SavoirPlus

Apprendre tout partout !

République du Congo, Pointe-Noire

www.mysavoirplus.com

Tel : 00 242 06 736 17 00 / + 242 06 736 18 00

- Résumé de cours - Exercices corrigés - Examen Antérieur - Workgroups - Jeux éducatif - Orientation - Moteur de recherche

COURS MATHEMATIQUE 1ere C & D

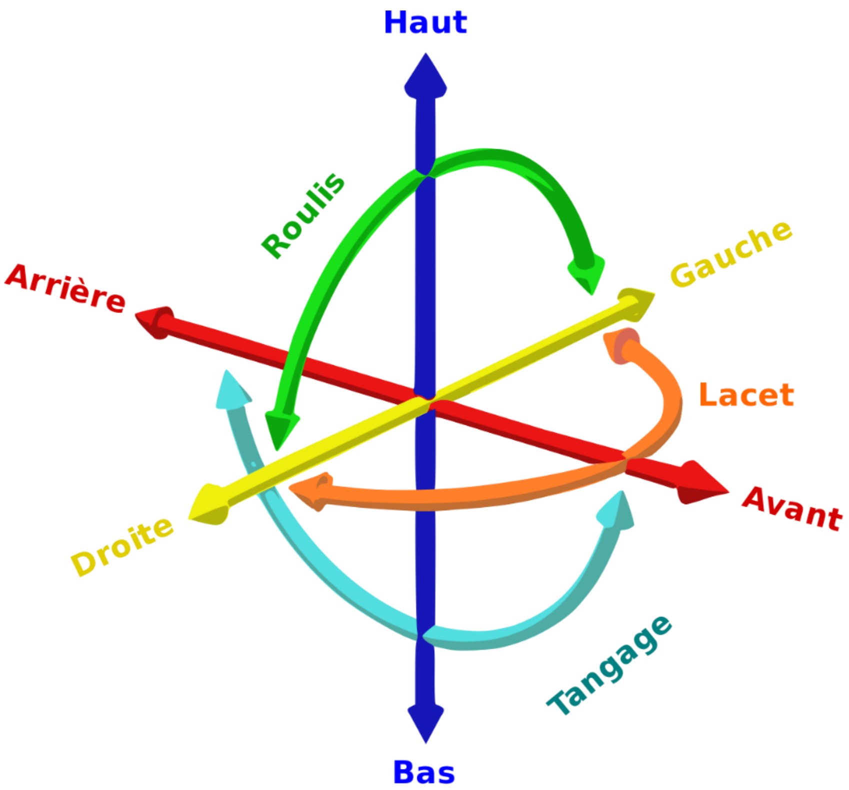


Table des matières

Première partie

ANALYSE

Chapitre 1

CALCULS SUR LES POLYNÔMES

1.1 Définition

Soit p une fonction numérique.
On dit que p est un polynôme s'il existe un entier naturel n et des nombres réels a_0, a_1,..., a_n tels que pour tout réel x, on a : $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
Les réels a_0, a_1,..., a_n sont appelés coefficients avec $a_n \neq 0$, x la variable réel et n le degré.

1.2 Degré et coefficient dominant d'un polynôme

Soit p un polynôme non nul tel que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et n un entier naturel.
▷ Le degré du polynôme p est n et on note $deg(p) = n$ où n est le degré le plus élevé du polynôme ;
▷ Le coefficient dominant de p est a_n.

Exemple

$p(x) = 5x^6 + x^5 + 5x^4 - 6x + 7$ est un polynôme de degré 6 et de coefficient dominant 5.

1.3 Polynôme nul

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque

Un polynôme nul n'a pas de degré.

1.4 Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux s'ils ont le même degré et les termes de même rang sont égaux, c'est-à-dire les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exercice

Soit P et Q deux polynômes tels que :
$P(x) = (a-3)x^2 + (2b+c)x - 3a + b$ et $Q(x) = x^2 - (a+b)x + 2c - 1$.
Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = Q(x)$.

1.5 Opérations sur les polynômes

1.5.1 Somme de polynômes

Soit p, q et h trois polynômes.
La somme de deux polynômes $p(x)$ et $q(x)$ est un polynôme h, tel que $h(x) = p(x) + q(x)$.
Le degré du polynôme h est inférieur ou égal au degré le plus élevé.

Exercice

Soit p et q deux polynômes tels que : $p(x) = 3x^5 + 7x^4 - 3x^2 + 2$ et $q(x) = 2x^4 - 5x^3 + x + 4$.

1. Calculer les polynômes f et g tels que : $f(x) = p(x) + q(x)$ et $g(x) = p(x) - q(x)$.
2. Quel est le degré et le coefficient dominant de f et g ?

1.5.2 Produits de polynômes

Soit p, q et h trois polynômes.
Le produit de deux polynômes p et q est un polynôme h tel que $h(x) = p(x) \times q(x)$.
Le degré de h est tel que : $d°(h) = d°(p) + d°(q)$

Exercice

Soit p et q deux polynômes tels que : $p(x) = 3x^5 + 7x^4 - 3x^2 + 2$ et $q(x) = 2x^4 + x + 1$.

1. Calculer $f(x) = p(x) \times q(x)$.
2. Quel est le degré et le coefficient dominant de f ?

1.6 Valeur numérique d'un polynôme

Définition

Soit α et β deux nombres réels, p un polynôme non nul.
On dit que β est une valeur numérique de p lorsque x prend la valeur α et p prend la valeur β, c'est-à-dire $p(\alpha) = \beta$.

Exercice

On donne $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - 1$. Calculer $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(-1)$ et $p(-2)$.

1.7 Racine ou Zéro d'un polynôme

Définition

Soit α un nombre réel et p un polynôme non nul.
On dit que α est une racine ou zéro du polynôme p lorsque $p(\alpha) = 0$.

Exercice

Soit T un polynôme défini par : $T(x) = ax^2 - 3x + c$.
Déterminer les réels a et c pour que T ait pour racine 1 et 2.

1.8 Factorisation d'un polynôme par $(x-\alpha)$

1.8.1 Définition

Soit α une racine du polynôme p.
On dit que p est factorisable ou divisible par $(x-\alpha)$, s'il existe un polynôme q tel que pour tout réel x, on a : $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ avec $d°(q)=d°(p)-1$.

Remarques

Soit p un polynôme non nul.
▷ p est factorisable ou divisible par $(x-\alpha)$ si et seulement si $p(\alpha)=0$.
▷ Si p est un polynôme de degré n, alors le $d°(q)=n-1$.
▷ Si α est une racine double du polynôme p, alors le $d°(q)=d°(p)-2$ c'est-à-dire $p(x)=(x-\alpha)^2q(x)$.
▷ Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal au degré du polynôme.
▷ La forme générale d'un polynôme de degré 3 est $p(x)=ax^3+ax^2+cx+d$.

1.8.2 Détermination pratique du polynôme $q(x)$

Pour déterminer le polynôme $q(x)$, on utilise l'une des trois méthodes suivante :
▷ Méthode de Hörner.
▷ Méthode de la division euclidienne.
▷ Méthode d'identification des coefficients.

a) Méthode de Hörner

Soit p un polynôme de degré 3 défini par : $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $a\neq 0$ et α un nombre réel tel que $p(\alpha)=0$.

	a	b	c	d
α	$\downarrow$	$a\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$
$\times$	a	$\beta=b+a\alpha$	$\gamma=c+\alpha\beta$	$d+\alpha\gamma=0$

on a : $q(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

Exercice 1

Soit p un polynôme défini par : $p(x)=3x^3-5x^2+x+1$.

1. Montrer que $p(x)$ est divisible par $(x-1)$.
2. Déterminer le polynôme $q(x)$ tel que $p(x)=(x-1)q(x)$.

b) Méthode de division euclidienne

Soit p un polynôme de degré 3 défini par : $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $a\neq 0$ et α un nombre réel tel que $p(\alpha)=0$.

$$
\begin{array}{r|l}
ax^3+bx^2+cx+d & x-\alpha \\ \cline{2-2}
-ax^3+\alpha a x^2 \qquad\qquad & ax^2+(b+\alpha a)x+c+(a+b\alpha)\alpha \\ \cline{1-1}
(b+a\alpha)x^2+cx \quad & \\
-(b+a\alpha)x^2+\alpha(b+a\alpha)x & \\ \cline{1-1}
[\alpha(b+a\alpha)+c]x+d & \\
-[\alpha(b+a\alpha)+c]x+\alpha[c+\alpha(a+b)] & \\ \cline{1-1}
(b+a)\alpha^2+c\alpha+d=0 & \\
\end{array}
$$

En posant $\beta = b+\alpha a$ et $\gamma = c+(b+\alpha a)\alpha$, alors $q(x) = ax^2+\beta x+\gamma$

Exercice 2

Soit P un polynôme défini par : $P(x) = 2x^3-8x^2-4x-30$.

1. Calculer $P(5)$ puis conclure.
2. Déterminer un polynôme R tel que $P(x) = (x-5)R(x)$.

c) Méthode d'identification des coefficients

Exercice 3

Soit P un polynôme défini par : $P(x) = 8x^3+5x^2-3x-10$.

1. Montrer 1 est la racine du polynôme P.
2. Déterminer trois réel a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

1.9 Signe d'un polynôme et Signe de l'image d'un réel par un polynôme

1.9.1 Signe d'un polynôme

Soit p un polynôme non nul. Pour étudier le signe du polynôme $p(x)$, il est souhaitable de factoriser au maximum puis étudier le signe de la forme factorisée.

Remarque

Si le polynôme $p(x)$ n'est pas factorisable, alors il est du même signe que son monôme de plus haut degré.

1.9.2 Signe de l'image d'un réel par un polynôme

Soit $p(x)$ un polynôme non nul, a et b deux réels tels que pour tout $x \in [a,b]$;

$\triangleright$ Si $p(x) > 0$, alors pour tout $\alpha \in [a,b]$, $p(\alpha) > 0$.

$\triangleright$ Si $p(x) < 0$, alors pour tout $\alpha \in [a,b]$, $p(\alpha) < 0$.

Exercice

Soit p un polynôme défini par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Montrer que 2 et -1 sont des racines de $p(x)$.
2. Factoriser le polynôme $p(x)$.
3. Étudier le signe de $p(x)$.
4. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions des inéquations suivantes : $p(x) > 0$ et $p(x) \leq 0$.
5. Donner le signe de $p\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $p\left(\sqrt{3}-1\right)$.

1.10 Fraction rationnelle

1.10.1 Définition

On appelle fraction rationnelle, le quotient de deux polynômes. Elle est définie que pour les valeurs de la variable x qui n'annule pas le dénominateur.

1.10.2 Simplification d'une fraction rationnelle

Pour simplifier une fraction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

▷ Il faut premièrement préciser son ensemble de définition.

▷ On peut factoriser le numérateur $p(x)$ et le dénominateur $q(x)$ puis éventuellement éliminer le ou les facteur(s) communs.

Exercice

Soit P et Q deux polynômes définis par : $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 10$ et $Q(x) = 3x^3 - 5x + 2$.

1. Montrer que $Q(x)$ est factorisable par $(x-1)$.
2. En déduire la factorisation du polynôme $Q(x)$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme T tel que $P(x) = (x-1)T(x)$.
4. On pose $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de F.
   (b) Simplifier l'expression de F.

1.10.3 Partie entière d'une fraction rationnelle

Toute fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ peut s'écrire sous la forme $R(x) = f(x) + \dfrac{g(x)}{Q(x)}$

▷ $f(x)$ est la partie entière de $R(x)$;

▷ $\dfrac{g(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle tel que $d°(g) < d°(Q)$.

Exercice

Soit f la fonction rationnelle suivante : $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 10}{x - 4}$.

1. Déterminer la condition d'existence de f.
2. Déterminer les réels a, b, c et d tel que pour tout $x \neq 4$; $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-4}$.
3. En déduire la partie entière de f notée h.

1.11 Polynôme réciproque

1.11.1 Définition

Soit p un polynôme de degré n.
On dit que p est un polynôme réciproque d'ordre n si pour tout $x \neq 0$, on a : $p\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^n}p(x)$.

1.11.2 Théorème

Soit p un polynôme réciproque d'ordre n et α un nombre réel non nul.
Si α est une racine du polynôme p, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

Exercice

Soit p et f deux polynômes définis par :
$p(x) = 3x^4 + 16x^3 + 26x^2 + 16x + 3$ et $f(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x^n}f(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$.

1. Montrer que si n est impair, -1 est une racine de f.
2. Montrer que si a est racine de f, alors $\dfrac{1}{a}$ l'est aussi.
3. Calculer $p(-3)$. Que peut-on déduire ?
4. Montrer que pour $x \neq 0$; $p(x) = x^4 p(\frac{1}{x})$.
5. En déduire que $-\dfrac{1}{3}$ est aussi racine de p.

CHAPITRE 2

LE SECOND DEGRÉ

2.1 Le trinôme du second degré

2.1.1 Définition

On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

2.1.2 Forme canonique

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré.
$T(x) = ax^2 + bx + c$
$T(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
$T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$
$T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. C'est la forme canonique du trinôme T.

Exemple

$T(x) = 2x^2 - 4x - 48$
$T(x) = 2\left(x^2 - 2x - 24\right)$
$T(x) = 2\left[(x-1)^2 - 25\right]$

2.1.3 Racines du trinôme du second degré

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré dont la forme canonique est $T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$
Δ est appelé discriminant du trinôme $T(x)$.
$T(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$
▷ Si $\Delta < 0$
On a : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$ impossible, alors $T(x)$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$.

▷ Si $\Delta = 0$

On a : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Longrightarrow x+\dfrac{b}{2a} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$.

On dit que $T(x)$ admet une racine double notée $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

▷ Si $\Delta > 0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}} \\ x+\dfrac{b}{2a} = -\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$T(x)$ admet deux racines réelles distinctes notées $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2.1.4 Forme factorisée d'un trinôme du second degré

Soit $T(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré.

▷ Si $T(x)$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 c'est-à-dire $\Delta > 0$, alors on a : $T(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

▷ Si $T(x)$ admet une racine double x_0 c'est-à-dire $\Delta = 0$, alors on a : $T(x) = a(x-x_0)^2$.

▷ Si $T(x)$ n'a pas de racines c'est-à-dire $\Delta < 0$, alors $T(x)$ n'est pas factorisable.

2.1.5 Somme et produit des racines

a) Expression de la somme et du produit des racines

Soit $T(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré.

Si $T(x)$ admet deux racines, on peut alors écrire :

$T(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = a\left(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2\right)$

$T(x) = a\left[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right]$

$T(x) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$

Posons $S = x_1+x_2$ et $P = x_1x_2$

On a : $T(x) = ax^2 - aSx + aP$

Par identification avec $T(x) = ax^2+bx+c$

On a : $\begin{cases} -aS = b \\ aP = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

b) Nombre dont on connait la somme et le produit

Soit α et β deux nombres réels de somme S et de produit P.

$S = \alpha+\beta$ et $P = \alpha\beta$.

α et β sont les racines du trinôme $T(x)$ tel que : $T(x) = x^2 - Sx + P$.

Exemple

Trouver deux nombres réels α et β tels que $\alpha+\beta = 2$ et $\alpha\beta = -35$ avec $\alpha < \beta$.

2.1.6 Signe des racines d'un trinôme et Signe d'un trinôme

a) Signe des racines d'un trinôme

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré, on suppose que $T(x)$ admet deux racines notées x_1 et x_2.

$\triangleright$ Si $\begin{cases} P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$, alors x_1 et x_2 sont positives : $0 < x_1 < x_2$.

$\triangleright$ Si $\begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$, alors x_1 et x_2 sont négatives : $x_1 < x_2 < 0$.

$\triangleright$ Si $\begin{cases} P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$, alors x_1 et x_2 ont des signes contraires.

Le plus grand en valeur absolue est supérieure $|x_1| > |x_2|$

$\triangleright$ Si $\begin{cases} P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$, alors x_1 et x_2 ont des signes contraires.

Le plus grand en valeur absolue est supérieure $|x_2| > |x_1|$

$\triangleright$ Si $p < 0$, alors x_1 et x_2 ont des signes contraires : $x_1 < 0 < x_2$.

Cas particulier

$\triangleright$ Si $P = 0$, alors l'une des racines est nulle.

$\triangleright$ Si $S = 0$, alors les deux racines sont opposées.

$\triangleright$ Si $P = 1$, alors les deux racines sont inverses de même signe.

b) Signe d'un trinôme du second degré

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré.

$\triangleright$ Si $T(x)$ n'a pas de racines réelles c'est-à-dire $\Delta < 0$, alors $T(x)$ prend le signe de a sur $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ Si $T(x)$ admet une racine double x_0 c'est-à-dire $\Delta = 0$, alors $T(x)$ s'annule en x_0 mais il garde le signe de a sur $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ Si $T(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$ c'est-à-dire $\Delta > 0$, alors $T(x)$ prend le signe de a à l'extérieur des racines et signe contraire de a à l'intérieur des racines.

2.1.7 Position d'un réel par rapport aux racines d'un trinôme du second degré

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré admettant deux racines x_1 et x_2 tel que $x_1 < x_2$. Soit α un nombre réel donné.

On calcule $aT(\alpha)$ et on distingue trois cas :

$\triangleright$ Premier cas : si $aT(\alpha) < 0$; a et $T(\alpha)$ sont de signe contraire ; alors on a : $x_1 < \alpha < x_2$.

$\triangleright$ Deuxième cas : si $aT(\alpha) > 0$; a et $T(\alpha)$ sont de même signe ; on calcule $S - 2\alpha$ ou $\frac{S}{2} - \alpha$

$\star$ si $S - 2\alpha < 0$ ou $\frac{S}{2} - \alpha < 0$, alors on a : $x_1 < x_2 < \alpha$

$\star$ si $S - 2\alpha > 0$ ou $\frac{S}{2} - \alpha > 0$, alors on a : $\alpha < x_1 < x_2$

$\triangleright$ Troisième cas : si $aT(\alpha) = 0$, alors α est une racine de $T(x)$.

Exercice 1

Comparer le réel -3 aux racines du trinôme $T(x) = 5x^2 + 3x - 2$

Exercice 2

Comparer le réel 4 aux racines du trinôme $T(x) = 3x^2 - 4x + m - 1$

2.2 La parabole

2.2.1 Définition

La parabole est la représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du trinôme du second degré.

2.2.2 Variations du trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ un trinôme du second degré dont la forme canonique est : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

a) Taux de variation

$$\mathscr{T} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

On a : $\mathscr{T} = a(x_1 + x_2) + b$.

b) Tableau de variation

Posons $x_1 = x_2 = x$; on a : $\mathscr{T} = 2ax + b$.
Il y a deux cas à prévoir : soit $a > 0$ ou $a < 0$
▷ Premier cas : si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\mathscr{T}$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

β est donc le minimum de f atteint pour $x = \alpha$.
▷ Deuxième cas : si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\mathscr{T}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

β est donc le maximum de f atteint pour $x = \alpha$.

2.2.3 Sommet de la parabole

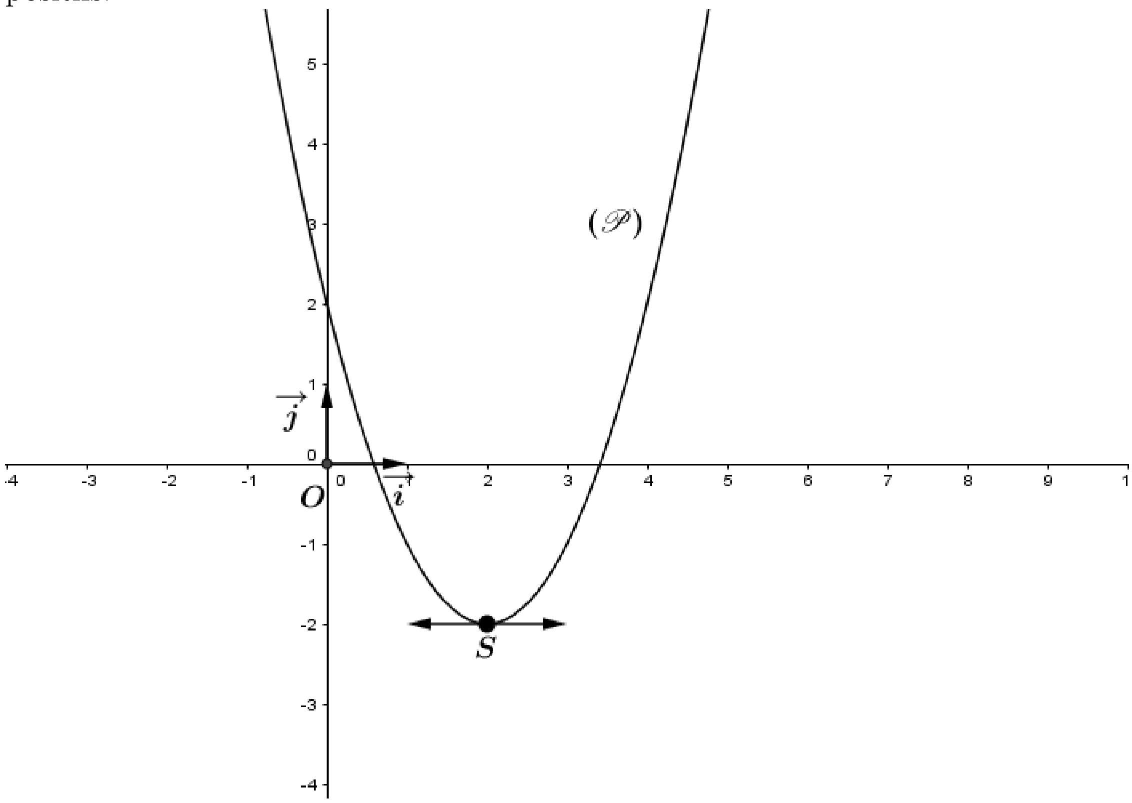
Le point $S(\alpha;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$ est appelé sommet de la parabole.

2.2.4 Représentation graphique

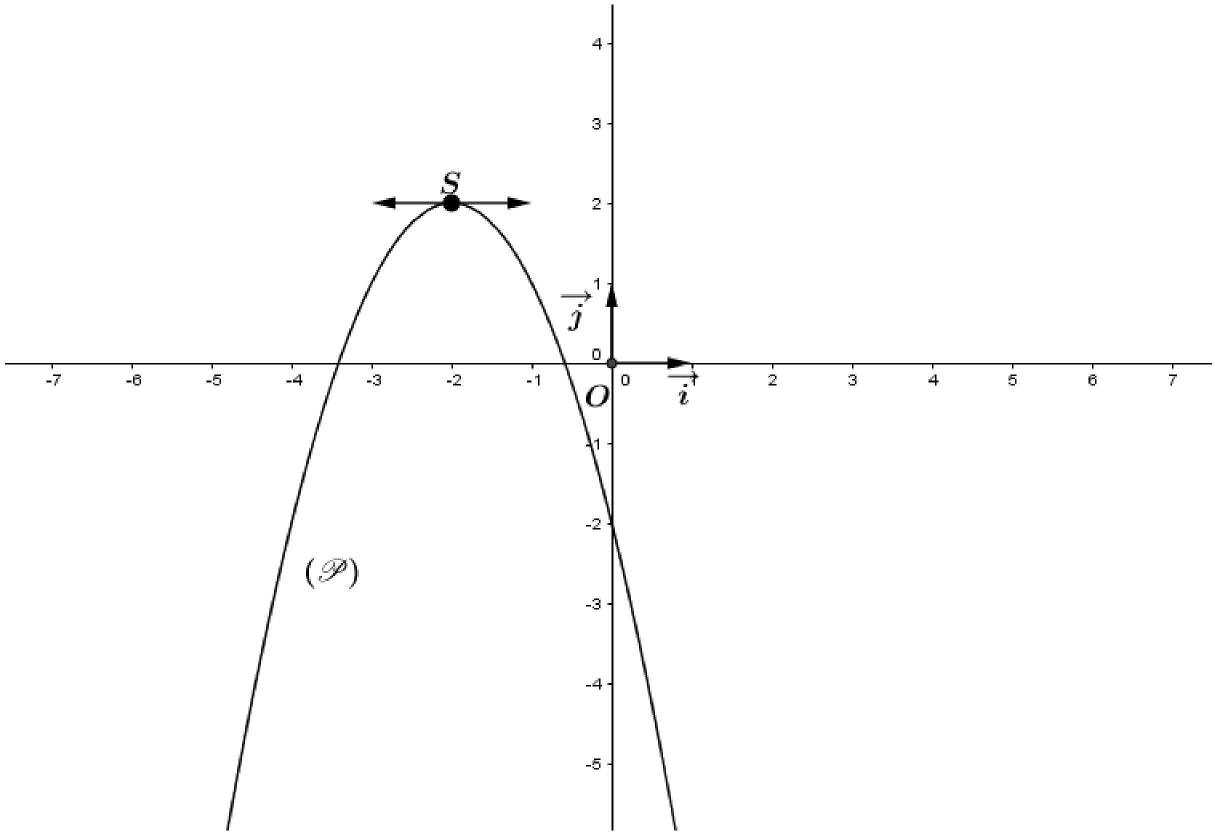
La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$.

Remarques

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
▷ Si $a > 0$, alors la concavité de la parabole $(\mathscr{P})$ est tournée vers le haut c'est-à-dire vers les y positifs.



▷ Si $a < 0$, alors la concavité de la parabole $(\mathscr{P})$ est tournée vers le bas c'est-à-dire vers les y négatifs.



Propriété

Toute fonction polynôme du second degré f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, sa représentation graphique est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ ou $\vec{u}(\alpha;\beta)$.

Remarque

Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C}_f)$ les courbes d'équations respectives $y = ax^2$ et $y = a(x-\alpha)^2+\beta$.
▷ $(\mathscr{P})$ est la parabole de sommet $O(0;0)$, d'axe de symétrie la droite (Oy).
▷ $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}[(\mathscr{P})]$ avec $\vec{u}(\alpha;\beta)$, de sommet $O'(\alpha,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = \alpha$.

Exercice

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2$.
2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$.
   On désigne $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le plan.
   a) Utiliser la forme canonique du trinôme du second degré pour déterminer les réels a, b et c tels que : $g(x) = a(x-b)^2 + c$.
   b) En posant $y = g(x)$, montrer que le changement de variables $X = x - b$, $Y = y - c$, entraine $Y = aX^2$.
   c) Par quelle transformation simple la courbe $(\mathscr{C}')$ se déduit-elle de $(\mathscr{C})$?
   d) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ sur la même figure que $(\mathscr{C})$.

2.3 Équation du second degré

2.3.1 Définition

On appelle équation du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

2.3.2 Résolution d'une équation du second degré

Résoudre l'équation du second degré revient à trouver les racines du trinôme du second degré associé à cette équation. On distingue trois cas :
▷ Premier cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation n'a pas de solutions réelles.
▷ Deuxième cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors l'équation admet une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
▷ Troisième cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+x+3=0$; $7x^2-42x+63=0$, $2x^2-4x-48=0$

2.4 Équation paramétrique du second degré

2.4.1 Définition

On appelle équation paramétrique de paramètre réel m, une équation d'inconnue x dont on se propose de déterminer le nombre de solutions, leur signe,..., suivant les valeurs du paramètre réel m.

2.4.2 Point fixe

Soit $T_m(x)$ un trinôme du second degré où m est un paramètre réel et $(\mathscr{P}_m)$ la parabole associée au trinôme $T_m(x)$. On appelle point fixe associé au trinôme $T_m(x)$ le point pour lequel toutes les paraboles passent.

2.4.3 Détermination du point fixe

Pour déterminer les coordonnées du point fixe I, on résout l'équation $T_{m+1}(x) = T_m(x)$.

Exemple

$(E_m) : (m-1)x^2 - 2(m+7)x + m + 3 = 0$

2.4.4 Application pratique

Exercice

Soit $(E_m) : (m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ une équation paramétrique du second degré de paramètre réel m.

1. Déterminer la valeur du paramètre m pour que cette équation soit du premier degré.

2. On suppose que $m \neq 1$ et on pose $T_m(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3$.
   (a) Calculer le discriminant Δ_m puis étudier son signe.
   (b) Déterminer en fonction de m la somme S et le produit P des racines x_1 et x_2 de T_m puis étudier leur signes.
   (c) Déterminer une relation indépendante du paramètre réel m entre les solutions x_1 et x_2 de (E_m). En déduire les racines doubles de cette relation.
   (d) Donner le nombre de solutions et leur signes suivant les valeurs de m.
3. Montrer que toutes les paraboles $(\mathscr{P}_m)$ passent par un point fixe I dont on donnera les coordonnées.

2.5 Équation se ramenant au second degré

2.5.1 Équation bicarrée

a) Forme générale

La forme générale d'une équation bicarré est : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution de cette équation consiste à faire un changement de variable d'inconnue $X = x^2$ avec $X \geq 0$ et cette équation devient $aX^2 + bX + c = 0$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2.5.2 Équation à coefficient symétrique d'ordre 4

a) Forme générale

La forme générale d'une équation à coefficient symétrique d'ordre 4 est :
$(E) : ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution de cette équation consiste à faire un changement de variable d'inconnue.
On pose $t = x + \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$, alors l'équation (E) devient $at^2 + bt + k = 0$ avec $k = c - 2a$.

Remarque

Si l'équation (E) est de la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ avec $a \neq 0$.
On pose $t = x - \dfrac{1}{x}$, alors l'équation (E) devient $at^2 + bt + k = 0$ avec $k = c + 2a$.

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(E_1) : x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{3}$ et $(E_2) : x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}$.
2. Soit p un polynôme défini par : $p(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

(a) Montrer que 0 n'est pas racine du polynôme $p(x)$.

(b) Exprimer $\dfrac{p(x)}{x^2}$ en fonction de t avec $t = x + \dfrac{1}{x}$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6t^2 + 35t + 50 = 0$.

(d) En déduire les solutions de l'équation $p(x) = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation $(E) : 3x^4 + x^3 - 10x^2 - x + 3 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2. En mettant x^2 en facteur, montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $3\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) - 4 = 0$.
3. Par un changement de variable, résoudre l'équation (E').
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

2.6 Inéquation du second degré

2.6.1 Définition

On appelle inéquation du second degré toute expression de la forme : $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou encore $ax^2 + bx + c \leq 0$ avec $a \neq 0$.

2.6.2 Résolution

Résoudre une inéquation du seconde degré consiste à chercher le signe du trinôme associé à cette inéquation.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x^2 - 6x + 1 \leq 0$.

2.7 Inéquations bicarrées

2.7.1 Définition

On appelle inéquation bicarrée, toute expression de la forme : $ax^4 + bx^2 + c > 0$ ou $ax^4 + bx^2 + c < 0$ ou $ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ ou encore $ax^4 + bx^2 + c \leq 0$ avec $a \neq 0$.

2.7.2 Résolution

Pour résoudre une inéquation bicarrée, on pose d'abord l'équation bicarrée associée à cette inéquation puis faire un changement de variable en posant $X = x^2$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$; $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$ et $x^4 - x^2 + 12 \geq 0$.

2.8 Équation et Inéquation irrationnelle

2.8.1 Équation irrationnelle

a) Définition

On appelle équation irrationnelle toute équation où l'inconnue figure sous un radical.

Exemple

$\sqrt{x^2+3x-5} = 7x+2.$

b) Règles fondamentales de résolutions

Soit $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ des polynômes.

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_2) \\ A(x) = [B(x)]^2 \ \ (S_3) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \quad (S_1) \\ B(x) \geq 0 \quad (S_2) \\ A(x) = B(x) \ \ (S_3) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = \sqrt{C(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \quad (S_1) \\ B(x) \geq 0 \quad (S_2) \\ C(x) \geq 0 \ \ (S_3) \\ \left(\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}\right)^2 = C(x) \ \ (S_4) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3 \bigcap S_4$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- si $k < 0$; alors cette équation n'a pas de solution ; D'où $S = \emptyset$
- si $k > 0$, alors on résout l'équation $A(x) = k^2$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x-1$; $\sqrt{x+2} = 3x-4$; $\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x}$; $\sqrt{x-3} = 2$; $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x-1}$.

2.8.2 Inéquation irrationnelle

a) Définition

On appelle inéquation irrationnelle toute inéquation où l'inconnue figure sous un radical.

Exemple

$\sqrt{x^2+3x-5} \leq 7x.$

b) Règles fondamentales de résolutions

Soit $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ des polynômes.

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_2) \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \ \ (S_3) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) \geq 0 \ \ S_2 \end{cases} (S_I) \Longrightarrow S_I = S_1 \bigcap S_2$

ou $\begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_3) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_4) \\ A(x) \geq [B(x)]^2 \ \ (S_5) \end{cases} (S_{II}) \Longrightarrow S_{II} = S_3 \bigcap S_4 \bigcap S_5$

$S = S_I \cup S_{II}$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_2) \\ A(x) < [B(x)]^2 \ \ (S_3) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_2) \\ A(x) \geq B(x) \ (S_3) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} \leq \sqrt{C(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \quad (S_1) \\ B(x) \geq 0 \quad (S_2) \\ C(x) \geq 0 \ \ (S_3) \\ \left(\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}\right)^2 \leq C(x) \ \ (S_4) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3 \bigcap S_4$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} > a \ \ (I)$

• si $a > 0$; (I) a le même ensemble de solution que l'inéquation $A(x) > a^2$.

• si $a < 0$; (I) a le même ensemble de solution que l'inéquation $A(x) \geq 0$.

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} < a$

• si $a > 0$, on a : $\begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ A(x) < a^2 \ \ (S_2) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2.$

• si $a < 0$ cette inéquation n'a pas de solution

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} \geq a (a \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ A(x) \geq a^2 \ \ (S_2) \end{cases} \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2.$

$\triangleright$ $\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ B(x) < 0 \ \ (S_2) \\ A(x) > [B(x)]^2 \ \ (S_3) \end{cases} (S_I) \Longrightarrow S_I = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3$

ou $\begin{cases} A(x) > 0 \ \ (S_4) \\ B(x) \geq 0 \ \ (S_5) \\ A(x) > [B(x)]^2 \ \ (S_6) \end{cases} (S_{II}) \Longrightarrow S_{II} = S_4 \bigcap S_5 \bigcap S_6$

$S = S_I \cup S_{II}$

2.9 Équations et Inéquations avec valeur absolue

2.9.1 Équations avec valeur absolue

Régales fondamentales

$\triangleright\ |A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \ \ (S_1) \\ A(x) = -B(x) \ \ (S_2) \end{cases} \quad \Longrightarrow S = S_1 \cup S_2$

$\triangleright\ |A(x)| = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ (A(x))^2 = [B(x)]^2 \ \ (S_2) \end{cases} \quad \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2$

2.9.2 Inéquations avec valeur absolue

Régales fondamentales

$\triangleright\ |A(x)| \geq |B(x)| \Longrightarrow [A(x)]^2 \geq [B(x)]^2$

$\triangleright\ |A(x) \leq |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \ \ (S_1) \\ [A(x)]^2 = [B(x)]^2 \ \ (S_2) \end{cases} \quad \Longrightarrow S = S_1 \bigcap S_2$

$\triangleright\ |A(x)| \geq B(x) \Leftrightarrow B(x) \leq 0 \ \ (S_1)$ ou $\begin{cases} B(x) \geq 0 \ \ (S_2) \\ A^2(x) \geq [B(x)]^2 \ \ (S_3) \end{cases} \quad (S')$

$S = S_1 \cup S'$ avec $s' = S_2 \bigcap S_3$

Chapitre 3

SYSTÈMES LINÉAIRES D'ÉQUATIONS

3.1 Équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$

3.1.1 Définition

On appelle équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ toute équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3.1.2 Méthode de résolution

Pour résoudre une équation linéaire $ax+by+c=0$ dans $\mathbb{R}^2$, on procède de la façon suivante :
▷ On fixe une des inconnues de l'équation, par exemple $x=\alpha$;
▷ On exprime y en fonction de α, on a : $y=\dfrac{-a\alpha-c}{b}$.
L'ensemble de solution est : $\boxed{S=\left\{\left(\alpha;\frac{-a\alpha-c}{b}\right)/\alpha\in\mathbb{R}\right\}}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $3x-2y+1=0$

3.2 Système de deux équations linéaire à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$

3.2.1 Définition

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y tout système de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

3.2.2 Méthodes de résolution

Il existe plusieurs méthodes de résolution d'un tel système :
▷ la méthode de substitution ;
▷ la méthode d'addition ;
▷ la méthode de comparaison ;
▷ la méthode par le déterminant ou méthode de Cramer.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x+4y=-11 \\ -2x+5y=15 \end{cases}$

3.2.3 Résolution par la méthode de Cramer

On considère le système suivant : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

▷ On calcule le déterminant principal du système, noté Δ_p défini par :

$\Delta_p = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$

▷ On calcule les déterminants associés à x et y définis par :

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c-bc'$ et

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac'-a'c$

3.2.4 Ensembles de solutions

1. si $\Delta_p \neq 0$, alors le système est dit de cramer, dans ce cas il admet un unique couple de solution $(x;y)$ tels que : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_p}$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_p}$.
2. si $\Delta_p = 0$, $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution, dans ce cas $S = \varnothing$.
3. si $\Delta_p = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ alors le système se réduit à une seule équation et admet une infinité de solution.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant, en utilisant la méthode de Cramer. $\begin{cases} 3x+4y=-11 \\ -2x+5y=15 \end{cases}$

3.3 Interprétation graphique

On considère le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Résoudre ce système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection **I** des deux droites d'équations $(D_1) : ax+by=c$ et $(D_2) : a'x+b'y=c'$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : **(S)** : $\begin{cases} 3x+y=-7 \\ -x+y=9 \end{cases}$
2. Tracer les droites d'équations $(\mathscr{D}) : 3x+y+7=0$ et $(\mathscr{D}') : -x+y-9=0$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, puis interpréter graphiquement le résultat.

3.4 Résolution d'un système avec paramètre

Exercice

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

(S) : $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$

3.5 Systèmes symétriques

3.5.1 Définition

Un système d'équation à deux inconnues x et y est dit symétrique si chacune des équations demeure inchangée lorsqu'on remplace x par y et y par x.

3.5.2 Système fondamental

Tout système de la forme $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ est appelé système fondamental où x et y des inconnues, S et P deux nombres données.

Résolution du système fondamental

Soit le système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$

Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors x et y sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

3.5.3 Application pratique

Lorsqu'un système de deux équations à deux inconnues x et y est symétrique, il est possible d'exprimer les premiers membres des équations à l'aide de $x+y$ et xy et il est indiqué d'introduire les inconnues auxiliaires $S = x + y$ et $P = xy$.

Exemple

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases}$

3.6 Systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues

3.6.1 Forme générale

La forme générale d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues est :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

où a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'' des nombres réels et x, y et z des inconnues.

3.6.2 Résolution

Pour résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues, on utilise les méthodes suivantes : méthode de substitution ; méthode de SARRUS et la méthode de pivot de Gauss.

a) Méthode de substitution

Pour résoudre un système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ par substitution, on procède comme suit :
▷ On choisit l'une des trois équations du système dans laquelle on exprime l'une des inconnues en fonctions des deux autres.
▷ Ensuite, on remplace dans les deux autres équations l'inconnue en question, ce qui permet d'obtenir un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} 4x-2y+7z=20 \\ 3x-y+3z=10 \\ 2x-3y-z=3 \end{cases}$

b) Méthode de SARRUS

Soit le système suivant : $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ où a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'' des nombres réels et x, y et z des inconnues.
On calcule Δ_P, Δ_x, Δ_y et Δ_z tels que :

$$\Delta_p = (ab'c''+bc'a''+ca'b'')-(a''b'c+b''c'a+c''a'b)$$

$$\Delta_x = (db'c''+bc'd''+cd'b'')-(d''b'c+b''c'd+c''d'b)$$

$$\Delta_y = (ad'c''+dc'a''+ca'd'')-(a''d'c+d''c'a+c''a'd)$$

$$\Delta_z = (ab'd''+bd'a''+da'b'')-(a''b'd+b''d'a+d''a'b)$$

. On distingue deux cas :
▷ Premier cas : si $\Delta_p \neq 0$, le système admet un triplet unique de solution tel que : $S=\{(x;y;z)\}$ avec $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta_p}$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_p}$ et $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta_p}$.
▷ Deuxième cas : si $\Delta_p=0$, $\Delta_x=0$ ou $\Delta_y=0$ ou $\Delta_z=0$
Alors le système admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^3$.
▷ Troisième cas : si $\Delta_p=0$, $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ ou $\Delta_z \neq 0$
Alors le système n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} x-y+z=11 \\ x+y+z=-3 \\ 4x+2y+z=5 \end{cases}$

c) Méthode de pivot Gauss

Principe de résolution

Soit le système suivant : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ où a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'' des nombres réels et x, y et z des inconnues.
On effectue des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir un système triangulaire de la forme suivante : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \qquad ey + fz = g \\ \qquad\qquad hz = i \end{cases}$
On dit alors que le système de trois équations à trois inconnues est triangulaire (supérieure).

Exercice

Soit un système suivant : $(S) : \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$

1. Transformer le système (S) en un système triangulaire.
2. En déduire dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble de solution de système (S).

Chapitre 4

NOTIONS DE FONCTIONS

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Soit E et F deux ensembles non vides.
On appelle fonction de E vers F, toute relation qui associée tout élément de E au plus un élément unique de F.
E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

4.1.2 Notation

Soit

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

On dit que f est la fonction de E vers F qui, à tout x associe $f(x)$.
x : est appelé antécédent de $y = f(x)$;
$f(x)$: est appelé image de x par f.

4.2 Ensemble de définition

4.2.1 Définition

Soit f une fonction de E vers F.
On appelle ensemble de définition de f notée E_f ou domaine de définition de f notée D_f l'ensemble des réels x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Remarque

Toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.

4.2.2 Quelques conditions d'existences des fonctions

Soit p et q deux fonctions polynômes.

Fonctions numériques f	Conditions d'existences de f ou E_f
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; $a_n \neq 0$	$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{p(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$
$f(x) = \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ et $q(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{p(x)} + \sqrt{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) > 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \neq 0$
$f(x) = p(x) + \sqrt{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) \geq 0$
$f(x) = \lvert p(x) \rvert$	$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert}$	$f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert + l}$; $l \in \mathbb{R}$	si $l \geq 0$ $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert + l}$; $l \in \mathbb{R}$	si $l < 0$ $f(x)$ existe si et seulement si $\lvert p(x) \rvert + l \geq 0$
$f(x) = \cos(ax+b)$ ou $f(x) = \sin(ax+b)$; $a \neq 0$	$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^4 + 2x + 6$; $g(x) = \sqrt{x+1}$; $h(x) = \sqrt{|x+2| - 2}$; $k(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-1}$; $l(x) = x + 5 + \sqrt{2x+4}$; $m(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; $p(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x(x+3)}$; $q(x) = \sqrt{|1+x^2|}$.

4.2.3 Ensemble de définition dans le cas d'une fonction raccordée

Exercice

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x = 1}{x^1 + 1}, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

4.2.4 Égalité de deux fonctions

Soit f et g fonctions. On dit que f et g sont égales si :

▷ f et g ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée ;

▷ f et g ont même ensemble de définition, c'est-à-dire $E_f = E_g$;

▷ Pour tout $x \in E_f$, $f(x) = g(x)$.

4.2.5 Prolongement et restriction d'une fonction

Soit E et E' et F deux parties de $\mathbb{R}$ telles que : $E' \subset E$. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F$. Lorsque pour tout $x \in E'$, on a : $f(x) = g(x)$, on dit que f est un prolongent de g à E ou g est la restriction de f à E' où F est une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g.
2. Montrer que g est la restriction de f à E_g. Que peut-on dire de f ?

4.2.6 Représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction définie sur E_f et on munit le plan $(\mathscr{P})$ à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

a) Définition

On appelle représentation graphique ou courbe représentative de f, l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points $M(x; f(x))$ où $x \in E_f$. La courbe $(\mathscr{C})$ a pour équation $y = f(x)$.

b) Points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes des coordonnées

Soit f une fonction définie sur E_f, on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathscr{P})$ muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

b_1) **Points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axes des abscisses**

Pour trouver les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axes des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$.
Donc $(\mathscr{C}) \bigcap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

b_2) **Points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axes des ordonnées**

Pour trouver les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axes des ordonnées, on pose $x = 0$ et $f(0)$.
Donc $(\mathscr{C}) \bigcap (Oy) \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathscr{P})$ muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les images des nombres -3 ; -2 ; 0 ; 2 et 3 par f.
3. En déduire les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes des coordonnées.
4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $I = [-3; 3]$.

4.3 Sens de variation d'une fonction

4.3.1 Taux de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur E_f. On désigne par x_1 et x_2 deux éléments de E_f tels que $x_1 < x_2$.
On appelle taux de variation ou taux d'accroissement de la fonction f, le nombre réel noté T défini par : $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

4.3.2 Application du taux de variation d'une fonction

Le sens de variation d'une fonction f dépend de son taux de variation T.
▷ Si $T > 0$, alors la fonction f est strictement croissante.
▷ Si $T < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante.
▷ Si $T = 0$, alors la fonction f est constante.

Exercice

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 1$.

1. Calculer le taux de variation de g.
2. En déduire le sens de variation de g.

4.4 Applications

Définition

On appelle application d'un ensemble E vers un ensemble F, toute fonction qui associe, à tout élément de E un élément unique de F. Une application est donc une fonction dont l'ensemble de départ E se confond à son ensemble de définition.

Remarque

Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : [-1;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

▷ f est une fonction, mais f n'est pas une application.
▷ g est une application car tout élément de l'intervalle $[-1;1]$ à une image par g.

4.4.1 Application injective

$a)$ **Définition**

Soit f une application de E vers F.
On dit que f est injective ou f est une injection si tout élément de F à au plus un antécédent par f.

$b)$ **Propriété**

Soit f une application de E vers F.
f est injective si pour tout élément a, b de E, on a : $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$ ou $f(a) \neq f(b) \Longrightarrow a \neq b$.

Exercice

Soit g une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = \frac{1}{5}x+3$. Montrer que g est une application injective.

4.4.2 Application surjective

$a)$ **Définition**

Soit f une application f de E vers F.
On dit que f est surjective ou f est une surjection si tout élément de E à au moins une image par f.

$b)$ **Propriété**

f est surjective si pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $y = f(x)$.

4.4.3 Application bijective

$a)$ **Définition**

Soit f une application de E vers F.
On dit que f est bijective ou f est une bijection si elle est à la fois surjective et injective.

$b)$ **Propriété**

Une application f est bijective si pour tout élément b de F, l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique.

Remarque

Si f est une bijection de E vers F alors E et F ont même nombre d'éléments.

Exercice

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} - \{1\}$ définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Montrer que f est une bijection.

4.4.4 Composition des applications

a) Définition

Soit f et g deux applications respectivement de E vers F et de F vers G.
On appelle composée de f par g notée $g \circ f$, l'application de E vers G définie pour tout $x \in E$ par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

b) Ensemble de définition de $g \circ f$

L'ensemble de définition $E_{g \circ f}$ de $g \circ f$ est tel que : $x \in E_{g \circ f} \Longleftrightarrow x \in E_f$ et $f(x) \in E_g$.

