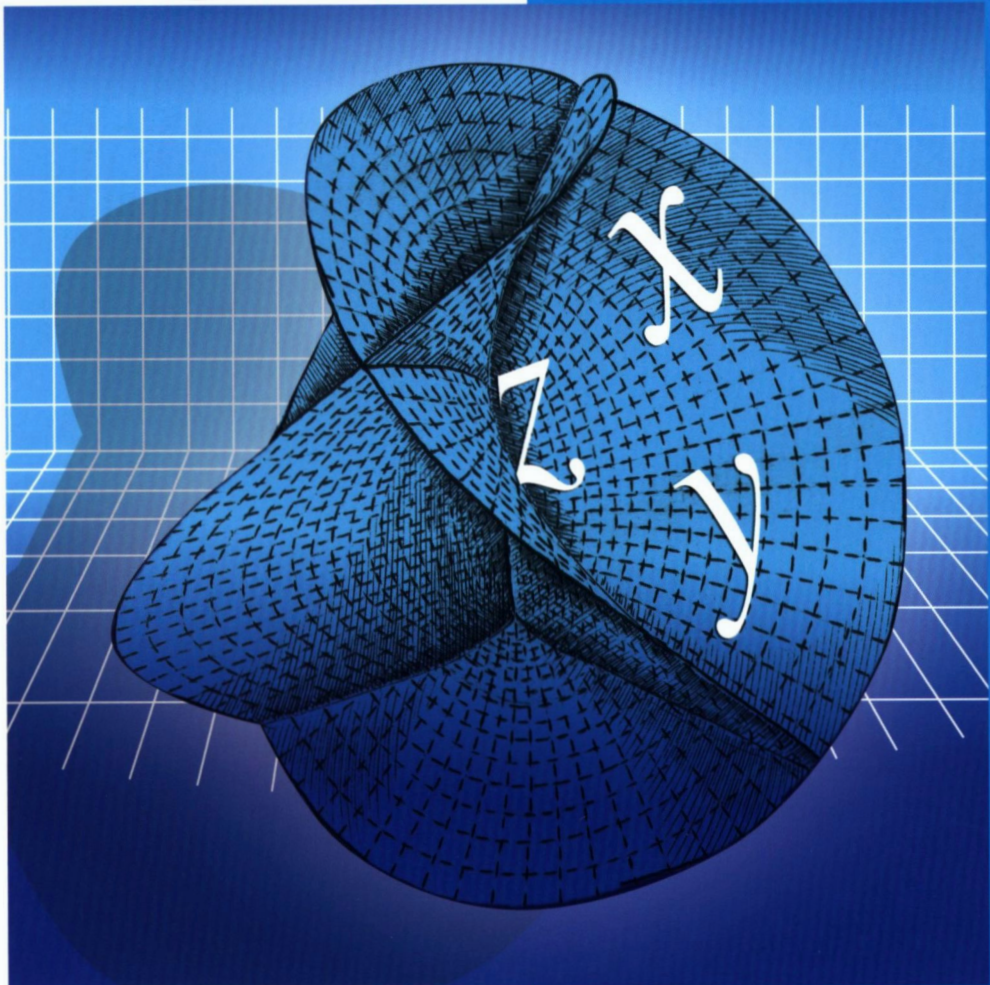


# Les équations algébriques



Aborder les **inconnues**





**Tangente Hors-série n° 22**

**Les équations  
algébriques**

**Aborder les inconnues**

Sous la direction d'Hervé Lehning



© Éditions POLE - Paris 2005 (édition augmentée 2012)

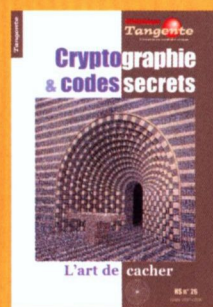
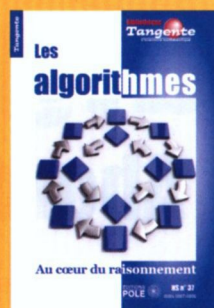
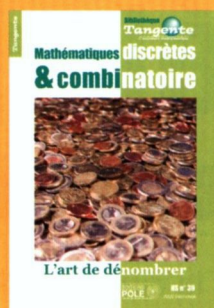
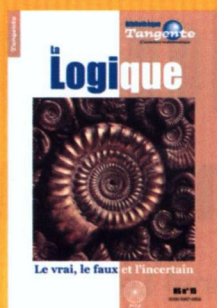
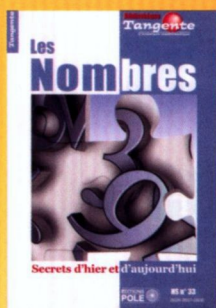
Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite, et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. Réf. : Loi du 11 mars 1957.

ISBN : 9782848841397

ISSN : 0987-0806

Commission paritaire : 1016 K 80883

Retrouvez dans la Bibliothèque  
Tangente les différents champs  
d'application de l'algèbre.



# Les équations algébriques

# Sommaire

## À la recherche des inconnues

Partages et héritages amenaient déjà les Anciens à résoudre des équations sans le savoir. Au fil des siècles, la manière d'aborder les équations et leurs méthodes de résolution ne cessèrent d'évoluer.

### DOSSIER

#### Résolution exacte

De simples manipulations algébriques permettent de résoudre toutes les équations de degré au plus 4. C'est Galois qui établit l'impossibilité de poursuivre ces manipulations avec succès pour le degré 5.

Au temps du certificat d'études	10
À la recherche des racines évidentes	14
Les manipulations algébriques	18
Rafaele Bombelli	23
Cardan, Tartaglia et le troisième degré	24
L'équation du scribe Ahmes	26
Qu'est-ce qu'un groupe ?	28
Évariste Galois	32
Le premier article de Galois	34
Les équations réciproques	37
L'impossibilité de Galois	38
Les équations sur le comptoir	42
L'esprit de l'escalier	44

### DOSSIER

#### Résolution géométrique ou graphique

La découverte du premier irrationnel remet en cause la représentation des grandeurs. Elle amena les Grecs à s'intéresser aux solutions d'équations constructibles à la règle et au compas.

Le premier irrationnel	48
Un problème d'algèbre à la règle et au compas	52
Le problème des deux échelles	58
Des équations, mais pas de calculs !	60
Les nombres constructibles	64
L'étoile en or	70
Les courbes à résoudre	72
Les abaques	76

6

9

10

14

18

23

24

26

28

32

34

37

38

42

44

47

48

52

58

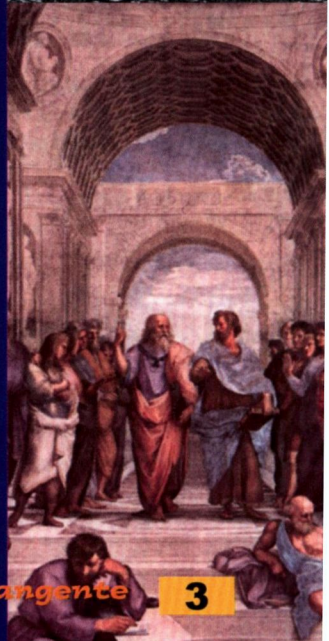
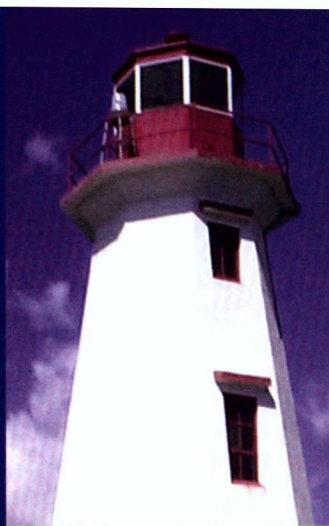
60

64

70

72

76



**DOSSIER****Résolution numérique approchée**

77

Faute de trouver à une équation des solutions rationnelles exactes, on peut en obtenir des approximations rationnelles très fines grâce à des méthodes itératives. La plus simple est la dichotomie. Quant à la méthode de Newton, elle a pris sa pleine puissance grâce aux ordinateurs.

Les méthodes itératives	78
Où sont les racines ?	82
Joseph-Louis Lagrange	83
Autour du théorème de Sturm	84
Des racines au goutte à goutte	88
Al Khwarizmi	91
L'équation du beau	92
François Viète	95
Quel est le taux effectif d'un emprunt ?	96
La méthode de Bairstow	100

**DOSSIER****Au-delà des équations**

103

En cherchant à résoudre les équations algébriques, les mathématiciens firent des découvertes dépassant de loin ce domaine : les nombres complexes, la transcendance, la théorie de Galois et bien d'autres...

Jean le Rond d'Alembert	104
Les anneaux de polynômes	106
Les livres à équations	111
Le champ des complexes	112
Karl Friederich Gauss	116
Puiseux et les coefficients en $t$	118
Algébriques et transcendants	124

**DOSSIER****Énigmes policières  
Équations à problèmes**

127

Bien des problèmes de mathématiques, célèbres ou pas, se ramènent à la résolution d'une ou plusieurs équations. Il en est de même des énigmes des romans policiers.

Diophante et ses équations	128
Pierre de Fermat	132
Le problème des bœufs du Soleil	134
Le crime en équation	140
Flair policier	144
L'hyperbole du crime	146
L'équation des prisons	148

En bref	5, 151
Note de lecture	37
Problèmes	152
Solutions	156



# Vous et les équations

## Adorables

Ah ! les équations ! ... Il y a ceux qui les aiment, et parmi eux, même des hommes de lettres connus, comme Stendhal. C'est avec admiration qu'il parle de son professeur de mathématiques, celui qui lui a enseigné les équations du second degré :

*Et, en homme de sens, il se mit à nous montrer ces équations, c'est-à-dire la formation d'un carré de  $a + b$  par exemple, qu'il nous fit élever à la seconde puissance :*

*$a^2 + 2ab + b^2$ , la supposition que le premier membre de l'équation était un commencement de carré, le complément de ce carré, etc, etc, ... C'étaient les cieux ouverts pour nous ou, du moins pour moi.*



## Haissables

Il y a ceux qui les détestent, sur qui elles tombent comme une malédiction, et qui ne le cachent pas. Victor Hugo, par exemple, ne mâche pas ses mots dans ce poème issu des *Contemplations* :

*J'étais alors en proie à la mathématique,*

*Temps sombre ! enfant ému du frisson poétique,*

*Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,*

*On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ;*

*On me faisait de force ingurgiter l'algèbre ;*

## Abstraites

Et vous ? Vous êtes nombreux à vous demander ce que peut bien signifier cet  $x$  noyé dans cet alignement de symboles, à vous demander, comme le font parfois les enfants : «  $x$ , c'est **un** nombre ou **des** nombres ? » Vous êtes nombreux à ramener les mathématiques à une suite sans fin d' $x$  et d' $y$ . D'ailleurs, vous n'avez pas tort : feuillotez un livre de mathématiques, il y a des  $x$  et des  $y$  à toutes les pages.

Dans votre scolarité, ces deux malheureuses lettres vous obsédaient tellement que, si on vous parlait simplement d'une fonction  $f$  et de sa valeur  $f(x)$ , vous vous empressiez de résoudre l'équation  $f(x) = 0$ , sans même qu'on vous l'ait demandé ! On peut vous comprendre, le traumatisme est lourd : non seulement il vous a fallu apprendre à jongler avec les symboles mathématiques, mais à modéliser une situation en remplaçant des détails concrets qui vous « parlaient » par des êtres algébriques abstraits qui restaient muets pour vous, pire, qui vous semblaient hostiles. Il vous a fallu en plus apprendre à « naviguer à l'aveugle » en ayant perdu de vue le problème initial, guidé par votre seule confiance dans l'algèbre et l'efficacité de ses méthodes... piètre consolation !

Et pourtant, si vous saviez combien a été long le chemin jusqu'à nos  $x$  et nos  $y$  d'aujourd'hui ! Combien il a fallu d'essais et d'erreurs dans les notations algébriques pour en arriver là ! Combien de cohortes de mathématiciens ces dernières lettres de l'alphabet ont empêchés de dormir ! Combien de progrès faits grâce à ces deux petites lettres ! Là où la simple arithmétique n'était plus opérante, elles ont permis de simplifier des problèmes, d'en résoudre, et de fort compliqués, et elles ouvrent encore des perspectives ! Si vous saviez tout cela, non seulement vous vous sentiriez moins seul dans votre angoisse des équations, mais vous commenceriez à entrevoir que, loin de chercher à vous nuire, elles peuvent vous aider à comprendre le monde qui nous entoure.

# À la recherche des inconnues

**Partages équitables ou héritages en tous genres, les problèmes concrets de la vie quotidienne amenaient déjà les Anciens à résoudre des équations sans le savoir. Recherche d'exactitude, naissance de l'inconnue, évolution des méthodes de résolution... la manière d'aborder les équations n'a cessé d'évoluer au cours des siècles.**

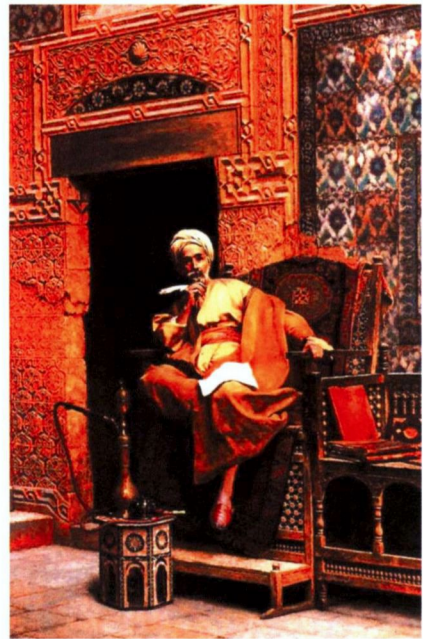
**D**eux millénaires avant Jésus-Christ, le scribe Ahmes devait partager six pains entre dix personnes. Cette part inconnue, il la trouva sous la forme :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

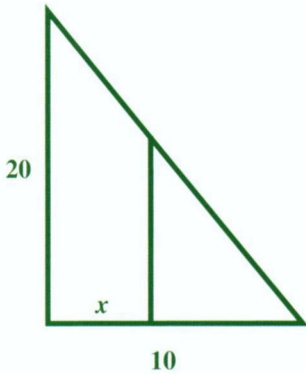
Il ne savait pas qu'il venait de résoudre une équation du premier degré. La question était concrète, la réponse aussi : pour partager six pains en dix, il suffit d'en couper cinq en deux et l'autre en dix.

