constructions sur la figure, donner l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 50 %
- c. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice J.32 (*)0

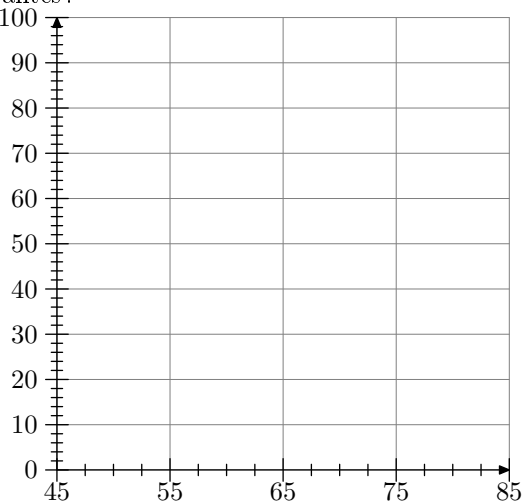
Jean, passionné d'un jeu vidéo, a relevé la durée en secondes des 40 parties qu'il a joué :

49	52	57	57	57	58	58	59	60	60	60	62	63	63	63	63	64	64	64	64
65	65	66	67	69	69	70	70	72	74	74	75	75	76	77	78	79	80	80	80

1. Donner la valeur médiane de cette série.
C'est à dire la durée tel que :
- Le nombre de partie ayant une durée inférieure à celle-ci représente 50 % des parties considérées.
 - Ainsi, que les parties représentant une durée inférieure représentent également 50 %
2. a. Compléter le tableau ci-dessous :

Classe	[45;50[[50;55[[55;60[[60;65[[65;70[[70;75[[75;80[[80;85[
Eff.								
Fréq.								
Fréq cum croiss.								

- b. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes :



- c. Chercher à partir de ce graphique la valeur de la médiane

Exercice J.33 (*)0

Voici les températures moyennes mensuelles relevées, entre 1994 et 2003, dans la ville de Sète au sud de la France :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Température	8,3	9,4	12,1	13,5	17,5	21,2

Mois	Juillet	Août	Sept.	Octob.	Novem.	Décem.
Température	23,4	22,8	18,6	15,7	10,8	8,5

- Déterminer la température moyenne annuelle pour la ville de Sète.
- Les scientifiques estiment une augmentation globale de la température de $1,5^{\circ}\text{C}$ en 2020.
 - Reproduire le tableau précédent en acceptant les prévisions des scientifiques.
 - Calculer alors la température moyenne annuelle de cette ville en 2020.

Exercice J.34 (*)0

On étudie le trajet effectué par les élèves des classes de secondes chaque jour pour se rendre de leur domicile au lycée. On relève le temps (*exprimé en minutes*) mis pour ce trajet :

Temps de transport par jour	[0; 10[[10; 30[[30; 40[[40; 50]
Nombre d'élèves	32	54	17	3

- Recopier le tableau ci-dessus, en y ajoutant les fréquences et les fréquences cumulées croissantes exprimées en pourcentage à 0,1 % près.
 - Déterminer la classe médiane de cette série statistique.
- Déterminer le temps moyen de transport, arrondi à la minute, par jour d'un élève de seconde de ce lycée.
- Dans un repère orthogonal $(O; I; J)$ tel que :
 $\Rightarrow OI = 0,2 \text{ cm}$ $\Rightarrow OJ = 0,1 \text{ cm}$
 Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
 - Déterminer à l'aide de cette courbe, la valeur médiane de cette série statistique.

Exercice J.35 (*)0

il faut que je refasse tous les exercices ; pour la courbe des fréquences cumules, il faut que je ne prennes pas le milieu d'une classe mais mais les bornes de chaque borne ce qui représentera davantage l'interpolation lineaire.

K. Géométrie dans l'espace :

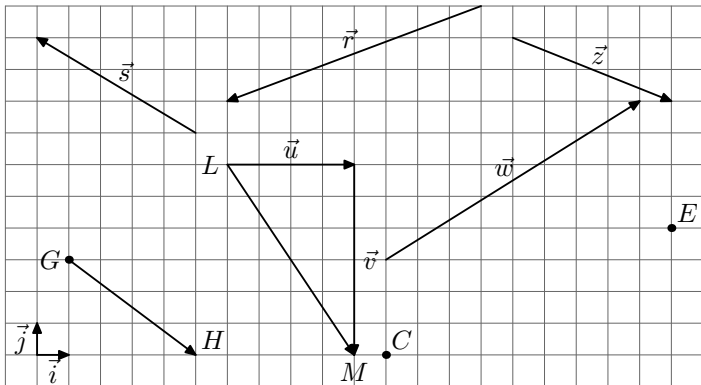
Exercice K.1 (*)0

- Placer le point D tel que : $\vec{CD} = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$.
 - Placer le point F tel que : $\vec{EF} = -3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$
- Compléter l'égalité suivante :

$$\vec{GH} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$$

- Compléter les pointillés suivants :

- a. $\vec{u} = \dots \cdot \vec{i}$ b. $\vec{v} = \dots \cdot \vec{j}$
 c. $\vec{LM} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$ d. $\vec{w} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$
 e. $\vec{z} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$ f. $\vec{r} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$
 g. $\vec{s} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$



Exercice K.2 (*)0

1. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires en précisant le coefficient de colinéarité de \vec{u} et de \vec{v} :

- a. $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{3}{4} \cdot \vec{v}$ b. $3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
 c. $3 \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{0}$ d. $-2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$

2. Parmi les couples de vecteurs ci-dessous, lesquels sont colinéaires entre eux. On précisera alors le coefficient de proportionnalité de \vec{u} et de \vec{v} :

- a. $\vec{u}(3;2)$ et $\vec{v}(9;4)$
 b. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(4,2;6,3)$
 c. $\vec{u}(-1;2)$ et $\vec{v}(4;-8)$
 d. $\vec{u}(0,7;4,1)$ et $\vec{v}(-2,8;16,4)$

3. Pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} colinéaires, comparer le co-

efficient de colinéarité de \vec{v} et de \vec{u} relativement au coefficient de colinéarité de \vec{u} et de \vec{v} .

Exercice K.3 (*)0

Soit A, B, C trois points du plan vérifiant la relation :

$$-\frac{1}{2} \cdot \vec{AB} + \frac{5}{2} \cdot \vec{BC} - \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{0}$$

Montrer que les points A, B, C sont alignés.

Exercice K.4 (*)0

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.

Déterminer un vecteur résultant de chacune des expressions :

- a. $\vec{AB} + \vec{IJ} - \vec{DJ}$ b. $\vec{AC} + \vec{JA}$ c. $\vec{AI} + \vec{AD}$

Exercice K.5 (*)0

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points :

$$A(2;1;3) \quad ; \quad B(-3;-1;7) \quad ; \quad C(3;2;4)$$

1. Déterminer les coordonnées du point H barycentre du système :

$$\{(A;-2); (B;-1); (C;2)\}$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que :

$$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$$

En préciser les éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que :

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.