Exercice

Soit f et g deux fonctions fonctions numériques définies par : $f(x) = x - 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$.
2. Donner l'expression explicite de $g \circ f$.

c) Propriétés

- ▷ La composition des applications n'est pas commutative en général, c'est-à-dire $g \circ f \neq f \circ g$.
- ▷ L'application identique ou identité est l'application notée Id telle que : $\forall\ x \in E$, $Id(x) = x$ et $Id \circ f = f$.
- ▷ La composition des applications est associative c'est-à-dire $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4.4.5 Bijection réciproque

a) Théorème et Définition

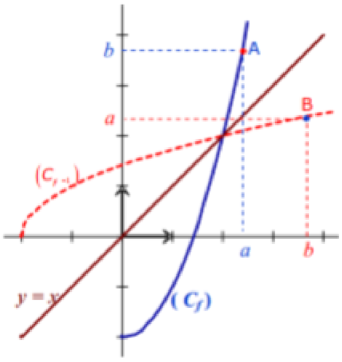
Soit f une application bijective de E vers F. Alors f admet une réciproque notée f^{-1} définie de F vers E telle que : $f \circ f^{-1} = Id$ et $\forall\ x \in E$, $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$; $y \in F$.

b) Propriétés

Soit f une bijection de E vers F et g une bijection de F vers G.
▷ Toute application réciproque d'une bijection est une bijection.
▷ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
▷ $f \circ f^{-1} = Id_F$.
▷ $f^{-1} \circ f = Id_E$.

c) Représentation graphique

Si f est une application bijective de E vers F où E et F sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Les représentations graphiques de f et f^{-1} dans le plan rapporté du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.



Exercice 1

Soit f, g et h trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que les fonctions $(f+g)\circ h$ et $(f\circ h)+(g\circ h)$ sont égales.
2. On suppose que f, g et h sont définies par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ et $h(x)=x^2$.
   (a) Déterminer les $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f)+(h\circ g)$.
   (b) Les fonctions $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f)+(h\circ g)$ sont-elles égales ?

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Soit f une l'application de $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

1. (a) Démontrer que f est bijective.
   (b) Déterminer la bijection réciproque de f notée f^{-1}.
2. (a) Construire la courbe représentative de f^{-1}.
   (b) En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=2x+1$ et $\begin{cases} g(x)=-\dfrac{x}{2};\ \text{si}\ x\leq 0 \\ g(x)=-3x;\ \text{si}\ x>0 \end{cases}$

1. (a) Démontrer que les fonctions f et g sont bijectives de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer leurs bijections réciproques notées f^{-1} et g^{-1}.
   (c) Tracer les courbes représentatives de f, g, f^{-1} et g^{-1}.
2. (a) Déterminer l'application $g\circ f$ et sa bijection réciproque notée $(g\circ f)^{-1}$.
   (b) Tracer les courbes représentatives de $g\circ f$ et de $(g\circ f)^{-1}$.

4.5 Fonction numérique de la variable réelle

4.5.1 Définition

On appelle fonction numérique de la variable réelle, toute fonction de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4.5.2 Notation

$$\begin{aligned} f : E \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

4.6 Propriétés générales des fonctions

4.6.1 Fonction Minorée ; Majorée et Bornée

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.
▷ On dit que f est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.
▷ On dit que f est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
▷ On dit que f est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire il existe deux réels m et M tel que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$.
m est appelé minorant de f sur I et M est appelé majorant de f sur I.

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq 1$.
3. Que peut-on déduire de f ?

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que : $2x = x^2 + 1 - (x-1)^2$, puis déduire que f est majorée.
3. Vérifier que : $2x = (x+1)^2 - (x^2+1)$, puis déduire que f est minorée.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Que peut-on dire de f ?

Remarques

▷ Si f est bornée par m et M, alors la courbe représentative de f est située dans la bonde du plan limitée par les droites d'équations respectives $y = m$ et $y = M$.
▷ La fonction racine carrée ($x \longmapsto \sqrt{x}$) est minorée par 0 et non majorée sur $[0;+\infty[$.
▷ La fonction carrée ($x \longmapsto x^2$) est minorée par 0 et non majorée sur $\mathbb{R}$.
▷ La fonction cube ($x \longmapsto x^3$) n'est ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}$.
▷ La fonction inverse ($x \longmapsto \frac{1}{x}$) n'est ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}^*$.

4.6.2 Fonction monotone

Définition

Une fonction f définie sur I est dite monotone sur I si f est soit croissante, soit décroissante sur I.

4.6.3 Extremum relatif d'une fonction

a) Définition

Un extremum est un point qui correspond à la valeur minimale ou maximale d'une fonction. Un extremum est soit un minimum, soit un maximum.

b) Minimum et Maximum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
▷ f admet un minimum en un point a si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$ où $f(a)$ est le minimum de f en a.
▷ f admet un maximum en un point b si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(b)$ où $f(b)$ est le maximum de f en b.

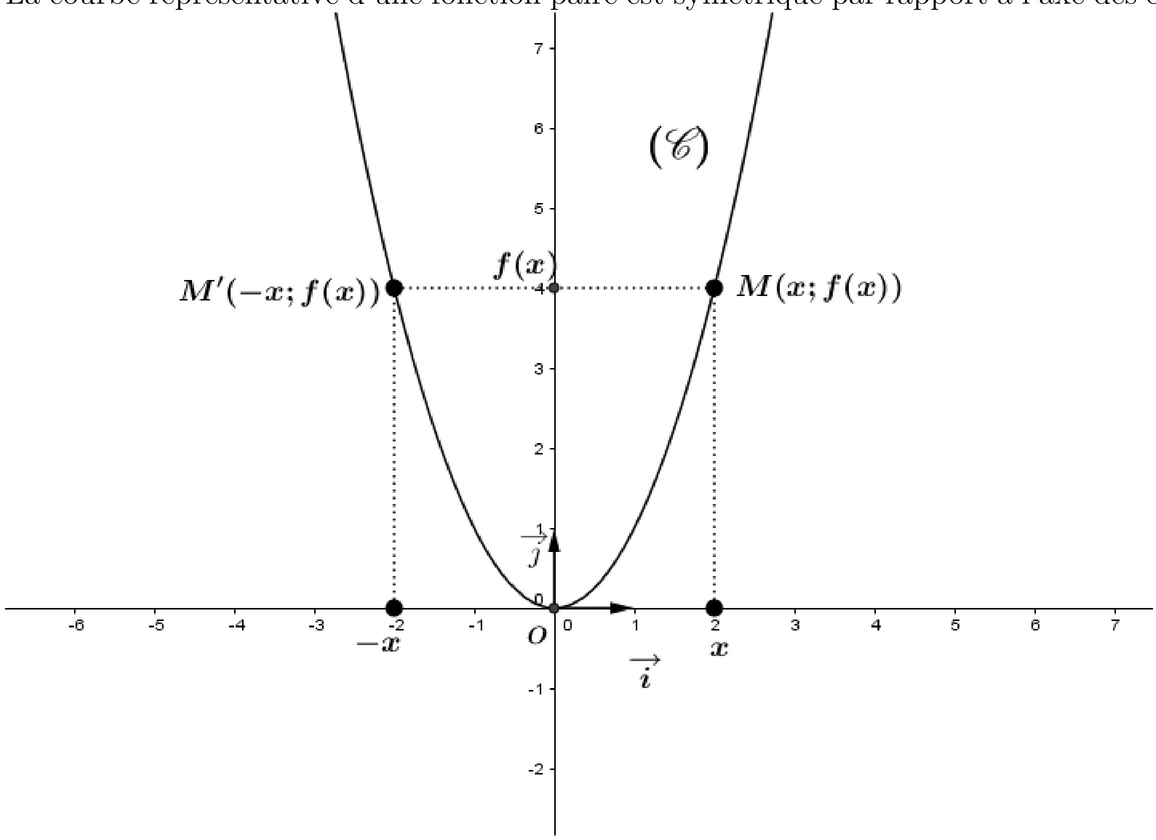
4.7 Fonction paire, fonction impaire

4.7.1 Fonction paire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite paire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

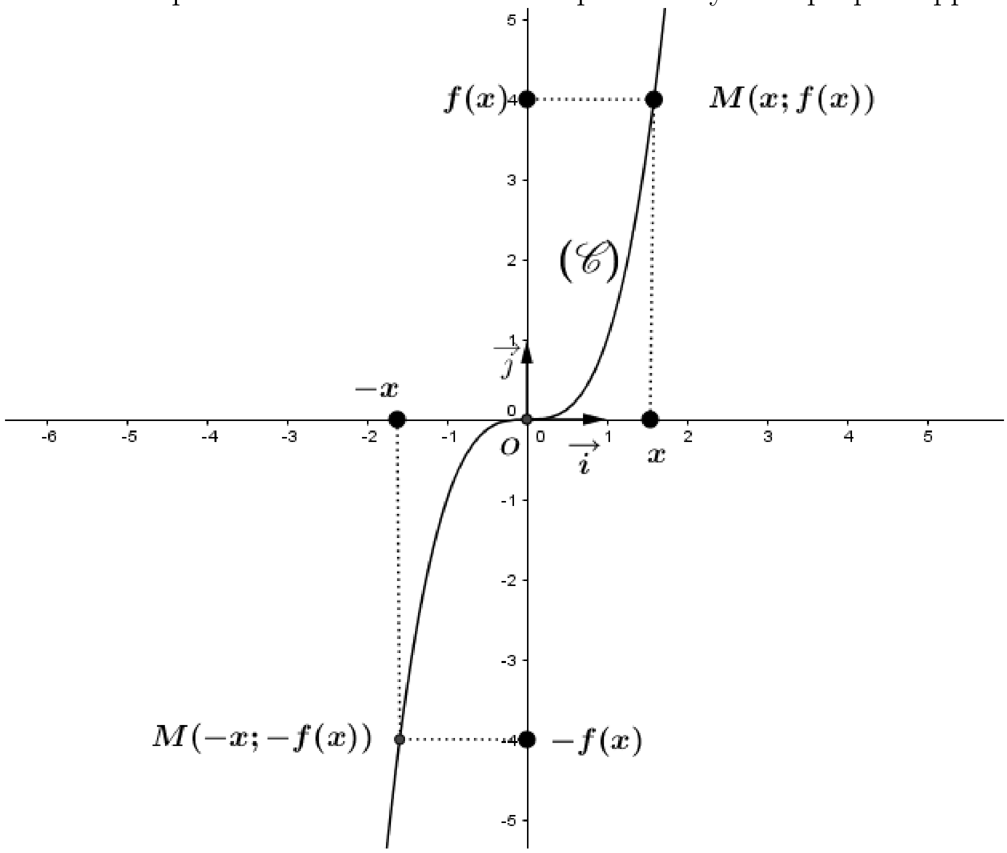


4.7.2 Fonction impaire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite impaire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exercice

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. Étudier la parité des fonctions f et g.

4.8 Fonction périodique

4.8.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et p un nombre réel non nul.
f est dite périodique et de période p si et seulement si :
pour tout $x \in I$, $x+p \in I$, $x-p \in I$ et on a : $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$.

4.8.2 Courbe d'une fonction périodique

On munit le plan $(\mathscr{P})$ du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
La courbe d'une fonction périodique et de période p est globalement invariant par la translation de vecteur $p\overrightarrow{i}$. Pour étudier une fonction, on réduit l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur p.

4.8.3 Fonction partie entière

a) Définition

On appelle partie entière d'un nombre réel x le nombre entier relatif n vérifiant :
$n \leq x < n+1$. Elle est notée : $E(x)$.

Remarque

$E(x)$ est le plus grand entier plus petit que x.

Exemples

$E(8,15) = 8$; $E(12,123) = 12$; $E(2020) = 2020$; $E(\pi) = 3$; $E(-\pi) = -4$; $E(-15) = -15$; $E(0) = 0$.

b) Propriétés

Soit x un nombre réel
▷ $E(x) \in \mathbb{Z}$;
▷ $E(x) \leq x < E(x)+1$;
▷ Soit $p \in \mathbb{Z}$, $E(x+p) = E(x)+p$;
▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$;
▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) < n \Leftrightarrow x < n$;
▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) > n \Leftrightarrow x \geq n+1$;
▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) \geq n \Leftrightarrow x \geq n$.

Application d'un exemple

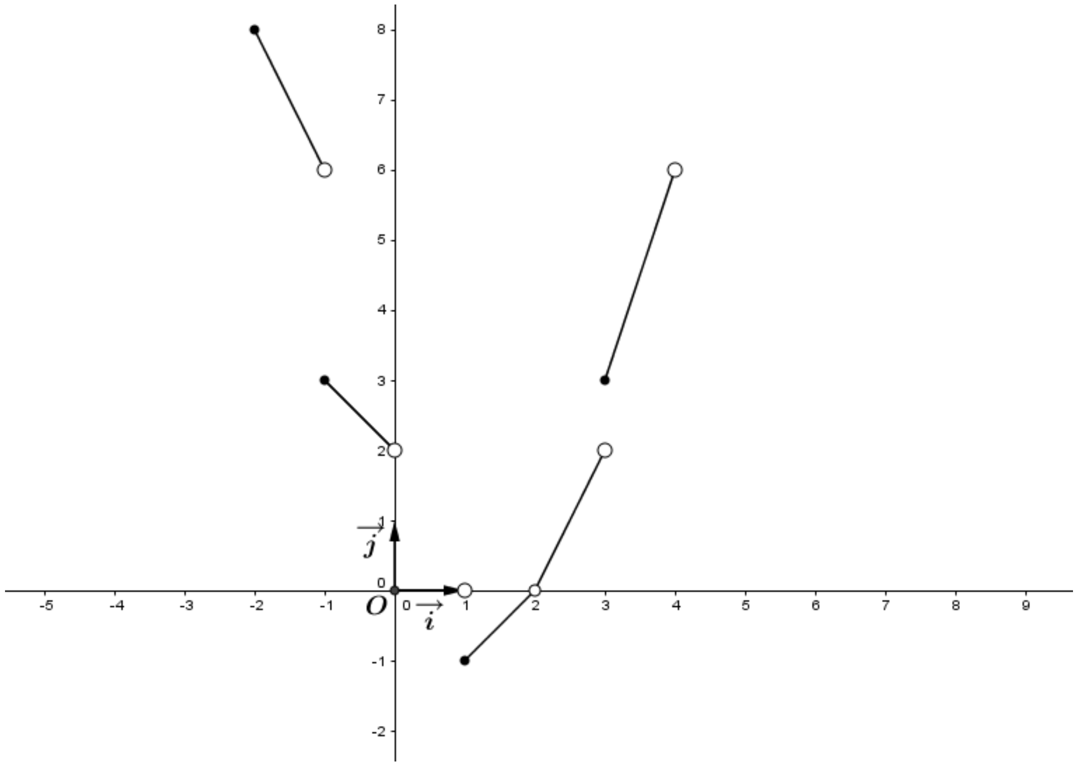
Soit f une fonction définie sur $[-2;4[$ par : $f(x) = (x-2)E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x. Tracer la courbe de la fonction f.

Solution

On donne : $f(x) = (x-2)E(x)$ et $E_f = [-2;4[$
Traçons la courbe de f

On a :

x	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$
$E(x)$	-2	-1	0	1	2	3
$(x-2)E(x)$	$-2x+4$	$-x+2$	0	$x-2$	$2x-4$	$3x-6$



Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$E(x) = 4$; $E(-x) = -7$; $E\left(\frac{3x-2}{4}\right) = -5$; $E(1-2x) = -6$; $E(x) = \dfrac{13}{4}$; $(E(x))^2 + 7E(x) + 10 = 0$; $E(x) < \dfrac{13}{4}$; $E(x) > -8$; $E(x) \geq 3$; $E(x) > -\dfrac{11}{3}$; $E(-x) < -\dfrac{9}{2}$; $(E(x)+3)(E(x)-5) < 0$; $(E(x))^2 + 6E(x) + 8 > 0$; $E(x) < \dfrac{23}{8}$.

Exercice 2

On appelle fonction " partie décimale " de x, notée $D(x)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $D(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la fonction " partie entière " de x.

1. Démontrer que :
   (a) Pour tout réel x et pour tout entier p, $E(x+p) = E(x) + p$.
   (b) Pour tout réel x, $0 \leq D(x) < 1$ et que $D(x+1) = D(x)$.
2. En déduire que la fonction D est périodique et préciser sa période.
3. Représenter graphique la fonction D sur l'intervalle $[-3;3]$.

Exercice 3

On appelle fonction " partie entière " de x, notée $E(x)$, la fonction définie par :
$E(x) = n \Longleftrightarrow n \leq x < n+1$.

1. Déterminer $E(\sqrt{3})$; $E(1-\sqrt{2})$; $E\left(\dfrac{\pi^2}{10}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}$.
3. Représenter graphiquement la fonction $g : x \longmapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-3;3]$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $E(x) = 2$; $E(x) = -1$; $E(x) = n$.

4.9 Centre et Axe de symétrie d'une fonction

4.9.1 Centre de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et $\Omega(x_0;y_0)$ un point du plan. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On dit que $\Omega(x_0;y_0)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels α, β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma x}{x^2 + 1}$.
3. Montrer que le point $B(0;3)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ la courbe de f.

4.9.2 Axe de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On dit que $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0 - x) - f(x) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

4.10 Courbes des fonctions associées aux fonctions données

4.10.1 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto -f(x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Les points $M(x;f(x))$ et $M'(x;-f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'axe des abscisses (Ox).

4.10.2 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(-x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Les points $M(x;f(x))$ et $M'(-x;f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées avec

$M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

4.10.3 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto -f(-x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'origine O du repère.

4.10.4 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x-a)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x-a; f(x))$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i}$.

4.10.5 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x) + b$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x; f(x)+b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{j}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{j}$.

4.10.6 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x-a) + b$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x-a; f(x)+b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

4.10.7 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto |f(x)|$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour tout $x \in E_g$, on a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ g(x) = -f(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$
La courbe $(\mathscr{C}')$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées au-dessus de (Ox).

4.10.8 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(|x|)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Pour tout $x \in E_g$, on a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ g(x) = f(-x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
La courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g est la réunion de la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses positives ainsi que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

4.10.9 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto kf\left(\frac{1}{k}x\right)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
La courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Exercice

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. (a) Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)^2 - 1$.
   (b) En déduire que $(\mathscr{C})$ est l'image de la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera.
   (c) Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
2. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies par :
   $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = -f(-x)$, $f_3(x) = |f(x)|$, $f_4(x) = f(x+1) - 1$ et $f_5(x) = f(|x|)$.
   Construire la courbe représentative de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.

Chapitre 5

LIMITES ET ASYMPTOTES D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

5.1 Limite d'une fonction

5.1.1 Limite d'une fonction en un point x_0

a) Définition et Notation

Soit f une fonction définie sur E_f et x_0 un nombre réel.
On appelle limite de f en $x_0 \in E_f$ le nombre réel noté $f(x_0)$.
Cette limite est notée $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ et on lit " limite quand x tend vers x_0 de $f(x)$ égale à $f(x_0)$ "

Exemple

On donne $f(x) = \dfrac{x}{|1-x|}$.
On a : $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = \dfrac{3}{2}$

b) Unicité de la limite

La limite d'une fonction lorsqu'elle existe est unique. Si une fonction admet deux limites en un même point, alors on dit que la limite n'existe pas.

5.1.2 Limite finie et limite infinie

Soit f une fonction, l et x_0 deux nombres réels.
▷ On dit que f admet une limite finie si $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$.
▷ On dit que f admet une limite infinie si $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

5.1.3 Limite à gauche d'une fonction et limite à droite d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$.
▷ La limite de f lorsque x tend vers x_0 à gauche est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; x_0[$.
On note $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x \longrightarrow x_0^<} f(x)$
▷ La limite de f lorsque x tend vers x_0 à droite est la restriction de f à l'intervalle $]x_0; +\infty[$.
On note $\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \longrightarrow x_0^>} f(x)$.

5.1.4 Limites des fonctions élémentaires

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \alpha = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$

▷ si n est impair, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = -\infty$

▷ si n est pair, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = +\infty$

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0,\ k \in \mathbb{R}$

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{k}{x^n} = +\infty$, si n est pair et $k > 0$

▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{k}{x^n} = -\infty$, si n est impair et $k > 0$ ▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{k}{x^n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k > 0$

5.1.5 Calcul des limites

a) Limites et opérations

Les propriétés présentées sous forme de tableau dans ce paragraphe sont admisses. Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g. Elles restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, en $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite du produit deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' < 0 \\ -\infty, \text{ si } l' > 0 \end{cases}$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$l(l \neq 0)$	$l(l \neq 0)$	0	∞	l	∞
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$l'(l' \neq 0)$	0^+	0^-	0	∞	∞	0
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{l}{l'}$	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty, \text{ si } l' > 0 \\ +\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	?	?	0	∞

b) Formes indéterminées

Dans certains cas on ne peut conclure directement. On dit qu'il y a une forme indéterminée. Ces cas sont : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Pour lever l'indétermination, on utilise :
▷ La factorisation pour les fonctions polynômes.
▷ L'expression conjuguée pour les fonctions irrationnelles.

5.1.6 Limite à l'infini d'une fonction

a) Cas d'une fonction polynôme

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exemple

On donne $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - x + 6$.
Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (4x^4 + 5x^3 - x + 6) = \lim\limits_{x \to -\infty} (4x^4) = 4(-\infty)^4 = +\infty$
D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Cas d'une fonction rationnelle

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple

On donne $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{1-3x^2}$.
Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{1 - 3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-3x^2} = -\dfrac{1}{3}$
D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Exercice

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$; $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 5} - 3x\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$.

5.1.7 Propriétés de comparaison

Majoration et Minoration

Soit f une fonction définie sur E_f.
▷ S'il existe une fonction telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

▷ S'il existe une fonction telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Encadrement (théorème de Gendarme)

Soit f une fonction définie sur E_f.
▷ S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
▷ S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]a;+\infty[$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\forall\ x \in]a;+\infty[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Comparaison de limites

Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]a;+\infty[$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

Exercice 1

Soit g une fonction définie par : $g(x) = xE(\frac{1}{x})$. Calculer la limite de la fonction g en 0.

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-\sin \pi x}{x^2}$.

1. Montrer que : $-\dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.
2. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

5.1.8 Limites classiques des fonctions circulaires

Soit a un nombre réel non nul.
▷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$.
▷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a$.
▷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$.
▷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{x} = 0$.
▷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Exercice

Calculer les limites lorsque x tend vers 0 des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{\sin 3x}{2x}$; $g(x) = \dfrac{\tan x}{3x}$ et $h(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

5.2 Étude des branches infinies

Soit f une fonction définie sur E_f. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5.2.1 Asymptote verticale : droite parallèle à l'axe (Oy)

Soit x_0 un nombre réel non défini sur E_f.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

5.2.2 Asymptote horizontale : droite parallèle à l'axe (Ox)

Soit a un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

5.2.3 Asymptote oblique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b \end{cases}$$

alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au voisinage de ∞.

Remarques

$\triangleright$ La droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
$\triangleright$ Si de plus $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et que $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

5.2.4 Direction asymptotique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \text{n'existe pas} \end{cases}$$

alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Remarque

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty \end{cases}$$

la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

5.2.5 Position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$: $y = ax + b$

Pour étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax+b$, on étudie le signe de $f(x) - y$. On distingue trois cas :
▷ Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f est au dessous de la droite $(\mathscr{D})$.
▷ Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f est au dessus de la droite $(\mathscr{D})$.
▷ Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f et la droite $(\mathscr{D})$ sont confondues.

5.2.6 Branches paraboliques

a) Branche parabolique de direction (Ox)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

alors la courbe $(\mathscr{C})$ f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞.

b) Branche parabolique de direction (Oy)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$$

alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x^3 + 4x^2 + 5x + 4}{x^2 + 1}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Déterminer trois réels α, β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma x}{x^2 + 1}$.
4. Montrer que la droite $(\mathscr{D}) : 3x + 4$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
5. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.
6. Montrer que le point $B(0;4)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ la courbe de f.

CHAPITRE 6

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

6.1 Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur E_f et x_0 un nombre réel.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

6.2 Continuité à gauche et continuité à droite d'une fonction

Soit f une fonction définie sur E_f et x_0 un nombre réel.

▷ On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Propriétés

▷ Une fonction f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite de x_0.

Autrement dit f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ Soit f et g deux fonctions continues en point x_0 et α un réel.

• Les fonctions $f+g$; fg et αf sont continues en x_0.

• Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues au point x_0.

▷ Si f est continue en x_0, alors l'ensemble de continuité de f est son ensemble de définition, c'est-à-dire $E_C = E_f$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \dfrac{1}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
5. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f.

6.3 Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un réel tel que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

On appelle prolongement par continuité en x_0 de la fonction f la fonction g définie par :
$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque

L'ensemble de définition de g est $E_g = E_f \cup \{x_0\}$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en $x_0 = -1$.

6.4 Continuité sur un intervalle

6.4.1 Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.

6.4.2 Théorèmes

▷ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
▷ Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
▷ Toute fonction irrationnelle est continue sur son ensemble de définition.
▷ Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image de l'intervalle I par la fonction f est un intervalle.

Si $I = [a; b]$, l'image de I par f est :
• $[f(a); f(b)]$ si f est croissante,
• $[f(b); f(a)]$ si f est décroissante.
▷ Toute fonction continue sur un intervalle est définie sur cet intervalle.

6.4.3 Théorèmes des valeurs intermédiaires

▷ Si f est continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a; b[$.
▷ Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]a; b[$.

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^8 - 5x^7 + 3x^2 + 2x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]0; 1[$.

CHAPITRE 7

DÉRIVATION

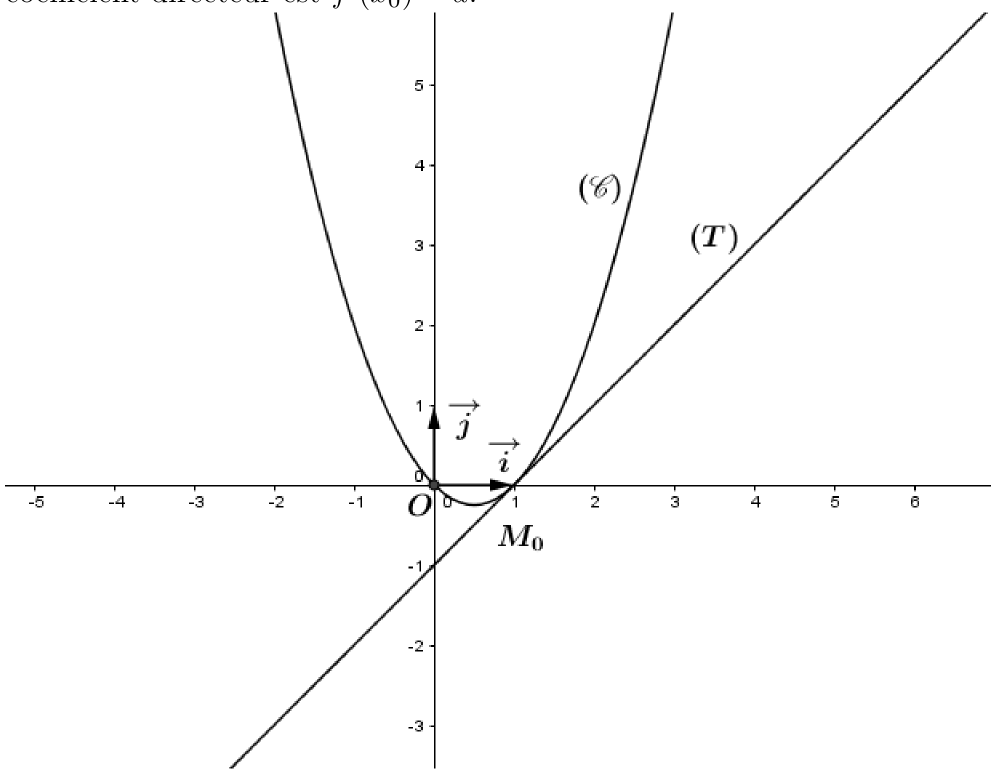
7.1 Dérivabilité d'une fonction en un point x_0

7.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a;b[$ et x_0 un élément de I.
On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = a$.

7.1.2 Interprétation géométrique : Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et M_0 un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet en M_0 une tangente (T) dont le coefficient directeur est $f'(x_0) = a$.



7.1.3 Équation de la tangente (T)

On a : $(T): y = ax + b$
(T) passe par $M_0(x_0; y_0)$
$y_0 = ax_0 + b \Longrightarrow b = y_0 - ax_0$ avec $y_0 = f(x_0)$
$(T): y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
Donc $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

7.1.4 Tangentes particulières

▷ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, alors f est dérivable en x_0. La courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_0)$.
▷ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, alors f ne pas dérivable en x_0. La courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = x_0$.

7.2 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

7.2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.
▷ f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$; $a_1 \in \mathbb{R}$.
a_1 est appelée nombre dérivé à gauche de f en x_0 et on note $f'_g(x_0) = a_1$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.
▷ f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_2$; $a_2 \in \mathbb{R}$.
a_2 est appelée nombre dérivé à droite de f en x_0 et on note $f'_d(x_0) = a_2$.

7.2.2 Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite de x_0 et que le nombre dérivé à gauche et à droite sont égaux, c'est-à-dire
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

7.2.3 Interprétation géométrique : Notion de demi-tangente à une courbe

▷ Si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 mais elle n'est pas dérivable en x_0 c'est-à-dire $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux demi-tangentes oblique de coefficient $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ d'équations respectives $(T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et
$(T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point anguleux.

▷ Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \end{cases}$

Alors f n'est pas dérivable en x_0, la la courbe $(\mathscr{C})$ de f une demi-tangente verticale dirigée vers le haut ou vers le bas au point $M_0(x_0; f(x_0))$.
Ce point est appelé point de rebroussement.

▷ Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \end{cases}$

Alors f n'est pas dérivable en x_0, la la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux demi-tangentes verticales une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas ou une dirigée vers le bas et l'autre vers le haut au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point d'inflexion.

Exercice

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x+1}, \text{ si } x < 1 \\ f(x) = -x + \sqrt{x-1}, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

On désignes par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f en -1 et en ∞.
3. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. (a) Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats.
   (c) Écrire les équations des demi-tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$.

7.3 Dérivabilité sur un intervalle

7.3.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

7.3.2 Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée ou simplement dérivée de la fonction f, l'application qui associée à tout élément x de I, son nombre dérivé $f'(x)$.

7.3.3 Propriétés sur les fonctions dérivables

▷ Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
▷ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
▷ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
▷ Toute fonction irrationnelle n'est pas dérivable au point où elle s'annule.

7.3.4 Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction : f	Fonction dérivée : f'
$f(x) = a$; $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$f(x) = 5x^5 + 6$; $g(x) = 2020^{2020}$; $h(x) = 2\sqrt{x}$ et $p(x) = -\dfrac{2}{x}$.

7.3.5 Dérivées et opérations sur les fonctions

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
αu	$\alpha u'$
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Exercice

Calculer la dérivée de chacune des fonctions : $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - x + 7$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 8}$; $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$; $k(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}$; $p(x) = \dfrac{1}{(x+1}^2$ et $q(x) = \sin(\pi x + 5)$.

7.3.6 Dérivée des fonctions composées

Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle $J \subset f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$.

Exercice

Soit $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = \dfrac{1}{x - 4}$. Calculer la dérivée de $(g \circ f)(x)$.

7.3.7 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est dérivable sur I, alors elle admet une dérivée sur I notée f'' appelée dérivée seconde de f.
De la même façon, on peut définir la dérivée troisième et ainsi de suite jusqu'à la dérivée n^{ieme}.

Exercice

Calculer la dérivée seconde de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

7.4 Application de la dérivée

7.4.1 Sens de variation

Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
▷ f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
▷ f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
▷ f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, à gauche et à droite de -1 et en $+\infty$.
3. Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
5. Donner le sens de variations de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7.4.2 Extremum d'une fonction

Théorèmes

Soit f une fonction définie sur E_f et $I \subset E_f$ un intervalle. Soit x_0 un élément de I.
On suppose que f dérivable en x_0.
▷ Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
▷ Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

7.4.3 Point d'inflexion

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative de f dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$ de f tout point M_0 de $(\mathscr{C})$ en lequel la courbe $(\mathscr{C})$ traverse sa tangente.

b) Propriétés

▷ Si la dérivée première de f notée f' s'annule en x_0 sans changer le signe, alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathscr{C})$.
▷ Si la dérivée seconde de f notée f'' s'annule en x_0 en changeant le signer, alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathscr{C})$.

7.5 Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I vers J, si $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$ or $f^{-1}(y) = x$.

Donc $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

7.6 Famille des fonctions

7.6.1 Définition

On appelle famille des fonctions, toute fonction qui dépend d'un paramètre réel.

7.6.2 Détermination des points fixes

Soit f_m une famille des fonctions où m est un paramètre réel. On désigne par $(\mathscr{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour déterminer les points fixes où toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent, on résout l'équation $f_{m+1}(x) - f_m(x) = 0$.

Exercice

Soit f_m une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx + 3}{x^2 + 1}$ avec m un réel. On désigne par $(\mathscr{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Préciser la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C}_m)$ de f_m.
3. Calculer la dérivée f'_m de la fonction f_m.
4. Montrer que toutes les courbe $(\mathscr{C}_m)$ passant par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées.

7.7 Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction définie sur E_f. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f_m dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour étudier la fonction f, on a :
▷ Ensemble de définition ;
▷ Réduction éventuelle : étude de la parité, de la périodicité et les autres éléments de symétries ;
▷ Continuité et dérivabilité : préciser l'ensemble de continuité et l'ensemble de dérivabilité ;
▷ Étude des variations : calculer la dérivée de f, étudier le signe de cette dérivée et donner le sens de variation de f ;

▷ Tableau de variation : calculer les limites de f sur E_f et les valeurs de f aux points particuliers puis dresser le tableau de variation ;
▷ Étude éventuelle des branches infinies ;
▷ Tracé de la courbe : on placera les points particuliers, les extremums,
points de rebroussement, les points anguleux, les points d'intersection avec les axes de coordonnées, on tracera les tangentes aux points particuliers et les asymptotes puis on tracera la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x+3}$ et $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
5. Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$.
6. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 2

Soit g une fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}, \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = x^3+3x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Calculer les limites aux bornes de E_g.
3. Étudier la continuité de g en $x_0 = 0$.
4. Étudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.
5. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
6. a) Déterminer les équations de demi-tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ de g en $x_0 = 0$.
   b) Donner la nature du point $O(0,0)$.
7. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
8. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de g.

Exercice 3

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

1. Déterminer a et b, sachant que la courbe $(\mathscr{C})$ de f passe par le point $A(0,3)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y = 4x+3$.
   Dans la suite on prendra $a = 4$ et $b = 3$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.

3. Calculer les limites de f aux bornés de son ensemble de définition.
4. Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, puis étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Chapitre 8

FONCTIONS CIRCULAIRES

8.1 Étude des fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

8.1.1 Ensemble de définition

Les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exemple

$f(x) = \cos(2x+\pi)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

8.1.2 Parité des fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$

Soit f et g deux fonctions circulaires telles que : $f(x) = \sin(ax+b)$ et $g(x) = \cos(ax+b)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour étudier la parité des fonctions f et g, on distingue deux cas :
▷ Premier cas : si $b = 0$.
• $\forall\ x \in E_f$, $-x \in E_f$; on a $f(-x) = \sin(-ax) = -\sin(ax) \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$.
D'où f est impaire.
• $\forall\ x \in E_g$, $-x \in E_g$; on a $g(-x) = \cos(-ax) = \cos(ax) \Longrightarrow g(-x) = g(x)$.
D'où g est paire.
▷ Deuxième cas : si $b \neq 0$.
Les fonctions f et g sont ni paires, ni impaires.

8.1.3 Périodicités des fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$

Les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont périodiques et de période T définie par : $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Remarque

Soit f une fonction trigonométrique est périodique et de période T si et seulement si, $f(x+T) = f(x)$.

8.1.4 Intervalle d'étude des fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$

Lorsqu'une fonction est périodique de période T ; on peut l'étudier sur un intervalle I de longueur T. Sa courbe représentative sera complété dans tout le plan par des translations

successives de vecteurs $\overrightarrow{u}=T\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v}=-T\overrightarrow{i}$. Ainsi on a :
$I=[0;T]$ ou $I=[-T;0]$ ou $I=[x_0;x_0+T]$ ou $I=\left[-\frac{b}{a};-\frac{b}{a}+T\right]$ ou $I=\left[-\frac{b}{a}-\frac{T}{2};-\frac{b}{a}+\frac{T}{2}\right]$.

Remarques

Soit f et g deux fonctions circulaires telles que : $f(x)=\sin(ax+b)$ et $g(x)=\cos(ax+b)$ où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.
▷ Si $b=0$, les fonctions f et g sont respectivement impaire et paire, alors on peut réduire l'intervalle d'étude I à un intervalle $J=\left[0;\frac{T}{2}\right]$ ou $J=\left[-\frac{T}{2};0\right]$ et les courbes des fonctions f et g seront complété par des symétries.
▷ Si $f(x)=k\sin(ax+b)$ ou $f(x)=k\cos(ax+b)$ et de période T où $k\in\mathbb{Z}^*$.
La courbe de la fonction f sera complété par des translations des vecteurs $\overrightarrow{u}_k=kT\overrightarrow{i}$.

8.1.5 Dérivées des fonctions $x\mapsto\sin(ax+b)$ et $x\mapsto\cos(ax+b)$

Soit Soit f et g deux fonctions circulaires telles que : $f(x)=\sin(ax+b)$ et $g(x)=\cos(ax+b)$ où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.
▷ Soit la fonction $f(x)=\sin(ax+b)$; On a : $f'(x)=a\cos(ax+b)$.
▷ Soit la fonction $g(x)=\cos(ax+b)$; On a : $g'(x)=-a\sin(ax+b)$.

8.1.6 Représentations des fonctions $x\mapsto\sin(ax+b)$ et $x\mapsto\cos(ax+b)$

Exercice 1

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\cos x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la période de la fonction f.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction f.
4. Démontrer que la fonction f est paire.
5. Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe sur $J=[0;\pi]$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur J.
7. En déduire le tableau de variation de f sur $K=[-\pi;\pi]$.
8. Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f sur l'intervalle $E=[-3\pi;3\pi]$.

Exercice 2

Soit la fonction g définie par : $g(x)=\sin x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Déterminer la période de la fonction g.
3. Trouver un intervalle I sur lequel on peut étudier la fonction g.
4. Démontrer que la fonction g est paire.
5. Calculer la dérivée g' de g et étudier son signe sur $J=[0;\pi]$.

6. Dresser le tableau de variation de g sur J.
7. En déduire le tableau de variation de f sur $K = [-\pi;\pi]$.
8. Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes de coordonnées.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de g sur l'intervalle $E = [-3\pi;3\pi]$.

8.2 Étude de la fonction $x \mapsto \tan(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

8.2.1 Ensemble de définition

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \tan(ax+b)$ avec a un nombre réel non nul.
$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2a} + \frac{k\pi}{a}$.
D'où $E_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2a} + \frac{k\pi}{a}\right\}$.

8.2.2 Parité

Soit $f(x) = \tan(ax+b)$ avec a un nombre réel non nul.
▷ Si $b = 0$, on a : $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.
▷ Si $b \neq 0$, f est ni paire, ni impaire.

8.2.3 Périodicité

Soit $f(x) = \tan(ax+b)$ avec a un nombre réel non nul.
On a : $T = \frac{\pi}{|a|}$.

8.2.4 Intervalle d'étude

Soit $f(x) = \tan(ax+b)$ avec a un nombre réel non nul et T sa période.
Comme f est périodique de période T, alors l'étude de f se faire sur un intervalle de longueur T.
Si $b = 0$, alors $I = \left[0;\frac{T}{2}\right]$ et la courbe sera complété par la symétrie par rapport à l'origine du repère.

8.2.5 Dérivée

$f(x) = \tan(ax+b)$ avec a un nombre réel non nul.
On a : $f'(x) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$.

Exemple

Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = \tan\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$

On a $f'(x) = \frac{2\pi\cos^2\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi\sin^2\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2\pi}{\cos^2\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)}$

8.2.6 Représentation graphique

Exercice

Soit $f(x) = \tan(x)$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la période de la fonction f.
3. Étudier la parité de la la fonction f. puis déduire l'intervalle d'étude de la fonction f.
4. Calculer la dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Chapitre 9

SUITES NUMÉRIQUES

9.1 Généralités

9.1.1 Définition

On appelle suite numérique, toute application u d'une partie E de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$u : E \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

9.1.2 Vocabulaire et Notation

▷ u_n est appelé terme général de la suite ou terme de rang n.
▷ La suite de terme général u_n sera notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.1.3 Détermination d'une suite numérique

Une suite suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée par la donnée :
▷ de son terme général qui est une fonction de n ;
▷ d'une relation dite de récurrence liant deux ou trois termes consécutif de la suite.

a) Suite numérique définie par une formule explicite

Il s'agit de donner une formule explicite qui permet de définir le terme général u_n en fonction de n. On écrit alors $u_n = f(u_n)$ où f est une fonction numérique et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

On donne $u_n = 2n + 3$.
Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Suite numérique définie par une relation de récurrence

Dans ce cas, on donne le ou les premier(s) terme(s) de la suite et une relation liant un ou deux ou plusieurs termes consécutifs.
▷ La suite est dite récurrente d'ordre 1 si u_n ne dépend que du terme précédent.
On a : u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.
▷ La suite est dite récurrente d'ordre 2 si u_n dépend des deux terme qui le précèdent.
On a : u_0, u_1 et $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

Exercice 1

Soit (u_n) une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 3; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

9.2 Suite majorée, minorée , bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire pour tout nombres réels m et M, on a : $m \leq u_n \leq M$.

Remarque

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite positive, lorsque pour tout n, $u_n \geq 0$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite négative, lorsque pour tout n, $u_n \leq 0$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Solution

On donne $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1. Montrons que la suite (u_n) une suite est minorée par 0.
   $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2n}{n+1} \geq 0 \Longrightarrow u_n \geq 0$.
   D'où la suite (u_n) est minorée par 0.
2. Montrons que la suite (u_n) une suite est majorée par 2.
   $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{2n}{n+1} - 2 \Longrightarrow u_n = \dfrac{-2}{n+1} < 0 \Longrightarrow u_n < 0$.
   D'où la suite (u_n) est majorée par 2.
3. Déduisons-en que la suite (u_n) est bornée.
   La suite (u_n) étant minorée et majorée, elle est donc bornée.

9.3 Suite périodique

9.3.1 Définition

On dira qu'une suite (u_n) est périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que : $\forall \quad n \in \mathbb{N},\, u_{n+p} = u_n$
Le plus petit entier $p \geqslant 0$ est appelé période de la suite u_n.

9.3.2 Propriété

Si (u_n) est périodique de période p , alors $\forall \quad k \in \mathbb{N},\, u_{n+kp} = u_n$.

Exercice

On donne : $u_n = (-1)^n$

1. Montrer que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$
2. Calculer u_0, u_1 et u_2.
3. En déduire u_{3019} et u_{3020}.

Solution

$u_n = (-1)^n$

1. Montrons que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$
$u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n.(-1)^2 = (-1)^n = u_n \Longrightarrow \underline{u_{n+2} = u_n}$.
Donc (u_n) est une suite de période $p = 2$.
2. Calculons u_0, u_1 et u_2.
$u_0 = (-1)^0 = 1, \quad u_1 = (-1)^1 = -1 \quad u_2 = (-1)^2 = 1$
3. Déduisons u_{3019} et u_{3020}.
$3019 = 2 \times 1509 + 1$, donc $u_{3019} = u_{(1+2\times1509)} = u_1 \Longrightarrow \underline{u_{3019} = -1}$
$3020 = 1510 \times 2 + 0$, donc $u_{3020} = u_{(0+2\times1510)} = u_0 \Longrightarrow \underline{u_{3020} = 1}$

9.4 Sens de variation d'une suite numérique

9.4.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
▷ La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
▷ La suite (u_n) est dite constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Étudier le sens de variation de (u_n).

9.4.2 Théorème

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0;+\infty[$.
▷ Si f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
▷ Si f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
N.B : ce théorème ne s'applique pas aux suites définies par une relation de récurrence.
Si $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de la suite (u_n) et de la fonction f ne sont pas nécessairement les mêmes.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$, par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3
$f(x)$				

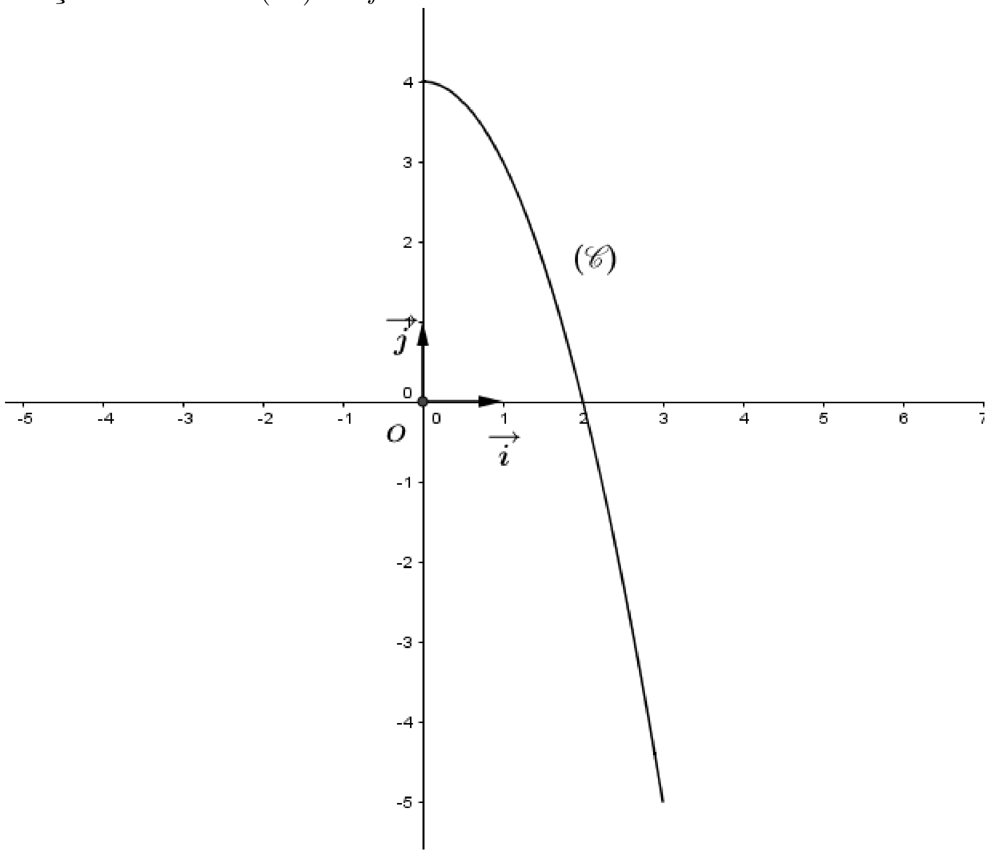
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f, puis déduire son sens de variation.
3. Conjecturer à partir de de la courbe $(\mathscr{C})$ de f, le sens de variation de la suite (u_n) , définie par $u_n = f(n)$.

Solution

1. Complétons le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	0	-5

2. Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ de f.



3. Conjecturons le sens de variation de (u_n).
La fonction f étant décroissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante sur $[0;+\infty[$

9.5 Convergence d'une suite numérique

9.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite (u_n) est dite convergente si elle admet une limite finie.
▷ La suite (u_n) est dite divergente si elle n'admet pas une limite finie.

9.5.2 Théorèmes de convergence d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ Toute suite croissante et majorée est convergente.
▷ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
▷ Toute suite croissante non majorée, décroissante non minorée est divergente.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. En déduire sa limite.