## La naissance agricole du second degré

D'un problème de partage, une inconnue était née. Sans le savoir encore, elle était solution d'une équation du premier degré. Les problèmes d'héritages de champs non rectangulaires ont



donné naissance au second degré (cf. figure ci-après).



**Le partage de ce champ triangulaire en deux parties égales suivant la ligne indiquée conduit à l'équation du second degré :  $x^2 - 20x + 50 = 0$**

Le troisième degré est venu de considérations mathématiques plus subtiles : trisection de l'angle et duplication du cube. La curiosité mathématique a produit le reste même si chaque degré a sa justification pratique.

### La volonté d'exactitude

De même que nos notaires, les scribes ne cherchaient que des solutions approchées. La volonté d'exactitude n'est venue qu'avec la véritable naissance des mathématiques. Pour les pythagoriciens, tout était nombre et le nombre était la mesure de tout. Autrement dit, entre deux grandeurs, il existait toujours une commune mesure. Cette idée les conduisait à ne chercher que des solutions rationnelles aux problèmes qu'ils se posaient. Ce programme trébucha sur le calcul de la diagonale d'un carré (cf. figure ci-contre).

En effet, la solution ne s'exprime pas comme rapport de deux nombres entiers. L'idéal d'exactitude des géomètres grecs fut néanmoins sauvé par une transformation de leur exigence : la grandeur devait être constructible à la règle et au compas.

## Qu'est-ce qu'une équation algébrique ?

Résoudre une équation algébrique, c'est déterminer la ou les valeurs d'une *inconnue* souvent notée  $x$  obéissant à une relation où n'interviennent que des opérations simples : additions et multiplications, ainsi que le symbole d'égalité. Une telle « équation algébrique » peut se ramener à la forme :  $P(x) = 0$ , où  $P$  est un polynôme de  $x$ , c'est-à-dire une combinaison de puissances de  $x$  et de nombres (réels dans la plupart du temps).

$ax + b = 0$  est une équation de degré 1.

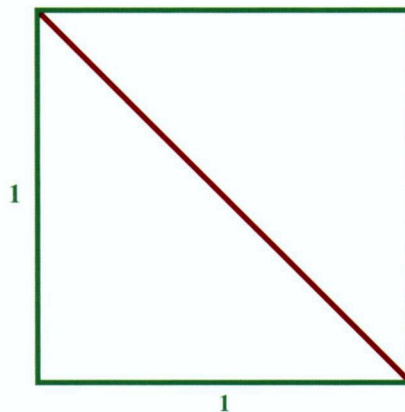
$ax^2 + bx + c = 0$  est une équation de degré 2.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  est une équation du 3<sup>e</sup> degré. Etc.

G. C.

## *Les pythagoriciens croyaient qu'il existait toujours une commune mesure entre deux grandeurs.*

Cette méthode ne doit pas être comprise de manière approchée comme pourrait le faire penser l'utilisation d'instruments aussi peu précis. Elle devrait l'être de façon exacte... dans le cas idéal où règle et compas ne commettraient aucune erreur.



**Le calcul de la longueur de la diagonale du carré conduit à la résolution de l'équation :**

$$x^2 - 2 = 0$$

### La naissance des équations

L'inconnue prit progressivement un statut de nombre avec Diophante au troisième siècle après Jésus-Christ puis Al Khwarizmi au neuvième en acquérant un nom : arithmos (nombre en grec) pour l'un et shay' (chose en arabe) pour l'autre. Les algébristes italiens de la Renaissance utilisèrent encore ce type de vocables. Elle ne devint  $x$  qu'au dix-septième siècle avec Descartes. Ce fut une découverte géniale car, sous ce nom, notre inconnue fit la conquête du monde mathématique avant d'envahir tous les milieux au point de devenir objet de plaintes et même mère d'enfants non désirés. En parallèle, grâce à ces nouvelles notations, les équations pouvaient enfin naître.

### Les équations dans l'imaginaire

A l'instar de  $x$ , elles envahirent l'univers au delà du monde des mathématiques. Qui, de nos jours, ne cherche à établir des équations ? La vie, la joie, l'amour, la mort, la folie, le bonheur, le malheur, la fortune, le beau, le crime et le don, tout possède son équation et donc sa solution dans l'imaginaire moderne. C'est ici en effet qu'opère la magie des mots : qui dit équation, dit



solution mais, bien entendu, nous sortons ici des mathématiques pour pénétrer l'imaginaire qu'elles ont engendré, un monde où tout problème a nécessairement sa solution. La contraposée de cette croyance est la devise des Shadoks :

*S'il n'y a pas de solution, il n'y a pas de problème.*

### Résolution par radicaux

Simultanément à la naissance des équations, l'idéal d'exactitude géométrique des Grecs se transforma en un idéal d'exactitude algébrique. L'inconnue se devait d'être exprimée à l'aide de radicaux c'est-à-dire de racines carrées, cubiques, etc. Cardan et Ferrari découvrirent comment résoudre ainsi les équations de degré trois et quatre au seizième siècle puis les algébristes cherchèrent longtemps à trouver de même les solutions des équations de degré cinq et au delà. Au dix-neuvième siècle, Evariste Galois montra que leur quête était vaine. Le monde des Shadoks s'était écroulé bien avant qu'il ne soit imaginé par Jacques Rouxel. Tout problème n'a pas de solution exacte.

Ainsi, trouver une formule résolvant une équation est en général illusoire. En revanche, il est toujours possible de la résoudre de façon approchée avec toute la précision que l'on peut désirer. Étrangement, ces méthodes numériques n'ont acquis un véritable statut mathématique qu'assez récemment. Le clivage entre mathématique pure et appliquée, entre solutions exactes et approchées reste une part de notre héritage grec.

H.L.

# Résolution exacte



Au temps du certificat d'études	p. 10
À la recherche des racines évidentes	p. 14
Les manipulations algébriques	p. 18
Rafaele Bombelli	p. 23
Cardan, Tartaglia et le troisième degré	p. 24
L'équation du scribe Ahmes	p. 26
Qu'est-ce qu'un groupe ?	p. 28
Evariste Galois	p. 32
Le premier article de Galois	p. 34
Les équations réciproques	p. 37
L'impossibilité de Galois	p. 38
Les équations sur le comptoir	p. 42
L'esprit de l'escalier	p. 44

Au temps du certificat d'études, les instituteurs enseignaient des méthodes de calcul proches de l'algèbre sans toutefois l'utiliser. Certaines étaient de facture géométrique, à la mode d'Euclide ou d'Archimède, et d'autres, plus algébriques, inspirées par Diophante. Pourtant, de simples manipulations algébriques comme celles d'Al Khwarizmi ou de Cardan permettent de résoudre toutes les équations de degré au plus quatre. Ces calculs ont mené Bombelli à la découverte des nombres complexes et Galois à l'impossibilité de poursuivre ces manipulations avec succès. Ce dernier consacra en outre son premier article aux équations et plus précisément aux « fractions continues ».

# Au temps du certificat d'études

**Au temps du certificat d'études, les instituteurs enseignaient des méthodes de calcul proches de l'algèbre sans toutefois l'utiliser. Fausses quantités, proportionnalité et astuces graphiques étaient alors au goût du jour.**



C'était au temps de la « communale », celui des « leçons de choses », où l'on étudiait le calcaire et le graphite à la rentrée des classes à cause de la craie et du crayon à papier, le raisin en automne à cause des vendanges et l'orange en

décembre, à cause de celles qu'on offrait à Noël. C'était aussi le temps où les livres de mathématiques ressemblaient à des bréviaires, le temps de la « règle de trois », des problèmes de mélanges, du calcul du titre d'un alliage, de la règle du « tant pour cent », fleurons du fameux « certificat d'études primaires », diplôme national en vigueur en France entre 1880 et 1889. Il existait alors un « champ mathématique » propre à l'école primaire, qu'elle soit « élémentaire » ou « supérieure ». On y apprenait aux « enfants du peuple » à résoudre par des techniques purement arithmétiques parfois subtiles des problèmes qui pouvaient être très savants. Par contre, dans l'enseignement secondaire, réservé à l'élite sociale, on parlait déjà « algèbre », inconnues et équations.

## Futés les calculs

*Un marchand achète une pièce d'étoffe à 5 F le mètre. Il en vend le tiers à 6 F le*

mètre, le quart à 7 F et le reste au prix coûtant. Il réalise ainsi un bénéfice de 70 F. Quelle est la longueur de la pièce ?

Voilà un problème-type de la préparation au « certificat d'études », où les quantités cherchées sont liées aux données de façon linéaire. Il donnerait lieu, sous une forme algébrique, à une équation  $ax = b$ . Si l'on s'interdit cette formulation, qui effectivement était hors des programmes des écoles primaires, on peut toutefois raisonner « comme en algèbre » et commencer par prendre comme inconnue le nombre de mètres achetés. Cependant, au lieu de désigner cette inconnue par  $x$ , on va lui donner une valeur arbitraire, « posée selon notre bon plaisir » disait Francès Pellos, dans son « Compendion de l'abaco » en 1492 et faire les calculs à l'aide de cette fausse position ou *regula falsi*, selon le raisonnement qui suit :

- Si le marchand avait acheté 12 mètres de tissu, il aurait dépensé  $12 \times 5 = 60$  F.
- Pour la vente du tiers, il aurait reçu :  $4 \times 6 = 24$  F.
- Pour la vente du quart il aurait reçu :  $3 \times 7 = 21$  F.
- Pour le reste, il recevrait :  $5 \times 5 = 25$  F.
- Il recevrait donc en tout : 70 F.
- Son bénéfice sur 12 mètres serait de : 10 F.
- La pièce contient donc autant de fois 12 mètres que 10 est contenu de fois dans 70.
- Elle a donc pour longueur

$$\frac{12 \times 70}{10} = 84 \text{ mètres}$$

Le raisonnement final est une simple opération de proportionnalité, qu'on retrouve dans la formulation algébrique. En effet, si l'équation du problème était  $ax = b$ , et si la fausse position  $x'$  conduisait au résultat  $b'$ , autrement dit si  $ax' = b'$  on aurait, par proportionnalité,



$$\frac{x}{x'} = \frac{b}{b'} \text{ d'où } x = \frac{bx'}{b'}$$
 ce qui

conduirait exactement au résultat trouvé :

$$\frac{x}{12} = \frac{70}{10} \text{ d'où } x = \frac{12 \times 70}{10} = 84 .$$

Ce mode de calcul, notons-le au passage, permet d'éviter le calcul du coefficient  $a$  de l'équation initiale. Le calcul formel sur les fractions pouvant par ailleurs, pour les élèves ne dépassant pas le stade de l'école primaire, présenter certaines difficultés, comme :

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x = \frac{1}{12}x,$$

la méthode de fausse position permet de l'éviter. Par contre, la simplicité de la formulation algébrique ne rend plus compte des difficultés que peut présenter la résolution purement arithmétique du problème, qui résident d'une part dans le choix de la « bonne » fausse position comme 12, choisi ici pour être à la fois multiple de 3 et multiple de 4, d'autre part dans la conceptualisation de la proportionnalité. La méthode se généralise à des problèmes que l'algébriste qualifierait de « systèmes de deux équations à deux inconnues » comme celui-ci :

Dans une salle de spectacle il y a des places à 2,50 F et à 6 F. Il est entré 1 080 personnes et la recette a été de 4 275 F. Dire combien on a distribué de places de chaque sorte.

- Si tous les spectateurs avaient pris des places à 6 F, la recette aurait été de  $1\,080 \times 6 = 6\,480$  F.
- Or la recette est de 4 275 F, soient 2 205 F de moins.
- Chaque fois que l'on remplace une place à 6 F par une place à 2,50 F, on perd 3,50 F
- Le nombre de places à 2,50 F est donc égal au nombre de fois que 3,50 est contenu dans 2 205, soient 630.
- Il y a donc dans ce théâtre 630 places à 2,50 F et 450 places à 6 F.

En traduction algébrique, cela donnerait, en appelant  $x$  le nombre de places à 2,50 F et  $y$  le nombre des places à 6 F,  $2,5x + 6y = 4\,275$  et  $x + y = 1\,080$ , qu'on résoudrait par combinaison linéaire ou par substitution pour trouver  $x = 630$  et  $y = 450$ .

La méthode de fausse position tenait donc lieu de calcul algébrique et l'on résolvait ainsi nombre de problèmes dits « de la vie réelle » : vente de bestiaux connaissant la valeur de chaque tête, le nombre de têtes et la valeur totale, mélange de pièces de monnaie dont on donne le poids total et la valeur totale, partage d'un capital en deux parties distinctes et donnant un revenu total connu... Sans oublier le fameux problème des deux robinets de débit connu, emplissant un bassin dans un temps total donné et dont on demande combien de temps chacun a fonctionné.

### Astucieux les graphiques

Si les problèmes précédents se résolvait, avec subtilité certes, mais à l'aide du seul calcul, il est des types de problèmes pour les-

quels le recours au graphique était recommandé, voire indispensable. En voici un exemple :

*On veut partager 396 francs entre deux personnes de manière que l'une ait 8 fois plus que l'autre. Trouver la part de chacune.*

Le dessin de simples segments suffit à nous guider vers la solution :



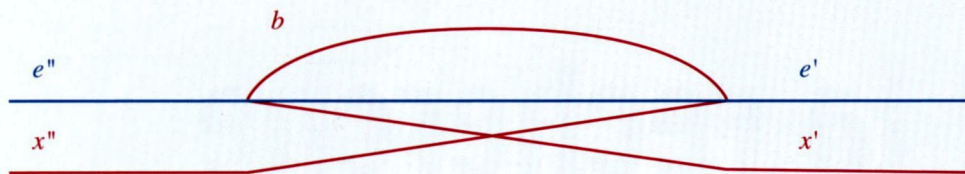
L'élève d'alors savait immédiatement que la part de la première était obtenue en divisant 396 par 9 et celle de la seconde en multipliant par 8 le résultat.

La méthode de fausse position pouvait elle aussi se compliquer et devenir la « double fausse position » qui se décrit très simplement. Tout problème linéaire peut se ramener à la résolution de l'équation  $ax = b$ . En considérant cette fois, non plus une, mais deux fausses positions  $x'$  et  $x''$ , on est conduit à écrire  $ax' = b'$  et  $ax'' = b''$ . En prenant  $x'$  au lieu de  $x$  on induit une erreur  $e' = x' - x$ , de même l'erreur induite par  $x''$  est  $e'' = x'' - x$ . La connaissance de ces deux erreurs permet d'affirmer que

$$x = \frac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}$$

cela se vérifie aisément.

On pouvait donc ainsi résoudre un problème linéaire sans même connaître aucun des coefficients de son équation. La mémorisation de la formule n'étant pas simple, on a inventé une astuce graphique qui permettait de la mettre en œuvre, la « règle de la croix », inspirée de la « règle des plateaux » mise à la mode par le mathématicien arabe Ibn al-Banna (1256-1321).



La règle des plateaux

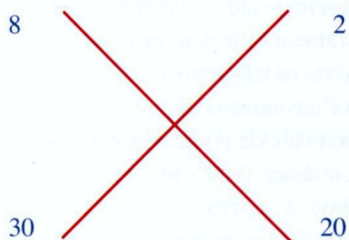
Les deux « fausses positions » étaient donc placées sur les plateaux, la valeur du résultat attendu sur la « coupole », les erreurs au-dessus si elles sont par excès, en-dessous si elles sont par défaut, et le calcul de l'inconnue se mettait aisément en œuvre. Ce dessin caractéristique s'est transformé par la suite et il est resté dans nos anciens livres d'arithmétique sous forme d'une croix.

Essayons d'appliquer cette astuce graphique à la résolution d'un petit problème d'arithmétique issu lui aussi d'un livre d'arithmétique préparant au certificat d'études.

*Un père a 28 ans, son fils en a 3.  
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le double de celui du fils ?*

- Si c'était dans 20 ans, le fils aurait 23 ans et le père 48 au lieu de 46, soit une erreur par excès de 2.
- Si c'était dans 30 ans, le fils aurait 33 ans et le père 58 au lieu de 66, soit une erreur par défaut de 8.

Dessignons la croix :



Vu la nature des erreurs, la formule donnant le nombre d'années cherché sera :

$$\frac{20 \times 8 + 2 \times 30}{8 + 2} = 22.$$

Que ce soit par des artifices d'arithmétique ou des astuces de dessin, et en n'utilisant que des règles très élémentaires, on pouvait apprendre à venir à bout de problèmes pas toujours simples, en se passant totalement d'équations.

É.B.



# À la recherche des racines évidentes

**En mathématiques comme ailleurs, les équations algébriques à coefficients entiers foisonnent. Comment les résoudre ? Pas si simple, surtout quand leur degré dépasse 2 ! Mais la situation n'est pas pour autant désespérée.**

L'une des plus belles pages de l'histoire des mathématiques s'est écrite durant la recherche plusieurs fois millénaire d'une méthode systématique et générale pour résoudre ce qu'on appelle les équations algébriques à coefficients entiers.

Contrairement à ce que pourrait laisser croire leur nom quelque peu barbare, ces équations sont les plus immédiates qui peuvent apparaître dans des problèmes concrets. Pour saisir leur importance, rappelons brièvement quelques outils de base indispensables à la résolution de bien des problèmes faisant appel aux mathématiques.

## Une indescriptible expression

Tout d'abord se trouvent les nombres, entiers ou éventuellement rationnels (pas de radicaux). Viennent ensuite les opérations classiques : addition, soustraction, multiplication et division. Notons que la multiplication permet de

définir l'élévation à une puissance entière (et positive). Enfin, il y a la relation d'égalité entre deux nombres, qui donne corps à la notion d'équation.

Introduisons à présent une inconnue, notée  $x$  depuis Descartes, qu'il s'agira de déterminer. Avec les outils que nous nous sommes autorisés à utiliser, toute équation en  $x$  s'écrira a priori comme quelque chose du genre de l'expression suivante :

$$x^{12} - \frac{42,7}{x^2 + 3x} + \left( 54x - \frac{2}{-\frac{x}{3} + x^4} \right)^8 = 11 - (7x + 5,65)^3$$

Présentée sous cette forme, on voit mal comment cette relation pourrait nous permettre de déterminer la (ou les) valeur(s) de l'inconnue  $x$ . Heureusement, il existe une méthode pour exprimer toute équation de ce type sous forme d'un polynôme à coefficients entiers, c'est-à-dire d'une somme de termes de la forme  $mx^n$ , où  $m$  et  $n$  sont des entiers.



La recette est d'ailleurs classique (bien que quelques précautions soient parfois nécessaires) : exprimons tous les décimaux sous forme de fractions de nombres entiers, développons toutes les expressions entre parenthèses, réduisons tous les termes au même dénominateur que l'on supprime alors. On se retrouve finalement avec une somme de puissances de  $x$  affectées de coefficients entiers (qui doit être égale à zéro en « passant à gauche » le membre de droite de l'équation).

Cette démarche quelque peu abstraite nous montre qu'une immense classe de problèmes de détermination d'une inconnue se ramène à la résolution d'une équation du type :

$$15x^7 - 6x^4 - 11x + 3 = 0,$$

qu'on appelle un polynôme en  $x$  à coefficients entiers (plus précisément, le polynôme est ici le membre de gauche).

Les quantités  $x^7, x^4, x (= x^1)$  et  $1 (= x^0)$  sont les puissances de  $x$  qui intervien-

ent dans l'équation. La plus grande de celles-ci, 7, est le « degré » du polynôme. Enfin, 15, -6, -11 et 3 sont les coefficients du polynôme (ce sont tous des entiers).

### Démonstration de la méthode

Si  $\frac{p}{q}$  est racine du polynôme  $P$ , alors on peut écrire :

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

En multipliant par  $q^n$  et en passant à droite le dernier terme :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Factorisons par  $p$  à gauche :

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = (-a_0) q^n.$$

Une hypothèse de la proposition est que  $p$  et  $q$  n'ont pas de diviseur commun. Donc  $p$  et  $q^n$  n'en ont pas non plus, et l'expression précédente, couplée au lemme de Gauss, implique que  $p$  divise  $-a_0$ , donc  $a_0$  aussi, et la première partie de la proposition est démontrée. Pour prouver que  $q$  divise  $a_n$ , on utilise exactement le même procédé, en isolant  $a_n p^n$  et en factorisant par  $q$ .

## Racines et factorisation

Quand un polynôme  $P$  de degré  $n$  a une racine  $r$ , on peut écrire  $P(x)$  sous la forme  $(x - r)Q(x)$ , où  $Q$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . Pour démontrer cela en toute généralité, on reconsidère la division euclidienne pour lui donner un sens dans le cadre des polynômes.

Pour les nombres, il est assez clair qu'on peut faire une division euclidienne dans n'importe quelle base. En remplaçant alors formellement la base  $b$  par l'inconnue  $x$ , la division euclidienne prend sens pour des polynômes, pour lesquels existent donc aussi la notion de diviseurs, de facteurs premiers (on dit « irréductibles »), etc. Dans cette optique, dire qu'un polynôme  $P$  a  $r$  pour racine, c'est dire que le polynôme  $(x - r)$  est un diviseur de  $P$ .

### La chasse aux degrés

La résolution des équations du premier degré, c'est-à-dire celles de la forme  $ax + b = 0$  où  $a$  et  $b$  sont entiers, est complètement triviale : on trouve immédiatement que  $x = \frac{-b}{a}$ .

Les Babyloniens connaissaient déjà la méthode générale pour résoudre les équations du second degré, qui peuvent posséder zéro, une ou deux solutions que l'on détermine à l'aide du discriminant (vous vous souvenez,  $\Delta = \dots$ ). Les degrés 3 et 4 ne seront complètement résolus qu'à la Renaissance (ce sont les formules de Cardan et de Ferrari). À partir de là, on trouve un mur théorique qui interdit d'aller plus loin : aussi vrai qu'il ne saurait exister de rationnel égal à  $\sqrt{2}$ , on ne peut concevoir de formule générale analogue à celles des degrés 2, 3 ou 4 pour résoudre le degré 5 (ni, a fortiori, les degrés plus élevés). C'est un théorème, qu'a démontré le Français Évariste Galois au début du siècle dernier.

L'arithmétique permet cependant, un polynôme à coefficients entiers étant

donné, de déterminer toutes les solutions rationnelles de ce polynôme, ce qui n'est pas négligeable. Cette méthode est un cas particulier de ce qu'on appelle « critère d'irréductibilité d'Eisenstein », du nom de l'Allemand Ferdinand Eisenstein qui, comme Galois, vécut durant la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle et mourut prématurément avant d'avoir eu trente ans.

La méthode provient de la proposition suivante (pour la preuve, voir l'encadré *Démonstration de la méthode*) :

Soit le polynôme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ où } n \text{ est un entier } \geq 1, \text{ et où } a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \text{ et } a_n \text{ sont des entiers relatifs (avec } a_n \neq 0\text{). Supposons que}$$

$$x = \frac{p}{q} \text{ soit solution de l'équation}$$

$$P(x) = 0, \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des entiers tels}$$

que la fraction  $\frac{p}{q}$  soit irréductible.

Alors  $p$  divise  $a_0$  et  $q$  divise  $a_n$ .

À quoi va pouvoir nous servir ce résultat ? Soit le polynôme  $P$  suivant, dont on cherche les racines (les valeurs  $x$  pour lesquelles  $P(x) = 0$ ) :

$$P(x) = 5x^5 - 12x^4 - 24x^3 + 21x^2 + 28x + 6.$$

D'après le théorème de Galois, il n'existe pas de méthode générale pour trouver les racines de  $P$ , puisque celui-ci est de degré 5. Du coup, on pourrait être tenté de jeter l'éponge. Sauf si notre polynôme avait le bon goût de posséder une ou plusieurs racines évidentes, qui permettraient de le factoriser et de se ramener à un polynôme de degré inférieur à 5...

Voyons donc : 0 n'est pas racine, 1 non plus, 2 non plus, -1 non plus, -2 non

plus,  $\frac{1}{2}$  non plus,  $-\frac{1}{2}$  toujours pas (et

encore, j'abrège, parce que les vérifications sont assez pénibles à faire)... Au bout d'un moment, on abandonne.

Regardons à présent notre proposition :

elle nous dit que, si  $\frac{p}{q}$  est une fraction

irréductible racine de  $P$ , alors  $p$  divise 6 et  $q$  divise 5. Donc  $p$  ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 6 et leur opposées  $-1, -2, -3, -6$  (on n'a aucune raison d'exclure  $-n$  de l'ensemble des diviseurs de  $2n...$ ), et  $q$  appartient, lui, à l'ensemble  $\{-5, -1, 1, 5\}$ .

En remarquant que  $\frac{p}{q} = \frac{(-p)}{(-q)}$ , il vient

que les seules racines rationnelles possibles de  $P$  sont dans l'ensemble

$\{1, \frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5}, 3, \frac{3}{5}, 6, \frac{6}{5}, -1, -\frac{1}{5}, -2, -\frac{2}{5}, -3, -\frac{3}{5}, -6, -\frac{6}{5}\}$ .

C'est vrai que ça fait un peu beaucoup (16 valeurs), mais tout de même : on est sûr à 100 % que toutes les éventuelles « racines évidentes » sont là.



## Le vrai critère d'Eisenstein

Ce qu'on appelle le critère d'Eisenstein est plus théorique (et aussi plus précis) que la méthode que nous décrivons. Il s'attache à la factorisation d'un polynôme à coefficients entiers en produit de polynômes à coefficients rationnels. Citons-le pour mémoire : si  $P$  s'écrit sous la forme  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  et s'il existe un nombre premier  $p$  divisant tous les  $a_i$  à l'exception de  $a_n$ , et ne divisant pas  $a_0^2$ , alors  $P$  ne se factorise pas en produit de polynômes à coefficients rationnels. En particulier,  $P$  n'admet pas de racines rationnelles. Notons que, par exemple, le polynôme  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$  n'a pas de racines rationnelles (ni même réelles), mais qu'il se factorise pourtant en  $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$ .

Les plus courageux vérifieront que

$-\frac{3}{5}$  s'avère effectivement racine de  $P$ ,

mais qu'aucun autre élément de l'ensemble précédent n'en est une. L'affaire est dans le sac : on peut factoriser  $P$  par

$(x + \frac{3}{5})$ , et se ramener au degré 4 dont

on sait, par les formules de Ferrari, trouver les racines. Honnêtement : qui aurait eu la patience d'aller tester les

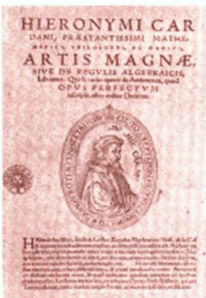
racines évidentes jusqu'à  $-\frac{3}{5}$  ?

Cela dit, restons modestes : si l'on remplaçait le coefficient 28 dans  $P$  par un 29, il n'y aurait plus de racine rationnelle, et l'on ne serait pas bien avancé. De plus, il y a deux autres racines à  $\sqrt{P}$  d'allure relativement simple :  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ , et celles-là, on n'avait aucune chance de les deviner..., à moins, peut-être, de perfectionner la méthode ? À vous de chercher !

B.R.

# Les manipulations algébriques

De simples manipulations algébriques permettent de résoudre toutes les équations de degré au plus quatre. Ces calculs ont mené à la découverte des nombres complexes et à l'impossibilité de poursuivre ces manipulations avec succès.



L'idée de base pour résoudre une équation algébrique est d'effectuer des manipulations algébriques pour la ramener à une forme déjà étudiée, les plus élémentaires étant :

$$x = a, x^2 = a, x^3 = a, \text{ etc.}$$

Sauf dans le premier cas, il reste alors une racine carrée, cubique ou autre à extraire. Au travers de quelques exemples, nous allons voir comment réaliser ce programme et les progrès théoriques auxquels il a mené.

## Changer de membre

Partons d'une équation du premier degré très simple :

$$2x - 5 = 0.$$

En ajoutant 5 à chacun des membres, on obtient :

$$2x - 5 + 5 = 5 \text{ c'est-à-dire } 2x = 5$$

et en les divisant par 2 :

$$2x / 2 = 5 / 2 \text{ c'est-à-dire } x = 5/2.$$

Le nombre 5/2 est donc la seule solution

possible de l'équation puisqu'en supposant (implicitement) que celle-ci existe, on obtient  $x = 5/2$ .

Réciproquement, 5/2 est bien solution de notre équation puisque :  $2(5/2) - 5 = 0$ . Cette réciproque peut sembler futile, elle évite cependant bien des erreurs.

## Relation entre coefficients et racines

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres de somme  $S$  et de produit  $P$  et formons :  
 $(x - a)(x - b) = x(x - b) - a(x - b)$   
 $= x^2 - xb - ax + ab = x^2 - (a + b)x + ab$   
 $= x^2 - Sx + P.$

Nous en déduisons que  $x^2 - Sx + P = 0$  si et seulement si  $x - a = 0$  ou  $x - b = 0$ . Les deux seules solutions de cette équation sont donc  $a$  et  $b$ .