9.6 Suite particulières

9.6.1 Suite arithmétique

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

La suite 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26,... est arithmétique de raison $r = 4$.

b) Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
On a : $u_{n+1} - u_n = r$
$u_1 - u_0 = r$
$u_2 - u_1 = r$
$u_3 - u_2 = r$
$u_4 - u_3 = r$
$u_5 - u_4 = r$
$u_6 - u_5 = r$
$\vdots$
$u_{n-1} - u_{n-2} = r$
$u_n - u_{n-1} = r$
En additionnant membre à membre les n égalités suivantes, on obtient : $u_n - u_0 = nr$

D'où $u_n = u_0 + nr$.
En général, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$;
on a : $u_n = u_p + (n-p)r$ où p est l'indice du premier terme.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
On donne $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

c) Progression arithmétique

Trois termes a, b et c pris dans cet ordre sont en progression arithmétique si et seulement si, $a + c = 2b$.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ la somme des termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \quad (1)$
$s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_2 + u_1 + u_0 \quad (2)$

En faisant (1)+ (2), on a :
$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + ... + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$
or $u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r$
$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + nr - pr = u_0 + u_0 + nr$
$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$.
Ainsi
$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + ... + (u_0 + u_n)$
$2s_n = (n+1)(u_0 + u_n)$
D'où $s_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$
D'une manière générale, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ on a : $s_n = \dfrac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$ avec p indice du premier terme de la suite.
En posant $Nt = n - p + 1$; on a : $s_n = \dfrac{Nt(u_p + u_n)}{2}$ avec $Nt = id - ip + 1$ le nombre de terme et id est l'indice du dernier terme de la suite ; ip est l'indice du premier terme de la suite.

e) Variation d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
▷ Si $r \geq 0$, la suite (u_n) est croissante ;
▷ Si $r \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

f) Convergence d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_p + (n-p)r$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_p - pr + \lim\limits_{n\to+\infty}(nr)$
▷ Si $r > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

▷ Si $r < 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Donc la suite arithmétique est divergente.

9.6.2 Suite géométrique

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \neq 0$.

Exemple

La suite 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$,... est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Terme général d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
On a : $u_{n+1} = qu_n$
$u_1 = qu_0$
$u_2 = qu_1$
$u_3 = qu_2$
$u_4 = qu_3$
$u_5 = qu_4$
$\vdots$
$u_{n-2} = qu_{n-3}$
$u_{n-1} = qu_{n-2}$
$u_n = qu_{n-1}$
En multipliant membre à membre les n égalités et en simplifiant, on obtient : $u_n = u_0q^n$
D'où $u_n = u_0q^n$
D'une manière générale, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_pq^{n-p}$.

c) Progression géométrique

Trois termes a, b et c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si et seulement si, $a \times c = b^2$.

d) Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.
On a :
$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ (1) et $qs_n = qu_0 + qu_1 + qu_2 + qu_3 + ... + qu_n$ (2)
$(1) - (2) \Longrightarrow s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + u_1 - qu_1 + u_2 - qu_2 + u_3 - qu_3 + ... + u_n - qu_n$
or (u_n) est une suite géométrique, alors $u_1 = qu_0$; $u_2 = qu_1$....
on a : $s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + qu_0 - qu_1 + qu_1 - qu_2 + qu_2 - qu_3 + ... + qu_{n-1} - qu_n$
$s_n - qs_n = u_0 - qu_n \Longrightarrow s_n(1-q) = u_0 - q.q^nu_0$.
D'où $s_n = \dfrac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$.

D'une manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $s_n = \dfrac{u_p(1-q^{n-p+1})}{1-q}$.

En posant $Nt = n-p+1$; on a : $s_n = \dfrac{u_p(1-q^{Nt})}{1-q}$

Remarques

▷ Si $q = 1$, on a : $s_n = (n+1)u_0$;

▷ $1+q+q^2+q^3+q^4+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

e) Variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q strictement positif et de premier terme u_0 telle que : $u_n = u_0 q_n$.
▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
▷ si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Remarque

Si $q < 0$, la suite (u_n) est dite alternée.

Exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par ses termes : $u_1 = 2$ et $u_3 = 8$

1. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sachant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique alternée.
2. Calculer u_2 et u_4.

f) Convergence d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_p et de raison r définie par :
$u_n = u_p q^{n-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$.
On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = u_p \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^{n-p}$
▷ Si $q = 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 1$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers u_p.
▷ Si $q > 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty$, alors (u_n) est divergente.
▷ Si $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers 0.
▷ Si $q \leq -1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n$ n'existe pas, alors (u_n) est divergente.

9.7 Suite arithmético-géométrique

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux constantes α et β telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique avec $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

Remarques

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique.
▷ Si $\alpha = 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + \beta$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \beta$.
▷ Si $\beta = 0$, on a : $u_{n+1} = \alpha u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \alpha$.
▷ Pour trouver le terme général de la suite (u_n), on introduit une suite auxiliaire (v_n) géométrique qui est en fonction de la suite (u_n).

Exercice

Soit une suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$
On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

9.8 Suite adjacente

9.8.1 Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :
▷ (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
▷ Pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$;
▷ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

9.8.2 Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles converges vers une même limite.

Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
2. Vérifier que $v_n - u_n > 0$.
3. Calculer la limite des (u_n) et (v_n) en $+\infty$.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

9.9 Raisonnement par récurrence

Soit $p(n)$ une propriété qui dépend de n.
Pour démontrer par récurrence que la propriété $p(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut :
▷ Vérifier que la propriété $p(n)$ est vraie au rang initial $n = n_0$;
▷ supposer qu'elle est vraie pour $n = k$, $\forall \quad k \geqslant n_0$;
▷ Prouver qu'elle est vraie pour $n = k+1$. Puis conclure $\forall \quad n \geqslant n_0$, $p(n)$ est vraie.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

Exercice 2

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

1. Calculons u_2, u_3 et u_4.
   $u_2 = 2 + 2^2 = 6$; $\quad u_3 = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$; $\quad u_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$
2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

   – Pour $n = 1$, $u_1 = 2^2 - 2 = 2$ vraie ; Pour $n = 2$, $u_2 = 2^3 - 2 = 6$ vraie
   – Supposons que vraie au rang k.
   – Prouvons qu'elle est vraie pour $k+1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 2$.
   En effet,

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= \underbrace{2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k}_{u_k} + 2^{k+1} \\
&= u_k + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+1} - 2 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 2 \\
u_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 2
\end{aligned}
$$

   D'où $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$

Chapitre 10

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

10.1 Primitives d'une fonction

10.1.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur I, la fonction F telle que pour tout x élément de I, on a : $F'(x) = f(x)$.

Exemples

1. $x \longmapsto x^2 - 1$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto \cos x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

10.1.2 Propriétés

▷ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
▷ Soit F une primitive de la fonction f sur I, alors pour tout réel c, $F+c$ est une primitive sur I de f.
▷ Toute primitive de f sur un intervalle I s'écrit sous la forme $F+c$ où c est un réel.
▷ Soit f une fonction admettant une primitive F sur l'intervalle I, y_0 un réel, x_0 un point de I. Il existe une unique primitive F de f qui prend la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire $F(x_0) = y_0$.

10.1.3 Calcul des primitives

a) Primitives usuelles

Fonction f	Primitive F	Conditions
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N} - \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = \dfrac{1}{x} + c$	sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -cotanx + c$	$x \neq k\pi$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Primitives des fonctions composées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive	Condition
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	sur I
$u' + v'$	$u + v + c$	sur I
$\dfrac{u'}{u^n},\ n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + c$	$u \neq 0$ sur I
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + c$	sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u > 0$ sur I
$u' \sin u$	$-\cos u + c$	sur I
$u' \cos u$	$\sin u + c$	sur I
$\lambda u',\ \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u + c$	sur I
$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u + c$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f définie par :
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 5$; $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 5}$; $f(x) = \cos(\pi x + 3)$; $f(x) = \dfrac{\pi}{\cos^2 \pi x}$;
$f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2 + x - 1)^3}$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x-4}{(x^2-4x+1)^2} - \sqrt{x}$.

1. Déterminer une primitive de F de f.
2. Déterminer une primitive F de f qui prend la valeur -1 en 0.

10.2 Intégrale d'une fonction continue

10.2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I. On appelle intégrale de f de a à b le nombre réel noté $F(b) - F(a)$. On note pour tout $t \in I$, $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

10.2.2 Vocabulaire

▷ $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ se lit " somme ou intégrale de a à b $f(t)dt$ "

▷ $[F(t)]_a^b$ se lit " $F(t)$ pris entre a et b "

▷ a et b sont les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ avec $a \leq b$.

▷ La variable t est appelée variable d'intégration. Elle est dite variable muette car elle peut être remplacer par une autre sans changer la valeur de l'intégrale.

Exercice

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_1^3 (t^2-1)dt$; $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi t dt$ et $K = \displaystyle\int_1^2 t\sqrt{t^2-1}dt$.

10.2.3 Propriétés

p_1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I, on a :
▷ $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$;
▷ $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;
▷ $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ (relation de Chasles).

p_2) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α un nombre réel, a et b deux éléments de I, on a :
▷ $\displaystyle\int_a^a \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^a f(t)dt = 0$;
▷ $\displaystyle\int_a^a (f(t)+g(t))dt = \int_a^a f(t)dt + \int_a^a g(t)dt$.

p_3) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α un nombre réel, a et b deux éléments de I $(a \leq b)$.
▷ Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$;
▷ Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

p_4) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [-a; a]$, on a :
▷ Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
▷ Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

p_5) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et p un nombre réel non nul.
Si f est périodique de période p ;
▷ $\int_{a}^{a+p} f(t)dt = \int_{0}^{p} f(t)dt$.
▷ $\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$.

10.2.4 Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et a et b deux éléments de I.
▷ S'il existe deux nombres réel m et M tels que $\forall\, x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$,
alors $m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(t)dt \leq M(b-a)$.
▷ S'il existe un nombre réel M tel que $\forall\, x \in [a; b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_{a}^{b} f(t)dt\right| \leq M|b-a|$.

10.2.5 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ avec $a \neq b$.
On appelle valeur moyenne de f sur I, le nombre réel noté μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)dt$.

Exercice 1

Soit f et F deux fonctions définies par :
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que F est une primitive de f.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :
$A = \int_{0}^{1} x^4 dx$; $B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; $C = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$; $D = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_{0}^{4} |x-2| dx$;$J = \int_{-1}^{4} (x - |x-1|)\, dx$; $K = \int_{0}^{4} |x-2| dx$; $L = \int_{-4}^{5} |x^2-9| dx$.

Exercice 4

On donne $E = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ et $F = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$.

1. Calculer $E + F$ et $E - F$.
2. En déduire E et F.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (3x^2 + 5)(x^3 + 5x - 2)$.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $I = [0; 2]$.

CHAPITRE 11

STATISTIQUES

11.1 GÉNÉRALITÉS

11.1.1 La statistique

La statistique est une science qui a pour objet de collecter, classer, analyser et présenter de façon compréhensible un ensemble de données. Ces données peuvent prévenir de plusieurs domaines comme : la médecine, l'éducation, l'économie,...

11.1.2 Les statistiques

Les statistiques sont les résultats produit par la statistique entant que science.

11.1.3 Collecte des données

Elle se fait au moyen de deux approches : le recensement et le sondage.

a) Le recensement

Il consiste à interroger chaque individu de la population cible.

b) Le sondage

Il consiste à interroger une partie de la population qu'on appelle échantillon.

11.1.4 Vocabulaire de base

a) Univers

C'est l'ensemble de tous les individus ciblés.

Exemple

L'ensemble des élèves inscrits au lycée Emery Patrice LUMUMBA.

b) Population

C'est l'ensemble d'individus homogène constituant l'ensemble de référence (univers).

Exemple

L'ensemble des élèves inscrits au lycée Emery Patrice LUMUMBA.

11.1.5 Échantillon

On appelle échantillon, une partie ou un sous ensemble de l'univers.

11.1.6 Unité statistique

C'est un individu ou un élément de la population.

Exemple

Un élève inscrit au lycée Emery Patrice LUMUMBA.

11.1.7 Caractère statistique : X

C'est l'objet d'étude du statisticien au sein de la population. C'est la propriété étudiée.

Exemples

État matrimonial, l'âge, le sexe, la taille, la nationalité,...

a) Modalités : x_i ou y_i

Ce sont les différents cas possibles du caractère.

b) Type de caractère

On distingue deux types de caractères statistique :
▷ le caractère qualitatif : c'est un caractère qui n'est pas mesurable. Ces différentes modalités sont obtenues par simple observation.

Exemple

La nationalité, l'état matrimonial, la couleur, ...
▷ le caractère quantitatif : c'est un caractère qui est mesurable. On l'appelle aussi variable statistique. Il peut être discret ou continu.
• Il est discret lorsqu'il est mesurable par des valeurs entières.

Exemple

Le nombre d'enfants, des élèves, d'étudiants,...
• Il est continu lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné.

Exemple

La taille, l'âge,...

11.2 Série statistique à un seul caractère

11.2.1 Définition

On appelle série statistique à un seul caractère ou à une variable X, l'ensemble des couples (x_i, n_i) souvent données sous la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	....	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...	n_k

11.2.2 Effectif relatif

On appelle effectif relatif noté n_i, le nombre d'individus d'une population présentant la modalité x_i du caractère X.

11.2.3 Effectif total

L'effectif total noté N est la somme des effectifs relatifs.
On a : $N = \sum_{k=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$.

11.2.4 Fréquence relative

On appelle fréquence relative, le quotient entre l'effectif relatif et l'effectif total.
On a : $f_i = \frac{n_i}{N}$ ou $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$ (en %).
N.B : La somme de toutes les fréquences d'une série statistique est égale à 1.

11.2.5 Moyenne arithmétique

On appelle moyenne arithmétique le nombre réel noté $\overline{x}$ défini par : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ ou $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$.

11.2.6 Variance

On appelle variance le nombre réel positif noté $v(x)$ défini par : $v(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$.

Théorème de Koenig

$$v(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \overline{x}^2.$$

11.2.7 Écart-type

C'est la racine carré de la variance.
On a : $\sigma(x) = \sqrt{v(x)}$.

11.2.8 Coefficient de dispersion ou coefficient de variation

On appelle coefficient de variation noté C_v le rapport de l'écart-type $\sigma(x)$ par la moyenne arithmétique $\overline{x}$. On a : $C_v = \frac{\sigma(x)}{\overline{x}}$.

Remarque

Le coefficient de variation est un nombre sans unité, il permet de comparer les distributions quelles que soient leurs unités et valeurs de la variable.

Exercice

Soit la série statistique suivante :

x_i	59	62	65	68	71	74	77
n_i	1	4	6	7	5	5	2

1. Donner l'effectif total de cette série.
2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
3. Calculer le coefficient de variation de X.

11.2.9 Étendue

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série. On a : $E = Max - Min$.

11.2.10 Écart-moyen

On appelle écart moyen de la série statistique $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq k}$ de moyenne $\overline{x}$, le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{n_1|x_1-\overline{x}|+n_2|x_2-\overline{x}|+...+n_k|x_k-\overline{x}|}{n_1+n_2+n_3+...+n_k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i|x_i-\overline{x}|$$

11.2.11 Effectifs cumulés

Soit $(x_i\,;\,n_i)_{1\leq i\leq k}$ une série statistique dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

▷ On appelle effectif cumulé croissant noté $(E.C.C)$ de modalité x_i la somme des effectifs des modalités inférieures ou égale à x_i.

▷ On appelle effectif cumulé décroissant noté $(E.C.D)$ de modalité x_i la somme des effectifs des modalités supérieures ou égale à x_i.

Exercice 1

Compléter le tableau statistique suivant :

x_i	0	2	3	4	5	6	7	9
n_i	2	3	5	4	11	11	8	4
$E.C.C$								
$E.C.D$								

Solution

Complétons le tableau statistique suivant :

x_i	0	2	3	4	5	6	7	9
n_i	2	3	5	4	11	11	8	4
$E.C.C$	2	5	10	14	25	36	44	48
$E.C.D$	48	46	43	38	34	23	12	4

11.2.12 Fréquences Cumulées

▷ On appelle fréquence cumulée croissante notée $(F.C.C)$ de modalité x_i le quotient de son effectifs croissant par l'effectif total.

$F.C.C = \dfrac{E.C.C}{N} \times 100$ (en %)

▷ On appelle fréquence cumulée décroissante notée $(F.C.D)$ de modalité x_i le quotient de son effectifs décroissant par l'effectif total.

$F.C.D = \dfrac{E.C.D}{N} \times 100$ (en %)

11.2.13 Mode d'une série statistique

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal.

Exemple

Une enquête effectuée à la demande d'un fabriquant de chaussures et portant sur les pointures d'une population masculin a donné les résultats suivants :

Pointures	39	40	41	43
Fréquences	5%	10%	65%	20%

Le mode de cette série statistique est 43.

11.2.14 Médiane d'une série statistique

La médiane d'une série statistique ou d'une série de mesures rangées par ordre de grandeur (croissant ou décroissant) est la valeur de l'observation qui se situe au milieu de la série ; c'est-à-dire la valeur de la variable qui partage les observations en deux effectifs égaux. Soit $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ cette série d'observation, n le nombre d'observation. On distingue deux cas :

▷ Si n est pair, la médiane est la moyenne arithmétique des valeurs qui occupent les positions $\dfrac{n}{2}$ et $\dfrac{n+2}{2}$.

▷ Si n est impair, alors la médiane est la valeur qui occupe la position $\dfrac{n+1}{2}$.

Exemple

▷ On relève les âges d'un groupe de 15 personnes et on les range par ordre croissant :
12, 12, 13, 13, 13, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19.

$n = 15$ la médiane est donc la valeur qui occupe la position $\dfrac{15+1}{2} = 8$. D'où $M = 16$.

▷ Une personne, âgée de 18 ans, vient se joindre au groupe précédent.

La série, ordonnée , devient : 12, 12, 13, 13, 13, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19.

On a : $n = 16$, la médiane est la moyenne arithmétique des valeurs qui occupent les positions $\dfrac{16}{2} = 8$ et $\dfrac{16+2}{2} = 9$. D'où $M = \dfrac{16+17}{2} = 16,5$.

11.3 Quartiles

11.3.1 Définition

Les quartiles d'une série statistique sont les valeurs qui partagent cette série en quatre séries de même effectif.

On distingue trois types de quartiles :

▷ le premier quartile noté Q_1, qui correspond à 25% d'effectif total.

▷ le deuxième quartile noté Q_2, qui correspond à 50% d'effectif total.

Il s'agit de la médiane.

▷ le troisième quartile noté Q_3, qui correspond à 75% d'effectif total.

N.B : 25% 50% et 75% sont lus dans les fréquences cumulées croissantes.

11.3.2 Méthode pour trouver les quartiles

Il faut commencer par classer la série dans l'ordre croissant.

On utilise une méthode approximative mais qui donner des résultats significatifs pour des séries à grands effectifs (N).

On calcule $\dfrac{N}{4}$ et on note a l'entier supérieur à $\dfrac{N}{4}$.

On calcule $\dfrac{3N}{4}$ et on note b l'entier supérieur à $\dfrac{3N}{4}$.
▷ Q_1 est a^{ieme} valeur de la série statistique.
▷ Q_3 est b^{ieme} valeur de la série statistique.
N.B : Q_1 et Q_3 sont forcement des valeurs de la série.
Exercice
On considère la série suivante :

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3

1. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?
2. Déterminer la valeur de la médiane de la série statistique.
3. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série statistique.

Solution

1. Effectif total de cette série statistique.
$N = \sum_{i=1}^{7} n_i = 5+7+3+8+8+6+3 = 40$
D'où $N = 40$
2. Déterminons la valeur de la médiane de la série statistique
Comme $N = 40$ est pair, alors la médiane est donc la moyenne arithmétique des valeurs qui occupent les positions $\dfrac{N}{2} = 20$ et $\dfrac{N+2}{2} = 21$, alors $M_e = \dfrac{7+7}{2} = 7$
D'où $M_e = 7$
3. Déterminons le premier et le troisième quartiles de la série statistique
On a : $\begin{cases} \dfrac{N}{4} = \dfrac{40}{4} = 10 \\ \dfrac{3N}{4} = \dfrac{120}{4} = 30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_3 = 8 \end{cases}$

11.3.3 Écart inter-quartiles et Intervalle inter-quartiles

Définition
▷ On appelle écart inter-quartiles noté E_Q la différence entre Q_3 et Q_1.
On a : $E_Q = Q_3 - Q_1$.
▷ On appelle intervalle inter-quartiles noté I_Q l'intervalle entre Q_1 et Q_3.
On a : $I_Q = [Q_1; Q_3]$.

11.3.4 Coefficient inter-quartile relatif

On appelle coefficient inter-quartile relatif le rapport de l'écart inter-quartile par le deuxième quartile.
On a : $c = \dfrac{E_Q}{Q_2} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$.

11.4 Déciles

11.4.1 Définition

Les déciles d'une série statistique sont les valeurs qui partagent cette série en dix séries de même effectif.
▷ le premier décile noté D_1, qui correspond à 10% d'effectif total.

▷ le neuvième décile noté D_9, qui correspond à 90% d'effectif total.
N.B : 10% et 90% sont lus dans les fréquences cumulées croissantes.

11.4.2 Méthode pour trouver les déciles

Il faut commencer par classer la série dans l'ordre croissant.
On utilise une méthode approximative mais qui donner des résultats significatifs pour des séries à grands effectifs (N).
On calcule $\frac{N}{10}$ et on note a l'entier supérieur à $\frac{N}{10}$.
On calculer $\frac{9N}{10}$ et on note b l'entier supérieur à $\frac{9N}{10}$.
▷ D_1 est a^{ieme} valeur de la série statistique.
▷ D_9 est b^{ieme} valeur de la série statistique.

11.4.3 Écart inter-déciles et Intervalle inter-déciles

Définition
▷ On appelle écart inter-déciles noté E_D la différence entre D_9 et D_1.
On a : $E_D = D_9 - D_1$.
▷ On appelle intervalle inter-déciles noté I_D l'intervalle entre D_1 et D_9.
On a : $I_D = [D_1; D_9]$.

Exercice
On considère la série statistique suivante :

x_i	1	2	4	7	8	10	12
n_i	8	15	19	31	11	10	6

1. Quel est l'effectif total de cette série ?
2. Déterminer le premier et le neuvième déciles.
3. Déterminer écart inter-déciles.
4. Déterminer l'intervalle inter-déciles.

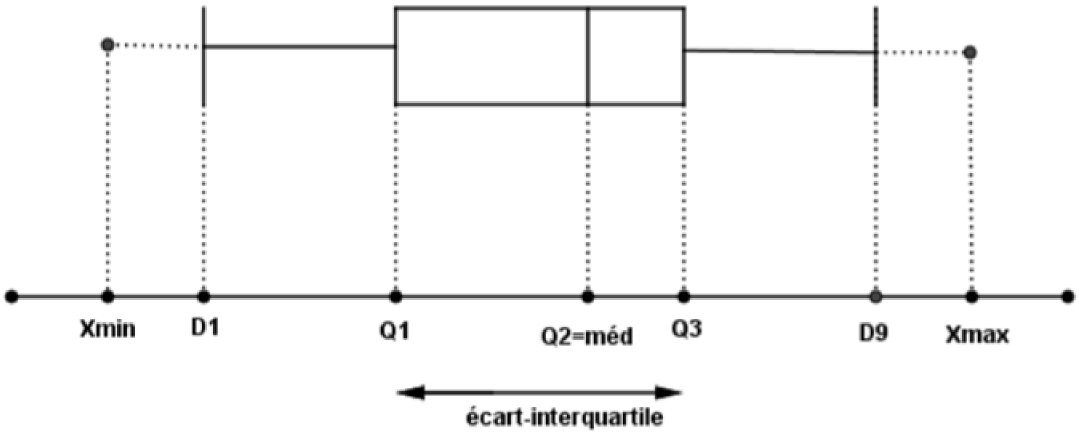
Solution

1. Effectif total de cette série statistique.
   $N = \sum_{i=1}^{7} n_i = 100$
   D'où $N = 100$
2. Déterminons le premier et le neuvième déciles de la série statistique
   On a : $\begin{cases} \frac{N}{10} = \frac{100}{10} = 10 \\ \frac{9N}{10} = \frac{900}{10} = 90 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D_1 = 2 \\ D_9 = 10 \end{cases}$
3. Déterminons l'écart inter-déciles
   $E_D = D_9 - D_1 = 10 - 2 = 8 \Longrightarrow E_D = 8$
4. Déterminons l'intervalle inter-déciles
   $I_D = [D_1; D_9] \Longrightarrow I_D = [2; 10]$

11.4.4 Diagramme en boîte

Définition

Un diagramme en boîte ou boîte à moustaches permet de représenter une série statistique au moyen d'une boîte
rectangulaire sur laquelle sont indiqués les informations suivantes :
▷ premier quartile Q_1, le troisième quartile Q_3.
▷ premier décile D_1, le neuvième décile D_9.
▷ la médiane Me.



Exercice

On a demandé à 50 personnes prenant l'auto bus pendant une semaine, le nombre de fois où chacune de ces personnes a utilisé ce type de transport pendant la semaine écoulée. Voici les résultats :

x_i (nombre de voyageur)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
E.C.C										
$f_i(\%)$										
F.C.C (%)										

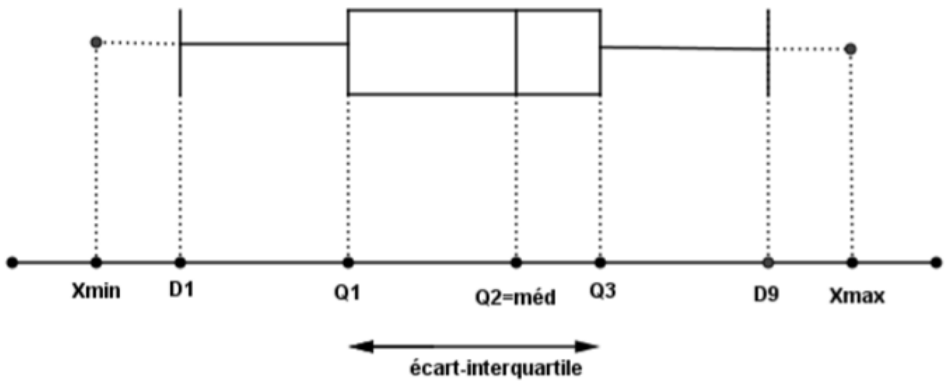
1. Recopier et compléter le tableau.
2. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?
3. Déterminer la médiane.
4. Déterminer les quartiles de cette série.
5. Déterminer les déciles de cette série.
6. Déterminer Écart inter-quartiles et Intervalle inter-quartiles.
7. Déterminer Écart inter-déciles et Intervalle inter-déciles.
8. Construire un diagramme en boite.

Solution

1. Recopions et complétons le tableau

x_i (nombre de voyageur)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	3	5	7	6	9	5	4	5	3
E.C.C	3	6	11	18	24	33	38	42	47	50
$f_i(\%)$	6%	6%	10%	14%	12%	18%	10%	8%	10%	6%
F.C.C (%)	6%	12%	22%	36%	48%	66%	76%	84%	94%	100%

2. Donnons effectif total de cette série statistique.
   D'après l'énoncé de l'exercice, on a : $N = 50$
3. Déterminons la médiane de la série statistique
   Comme $N = 50$ est pair, alors la médiane est donc la moyenne arithmétique des valeurs qui occupent les positions $\frac{N}{2} = 25$ et $\frac{N+2}{2} = 26$, alors $M_e = \frac{6+6}{2} = 6$
   D'où $M_e = 6$.
4. Déterminons le premier et le troisième quartiles de la série statistique
   On a : $\begin{cases} \frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12?5 \\ \frac{3N}{4} = \frac{150}{4} = 37,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_3 = 7 \end{cases}$
5. Déterminons le premier et le neuvième déciles de la série statistique
   On a : $\begin{cases} \frac{N}{10} = \frac{50}{10} = 5 \\ \frac{9N}{10} = \frac{450}{10} = 45 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D_1 = 2 \\ D_9 = 9 \end{cases}$
6. Déterminons l'écart inter-quartiles et intervalle inter-quartiles
   $E_Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 \Longrightarrow E_Q = 3$
   $I_D = [Q_1; Q_3] \Longrightarrow I_Q = [4; 7]$
7. Déterminons l'écart inter-déciles et l'intervalle inter-déciles
   $E_D = D_9 - D_1 = 9 - 2 \Longrightarrow E_D = 7$ et $I_D = [D_1; D_9] \Longrightarrow I_D = [2; 9]$
8. Construisons un diagramme en boite



11.5 Série statistique à caractère continu

Soit $[a_i; b_i]$ un intervalle ou une classe.

11.5.1 Classe modale

On appelle classe modale de cette série toute classe d'effectif maximal.

11.5.2 Amplitude d'une classe

L'amplitude d'une $[a_i; b_i]$ est donnée par : $\mathscr{A}_i = b_i - a_i$.

11.5.3 Centre d'une classe

Le centre d'une classe est donné par : $C_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$.

11.5.4 Le mode

C'est le centre d'une classe modale.

11.6 Série statistique à deux caractères

11.6.1 Définition

On appelle série statistique à double caractères $(X;Y)$, l'ensemble des triplets (x_i, y_j, n_{ij}) avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ et n_{ij} désigne l'effectif, c'est-à-dire le nombre d'observateurs du couple $(x_i; y_j)$.

11.6.2 Effectif total

C'est la somme de tous les effectifs n_{ij}. On le note N.

$N = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$.

11.6.3 La fréquence du couple $(x_i; y_j)$

On appelle fréquence du couple $(x_i; y_j)$ notée f_{ij}, le nombre réel tel que : $f_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{N}$.

Exercice

Soit la série double suivante :

y_j \ x_i	0	2	3	4
1	1	2	3	5
3	5	2	8	6

1. Quel est l'effectif total de cette série
2. Calculer la fréquence du couple $(x_i; y_j)$.

N.B : Dans notre cours, nous ne considérons que le cas où les effectifs n_{ij} sont tous égaux à 1.

11.7 Série statistique double linéaire

Définition

Une série statistique double est dite linéaire lorsque une seule valeur du caractère x correspond à une seule valeur du caractère y et inversement.

Elle se présente sous la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_p
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_p

11.7.1 Nuage des points associés à une série double

Soit $(x_i;y_j)$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle nuage des points l'ensemble des points $M_i(x_i,y_i)$.

11.7.2 Représentation graphique du nuage des points

Application

Soit la série statistique suivante :

x_i	2	3	4	5	6	6
y_i	1	2	2	3	4	5

11.7.3 Point moyen

Définitions

Soit $(x_i;y_i)$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle point moyen du nuage le point $G(\overline{x},\overline{y})$ barycentre de tous les points du nuage de cette série, avec $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{q} y_i$.

11.8 Ajustement linéaire : Méthode de moindres carrées

11.8.1 Covariance

Soit $(x_i;y_j)$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N.
On appelle covariance du couple (x,y) le nombre réel noté $cov(x,y)$ tel que :
$cov(x,y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$.

Formule de Koenig

On a : $cov(x,y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x}\times\overline{y}$.

11.8.2 Droite de régression de y en x

La droite de régression de y en x est la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point moyen G associé à la série statistique double $(x_i;y_i)$ et dont le coefficient directeur est $a = \dfrac{cov(x,y)}{v(x)}$.
Une équation cartésienne de cette droite est : $(\mathscr{D}) : y-\overline{y} = \dfrac{cov(x,y)}{v(x)}(x-\overline{x})$.
Cette droite peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{D}) : y = ax+b$ avec $a = \dfrac{cov(x,y)}{v(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

11.8.3 Droite de régression de x en y

La droite de régression de x en y est la droite $(\mathscr{D}')$ passant par le point moyen G associé à la série statistique double (x_i,y_i) et dont le coefficient directeur est $a' = \dfrac{cov(x,y)}{v(y)}$.

Une équation cartésienne de cette droite est : $(\mathscr{D}') : x - \overline{x} = \dfrac{cov(x,y)}{v(y)}(y - \overline{y})$.

Cette droite peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{D}') : x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{cov(x,y)}{v(y)}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$.

11.8.4 Ajustement linéaire : Méthode de MAYER

Ajuster un nuage de points consiste à déterminer une courbe simple passant " le plus prés possible " par des points du nuage. Si la courbe cherchée est une droite, on dit que l'ajustement est linéaire.

a) Droite de régression par la Méthode de MAYER

La méthode de MAYER consiste à diviser le nuage des points en deux sous-nuages d'effectifs égaux. Soit $G_1(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$ les points moyens respectifs des sous-nuages ainsi obtenus. La droite (G_1G_2) est appelée droite de MAYER.

b) Équation de la droite (G_1G_2)

les points moyens $G_1(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$

On a : l'équation de la droite passant par G_1 et G_2 est : $\dfrac{x - \overline{x}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} = \dfrac{y - \overline{y}_1}{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}$.

N.B : Cette droite est de la forme : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}$ et $b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1$ ou $b = \overline{y}_2 - a\overline{x}_2$.

11.8.5 Coefficient de corrélation

a) Définition

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères x et y telles que $V(x)$ et $V(y)$ non nulles. Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel noté r tel que : $r = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{v(x) \times v(y)}} = \dfrac{cov(x,y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)}$.

b) Propriétés

- ▷ $r^2 = a.a' \Longrightarrow |r| = \sqrt{a.a'}$;
- ▷ $-1 \leq r \leq 1$, c'est-à- dire $0 \leq |r| \leq 1$;
- ▷ Si $|r| = 1$, alors tous les points du nuage sont alignés. L'ajustement est dit parfait (les résultats sont fiables), les droites de régressions $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues ;
- ▷ Si $0,87 \leq |r| \leq 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation entre x et y (l'ajustement se justifie) ;
- ▷ Si $|r|$ est très voisin de 0, alors il y a indépendance linéaire statistique ;
- ▷ Si $|r| < 0,87$, on dit qu'il y a une faible corrélation entre x et y (l'ajustement n'est pas justifie).

Remarques

- ▷ Si $a > 0$ et $a' > 0$, on a : $r = \sqrt{aa'}$;
- ▷ Si $a < 0$ et $a' < 0$, on a : $r = -\sqrt{aa'}$.

Exercice

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire d'une entreprise en milliers de francs, pendant huit années consécutives.

numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
chiffre d'affaires (y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

1. Représenter le nuage de points $(M_i)_{1\leq i\leq 8}$ associé à cette série statistique.
2. (a) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.
   (b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x puis représenter cette droite.
3. On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux : $(M_i)_{1\leq i\leq 4}$ et $(M_i)_{5\leq i\leq 8}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2, points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.
   (b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) puis représente cette droite.
   (c) Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2).
4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaires pour la 9$^{\text{e}}$ année :
   (a) à l'aide de la droite de régression de y en x ;
   (b) à l'aide de la droite (G_1G_2).

Chapitre 12

DÉNOMBREMENT

12.1 Ensembles

Définition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Remarques

Soit E un ensemble.
▷ Lorsqu'un objet x appartient à l'ensemble E, on note $x \in E$.
▷ S'il n'appartient pas à l'ensemble E, on note $x \notin E$.

12.2 Ensembles finis

12.2.1 Définition

Un ensemble E est fini lorsqu'il est constitué de n éléments avec $n \in \mathbb{N}$ ou un ensemble E est dit fini lorsqu'on peut compter ses éléments.

Exemple

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

12.2.2 Réunion de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle réunion des ensembles A et B, l'ensemble formé des éléments appartenant à A ou à B. On note $A \cup B$.
$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

12.2.3 Intersection de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle intersection des ensembles A et B, l'ensemble des éléments communs à A et B. On note $A \cap B$
$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Remarque

Si $A \cap B = \{\ \}$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

12.2.4 Ensemble $A \setminus B$ ou $A - B$

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \setminus B$ ou $A - B$ c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas dans B.

Exemple

On donne $A = \{0, 1, 2, 5, 7\}$ et $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
Déterminer les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

12.2.5 Partie d'un ensemble fini

Soit A et B deux ensembles non vides. On dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On écrit $A \subset B$.

Exemple

$A = \{0, 1, 2, 3, 6, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 6, 5, 6, 7, 8\}$.
On a : $A \subset B$

Remarque

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.
Ainsi $A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. On a donc : $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{P}(E)$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont les éléments de $\mathscr{P}(E)$.

12.2.6 Complémentaire d'un ensemble fini

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
Le complémentaire de A dans Ω noté $\overline{A}$ ou C_{Ω}^{A} est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$. Déterminer le complémentaire de A.

Remarque

▷ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on dit que A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
▷ $A \cap \Omega = A$
▷ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
▷ Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $\overline{A}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$.

12.3 Dénombrement

12.3.1 Définition

Dénombrer un ensemble fini revient à compter ou à déterminer le nombre de ses éléments.

12.3.2 Dénombrement de parties d'un ensemble finis

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E et on note card(E), le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Exemples

On donne les ensembles E ; F et G définis par :
$E = \{a, b; c, d\}$; $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $G = \{a\}$.
Calculer le cardinal des ensembles E ; F et G.

Remarque

Le cardinal de l'ensemble vide est nul.

12.3.3 Cardinal de la réunion finis

Soit A et B deux ensembles finis. Le cardinal de $A \cup B$ noté $card(A \cup B)$ est tel que :
▷ si $A \cap B = \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)}$;
▷ si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)} - card(A \cap B)$;
▷ $card(A \cup B) = card(A \setminus B) + card(B \setminus A) + card(A \cap B)$;
▷ $card(A) = card(A \setminus B) + card(A \cap B)$;
▷ $card(B) = card(B \setminus A) + card(A \cap B)$.

Exemple

On donne $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 3, 7\}$. Déterminer $card(A \cup B)$.

12.3.4 Cardinal du complémentaire

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
On a $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$.
Déterminer le cardinal du complémentaire de A.

12.3.5 Cardinal de l'ensemble des parties finis

Soit E un ensemble non vide tel que $\text{card(E)} = n$, alors $card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exercice

Soit E un ensemble tel que $E = \{a, b, c\}$.

1. Calculer le cardinal de E.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des parties de E.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

12.4 Dénombrement de listes

12.4.1 Produit cartésien de deux ensembles

a) Définition

Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de A et B et on note $A \times B$ (lire A croix B) l'ensemble suivant : $A \times B = \{(x,y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$.

b) Propriétés

▷ Pour tous ensembles A et B, on a : $A \times B \neq B \times A$;
▷ $card(A \times B) = card(B \times A) = card(A) \times card(B)$.

12.4.2 Produit cartésien d'un ensemble finis

a) Définition

Soit E_1, E_2,..., E_p p ensembles non vides. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p$ est l'ensemble de tous les p-uplet $(a_1, a_2, ..., a_p)$ telles que $a_i \in E_i$ avec $i \in \{1, 2, ..., p\}$.
On a : $card(E_1 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_p) = card(E_1).card(E_2)....card(E_p)$.
En particulier si $card(E_1) = card(E_2) = ... = card(E_p) = n$, alors $card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = n^p$.

b) Propriété

Le nombre d'application d'un ensemble A à p éléments vers un ensemble B à n éléments est égal à n^p.

Exercice 1

A une soirée on a trois filles et deux garçons. Combien de couples peut on former ?

Exercice 2

Les numéros de téléphones au Congo Brazzaville de la société MTN sont des nombres entiers naturels à 9. Déterminer le nombre de numéros de téléphone que la société MTN peut avoir au maximum.

12.5 Factorielle

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle factorielle n, le nombre noté $n!$ défini par :
$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \times 2 \times 1$.
Par convention : $0! = 1$

Exemple

Calculer $3!$; $5!$ et $9!$

12.6 Arrangements

12.6.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier non nul tel que $n \geq p$. On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet d'élément de E deux à deux distincts. Il s'agit de l'arrangement sans répétition.

12.6.2 Nombre d'arrangements

a) Nombre d'arrangements sans répétition

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté A_n^p, est tel que : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$.

Exemples

$A_5^2 = 20$ et $A_6^5 = 720$

Remarque

$A_n^n = n!$

b) Nombre d'arrangements avec répétition

Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble à n éléments est : n^p.

Exercice

On donne les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
Combien de nombre de 3 chiffres peut-on former avec ces nombres ?

1. si les chiffres peuvent se répéter ?
2. si les chiffres sont deux à deux distincts ?

12.7 Permutations des n éléments d'un ensemble

12.7.1 Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement des n éléments de E.

12.7.2 Nombre de permutations sans répétition

Le nombre de permutations sans répétition de n éléments de E est : $p_n = n!$

12.7.3 Nombre de permutations avec répétition

Si parmi les éléments à permuter, un se répète jusqu'à r_1 fois et les autres se répètent jusqu'à r_p, fois, alors le nombre de permutation est : $p_n(r_1; r_2) = \dfrac{n!}{r_1! \times r_2! \times ... \times r_p!}$.

Exercice

1. Combien de mots différents peut-on former avec le nom ANE?
2. Combien de mots différents peut-on former avec le nom $AABCCC$?

12.8 Combinaisons

a) Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

b) Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p tel que : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $p \leq n$.

c) Propriétés

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on a :
▷ $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$ et $C_n^0 = 1$;
▷ si $0 < p < n$, alors $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$;
▷ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

d) Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.
On a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Exemple

Calculer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$.

12.9 Notions de tirages

Soit E un ensemble fini, p et n deux entiers naturels.

12.9.1 Tirages successifs avec remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement avec répétition, c'est-à-dire : n^p.

12.9.2 Tirages successifs sans remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement sans répétition, c'est-à-dire : A_n^p.

12.9.3 Tirages simultanés

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E distincts, non ordonnés, le nombre de tirages est la combinaison de p éléments de E, c'est-à-dire : C_n^p.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que : $\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n^2}{(n+1)!}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
   $C_n^2=190$; $2C_n^2+6C_n^3=9n$; $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\dfrac{7}{2}n$; $C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3=38n$; $C_{n+10}^{n+4}=C_{n+10}^{2n-10}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant :
   $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+1} \\ 4C_x^y=5C_x^{y-1} \end{cases}$

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

1. Développer $(1+x)^n$.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes :
   $S_1=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^p+...+C_n^n$.
   $S_2=C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^pC_n^p+...+(-1)^nC_n^n$.
   $S_3=C_n^0+2C_n^1+C_n^2+...+2^pC_n^p+...+2^nC_n^n$.

Exercice 3

On veut élire un comité de quatre membres parmi les 45 élèves d'une classe de première.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de comité contenant exactement 2 filles, sachant qu'il y a 25 filles dans cette classe ?
3. Quel est le nombre de comité contenant au moins une fille ?

Exercice 4

Une urne contient 12 boules numérotés de 1 à 12. On tire 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

1. les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
2. les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.
3. les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice 5

Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble E dans le cas suivants :

a) le nombre de couples de E est 56.
b) le nombre de triplets de E est 120.

Exercice 6

Un sac contient 8 billes blanches numérotés de 1 à 8 et 6 billes jaunes numérotés de 1 à 6. Ces billes sont indiscernables au toucher. On tire simultanément de ce sac 4 billes.

1. Combien de tirages peut-on effectuer en tout ?
2. Combien de tirages peut-on effectuer de façon à obtenir :
   a) 4 billes de même couleur ?
   b) 2 billes blanches ?
   c) 4 billes portant des numéros diviseurs de 18 ?

Exercice 7

On dispose de quatre pièces de monnaie : une de $10f$; une de $25f$; une de $50f$ et une de $100f$.
Quelles sont toutes les sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces.

Exercice 8

Huit amis vont à une soirée et devrait être normalement accompagnés chacun de son épouse. A la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari à cette soirée. A l'ouverture de la soirée dansante, ils forment des couples (composés d'un homme et d'une femme) pour danser.

1. Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?
2. Combien de possibilités a-t-on de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

Chapitre 13

PROBABILITÉS

13.1 Vocabulaires des événements

13.1.1 Expérience aléatoire ou épreuve

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

Exemple

Le jet d'un dé parfait à six faces.

13.1.2 Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
On le note souvent par Ω.

Exemple

Lors d'un jet de dé parfait à six faces, les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, alors on écrit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

13.1.3 Événement

On appelle événement, une partie ou un sous ensemble de l'univers Ω.

Exemple

Soit A l'événement " obtenir les nombres pairs lors d'un jet de dé à 6 faces ", on a : $A = \{2,4,6\}$.

13.1.4 Éventualité

Une éventualité est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple

On lance un dé bien équilibré à 6 faces, on a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

13.1.5 Événement élémentaire

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.

Exemple

Soit B l'événement " obtenir un nombre premier et pair lors d'un jet d'un dé non pipé à 6 faces ", on a : $B = \{2\}$.

13.1.6 Événement certain

Un événement certain est un événement qui est toujours réalisé : c'est l'univers Ω.

13.1.7 Événement incertain

Un événement incertain est un événement dont on connait pas le résultat.

13.1.8 Événement impossible

L'événement impossible est la partie vide de Ω.

Exemple

Obtenir le chiffre 7 lors d'un jet de dé de six faces numérotées de 1 à 6.

13.1.9 Événement Événements compatibles

Deux événements sont dits compatibles lorsqu'ils se réalisent ensemble. Le contraire est dit événement incompatible.

13.2 Probabilité d'un événement

13.2.1 Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité sur l'univers Ω, l'application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelle probabilité de l'événement A.

13.2.2 Propriétés

1. $p(\Omega) = 1$;
2. $p(\varnothing) = 0$; c'est la probabilité de l'événement impossible ;
3. si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
4. si $A \cap B = \varnothing$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;
5. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;
6. $\forall\ A \in \mathscr{P}(\Omega)$; $p(A) \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$;
7. Si $A \subseteq B$; alors $p(A) \leq p(B)$.

$N.B$: Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisé.

13.3 Équiprobabilité ou probabilité uniforme

13.3.1 Définition

Soit Ω l'univers ayant n éventualités w_1, w_2....,w_n et p une probabilité sur Ω.
On dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables lorsque chaque événement élémentaire à la même probabilité, c'est- à - dire
$p(w_1) = p(w_2) = ... = P(w_n)$.

13.3.2 Propriétés

Soit Ω l'univers de n éventualités et p une probabilité sur Ω.
▷ $p(w_1) = p(w_2) = ... = p(w_n) = \frac{1}{n}$.
▷ Si un événement A contient k éventualités $(cardA = k)$, alors
$p(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{cardA}{card\Omega}$

Remarque

On reconnait qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que :
parfaitement équilibré ; non truqué ; indiscernable au toucher ; au hasard ; bien battu ; pièce parfaitement symétrique ; pièce parfaite ; non pipé.

Exercice 1

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on note son numéro N. Les boules ont la même probabilité d'être tirées. On désigne respectivement par A et B les événements " N est pair " et " N est multiple de trois ".

1. Calculer le nombre de cas possibles.
2. Calculer le cardinal de $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants : A ; B ; $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$.
4. Calculer la probabilité des événements suivants : $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$.

Exercice 2

Une boite contient 10 piles électriques dont 3 sont défectueuses. On tire au hasard et simultanément 2 piles de cette boite. Calcule la probabilité pour que.

1. Aucune pile tirée soit défectueuse.
2. Exactement une pile soit défectueuse.
3. Au moins une pile défectueuse.
4. Au plus deux piles soit défectueuses.

Deuxième partie

GÉOMÉTRIE

OUTIL VECTORIEL DU PLAN

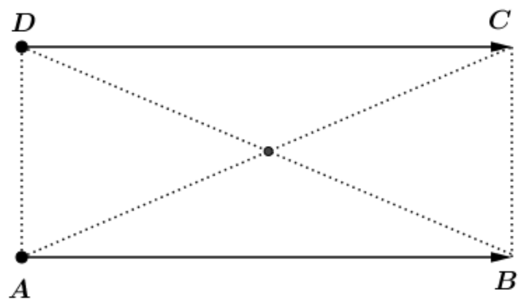
14.1 Notion des vecteurs

14.1.1 Définition et notation d'un vecteur

Soit A et B deux points du plan distincts.
On appelle vecteur l'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A, B) et on le note par $\overrightarrow{AB}$.
On dit que le bipoint (A, B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
▷ Sa direction : celle de la droite (AB) ;
▷ Sons sens : de A vers B ;
▷ Sa norme : la distance AB.

14.1.2 Égalité de deux vecteurs

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que :
▷ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction, même sens et même longueur ;
▷ $ABCD$ est un parallélogramme ;
▷ Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.



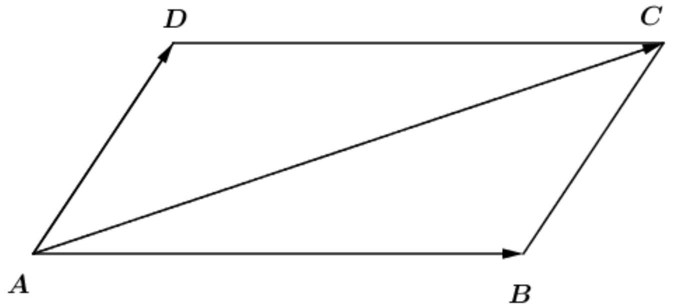
14.1.3 Addition vectorielle

a) Relation de Chasles

Soit A, B et C trois points du plan.
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

b) Règle du parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



14.1.4 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle combinaison linéaire de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que : $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ où α et β sont des nombres réels.
D'une manière générale, on appelle combinaison linéaire de n vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$,..., $\overrightarrow{u_n}$ tout vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que : $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \alpha_3\overrightarrow{u_3} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$ où α_1 ; α_2 ; α_3 ;... ; α_n sont des nombres réels.

14.1.5 Vecteurs colinéaires

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel non nul α tel que : $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.

b) Propriétés

Soit A, B, C et D quatre points du plan.
▹ A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$.
▹ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.
▹ Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un couple de nombres réels $(\alpha;\beta)$ tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Remarque

Soit $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Si $\alpha = \beta = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 1

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par D et E les points définis par :
$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Placer les points D et E.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.
   (b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque, E, I et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Placer les points E, I et F.
2. Montrer que $AEIB$ est un parallélogramme.
3. Exprimer $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
4. En déduire que les points E, F et I sont alignés.

14.2 Base et repère du plan

14.2.1 Base du plan

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
On appelle base d'un plan $(\mathscr{P})$, tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs non colinéaires.

Exemple

Dans un triangle ABC non aplati, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base ; car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b) Base orthogonale

Une base est dite orthogonale lorsqu'elle est constituée des vecteurs orthogonaux.

c) Base orthonormée

Une base est dite orthonormée ou orthonormale lorsqu'elle est constituée des vecteurs unitaires et orthogonaux.
$(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée si et seulement si : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
▷ Le couple $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ forment une base du plan si et seulement si : pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ avec $\alpha = \beta = 0$.
▷ Le couple $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ forment une base du plan si et seulement si : $\text{dét}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \neq 0$.

14.2.2 Repère du plan

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
On appelle repère du plan, tout triplet $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où O est l'origine du repère et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base.

Remarque

Un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est dit orthonormé si et seulement si sa base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est orthonormale.

b) Coordonnées d'un vecteur

Soit $(\mathscr{P})$ le plan muni d'une base $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(\mathscr{P})$, il existe un couple unique de réels (x, y) tels que : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Remarque

Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point M a pour coordonnée x et y tel que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

14.2.3 Changement de base

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan vectoriel $(\mathscr{P})$ de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (X, Y) dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On aura : $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}$.
On pose : $\begin{cases} \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} \end{cases}$
On a : $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = X(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}) + Y(a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j}) \Longrightarrow x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (aX + a'Y)\overrightarrow{i} + (bX + b'Y)\overrightarrow{j}$.
Par identification, on a : $\begin{cases} x = aX + a'Y \quad (1) \\ y = bX + b'Y \quad (2) \end{cases}$
En faisant $b' \times (1) - a' \times (2)$ et $b \times (1) - a \times (2)$; on trouve : $\begin{cases} X = \dfrac{b'x - a'y}{ab' - a'b} \\ Y = \dfrac{bx - ay}{a'b - ab'} \end{cases}$
Chacun de ces systèmes est appelé formules de changement de base.

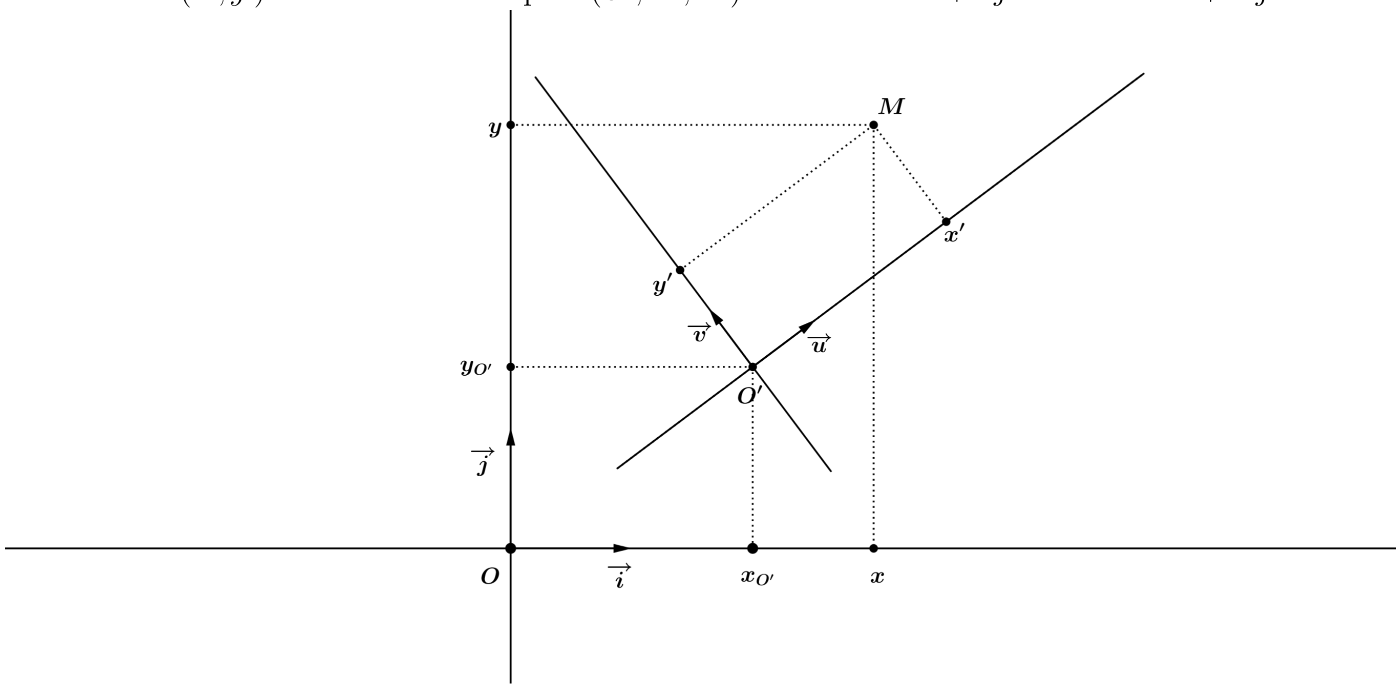
Exercice

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathscr{V}$ muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tels que :
$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathscr{V}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ dans la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{S} = 4\overrightarrow{u} - m\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ avec m un réel.

14.2.4 Changement de repère

Soit M un point du plan $(\mathscr{P})$ de coordonnées (x,y) dans l'ancien repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et de coordonnées (x',y') dans le nouveau repère $(O';\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=a'\overrightarrow{i}+b'\overrightarrow{j}$.



Cherchons à exprimer les anciennes coordonnées (x,y) en fonction des nouvelles coordonnées (x',y').

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\Longrightarrow x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=x_{O'}\overrightarrow{i}+y_{O'}\overrightarrow{j}+x'\overrightarrow{u}+y'\overrightarrow{v}$

$x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=x_{O'}\overrightarrow{i}+y_{O'}\overrightarrow{j}+x'(a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j})+y'(a'\overrightarrow{i}+b'\overrightarrow{j})$.

$x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=(x_{O'}+ax'+a'y')\overrightarrow{i}+(y_{O'}+bx'+b'y')\overrightarrow{j}$.

Par identification, on a : $\begin{cases} x=x_{O'}+ax'+a'y' \\ y=y_{O'}+bx'+b'y' \end{cases}$

Exercice

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

On donne le point $A(-3,2)$, les vecteurs $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base du plan vectoriel.
2. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ dans cette base ?
3. Un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et (x',y') dans le repère $(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

14.3 Fonctions vectorielles de LEIBNIZ

Dans ce paragraphe $\mathscr{P}$ et $\mathscr{V}$ désignent respectivement le plan affine et le plan vectoriel.

14.3.1 Point massif ou point pondéré

Définition

On appelle point massif ou point pondéré, le couple (M,α) où M est un point du plan et α un réel non nul.
On peut aussi dire que le point M est affecté du coefficient α ou à la masse α ou au poids α

14.3.2 Système massif ou système des points pondéré

Soit n, un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un système de n points pondérés est un ensemble généralement noté S_n, constitué de n points pondérés.

Exemple

$S_n = \{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$
Pour $n=2$
$S_2 = \{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2)\}$
Pour $n=3$
$S_3 = \{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3)\}$

14.3.3 Définition Fonction vectorielle de Leibniz

Définition

fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);...;(A_n,\alpha_n)\}$ est l'application $\overrightarrow{f}$ du plan $\mathscr{P}$ vers l'ensemble des vecteurs $\mathscr{V}$ qui à tout point M du plan associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ telle que :

$$\overrightarrow{f} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{V}$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA}_i = \alpha_1 \overrightarrow{MA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{MA}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA}_n$$

Exemple

Écrire la fonction vectorielle de Leibniz associée au système

1. $\{(A;2);(B;-3)\}$.
2. $\{(A;-1);(B;\frac{1}{2});(C;5)\}$.

Solution

1. $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$.
2. $\overrightarrow{f(M)} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}$.

14.3.4 Transformation de l'expression :

$\overrightarrow{f(M)} = \alpha_1 \overrightarrow{MA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{MA}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA}_n$
Fixons le point A_1
$\overrightarrow{f(M)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \overrightarrow{MA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{A_1A}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{A_1A}_n$
▷ Si $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{A_1A}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{A_1A}_n$
$\overrightarrow{f(M)}$ ne dépend pas du point M ; La fonction est constante.
▷ Si $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{f(M)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{A_1A}_2 + ... + \alpha_n \overrightarrow{A_1A}_n$
$\overrightarrow{f(M)}$ dépend du point M ; La fonction est bijective.

Remarque

$\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ est appelé masse du système $S_n = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$.

14.3.5 Ensembles des points.

Activité

A, B et C trois points distincts du plan. Soit M un point quelconque du plan.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u}$ par : $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est indépendant du point M (on pourra introduire A par la relation de Chasles).
   (b) Construire $\overrightarrow{u}$.
   En déduire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que
   $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (on pourra réduire la somme vectorielle).
2. On définit maintenant le vecteur $\overrightarrow{u}$ par : $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   Soit $G = \mathsf{bar}$

A	B	C
2	3	1

   (a) Rappeler l'égalité géométrique qui définit le point G.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
   (c) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.
3. (a) Démontrer que l'ensemble des points $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2AB$ est un cercle dont on construira.
   (b) En déduire l'ensemble des points $(\mathscr{D})$ des points M du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leqslant 2AB.$$

Propriété.

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts, et soit M un point quelconque du plan. Soit a, b et c trois nombres réels non nuls ; on définit un vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{u}$.

1er cas : $a + b + c = 0$.
Dans ce cas, le vecteur $\vec{u}$ est indépendant du point M. On dit que, pour tout point M du plan, le vecteur $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC}$ est constant.

2e cas : $a+b+c \neq 0$.
Dans ce cas, il existe un point G, barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

- ▷ L'ensemble des points définis par $a\,\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}+c\,\overrightarrow{MC}=\vec{u}$ est une droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- ▷ L'ensemble des points définis par $\|a\,\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}+c\,\overrightarrow{MC}\|=k$ $(k>0)$ est un cercle de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.
- ▷ L'ensemble des points définis par $\|a\,\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}+c\,\overrightarrow{MC}\|\leqslant k$ $(k>0)$ est un disque de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.
- ▷ L'ensemble des points définis par $MG=MH$ est la médiatrice du segment $[GH]$ où H est barycentre d'un autre système dans le même plan.

14.4 Barycentre

14.4.1 Définition et condition d'existence

Soit A_1, A_2, A_3,..., A_n, n points données et α_1, α_2, α_3,..., α_n des nombres réels donnés.
On appelle barycentre des points pondérés $(A_1;\alpha_1)$; $(A_2;\alpha_2)$; $(A_3;\alpha_3)$;... ; $(A_n;\alpha_n)$, le point G tel que :
$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\alpha_3\overrightarrow{GA_3}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$ avec $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n \neq 0$.

14.4.2 Barycentre de deux points

a) Définition et notation

Soit A et B deux points du plan, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$.
On appelle barycentre de deux points pondérés (A,α) et (B,β), le point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{O}$. Le barycentre G de deux points pondérés (A,α) et (B,β) est noté : $G=bar\,\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

b) Propriétés

Si G est barycentre de (A,α) ; (B,β), alors on a :

▷ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, donc les points A, B et G sont alignés.
▷ G est aussi barycentre des points $(A,k\alpha)$; $(B,k\beta)$ avec $k \neq 0$.
▷ Si $\alpha=\beta$, G est le milieu du segment $[AB]$. Donc G est l'isobarycentre des points A et B.
▷ Pour tout point M du plan, $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$.
▷ Dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, alors $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ et $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$.

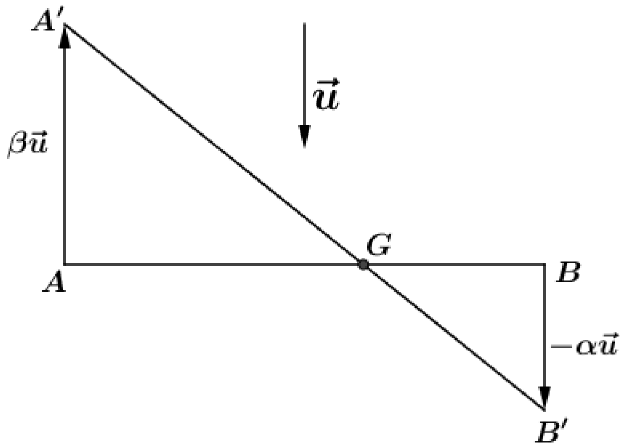
c) Construction du barycentre de deux points

Première possibilité : méthode vectorielle

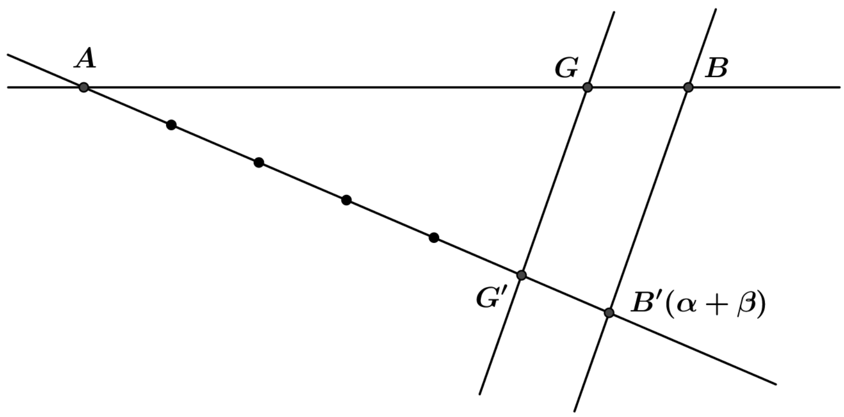
$G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline a & b\\\hline\end{array} \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$. C'est la relation qui permet de situer et de construire le point G dans le plan. Cette relation est obtenue en **réduisant l'égalité** $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

Deuxième possibilité : méthode des homothéties

Soit $G = bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$
• On construit le vecteur normal $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{AB}$
• On construit les points A' et B' tels que : $\overrightarrow{AA'} = \beta\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BB'} = -\alpha\,\overrightarrow{u}$
Alors $\{G\} = (AB') \cap (AB)$



Troisième possibilité : méthode de Thalès
On procède comme suit :
• On trace la droite (Δ) passant par A et B
• On trace un axe (d) gradué passant par A pris comme origine.
• On représente les points $G'(\beta)$ et $B'(\alpha+\beta)$ sur (d)
• La parallèle à (BB') passant par G' coupe la droite (Δ) en G.



Exercice

Construire le barycentre $G = bary\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ dans les cas suivants :
$\alpha = -2$ et $\beta = 2$; $\alpha = 3$ et $\beta = -7$; $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ et $\alpha = \beta = 2020$.

14.4.3 Barycentre de plus de deux points

a) Définition et notation

Soit A, B et C trois points du plan, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
On appelle barycentre de trois points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ), le point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Le barycentre G de trois points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) est noté : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

b) Propriétés

Si G est barycentre de (A,α) ; (B,β) et (C,γ) alors on a :

▷ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

▷ G est aussi barycentre des points $(A,k\alpha)$; $(B,k\beta)$; $(C,k\gamma)$ avec $k \neq 0$.

▷ Si $\alpha = \beta = \gamma$, G est le centre de gravité du triangle ABC. Donc G est l'isobarycentre des points A, B et C.

▷ Pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

▷ Dans le repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, alors $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

c) Construction du barycentre de plus de deux points

Barycentre partiel ou théorème d'associativité

Soit $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.
Si $H = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$, alors $G = bar\{(K,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$.

Exercice

Soit ABC un triangle quelconque.
Construire le point G barycentre du système $S = \{(A,1);(B,2);(C,3)\}$

Méthode du parallélogramme

Pour construire le barycentre $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, il faut :

▷ Vérifier que G existe, c'est-à-dire $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

▷ Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

▷ Placer le point G.

Exercice

Soit ABC un triangle quelconque.
Construire le point G barycentre du système $S = \{(A,2);(B,-1);(C,-2)\}$.

14.4.4 Application du barycentre

a) Alignement des points

Pour démontrer que trois points sont alignés à l'aide du barycentre, on essaie de montrer qu'un des points est un barycentre de deux autres.

b) Droites concourantes

Pour démontrer que trois droites sont concourantes en un point G, on peut montrer que G est barycentre de deux points situés sur chacune des droites.

Exercice 1

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par I, J les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CI]$ et K le point du plan défini par : $3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.

1. Écrire K comme barycentre des points B et C muni des coefficients a et b à déterminer.
2. Écrire J comme barycentre des points A, B et C muni des coefficients α, β et γ à déterminer.
3. Montrer que les points A, J et K sont alignés.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par I, J et K les points tels que :
$\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}$. On considère le point G barycentre du système $S = \{(A,3);(B,4);(C,2)\}$.

1. Placer les points I, J et K.
2. Démontrer que les (AI) ; (BJ) et (CK) sont concourantes.

Chapitre 15

OUTIL VECTORIEL DE L'ESPACE

L'espace sera noté $(\mathscr{E})$ et on remarquera que toutes les propriétés de la géométrie plane se prolonge dans $(\mathscr{E})$.

15.1 Points coplanaires

15.1.1 Définition

On appelle points coplanaires des points situés dans un même plan.

15.1.2 Théorème

Quatre points A, B, C et D de l'espace $(\mathscr{E})$ sont coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

Remarque

Cette relation n'est pas unique.

15.2 Vecteurs coplanaires

15.2.1 Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaires des $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire il existe deux nombres réels α et β tels que : $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}$.

Remarque

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace $(\mathscr{E})$. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de représentant respectifs (AB), (AC) et (AD).
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont dans un même plan.

15.2.2 Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.
▷ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que ses coefficients soient tous nuls, c'est-à-dire $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$

et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois nombres réels α, β et γ tels que : $\alpha\,\overrightarrow{u}+\beta\,\overrightarrow{v}+\gamma\,\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.
▷ Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (α,β,γ) de nombres réels tels que $\alpha\,\overrightarrow{u}+\beta\,\overrightarrow{v}+\gamma\,\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ est le triplet $(0,0,0)$.

Exercice

Soit A, B, C et D quatre non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\overrightarrow{AB}=5\,\overrightarrow{DC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
2. Que peut-on en déduire ?

15.3 Base et repère de l'espace

15.3.1 Base de l'espace

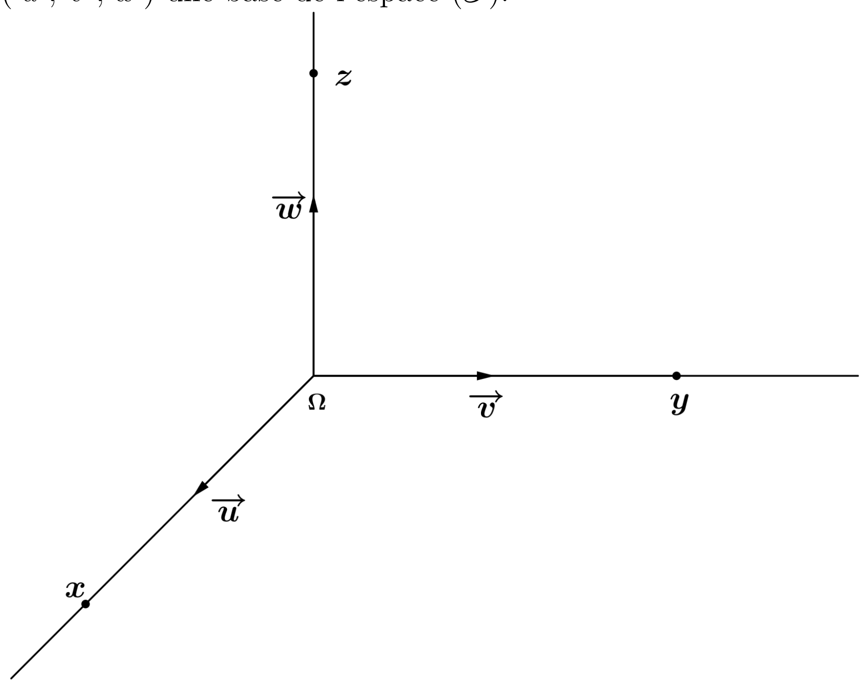
Définition

On appelle base de l'espace $(\mathscr{E})$, tout triplet de vecteurs non coplanaires.
La base est dite orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

15.3.2 Repère de l'espace

Définition

On appelle repère de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplet $(\Omega;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ où Ω est un point fixe appelé origine du repère et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ une base de l'espace $(\mathscr{E})$.



▷ $(\Omega, \overrightarrow{u})$ est l'axe des abscisses ;
▷ $(\Omega, \overrightarrow{v})$ est l'axe des ordonnées ;
▷ $(\Omega, \overrightarrow{w})$ est l'axe des côtes.

15.3.3 Repère direct

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. Considérons les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$. On considère un observateur ayant les pieds en O, la tête en K et fixant le point I. Par convention, on dit que :
▷ le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est direct si l'observateur a le point J à sa gauche.
On dit aussi que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe.
▷ le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est indirect si l'observateur à le point J est à sa droite. On dit aussi que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est indirecte.

15.3.4 Coordonnées d'un point et d'un vecteur

a) Coordonnées d'un point

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $(\mathscr{E})$ et M un point $(\mathscr{E})$.
M est un point de l'espace $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe un triplet $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On le note $M(x; y; z)$.

Exemple

Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on a : $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} \Longrightarrow B(3, 1, -5)$.

b) Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $(\mathscr{E})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $(\mathscr{E})$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur $(\mathscr{E})$. L'unique triplet $(x; y; z)$ tel que : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est appelé coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On le note $\overrightarrow{u}(x; y; z)$.

Remarque

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul, c'est-à-dire $dét(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Exercice

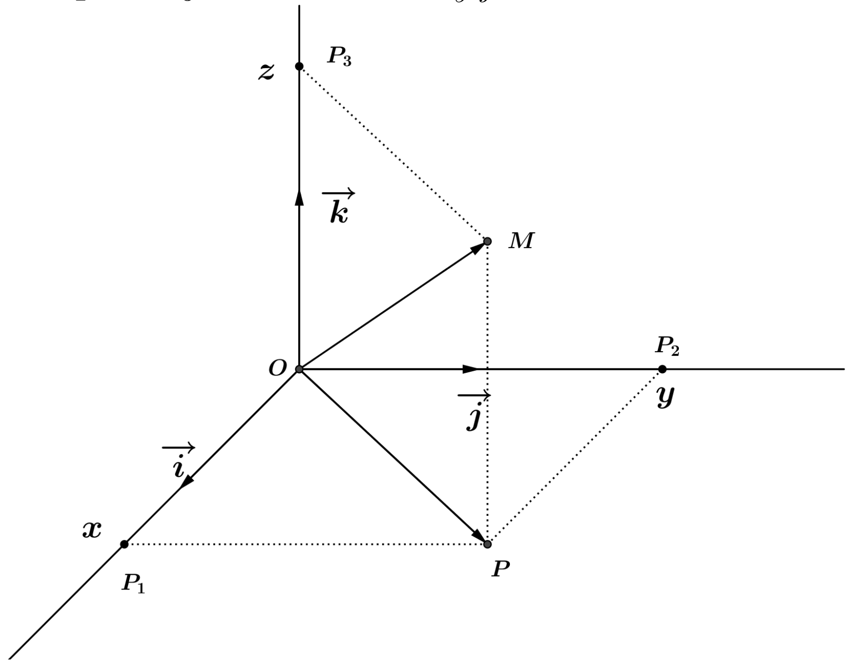
Soit $\overrightarrow{u}(-2; 3; -4)$, $\overrightarrow{v}(1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{w}(1; 0; -2)$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Que peut-on en déduire de $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$?

15.3.5 Représentation d'un point dans un repère de l'espace

L'espace $(\mathscr{E})$ est muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit M un point de l'espace $(\mathscr{E})$ de coordonnées $(x; y; z)$. Pour placer le point M, on utilise la construction suivante :

▷ On place sur la droite de repère $(O; \overrightarrow{i})$ le point P_1 tel que : $\overrightarrow{OP}_1 = x\,\overrightarrow{i}$;
▷ On place sur la droite de repère $(O; \overrightarrow{j})$ le point P_2 tel que : $\overrightarrow{OP}_2 = y\,\overrightarrow{j}$;
▷ On place sur la droite de repère $(O; \overrightarrow{k})$ le point P_3 tel que : $\overrightarrow{OP}_3 = z\,\overrightarrow{k}$.
On construit le point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2$.
On construit le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}_3$.
On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \overrightarrow{OP}_3 \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.



15.3.6 Quelques calculs dans un repère de de l'espace

a) Coordonnées d'un vecteur

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espaces $(\mathscr{E})$.
Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

b) Coordonnées du milieu d'un segment

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espaces $(\mathscr{E})$ et I le milieu du segment $[AB]$; le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

c) Norme d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ un vecteur de l'espace $(\mathscr{E})$. On a : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

d) Distance de deux points de l'espace

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espaces $(\mathscr{E})$.
La distance des points A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

e) Produit scalaire dans l'espace

Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

f) Coordonnées du barycentre dans l'espace

Soit G barycentre du système $S = \{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ où A ; B et C trois points de l'espace $(\mathscr{E})$ et $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Le point G a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$.

15.3.7 Vecteurs colinéaires

Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O}$; dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k tels que : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$

Exercice 1

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u}(-2;3;-4)$; $\overrightarrow{v}(1;-1;1)$ et $\overrightarrow{w}(0;1;-2)$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$; $2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Exercice 2

Soit $A(-1,2,-3)$; $B(0,2,-1)$ et $C(-1,1,0)$ trois points de l'espace $(\mathscr{E})$ muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

1. Placer les points A, B et C dans ce repère.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.
4. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
5. Calculer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 3

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté $8cm$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont-ils colinéaires ?
5. Déterminer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[FH]$.

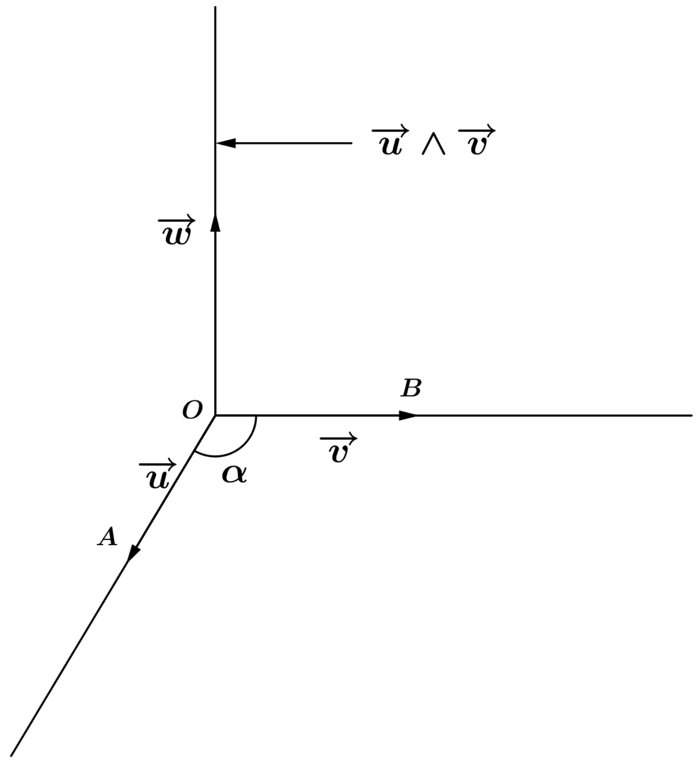
15.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

15.4.1 Orientation d'un plan dans l'espace orienté

Étant donné un plan de repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on choisit un point C non situé dans ce plan. $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère direct du plan si $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est repère direct de l'espace.

15.4.2 Définition du produit vectoriel

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace orienté. Soit O un point de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
On appelle produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (dans cet ordre), noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le vecteur défini par : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = [\| \overrightarrow{u} \|.\| \overrightarrow{v} \| \times \sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})]\, \overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal unitaire qui orienté le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\| \overrightarrow{w} \|} \overrightarrow{w}$.
En posant $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \alpha$, on a : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = [\| \overrightarrow{u} \|.\| \overrightarrow{v} \| \times \sin(\alpha)]\, \overrightarrow{n}$



Remarques

▷ si $\alpha \in]0; \pi[$, $\sin(\alpha) > 0$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est de même sens que $\overrightarrow{n}$;
▷ si $\alpha \in]-\pi; 0[$, $\sin(\alpha) < 0$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est de sens contraire à celui de $\overrightarrow{n}$.

15.4.3 Propriétés

▷ $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
▷ Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{O}$.
▷ $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}$.
▷ $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ (le produit scalaire est antisymétrique).
▷ Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $(\mathscr{E})$ et a, b deux réels.

- $(a\overrightarrow{u}) \wedge (b\overrightarrow{v}) = ab(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$;
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$.

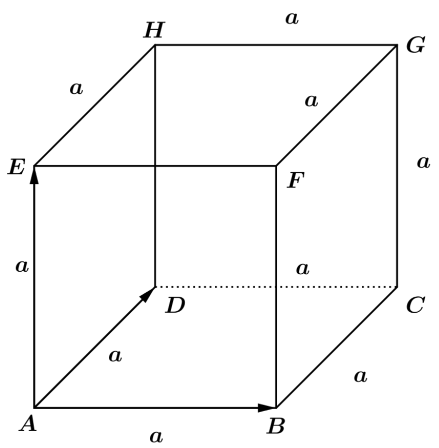
Exercice

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête a tel que : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$ soit une base orthogonale directe de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer en fonction de a les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF}$.

Solution

1. Faisons une figure.



2. Déterminons en fonction de a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF}$.
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\| \times \sin(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = a \times a \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right).\overrightarrow{n}$; or $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{AE}\|}\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.
D'où $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AE}}$.
$\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{AH}\|.\|\overrightarrow{AE}\| \times \sin(\overrightarrow{AH}\,;\overrightarrow{AE}).\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AE} = a \times a\sqrt{2} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right).\overrightarrow{n}$; or $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AB}$.
D'où $\boxed{\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{AB}}$.

Remarque

Dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On a : $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$.

15.4.4 Norme du produit vectoriel de deux vecteurs

$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = |dét(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})|$

15.4.5 Expression du produit vectoriel dans une base orthogonale

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthogonale directe. On désigne par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ définis par : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.
$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k})$.
$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = xx'\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} + xz'\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} + yx'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} + yz'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} + zx'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} + zy'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} + zz'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = xy'\overrightarrow{k} - xz'\overrightarrow{j} - yx'\overrightarrow{k} + yz\overrightarrow{i} + zx'\overrightarrow{j} - zy'\overrightarrow{i}$
$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$.
ou

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$.

Ainsi les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\left[\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right]$

15.4.6 Produit mixte

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.
On appelle produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans cet ordre, le nombre réel noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ou $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ ou encore $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$ défini par : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = d\acute{e}t(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

b) Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.
▷ $(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}).\overrightarrow{w} = (-\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = -d\acute{e}t(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
▷ Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = d\acute{e}t(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Exercice

Soit $\overrightarrow{u}(2, -1, 1)$; $\overrightarrow{v}(-2, 1, -3)$ et $\overrightarrow{w}(0, -1, 0)$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. (a) Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   (b) Que peut-on en déduire ?
2. (a) Calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
   (b) Que peut-on en déduire ?

15.4.7 Application du produit vectoriel

a) L'aire du triangle

Soit ABC un triangle.
L'aire du triangle ABC est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

a) L'aire du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
L'aire du parallélogramme $ABCD$ est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

Exercice

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(1,2,0)$; $B(-1,0,1)$ et $C(0,1,-1)$.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

15.5 Caractérisation vectorielle d'une droite

15.5.1 Caractérisation d'une droite de l'espace

Étant donné un point A et un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
La droite $(\mathscr{D})$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace $(\mathscr{E})$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $M \in (\mathscr{D}) \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}^*$; $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$.

15.5.2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $(\mathscr{D})$ une droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b,c)$.
$M(x,y,z) \in (\mathscr{D}) \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$$

Cette expression est une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

15.5.3 Équation cartésienne de la droite de l'espace

La droite $(\mathscr{D})$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$, en exprimant le réel k entre les trois équations on a : $\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{a} = k \\ \dfrac{y - y_A}{b} = k \\ \dfrac{z - z_A}{c} = k \end{cases}$ et l'équation est $(\mathscr{D}) : \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$

Exercice

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne $B(2,3,-1)$ et $\overrightarrow{u}(1,3,5)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ puis déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.

15.6 Caractérisation vectorielle d'un plan

15.6.1 Caractérisation d'un plan de l'espace

Étant donné un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace $(\mathscr{E})$.
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace $(\mathscr{E})$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires, c'est-à-dire $M \in (\mathscr{P}) \Longleftrightarrow$ il existe $(t;t') \in \mathbb{R}^2$; $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v}$.

15.6.2 Représentation paramétrique d'un plan

Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ et $\overrightarrow{v}(a';b';c')$.
$M(x,y,z) \in (\mathscr{P}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v}$ avec $(t;t') \in \mathbb{R}^2$.

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$$

Cette expression est une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ passant par A et des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

15.6.3 Équation cartésienne du plan

Considérons la Représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$: $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$

En éliminant les paramètres t et t' dans ces équations ; on obtient une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ de la forme $(\mathscr{P}) : ax + by + cz + d = 0$.

Remarque

Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$M \in (\mathscr{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire $dét(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Exercice

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne $A(1;1;2)$, $B(2;-3;1)$ et $C(3;-2;4)$.

1. Donner la représentation du plan $(\mathscr{P})$ passant par A, B et C.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par A, B et C.

Théorèmes

Soit a, b et c trois réels non tous nuls.
▷ Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.
▷ L'équation du plan passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{n} = 0$.
▷ Tout vecteur normal du plan est orthogonal à tout vecteur directeur du plan.

Exercice 1

Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation cartésienne $(\mathscr{P}): 2x-3y+z-1=0$.
Déterminer le vecteur normal du plan $(\mathscr{P})$.

Exercice 2

Déterminer l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $B(-2,-3,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,2,-1)$.

Exercice 3

Soit $(\mathscr{P}')$ un plan d'équation cartésienne $(\mathscr{P}'): x+2y+3z-5=0$.
Déterminer le vecteur normal et les vecteurs directeurs du plan $(\mathscr{P}')$.

15.7 Distance d'un point par rapport à une droite et par rapport à un plan

15.7.1 Distance d'un point par rapport à une droite

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de l'espace $(\mathscr{E})$ passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de l'espace $(\mathscr{E})$. La distance du point M par rapport à la droite $(\mathscr{D})$ est : $d(M,(\mathscr{D})) = \dfrac{\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM} \|}{\| \overrightarrow{u} \|}$.

15.7.2 Distance d'un point par rapport à un plan

Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{P})$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$. La distance du point M_0 au plan $(\mathscr{P})$ est : $(M_0,(\mathscr{P})) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Théorème

Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par A, engendré par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point de l'espace $(\mathscr{E})$.
On a : $d(M,(\mathscr{P})) = \dfrac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \dfrac{|(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|} = \dfrac{\left|dét\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}$.

Remarque

Si le plan $(\mathscr{P})$ passe par les A, B et C, alors $d(M,(\mathscr{P})) = \dfrac{\left|dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$.

Exercice

Soit $OABC$ un tétraèdre tel que : $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$ et $C(0;0;1)$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

15.8 Traduction analytiques des positions relatives

15.8.1 Positions relatives des droites

Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites d'espace $(\mathscr{E})$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v}(a';b';c')$.
▷ $(\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D}_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.
▷ $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$ si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.
▷ $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes s'il existe un point I appartenant aux deux droites.

Remarque

Si deux droites sécantes sont coplanaires, elles appartiennent au plan défini par deux vecteurs directeurs.

15.8.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
▷ $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P})$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire $d\acute{e}t(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.
▷ $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$.
▷ $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants si et seulement si il existe un unique point I appartenant à $(\mathscr{P})$ et à $(\mathscr{D})$. On dit aussi que $(\mathscr{D})$ perce le plan $(\mathscr{P})$ en I.

Remarque

Si $(\mathscr{P})$ est plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur $\overrightarrow{u}$.
▷ $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$.
▷ $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.

15.8.3 Positions relatives des plans

Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.
▷ $(\mathscr{P}_1) \parallel (\mathscr{P}_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont parallèles.
▷ $(\mathscr{P}_1) \perp (\mathscr{P}_2)$ si et seulement si $\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2 = 0$.

Propriété

Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.
$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants si leur intersection est une droite. $(\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2 \neq \overrightarrow{0})$

Exercice

Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans d'équations cartésiennes respectives $2x + y + 2z - 6 = 0$ et $2x - 2y - z + 3 = 0$.

1. Démontrer que les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
3. En déduire le vecteur directeur de cette droite.

Chapitre 16

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

16.1 Définition

On considère les ensembles de vecteurs $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{W}$ de $\mathbb{R}^3$.
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ ou de $\mathscr{W}$ et pour tous réels α et β, on a :
▹ $(\alpha+\beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$.
▹ $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$.
▹ $\alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}$.
▹ $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
• On dit que $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^2$ s'il vérifie les quatre propriétés précédentes.
• On dit que $\mathscr{W}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ s'il vérifie les quatre propriétés précédentes.

16.2 Famille génératrice

Soit $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{u}_3; ...; \overrightarrow{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E ($E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ ou $E = \mathbb{R}^4$) où $\overrightarrow{\alpha}_1; \overrightarrow{\alpha}_2; \overrightarrow{\alpha}_3; ...; \overrightarrow{\alpha}_p$ sont des nombres réels.
$\mathscr{F}$ est dite famille génératrice de E si tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{u}_3; ...; \overrightarrow{u}_p$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + \alpha_3\overrightarrow{u}_3 + ... + \alpha_p\overrightarrow{u}_p$; $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemples

▹ Dans $\mathbb{R}^2$; on a : $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j}$ où $\overrightarrow{i}(1;0)$ et $\overrightarrow{j}(0;1)$.
▹ Dans $\mathbb{R}^3$; on a : $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} - 17\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{i}(1,0,0)$; $\overrightarrow{j}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{k}(0,0,1)$.

16.3 Famille libre ; Famille liée

Supposons que $\alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + \alpha_3\overrightarrow{u}_3 + ... + \alpha_p\overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$.
▹ Si $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$, alors la famille $\{u_1; u_2; u_3; ...; u_p\}$ est libre.
▹ Si $\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_p$ sont non tous nuls, alors la famille $\{u_1; u_2; u_3; ...; u_p\}$ est liée.

16.4 Base et dimension de l'espace vectoriel

16.4.1 Base d'un espace vectoriel

Une base est une famille qui est à la fois libre et génératrice.

16.4.2 Dimension d'un espace vectoriel

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs contenus dans une de ses bases.

Propriétés

Si le déterminant de la famille $\mathscr{F}$ est calculable alors ;
▷ $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si dét$\mathscr{F} \neq 0$.
▷ $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si dét$\mathscr{F} = 0$.
▷ $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si dét$\mathscr{F} \neq 0$.

Exercice 1

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ définis par : $\overrightarrow{u}(-1;1)$, $\overrightarrow{v}(3;2)$
Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre.

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{u}(-1;\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{v}(-\sqrt{3};3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille liée.

16.5 Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E_1 un sous-ensemble de E.
E_1 est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $E_1 \neq \emptyset$.
2. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E_1$ et $\overrightarrow{v} \in E_1$, on a : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_1$.
3. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha \overrightarrow{u} \in E_1$.

Chapitre 17

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

17.1 Rappels sur le produit scalaire

17.1.1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs colinéaires.
On appelle le produit scalaire de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le réel noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ défini par : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC}$.

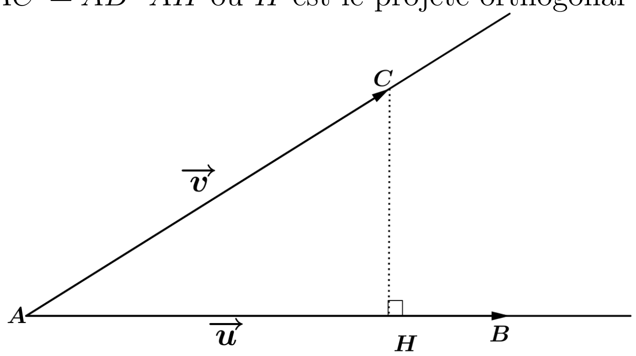
Remarques

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs colinéaires.
▷ si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens.
▷ si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même opposés.

17.1.2 Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle le produit scalaire de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



17.1.3 Propriétés

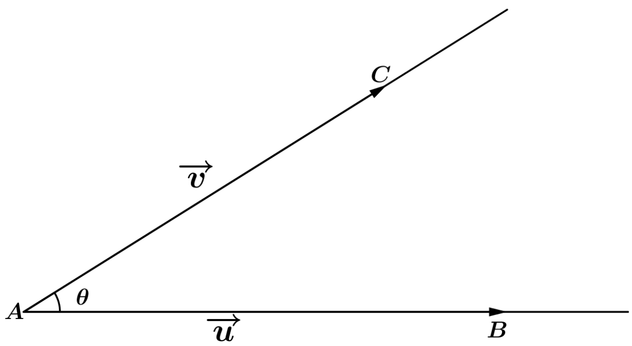
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

- ▷ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
- ▷ $k(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- ▷ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$
- ▷ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{u} = 0$
- ▷ $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan.

17.1.4 Autres définitions du produit scalaire

a) **Utilisation de la trigonométrique en produit scalaire**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on note θ l'angle formé entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \theta$.



On a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos\theta$

Remarque

Pour déterminer la valeur de l'angle θ, on utilise la formule suivante : $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|}\right)$

b) **Forme analytique du produit scalaire**

Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ deux vecteurs non nuls, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

c) **Expression du produit scalaire à l'aide des normes**

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|\right]$.

17.1.5 Carré scalaire

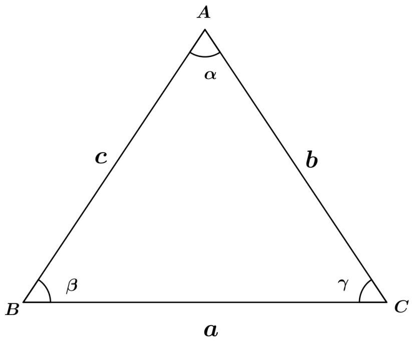
Définition

On appelle le carré scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre positif noté $\overrightarrow{u}^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2$.

17.2 relations métriques dans un triangle

17.2.1 Théorème d'AL-KASHI

Soit ABC un triangle quelconque tels que : $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a :

- ▷ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- ▷ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$
- ▷ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma$.

Démonstration

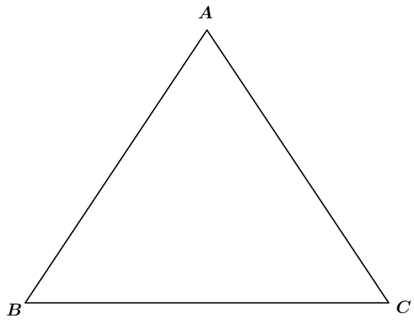
▷ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BC}^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 \Longrightarrow BC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$
$\Longrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos\alpha$
D'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

▷ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Longrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

▷ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Longrightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$

17.2.2 Produit scalaire dans un triangle quelconque

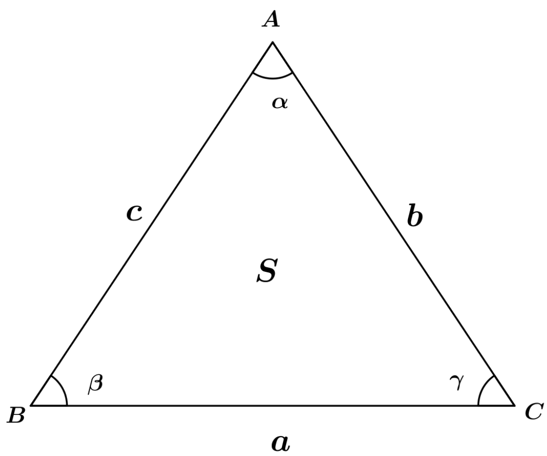
Soit ABC un triangle quelconque.



On a :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$
- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right)$
- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right)$

17.2.3 L'aire d'un triangle



On a : $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

17.2.4 Formule des sinus

On sait que $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

On a : $2S = ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha \Longrightarrow \dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

D'où $\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, or $S = \dfrac{abc}{4R}$

On a : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

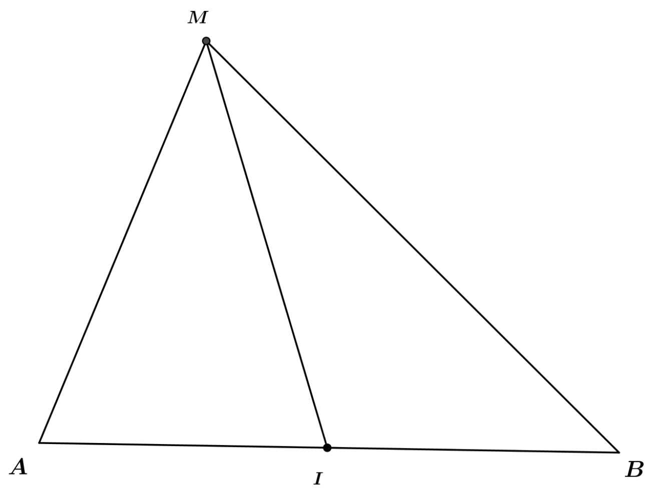
17.2.5 Formule de Héron

Soit ABC un triangle quelconque. On pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$, S son aire et p son demi-périmètre.

On a : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, c'est la formule de Héron.
Avec $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}$
on a : $S = pr$ avec r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

17.2.6 Théorème de la médiane

Soit le segment $[AB]$ et I le milieu de $[AB]$.



On a :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $BC = 10$ et $AC = 9$.