Réciproquement, l'équation  $x^2 - Sx + P = 0$  a deux solutions  $a$  et  $b$  de somme  $S$  et de produit  $P$ .

*Pour résoudre une équation algébrique, on effectue des manipulations pour la ramener à une forme élémentaire.*

## Identifier remarquablement

Pour appliquer notre méthode au delà du premier degré, nous utilisons quelques identités remarquables. La plus simple d'entre elles est la suivante :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Voir l'encadré "des identités remarquables" pour une démonstration et d'autres identités utiles. Considérons donc l'équation du second degré :

$$x^2 + x - 1 = 0$$

De même que précédemment, nous faisons passer le terme constant à droite, nous obtenons :

$$x^2 + x = 1$$

Nous remarquons alors que le membre de gauche est le début d'un carré, plus précisément :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

On ajoute donc  $\frac{1}{4}$  à chaque membre

ce qui donne :  $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

et donc :  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Le nombre  $\frac{5}{4}$  ayant deux racines carrées :

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

nous obtenons :

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

d'où les deux solutions :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Comme précédemment, il est facile de vérifier que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation proposée. Dans le cas du second degré, les manipulations faites aboutissent à une méthode générale (voir l'encadré "une question de discriminant").

## Factoriser

Considérons l'équation du troisième degré :

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Sans savoir immédiatement la résoudre, nous remarquons que  $x = 1$  est solution puisque :

$$1 - 3 + 2 = 0.$$

## Une question de discriminant

Considérons l'équation générale du second degré :  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a$  est non nul.

De même que dans l'exemple du texte, nous pouvons l'écrire sous la forme :  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

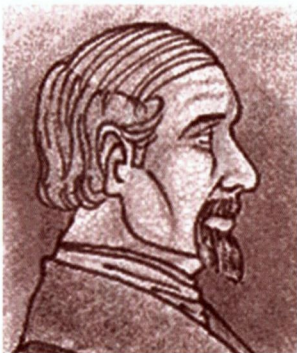
Or  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$  donc l'équation s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad \text{c'est-à-dire : } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

On en déduit que si  $b^2 - 4ac > 0$ , l'équation a deux solutions réelles :  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

si  $b^2 - 4ac = 0$ , elle en a une seule :  $x = \frac{-b}{2a}$  et si  $b^2 - 4ac < 0$ , elle n'en a pas.

La quantité  $b^2 - 4ac$  est nommé discriminant de l'équation car elle permet de discriminer entre les trois situations. Remarquez que  $ax^2 + bx + c$  est un carré parfait si et seulement si le discriminant est nul.



**Rafaële Bombelli**  
1526 - 1573

Cette information permet d'en baisser le degré car nous en déduisons que  $x - 1$  divise le polynôme :  $x^3 - 3x + 2$  (voir l'encadré "*racines et factorisation*"). Dans l'article sur "*l'arithmétique des polynômes*", nous voyons une méthode élégante pour trouver l'autre facteur. Nous pouvons également opérer de façon à

réduire progressivement le degré en faisant apparaître  $x - 1$  :

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= x^2(x - 1) + x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) + x - 3x + 2 \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) + -2(x - 1) \\ &= (x^2 + x - 2)(x - 1). \end{aligned}$$

Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, nous en déduisons que les solutions de l'équation  $x^3 - 3x + 2 = 0$  sont  $x = 1$  plus celles de l'équation du second degré :

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Il se trouve que  $x = 1$  est à nouveau solution, en opérant de même, nous obtenons :

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

Finalement,  $x = 1$  est solution double et  $x = -2$  est solution simple de l'équation donnée. Ici encore, la réciproque est évidente.

**Un problème équivalent**

Soit à trouver deux nombres  $x$  et  $y$  tels que :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Pour résoudre la question, nous opérons de même. En divisant la deuxième équation par  $x$ , nous obtenons :

$$y = -\frac{3}{x} \text{ et donc : } x - \frac{3}{x} = 2$$

d'où :  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

Avec la méthode précédente, nous obtenons alors :  $(x - 1)^2 = 4$

d'où  $x - 1 = \pm 2$  et donc deux solutions  $x = -1$  et  $x = 3$ . Comme  $y = -\frac{3}{x}$ ,  $y = 3$

dans le premier cas et  $y = -1$  dans le second.

Réciproquement,  $x = -1$  et  $y = 3$  vérifient bien :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Par symétrie, il en est de même si on échange  $x$  et  $y$ .

De façon plus générale, on montre que deux nombres ont pour somme  $S$  et pour produit  $P$  si et seulement si ils sont les deux solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Voir l'encadré "*relation entre les coefficients et les racines*" pour une démonstration.

**Des identités remarquables**

Pour démontrer l'identité remarquable :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , il suffit d'appliquer quelques règles de calcul simples comme la distributivité :  $(a + b)c = ac + bc$ .

Voyons ce procédé à l'œuvre :  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$ .

De même  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

car :

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Les autres identités remarquables essentielles sont :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ et } a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b).$$

Dans les deux cas, il est possible de généraliser ces identités à un ordre quelconque.

## Un calcul étrange

La remarque précédente conduit à une méthode très subtile pour résoudre les équations du troisième degré (voir l'article *Cardan, Tartaglia et le troisième degré*). Voyons comment Bombelli mène les calculs sur l'exemple suivant :  $x^3 - 15x - 4 = 0$ .

Il pose d'abord :  $x = u + v$  et utilise l'identité remarquable :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

pour obtenir :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 15(u + v) + 4.$$

Donc, en imposant la contrainte supplémentaire :  $uv = 5$ , l'équation se simplifie en :  $u^3 + v^3 = 4$ .

Bombelli pose alors  $U = u^3$  et  $V = v^3$ , il arrive au système :

$$\begin{cases} U + V = 4 \\ UV = 125 \end{cases}$$

c'est-à-dire au problème précédent.

Les solutions de ce système sont celles de l'équation du second degré :

$$X^2 - 4X + 125 = 0$$

qu'il transforme en :  $(X - 2)^2 = -121$ .

Bombelli aurait dû arrêter là son travail : cette équation n'a pas de solutions réelles ! Pourtant, il eut l'idée folle et géniale de continuer comme si  $-121$  avait une racine carrée. Il la nota seulement  $11\sqrt{-1}$  et obtint donc :

$$\begin{cases} U = 2 + 11\sqrt{-1} \\ V = 2 - 11\sqrt{-1} \end{cases}$$

Bombelli remarque alors que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

pour en conclure que :

$$\begin{cases} u = 2 + \sqrt{-1} \\ v = 2 - \sqrt{-1} \end{cases}$$

puis :  $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$ .

Le résultat est exact comme vous pouvez le constater :  $4^3 = 15 \times 4 + 4$ .

Un calcul a priori absurde permet d'obtenir un résultat exact ! En fait, de nouveaux nombres étaient nés sans que l'on comprenne bien ce qu'ils pouvaient signifier. Ils donnaient des résultats corrects que l'on pouvait vérifier, c'est pourquoi ils furent admis dans la grande famille des nombres. Toutefois, on les nomma "nombres imaginaires" pour les distinguer des autres qui, à cette occasion, devinrent les nombres réels. Ces nombres ne prirent une réalité que beaucoup plus tard sous le nom de nombres complexes. Un concept était né de pures manipulations algébriques.

On peut continuer la résolution de l'équation de Bombelli en factorisant  $x - 4$ , nous obtenons :

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Les deux autres solutions sont donc solutions de l'équation du second degré :  $x^2 + 4x + 1 = 0$

que l'on peut écrire :  $(x + 2)^2 = 3$

d'où les solutions :  $x = -2 \pm \sqrt{3}$ . Ces solutions n'ont pas été trouvées par Bombelli.

## Racines et factorisation

Supposons que  $x_0$  soit une racine de l'équation algébrique :  $P(x) = 0$

où  $P$  est un polynôme c'est-à-dire une somme de monômes c'est-à-dire d'expressions de la forme :  $a x^n$ . Autrement dit,  $P$  est de la forme :  $P(x) = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$

$P(x_0 + t)$  est également un polynôme donc s'écrit :  $P(x_0 + t) = A + Bt + Ct^2 + \text{etc.}$

Pour  $t = 0$ , nous obtenons :  $P(x_0) = A$  donc  $A = 0$  ainsi :  $P(x_0 + t) = t(B + Ct + \text{etc.})$ .

Nous en déduisons que :  $P(x) = (x - x_0)(B + C(x - x_0) + \text{etc.})$

donc, il existe un polynôme  $Q$  tel que :  $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ .

La réciproque est immédiate donc  $x_0$  est une racine de  $P(x) = 0$  si et seulement si  $x - x_0$  divise  $P$ .

Ce n'était pas une erreur car il ne s'intéressait qu'aux solutions positives.

**Résolution par radicaux**

Les algébristes italiens de la Renaissance ont ainsi réussi à résoudre toutes les équations jusqu'au degré 4 à condition de faire intervenir ces quantités imaginaires (voir l'encadré sur *Ferrari et le quatrième degré*). Eux-mêmes et leurs successeurs ont essayé de résoudre de la même manière l'équation générale du cinquième degré. Longtemps plus tard, Evariste Galois montrera que c'est impossible en reprenant le problème différemment. Voyons comment sur l'exemple de l'équation :  $x^2 - x - 2 = 0$  nous pouvons remarquer que ses deux

racines  $a$  et  $b$  vérifient :  $\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = -2 \end{cases}$

Nous pouvons donc calculer  $(a - b)^2$  sans connaître  $a$  et  $b$  puisque :

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

Donc :

$$(a - b)^2 = 1 + 8 = 9 \text{ et } a - b = \pm 3$$

Les deux nombres  $a$  et  $b$  sont donc solutions du système :  $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = \pm 3 \end{cases}$

En ajoutant et en retranchant ces deux équations, nous obtenons les deux solutions  $-1$  et  $2$ . La méthode de Galois est encore applicable aux équations de degrés trois et quatre mais pas au delà. Dans l'article sur "l'impossibilité de Galois", nous voyons pourquoi.

**H.L.**

**Ferrari et le quatrième degré**

Né à Bologne le 2 février 1522, Lodovico Ferrari arriva à la maison de Cardan à 14 ans pour y être domestique. Après avoir remarqué ses capacités intellectuelles exceptionnelles, Cardan le dispensa des tâches domestiques, le prit comme secrétaire et lui enseigna les mathématiques. En 1540, lorsque Cardan démissionna de la Fondation Piatti à Milan, Ferrari récupéra son poste en évinçant facilement son seul rival dans un débat et devint ainsi conférencier en géométrie, à l'âge de 18 ans. Il est mort en 1565.

Pour résoudre une équation du quatrième degré, Ferrari la met sous la forme :

$$(ax^2 + bx + c)^2 = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2$$

ce qui l'amène à résoudre deux équations du second degré. Voici comment il s'y prend sur l'exemple de l'équation :  $x^4 - 12x + 3 = 0$ .

Il introduit une quantité auxiliaire  $t$  pour écrire l'équation sous la forme :

$$(x^2 + t)^2 = 2t x^2 + 12x + t^2 - 3.$$

Il cherche alors  $t$  de sorte que le second membre soit un carré parfait. Cela correspond à un discriminant nul c'est-à-dire à :  $144 - 8t(t^2 - 3) = 0$ .

Nous sommes donc amené à résoudre une équation du troisième degré que Ferrari appelle la résolvante :  $t^3 - 3t - 18 = 0$ .

De façon générale, il est possible de lui appliquer la méthode de Cardan mais c'est inutile ici puisque  $t = 3$  en est solution. L'équation de départ s'écrit :  $(x^2 + 3)^2 = 6(x + 1)^2$  c'est-à-dire  $x^3 + 3 = \pm \sqrt{6}(x + 1)$ .

Il reste à résoudre les deux équations  $x^2 + \sqrt{6}x + 3 + \sqrt{6} = 0$  et  $x^2 - \sqrt{6}x + 3 + \sqrt{6} = 0$ . Seule la première a des solutions réelles :

$$\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2}$$

**H.L.**

# Rafaele Bombelli

**Ingénieur bolognais, Bombelli fut le premier à expliciter les règles de calcul sur les nombres complexes.**

**D**e Rafaele Bombelli (1526—1572) on sait surtout qu'il a été le premier à rédiger explicitement les règles de calcul sur les nombres complexes. Il a consigné tout cela dans son *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*.

Cardan, avant lui, s'était attaqué à la résolution des équations de degré 3, mais ses calculs le conduisaient selon le cas à considérer la racine carrée de nombres négatifs, si bien qu'il existait des cas où ses formules de résolution ne s'appliquaient pas. Bombelli, lui, n'a pas craint d'écrire une expression iconoclaste pour l'époque :  $\sqrt{-1}$ . Cela donnera le fameux nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , puis les nombres complexes, que Gauss va codifier.

Bombelli traita par exemple de l'équation  $x^3 = 15x + 4$ . Les formules de Cardan l'amènèrent à considérer le nombre  $(4/2)^2 - (15/3)^3 = -121$  et à donner comme solution :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Or, en calculant avec des nombres de la forme  $a + bi$  qu'il écrivait  $a + b\sqrt{-1}$ , il constate que  $2 + \sqrt{-121}$  est exactement le cube de  $2 + \sqrt{-1}$  et  $2 - \sqrt{-121}$  celui de  $2 - \sqrt{-1}$ .

Il peut donc s'offrir le luxe d'appliquer les formules de Cardan... même dans le

cas où elles étaient censées ne pas pouvoir s'appliquer et conclure que l'équation a pour racine 4. Les notations de l'époque étaient lourdes :  $4x^3 - 5x^2 = 10x + 3$  s'écrivait  $4Cm5Q \text{ aequatur } 10Rp3$ ,  $C$  désignant le cube (*cubus* en latin) de l'inconnue,  $Q$  son carré (*quadratus*),  $R$  l'inconnue (la chose, *res*),  $p$  et  $m$  plus et moins, *aequatur* signifiant « égale ». Malgré cela Bombelli écrivit la racine carrée de 2 sous la forme d'une fraction continue : ayant  $x^2 = 2$ , soit  $x^2 - 1 = 1$ , ou  $(x - 1)(x + 1) = 1$ , il en déduit :

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

En remplaçant indéfiniment  $x$  par le second membre de cette égalité, on obtient

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

fraction continue qui conduit à

$$1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{5}, 1 + \frac{5}{12}, \dots \text{ approximations}$$

rationnelles successives de  $\sqrt{2}$ .