1. Calculer en degré le mesure des angles du triangles ABC.
2. Calculer les longueurs de la médiane et de la hauteur issue de A.
3. En déduire en cm^2 l'aire du triangle ABC.

Exercice 2

ABC est un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$.

1. Développer $(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$.
2. En déduire BC.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4$; $AC = 7$ et mes$\widehat{A} = 120°$.

1. Calculer BC.
2. Calculer mes$\widehat{B}$ et mes$\widehat{C}$.

17.3 Lignes de niveaux

17.3.1 Définition

Soit k un nombre réel et f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble (E_k) des points M tels que : $f(M) = k$.

Notation

La famille de ligne de niveau k est souvent noté par (L_k).
On a : $(L_k) : \{M \in \mathscr{P} / f(M) = k\}$

17.3.2 Détermination de ligne de niveau

$a)$ **Ensemble des points** M **tel que :** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = k$

Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On a : $(L_k) : \left\{M \in \mathscr{P} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = k\right\}$.
Soit B un point du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ avec H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

$$\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$$

Conclusion

L'ensemble des points M cherché est la droite passant par H et perpendiculaire à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Remarque

Si $k = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux (L_k) est une droite passant par A et perpendiculaire à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exercice

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur tel que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et A un point du plan.
Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que
$f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = k$ dans le cas suivants : $k = 6$, $k = 0$, $k = -6$.

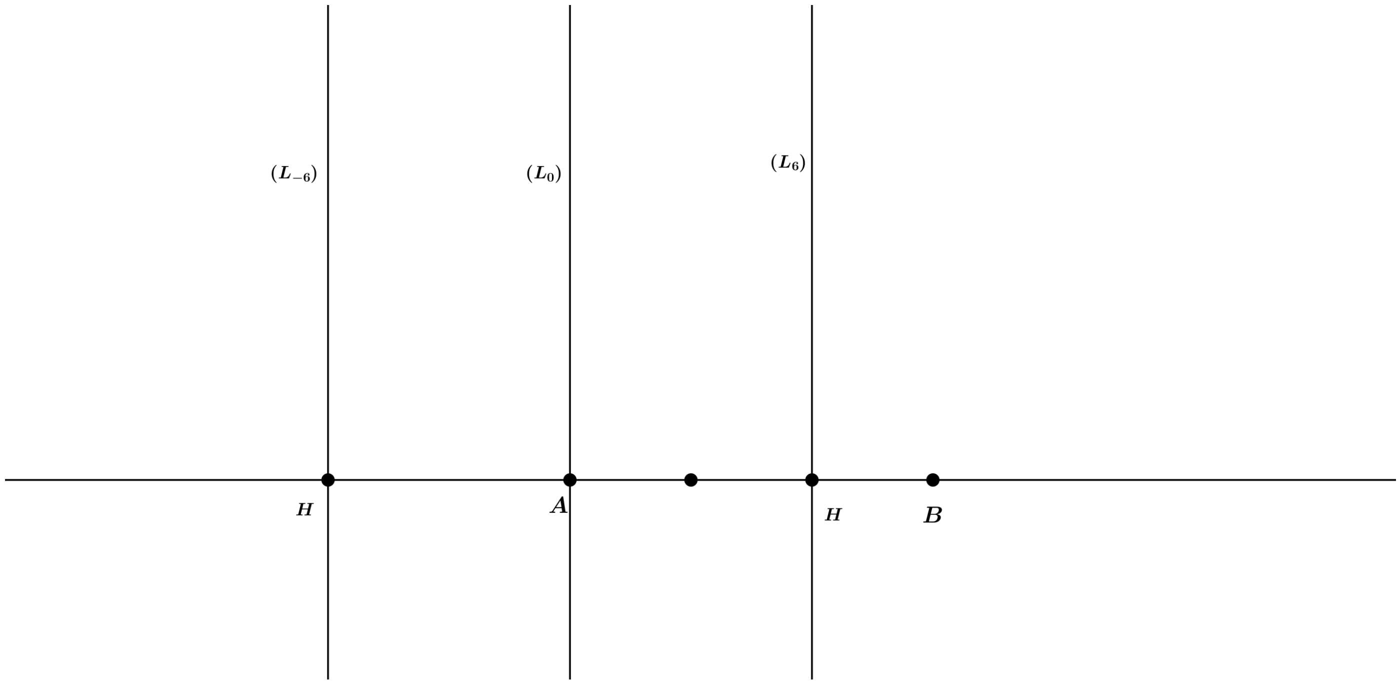
Solution

Déterminons et construire (L_k).
On a : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = k$.
Soit B un point du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overline{AB} = 3$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Longleftrightarrow \overline{AH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$
▷ Pour $k = 6$
$\overline{AH} = \frac{6}{3} = 2$ alors (L_6) est une droite passant par H et perpendiculaire à (AB).

▷ Pour $k = 0$, (L_0) est une droite passant pat A et perpendiculaire à (AB), $\overline{AH} = 0 \Longrightarrow A = H$.

▷ Pour $k = -6$, (L_{-6}) est une droite passant par H perpendiculaire à (AB). $\overline{AH} = -2$



$b)$ **Ensemble des points M tels que :** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

On a : $(L_k) = \left\{M \in \mathscr{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\right\}$.
Soit I isobarycentre des points A et B.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \Longrightarrow MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$.

Posons $k + \frac{1}{4}AB^2 = \lambda$ soit $MI^2 = \lambda$.

- ▷ Si $k = 0$, (L_0) est un cercle de diamètre $[AB]$.
- ▷ Si $\lambda > 0$, (L_k) est un cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{\lambda}$.
- ▷ Si $\lambda < 0$, (L_k)est un ensemble vide.
- ▷ Si $\lambda = 0$, (L_k) est un cercle point c'est-à-dire $(L_k) = \{I\}$.

Exercice

Soit A et B deux points du plan $(\mathscr{P})$ tel que $AB = 8$.
On considère l'application f de $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ définit par $f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

1. Construire le point G isobarycentre du système $S = \{(A;1);(B;1)\}$.
2. Démontrer que $f(M) = 2MG^2 - 32$.
3. Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que $f(M) = -28$.

c) **Ensemble des points M tels que : $aMA^2 + bMB^2 = k$**

Soit A et B deux points distincts du plan $(\mathscr{P})$, a et b deux nombres réels non tous nuls et f l'application de $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = aMA^2 + bMB^2$.
On a : $(L_k) = \left\{M \in \mathscr{P} / aMA^2 + bMB^2 = k\right\}$.
On a : $aMA^2 + bMB^2 = k$
▷ premier cas : si $a + b \neq 0$
Soit $G = bar\,\{(A,a);(B,b)\}$
$aMA^2 + bMB^2 = a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$
$\Longrightarrow aMA^2 + bMB^2 = (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2$
$\Longrightarrow (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k$
$\Longrightarrow MG^2 = \dfrac{k - (aGA^2 + bGB^2)}{a+b}$
Posons $aGA^2 + bGB^2 = f(G)$ avec $f(G) = \dfrac{ab}{a+b}AB^2$
On a : $MG^2 = \lambda$ avec $\lambda = \dfrac{k - f(G)}{a+b}$
• si $\lambda < 0$, alors (L_k) est un ensemble vide.
• si $\lambda = 0$, alors (L_k) est un cercle point c'est-à-dire $(L_k) = \{G\}$.
• si $\lambda > 0$ alors (L_k) est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\lambda}$.
▷ deuxième cas : si $a + b = 0 \Longrightarrow a = -b$
On a :
$aMA^2 + bMB^2 = aMA^2 - aMB^2$
$\Longrightarrow aMA^2 + bMB^2 = a(MA^2 - MB^2) \Longrightarrow a(MA^2 - MB^2) = k$
$MA^2 - MB^2 = \dfrac{k}{a} = k' \Longrightarrow MA^2 - MB^2 = k'$
Soit I milieu du segment $[AB]$.
$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$
$\Longrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = k'$
$2\overline{IH} \cdot \overline{AB} = k'$ avec H le projeté orthogonal de M sur (AB).
$\overline{IH} = \dfrac{k'}{2\overline{AB}} = \dfrac{k}{2a\overline{AB}}$.
(L_k) est une droite passant par H et perpendiculaire à la droite (AB).

D'une manière générale

$$(L_k) = \left\{ M \in \mathscr{P} / f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k MA_k^2 \right\}$$

▷ premier cas : si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \neq 0$.
On a : $f(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)MG^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)AG_k^2$
$\Longrightarrow MG^2 = \dfrac{k - f(G)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}$ où $f(G) = \dfrac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\beta AB^2 + \alpha\gamma AC^2 + \beta\gamma BC^2)$
pour un barycentre de trois points points.

- si $\lambda = \dfrac{k - f(G)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} > 0$
  (L_k) est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.
- si $\lambda < 0$, alors (L_k) est vide.

- si $\lambda = 0$, $(\lambda_k) = \{G\}$

▷ deuxième cas : si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$

On a : $f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM}$

avec $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA}_k$ indépendant de M et $O \in \mathscr{P}$

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$; on a deux cas :

∗ Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - k = 0$ alors (L_k) est un plan.

∗ Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - k \neq 0$, alors (L_k) est un ensemble vide.

▷ Si $\overrightarrow{u} \neq 0$

On a : $2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - k.$

Soit P un point du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ et H le projeté orthogonal de M sur (OP).

$$\overline{OH} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - k}{2\overline{OP}} \Longrightarrow \overline{OH} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k OA_k^2 - k}{2\|\overrightarrow{u}\|}$$

(L_k) est une droite perpendiculaire à la droite passant pat O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par H.

$d)$ **Ensemble des points M tels que :** $\dfrac{MA}{MB} = k$

On a : $(L_k =)\left\{M \in \mathscr{P} / \dfrac{MA}{MB} = k\right\}$.

On distingue quatre cas :

▷ premier cas : si $k < 0$

(L_k) est un ensemble vide.

▷ deuxième cas : si $k = 0$ $(L_k) = \{A\}$.

Troisième cas : si $k = 1$

(L_k) est la médiatrice du segment $[AB]$.

quatrième cas : Si $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

On a : $\dfrac{MA}{MB} = k \Longrightarrow MA = kMB \Longrightarrow MA^2 = k^2 MB^2$

$$MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Longrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Posons : $\begin{cases} I = bar\{(A,1);(B,k)\} \\ J = bar\{(A,1);(B,-k)\} \end{cases}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$, d'où (L_k) est un cercle de diamètre $[IJ]$.

ou bien

$MA^2 - k^2MB^2 = 0.$

Soit $G = bar\left\{(A,1);(B,-k^2)\right\}$

On a : $(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-k^2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=0 \Longrightarrow (1-k^2)MG^2+GA^2-k^2GB^2=0.$
$MG^2=\dfrac{GA^2-k^2GB^2}{k^2-1}$, or $\overrightarrow{GA}-k^2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{GA}=k^2\overrightarrow{GB} \Longrightarrow GA=k^2GB$
$MG^2=\dfrac{k^4GB^2-k^2GB^2}{k^2-1} \Longrightarrow MG^2=k^2GB^2 \Longrightarrow MG=kGB$
(L_k) est le cercle du centre G et de rayon kGB.

Activité

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que
$\dfrac{MA}{MB}=2$

17.4 Surface de niveau

17.4.1 Définition

Soit k un nombre réel et f une application de $(\mathscr{E})$ dans $\mathbb{R}$.
On appelle surface de niveau k de f, l'ensemble (Γ_k) des points M tels que : $f(M)=k$.

17.4.2 Détermination de surface de niveau

$a)$ **Ensemble des points** M **de** $(\mathscr{E})$ **tel que :** $aMA^2+bMB^2=k$

On a : $aMA^2+bMB^2=k$.
▷ premier cas : si $a+b\neq 0$
$aMA^2+bMB^2=(a+b)MG^2+aGA^2+bGB^2 \Longrightarrow (a+b)MG^2+aGA^2+bGB^2=k$
$\Longrightarrow MG^2=\dfrac{k-aGA^2-bGB^2}{a+b}$
Posons : $aGA^2+bGB^2=f(G)$
$MG^2=\dfrac{k-f(G)}{a+b}$ où $f(G)=\dfrac{a\times b}{a+b}AB^2$
Posons $\dfrac{k^2-f(G)}{a+b}=\lambda$, on a : $MG^2=\lambda$

- si $\lambda<0$, alors (Γ_k) est vide.
- si $\lambda=0$, alors $(\Gamma_k)=\{G\}$.
- si $\lambda>0$, alors (Γ_k) est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

Exercice

Soit A et B deux points de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que : $AB=6$.
Déterminer la surface de niveau 28 de l'application : $M \longmapsto MA^2+MB^2$
▷ deuxième cas : si $a+b=0$
On a : $aMA^2-aMB^2=k \Longrightarrow MA^2-MB^2=\frac{k}{a}$.
Soit I le milieu de $[AB]$
$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \Longrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{k}{a}$.
On choisit un repère pour la droite (AB).
Soit H le point de (AB) tel que : $2\overline{IH}\cdot\overline{AB}=\frac{k}{a} \Longrightarrow \overline{IH}=\dfrac{k}{2a\overline{AB}}$
(L_k) est le plan perpendiculaire en H à la droite (AB).

b) **Ensemble des points M de $(\mathscr{E})$ tel que :** $\dfrac{MA}{MB}=k$

Soit k un nombre réel strictement positif et différent de 1, A et B deux points distincts de l'espace $(\mathscr{E})$.

On a : $\dfrac{MA}{MB}=k \qquad (L_k)$

$MA=kMB \Longrightarrow MA^2-k^2MB^2=0 \Longrightarrow (\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})=0 \Longrightarrow \begin{cases} I=bar\{(A,1);(B,k)\} \\ J=bar\{(A,1);(B,-k)\} \end{cases}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

D'où (L_k) est une sphère de diamètre $[IJ]$ ou (L_k) est la sphère de centre G milieu de $[IJ]$ et de rayon $r=\dfrac{k}{|1-k^2|}AB$

Exercice

Soit A et B deux points de $(\mathscr{E})$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M de $(\mathscr{E})$ tel que : $(S):\dfrac{MA}{MB}=2$

Chapitre 18

LE CERCLE

18.1 Définition

Soit Ω un point du plan et R un nombre réel strictement positif.
On appelle cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M = R$.

18.2 Équation cartésienne du cercle

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $\Omega(a;b)$; $M(x;y)$ deux points du plan et R un nombre réel strictement positif. On désigne par $(\mathscr{C})$ de centre Ω et rayon R.
$M \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow \Omega M = R \Longrightarrow \Omega M^2 = R^2$
D'où $(\mathscr{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
En développant, on obtient : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Posons $\alpha = -2a$; $\beta = -2b$ et $\gamma = a^2 + b^2 - R^2$
On a : $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. C'est la forme générale d'un cercle.

18.3 Forme canonique d'un cercle

On a : $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$
$(\mathscr{C}) : \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{\beta}{2}\right)^2 = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - \gamma.$
On distingue trois cas :
▷ premier cas : si $\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$.
$(\mathscr{C})$ est un ensemble vide.
▷ deuxième cas : $\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$.
$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{\alpha^2}{2}; -\dfrac{\beta^2}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - \gamma}$.
▷ troisième cas : si $\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - \gamma = 0$.
$(\mathscr{C})$ est un cercle point de centre $\Omega\left(-\dfrac{\alpha^2}{2}; -\dfrac{\beta^2}{2}\right)$.

Exercice 1

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A(2;1)$ et de rayon 3.

Exercice 2

Étudier les ensembles des points M du plan tels que : $(\mathscr{C}_1) : x^2+y^2+6x+9=0$; $(\mathscr{C}_2) : x^2+y^2-6x+4y+16=0$ et $(\mathscr{C}_3) : 2x^2+2y^2-2x+4y+1=0$.

18.4 Équation du cercle de diamètre $[AB]$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne deux points du plan $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.
$M(x;y) \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix}=0$
On a : $(\mathscr{C}) : (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.
En développant, on obtient la forme générale :
$(\mathscr{C}) : x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0$

Exercice

On donne $A(-1;4)$ et $B(2;-3)$.
Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.

18.5 Équation de la tangente à un cercle en point M_0 de ce cercle

18.5.1 Définition

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.
L'équation de la tangente (T) en M_0 au cercle est l'ensemble des points M tels que :
$\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{M_0\Omega}=0$.
On a : $(T) : (x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$.
En développant, on obtient : $(T) : xx_0+yy_0-a(x-x_0)-b(y-y_0)-(x_0^2+y_0^2)=0$

18.5.2 Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point de $(\mathscr{C})$. On désigne par $\Omega(a;b)$ le centre de $(\mathscr{C})$. L'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en M_0 est : $(T) : xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$.

Exercice

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

1. Vérifier que le point $B(2;-1)$ appartient à $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point B.

18.6 Tangente à un cercle passant par un point donné extérieur à ce cercle

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, $P(x_P;y_P)$ un point n'appartenant pas à $(\mathscr{C})$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point de $(\mathscr{C})$.
Pour déterminer une équation des tangentes à $(\mathscr{C})$ en P ;
▷ On détermine une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0.
▷ On détermine si possible les coordonnées du point M_0 telle que la tangente (T_0) passe par le point P.
▷ On trouve ainsi une équation des tangentes à $(\mathscr{C})$ passant par le point P.

Exercice

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation $x^2+y^2-10x+15=0$ et P un point des coordonnées $(0;5)$.

1. Vérifier que le point P n'appartient pas au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Montrer que l'équation de la tangente (T_0) en $M_0(x_0;y_0)$ est : $xx_0+yy_0-5(x+x_0)+15=0$.
3. Déterminer x_0 et y_0 pour que la tangente (T_0) passe par le point P.
4. En déduire une équation des tangentes à $(\mathscr{C})$ passant par P.

18.7 Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r.
Pour tout point $M(x;y)$ du plan ; on a : $M \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow \Omega M = r \Longrightarrow \Omega M^2 = r^2$
: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Longrightarrow \left(\dfrac{x-a}{r}\right)^2+\left(\dfrac{y-b}{r}\right)^2=1$.

Posons : $\begin{cases} \dfrac{x-a}{r}=\cos\alpha \\ \dfrac{y-b}{r}=\sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=a+r\cos\alpha \\ y=b+r\sin\alpha \end{cases}$

D'où $(\mathscr{C})$: $\begin{cases} x=a+r\cos\alpha \\ y=b+r\sin\alpha \end{cases}$

ce système est appelé représentation paramétrique d'un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r.
Le couple $(r;\alpha)$ est appelé coordonnée polaire du point M.

Exercice

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation $x^2+y^2-2x+y-1=0$.

1. Donner la forme canonique du cercle $(\mathscr{C})$.
2. En déduire les coordonnées de son centre A et la longueur de son rayon.
3. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$.

18.8 Position du cercle par rapport à une droite

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle centre Ω et de rayon r et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $ax+by+c=0$.
Notons $d=(\Omega;(\mathscr{D}))$ la distance du centre du cercle $(\mathscr{C})$ à la droite $(\mathscr{D})$. On distingue trois :
▷ Premier cas : si $d=r$
Le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ sont tangents en un point A, c'est-à-dire $(\mathscr{C})\cap(\mathscr{D})=\{A\}$.

▷ Deuxième cas : si $d > r$
Le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ sont disjoints, c'est-à-dire $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{D}) = \{\}$.
▷ Trois cas : si $d < r$
Le cercle $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ sont sécants en deux points A et B, c'est-à-dire $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{D}) = \{A; B\}$.

Exercice

1. Étudier la position de cercle $(\mathscr{C})$ d'équation : $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $x + 2y - 13 = 0$.
2. Déterminer si possible les coordonnées de leur ou leurs points communs.

18.9 Puissance d'un point par rapport à un cercle

18.9.1 Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point quelconque de plan.
Si deux droites passant par M coupent $(\mathscr{C})$ respectivement en A, B, C et D, alors : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

Démonstration

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur $(\mathscr{C})$, tels que : $\widehat{MBA} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A0}$.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MB}$ et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA}.\overline{MB}$.
Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right)$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = OM^2 - OA^2 = OM^2 - r^2$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = OM^2 - r^2$ (1)
D'autre part :
Soit C' le point diamétralement opposé à C sur $(\mathscr{C})$.
$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overline{MC}.\overline{MD}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = \overline{MC}.\overline{MD}$.
Donc $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC'}\right)$
$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OC}\right) = OM^2 - OC^2 = OM^2 - r^2$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = OM^2 - r^2$ (2)
(1) et (2) prouvent que : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

18.9.2 Définition

On appelle puissance du point par rapport au cercle $(\mathscr{C})$, le nombre réel noté $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M)$ défini par : $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) = OM^2 - r^2$.

18.9.3 Position d'un point par rapport à un cercle

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque de plan et $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M)$ la puissance du point M par rapport à $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) = 0$, alors le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) < 0$, alors le point M est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) > 0$, alors le point M est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$.

Remarque

Si $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) > 0$ et T le point de contact de $(\mathscr{C})$ avec la tangente issue de M, alors $\mathscr{P}_{(\mathscr{C})}(M) = MT^2$.

18.10 Points cocycliques

On dit que les points sont cocycliques s'ils sont situés sur un même cercle.

Propriétés

▷ Soit A, B, C et D quatre points distincts non alignés.
Si (AB) et (CD) sont sécantes en un point M tel que : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.
▷ Soit ABT un triangle. Si un point M de la droite (AB) vérifie $\overline{MA}.\overline{MB} = MT^2$, alors (MT) est la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABT.

18.11 Intersection des cercles

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et r'.
Posons $d = OO'$
Six cas peuvent se présenter :
▷ Premier cas : si $d > r + r'$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont disjoints. On dit que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont extérieur.
▷ Deuxième cas : si $d < |r' - r|$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont disjoints. On dit que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont intérieurement.
▷ Troisième cas : si $d = r + r'$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents extérieurement.
▷ Quatrième cas : si $d = |r' - r|$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents intérieurement.
▷ Cinquième cas : si $|r' - r| < d < r + r'$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants.
▷ Sixième cas : si $O = O'$; alors $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont concentriques.

18.12 Axe radial

18.12.1 Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et r'. Alors l'ensemble des points M qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite $(\mathscr{D})$ perpendiculaire à la droite (OO'). Par ailleurs, le point d'intersection P des droites $(\mathscr{D})$ et (OO') vérifie : $2\overline{OO'}.\overline{\Omega P} = r^2 - r'^2$ où Ω est le milieu du segment $[OO']$.

18.12.2 Définition

La droite $(\mathscr{D})$ perpendiculaire à (OO') est appelée axe radial des cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Remarque

Si $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants, leur axe radial est la droite passant par leurs
points d'intersection.

18.13 Cercles orthogonaux

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et r'.
On dit que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont orthogonaux si et seulement si ils sont sécants et leurs tangentes respectives en chaque point d'intersection sont orthogonaux.

Exercice

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles d'équations cartésiennes respectives $x^2+y^2+4x-y-2=0$ et $x^2+y^2-6x-6y-7=0$.

1. Donner les éléments caractéristiques des cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
2. Montrer que les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants.
3. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection A et B avec A d'abscisse nulle.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ et (T') à $(\mathscr{C}')$ au point A.
5. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont orthogonaux.

18.14 Équation du cercle circonscrit à un triangle

Soit A, B et C trois points distincts du plan.
On appelle cercle circonscrit au triangle ABC ou cercle passant par les points A, B et C l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M = \Omega A = \Omega B = \Omega C = r$ avec Ω son centre et r son rayon.

Remarque

Le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection de trois médiatrices.

18.15 Équation du cercle inscrit dans un triangle

18.15.1 Définition

Soit A, B et C trois points distincts du plan. On appelle cercle $(\mathscr{C})$ inscrit dans un triangle ABC tout cercle de centre Ω intersection des bissectrices intérieures des angles du triangle $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ et de rayon $r = d(\Omega;(AB)) = d(\Omega;(AC)) = d(\Omega;(BC))$.

18.15.2 Propriété

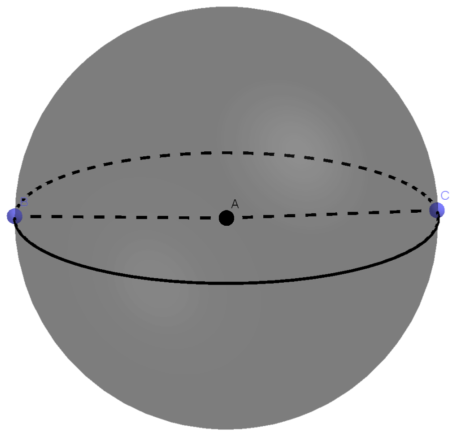
Le centre Ω du cercle inscrit dans un triangle ABC est défini tel que $\Omega = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ où $\alpha = BC$; $\beta = AC$ et $\gamma = AB$.

Chapitre 19

LA SPHÈRE

19.1 Définition

Soit Ω un point de l'espace $(\mathscr{E})$ et R un nombre positif.
On appelle sphère $(\mathscr{S})$ de centre Ω et de rayon R l'ensemble des point M de l'espace $(\mathscr{E})$ tels que : $\Omega M = R$.



19.2 Équation cartésienne d'une sphère

Soit $\Omega(a,b,c)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$ et R un nombre positif.
$M \in (\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \Omega M = R \Longrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Longrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
D'où $(\mathscr{S}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
En développant, on obtient la forme générale : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$
posons : $-2a = \alpha$; $-2b = \beta$; $-2c = \gamma$ et $a^2+b^2+c^2-R^2 = \delta$.
Ainsi : $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$

19.3 Forme canonique d'une sphère

On a : $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$
$(\mathscr{S}) : \left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z+\dfrac{\gamma}{2}\right)^2 = \dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\delta.$
On distingue trois cas :
$\triangleright$ premier cas : si $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\delta < 0$.
$(\mathscr{S})$ est un ensemble vide.

▷ deuxième cas : si $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\delta>0$.

$(\mathscr{S})$ est une sphère de centre $\Omega\left(-\dfrac{\alpha^2}{2};-\dfrac{\beta^2}{2};-\dfrac{\gamma^2}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\delta}$.

▷ troisième cas : si $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\gamma^2}{4}-\delta=0$.

$(\mathscr{S})$ est une sphère point de centre $\Omega\left(-\dfrac{\alpha^2}{2};-\dfrac{\beta^2}{2};-\dfrac{\gamma^2}{2}\right)$.

Exercice 1

Déterminer une équation cartésienne d'une sphère $(\mathscr{S})$ de centre $A(1;-2,0)$ et de rayon 3.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ défini par : $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+6=0$;
$x^2+y^2+z^2-10x+y+2z+30=0$; $x^2+y^2+z^2-8x+4y+12z+56=0$.

19.4 Équation de la sphère de diamètre $[AB]$

19.4.1 Définition

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=0$.

19.4.2 Expression analytique

L'espace est muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. On considère les points $A(a,b,c)$ et $B(a',b',c')$. On désigne par $(\mathscr{S})$ la sphère de diamètre $[AB]$.
Soit M un point de l'espace, $M\in(\mathscr{S})\iff\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=0$
$\Longrightarrow(x-a)(x-a')+(y-b)(y-b')+(z-c)(z-c')=0$.

Exercice

On donne $A(-1;1;2)$ et $B(3;-5;4)$ deux points de l'espace. Déterminer l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$.

19.5 Équation du plan $(\mathscr{P})$ tangent en M_0 à la sphère $(\mathscr{S})$

Soit $(\mathscr{S})$ la sphère de centre Ω et de rayon R. Le plan tangent en M_0 à la sphère $(\mathscr{S})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{M_0M}\,.\,\overrightarrow{M_0\Omega}=0$.

Exercice

On considère le point $A(1;-3;-2)$ et l'ensemble $(\mathscr{S})$ défini par :
$(\mathscr{S}):x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-12=0$.

1. Vérifier que le point A appartient à $(\mathscr{S})$.
2. Montrer que $(\mathscr{S})$ est une sphère dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Déterminer une équation du plan $(\mathscr{P})$ tangent en A à $(\mathscr{S})$.

19.6 Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $(\mathscr{S})$ une sphère de centre Ω, de rayon R et $(\mathscr{P})$ un plan. On désigne par H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{P})$.
Posons $d = d(\Omega H; (\mathscr{P})) = \Omega H$ la distance du point Ω au plan $(\mathscr{P})$. Trois cas peuvent se présenter :
▷ premier cas : si $d = R$
Alors le plan $(\mathscr{P})$ est tangent à la sphère $(\mathscr{S})$ au point H.
▷ deuxième cas : si $d > R$
Alors le plan $(\mathscr{P})$ ne rencontre pas la sphère $(\mathscr{P})$.
▷ troisième cas : si $d < R$
Alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{S})$ sont sécants selon un cercle $(\mathscr{C})$ de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Exercice

Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 1 = 0$. On désigne par $(\mathscr{S})$ la sphère de centre $A(2; -3; -1)$ et de rayon $R = 3$.

1. Calculer la distance d du point A au plan $(\mathscr{P})$.
2. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{S})$ sont sécants.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de leur intersection.

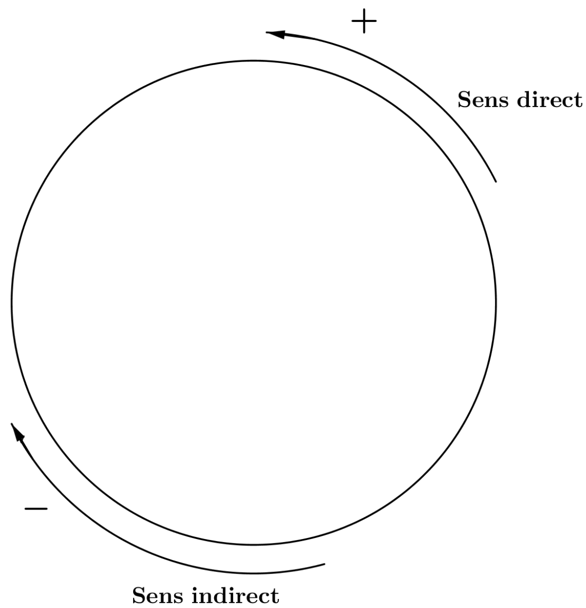
CHAPITRE 20

ANGLES ORIENTES

20.1 Angles orientés de vecteurs

20.1.1 Orientation du plan

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle du plan. Il existe deux sens de parcours sur le cercle $(\mathscr{C})$:
▷ le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ;
▷ le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre.
On appelle sens direct ou sens positif le sens contraire au mouvement des aiguilles d'une montre.
NB :
• Le sens direct est aussi appelé sens trigonométrique.
• Le sens contraire au sens direct est le sens indirect.

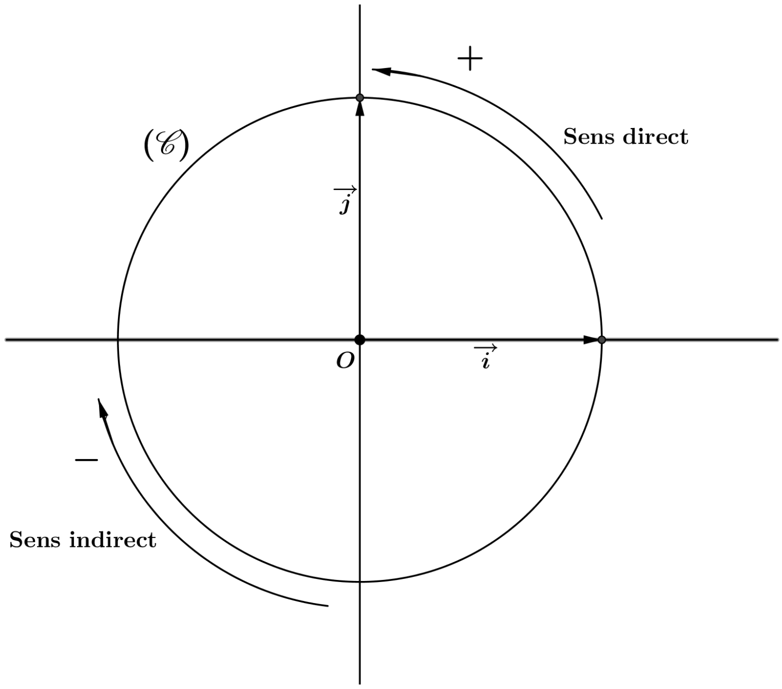


Un plan est dit orienté lorsqu'il est orienté à partir de ce choix.

20.1.2 Le cercle trigonométrique

Définition

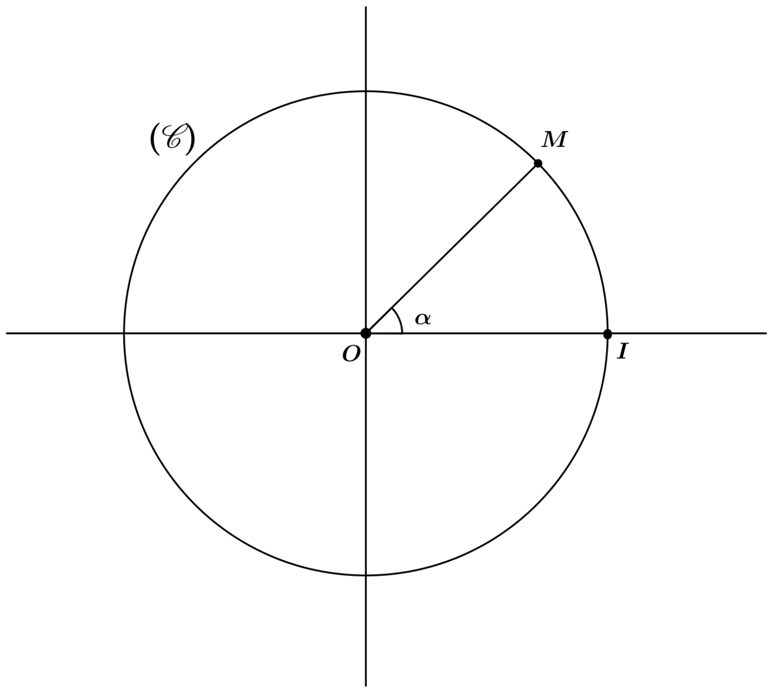
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct, où O est l'origine du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



20.1.3 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

a) **Abscisse curviligne**

A tout point du cercle trigonométrique, on associe une famille de nombres réels appelés abscisses curvilignes de M.



Réciproquement

Sur un cercle trigonométrique, à tout nombre réel α exprimé en radian on associe un point M.

$b)$ **Propriété**

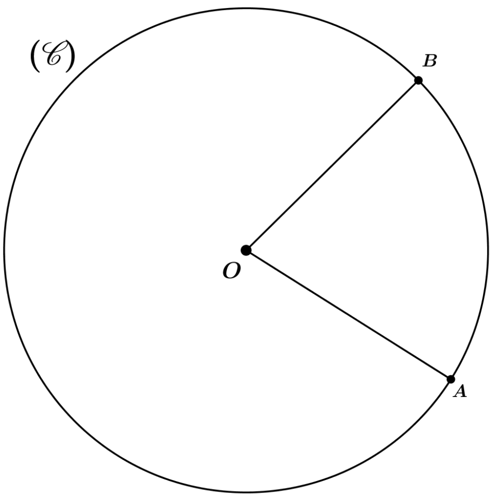
Si α est l'une de ces abscisses curvilignes, toutes les autres sont de la forme $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Il existe une abscisse curviligne et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
On l'appelle l'abscisse curviligne principale de M.

NB :
M est le point image de tous les réels de la forme $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

20.1.4 Arc orienté

$a)$ **Définition**

On appelle arc orienté d'un cercle $(\mathscr{C})$ tout couple de points de $(\mathscr{C})$. Étant donné deux points A et B du cercle $(\mathscr{C})$, l'arc orienté d'origine A et d'extrémité B est noté $\overset{\frown}{AB}$.



b) Mesure d'un arc orienté

Soient A et B deux points du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$, a et b les abscisses curvilignes respectives de A et B.
Une mesure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est $b - a$.

c) Congruence modulo 2π

Un arc orienté a une infinité de mesures.
LA différence entre deux nombres quelconques α et β de l'arc est un multiple de 2π.
On dit que α est congru à β modulo 2π et on note $\alpha \equiv \beta[2\pi]$.
$\alpha \equiv \beta[2\pi] \Longleftrightarrow \alpha - \beta$ est un multiple de 2π c-à-d $\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notation

$\text{mes}\overset{\frown}{AB} = b - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\text{mes}\overset{\frown}{AB} = (b-a)[2\pi]$.

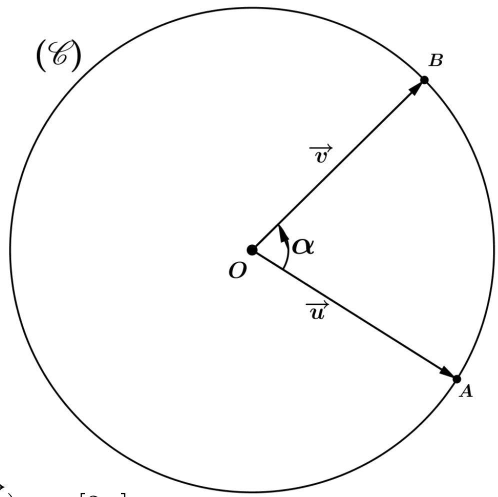
Exercice

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points $I(0)$, $J(\frac{\pi}{2})$, $I'(\pi)$, $J'(-\frac{\pi}{2})$, $A(\frac{\pi}{6})$ et $B(-\frac{\pi}{6})$.
2. Donner les mesures principales des arcs $\overset{\frown}{AJ}$, $\overset{\frown}{BJ}$, $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AI'}$.

20.1.5 Angles orienté d'un couple de vecteurs non nuls

a) **Définition**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires du plan, A et B deux points du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.
On appelle angle orienté du couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'angle définit par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ tels que les mesures de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ soient celles de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



On a : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha[2\pi]$.

NB :
La longueur de arc est $L = R\alpha$.

b) **Propriétés**

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan.

- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]$. (angle opposé)
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv 0[2\pi]$, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens.
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \pi[2\pi]$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraires.
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + 2k\pi$. (Relation de Chasles)
- ▷ $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
- ▷ $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$.
- ▷ $(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = \begin{cases} \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi], \texttt{ si } k < 0 \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi], \texttt{ si } k > 0 \end{cases}$
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0[2\pi]$

20.1.6 Mesure principale d'un angle orienté

a) **Définition**

On appelle mesure principale d'un angle orienté l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

b) Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Toute mesure en radian θ d'un angle orienté s'écrit $\theta = \frac{a\pi}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$; $\beta \in \mathbb{N}^*$.
Notons par $\overline{\theta}$ la mesure principale de θ.
On distingue deux cas :
▷ premier cas : si $|a| < b$ alors θ est une mesure principale. On a : $\overline{\theta} = \theta$.
▷ deuxième cas : si $|a| > b$ alors θ n'est pas mesure principale.
Dans ce cas on note : $\overline{\theta} = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $-\pi < \theta \leq \pi$.

Remarques

▷ $\forall n \in \mathbb{N}^*$; la mesure principale de $\theta = n\pi$ est $\begin{cases} \overline{\theta} = 0; \texttt{si } n \texttt{ est pair} \\ \overline{\theta} = \pi; \texttt{si } n \texttt{ est impair} \end{cases}$

▷ $\forall n \in \mathbb{Z}^*_-$, la mesure principale de $\theta = n\pi$ est $\begin{cases} \overline{\theta} = 0;\ \texttt{si } n \texttt{ est pair} \\ \overline{\theta} = \pi\ \texttt{si } n \texttt{ est impair} \end{cases}$

▷ Pour $\theta = \frac{a\pi}{b}$, la mesure principale de θ est $\overline{\theta} = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\theta_1 = \frac{29\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{-101\pi}{9}$, $\theta_3 = 3\pi$, $\theta_4 = \frac{35\pi}{3}$, $\theta_5 = -3,5\pi$.

Exercice 2

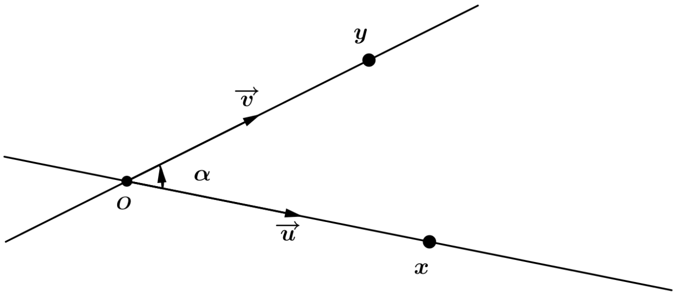
On considère la ligne brisée A, B, C, D, E telle que :
$AB = 4cm$, $BC = 5cm$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, $CD = 3cm$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $DE = 2cm$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

1. Construire avec soin cette ligne brisée.
2. Déterminer la mesure principale des angles $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$.
3. Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) \equiv -\pi[2\pi]$.
4. Que peu-on dire des :
   a) vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$?
   b) droites (AB) et (DE) ?

20.1.7 Angle Orienté d'un couple de demi-droites

$a)$ **Définition**

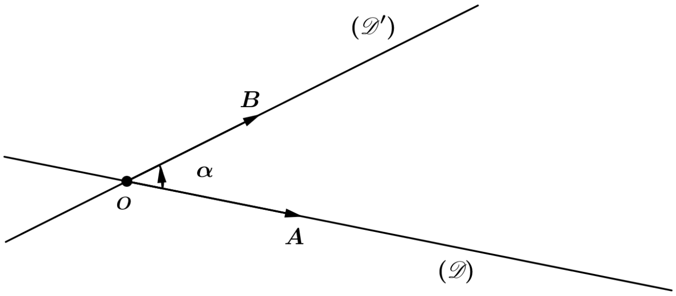
Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs directeurs respectifs de $[Ox)$ et $[Oy)$.
L'angle orienté du couple de demi-droite (Ox, Oy) n'est autre que l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



b) Mesure d'un angle des droites

Posons $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha$. Calculons $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
$(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Longrightarrow (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi + \alpha$.
Donc tout couple orienté $[Ox)$ et $[Oy)$ détermine deux angles orientés de vecteurs de mesures α et $\pi + \alpha$ qui ne diffèrent que de π.
$(\overline{Ox, Oy}) = \alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ou $(\overline{Ox, Oy}) = \alpha[\pi]$.
Parmi toutes ces nombres de la forme $\alpha + k\pi$ une seule est comprise dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on l'appelle mesure principale.

c) Relation entre $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ et $(\overline{OA, OB})$



▷ Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha[2\pi]$; alors $(\overline{OA, OB}) = \alpha[\pi]$
▷ Si $(\overline{OA, OB}) = \alpha[\pi]$, alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha[2\pi]$.

d) **propriétés**

Soient $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$ quatre droites.

▷ $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2}) = -(\overline{\mathscr{D}_2, \mathscr{D}_1})[\pi]$.

▷ $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_1}) = 0[2\pi]$.

▷ $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2}) = 0[\pi] \Longleftrightarrow (\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D}_2)$.

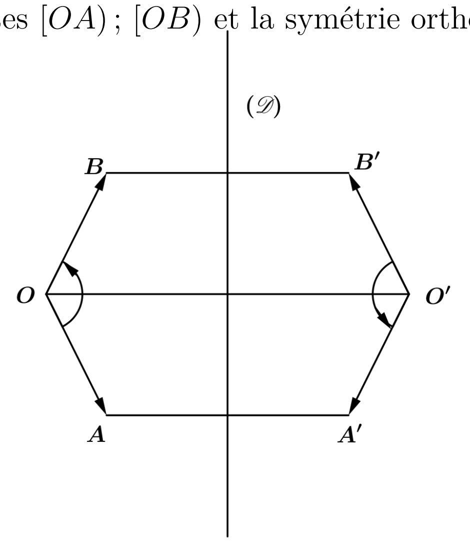
▷ $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_4}) = (\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2}) + (\overline{\mathscr{D}_2, \mathscr{D}_4})[\pi]$. (Relation de Chasles)

▷ $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_3, \mathscr{D}_4})[\pi] \Longleftrightarrow (\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_3}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2, \mathscr{D}_4})[\pi]$.

▷ Si $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3) \perp (\mathscr{D}_4)$ alors $(\overline{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_3}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2, \mathscr{D}_4})[\pi]$.

▷ Les points A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow (\overline{AB, AC}) = 0[\pi]$.

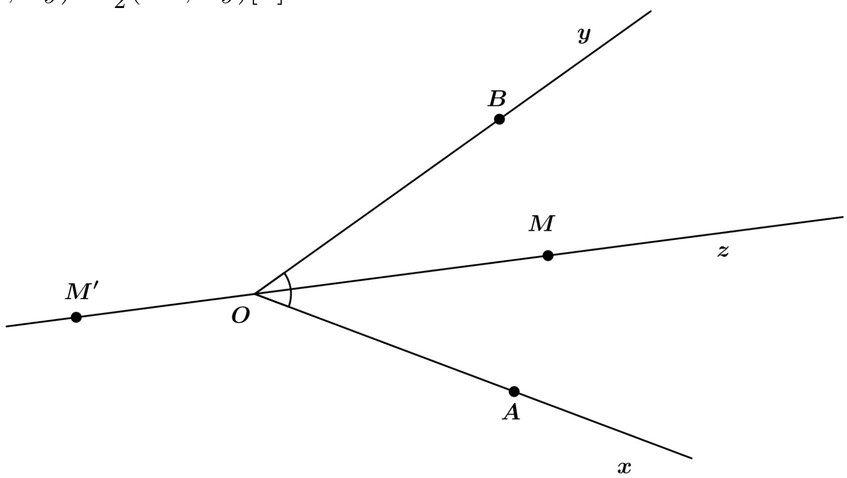
▷ Étant donné deux demi-droites $[OA)$; $[OB)$ et la symétrie orthogonale $S_{(\mathscr{D})}$.



$(\overline{OA,OB}) = (\overline{O'B';O'A'})[\pi]$
$(\overline{OA,OB}) = -(\overline{O'A';O'B'})[\pi]$

20.1.8 Bissectrice d'un angle de demi-droites

On appelle bissectrice d'un angle de demi-droite (Ox,Oy) la demi-droite $[Oz)$ telle que $(\overline{Ox,Oz}) = (\overline{Oz,Oy}) = \frac{1}{2}(\overline{Ox,Oy})[\pi]$.

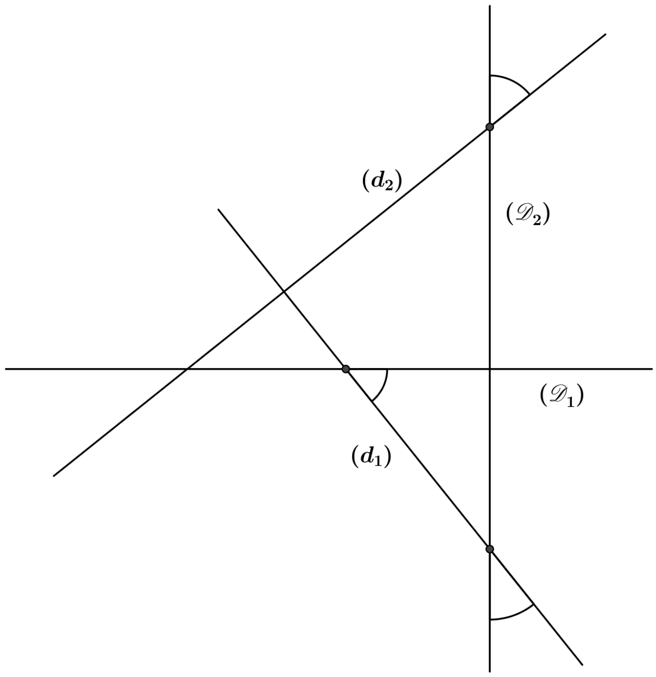


Remarques

▷ Un point M distinct du sommet O d'un angle orienté $(\overline{OA;OB})$ appartenant à la bissectrice intérieure de cet angle $\Longleftrightarrow (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})[2\pi]$.

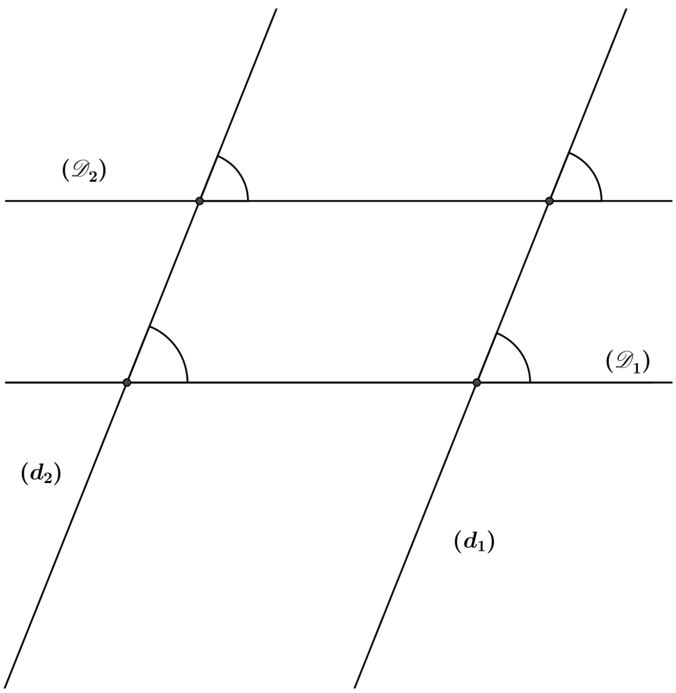
▷ Un point M' distinct de O d'un angle orienté $(\overline{OA;OB})$ appartient à la bissectrice extérieure de cet angle $\Longleftrightarrow (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \dfrac{1}{2}(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) + \pi[2\pi]$.

20.1.9 Angle de droites côté perpendiculaires



$$\begin{cases} (\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2) \\ (d_1) \perp (d_2) \end{cases} \iff (\overline{\mathscr{D}_1; d_1}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2; d_2})[\pi]$$

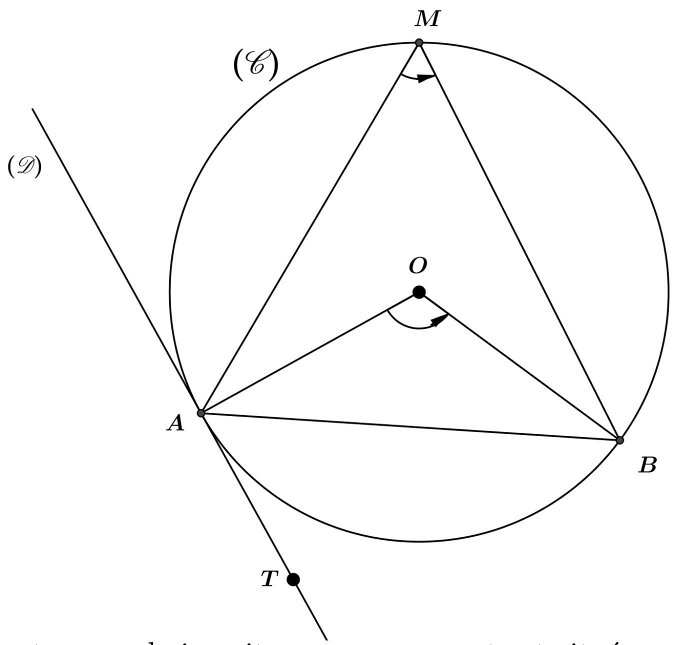
20.1.10 Angle de droites à côté parallèles



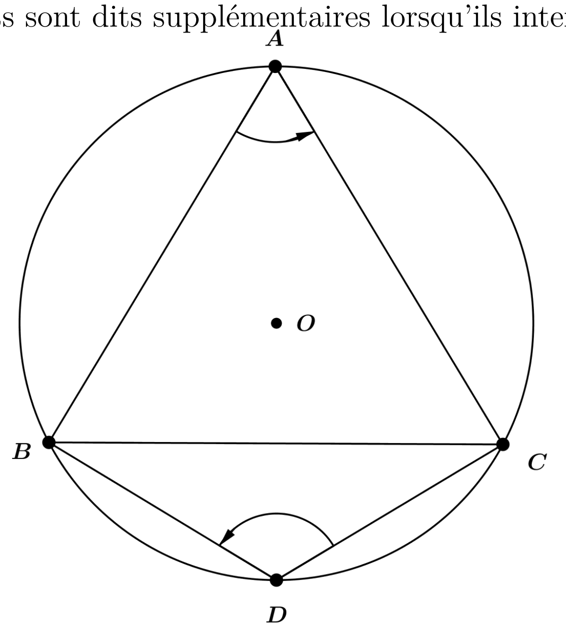
$$\begin{cases} (\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D}_2) \\ (d_1) \parallel (d_2) \end{cases} \iff (\overline{\mathscr{D}_1; d_1}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2; d_1})[\pi].$$

20.1.11 Angle inscrit et angle au centre

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de $(\mathscr{C})$ et $M \in \mathscr{C}$ tels que : $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\mathscr{D})$ la tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$.



- $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit, car son sommet est situé sur le cercle $(\mathscr{C})$.
- $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle au centre, car son sommet est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.
  On a : $M \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- **Propriété de la tangente**
  L'angle entre une tangente et une corde est égal à l'angle inscrit interceptant cette corde situé de l'autre coté, c'est-à-dire pour tout $T \in (\mathscr{D})$ distinct de A, on a :
  $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$
  ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$.
- **Théorème fondamental**
  Tout angle inscrit vaut la moité de l'angle au centre.
- **Propriétés**
  - Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.
  - Tout angle inscrit interceptant un diamètre est droit.
  - Deux angles inscrits sont dits supplémentaires lorsqu'ils interceptent des arcs opposés.



$$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,)+(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DB}\,)=\pi$$

20.2 Points cocycliques

20.2.1 Définition

On appelle points cocycliques des points qui appartiennent à un même cercle.

20.2.2 Théorème

Quatre points A, B, C et D non alignés du plan sont cocycliques si et seulement $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,)\equiv(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DC}\,)[2\pi]$.

20.2.3 Propriétés

- ▷ Deux points distincts sont toujours cocycliques.
- ▷ Trois points distincts non alignés sont toujours cocycliques.
- ▷ Quatre points distincts A, B, C et D ne sont pas toujours cocycliques.

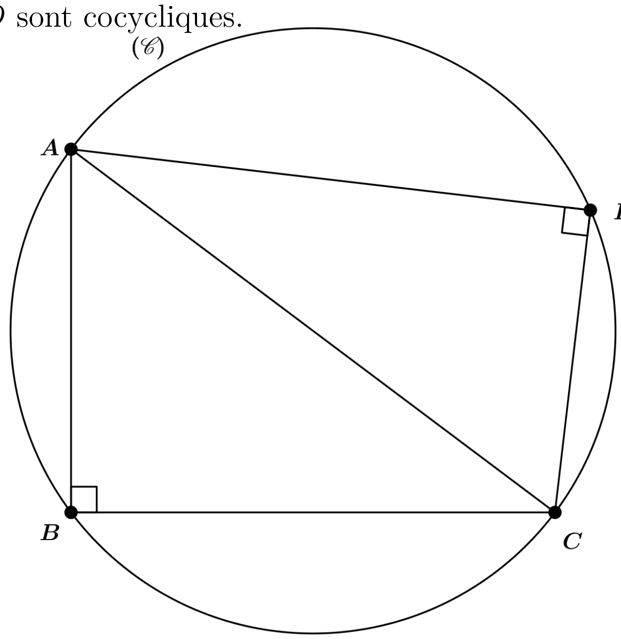
20.2.4 Points alignés

Trois points A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,)\equiv\pi[2\pi]$ ou $(\overline{AB,AC})\equiv 0[\pi]$.

20.2.5 Configuration donnant quatre points cocycliques

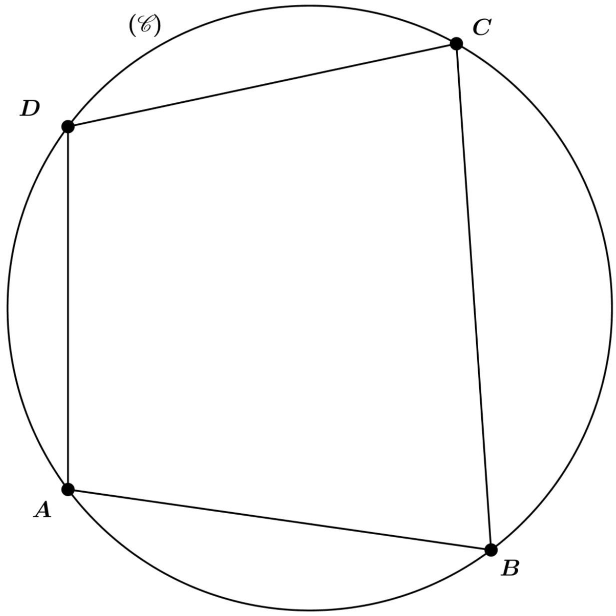
a) Deux triangles rectangles de même hypoténuse

Soit ABC et ACD deux triangles rectangles en B et D de même hypoténuse $[AC]$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.



b) Quadrilatères non croisé aux angles opposés supplémentaires

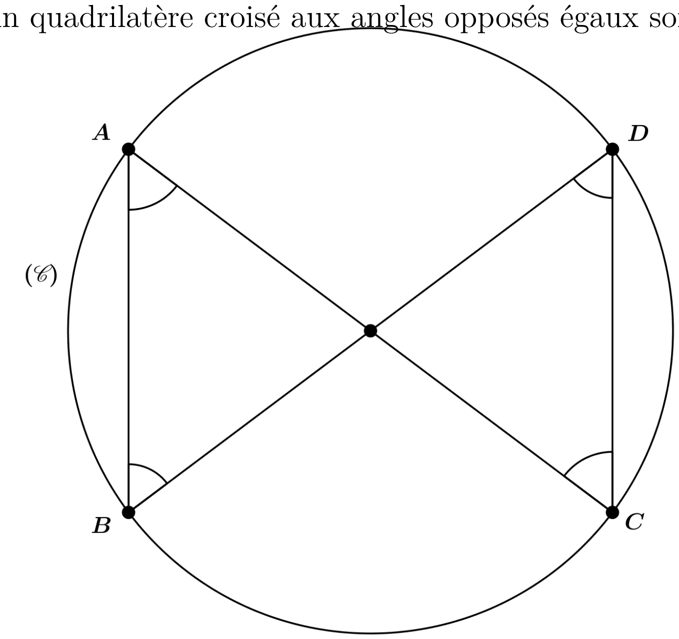
Les sommes d'un quadrilatère non croisé aux angles opposés supplémentaires sont cocycliques.



$\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$ et $\widehat{B} + \widehat{D} = \pi$.

c) Quadrilatère croisé aux angles égaux

Les sommes d'un quadrilatère croisé aux angles opposés égaux sont cocycliques.



$\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$

Exercice 1

Deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en A et en B. Une droite passant par A coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en M'. Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C})$ en N et $(\mathscr{C}')$ en N'.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 2

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants en deux points A et B.
Soient I un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et de B, J un point de $(\mathscr{C}')$ distinct de A et de B, tels que I, J et A ne soient pas alignés. Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en N.
On suppose que les droites (IM) et (JN) sont sécants en N.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

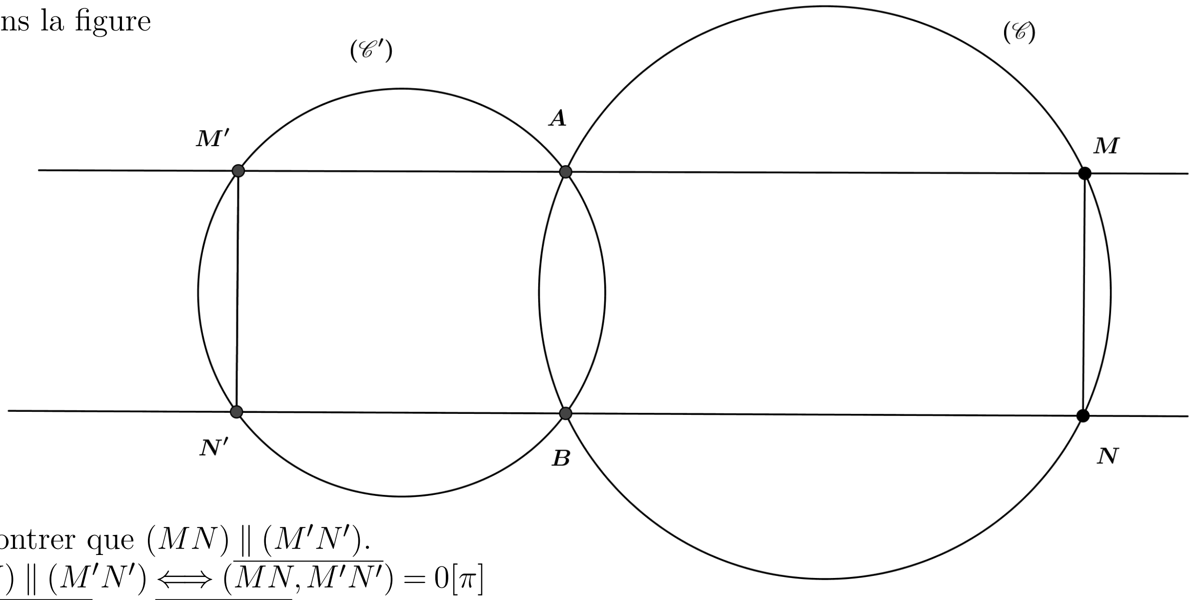
Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par A' ; B' et C' trois points appartenant respectivement aux droites (BC) ; (CA) et (AB).
Soit M le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $BA'C'$ et $CA'B'$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les points A, B', C' et M sont cocycliques.
3. Montrer que $(\overline{A'B', A'C'}) = (\overline{MB; MC}) + (\overline{AC, AB})[\pi]$.
4. Montrer que si A', B' et C' sont alignés, alors M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

Solution 1

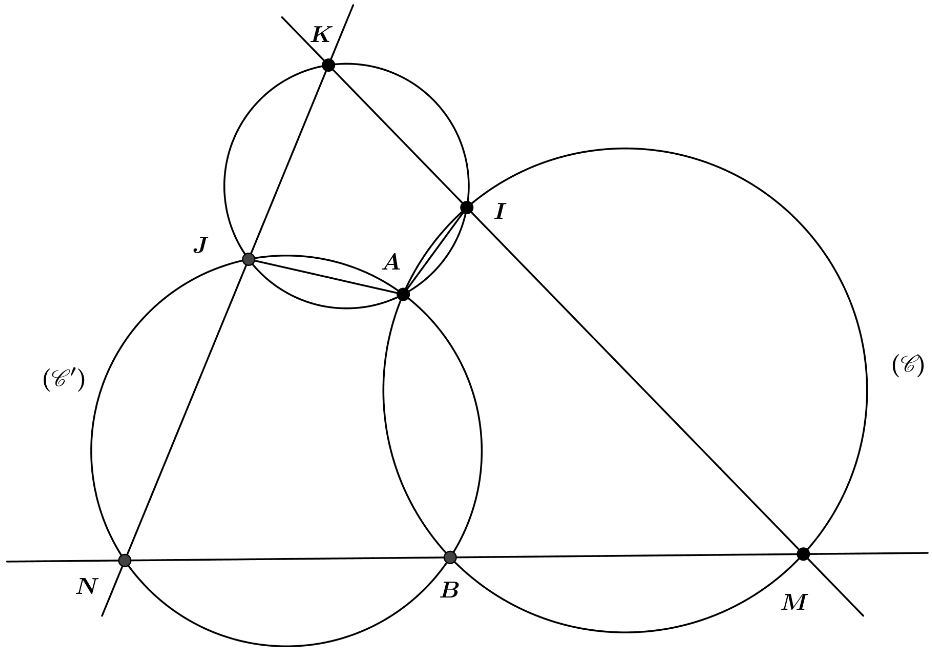
1. Faisons la figure



2. Démontrer que $(MN) \parallel (M'N')$.
$(MN) \parallel (M'N') \Longleftrightarrow (\overline{MN, M'N'}) = 0[\pi]$
$(\overline{MN, M'N'}) = (\overline{MN, NN'}) + (NN', M'N')[\pi] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[\pi]$
$\Longrightarrow (\overline{MN, M'N'}) = 0[\pi]$.
D'où $(MN) \perp (M'N')$

Solution 2

1. Faisons la figure



2. Démontrons que les points A, I, J et K sont cocycliques.
   A, I, J et K cocycliques $\Longleftrightarrow (\overline{IA;IK}) = (\overline{JA;JK})[\pi]$.
   $(\overline{IA;IK}) = (\overline{IA;IM})[\pi]$ car M, I et K sont alignés.
   De même $(\overline{JA;JK}) = (\overline{JA;JN})[\pi]$ car N, J et K sont alignés.
   - Les points A, B, I et M sont cocycliques donc $(\overline{IA;IM}) = (\overline{BA;BM})[\pi]$.
   - Les A, B, J et N sont cocycliques donc $(\overline{JA;JN}) = (\overline{BA,BN})[\pi]$

     Donc $\begin{cases} (\overline{IA;IK}) = (\overline{BA;BM})[\pi] \\ (\overline{JA;JK}) = (\overline{BA,BN}[\pi]) \end{cases}$ or B, M et N sont alignés,

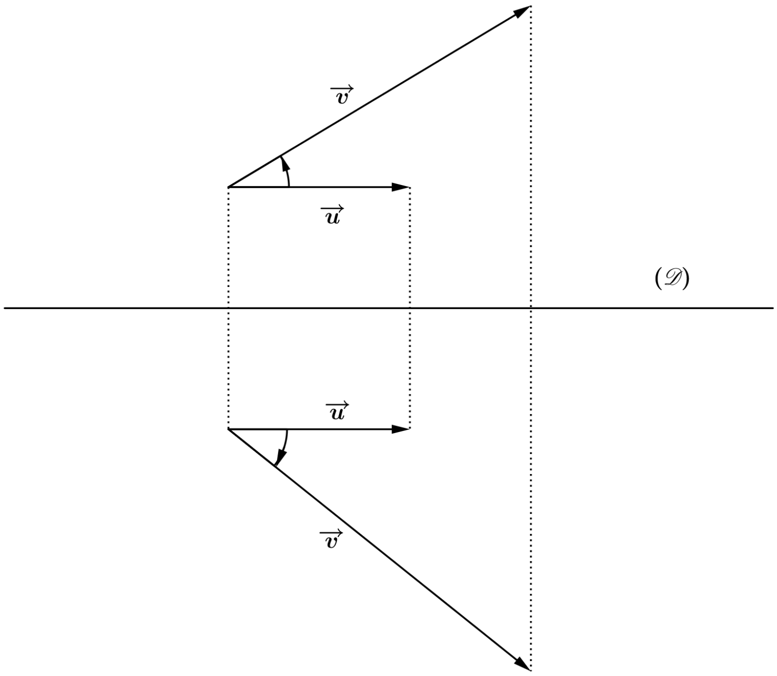
     $\begin{cases} \overline{(IA;IK)} = (\overline{BA;BN})[\pi] \\ \overline{(JA;JK)} = (\overline{BA;BN})[\pi] \end{cases} \Longrightarrow (\overline{IA;IK}) = (\overline{JA;JK})[\pi]$

     D'où les points I, A, J et K sont cocycliques.

20.2.6 Effet d'une réflexion et d'une homothétie sur les angles orientés

a) Angles et symétries orthogonale

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un angle orienté.
Une symétrie orthogonale change l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en son opposé.
$(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

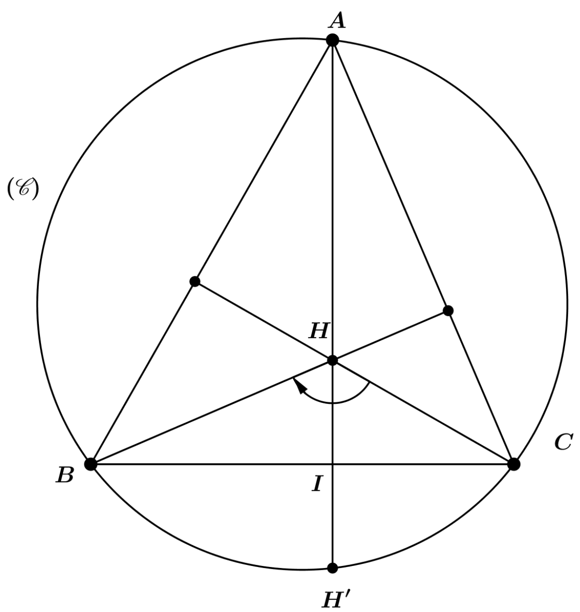


b) Angles et homothéties

Soit A, B et C trois d'images respectives A', B' et C' par l'homothétie h.
On a : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}; \overrightarrow{C'B'})$

20.2.7 Propriétés de symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle

Soit ABC un triangle quelconque, $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit H son orthocentre.
Les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$.



On a : les points A, B, H' et C sont cocycliques.

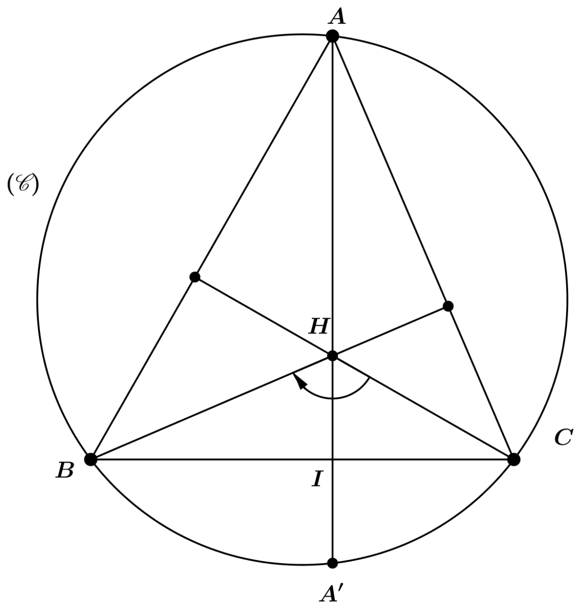
Exercice

Soit ABC un triangle quelconque et H son orthocentre. On noteA' le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (BC).

1. Faire la figure.
2. Établir que $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[\pi]$.
3. Montrer que les points A, B, C et A' sont cocycliques.

Solution

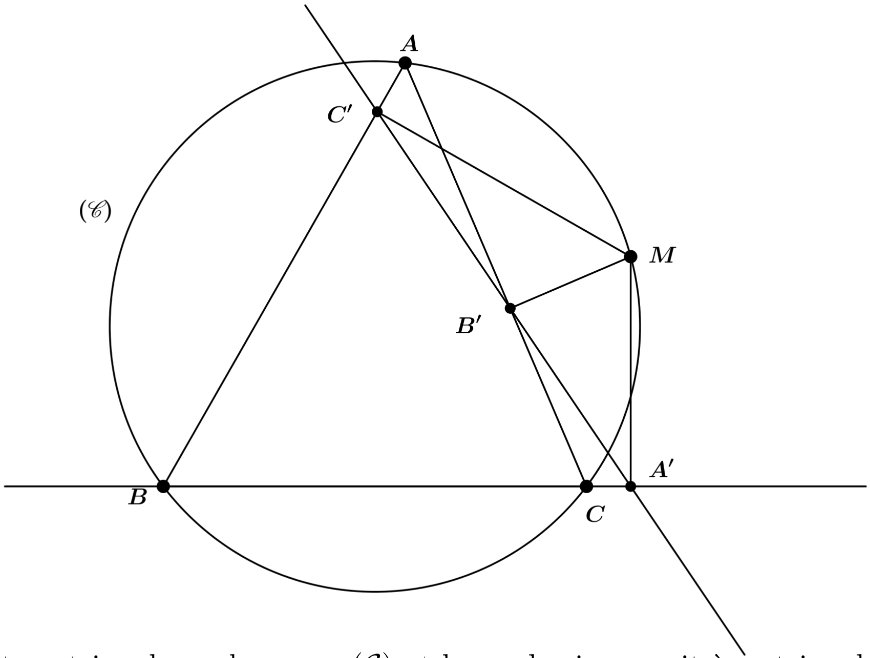
1. Faisons la figure



2. Établissons que : $(\overrightarrow{A'B}\,; \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[2\pi]$.
   Comme A' est l'image de H par rapport à l'axe (BC) et que la réflexion transforme un angle orienté en son opposé, on a :
   $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})[2\pi] \Longrightarrow (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[2\pi]$.
3. Montrons que les points A, B, C et A' sont cocycliques.
   Les points A, B, C et A' sont cocycliques $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}\,; \overrightarrow{A'C})[2\pi]$
   c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{HC}\,; \overrightarrow{HB})[2\pi]$
   Or $(\overrightarrow{HC}\,; \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{HC}\,; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{AC}\,; \overrightarrow{HB})[2\pi]$ comme $\begin{cases}(HC) \perp (AB)\\(HB) \perp (AC)\end{cases}$
   $(\overline{HC; HB}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{AB, AC}) + \frac{\pi}{2}[\pi] \Longrightarrow (\overline{HC; HB}) = \pi + (\overline{AB; AC})[\pi]$
   $\Longrightarrow (\overline{HC; HB}) = (\overline{AB; AC})[\pi]$ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})[2\pi]$
   D'où A, B, C et A' sont cocycliques.

20.2.8 Droite de Simson

Soit ABC un triangle quelconque, non aplati, $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du cercle $(\mathscr{C})$ distincts de A, B et C. Les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB), (BC) et (AC) sont alignés. La droite passant par ces points est appelée droite de Simson du triangle ABC relative au point M.



Exercice

ABC est un triangle quelconque, $(\mathcal{C})$est le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du plan distinct de A, Bet C. Soit E, F et G les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) ; (AC) et (BC).

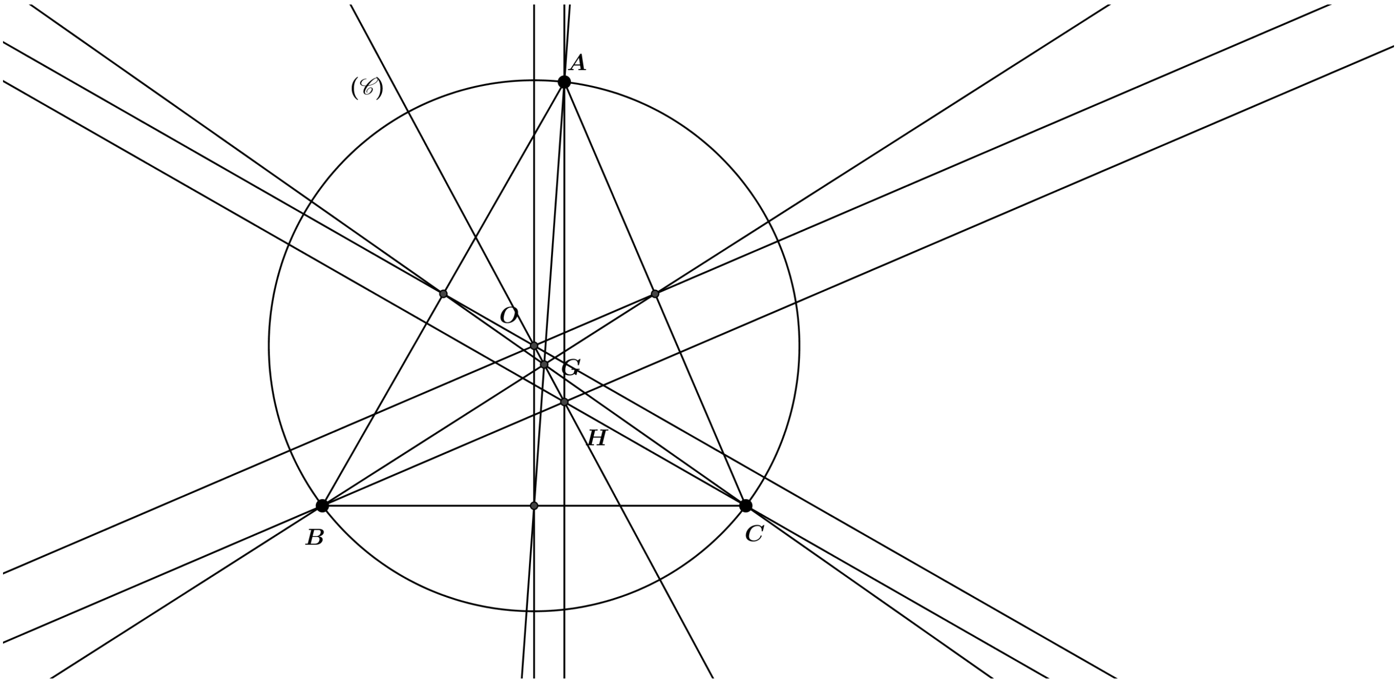
1. Faire une figure.
2. Démontrer que les points E, F et G sont alignés si et seulement si M appartient à $(\mathcal{C})$.
3. Comment appelle-t-on la droite passant par E, F et G ?

20.2.9 Droite de Steiner

On appelle droite de Steiner du point M, l'image de la droite de Simson du même point M par l'homothétie de centre M et de rapport 2.
On a : $h(A') = A''$; $h(B') = B''$; $h(C') = C''$.
D'où la droite de Steiner est la droite passant par les points A'', B'' et C''.

Droite d'Euler

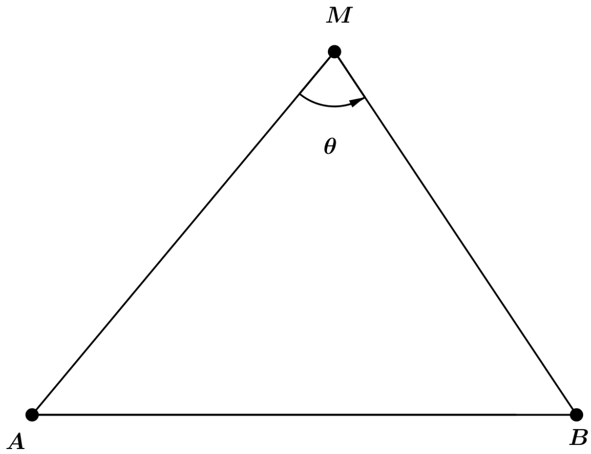
Soit ABC un triangle quelconque, $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle ABC et G l'isobarycentre des points A, B et C.
La droite passant par les points H, G et O est appelé droite d'Eleur.



20.3 Arc capable

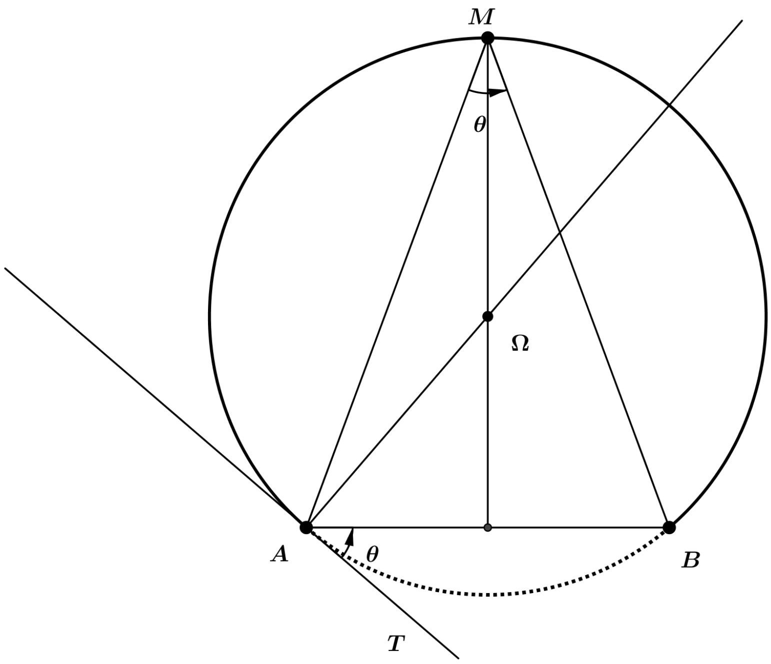
20.3.1 Définition

Soit $[AB]$ un segment de droite et M un point n'appartenant pas à $[AB]$.
Si l'angle $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$, alors on dit que le segment $[AB]$ est vu du point M sous l'angle θ.



On appelle l'arc capable du segment $[AB]$ relatif à l'angle θ, l'ensemble des points M du plan d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous l'angle θ.

20.3.2 Construction de l'arc capable



20.3.3 Algorithme

- ▷ Tracer le segment $[AB]$;
- ▷ Tracer AT telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \theta[2\pi]$;
- ▷ Tracer la perpendiculaire en A à la droite (AT) ;
- ▷ Tracer la médiatrice de $[AB]$.
- ▷ Placer le centre Ω ;
- ▷ Tracer l'arc capable.

Exercice

Soit $[AB]$ un segment tel que $AB = 6$. Construire les arcs capables suivants :

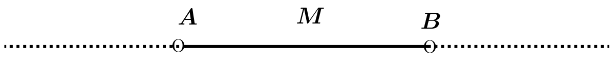
1. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
2. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

20.3.4 Ensemble des points M du plan tels que $(MA, MB) \equiv \theta[2\pi]$

Soit A et B deux points distincts du plan orienté, θ un réel donné.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]$.

▷ Si $\theta = 0[2\pi]$ alors (Γ) est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

▷ Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors (Γ) est le segment $[AB]$ privée de A et B.



▷ Si $\theta \neq 0[2\pi]$ et $\theta = \pi[2\pi]$ alors (Γ) est l'arc capable relatif au segment $[AB]$ privé des points A et B et l'angle de mesure θ.

20.4 Cercle capable

20.4.1 Ensemble des points M du plan tels que $(MA, MB) \equiv \theta[\pi]$

Soit A et B deux points distincts du plan orienté, θ un réel donné.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$.

▷ Si $\theta = 0[\pi]$ alors (Γ) est la droite (AB) privée des points A et B.

▷ Si $\theta \neq 0[\pi]$ alors (Γ) est le cercle capable relatif au segment $[AB]$ privée de A et B.

TRIGONOMÉTRIE

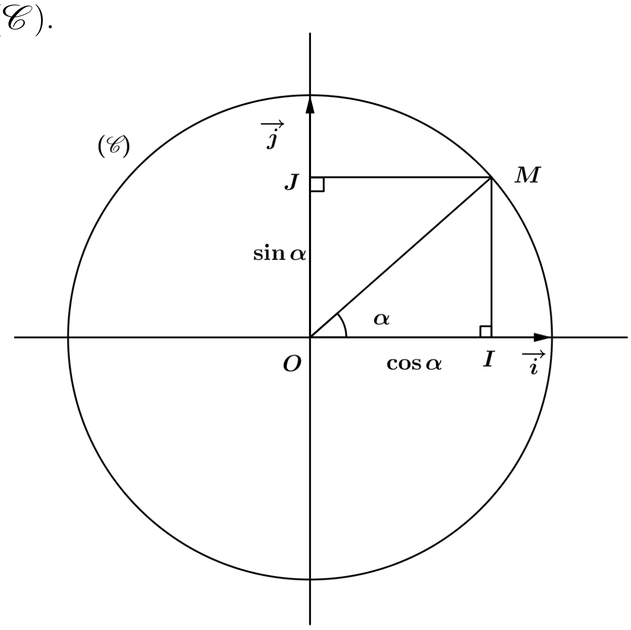
21.1 Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct ou sens trigonométrique de centre O origine du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

21.2 Lignes trigonométrique d'un angle orienté

21.2.1 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soit $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ un angle orienté de mesure α radian et M l'image de α sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$.



Posons $\alpha = \left(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OM}\right)$ et $M(x_M; y_M)$.
Considère le triangle OMI rectangle en I.
$\cos\alpha = \dfrac{OI}{OM}$ et $\sin\alpha = \dfrac{IM}{OM}$.
$M \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow OM = 1$, or $IM = OJ$; ainsi $\cos\alpha = OI = x_M$ et $\sin\alpha = OJ = y_M$.
D'où $M(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

Définition

▷ Le cosinus de l'angle orienté α est l'abscisse du point M.
▷ Le sinus de l'angle orienté α est l'ordonnée du point M.

21.2.2 Tangente et cotangente d'un angle orienté

Définition

▷ La tangente d'un angle orienté α avec $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est le réel noté $\tan\alpha$ défini par : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

▷ La cotangente d'un angle orienté α noté $\cot\alpha$ est l'inverse de la tangente de l'angle orienté α avec $\alpha \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. On a : $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

21.3 Lignes trigonométriques remarquables

21.3.1 Lignes trigonométriques des angles remarquables

Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables à retenir.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?
$\cot\alpha$	?	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

21.3.2 Lignes trigonométriques des angles angles associés

Propriété

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

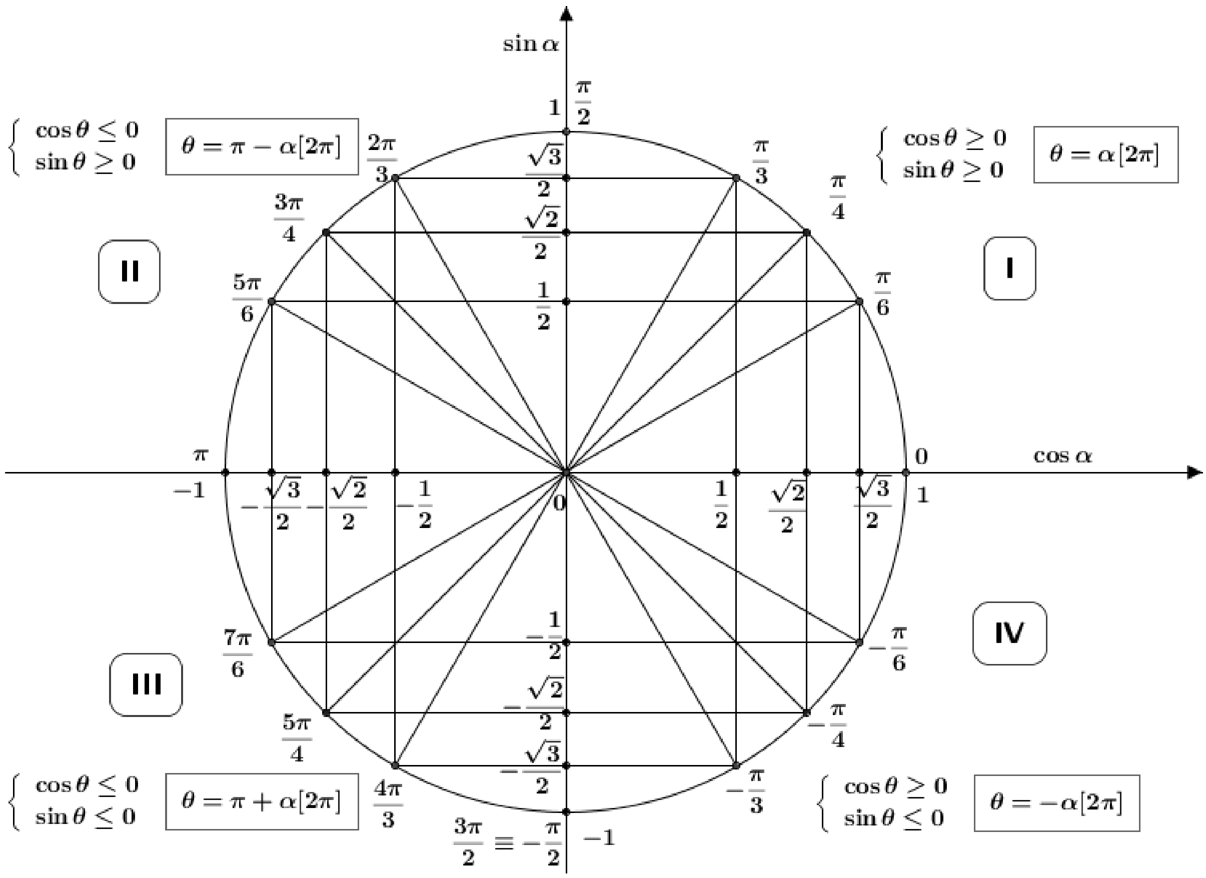
21.3.3 Lignes trigonométriques des angles remarquables et associés

Propriété

Pour tout nombre réel α, on a :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	?	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	?	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	?

21.3.4 Sinus et cosinus des angles associés et remarquables sur le cercle trigonométrique



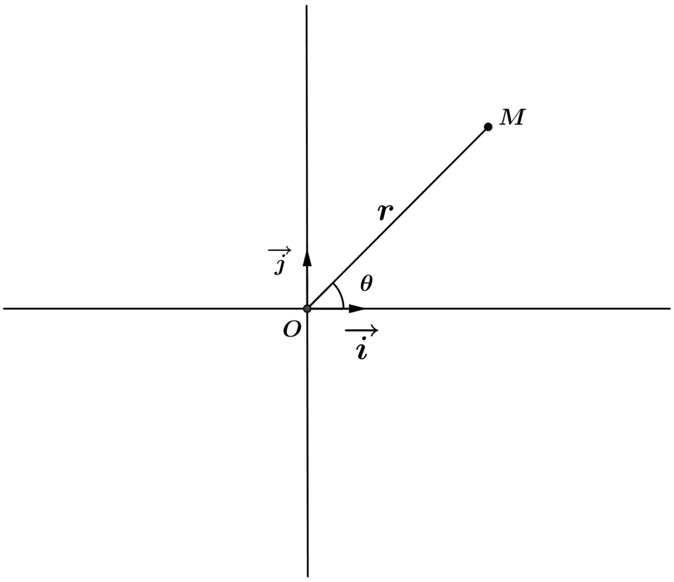
Exercice

Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{29\pi}{4}\right)$.

21.4 Repérage polaire

21.4.1 Coordonnées polaires d'un point

Soit $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé direct. Si M est un point distinct du point O alors M peut-être repéré par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}\right)$ et la longueur $r = OM$.
Réciproquement, la donnée d'un couple $(r;\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ détermine un seul point M tel que $\theta = \left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}\right)$ et $r = OM$.



Définition

Pour tout point M distinct O, un couple $(r;\theta)$ tel que : $\theta = \left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ et $r = OM$ est appelé couple de coordonnées polaire de M dans le repère polaire $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$. On note $M\,(r;\theta)$.

Exemples

▷ $OA = \sqrt{2}$ et $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; donc les coordonnées polaires de A sont $\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$.
▷ $OB = 2$ et $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$; donc les coordonnées polaires de B sont $\left(2;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Remarque

Si M est un point du cercle trigonométrique tel que : $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$, alors les coordonnées polaires de M sont $(1;\alpha)$.

21.4.2 Coordonnées cartésiennes ou rectangulaire

Soit $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct. Un point M distinct de O a pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ où x et y sont des nombres réels.

21.4.3 Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Soit $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct.

Propriété

Si M est point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ dans le repère $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ alors : $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$.

Exercice 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$. On donne les points $A\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $B\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $C\left(1;-\dfrac{\pi}{2}\right)$ en coordonnées polaires.

1. Représenter ces points dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces points.

Exercice 2

Soit N et P deux points du plan tels que $N\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.
Donner les coordonnées polaires des points N et P.

21.5 Formules trigonométriques

21.5.1 Formules d'addition

Pour tout réels a et b ; on a :

▷ $\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$ (1) et $\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$ (2).

▷ $\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a}$ (3) et $\boxed{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a}$ (4).

▷ $\boxed{\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$ (5) et $\boxed{\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$ (6).

21.5.2 Formules de duplication

En remplaçant b par a dans (1) ; (3) et (5) ; on a :

▷ $\boxed{\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a}$ (7) et $\boxed{\sin(2a)=2\sin a\cos a}$ (8).

▷ $\boxed{\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$ (9).

21.5.3 Formules de linéarisation

D'après (7) et la relation fondamentale, on a :

▷ $\boxed{\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}}$ (10) et $\boxed{\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}}$ (11)

D'après (10) et (11), on a :

▷ $\boxed{\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}$ (12).

21.5.4 Formules de passage de somme en produit

D'après (1)+(2), on a :

▷ $\boxed{\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]}$ (13).

D'après (2)-(1), on a :

▷ $\boxed{\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]}$ (14).

En posant $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{p+q}{2} \\ b=\frac{p-q}{2} \end{cases}$

(13) et (14) deviennent :

▷ $\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$ (15)

▷ $\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$ (16)

D'après (3)+(4), on a :

▷ $\boxed{\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]}$ (17).

D'après (3)-(4), on a :

▷ $\boxed{\sin b \cos a = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]}$ (18).

En posant $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{p+q}{2} \\ b=\frac{p-q}{2} \end{cases}$

(17) et (18) deviennent :

▷ $\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$ (19).

▷ $\boxed{\sin p - \sin q = -2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$ (20).

21.5.5 Expressions de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ en fonction $\tan\frac{\alpha}{2}$

Pour tout réel α tel que $\tan\frac{\alpha}{2}$ soit définie, en posant $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ on a :

▷ $\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ (21) ; $\boxed{\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}}$ (22) et $\boxed{\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}}$ (23).

21.6 Équations trigonométriques

21.6.1 Définition

Une équation dans $\mathbb{R}$, dans laquelle l'inconnue intervient par l'une au moins de ses fonctions circulaires est dite équation trigonométrique.

21.6.2 Équations de types $\cos x = a$; $\sin x = a$ et $\tan x = a$

a) **Équation de type :** $\cos x = a$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.
▷ si $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $-1 \leq \cos x \leq 1$.
▷ si $a \in [-1;1]$, cette équation admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
On cherche un nombre réel α tel que $a=\cos\alpha$.
$\cos x = a \Longleftrightarrow cosx = \cos\alpha \Longrightarrow x=\alpha+2k\pi$ ou $x=-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = -2020$; $\cos x = 2021$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) **Équation de type :** $\sin x = a$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.
▷ si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $-1 \leq \sin x \leq 1$.
▷ si $a \in [-1; 1]$, cette équation admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
On cherche un nombre réel α tel que $a = \sin\alpha$.
$\sin x = a \Longleftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Longrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sin x = -5$; $\sin x = 2019$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

c) **Équation de type :** $\tan x = a$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.
Posons $a = \tan\alpha$ car la fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\tan x = a \Longleftrightarrow tanx = \tan\alpha \Longrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = 1$.

Remarques

▷ $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
▷ $\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
▷ $\tan x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
▷ $\cot x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $2x^2 - (1+\sqrt{3})x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $2x^2 - (1+\sqrt{2})x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
2. En déduire la solution des équations suivantes :
   $2\cos^2 x - (1+\sqrt{3})\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $2\sin^2 x - (1+\sqrt{2})\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

21.6.3 Équations fondamentales

Soit u et v les fonctions numériques à variable réelle x ; on a :

▷ $\boxed{\cos u(x) = \cos v(x) \Longleftrightarrow u(x) = v(x) + 2k\pi \text{ ou } u(x) = -v(x) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

▷ $\boxed{\sin u(x) = \sin v(x) \Longleftrightarrow u(x) = v(x) + 2k\pi \text{ ou } u(x) = \pi - v(x) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

▷ $\boxed{\tan u(x) = \tan v(x) \Longleftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

▷ $\boxed{\cot u(x) = \cot v(x) \Longleftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$; $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; $\tan 3x = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$; $\cot 3x = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

21.6.4 Équations se ramenant aux précédentes

Soit u et v les fonctions numériques à variable réelle x ; on a :

▷ $\boxed{\cos u(x) = \sin v(x) \Longleftrightarrow \cos u(x) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - v(x)\right]}$

▷ $\boxed{\cos u(x) = \sin v(x) \Longleftrightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{2} + u(x)\right] = \sin v(x)}$

▷ $\boxed{\tan u(x) = \cot v(x) \Longleftrightarrow tanu(x) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - v(x)\right]}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = \sin 2x$; $\tan 2x = \cot x$.