É.B.

# Cardan, Tartaglia et le troisième degré

L'histoire des équations du troisième degré est étroitement liée aux noms de Cardan et de Tartaglia. Le premier publia une méthode astucieuse de résolution grâce aux formules «empruntées» au second.



Girolamo Cardano, 1501-1576

De son vrai nom **G** irolamo Cardano, ce mathématicien italien est né à Pavie et mort à Rome. C'est à l'université de Pavie qu'il étudie à la fois les mathématiques et la médecine. Installé à Milan, il y vit chichement à ses débuts en donnant des cours de mathématiques... et

surtout en établissant des horoscopes. Il devient par la suite non seulement un astrologue réputé, mais aussi un professeur de médecine de renom à l'université de Pavie.

Il laisse même son nom à un mécanisme d'articulation inventé pour la suspension de la boussole dans un bateau : le *joint de cardan*, ou tout simplement le *cardan*. Miné par la suite par les sou-

cis familiaux (son fils est exécuté pour avoir tué son épouse), puis accusé d'hérésie, il perd le droit d'enseigner et de publier ses résultats.

C'est à Milan qu'il est pris de passion pour les équations du troisième et du quatrième degré et qu'il publie ses résultats dans son *Ars magna* en 1545. Il tient de Tartaglia une formule de résolution de l'équation de degré 3 et la diffusion de la méthode de son collègue donne lieu à un conflit entre eux, mais les formules de résolution sont restées célèbres sous le nom de *formules de Cardan*.

Les équations de degré 3 étaient alors classées comme chez Al Khwarizmi, puisqu'on n'admettait pas les coefficients négatifs. Dans la résolution de l'équation  $x^3 + cx = d$ , l'idée géniale, initiée par Scipione del Ferro (1465-1526), reprise par Tartaglia et développée par Cardan, a été de chercher  $x$  sous le

*Cardan était un grand manipulateur.*

forme  $u + v$  et de choisir  $u$  et  $v$  de manière à annuler les termes qui ne contiennent pas de cube. L'équation se transforme alors en la recherche de deux nombres  $u^3$  et  $v^3$ , dont la somme vaut  $d$  et le produit  $-\frac{c^3}{27}$ .

Les coefficients de l'équation initiale étant essentiellement positifs, on trouve pour  $u^3$  et  $v^3$  deux valeurs distinctes, d'où la célèbre formule de Cardan donnant l'une des racines :

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Comme le disait Cardan dans la règle qu'il énonce :

*En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la chose...*

Il ira même beaucoup plus loin, donnant explicitement la forme de toutes les solutions, laissant même entrevoir l'existence des nombres imaginaires.

### Nicolo Tartaglia

Nicolo Fontana est blessé au visage lors de la prise de Brescia par les Français en 1512. Il reçoit donc le surnom de "Tartaglia", le bègue, à cause de difficultés d'élocution suite à sa blessure.

De famille pauvre, volant au besoin livres et cahiers pour pouvoir étudier, Tartaglia devient excellent en mathématiques, traduit par exemple les œuvres d'Archimède, rassemble ses résultats dans son *General trattato di numeri et misura* paru entre 1556 et 1560 et surtout participe à des

concours primés de défis mathématiques.

Résoudre trente équations de degré 3 en quelques jours ne lui fait pas peur, et il y parvient dans les délais, gagne le concours mais ne dévoile pas pour autant sa formule magique.

Cardan arrive à la lui soutirer en mars 1539, promettant de ce fait de ne jamais la divulguer ni la publier.

Non sans humour, Tartaglia cacha sa solution dans un petit poème :

*Lorsque le cube et les choses à côté  
S'égalent à quelque nombre discret :  
Trouves-en deux, espacés du connu,  
Et fais en sorte, suivant l'us,  
Que leur produit toujours égale  
Le tiers cubé des choses, net.  
Et le résidu général  
Des côtés cubes bien soustraits  
Te donnera la chose principale.*

L'inconnue est toujours la chose mais le vocabulaire, plus fleuri que celui de Cardan, conduit cependant au même résultat. C'est d'ailleurs grâce aux formules de Tartaglia que Cardan réussit à résoudre complètement les équations du troisième degré, et qu'il les publia dans l'*Ars Magna* malgré sa promesse. Il s'en estimait affranchi car Scipione del Ferro avait, lui, déjà diffusé la solution avant Tartaglia. D'où, on s'en doute, une méchante querelle entre Cardan et Tartaglia, qui défraya la chronique de l'époque.



Nicolo Tartaglia, 1499-1557

**Cardan rom-  
pît sa promes-  
se de ne pas  
divulguer la  
formule de  
Tartaglia**

É.B.

# L'équation du scribe Ahmes

Les documents archéologiques montrent qu'entre 2 500 et 1 500 avant Jésus-Christ, Babyloniens et Égyptiens résolvait des équations algébriques, mais avec des méthodes différentes de celles que nous utilisons aujourd'hui.

Surtout utilitaires et à vocation essentiellement économique, les mathématiques des anciens Babyloniens, faites d'arithmétique et d'algèbre, servaient à calculer des longueurs et des poids, régir les échanges d'argent et de marchandises, déterminer les impôts, mener les calculs d'intérêts, partager les héritages ou les récoltes, diviser les champs ou planifier la construction de canaux et barrages. Le système de numération, de base 60, était déjà un système de position, où la place des chiffres dans le nombre avait son importance et où l'on

utilisait déjà des fractions simples. Les écrits mathématiques des Babyloniens nous ont été transmis par des tablettes d'argile et datent d'environ 1 600 avant J.-C., mais l'écriture, les systèmes de mesures et l'arithmétique se sont développées en Mésopotamie,

dans la région entre le Tigre et l'Euphrate, à peu près l'Irak actuel, entre 3 500 et 3 000 avant J.-C..

## Résolution à la mésopotamienne

Les tablettes de Mésopotamie contiennent déjà nombre de problèmes que nous résoudrions aujourd'hui par des équations. Dans les textes, point d'inconnue mais des techniques de résolution énoncées plutôt comme des recettes de cuisine et des solutions rédigées en continu comme une suite de règles sans justification. Par exemple :

*J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'.*

45' désigne en fait la

fraction  $\frac{45}{60}$ , donc  $\frac{3}{4}$  et on se trouve

ainsi en présence de l'équation

$$x^2 + x = \frac{3}{4}.$$

La résolution des Babyloniens se fait tout autrement que celle que nous pourrions envisager. La tablette préconise :



Tu poseras 1 l'unité. Tu fractionneras en deux : 30'. Tu croiseras [30'] et 30' : 15'. Tu ajouteras 15' à 45'. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1. 30' le côté du carré.

Effectivement, le côté du carré, c'est-à-dire la solution positive de l'équation

est bien  $\frac{1}{2}$ , soit 30' avec la notation

utilisée. Cette résolution à la mésopotamienne tient de la recette. Elle utilise sans le dire les identités remarquables pour mettre

$x^2 + x = \frac{3}{4}$  sous la forme  $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$ ,

qu'elle résout immédiatement.

### La technique Égyptienne

En Égypte, à peu près à la même époque, existait aussi une mathématique très développée où l'on utilisait déjà les nombres entiers et des mesures des longueurs, des tables de multiplication et de division.

Les papyrus nous montrent toute une collection de problèmes d'arithmétique concrets et regroupés par thèmes. Là encore il est question de partages proportionnels de pains, de suites arithmétiques ou géométriques et d'équations du premier degré, où l'on emploie déjà des méthodes de fausse position, comme dans ce problème extrait du papyrus Rhind (vers 1 850 avant J.-C.).

*Cent pains en cinq personnes ; un septième des trois premières c'est la part des deux dernières. Quelle est la différence ?* La solution donnée par le scribe Ahmes, le copiste du papyrus, est pour le moins sibylline :

*Fais comme il arrive : différence 5  $\frac{1}{2}$ .*

$$23, 17 \frac{1}{2}, 12, 6 \frac{1}{2}, 1$$

*Fais croître les nombres 1 fois  $\frac{2}{3}$ , cela donne :*

$$23 \qquad 38 \frac{1}{3}$$

$$17 \frac{1}{2} \qquad 29 \frac{1}{6}$$

$$12 \qquad 20$$

$$6 \frac{1}{2} \qquad 10 \frac{2}{3} \frac{1}{6}$$

$$1 \qquad 1 \frac{2}{3}$$

### Ensemble 60 Ensemble 100

Cette rédaction contient de nombreux non-dits. D'abord il faut comprendre que la « différence » sous-entend que les parts de chacun sont en progression arithmétique de raison  $r$ .

$x$  est la plus petite part et les autres parts valent respectivement  $x + r, x + 2r, x + 3r$  et  $x + 4r$ . La somme des « trois premières » parts (les trois plus grandes) vaut  $3x + 9r$ , tandis que la somme des « deux dernières », les plus petites, vaut  $2x + r$ . Enfin, la somme totale des parts, soit 100 pains, vaut  $5x + 10r$ . On résout donc le système constitué des équations :  $3x + 9r = 7(2x + r)$  et  $5x + 10r = 100$ .

D'où  $x = 1 + \frac{2}{3}$  et  $r = 9 + \frac{1}{6}$ , ce qu'on

retrouve bien sur le papyrus. En fait, dans sa solution, le scribe utilise la fausse posi-

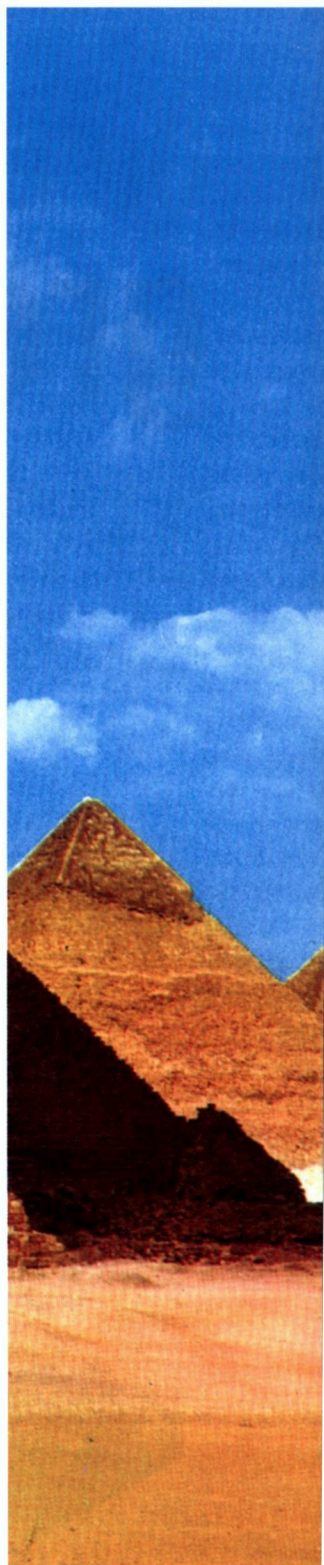
tion  $r = 5 \frac{1}{2}$  et  $x = 1$ . Avec ces valeurs il

obtient un total de 60 pains, d'où une multiplication de toutes les grandeurs par

le rapport  $\frac{100}{60}$ , qui vaut bien  $1 + \frac{2}{3}$ .

Une méthode déjà très sophistiquée !

É.B.



# Qu'est-ce qu'un groupe ?

**Si, chaque fois que vous effectuez une opération, vous pouvez « défaire » ce que vous venez de réaliser grâce à une opération inverse, il y a fort à parier que vous opérez dans un groupe. Or, c'est aussi ce qui sous-tend la résolution d'une équation : on cherche à factoriser une expression préalablement développée.**

**U**n groupe, on l'aura compris, est la conjonction d'un ensemble et d'une opération. Et de la même façon que depuis l'origine de la parole, les hommes font de la prose sans le savoir, depuis l'origine de la notion de nombre, ils utilisent la structure de groupe. L'ensemble de nombres le plus intuitif est celui des entiers positifs, l'opération la plus élémentaire est l'addition. Mais une fois que vous ajoutez un entier, 3 par exemple, aucune addition d'entier positif ne permettra de retrouver le nombre initial. Pour y parvenir, il faut soustraire 3,

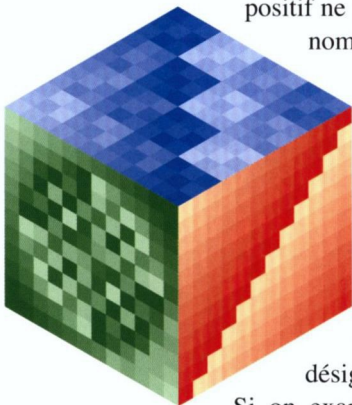
ou, pour ne pas changer d'opération, ajouter l'entier négatif  $-3$ . C'est donc l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls) qui forme un groupe *additif*. On le désigne par  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Si on examine maintenant l'autre

opération usuelle, la multiplication, on voit que les entiers ne font pas l'affaire. Une fois que vous avez multiplié un nombre par 3, la multiplication par aucun entier ne permettra de récupérer le nombre d'origine. Il faudra pour cela, vous l'aurez compris, multiplier par  $1/3$ , qui n'est pas un entier. Pour être un groupe, notre ensemble de nombre semble devoir, par exemple, être constitué des nombres fractionnaires, encore appelés nombres rationnels (on note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble de ces nombres). Mais attention, il faudra priver cet ensemble de zéro (on le note alors  $\mathbb{Q}^*$ ), car la multiplication par 0, on le voit bien, est irréversible ! Ainsi, un autre groupe a été mis en évidence, on peut le noter  $(\mathbb{Q}^*, \times)$ .

## Les axiomes de la structure de groupe

Historiquement, bien sûr, les choses se sont passé dans l'ordre inverse ! On est parti de ces deux ensembles (et de



quelques autres) munis de leurs opérations (on dit aussi leurs *lois de composition*), on a cherché leurs propriétés communes, et on en a fait les *axiomes* de la structure de groupe. Ainsi, un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition *interne*  $*$  (c'est-à-dire qu'en composant deux éléments de l'ensemble  $E$ , on obtient toujours bien un résultat qui est élément de  $E$ ) sera un groupe s'il vérifie les trois axiomes suivants :

### Axiome d'associativité

On peut grouper les opérations dans l'ordre qu'on souhaite :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

### Axiome de l'élément neutre

Il existe un élément  $e$  qui ne modifie pas le résultat quand on compose par lui : pour tout  $x$ ,  $x * e = e * x$

L'élément neutre est 0 pour l'addition, 1 pour la multiplication.