21.6.5 Équations du type $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $a\cos x + b\sin x + c = 0$ où x l'inconnue et a, b et c des nombres réels donnés.
▷ si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.
▷ si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :
$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right]$; or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel φ tel que : $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$
On en déduit que :
$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) \Longrightarrow a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.
or $a\cos x + b\sin x = -c \Longrightarrow \cos(x-\varphi) = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
▷ si $\left|-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$, il existe un réel θ tel que : $\cos\theta = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Cette équation devient $\cos(x-\varphi) = \cos\theta \Longleftrightarrow x = \theta + \varphi + 2k\pi$ ou $x = -\theta + \varphi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$.

21.6.6 Inéquations trigonométriques

Définition

Une inéquation dans $\mathbb{R}$, dans laquelle l'inconnue intervient par l'une au moins de ses fonctions circulaires est dite inéquation trigonométrique.

a) Résolution des inéquations trigonométriques par la méthode Algébrique

Exercice

Résoudre dans $[0;2\pi]$, les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$.
2. $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) \leq 0$.
3. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 \leq 0$.
4. $\cos^2 x - 3\cos x - 2 \geq 0$.
5. $\sin 3x + \cos x \geq 0$.

Solution

Résolvons dans $[0;2\pi]$, les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$.
   L'équation associée est : $\cos x = \dfrac{1}{2}$
   $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
   Comme $x \in [0;2\pi]$; on a : $0 \leq \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ ou $0 \leq -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$.
   ce qui nous donne $k=0$ ou $k=1$.
   Pour $k=0$; on a : $x = \dfrac{\pi}{3}$
   Pour $k=1$; on a : $x = \dfrac{5\pi}{3}$.
   Dressons le tableau de signes

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos x - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$

   D'où $S = \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$.
2. $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) \leq 0$.
   L'équation associée est : $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = 0$
   $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = 0 \Longrightarrow x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
   or $0 \leq x \leq 2\pi \Longleftrightarrow 0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \Longleftrightarrow \dfrac{1}{6} \leq k \leq \dfrac{13}{6}$.
   On a : $k \in \{0;1\}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Dressons le tableau de signes

x	0		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\cos(x-\frac{2\pi}{3})$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$

D'où $S=\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi}{6};2\pi\right]$.

3. Inéquation $2\cos^2 x-3\cos x-2\geq 0$; $x\in[0;2\pi]$
   L'équation associée est : $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$.
   En posant $X=\cos x$, on obtient une équation du second degré :
   $$2X^2-3X-2=0\Longleftrightarrow(2X+1)(X-2)=0$$
   Soit $(2\cos x+1)(\cos x-2)=0$ or $\cos x-2<0$ et $2\cos x+1=0\Longleftrightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}$.
   On a : $x=\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{4\pi}{3}$.

x	0		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$\cos x-2$		$-$		$-$		$-$	
$2\cos x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2\cos^2 x-3\cos x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$$

4. Inéquation $\sin 3x+\cos x\geq 0$; $x\in[-\pi;\pi]$
   L'équation associée est : $\sin 3x+\cos x=0$ or $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, l'équation devient : $\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$.
   Or $\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on alors :
   $2\sin\left(\frac{3x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right)=0\Longrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.
   $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Longrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ ou $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$
   On a : $x+\frac{\pi}{4}=k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}\Longrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$.
   Les valeurs de x dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$:
   ▷ pour $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; on a : $-\pi\leq-\frac{\pi}{4}+k\pi\leq\pi\Longrightarrow-\frac{3}{4}\leq k\leq\frac{5}{4}$, on a : $k\in\{0;1\}$
   soit $x=-\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$. ▷ Pour $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, on a : $-\pi\leq\frac{3\pi}{8}+\frac{4\pi}{2}\leq\pi\Longrightarrow-\frac{11}{4}\leq k\leq\frac{5}{4}$,
   on a $k\in\{-2;-1;0;1\}$.
   On trouve $x\in\left\{-\frac{5\pi}{8};-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8};\dfrac{7\pi}{8}\right\}$.
   Tableau de signes

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{8}$		$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$\sin(x+\frac{\pi}{4})$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos(2x-\frac{\pi}{4})$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left[-\frac{5\pi}{8};-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right].$$

5. Inéquation $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-1\leq 1$.

   $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\theta)$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{cases}$

   Ici, $a=1$ et $b=-\sqrt{3}$, alors $r=2$ et $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

   On a : $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$.

   L'équation associée est : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

   $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Longrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\Longrightarrow$

   $x=k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

   On a : $x\in\{0;\pi;2\pi\}$ ou $x\in\left\{\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{23\pi}{12}\right\}$

   Tableau de signe

x	0		$\frac{11\pi}{12}$		π		$\frac{23\pi}{12}$		2π
$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-1$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

$S=\left[0;\dfrac{11\pi}{12}\right]\cup\left[\pi;\dfrac{23\pi}{12}\right].$

b) Résolution des inéquations trigonométriques par la méthode graphique

Exercice

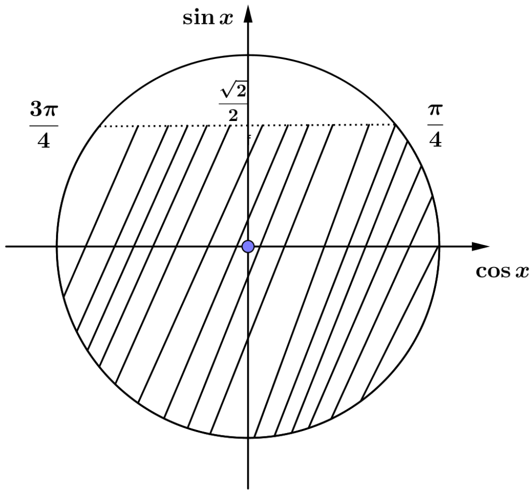
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x\in[0;2\pi]$
2. $-\dfrac{1}{2}\leq\cos x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x\in[0;2\pi]$
3. $-\dfrac{1}{2}\leq\cos x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x\in[-\pi;\pi]$
4. $-1\leq\tan x\leq 1$; $x\in[-\pi;\pi]$

Solution

Résolvons dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :

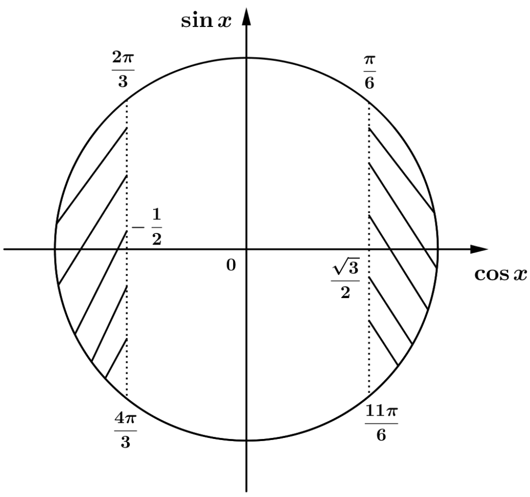
1. $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ x \in [0;2\pi] \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

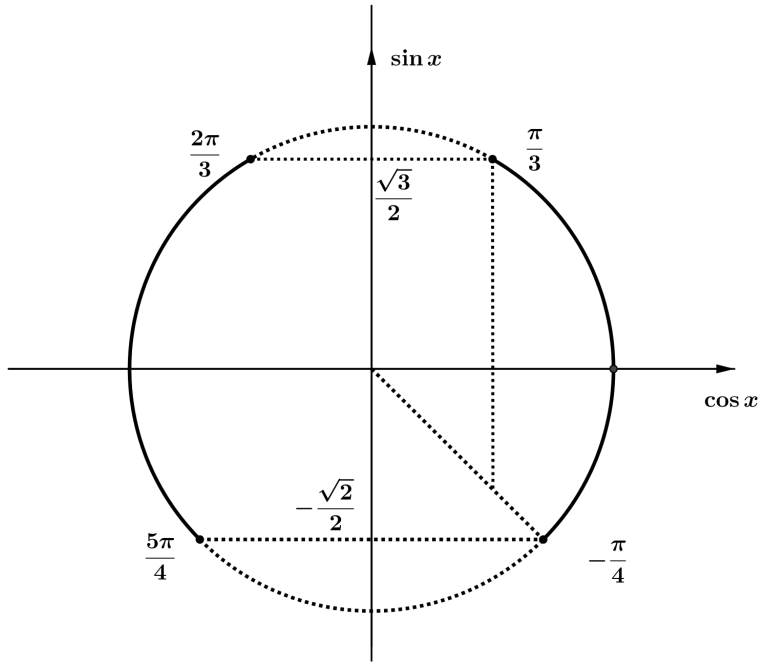
$$S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right] \cap [0;2\pi] \Longleftrightarrow S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$$

2. Inéquation $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$$S = \left(\left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right]\right) \cap [0;2\pi] \Longleftrightarrow S = \left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right]$$

3. $-\dfrac{2}{2} \leq \sin 2x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ x \in [-\pi;\pi]$



$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin 2x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [-\pi;\pi]$ alors

$2x \in \left(\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right]\right) \cap [-\pi;\pi]$

$x \in \left(\left[-\dfrac{\pi}{8}+k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\right]\right) \cap [-\pi;\pi]$.

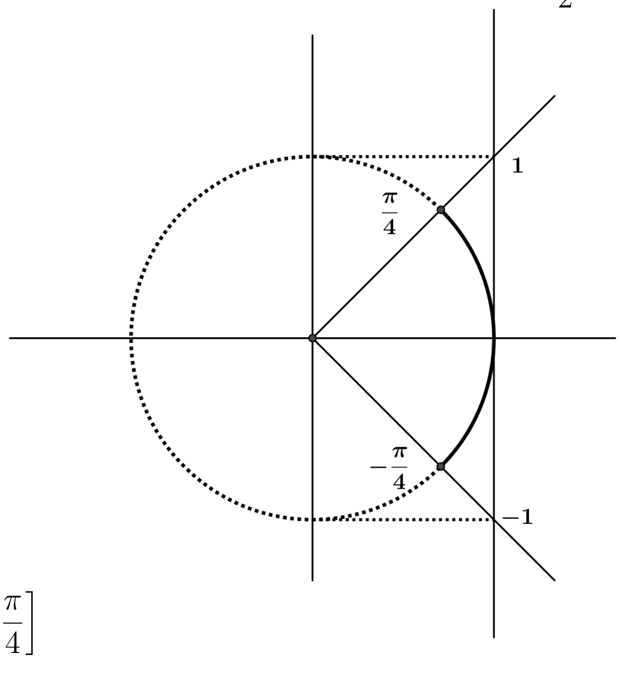
Si $k=0$; $x \in \left(\left[-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{8}\right]\right) \cap [-\pi;\pi] = \left[-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{8}\right]$.

Si $k=1$; $x \in \left(\left[\dfrac{7\pi}{8};\dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{13\pi}{8}\right]\right) \cap [-\pi;\pi] = \left[\dfrac{7\pi}{8};\pi\right]$

Si $k=-1$; $x \in \left(\left[-\dfrac{9\pi}{8};-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{3\pi}{8}\right]\right) \cap [-\pi;\pi] = \left[-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{3\pi}{8}\right]$

$S = \left[-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{\pi}{8}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8};\pi\right]$.

4. $-1 \leq \tan x \leq 1$; $x \in [-\pi;\pi]$ L'inéquation a un sens pour $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2}$.



$S = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

Chapitre

TRANSFORMATIONS PLANES

22.1 Généralités

22.1.1 Définition

Une transformation f du plan est une application ponctuelle bijective du plan dans lui-même telle que pour tout point M' du plan, il existe un unique point M tel que $f(M) = M'$.
On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto f(M) = M' \end{aligned}$$

On dit que M' est l'image de M par la transformation f, ou aussi que M est l'antécédent de M' par f.

Exemples de transformations planes

L'identité, la translation, la symétrie, la rotation, l'homothétie.

Propriétés

Toute transformation du plane conserve :
▷ l'alignement des points ; le parallélisme des droites ; l'orthogonalité des droites.
▷ le milieu d'un segment.
▷ le barycentre.

22.1.2 Point invariant ou point fixe

▷ Un point M est dit fixe (ou invariant) par la transformation f si et seulement si $f(M) = M$.
On note l'ensemble des points invariants par f par :
$Invf = \{M \in \mathscr{P} / f(M) = M\}$.
▷ Un ensemble E est dit globalement invariant par f lorsque $f(E)$ est contenu dans E.
On note $f(E) \subset E$.

22.1.3 Transformation réciproque

Définition

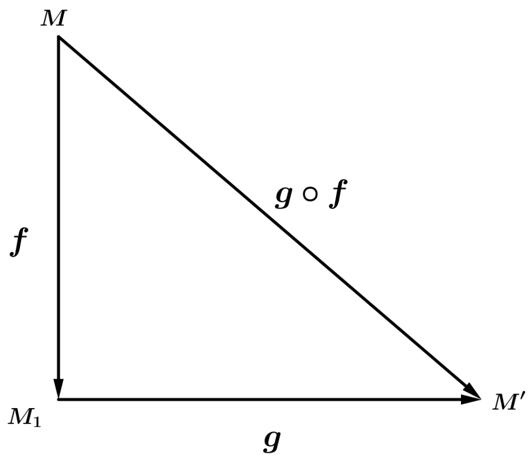
Soit f une transformation plane. La transformation réciproque de f notée f^{-1}
est l'application qui à tout point M' du plan , associe son unique antécédent M par f^{-1}.

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M' &\longmapsto f^{-1}(M') = M \end{aligned}$$

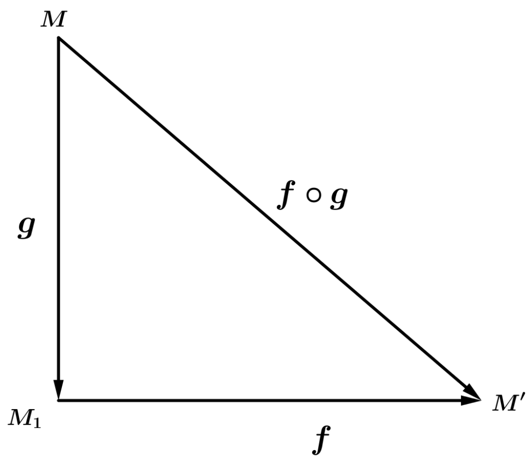
On a : $f(M) = M' \Longleftrightarrow f^{-1}(M') = M$

22.1.4 Composée de deux transformations

Si f et g sont des transformations planes, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont aussi des transformations planes.
Soit $M \overset{f}{\longmapsto} M_1 \overset{g}{\longmapsto} M'$



De même, on définit $f \circ g$
$M \overset{g}{\longmapsto} M_1 \overset{f}{\longmapsto} M'$



On a : $g \circ f(M) = g\,[f(M)]$ et $f \circ g(M) = f\,[g(M)]$

Exercice 1

Soit f une transformation plane et A un point tel que $f(A) = A'$

1. Déterminer $f^{-1}(A')$
2. Déterminer $f^{-1} \circ f(A)$ puis $f \circ f^{-1}(A')$
3. Que peut-on en déduire ?

Solution 1

1. $f(A) = A' \Longrightarrow f^{-1}(A') = A$.
2. Déterminons $f^{-1} \circ f(A)$ puis $f \circ f^{-1}(A')$.
   $f^{-1} \circ f(A) = f^{-1}[f(A)] = f^{-1}(A') = A$
   $\Longrightarrow \boxed{f^{-1} \circ f(A) = A}$

   $f \circ f^{-1}(A') = f\left[f^{-1}(A')\right] = f(A) = A'$
   $\Longrightarrow \boxed{f \circ f^{-1}(A') = A'}$
3. Déduction.
   D'après ce qui précède, on a : $\begin{cases} f^{-1} \circ f(A) = A \\ f \circ f^{-1}(A') = A' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f^{-1} \circ f = Id_p \\ f \circ f^{-1} = Id_p \end{cases}$
   Ainsi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_p$

Où Id_p est la transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même et s'appelle la transformation identique ou identité du plan. $Id(M) = M$.

22.1.5 Transformation involutive

Une transformation f est dite involutive ou une involution si et seulement si :
$f = f^{-1}$ ou $f \circ f = Id$

22.1.6 Application affine

a) Définition

Une application $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ est dite affine lorsqu'elle conserve le barycentre de tout système de points pondérés. c'est-à-dire : soit $G = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ avec $a+b+c \neq 0$

si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \\ f(G) = G' \end{cases}$ alors $G' = bar\{(A',a);(B',b);(C',c)\}$

b) Expression analytique d'une application affine

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère, on considère les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$
et l'application affine f telle que $f(M) = M'$. Alors l'expression analytique de f est de la forme :

$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Remarques

▷ Connaissant l'expression analytique de l'application affine f ; f est dite bijective
si et seulement si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

▷ $f(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les applications f et g définies par :
$f : \begin{cases} x' = -x - 3y + 5 \\ y' = -2x - 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 2x + 3y + 5 \\ y' = x + 4y + 5 \end{cases}$
Déterminer l'ensemble des points invariants des applications f et g.

Solution 2

Déterminons l'ensemble des points invariants des applications f et g.
▷ Pour f
M est invariant par $f \Longleftrightarrow f(M) = M$
$\Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
On a : $\begin{cases} x = -x - 3y + 5 \\ y = -2x - 2y + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$
Le système est incompatible. Donc l'ensemble des points invariants par f est vide.

▷ Pour g
M est invariant par $g \Longleftrightarrow g(M) = M$
$\Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
On a : $\begin{cases} x = 2x + 3y + 5 \\ y = x + 4y + 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ Le système se réduit à une seule équation : $x + 3y + 5 = 0$.
L'ensemble des points invariants par g est la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x + 3y + 5 = 0$.

Exercice 3

Soit f et g deux applications définies par :
$f : \begin{cases} x' = x + y + 4 \\ y' = -2x + 3y + 7 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 \\ y' = 2x - y + 5 \end{cases}$

1. Montrer que f et g sont des transformations planes
2. (a) Déterminer les coordonnées du point B , image du point $A(2;3)$ par f.
   (b) Soit $D(6;8)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que $f(C) = D$
3. Déterminer les ensembles des points invariants par f et g.
4. Déterminer l'expression analytique de la réciproque f^{-1}.
5. Déterminer les expressions analytiques des applications : $g \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f^{-1}$; $f \circ g \circ f$
6. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 3x - 1$.
   Déterminer la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par f.

Solution 3

1. Montrons que f et g sont des transformations planes.
   ▷ Pour f
   $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$
   $\Delta \neq 0$, alors f est bijective. Donc f est une transformation plane.
   ▷ Pour g
   $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$
   $\Delta \neq 0$, alors g est bijective. Donc g est une transformation plane.
2. (a) Déterminons les coordonnées du point B , image du point $A(2;3)$ par f.
   $$f(A) = B \Longrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + y_A + 4 \\ y_B = -2x_A + 3y_A + 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = 2+3+4 \\ y_B = -2(2)+3(3)+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = 9 \\ y_B = 12 \end{cases}$$
   $\boxed{B(9;12)}$
   (b) Déterminons les coordonnées du point C tel que $f(C) = D$.
   $$f(C) = D \Longrightarrow \begin{cases} x_D = x_C + y_C + 4 \\ y_D = -2x_C + 3y_C + 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_C + y_C + 4 = 6 \\ -2x_C + 3y_C + 7 = 8 \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} x_C + y_C = 2 \\ -2x_C + 3y_C = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \Longrightarrow C(1;1)$$
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par f et g.
   On a : $f(M) = M \Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x+y+4 \\ y = -2x+3y+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$
   $\boxed{I\left(-\frac{1}{2};-4\right) \text{ est l'unique point invariant par } f}$
   $g(M) = M \Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3x-5y+2 \\ y = 2x-y+5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x-5y+2 = 0 \\ 2x-2y+5 = 0 \end{cases}$
   $\boxed{Inv(g) = \emptyset}$
4. Déterminons l'expression analytique de la réciproque f^{-1}.
   Exprimons x et y en fonction de x' et y'.
   $$\begin{cases} x' = x+y+4 \\ y' = -2x+3y+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y = x'-4 \\ -2x+3y = y'-7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}$$
   L'expression analytique de f^{-1} est :
   $$\boxed{f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}}$$
5. Expression analytique de $g \circ f$.
   $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   $$f(M) = M_1 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x+y+4 \\ y_1 = -2x+3y+7 \end{cases}$$
   $$g(M_1) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3x_1 - 5y_1 + 2 \\ y' = 2x_1 - y_1 + 5 \end{cases}$$

$g \circ f(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3(x+y+4) - 5(-2x+3y+7) + 2 \\ y' = 2(x+y+4) - (-2x+3y+7) + 5 \end{cases}$

On a : $\boxed{g \circ f : \begin{cases} x' = 13x - 12y - 21 \\ y' = 4x - y + 6 \end{cases}}$

Expression analytique de $f \circ g$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{g} M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$g(M) = M_1 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x - 5y + 2 \\ y_1 = 2x - y + 5 \end{cases}$

$f(M_1) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = x_1 + y_1 + 4 \\ y_1 = -2x_1 + 3y_1 + 7 \end{cases}$

$f \circ g(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 + 2x - y + 5 + 4 \\ y_1 = -2(3x - 5y + 2) + 3(2x - y + 5) + 7 \end{cases}$

On a : $\boxed{f \circ g : \begin{cases} x' = 5x - 6y - 11 \\ y' = 7y + 18 \end{cases}}$

6. $(\mathscr{D}) : y = 3x - 1$.
   Déterminons la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par f.
   L'expression analytique de f^{-1} est :
   $f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}$
   Alors :
   $(\mathscr{D}') : \dfrac{2}{5}x' + \dfrac{1}{5}y' - 3 = 3\left(\dfrac{3}{5}x' - \dfrac{1}{5}y' - 1\right) - 1$
   $(\mathscr{D}') : 2x' + y' - 15 = 9x' - 3y' - 3 - 1$
   $(\mathscr{D}') : 7x' - 4y' - 5 = 0$
   Par changement d'inconnue on obtient :
   $\boxed{(\mathscr{D}') : 7x - 4y - 5 = 0}$

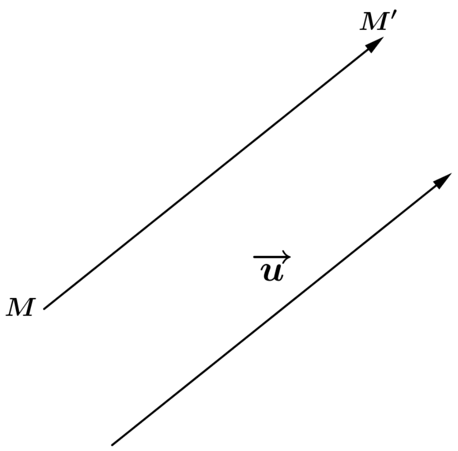
22.2 Études de quelques transformations du plan

22.2.1 Translation

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation notée $t_{\overrightarrow{u}}$, qui à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \end{aligned}$$



Remarque

$t_{\overrightarrow{0}} = Id$

b) Propriétés

▷ si $\begin{cases} t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \\ t_{\overrightarrow{u}}(N) = N' \end{cases}$ alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

▷ Par une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ aucun point du plan n'est invariant. L'ensemble des points invariants par $t_{\overrightarrow{u}}$ est vide.

▷ La translation conserve les angles orientés, le contact, le barycentre, le parallélisme, l'orthogonalité et la nature des figures géométriques.

c) Réciproque d'une translation

La réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
$(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$
En effet :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow t_{-\overrightarrow{u}}(M') = M. \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad (t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$$

d) Expression analytique d'une translation

Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x'-x = a \\ y'-y = b \end{cases}$

Ainsi : $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Exemple

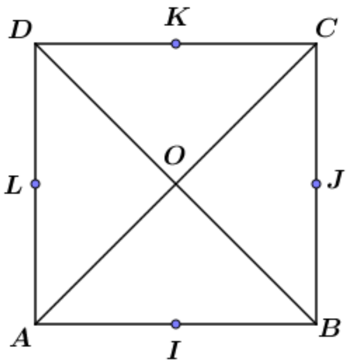
Déterminer l'expression de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2; -3)$.

Exercice

$ABCD$ est un carré de centre O, de sens direct. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ et $T' = t_{\overrightarrow{OA}}$

1. Déterminer les images des points A, I, O, D, K et L par T.
2. Déterminer les images des points O, C, J et K par T'.

Solution

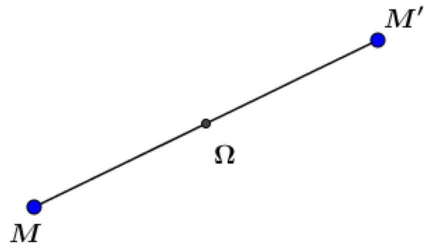


1. Déterminons les images des points A, I, O, D, K et L par T.
   $T(A) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(A) = I \Longrightarrow \boxed{T(A) = I}$
   $T(I) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(I) = B \Longrightarrow \boxed{T(I) = B}$
   $T(O) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(O) = J \Longrightarrow \boxed{T(O) = J}$
   $T(D) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(D) = K \Longrightarrow \boxed{T(D) = K}$
   $T(L) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(L) = O \Longrightarrow \boxed{T(L) = O}$
2. Déterminons les images des points O, C, J et K par T'.
   $T'(O) = t_{\overrightarrow{OA}}(O) = A \Longrightarrow \boxed{T'(O) = A}$
   $T'(C) = t_{\overrightarrow{OA}}(C) = O \Longrightarrow \boxed{T'(C) = O}$
   $T'(J) = t_{\overrightarrow{OA}}(J) = I \Longrightarrow \boxed{T'(J) = I}$
   $T'(K) = t_{\overrightarrow{OA}}(K) = L \Longrightarrow \boxed{T'(K) = L}$

22.2.2 Symétrie centrale

a) Définition

Soit Ω un point fixe, M est un point variable.
On appelle symétrie de centre Ω la transformation f qui transforme M en M' tel que Ω est le milieu de $[MM']$. On note : $f = S_\Omega$



b) Expression analytique de la symétrie centrale

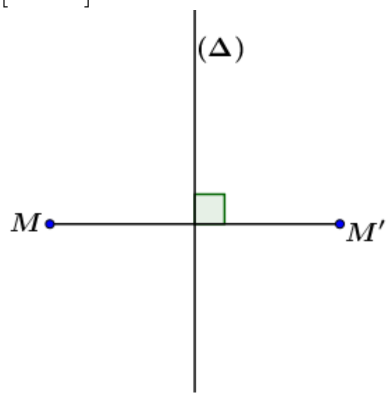
Soit $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ milieu du segment $[MM']$.

On a : $\begin{cases} a = \dfrac{x+x'}{2} \\ b = \dfrac{y+y'}{2} \end{cases} \implies S_\Omega : \begin{cases} x' = -x+2a \\ y' = -y+2b \end{cases}$

22.2.3 Réflexion ou symétrie orthogonale

22.2.4 a) Définition

(Δ) est une droite. On appelle réflexion d'axe (Δ), toute application du plan dans lui-même qui associe à tout point M du plan, le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[MM']$.



$S_{(\Delta)}(M) = M'$: on dit que M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

b) Propriétés

- ▷ Tout point de l'axe (Δ) est invariant par $S_{(\Delta)}$. (Δ) est donc l'ensemble des points invariants.
- ▷ $S_{(\Delta)}$ est une bijection. La réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta)}$, c'est-à-dire $(S_\Delta)^{-1} = S_{(\Delta)}$.
  On dit que $S_{(\Delta)}$ est involutive.
- ▷ Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.
- ▷ Toute symétrie orthogonale conserve le parallélisme , le contact, le barycentre, l'orthogonalité et la forme des figures.

c) Expression analytique d'une réflexion

Soit une droite $(\mathscr{D}) : ax+by+c=0$ et $\overrightarrow{u}(-b;a)$ un vecteur de $(\mathscr{D})$. $M'(x';y')$ le symétrique de $M(x;y)$ par $(\mathscr{D})$ la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

$$S_{(\mathscr{D})}(M) = M' \iff \begin{cases} \text{le milieu I de } [MM'] \in (\mathscr{D}) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{u} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I \text{ milieu de } \left[MM'\right] &\iff x_I = \frac{x+x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} \\ I \in (\mathscr{D}) &\iff a\left(\frac{x+x'}{2}\right) + b\left(\frac{y+y'}{2}\right) + c = 0 \\ &\Longrightarrow ax + ax' + by + by' + 2c = 0 \\ &\Longrightarrow ax' + by' = -ax - by - 2c \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -b(x'-x) + a(y'-y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -bx' + ay' = -bx + ay \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax' + by' = -ax - by - 2c \quad \textbf{(1)} \\ -bx' + ay' = -bx + ay \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} y - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2} \\ \\ y' = \dfrac{-2ab}{a^2 + b^2} x + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y - \dfrac{2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale $S_{(\mathscr{D})}$ d'axe la droite $(\mathscr{D}) : 2x + 3y - 4 = 0$.

Solution

$(\mathscr{D}) : 2x + 3y - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} x_I = \frac{x+x'}{2} &\quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} \\ I \in (\mathscr{D}) &\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) + 3\left(\frac{y+y'}{2}\right) - 4 = 0 \\ &\Longrightarrow 2x + 2x' + 3y + 3y' - 8 = 0 \\ &\Longrightarrow 2x' + 3y' = -2x - 3y + 8 \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -3(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -3x' + 2y' = -3x + 2y \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

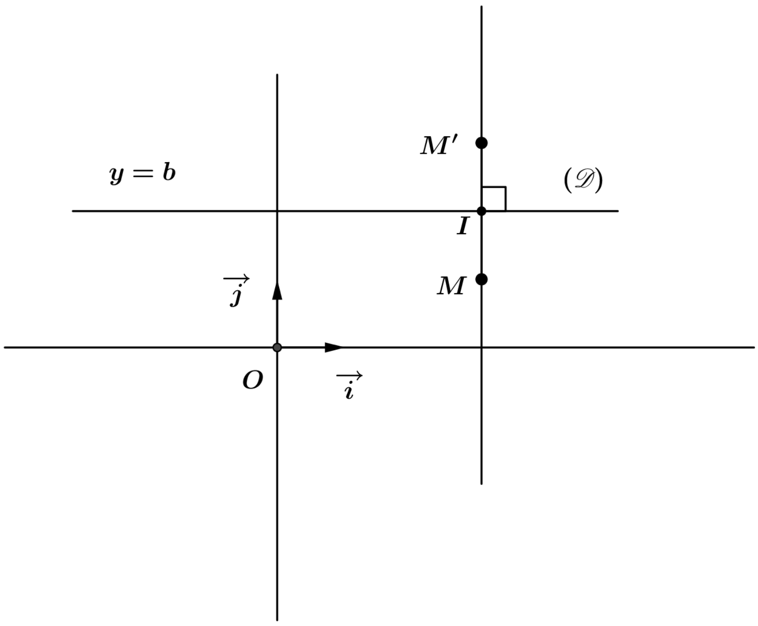
$$\begin{cases} 2x'+3y' = -2x-3y+8 & \textbf{(1)} \\ -3x'+2y' = -3x+2y & \textbf{(2)} \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\boxed{S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + \dfrac{16}{13} \\ \\ y' = -\dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y + \dfrac{24}{13} \end{cases}}$$

22.2.5 Expression analytique des symétries orthogonales particulières

a) l'axe est parallèle à l'axe des abscisses ($y = b$)



La droite $(\mathscr{D}) : y = b$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1;0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad -1(x'-x)+0(y'-y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad -x'+x = 0 \end{aligned}$$

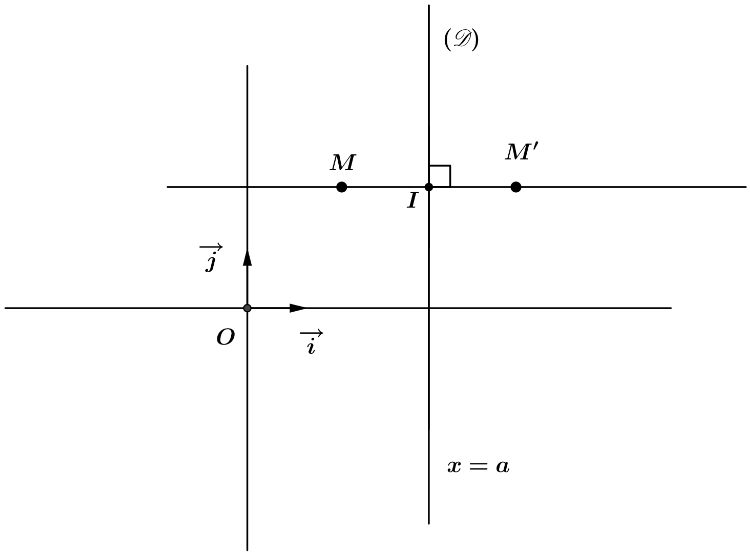
$$x_I = \frac{x+x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2}$$

$$I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \frac{y+y'}{2} = b$$

On a :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y+2b \end{cases}$$

b) l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées $(x = a)$



La droite $(\mathscr{D}) : x = a$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(0;1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 0(x'-x) + 1(y'-y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad y' - y = 0\end{aligned}$$

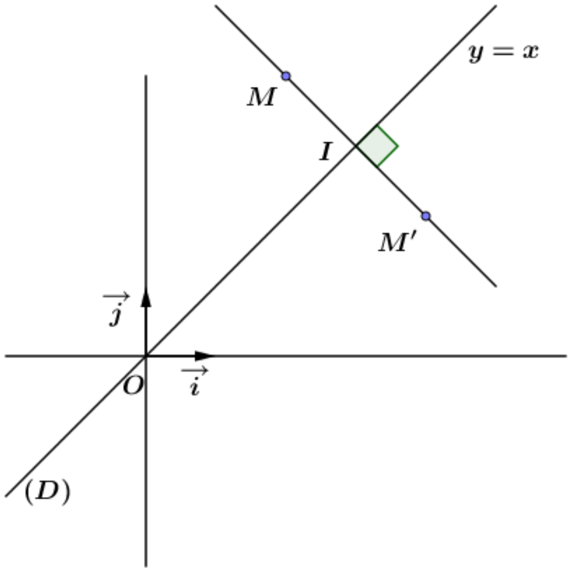
$$x_I = \frac{x+x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2}$$

$$I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \frac{x+x'}{2} = a$$

On a :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$

c) l'axe est la première bissectrice $(y = x)$



La droite $(D) : y = x$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;1)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1(x' - x) + 1(y' - y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x' + y' = x + y\end{aligned}$$

$$x_I = \frac{x + x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y + y'}{2}$$

$$I \in (D) \Leftrightarrow \frac{x + x'}{2} - \frac{y + y'}{2} = 0$$

$$x' - y' = -x + y$$

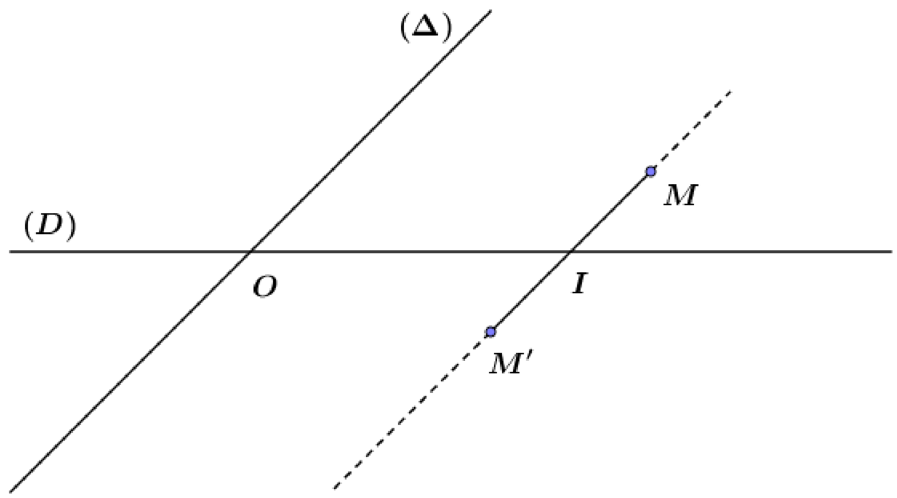
On a :

$$\begin{cases} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $S_{(D)} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

22.2.6 Symétrie par rapport à $(\mathscr{D})$ et parallèlement à une droite (Δ)

Soit $(\mathscr{D})$ et (Δ) deux droites sécantes en O, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (Δ).



$S_{(\mathscr{D})}:\begin{cases}\overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{u}\\ I \quad \text{milieu de} \quad \overrightarrow{MM'}\\ I\in(\mathscr{D})\end{cases}$ On dit aussi symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction (Δ).

Remarque

Si $(\mathscr{D})$ et (Δ) sont perpendiculaires, on obtient une symétrie orthogonale d'axe (D).

Exercice

On donne $(\mathscr{D}) : y=2x+4$ et $(\Delta) : x+3y-5=0$.
Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction (Δ).

Solution

Soit $M(x;y)\in\mathscr{P}$; $M'(x;y)\in\mathscr{P}$, I milieu de $[MM']$ et $I\in(\mathscr{D})$.
$\overrightarrow{u}(-3;1)$ un vecteur directeur de (Δ).

$$\overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x'=x-3\lambda\\ y'=y+\lambda\end{cases}\quad\textbf{(1)}$$

$$x_I=\frac{x+x'}{2}\quad\text{et}\quad y_I=\frac{y+y'}{2}$$

$$\begin{aligned}I\in(\mathscr{D})\Leftrightarrow\frac{y'+y}{2}&=2\left(\frac{x+x'}{2}\right)\\ y'+y&=2x'+2x+8\end{aligned}$$

$$y'-2x'=2x-y+8\quad\textbf{(2)}$$

(1) dans **(2)** donne :

$$\begin{aligned} y+\lambda-2(x-3\lambda) &= 2x-y+8 \\ 7\lambda &= 4x-2y+8 \\ \lambda &= \frac{1}{7}(4x-2y+8) \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

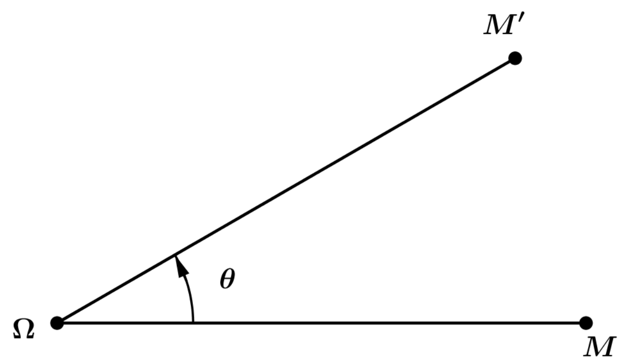
En remplaçant **(3)** dans **(1)**, on obtient :

$$\boxed{S : \begin{cases} x' = -\frac{5}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{24}{7} \\ \\ y' = \frac{4}{7}x + \frac{5}{7}y + \frac{8}{7} \end{cases}}$$

22.3 Rotation

a) Définition

Soit Ω un point et θ un nombre réel. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ , l'application , qui à tout point M distinct de Ω , associe le point M' telle que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\,[2\pi] \end{cases}$



b) Propriétés

p_1) Le centre de la rotation est l'unique point invariant par $R(\Omega,\theta)$

p_2) $R(\Omega,\theta)$ est une bijection. La réciproque de $R(\Omega,\theta)$ est $R(\Omega,-\theta)$. $[R(\Omega,\theta)]^{-1} = R(\Omega,-\theta)$

p_3) La rotation conserve les angles orientés, le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le contact et la nature des figures géométriques.

c) Rotations particulières

- ▷ Si $\theta = \pi\,[2\pi]$, il s'agit d'un **demi-tour** ou une symétrie centrale de centre Ω.
- ▷ Si $\theta = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, il s'agit d'un **quart de tour direct** de centre Ω
- ▷ Si $\theta = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, il s'agit d'un **quart de tour indirect** de centre Ω
- ▷ Si $\theta = 0\,[2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur nul ou l'identité du plan.

d) Détermination géométrique d'une rotation

Si A' et B' sont les images de deux points distincts de A et B par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$$\begin{cases} r(A) = A' \\ r(B) = B' \end{cases}$$

alors :

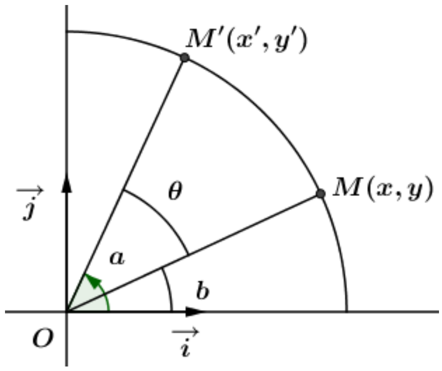
-Existence : r existe si $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \neq 0\,[2\pi]$

-Centre Ω : Ω est le point de concours des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$

e) Expression analytique

▷ **Rotation de centre O :**

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit la rotation $r(O,\theta)$ de centre O et d'angle θ, les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ du plan, a et b des mesures des angles de vecteurs.



On a : $\theta = (a-b)\,[2\pi] \Rightarrow a = (\theta+b)\,[2\pi]$

$$\begin{cases} x = OM\cos b \\ y = OM\sin b \end{cases} \quad \textbf{(1)} \quad \text{et} \begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = OM\cos(\theta+b) \\ y' = OM\sin(\theta+b) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = OM(\cos\theta\cos b - \sin\theta\sin b) \\ y' = OM(\sin\theta\cos b + \sin b\cos\theta) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = (OM\cos b)\cos\theta - (OM\sin b)\sin\theta \\ y' = (OM\cos b)\sin\theta + (OM\sin b)\cos\theta \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

(1) dans **(2)** donne :

$$r(O,\theta) : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

▷ **Rotation de centre Ω :**

Soit $r(\Omega,\theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ.
Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, M et M' ont pour coordonnées : $M(X,Y)$ et $M'(X',Y')$.

Ainsi on a : $\begin{cases} X' = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$ **(1)**

Changement de repère :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M} &= -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM} \\
X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} &= -x_\Omega\,\overrightarrow{i} - y_\Omega\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \\
X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} &= (x - x_\Omega)\,\overrightarrow{i} + (y - y_\Omega)\,\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Par identification on a : $\begin{cases} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{cases}$ **(2)**

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M'} &= -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM'} \\
X'\,\overrightarrow{i} + Y'\,\overrightarrow{j} &= -x_\Omega\,\overrightarrow{i} - y_\Omega\,\overrightarrow{j} + x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} \\
X'\,\overrightarrow{i} + Y'\,\overrightarrow{j} &= (x' - x_\Omega)\,\overrightarrow{i} + (y' - y_\Omega)\,\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Par identification on a : $\begin{cases} X' = x' - x_\Omega \\ Y = y' - y_\Omega \end{cases}$ **(3)**

(2) et **(3)** dans **(1)** donne :

$\begin{cases} x' - x_\Omega = (x - x_\Omega)\cos\theta - (y - y_\Omega)\sin\theta \\ y' - y_\Omega = (x - x_\Omega)\sin\theta + (y - y_\Omega)\cos\theta \end{cases}$

Ainsi, l'expression analytique de la rotation $r(\Omega,\theta)$ de centre Ω et d'angle θ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donnée par :

$$\begin{cases} x' = (x - x_\Omega)\cos\theta - (y - y_\Omega)\sin\theta + x_\Omega \\ y' = (x - x_\Omega)\sin\theta + (y - y_\Omega)\cos\theta + y_\Omega \end{cases}$$

Cas particulier :

Si $\theta = \pi$; alors $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.
On retrouve l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre Ω.

$$\boxed{r(\Omega,\pi) : \begin{cases} x' = -x + 2x_\Omega \\ y' = -y + 2y_\Omega \end{cases}}$$

f) Détermination de l'angle de la rotation

Si A' et B' sont les images de deux points distincts de A et B par la rotation de centre Ω et d'angle θ, alors l'ange θ de cette rotation est déterminé par les relations :

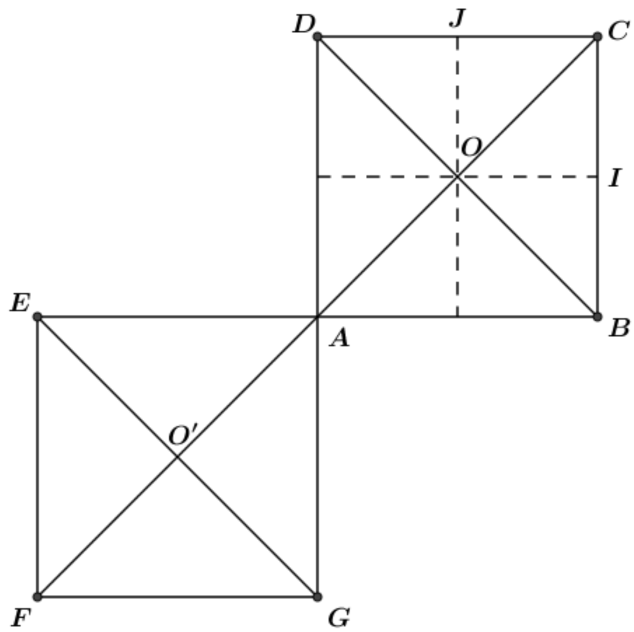
$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'}}{\parallel \overrightarrow{AB} \parallel \times \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel} \\
\sin\theta &= \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}{\parallel \overrightarrow{AB} \parallel \times \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel}
\end{aligned}$$

Exercice

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sens direct de côté a , de centres respectifs O et O'. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les images par r des points A, D et E.
2. Prouver l'existence de la rotation r' qui transforme C en F et D en G.
3. Donner les éléments caractéristiques de r' puis préciser sa nature exacte.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
   Déterminer les expressions analytiques de suivantes :
   (a) $r(A, \frac{\pi}{2})$
   (b) $r(A, \pi)$
   (c) $r(F, \frac{\pi}{4})$

Solution



1. Déterminons les images par r des points A, D et E.
   $r = rot(A, \frac{\pi}{2})$
   $\boxed{r(A) = A; \quad r(D) = E; \quad r(E) = G}$
2. Prouvons l'existence de la rotation r' qui transforme C en F et D en G.
   $\begin{cases} r'(D) = G \\ r'(C) = F \end{cases}$

   ▷ $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côté a.
   Donc $GF = DC$
   ▷ Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires de sens contraires.
   Donc $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = \pi\,[2\pi]$

   $\boxed{\begin{cases} GF = DC \quad \textbf{(1)} \\ (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = \pi\,[2\pi] \quad \textbf{(2)} \end{cases}}$

   Les relations **(1)** et **(2)** prouvent que r' existe.

3. Donnons les éléments caractéristiques de r' puis précisons sa nature exacte.
   • éléments caractéristiques :
   -centre : les médiatrices des segments $[DG]$ et $[CF]$ se coupent en A. Le centre de r' est le point A.
   -Angle : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})\pi\,[2\pi]$. L'angle de r' est π.
   $\boxed{r' = rot(A, \pi)}$.
   • Nature exacte de r' : r' est la symétrie centrale de centre A.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Déterminons les expressions analytiques de
   a) Expression analytique de : $r(A, \frac{\pi}{2})$
   Le A a pour coordonnées $A(-1;-1)$ dans le repère (O, I, J) et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
   On a : $\boxed{r(A, \frac{\pi}{2}) : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}}$

   b) Expression analytique de : $r(A, \pi)$
   $A(-1;-1)$ et $\cos\pi = -1$; $\sin\pi = 0$.
   On a : $\boxed{r(A, \pi) : \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}}$

   c) Expression analytique de : $r(F, \frac{\pi}{4})$
   $F(-3;-3)$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On a :

$$\boxed{r(F, \tfrac{\pi}{4}) : \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - 3 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - 3 + 3\sqrt{2} \end{cases}}$$

Chapitre

ISOMÉTRIES DU PLAN

I) Généralités

23.1 Définition

Un isométrie du plan est une transformation du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui conserve les distances. C'est-à-dire, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' ;
on a : $M'N' = MN$.

23.1.1 Exemples des isométries

Les isométries du plan sont :
▷ l'identité du plan : Id_p
▷ la translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$: $t_{\overrightarrow{u}}$
▷ la rotation de centre Ω et d'angle θ : $r(\Omega,\theta)$
▷ la symétrie orthogonale ou réflexion d'axe $(\mathscr{D})$: $S_{(\mathscr{D})}$
▷ la symétrie glissée.

23.2 Égalités de deux isométries

f et g sont deux isométries égales si elles prennent les même images de trois points non alignés. C'est -à-dire, si A, B , C sont trois points non alignés, alors : $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) = g(A) \\ f(B) = g(B) \\ f(C) = g(C) \end{cases}$

23.3 Différentes types des isométries

On distingue deux types d'isométries :
▷ les isométries positives ou déplacements ;
▷ les isométries négatives ou antidéplacements.

23.3.1 Isométries positives ou déplacements

a) Définition

Une isométrie positive ou déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés. C'est-à-dire, si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases}$ alors ; $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$

Exemple

L'identité du plan, la rotation et la translation.

b) Expression analytique d'un déplacement

Soit f un déplacement.

Son expression analytique est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases}$

avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 1$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

23.3.2 Isométries négatives ou antidéplacements

a) Définition

Un isométrie négative ou antidéplacement est une isométrie qui transforme les angles orientés en leurs opposés. C'est-à-dire,

si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases}$ alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$

Exemple

La symétrie orthogonale ou réflexion, la symétrie glissée.

b) Expression analytique d'un antidéplacement

Soit f un antidéplacement .

Son expression analytique est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -1$

Où a, b, c et d sont des nombres réels.

23.4 Propriétés

Si f est une isométrie du plan :

p_1) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$.

p_2) L'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$.

p_3) L'image du cercle de centre Ω et de rayon r est le cercle de centre. $f(\Omega)$ et de centre r.

p_4) f conserve le parallélisme : deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.

p_5) f conserve l'orthogonalité : deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

p_6) f conserve les milieux : si I est le milieu de $[AB]$, alors $f(I)$ est le milieu $[f(A)f(B)]$

p_7) f conserve les barycentres :
si $G = bar\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2)\cdots(A_n,\alpha_n)\}$, alors
$f(G) = bar\{(f(A_1),\alpha_1);(f(A_2),\alpha_2)\cdots(f(A_n),\alpha_n)\}$.

p_8) f conserve les angles géométriques :
si $A' = f(A)$; $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

p_9) f est bijective.

p_{10}) La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

p_{11}) La composée d'un déplacement par un antidéplacement est un antidéplacement.

23.5 Isométries et points invariants

Soit f une isométrie du plan.

a) Si f laisse invariant trois points A, B, C non alignés, alors f est l'application identique.

b) Si f laisse invariant deux points A, B et n'est pas l'application identique, alors f est une symétrie orthogonale d'axe la droite (AB).

c) Si f laisse invariant un seul point A, alors f est une rotation de centre A.

d) Si f n'admet aucun point invariant, alors f est soit une translation, ou soit une symétrie glissées.

23.6 Triangles isométriques

23.6.1 Définition

On dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques ou superposables s'il existe une isométrie f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

- Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables après retournement.

23.6.2 Théorème

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles.
Si $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$; alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercice 1

Soit f une transformation plane définie analytiquement par :

$$f : \begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y-2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie du plan.
2. Montrer que f est un déplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. En déduire la nature exacte de f.

Exercice 2

Soit g une transformation plane définie analytiquement par :

$$g : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une isométrie
2. Montrer que g est un antidéplacement
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par g
4. En déduire la nature exacte de g

Solution 1

$$f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

1. Montrons que f est une isométrie du plan.
   Soit $M(x,y)$ et $N(x_1,y_1)$ deux points d'images respectives $M'(x',y')$ et $N'(x'_1,y'_1)$

   $$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

   $$f(N) = N' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2 \\ y'_1 = -y_1 - 2 \end{cases}$$

   $MN^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad$ **(1)**.

   $$\begin{aligned} M'N'^2 &= (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 \\ &= (-x_1 + 2 + x - 2)^2 + (-y_1 - 2 + y + 2)^2 \\ &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

   (2)=**(1)** $\Longrightarrow M'N'^2 = MN^2 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{M'N'=MN}}$
   f est donc une isométrie.
2. Montrons que f est un déplacement.
   $$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$
   Donc f est un déplacement.
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par f.
   $$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + 2 \\ y = -y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = +2 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$
   $\boxed{\Omega(1;-1) \text{ est le seul point invariant par } f}$
4. Déduisons la nature exacte de f.
   Comme f admet un seul point invariant , f est donc une rotation de centre Ω.

Solution 2

$$g : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

1. Montrons que g est une isométrie
   Soit $M(x,y)$ et $O(0,0)$ deux points d'images respectives $M'(x',y')$ et $O'(-2;2)$.

   $OM^2 = x^2 + y^2 \quad$ **(1)**

   $$\begin{aligned} O'M'^2 &= (x'+2)^2 + (y'-2)^2 \\ &= (y-2+2)^2 + (x+2-2)^2 \\ &= y^2 + x^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

   $O'M'^2 = x^2 + y^2 \quad$ **(2)**

   (2)=**(1)** $\Leftrightarrow \boxed{O'M' = OM}$

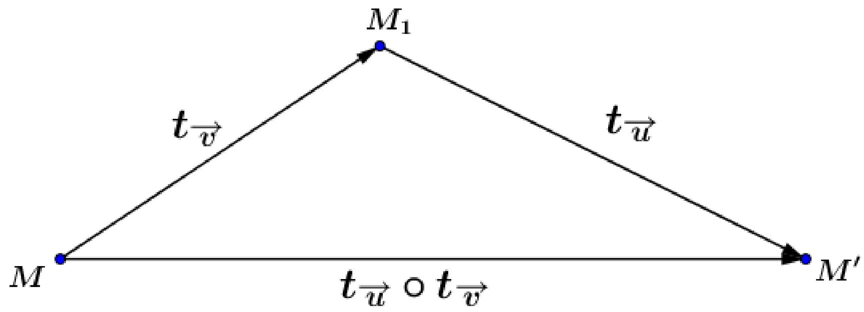
   f est donc une isométrie.
2. Montrons que g est un antidéplacement
   $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
   g est donc un antidéplacement.
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par g
   $g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$
   Le système se réduit à une seule équation $x + y - 2 = 0$.

   L'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation $(\mathscr{D}) : y = x + 2$
4. Déduisons la nature exacte de g
   Comme l'ensemble des points invariants par g est une droite, g est donc une symétrie orthogonale.

II) Compositions et décompositions des isométries

23.7 Composée de deux translations

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\overrightarrow{v}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\overrightarrow{u}}$.



La question qui se pose est : quelle est la transformation $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$?

$$\begin{cases} t_{\overrightarrow{v}}(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{v} & \textbf{(1)} \\ t_{\overrightarrow{u}}(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{u} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Donc $\underline{M' = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(M)}$ **(i)**

Pour tout point M du plan on a :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) &= t_{\overrightarrow{u}}\left[t_{\overrightarrow{v}}(M)\right] \\ &= t_{\overrightarrow{u}}(M_1) \\ &= M' \end{aligned}$$

Donc $\underline{t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) = M'}$ **(ii)**

(i) = **(ii)** $\Rightarrow t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(M)$

D'où $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

Propriété

La composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

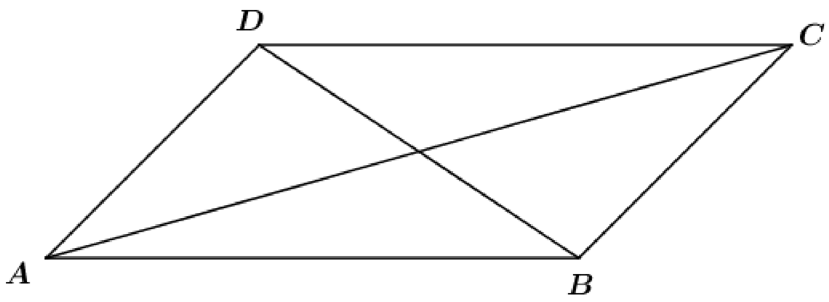
Remarques

- ▷ $\forall \quad \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, on a : $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (Commutativité)
  Donc $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$
  On dit que la composée de deux translations est commutative.
- ▷ $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{-u}} = t_{\overrightarrow{-u}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{o}} = I_d$

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Caractériser les transformations ponctuelles suivantes :
$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$; $t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$; $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$; $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$

Solution



$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

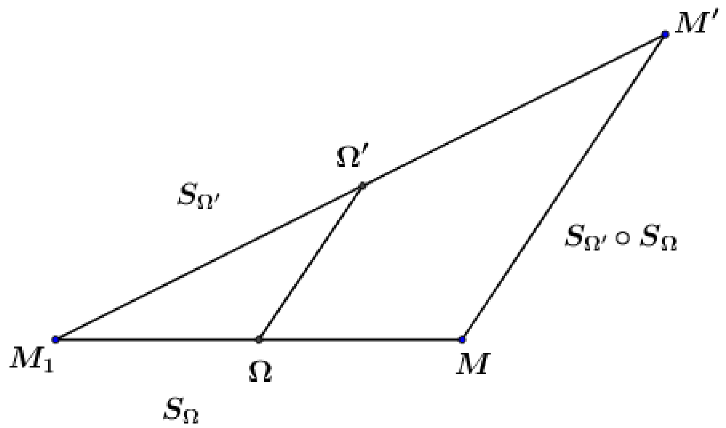
$t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{BA}}$

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

$t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}} = t_{2\overrightarrow{AD}}$

23.8 Composée de deux symétries centrales

On considère deux symétries centrales S_Ω et $S_{\Omega'}$. On note M_1 l'image de M par la symétrie de centre Ω et M' l'image de M_1 par la symétrie de centre Ω'.



$$\begin{cases} M_1 = S_\Omega(M) \\ M' = S_{\Omega'}(M_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M_1} = -\overrightarrow{\Omega M} \\ \overrightarrow{\Omega' M'} = -\overrightarrow{\Omega' M_1} \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{M\Omega} \\ \overrightarrow{\Omega' M'} = \overrightarrow{M_1\Omega'} \end{cases}$

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \\
&= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M'} \\
&= \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{M_1\Omega'} \\
&= \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} \\
&= 2\overrightarrow{\Omega\Omega'} \\
\overrightarrow{MM'} &= 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}
\end{aligned}$$

Donc $\quad M' = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}(M) \quad$ **(1)**

D'autre part :
$S_{\Omega'} \circ S_{\Omega}(M) = S_{\Omega'}\left[S_{\Omega}(M)\right] = S_{\Omega'}(M_1) = M'$

$S_{\Omega'} \circ S_{\Omega}(M) = M' \quad$ **(2)**

$$\textbf{(1)} = \textbf{(2)} \Longrightarrow S_{\Omega'} \circ S_{\Omega}(M) = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}(M)$$

D'où $\quad S_{\Omega'} \circ S_{\Omega} = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$

Propriété

La composée de deux symétries centrales de centre différent est une translation.

Remarques

▷ Si $\Omega' = \Omega$, on a : $\quad S_{\Omega} \circ S_{\Omega} = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega}} = t_{\overrightarrow{O}} = I_d$

▷ $S_{\Omega} \circ S_{\Omega'} = t_{2\overrightarrow{\Omega'\Omega}} \quad$ donc $\quad S_{\Omega} \circ S_{\Omega'} \neq S_{\Omega'} \circ S_{\Omega}$

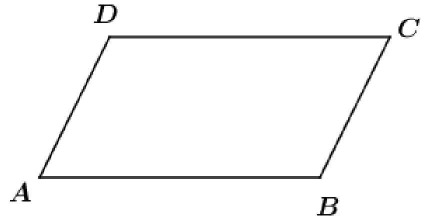
On dit que la composée de deux symétries centrales n'est pas commutative.

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Montrer que $f = S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ est l'application identique.
2. Montrer que $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.

Solution



1. Montrons que $f = S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ est l'application identique.

$$\begin{aligned} f &= S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A \\ &= t_{2\overrightarrow{CD}} \circ t_{2\overrightarrow{AB}} \\ &= t_{2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})} \\ &= t_{2(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})} \\ &= t_{\overrightarrow{O}} = Id \end{aligned}$$

2. Montrons que $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.

$$\begin{aligned} S_C \circ S_B \circ S_A &= S_D \circ \underbrace{S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A}_{Id} \\ &= S_D \circ Id \\ &= S_D \end{aligned}$$

23.9 Composée d'une translation et d'une symétrie centrale

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, S_Ω une symétrie centrale de centre Ω et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega$.

$$\begin{aligned} f &= t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega \\ &= S_{\Omega'} \circ \underbrace{S_\Omega \circ S_\Omega}_{Id} = S_{\Omega'} \end{aligned}$$

Cherchons Ω'.
$t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Omega'} \circ S_\Omega$ avec $2\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \overrightarrow{u} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

Propriété

La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale.

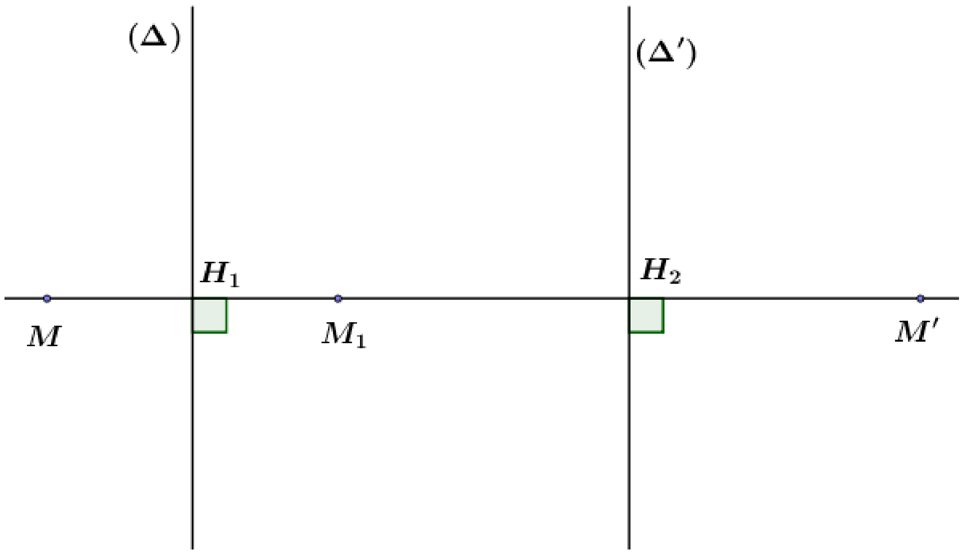
Remarque

Cette composée n'est pas commutative ; C'est-à-dire , $t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega \neq S_\Omega \circ t_{\overrightarrow{u}}$

23.10 Composée de deux symétries orthogonales d'axes S_Δ et $S_{\Delta'}$

23.10.1 Cas où (Δ) et (Δ') sont parallèles

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, H_1 un point de (Δ) et H_2 son projeté orthogonal sur (Δ').
Soit M un point , M_1 son symétrique par rapport à (Δ), M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ') , H_1 et H_2 les milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$.



$$\begin{cases} M_1 = S_\Delta(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = 2\,\overrightarrow{H_1M_1} & \textbf{(1)} \\ M' = S_{\Delta'}(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = 2\,\overrightarrow{M_1H_2} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textbf{(1)} + \textbf{(2)} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} &= 2\,\overrightarrow{H_1H_2} \\ &\Rightarrow \underline{M' = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}(M)} \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) &= S_{\Delta'}\left[S_\Delta(M)\right] \\ &= S_{\Delta'}(M_1) \\ &= M' \\ &\Rightarrow \underline{S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M'} \quad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Ainsi, **(3)** $=$ **(4)** donne :

$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}$

Propriété

La composée de deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ d'axes parallèles est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}$ où $H_1 \in (\Delta)$ et $H_2 \in (\Delta')$

Remarques

- ▷ La composée de deux symétries orthogonales n'est pas commutative : $S_{\Delta'} \circ S_\Delta \neq S_\Delta \circ S_{\Delta'}$
- ▷ Lorsque les axes (Δ) et (Δ') sont confondus , on obtient : $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_p$
- ▷ (Δ') est l'image de (Δ) par la translation du vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$: $(\Delta') = t_{\overrightarrow{H_1H_2}}(\Delta)$

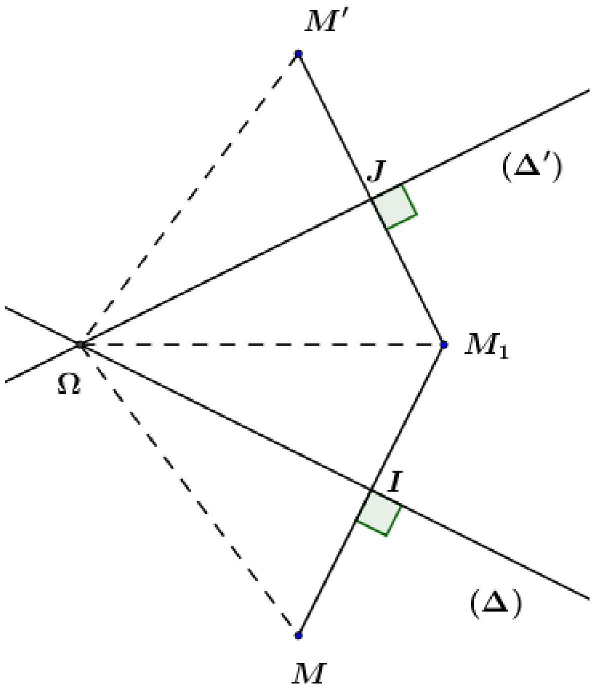
Théorème : Décomposition d'une translation

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\overrightarrow{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec :

$$\begin{cases} (\Delta)//(\Delta') \\ \overrightarrow{u} \text{ est normal à } (\Delta) \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\Delta) \end{cases}$$

23.10.2 Cas où les axes (Δ) et (Δ') sont sécants

Considérons deux droites (Δ) et (Δ') telles que $(\Delta)\cap(\Delta')=\{\Omega\}$. M est un point quelconque du plan, $M_1=S_\Delta(M)$ et $M'=S_{\Delta'}(M_1)$. I et J sont des milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$.



$S_{\Delta'}\circ S_\Delta(\Omega)=S_{\Delta'}[S_\Delta(\Omega)]=S_{\Delta'}(\Omega)=\Omega$
Ω est donc l'unique point invariant.

S_Δ et $S_{\Delta'}$ étant des isométries, on : $\Omega M=\Omega M_1$ et $\Omega M_1=\Omega M'$.
Donc

$$\underline{\Omega M=\Omega M'}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})&=(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1})+(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'})\\&=2(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega M_1}+2(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega J})\\&=2(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega J})\\(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})&=2\overline{(\Delta,\Delta')}\,[2\pi]\end{aligned}$$

Donc, $S_{\Delta'}\circ S_\Delta=\mathrm{Rot}\left(\Omega;2\overline{(\Delta,\Delta')}\right)$

Propriété

La composée $S_{\Delta'}\circ S_\Delta$ de deux symétries orthogonales d'axes sécants en Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta=2\overline{(\Delta,\Delta')}$.

Cas particulier

Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires , alors $2\overline{(\Delta,\Delta')}=\pi\,[2\pi]$ et $S_{\Delta'}\circ S_\Delta$ est la symétrie centrale de centre Ω.
$S_{\Delta'}\circ S_\Delta=R(\Omega;\pi)=S_\Omega$

Théorème : Décomposition d'une rotation

Soit $r = R(\Omega;\theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ.

Pour toute droite (Δ), il existe une droite (Δ') telle que $r = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ et $\begin{cases} (\Delta) \cap (\Delta') = \{\Omega\} \\ \overline{(\Delta, \Delta')} = \dfrac{\theta}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Exercice 1

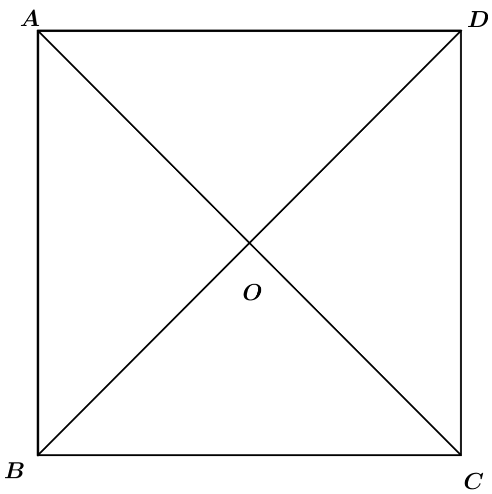
$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. Identifier et caractériser les transformations ponctuelles suivantes :
$f_1 = S_{DC} \circ S_{AB}$; $f_2 = S_{AC} \circ S_{AB}$; $f_3 = S_{DC} \circ S_{AC}$; $f_4 = S_{BD} \circ S_{AC}$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Quelle est la nature de la transformation
   $g = S_{BC} \circ S_{B'C'}$
2. Déterminer la droite (Δ) telle que :
   $S_{AA'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{BC}}$

Solution 1



• $f_1 = S_{DC} \circ S_{AB}$
$(DC)//(AB)$: f_1 est donc une translation.
$f_1 = S_{DC} \circ S_{AB} = t_{2\overrightarrow{AD}} = t_{2\overrightarrow{BC}}$

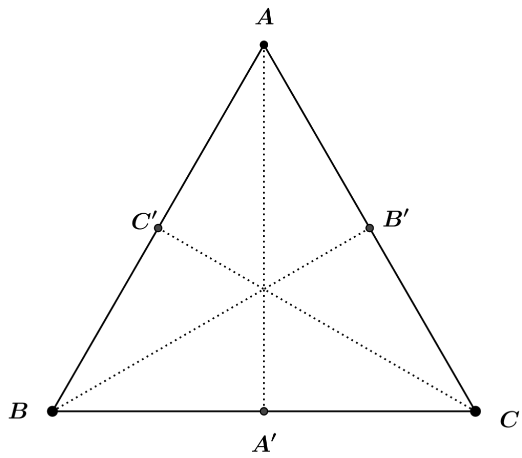
• $f_2 = S_{AC} \circ S_{AB}$
$(AC) \cap (AB) = \{A\}$, f_2 est donc une rotation de centre A.
$f_2 = R\left(A; 2\overline{(AB, AC)}\right) = R(A; 2 \times \frac{\pi}{4}) = R(A; \frac{\pi}{2})$

• $f_3 = S_{DC} \circ S_{AC}$
$(DC) \cap (AC) = \{C\}$, f_3 est donc une rotation de centre C.
$f_3 = S_{DC} \circ S_{AC} = R\left(C; 2\overline{(AC, DC)}\right)$
$= R(C; 2 \times (-\frac{\pi}{4})) = R(C; -\frac{\pi}{2})$

• $f_4 = S_{BD} \circ S_{AC}$
$(BD) \cap (AC) = \{O\}$, f_4 est donc une rotation de centre O.

$f_4 = R\left(O; 2\overline{(AC, BD)}\right) = R(O; 2 \times \frac{\pi}{2}) = R(O; \pi) = S_O$.
f_4 est donc une symétrie centrale de centre O.

Solution 2



1. nature de la transformation $g = S_{BC} \circ S_{B'C'}$.
   $(BC)//(B'C')$, g est donc une translation.
2. Déterminons la droite (Δ) telle que :
   $S_{AA'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{BC}}$
   $\begin{cases} (AA')//(\Delta) \\ (AA') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(\Delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AA')//(\Delta) \\ (\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \end{cases}$
   (Δ) est la droite passant par B et parallèle à (AA').

23.11 Composée de deux rotations

23.11.1 De même centre

Soit r_1 et r_2 deux rotations de centre Ω et d'angles respectifs θ_1 et θ_2.
$r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
$r_2(\Omega, \theta_2) \circ r_1(\Omega, \theta_1) = r(\Omega, \theta_1 + \theta_2)$

Cas particuliers

- ▷ Si $\theta_1 + \theta_2 = 0\,[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est l'application identité : $r_2 \circ r_1 = Id_p$
- ▷ Si $\theta_1 + \theta_2 = \pi\,[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centrale de centre Ω.

23.11.2 De centre distincts

Soit Ω_1 et Ω_2 les centres respectifs des rotations r_1 et r_2.
$r_2(\Omega_2, \theta_2) \circ r_1(\Omega_1, \theta_1) = r(\Omega, \theta_1 + \theta_2)$
où Ω est un point à déterminer.

Comment Déterminer le centre Ω ?

▷ **Première méthode :**
Soit A et B les points du plan tels que
$r_2 \circ r_1(A) = A'$ et $r_2 \circ r_1(B) = B'$, avec $(\theta_1 + \theta_2 \neq 0)$. Le centre Ω de $r_2 \circ r_1$ est le point de

concours des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$.

▷ **Deuxième méthode :**

- On décompose la rotation $r_2(\Omega_2,\theta_2)$ en deux symétries orthogonales telle que :
  $r_2(\Omega_2,\theta_2)=S_{\Delta'}\circ S_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $\overline{(\Omega_1\Omega_2,\Delta')}=\dfrac{\theta_2}{2}$
- On décompose la rotation $r_1(\Omega_1,\theta_1)$ en deux symétries orthogonales telle que :
  $r_1(\Omega_1,\theta_1)=S_{(\Omega_1\Omega_2)}\circ S_{\Delta}$ et $\overline{(\Delta,\Omega_1\Omega_2)}=\dfrac{\theta_1}{2}$
  On a :

$$r_2(\Omega_2,\theta_2)\circ r_1(\Omega_1,\theta_1)=S_{\Delta'}\circ\underbrace{S_{(\Omega_1\Omega_2)}\circ S_{(\Omega_1\Omega_2)}}_{Id_p}\circ S_{\Delta}$$
$$r_2(\Omega_2,\theta_2)\circ r_1(\Omega_1,\theta_1)=S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}$$

Le centre Ω de la rotation $r_2\circ r_1$ est le point de concours des droites (Δ) et (Δ') :
$\{\Omega\}=(\Delta)\cap(\Delta')$

Propriété

Si $\theta_1+\theta_2=0$, alors $r_2\circ r_1$ est une translation dont le vecteur a pour origine le centre Ω_1 de r_1 et a pour extrémité l'image de Ω_1 par $r_2\circ r_1$.

Remarque

La composée de deux rotations n'est pas commutative : $r_2\circ r_1\neq r_1\circ r_2$.

23.12 Composée d'une translation et d'une rotation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ et $r(A,\theta)$ une rotation de centre A et d'angle $\theta\neq 0$.
On pose : $f=t_{\vec{u}}\circ r(A,\theta)$

- On décompose $t_{\vec{u}}$ en deux symétries orthogonales : $t_{\vec{u}}=S_{\Delta'}\circ S_D$ avec
$$\begin{cases}(\Delta')//(D)\\(\Delta')=t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)\\(D)\text{ passe par A et a pour vecteur normal }\vec{u}\end{cases}$$
- On décompose $r(A,\theta)$ en deux symétries orthogonales : $r(A,\theta)=S_D\circ S_\Delta$ avec
$$\begin{cases}(D)\cap(\Delta)=\{A\}\\\overline{(\Delta,D)}=\dfrac{\theta}{2}\,[2\pi]\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}f&=t_{\vec{u}}\circ r(A,\theta)\\&=S_{\Delta'}\circ\underbrace{S_D\circ S_D}_{Id_p}\circ S_\Delta\\&=S_{\Delta'}\circ S_\Delta\end{aligned}$$

$$\{\Omega\}=(\Delta)\cap(\Delta')$$

Propriété

La composée d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ et d'une rotation $r(A,\theta)$ est une rotation de centre Ω et d'angle θ.
$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta) = r(\Omega,\theta)$

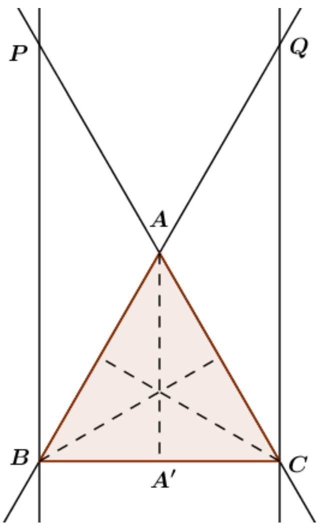
Remarque

En générale, cette composée n'est pas commutative. $t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta) \neq r(A,\theta) \circ t_{\overrightarrow{u}}$

Exercice

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et A' milieu de $[BC]$. Q est le point d'intersection de La droite (AB) avec celle passant par C et parallèle à (AA'). P est le point d'intersection de La droite (AC) avec celle passant par B et parallèle à (AA').
Déterminer les applications suivantes :
a) $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(A,\frac{\pi}{3})$
b) $g = r(A,\frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

Solution



a) $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(A,\frac{\pi}{3})$

- $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\Delta'} \circ S_D$ avec
$$\begin{cases} (\Delta')//(D) \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(D) \\ (D) \text{ passe par A et a pour vecteur normal } \\ \overrightarrow{BC} \end{cases}$$
Donc $(D) \perp (BC) \Rightarrow (D) = (AA')$.
$(\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \Rightarrow (\Delta') = (CQ)$
$$\underline{t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(CQ)} \circ S_{(AA')}}$$

- $r(A,\frac{\pi}{3}) = S_D \circ S_\Delta$ avec
$$\begin{cases} (D) \cap (\Delta) = \{A\} \\ (\overline{\Delta, D}) = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AA') \cap (\Delta) = \{A\} \\ (\overline{\Delta, AA'}) = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$(\Delta) = (AB)$$

$$\underline{r(A, \frac{\pi}{3}) = S_{(AA')} \circ S_{(AB)}}$$

$$f = S_{(CQ)} \circ \underbrace{S_{(AA')} \circ S_{(AA')}}_{Id_p} \circ S_{(AB)} = S_{(CQ)} \circ S_{(AB)}$$

$$(CQ) \cap (AB) = \{Q\}$$

$\boxed{f = r(Q, \frac{\pi}{3})}$

b) $g = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

- $t_{\overrightarrow{BC}} = S_D \circ S_{\Delta'}$ avec

$$\begin{cases} (D)//(\Delta') \\ (D) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(\Delta') \\ (D) \text{ passe par A et a pour vecteur normal} \\ \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$(D) = (AA')$$

$$(\Delta') = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \Rightarrow (\Delta') = (BP)$$

$$\underline{t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(AA')} \circ S_{(BP)}}$$

- $r(A, \frac{\pi}{3}) = S_\Delta \circ S_D$ avec

$$\begin{cases} (\Delta) \cap (D) = \{A\} \\ (\overline{D, \Delta}) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta) \cap (AA') = \{A\} \\ (\overline{AA', \Delta}) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$(\Delta) = (AC)$$

$$\underline{r(A, \frac{\pi}{3}) = S_{(AC)} \circ S_{(AA')}}$$

$$\begin{aligned} g &= S_{(AC)} \circ \underbrace{S_{(AA')} \circ S_{(AA')}}_{Id_p} \circ S_{(BP)} \\ &= S_{(AC)} \circ S_{(BP)} \end{aligned}$$

$$(AC) \cap (BP) = \{P\}$$

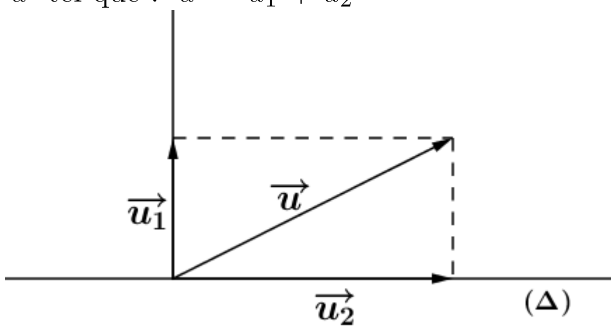
$\boxed{f = r(P, \frac{\pi}{3})}$

23.12.1 Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $S_{(\Delta)}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ).
On pose : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)}$
▷ Premier cas :
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à (Δ), alors
$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie orthogonale d'axe (Δ') parallèle à (Δ).

$t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec

$\begin{cases}(\Delta)//(\Delta') \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\Delta)\end{cases}$
On a : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \circ S_{(\Delta)} = S_{\Delta'}$
▷ Deuxième cas :
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (Δ), alors
$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$. On note : $f = G((\Delta), \overrightarrow{u})$ ▷ Troisième cas :
Si $\overrightarrow{u}$ n'est ni un vecteur normal, ni un vecteur directeur de (Δ), alors on décompose le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$



$$\begin{aligned} f &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} = S_{(\Delta)} \circ t_{(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})} \\ &= \underbrace{S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}}_{S_{(\Delta')}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} \\ &= S_{(\Delta')} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} \end{aligned}$$

$f = S_{(\Delta')} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}$ où $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur directeur de (Δ')
f est donc une symétrie glissée d'axe (Δ') et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

23.12.2 Composée d'une rotation et une symétrie orthogonale

Soit $r(\Omega,\theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $S_{(\Delta)}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ).
On pose : $f = r(\Omega,\theta) \circ S_{(\Delta)}$
▷ Premier cas :
Si $\Omega \in (\Delta)$, alors $f = r(\Omega,\theta) \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie orthogonale.
En effet,

$$\begin{aligned} f = r(\Omega,\theta) \circ S_{(\Delta)} &= S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} \\ &= S_{(\Delta')} \end{aligned}$$

avec $r(\Omega,\theta) : \begin{cases}(\Delta) \cap (\Delta') = \{\Omega\} \\ (\overline{\Delta,\Delta'}) = \dfrac{\theta}{2}\,[2\pi]\end{cases}$
▷ Deuxième cas :
Si $\Omega \notin (\Delta)$, alors $f = r(\Omega,\theta) \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie glissée

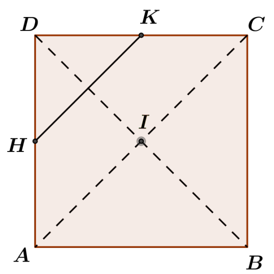
Exercice 1

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I. H et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DC]$.
Identifier et caractériser les transformations suivantes : $f_1 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$; $f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$; $f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}}$; $f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)}$

Exercice 2

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Donner la nature puis caractériser les applications :
$f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(AC)}$ et $g = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(BC)}$

Solution 1



a) $f_1 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$
$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (HK). On en déduit que f_1 est la symétrie glissée d'axe (HK) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
b) $f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$

$$\begin{aligned} f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)} &= t_{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}} \circ \underbrace{t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}}_{S_\Delta} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\Delta \end{aligned}$$

Car le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal à (AB).
$t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} = S_\Delta \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{AD}} = S_\Delta \circ S_{(AB)}$
avec $\Delta = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}(AB) = (IH)$

$$\boxed{f_2 = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IH)}}$$

f_2 est donc la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'axe (IH).

c) $f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}}$
f_3 est une symétrie orthogonale car, $\overrightarrow{ID}$ est normal à (HK).
$f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}} = S_{(HK)} \circ (S_{(HK)} \circ S_\Delta) = S_\Delta$
avec $\begin{cases} (\Delta)//(HK) \\ (\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}}(HK) = (AC) \end{cases}$

$$\boxed{f_3 = S_{(AC)}}$$

f_3 est donc une symétrie orthogonale d'axe (AC).

d) $f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)}$

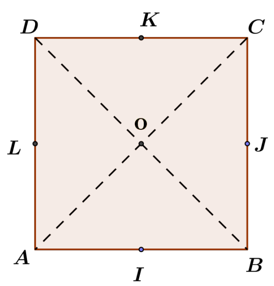
$$\begin{aligned} f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)} &= t_{(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DK})} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ t_{\overrightarrow{HD}} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ \underbrace{t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)}}_{S_{(\Delta)}} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ S_{(\Delta)} \end{aligned}$$

Car $\overrightarrow{AH}$ est normal à (AB).
$t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)} = S_{(\Delta)} \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{AH}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$
avec $\begin{cases} (\Delta)//(AB) \\ (\Delta) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}}(AB) \end{cases}$
(Δ) est donc la médiatrice de $[AH]$.

$$\boxed{f_4 = t_{\overrightarrow{DK}} \circ S_{(\Delta)}}$$

f_4 est donc une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{DK}$ et d'axe (Δ) la médiatrice du segment $[AH]$.

Solution 2



a) $f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(AC)}$
$A \in (AC)$, f est donc une symétrie orthogonale.
$f = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)}$
$\boxed{f = S_{(AD)}}$

b)$g = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(BC)}$

$O \notin$, g est donc une symétrie glissée.
$r(O, \frac{\pi}{2}) = S_{(OD)} \circ S_{(OK)}$

$$\begin{aligned} g &= S_{(OD)} \circ S_{(OK)} \circ S_{(BC)} \\ &= S_{(OD)} \circ t_{2\overrightarrow{JO}} \quad \text{car} \quad (OK)//(BC) \\ &= S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CD}}, \quad \text{or} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \\ &= \underbrace{S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CO}}}_{S_{(\Delta)}} \circ t_{\overrightarrow{OD}} \end{aligned}$$

$$g = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{CO}} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{CO} \quad \text{est normal à} \quad (OD)$$

$S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CO}} = S_{(\Delta)} \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{CO}} = S_{(CO)} \circ S_{(\Delta)}$
avec $\begin{cases} (\Delta)//(OD) \\ (\Delta) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}}(OD) = (JK) \end{cases}$
D'où

$$\boxed{g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{OD}}}$$

g est donc une symétrie glissée d'axe (JK) et de vecteur $\overrightarrow{OD}$.

23.13 Étude d'une symétrie glissée

23.13.1 Définition

Soit (Δ) est droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$ la composée commutative d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
On note :
$f = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = G((\Delta), \overrightarrow{u})$.

23.13.2 Éléments caractéristiques

Une symétrie glissée f est caractérisée par son axe et son vecteur.

Vecteur de la translation

Si f est une symétrie glissée, alors $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$

Axe de la symétrie

$$\begin{aligned} f &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} \\ f \circ t_{-\overrightarrow{u}} &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{-\overrightarrow{u}} \\ &= S_{(\Delta)} \end{aligned}$$

D'où $S_{(\Delta)} = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}$

$$\boxed{(\Delta) : \left\{ M \in \mathscr{P} / \det(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{u}) = 0 \right\}}$$

23.13.3 Réciproque d'une symétrie glissée

La réciproque d'une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
$G((\Delta); \overrightarrow{u})^{-1} = G((\Delta); -\overrightarrow{u})$

Propriétés

Soit f une symétrie glissée définie par : $f = S_{(\mathscr{D})} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\mathscr{D})}$.
▷ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O}$, alors f n'a pas des points invariants.
▷ $Inv f = \{\}$.
▷ Si $S_{(\mathscr{D})}(M) = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}(M) = M'$, alors $(\mathscr{D})$ est la médiatrice du segment $[MM']$.
▷ Si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, alors f est une symétrie glissée d'axe $(\mathscr{D})$ passant par les milieux des segments $[AA']$ et $[BB']$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ avec $f \circ f(A) = C$; $C \neq A$.

Chapitre

HOMOTHÉTIES

24.1 Définition

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k notée $h_{(\Omega;k)}$, toute application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
▷ si $k = 1$, alors h est une application identique.
▷ si $k = -1$, alors h est une symétrie centrale de centre Ω.

24.2 Propriétés

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
▷ si $k \neq 1$, h admet un point invariant qui est son centre Ω.
▷ si $k = 1$, tous les points du plan sont invariants par h.
▷ Toute homothétie h du plan est une transformation du plan. La transformation réciproque de h est $h^{-1}_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.
▷ si M a pour image M' par h, alors les points M, M' et Ω sont alignes.
▷ Si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
▷ Une homothétie h multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.
▷ Une homothétie conserve : les angles orientés; le barycentre; le contact; le milieu; le parallélisme; l'orthogonalité.

24.3 Expression analytique

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points $M(x,y)$, $M'(x',y')$ et $\Omega(x_0,y_0)$ trois points du plan.
Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ telle que $h(M) = M'$.

$$h(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

D'où l'expression analytique de h est : $\boxed{h : \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}}$

En posant $p = (1-k)x_0$ et $q = (1-k)y_0$; on a : $h : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

Propriétés

Soit h une homothétie définie analytiquement par : $h : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

▷ si $k = 1$, alors h est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(p;q)$.

▷ si $k \neq 1$, alors h est une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\dfrac{p}{1-k};\dfrac{q}{1-k}\right)$.

Exercice 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit A un point du plan tel que : $A(3,-2)$. Déterminer l'expression analytique de l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -5$.

Exercice 2

Soit h un transformation plane définie analytiquement par : $h : \begin{cases} x' = 7x - 6 \\ y' = 7y + 12 \end{cases}$
Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport k et le centre B.

24.4 Détermination géométrique d'une homothétie

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan. On veut déterminer l'homothétie h qui transforme A en A' et B' en B c'est-à-dire

$$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{cases}$$

▷ **Existence**
h existe si et seulement si : $A \neq A'$ et $B \neq B'$ de plus $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

▷ **Centre**
Soit Ω le centre de h. Ω est le point d'intersection des droites $(A'A) \cap (BB') = \{\Omega\}$.

▷ **Rapport**
Soit Ω le centre de l'homothétie h et k son rapport.
On a : $\overrightarrow{\Omega A}' = k\overrightarrow{\Omega A}$ ou $k = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

24.5 Composée de deux homothéties

24.5.1 Composée de deux homothéties de même centre

Soit $f = h_1(\Omega;k_1) \circ h_2(\Omega;k_2)$.

Propriété

f est une homothétie de centre Ω et rapport $\alpha = k_1k_2$.
On a : $f = h(\Omega;\alpha)$

Remarques

Soit $f = h_1(\Omega; k_1) \circ h_2(\Omega; k_2)$.
▷ Si $\alpha = 1$, alors f est l'application identique.
▷ Si $\alpha = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre Ω.
N.B :
La composée de deux homothéties de même centre est commutative.

24.5.2 Composée de deux homothéties de centre distincts

Propriétés

Soit $f = h_1(O; k_1) \circ h_2(O'; k_2)$. On distingue trois cas.
▷ premier cas : si $k_1 \times k_2 = 1$
f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{u} = (1 - k_1)\overrightarrow{O'O} \Longrightarrow f = t_{\vec{u}}$.
▷ deuxième cas : si $k_1 \times k_2 \neq 1$.
f est une homothétie de rapport $k = k_1 \times k_2$ et de centre Ω tel que $\overrightarrow{O'\Omega} = \dfrac{1 - k_1}{1 - k_1 \times k_2}\overrightarrow{O'O}$.
▷ troisième cas : si $k_1 \times k_2 = -1$
f est une symétrie centrale de centre Ω tel que $\overrightarrow{O'\Omega} = \dfrac{1 - k_1}{2}\overrightarrow{O'O}$.
NB : $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.

Exercice 1

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$.

1. Démontrer que $h' \circ h = f$ est une homothétie dont on déterminer ale centre et le rapport.
2. Construire l'image du point A par f.
3. En déduire une détermination du centre de f.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs B et C de rapport respectifs $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

1. Démontrer que $g = h' \circ h$ est une translation.
2. Construire l'image de A par g.
3. En déduire une détermination du vecteur de g.
4. Exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

24.6 Composée d'une homothétie et d'une translation

24.6.1 Propriété

Soit h une homothétie de centre A et de rapport k avec $k \neq 1$ et une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul.
$h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.

24.6.2 Détermination du centre de $h \circ t$ et $t \circ h$

▷ Pour $h \circ t$

Soit $f = h \circ t$ et Ω le centre de f.
Soit Ω_1 un point du plan tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\Omega) = \Omega_1$ et $h(\Omega_1) = \Omega$.
$\bullet\, t_{\overrightarrow{u}}(\Omega) = \Omega_1 \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega}_1 = \overrightarrow{u}$
$\bullet\, h(\Omega_1) = \Omega \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = k\overrightarrow{A\Omega}_1$.
$\overrightarrow{A\Omega} = k(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega}_1) \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = k\overrightarrow{A\Omega} + k\overrightarrow{\Omega\Omega}_1 = k\overrightarrow{A\Omega} + k\overrightarrow{u}$
On a $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{u}$.

▷ Pour $t \circ h$

Soit $f = t \circ th$ et Ω le centre de f.
Soit Ω_1 un point du plan tel que $h(\Omega) = \Omega_1$ et $t_{\overrightarrow{u}}(\Omega_1) = \Omega$.
$\bullet\, h(\Omega) = \Omega_1 \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega}_1 = k\overrightarrow{A\Omega}$
$\bullet\, t(\Omega_1) = \Omega \Longrightarrow \Omega_1\Omega = \overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega} = \overrightarrow{\Omega_1 A} + \overrightarrow{A\Omega} = -\overrightarrow{A\Omega_1} + \overrightarrow{A\Omega}$
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega} = -k\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{A\Omega} \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$.

Exercice 1

Soit O un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport 2, par t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

1. Soit M' l'image d'un point M par la transformation $h \circ t$. Exprimer $\overrightarrow{OM}'$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u}$.
2. Soit Ω le centre de l'homothétie $h \circ t$. Exprimer $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.
3. Mêmes questions pour la transformation $t \circ h$.

Exercice 2

P et Q sont deux points du plan, G le barycentre des points P et Q tels que
$G = bar\{(P, -3); (Q, 1)\}$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{PM}' = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

1. Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques.
2. Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $P(-1; 2)$ et $Q(3; 1)$.
   Déterminer l'expression analytique de f.

Chapitre

SIMILITUDES

25.1 Définitions

On appelle similitude toute transformation composée d'une isométrie et homothétie.
▷ Si l'isométrie est un déplacement, on dit que la similitude est directe.
▷ Si l'isométrie est un antidéplacement, on dit que la similitude est indirecte.

Cas particuliers

L'application identique est à la fois une homothétie et une isométrie. On en déduit que :
▷ les déplacements et les homothéties sont des similitudes directes ;
▷ les antidéplacements sont des similitudes indirectes.

Propriétés

Soit h une homothétie de rapport k et i une isométrie.

- ▷ Les similitudes $h \circ i$ et $i \circ h$ multiplient les distances par $|k|$ qui est appelé rapport de la similitude.
- ▷ Les similitudes directes conservent les angles orientés.
- ▷ Les similitudes indirectes transforment tout angle orienté en son opposé.
- ▷ Si S est une similitude directe composée d'homothétie et d'une rotation d'angle α, alors pour tous points M et N distincts du plan d'images respective M' et N' on a : $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right) = \alpha[2\pi]$. α est appelé angle de la similitude directe.

Remarques

Les similitudes étant des composées d'homothéties et d'isométries, elles vérifient les propriétés communes à ces deux transformations :

- ▷ Les similitudes conservent l'alignement ;
- ▷ Les similitudes conservent le milieux de segment ;
- ▷ Les similitudes conservent le parallélisme et l'orthogonalité ;
- ▷ Les similitudes conservent le contact.

25.2 Triangles semblables

25.2.1 Définition

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables s'il existe une similitude S telle que A, B, C ont respectivement pour images A', B', C' par S.

25.2.2 Propriétés

- ▷ Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables c'est-à-dire $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.
- ▷ Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Exercice

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2, s_A la symétrie centrale de centre A de coordonnées $(-3; 1)$.

1. Écrire les expressions analytiques de h et s_A, puis celle de la transformation $s_A \circ h$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s_A \circ h$.