### Axiome de symétrisation

Tout élément  $x$  admet un symétrique  $x'$ , celui qui permet de défaire l'opération de composition avec

$$x : x * x' = x' * x = e$$

Pour l'addition, c'est l'opposé de  $x$  noté  $-x$ .

Pour la multiplication, c'est l'inverse  $1/x$ . De ce troisième axiome, résulte la *régularité* de l'opération, c'est-à-dire le droit de simplifier. En effet, si  $x * a = x * b$ , alors, en composant à gauche par le symétrique  $x'$  de  $x$ , et en utilisant l'associativité, on tire  $a = b$ . Même conclusion si on avait  $a * x = b * x$ .

On remarquera à ce propos que, bien que ce soit le cas de l'addition et de la multiplication, une loi de groupe n'est pas forcément *commutative*, c'est-à-dire que composer  $x$  et  $y$  n'est pas forcément la même chose que composer  $y$  et  $x$ . Le groupe peut ou non être un

*groupe commutatif* (on parle aussi de *groupe abélien*). Dans les groupes non commutatifs, certains éléments, naturellement, peuvent commuter entre eux, et même commuter avec tous les autres.

### Groupes finis

Qu'avez-vous fait à l'école primaire

pour retenir une opération ? Vous avez appris sa table ! Les lois de groupe n'échappent pas à la règle. Seulement voilà, construire la table d'addition des entiers, qui sont en nombre infini, demande beaucoup de place ! Heureusement, il existe des groupes finis. Le plus simple – d'accord, il n'est pas très intéressant – ne contient qu'un élément, l'élément neutre. Eh, oui, l'ensemble  $\{0\}$  formé du seul zéro est un groupe *additif* (muni de l'addition) !

Il existe aussi des groupes formés de seulement deux éléments ! Ainsi, l'ensemble  $\{+1 ; -1\}$ , muni de la multiplication, est un groupe (*multiplicatif* donc) ! Vous connaissez tous sa table :

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Revenons maintenant à l'addition. Quand vous additionnez deux nombres pairs, qu'obtenez-vous ? Et un nombre pair + un nombre impair ? Un nombre impair + un nombre pair

### Résoudre des équations

Pour un certain nombre de lois, il est possible de résoudre l'équation :  $a * x * b = c$ . Ce n'est pas le cas pour toute loi. Le contre-exemple le plus simple est celui de la multiplication dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  si  $a = 0$  ou  $b = 0$  et  $c \neq 0$ . Un autre plus subtil est celui de la multiplication matricielle si  $\det a = 0$  ou  $\det b = 0$ . D'autre part, quand cette équation a une solution, elle peut être unique ou non.

Hervé Lehning

? Et deux nombres impairs ? Vous l'avez compris, on peut considérer le doubleton  $\{P, I\}$ , quelquefois appelé  $\mathbb{Z}_2$ , dont les deux éléments sont l'ensemble  $P = 2\mathbb{Z}$  des entiers pairs et l'ensemble  $I$  des nombres impairs, et le munir d'une structure de groupe additif ! Voici, ci-dessous, sa table. Observez-la attentivement.

+	P	I
P	P	I
I	I	P

Vous avez bien compris ! Le code de couleurs que nous avons établi vous le montre de manière évidente : c'est la même table ! Seuls les noms ont changé !  $\times$  est devenu +, l'élément neutre 1 de la multiplication est devenu P, élément neutre de l'addition, - 1 est devenu I. Les deux groupes sont dits *isomorphes*, ce qui signifie qu'au changement de nom près, c'est le même groupe ! D'ailleurs, on montre très simplement qu'il n'y a qu'un seul groupe de cardinal 2 (à un isomorphisme près, bien sûr).

On montre de la même façon qu'il n'y a qu'un seul groupe de cardinal 3. Voici sa table :

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Cet unique groupe de cardinal 3 est encore commutatif : sa table présente une symétrie par rapport à la diagonale principale.

On peut en trouver un exemple en généralisant le procédé qui nous avait

permis de parvenir au groupe  $(\mathbb{Z}_2, +)$ . L'ensemble des entiers peut en effet être réparti en trois classes, dites *résiduelles modulo 3*, selon le reste de la division euclidienne par 3. L'ensemble  $\underline{0} = 3\mathbb{Z}$  des multiples de 3, l'ensemble  $\underline{1}$  des nombres qui s'écrivent sous la forme  $3k + 1$ , l'ensemble  $\underline{2}$  des nombres qui s'écrivent sous la forme  $3k + 2$ .

Quand on additionne deux nombres, le reste de la somme dans la division par 3 est entièrement déterminé par le reste de chacun des deux nombres, ce qui nous permet mettre en évidence le groupe  $\mathbb{Z}_3$  dont on construit aisément la table :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

**Le groupe  $\mathbb{Z}_3$**

Cette table est la même, à un isomorphisme près, nous n'en serons pas surpris, que la table du groupe général de cardinal 3 mis en évidence juste avant.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

**Le groupe  $\mathbb{Z}_4$**

$\times$	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)

**Le groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$**

Le procédé se généralise aux groupes additifs (commutatifs)  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \dots$  des classes résiduelles modulo 4, 5... On peut donc aisément construire des groupes commutatif de cardinal quelconque fixé.

G.C.

## Les ensembles de permutations : des groupes non commutatifs

Les groupes non commutatifs les plus usuels sont issus de la géométrie. Si l'ensemble des translations, muni de la composition, est un groupe commutatif, l'ensemble qui regroupe les homothéties et les translations, ou encore l'ensemble des *isométries* du plan (transformations du plan qui conservent les distances) forment des groupes non commutatifs. Mais ces groupes sont infinis.

Un autre contexte familier va nous fournir l'occasion de découvrir des groupes finis non commutatifs. Il s'agit des *permutations*.

Une permutation de  $n$  éléments – par exemple des entiers  $(1, 2, 3, \dots, n)$  – est une transformation qui consiste à changer l'ordre de ces éléments, c'est-à-dire à faire correspondre à chacun d'entre eux l'un des autres, mais de façon *bijective*, de sorte que chaque élément admette un antécédent et un seul. On commence à comprendre pourquoi il y a du groupe là-dessous : l'effet de chaque permutation peut être défait en utilisant la *permutation réciproque*. L'opération est la *composition* des permutations, notée du symbole  $\circ$ , qui consiste à les appliquer successivement. On remarque que, cette fois, le groupe n'est pas commutatif : si  $f$  et  $g$  sont deux permutations, il n'est pas équivalent d'appliquer d'abord  $f$  avant  $g$  (attention, piège, on note cette permutation composée  $g \circ f$ ) et d'appliquer  $g$  avant  $f$  (pour obtenir dans ce sens  $f \circ g$ ).

En dehors de l'*identité*, élément neutre de ce groupe, permutation qui transforme chaque élément en lui-même, autrement dit le laisse invariant, les permutations les plus simples sont les *transpositions*. Une transposition va échanger deux éléments et laisser invariants les  $n - 2$  autres. On remarque que c'est sa propre réciproque, puisqu'en la composant par elle-même, on revient à la case départ. Un résultat fondamental de la théorie des permutations donne à ces transpositions un statut particulier, puisqu'il établit que toute permutation est une composée de transpositions.

Le groupe  $S_n$  des permutations de  $n$  éléments, appelé *groupe symétrique*, admet, chacun peut s'en persuader,  $(n !)$  éléments. «  $n !$  » se lit « factorielle  $n$  ». C'est le produit de tous les entiers de 1 à  $n$ . Ainsi,  $1 ! = 1, 2 ! = 2, 3 ! = 6, 4 ! = 24$ , etc.

On met ainsi en évidence le plus petit groupe non commutatif,  $S_3$ , de cardinal 6. Les éléments de  $S_3$  peuvent être commodément désignés par la suite transformée de  $(1, 2, 3)$ .

Ainsi,  $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  désignera l'identité,  $t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

sont les trois transpositions,  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

et  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  les deux *permutations circulaires*.

Voici, ci-contre, la table (non commutative) du groupe  $S_3$ .

Avec  $\mathbb{Z}_6$  et  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ , cela porte à trois le nombre de groupes différents de cardinal 6.

$\circ$	$i$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$p_1$	$p_2$
$i$	$i$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$p_1$	$p_2$
$t_1$	$t_1$	$i$	$p_1$	$p_2$	$t_2$	$t_3$
$t_2$	$t_2$	$p_2$	$i$	$p_1$	$t_3$	$t_1$
$t_3$	$t_3$	$p_1$	$p_2$	$i$	$t_1$	$t_2$
$p_1$	$p_1$	$t_3$	$t_1$	$t_2$	$p_2$	$i$
$p_2$	$p_2$	$t_2$	$t_3$	$t_1$	$i$	$p_1$

# Évariste Galois

**Mathématicien de légende, Évariste Galois a énoncé des théories très en avance sur son temps, ouvrant la voie de la théorie des groupes.**



laquelle il s'attaque. Les Babyloniens résolvait déjà des équations du second degré à l'aide de racines carrées. Les mathématiciens italiens du XVI<sup>e</sup> siècle comme Cardan et Tartaglia, celles du troisième degré. Ferrari savait aller jusqu'au quatrième degré. Ils utilisaient pour cela des racines cubiques pour le degré trois, des racines quatrièmes pour le degré quatre. Mais le problème demeurait entier pour les équations de degré cinq ou plus.

## La théorie de Galois

Génial, Galois crée sa propre théorie qui s'appliquera à la résolution des équations, à d'autres domaines des mathématiques, à la physique, la chimie, l'informatique ou la cryptographie. C'est la théorie des groupes ! A l'époque, Galois joua de malchance : ses articles ne furent jamais présentés à l'Académie des Sciences, par la faute de Cauchy. Un nouvel article, écrit en vue du Grand Prix de mathématique, fut perdu par Fourier, qui mourut sans qu'on le retrou-

S colarité chaotique, insoumission d'adolescent, génie mathématique, mort tragique... tout concourt à faire d'Évariste Galois (1811-1832) un mythe, entretenu par de nombreux biographes. Il publie un premier article à 18 ans (voir *Le premier article de Galois* p.23), sur les fractions continues.

Mais sa vraie passion mathématique, il la tient de la lecture de l'œuvre de Lagrange : c'est la théorie des équations. Quand peut-on trouver les solutions d'une équation et les exprimer à l'aide de radicaux ? Telle est la question à

ve. Enfin, Poisson recommanda à l'Académie de rejeter l'article suivant. Galois en publia néanmoins d'autres, compléta les précédents et sa théorie nous est aujourd'hui accessible. Elle repose sur trois idées fondamentales :

- On peut associer à toute équation polynomiale de degré  $n$  (dont le premier membre est un polynôme) un groupe de permutations, le groupe de Galois de cette équation. Il traduit les propriétés de symétrie de cette équation. Pour l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  par exemple, comportant deux racines non rationnelles  $x$  et  $y$ , il existe entre ces racines deux relations :

$$x + y = -\frac{b}{a} \text{ et } xy = \frac{c}{a} .$$

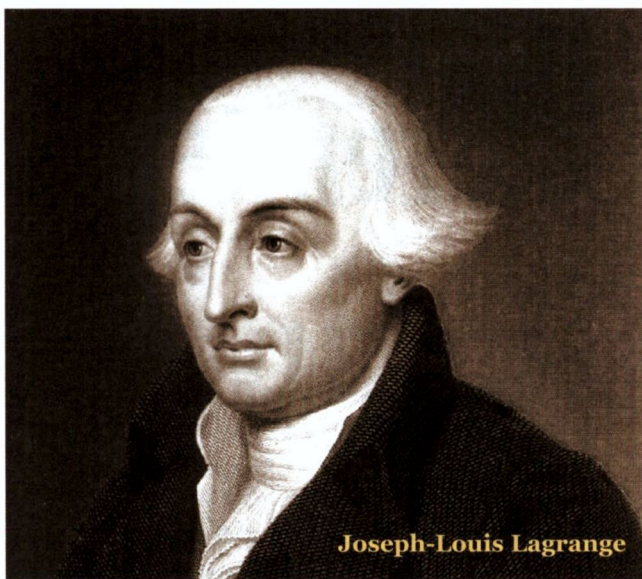
Le groupe de Galois de cette équation est réduit à deux éléments : l'identité et la transposition  $t$  qui échange  $x$  et  $y$ .

- Il existe, dans un groupe  $G$ , des sous-groupes privilégiés  $H$  : ce sont les *sous-groupes distingués* tels que, pour chacun de leurs éléments  $h$ , le produit  $ghg^{-1}$  appartienne encore à  $H$  quel que soit l'élément  $g$  de  $G$ . D'où la notion de sous-groupe distingué *maximal* : celui dont l'ordre (le nombre d'éléments, noté  $[G]$  pour un groupe nommé  $G$ ) est plus grand que tous les autres. Tout groupe  $G$  va donc donner naissance à une suite de tels sous-groupes emboîtés :  $G$ , qui contient  $H$ , qui contient  $J$ , qui contient  $K$ , etc. On appellera *indice* de  $H$  dans

$G$  le quotient  $\frac{[G]}{[H]}$  et on est sûr que

c'est toujours un entier.

- Une notion importante est celle de groupe *résoluble* : un groupe possède cette caractéristique si chaque indice de sous-groupe distingué maximal est un nombre premier.



Joseph-Louis Lagrange

Le résultat de Galois sur la résolubilité par radicaux des équations s'énonce alors simplement : *Une équation est résoluble par radicaux si le groupe de Galois de cette équation est résoluble.* Ainsi, une équation de degré trois sera résoluble par radicaux car son groupe de permutations  $S(3)$  contient 6 éléments, qui a pour sous-groupe distingué maximal  $A(3)$  un sous-groupe de 3 éléments tels que  $S(3)$  contienne  $A(3)$  qui contient l'Identité.

La suite des indices est alors d'une part

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ , d'autre part } \frac{3}{1} = 3, \text{ qui sont tous}$$

des nombres premiers. Le groupe  $S(3)$  est donc résoluble. Il n'en est pas de même pour l'équation de degré 5, qui ne sera donc pas résoluble par radicaux. Galois eut le courage de continuer ses recherches, même en prison, où ses prises de position hostiles à Louis-Philippe l'ont plusieurs fois conduit, même la veille du duel où il perdit la vie à vingt-et-un ans, et on ne peut que trouver admirable son œuvre.

É.B.

# Le premier article de Galois

**En 1829, le lycéen Galois (1811-1832) fait paraître son premier article dans les *Annales de Gergonne*. Il est consacré aux équations et plus précisément aux « fractions continues ». C'est l'œuvre d'un lycéen qui a lu et assimilé l'œuvre d'Euler.**



**E**n 1828-1829, Galois intègre la classe de mathématiques spéciales tenu par Louis- Paul-Emile Richard (1795-1849) avec environ une centaine d'autres élèves. C'était la norme à l'époque. Devant une classe si nombreuse, les enseignements sont essentiellement magistraux. De plus, ils n'ont lieu que les matins entre huit heures et dix heures sauf les jeudis et dimanches.

Dans ces conditions, les préparations orales au concours sont forcément réduites à leur portion congrue. Pour acquérir ces entraînements à l'oral, se sont développées, surtout à Paris, toute une liste d'institutions privées. Il est par exemple attesté qu'en 1832, un tiers des admis à l'école polytechnique est passé par quatre des institutions privées parisiennes les plus connues

*« Cet élève a une supériorité marquée sur tous ses condisciples. »*

(Mayer, Barbet, Laville ou Bourdon). A l'époque, ces institutions ne sont pas concurrentes mais complémentaires du secteur public. Ainsi, l'institution Mayer travaille systématiquement avec le professeur Richard : en 1837, les trois quarts de sa classe suivent complémentaires des cours chez Mayer. Galois ne fait semble-t-il partie d'aucune de ces institutions, d'où, sans doute, une mauvaise préparation à l'oral. En 1829, Galois passe le concours de l'école polytechnique pour la deuxième fois. Nouvel échec ! Ce n'est pourtant pas faute d'avoir été remarqué. Richard disait de lui : « cet élève a une supériorité marquée sur tous ses condisciples », ou encore « cet élève ne travaille qu'aux parties supérieures des mathématiques ». Une note bibliographique, probablement écrite par un des condisciples de Galois, Flaugergues, parue en 1848 dans *Le Magasin Pittoresque* précise : « (...) l'excellent M. Richard, avait dignement apprécié Galois. Les solu-

tions originales que ce brillant élève donnait aux questions posées dans la classe étaient expliquées aux condisciples avec de justes éloges pour l'inventeur, que M. Richard désignait hautement comme devant être admis hors ligne. »

Richard encourage ainsi son élève à publier l'un de ses travaux. L'article *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques* paraît le 1<sup>er</sup> avril 1829, dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* dirigées par Joseph Diez Gergonne.

### Préliminaires pour comprendre Galois

Pour comprendre l'essence de son article, il convient de faire quelques rappels concernant les fractions continues. Prenons l'équation :

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Elle est équivalente à :  $x(x + 1) = 1$  d'où :

$$x = \frac{1}{1+x}$$

Dans le deuxième membre si on remplace  $x$

$$\text{par } \frac{1}{1+x}, \text{ il vient : } x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

et rien n'empêche de recommencer ! Ainsi  $x$  s'écrit sous forme d'une fraction « qui ne s'arrête pas » : on parle alors de fraction continue.

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Euler, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale* parue en traduction française en 1796, décrit ainsi cette notion :

« J'appelle fraction continue une frac-

tion dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier & une fraction formée de la même manière que les précédentes, ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y ait qu'un nombre fini ».

La précédente ne comporte que des 1. Plus généralement, on dit qu'une fraction continue est périodique si des « blocs » réapparaissent. Ici ce sont des blocs de 1. Si ce sont des blocs de quatre termes, la fraction est de la forme :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{a + \dots}}}}}}}}$$

Par souci de concision, on notera une telle fraction  $[a, b, c, d]$ . On s'épargne-  
ra d'écrire l'expression d'une fraction périodique « générale » :  
 $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

### Résultat de Galois

Le jeune Galois démontre le résultat suivant :

« Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse. »

Pour démontrer ce résultat, il se restreint à une fraction à quatre termes car



**L'excellent M. Richard**

Se tenant constamment au courant des progrès de la science, Richard en enrichissait son cours ; les questions qu'il proposait étaient recherchées des élèves ; elles tendaient à élargir l'esprit et non à le rétrécir, comme il arrive trop souvent : aussi il a formé grand nombre d'hommes distingués, dont plusieurs sont parvenus à la célébrité. Galois aurait doté la France d'un Abel, si une mort violente n'avait rompu la trame d'une vie courte et turbulente. M. Le Verrier est universellement connu par ses calculs astronomiques. Messieurs les examinateurs Hermite et Serret marchent, encore jeunes, au premier rang parmi les géomètres français. Tous les services publics comptent des fonctionnaires de mérite que Richard a fait entrer à l'Ecole Polytechnique, où la plupart ont amélioré leurs rangs d'admission : critérium d'une instruction préliminaire solide. Animé pour la sainte science d'un zèle pur et désintéressé, zèle excessivement rare, il encourageait toute entreprise propre à propager la vérité mathématique.

*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1849, pp. 448-452

précise-t-il : « la marche uniforme du calcul prouve qu'il en serait de même si nous en admettions un plus grand nombre ».

Autrement dit, il démontre que si une équation admet pour racine  $[a, b, c, d]$ , elle admet nécessairement pour autre racine  $-1/[d, c, b, a]$ . La démonstration est simple bien que fastidieuse à écrire. Nous la proposons ici avec seulement deux termes pour simplifier l'écriture : Le résultat de Galois signifie que si

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}$$

est solution d'une équation alors

$$y = - \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}$$

est aussi solution de cette équation.

En effet, si  $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}$

alors  $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{x}}$

Un calcul élémentaire montre alors que  $x$  est solution de l'équation :

$$bx^2 - abx - a = 0.$$

Le même calcul s'applique à  $y$  :  $y$  vérifie :

$$y = - \frac{1}{b + \frac{1}{a - y}}$$

d'où l'on déduit que  $y$  est également solution de l'équation ci-dessus.

N.V.

## Les équations réciproques

Une équation polynomiale  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  d'ordre  $n$  est *réciproque* si  $a_0 = a_n$ ,  $a_1 = a_{n-1}$ , ...,  $a_i = a_{n-i}$  pour tout  $i \leq n$ . Dans le cas où le degré de l'équation est pair et où le coefficient  $a_0$  est non nul, si un nombre réel  $x_0$  est solution, alors son inverse  $1/x_0$  est également solution. Et si on remplace  $x$  par  $1/x$ , alors la nouvelle équation possède les mêmes solutions que l'équation initiale. On peut alors, en prenant comme inconnue  $x + 1/x$ , arriver à une équation possédant les mêmes solutions, mais de degré moitié. Par exemple, si l'on sait que le nombre 2 est une solution de l'équation  $4x^2 - 10x + 4 = 0$ , on en déduit immédiatement que l'autre solution est  $1/2$ . Voici un autre exemple extrait d'un cours d'algèbre destiné aux candidats au baccalauréat ès sciences (en 1877) : résoudre l'équation réciproque  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ . On divise les deux membres par  $x^2$  et on factorise :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

En prenant comme inconnue auxiliaire  $z = x + \frac{1}{x}$  et en résolvant en  $z$ , on aboutit aux quatre solutions suivantes : 2,  $1/2$ , 3 et  $1/3$ .

Dans le cas où le degré du polynôme est impair, on montre que le nombre  $-1$  est solution (éventuellement multiple) et qu'en divisant par  $(x + 1)$  élevé à la puissance qui convient, on se ramène à une équation réciproque de degré pair. Par exemple, dans l'équation  $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$ , le nombre  $-1$  est solution. En mettant  $(x + 1)$  en facteur, on obtient  $(x + 1)(5x^2 - 26x + 5) = 0$ . Les trois solutions sont donc  $-1$ , 5 et  $1/5$ .

Il existe également des équations réciproques dites *du second ordre*, où les coefficients symétriques  $a_i$  et  $a_{n-i}$  sont opposés au lieu d'être égaux (il doit alors y avoir un nombre pair de termes, quel que soit l'ordre du polynôme, le coefficient  $a_{n/2}$  étant nul si  $n$  est pair). Dans ce cas, le nombre 1 est solution de l'équation (éventuellement multiple) et, en divisant par  $(x - 1)$  élevé à la puissance qui convient, on se ramène à une équation réciproque du premier ordre.

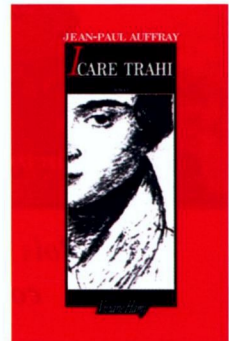
## Évariste Galois dans la tourmente de son temps

Après un premier ouvrage *Évariste – Le roman d'une vie* publié en 2004, Jean-Paul Auffray signe un nouveau roman au titre très fort, *Icare trahi*, dédale d'événements historiques, de conjectures mathématiques et de mystères. Le lecteur risque de se perdre dans ces lignes denses et richement documentées, mais sûrement il y reviendra tant la volonté de mieux comprendre est forte. Car il s'agit d'essayer tout à la fois de comprendre le destin fulgurant de Galois, confronté au tumulte des affaires du monde, d'éprouver la violence et la complexité de l'histoire de France entre Charles X et Louis XVIII, et d'assister impuissant aux chocs successifs qu'une trop courte vie a réservés à l'un des esprits les plus éclairés et pourtant incompris de son époque.

Dans un style rapide et parfois déroutant, l'auteur plante décors, mouvements historiques, réflexions philosophiques et scientifiques pour saisir l'intime personnalité de Galois. *Icare trahi* ou *Icare foudroyé*, Évariste sûrement pour des années encore nous interpellera, nous éclairera de son génie ô combien moderne.

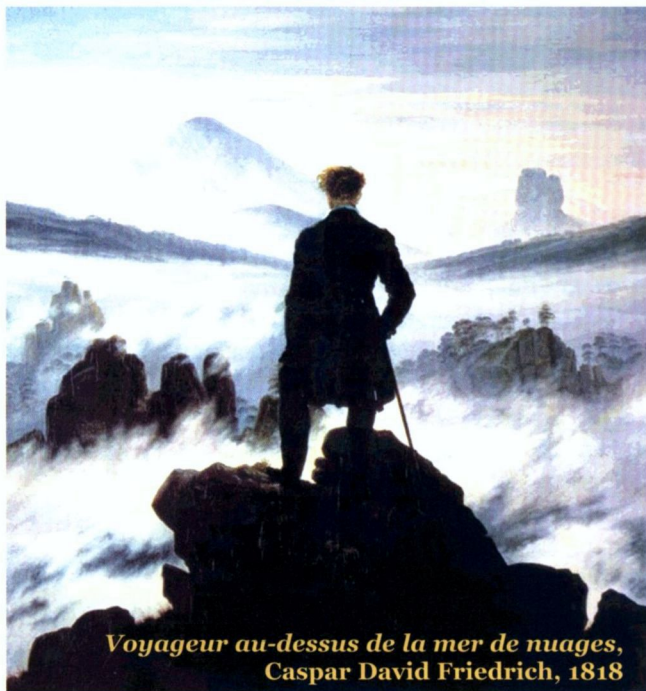
M.-J.P.

**Icare trahi.** Jean-Paul Auffray,  
Viviane Hamy, 302 pages,  
2011, 22,50 euros.



# L'impossibilité de Galois

Après les succès des algébristes de la Renaissance dans la résolution des équations de degré trois et quatre, les mathématiciens ont longtemps cherché à résoudre celle du cinquième degré. Galois en a montré l'impossibilité pour des raisons liées aux groupes de permutations.



*Voyageur au-dessus de la mer de nuages,  
Caspar David Friedrich, 1818*

*Galois a le mérite d'avoir trouvé une condition pour qu'une équation soit soluble par radicaux.*

**L**a mort en duel d'Evariste Galois a beaucoup contribué à l'image romantique qu'il a laissé. S'agit-il d'un suicide déguisé comme l'affirment certains, d'une aventure sentimentale terminant mal ou bien encore d'un règlement de compte politique, difficile de le savoir avec certitude et qu'importe pour notre propos ?

## Soluble par radicaux

Galois s'est essentiellement intéressé à la résolution des équations par radicaux. Dire qu'une équation est soluble par radicaux, c'est dire que ses racines s'expriment à l'aide des coefficients de l'équation, des quatre opérations et de radicaux. Pour simplifier, nous dirons soluble par radicaux en sous entendant les autres opérations et les coefficients. Par exemple, l'équation du second degré  $x^2 - 2x - 1 = 0$  a pour racines  $1 \pm \sqrt{2}$ . Elle est donc soluble par radicaux.

## Permutations

Un ensemble fini peut toujours être noté sous la forme  $\{1, 2, \dots, n\}$  où  $n$  est son nombre d'éléments. Permuter ces éléments revient à les écrire dans un ordre ou un autre.  $\{1\}$  ne peut être écrit que d'une façon donc n'a qu'une permutation.

Pour écrire  $\{1, 2\}$ , il suffit de choisir la place de 2 d'où les écritures 12 et 21 donc  $2 \times 1 = 2$  permutations.

Pour écrire  $\{1, 2, 3\}$ , il suffit de même de choisir la place de 3 et d'ajouter les permutations de  $\{1, 2\}$  d'où les  $3 \times 2 = 6$  permutations : 312, 321, 132, 231, 123 et 213. De même pour  $\{1, 2, 3, 4\}$ , on obtient  $4 \times 6 = 24$  façons d'écrire 1234. Pour cinq éléments, on obtient  $5 \times 24 = 120$  permutations.

La notation  $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , représente la permutation  $S$  de  $\{1, 2, 3\}$  qui transforme 1 en 2, 2 en 3 et 3 en 1 c'est-à-dire :  $S(1) = 2$ ,  $S(2) = 3$  et  $S(3) = 1$ . Si  $T$  et  $S$  sont deux permutations, on note  $S \circ T$  la permutation définie par :  $S \circ T(x) = S[T(x)]$  pour tout  $x$ . Le calcul se fait donc de façon très simple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R.V = (c + aj + bj^2)^3 = (aj + bj^2 + cj^3)^3$   
 $= [j(a + bj + cj^2)]^3 = V$   
 puisque  $j^3 = 1$ . De  $R.V = V$ , sans autre calcul, nous déduisons que :

$$R^2.V = R.(R.V) = R.V = V.$$

Comme  $R^3 = I$ , nous n'allons pas plus loin. Nous avons ainsi trouvé trois substitutions laissant  $V$  invariante :  $I$ ,  $R$  et  $R^2$ . Leur ensemble  $G$  a une structure de groupe (voir l'article sur les groupes et les équations). Plus précisément, il s'agit d'un sous-groupe du groupe  $S_3$  des substitutions de  $\{a, b, c\}$  qui a six éléments (voir l'encadré *Permutations*).

Considérons un élément de  $S_3$  n'appartenant pas à  $G$ , par exemple

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix},$$

$$T.V = (b + aj + cj^2)^3 = V'.$$

En ce qui concerne les équations générales, on sait résoudre par radicaux les équations du premier, du second, du troisième et du quatrième degré. Dans les deux derniers cas, ce n'est pas si simple comme le montre l'article sur les manipulations algébriques. Après que bien des mathématiciens aient cherché à résoudre l'équation générale du cinquième degré, Abel (1802-1829) a démontré que c'était impossible. Galois a précisé ses travaux en trouvant une condition pour qu'une équation soit soluble par radicaux. Mais avant de nous attaquer au cas général, voyons pourquoi il est possible de résoudre les équations de degré trois par radicaux.

### Les raisons d'un succès

Les relations entre les coefficients et les racines d'une équation permettent de montrer que si une fonction rationnelle  $V$  des racines est invariable par toute permutation des racines alors elle s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation (voir l'encadré sur les fonctions symétriques). Cette propriété est essentielle pour comprendre l'art de Galois à prévoir la forme des résultats des calculs sans jamais en faire un seul.

Montrons comment il s'y prend sur l'exemple de l'équation générale du troisième degré  $E$ . Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  les racines de  $E$  et  $V = (a + bj + cj^2)^3$  où  $j$  est le nombre complexe de module 1 et

d'argument  $\frac{2\pi}{3}$  (racine cubique de 1).

Si nous effectuons sur la quantité  $V$  la permutation  $R$  :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & a & b \end{array} \text{ notée } R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

nous obtenons une quantité que nous notons  $R.V$ .

**Des calculs abominables**

Effectuons entièrement les calculs décrits dans cet article dans le cas de l'équation :  $x^3 - 15x - 4 = 0$  déjà rencontrée dans l'article sur les manipulations algébriques. Ses trois racines vérifient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = -15 \\ abc = 4 \end{cases}$$

d'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme (voir l'article sur les anneaux de polynôme).

Considérons la quantité  $V = (a + bj + cj^2)^3$ . En utilisant les relations précédentes, des calculs longs et fastidieux montrent que :

$$V = 36 + 3jA + 3j^2B \text{ où : } \begin{cases} A + B = -12 \\ AB = -3231 \end{cases}$$

A et B sont donc solutions de l'équation du second degré :  $X^2 + 12X - 3231 = 0$  que nous résolvons :

$$\begin{cases} A = -6 + 33\sqrt{3} \\ B = -6 - 33\sqrt{3} \end{cases}$$

ou vice versa ce qui donne :

$$V = (a + bj + cj^2)^3 = 54 \pm 297i.$$

Nous remarquons que passer de l'une de ces valeurs à l'autre consiste seulement à échanger  $b$  et  $c$  ainsi, choisir l'une d'entre elles ne nuit pas à la généralité de la recherche. Pour extraire les racines cubiques de  $54 + 297i$ , nous remarquons que :

$$(6 + 3i)^3 = 54 + 297i.$$

Ici encore, choisir l'une ou l'autre de ces racines consiste à permuter  $a, b$  et  $c$ . Sans réduire la généralité de notre recherche, nous pouvons donc poser :

$$a + bj + cj^2 = 6 + 3i.$$

Les racines  $a, b$  et  $c$  sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + bj + cj^2 = 6 + 3i \\ a + bj^2 + cj = 6 - 3i \end{cases}$$

Il se résout facilement et donne :  $a = 4, b = -2 + \sqrt{3}$  et  $c = -2 - \sqrt{3}$ .

T, T o R et T o R<sup>2</sup> sont trois éléments distincts de  $S_3 \setminus G$ . Comme cet ensemble contient exactement trois éléments, il est égal à  $S_3 \setminus G$  et donc :

$$S_3 = G + T o G$$

où  $T o G = \{T o I, T o R, T o R^2\}$ .

De plus :  $(T o R).V = T.(R.V) = T.V = V'$  et de même pour  $T o R^2$ . Autrement dit, les éléments de  $T o G$  transforment  $V$  en  $V'$  et ceux de  $G$  laissent  $V$  invariant. Des considérations simples sur  $G$  et  $S_3$  permettent alors de conclure que le couple  $\{V, V'\}$  est invariant par permutation des racines  $a, b$  et  $c$ . Nous en déduisons que  $V + V'$  et  $V V'$  ne varient pas quand on permute  $a, b$  et  $c$ . Ces deux quantités s'expriment donc rationnellement en fonction des coefficients de l'équation E. On en déduit que  $V$  et  $V'$  sont solutions d'une équation de degré deux et donc s'expriment par radicaux. Au moyen d'une nouvelle extraction de racine, nous montrons ainsi que  $a, b$  et  $c$  sont solutions d'un système :

$$\begin{cases} c + b + c = A \\ a + bj + cj^2 = B \\ a + bj^2 + cj = C \end{cases}$$

où A, B et C s'expriment par radicaux. Le résultat suit en résolvant ce système. Bien entendu, nous n'avons effectué ici aucun calcul. Nous nous sommes contentés d'en montrer la possibilité. Dans la pratique, ils sont assez pénibles (voir l'encadré *Des calculs abominables*).

En résumé, remarquez que sans la décomposition :  $S_3 = G + T o G$ , il serait impossible de ramener l'équation générale du troisième degré à des équations de degré inférieur. Nous sommes donc amenés à décomposer des groupes pour montrer la possibilité de résoudre des équations par radicaux.

**Jusqu'au degré 4**

Tout ceci se généralise sans trop de difficultés au degré quatre. On trouve une

quantité  $V$  ( $V = ab + cd$ ) invariante par un sous-groupe  $G$  de  $S_4$  à huit éléments. De plus, la permutation

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix},$$

donne la décomposition :

$$S_4 = G + T \circ G + T^2 \circ G.$$

En posant  $V' = T.V$  et  $V'' = T^2.V$ , on montre que le triplet  $\{V, V', V''\}$  est invariant par permutation des racines et donc que  $V + V' + V''$ ,  $VV' + V'V'' + V''V$  et  $V V' V''$  le sont également.

Les trois quantités  $V$ ,  $V'$  et  $V''$  sont racines d'une équation du troisième degré, ainsi elles s'expriment par radicaux et de même  $ab + cd$  et  $abcd$  puis, en résolvant une équation du second degré,  $ab$  et  $cd$ . En résolvant deux autres équations du même type, nous obtenons de même  $ad$ ,  $bc$ ,  $ac$  et  $bd$ . En multipliant  $ab$  et  $ac$  et en divisant par  $bc$ , nous en déduisons  $a^2$ . L'extraction d'une racine donne  $a$  et de même  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

Cette méthode échoue dès le degré cinq car  $S_5$  ne se décompose pas de la même manière. Pour le démontrer, il suffit de dresser la liste de tous les sous-groupes de  $S_5$  et d'en étudier les propriétés. C'est fastidieux puisque  $S_5$  contient 120 éléments mais ce n'est pas vraiment difficile.

En fait, pour résoudre les équations de degré cinq de façon exacte, il suffit de changer la règle et de s'accorder d'utiliser d'autres fonctions que les racines. C'est possible grâce aux fonctions elliptiques comme l'a montré Charles Hermite en 1858.

H.L.

## Fonctions symétriques

Si une fonction rationnelle de  $a, b, c$ , etc. est invariable par permutation de  $a, b, c$ , etc. alors elle s'exprime rationnellement en fonction des fonctions symétriques de ces lettres c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + b + c + \text{etc.} \\ \sigma_2 = ab + bc + \text{etc.} \\ \sigma_3 = abc + \text{etc.} \\ \dots \\ \sigma_n = abc \dots \end{cases}$$

où la première ligne comprend la somme de toutes les lettres, la seconde la somme des produits deux à deux, etc.

Une fonction rationnelle est un quotient de polynômes, eux-mêmes sont sommes de monômes de la forme  $a^i b^j c^k \dots$ . L'invariance par permutation des lettres implique que le polynôme est combinaison linéaire de polynômes de la forme :

$$a^i b^j c^k \dots + a^j b^i c^k \dots + \dots$$

où nous comptons toutes les permutations possibles des exposants. Ainsi, si deux seuls lettres sont en jeux, nous obtenons des combinaisons de  $a^i b^j + a^j b^i$  si  $i \neq j$  et  $a^i b^i$  sinon. Si trois lettres sont en jeux, des combinaisons de :  $a^i b^j c^k + a^i b^k c^j + a^j b^i c^k + a^k b^i c^j + a^j b^k c^i + a^k b^j c^i$ . Il suffit donc de démontrer le résultat sur ces sommes. Même si dans la pratique, les calculs sont laborieux, la théorie est assez simple : on procède par récurrence. Voyons comment s'opère les calculs dans le cas de deux lettres :

Supposons  $i < j$ ,  $a^i b^j + a^j b^i = a^i b^i (a^k + b^k)$  où  $k = j - i$ . Il suffit donc de démontrer que les sommes  $a^k + b^k$  s'expriment en fonction de  $a + b$  et  $ab$ . Ceci est évident si  $k = 1$ . Supposons que cela soit vrai pour tout exposant inférieur ou égal à  $k$ . de l'égalité :

$$(a^k + b^k)(a + b) = a^{k+1} + b^{k+1} + ab(a^{k-1} + b^{k-1}),$$

on déduit que le résultat est vrai pour l'exposant  $k + 1$ . On en déduit le résultat par récurrence.

On arrive ainsi à montrer que toute fonction rationnelle des lettres  $a, b, c$ , etc. invariante par permutation de ces lettres s'exprime en fonction des fonctions symétriques de ces lettres. En raison des relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme, on en déduit que toute fonction rationnelle des racines d'une équation s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de cette équation.

# Les équations sur le comptoir

Dans son roman *Odile*, Queneau met en scène un narrateur qui travaille seul les mathématiques, sans espoir d'être reconnu. Extrait d'une conversation de bistrot autour des équations...



« Vous savez ce que c'est que résoudre une équation ?

— Il me semble.

— Dites-le voir.

— Hem. C'est trouver la valeur de l'inconnue.

— Comment ?

— En faisant des calculs.

— Mais lesquels ?

— Eh bien, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions.

— Et encore.

— Il y en a plus de quatre ?

— Je crois.

— Ah oui, c'est vrai, il y a encore extraire une racine, comme faisait le savant Cosinus.

— Ce qui est l'opération inverse de l'élevation à une puissance.

[...]

— Combien d'opérations ferez-vous pour calculer votre inconnue ?

— Comment, combien ?

- Eh bien oui, combien ?
- Est-ce que je sais, moi !
- Un nombre fini ou un nombre infini d'opérations ?
- Un nombre infini : vous en avez de bonnes, est-ce qu'on aurait le temps ?
- Voilà le bon gros sens qui parle. Mais je vous avertis qu'en analyse, par exemple, on envisage constamment des expressions impliquant un nombre infini d'opérations.
- Vous m'humiliez.
- Mais puisqu'il s'agit d'opérations algébriques, nous ne sortirons pas du domaine de l'algèbre et nous envisageons la résolution des équations qu'au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques et notamment de radicaux. [...]
- On continue alors sur quoi porteront ces opérations ?
- Pas difficile de répondre ! sur ce qu'on connaît.
- Sur les quantités connues.
- C'est ce que je disais.
- Très bien. Maintenant que nous avons une idée nette de ce que c'est que résoudre une équation, envisageons la résolution de l'équation du premier degré.
- C'est enfantin, s'écria Saxel, il y a juste une division à faire. Je connais parfaitement le truc, je l'ai appris d'un professeur poivrot dont la barbe sentait la prise pouah ! c'était dégoûtant. Vous savez j'étais toujours premier en math au lycée.
- Alors vous êtes allé jusqu'au second degré ?
- Si j'y suis allé ! Moins bé plus ou moins racine carrée de bé deux moins moins quatre acé sur deux a, toc : et voilà ! Glou glou glou glou, elle est bonne leur bière.
- Et qu'est ce qui vous paraît remarquable dans cette formule ?
- Mon intelligence devient extrême : la racine carrée. La racine carrée, voilà

ce qui est remarquable. Et je vois maintenant où vous voulez en venir : c'est lumineux c'est simple c'est beau. Pour l'équation du troisième degré il faudra extraire une racine cubique, pour le quatrième degré une racine quatrième, pour le cinquième degré une racine cinquième, pour le sixième degré une racine sixième, et ainsi de suite. C'est logique, non ? Logiquement simple, non ?

- Non. A partir du cinquième degré rien ne va plus.
- Il n'y a pas de raison !
- Il est impossible de résoudre algébriquement les équations d'un degré supérieur au quatrième, excepté dans des cas très particuliers. L'équation générale, on ne peut pas.
- C'est qu'on ne sait pas s'y prendre.
- On le démontre.
- Mais c'est scandaleux. »

Et voilà comment Queneau ouvre la porte aux mathématiques de Galois ! D'autres passages du roman s'intéressent à des questions épistémologiques (la notion d'existence en mathématiques) ou à des problèmes mathématiques non résolus à l'époque comme le théorème de Fermat (il a été démontré seulement il y a quelques années). Bref, un roman méconnu de Queneau qui invite (entre autres choses) aux mathématiques.

N.V.



# L'esprit de l'escalier

**Jusqu'à la terminale, c'est bien connu, un nombre négatif n'a pas de racine carrée, les équations algébriques du second degré ont éventuellement 0 ou une seule racine, etc. Autant de croyances entretenues des années durant avant d'être brutalement abattues...**

*Pourquoi ne pas anticiper l'existence des nombres complexes avant qu'ils ne deviennent objet d'étude ?*

Comme tous mes camarades d'alors, j'ai découvert l'existence des nombres complexes dans la douleur. Je réentends le *ouououh* qui s'éleva, en « math-géné », dans tout l'amphi, je revois l'air abasourdi de mes voisins et voisines et l'air joyeux de qui a fait une bonne farce de notre professeur, ajoutant dans un soupir faussement navré : *c'est chaque année la même chose.*

Forcément. On pense pendant des années que les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée, on s'en passe dans une pratique des mathématiques élémentaire mais qui a néanmoins une consistance, et voici qu'on vient vous dire le contraire de ce qu'on vous avait dit et répété.

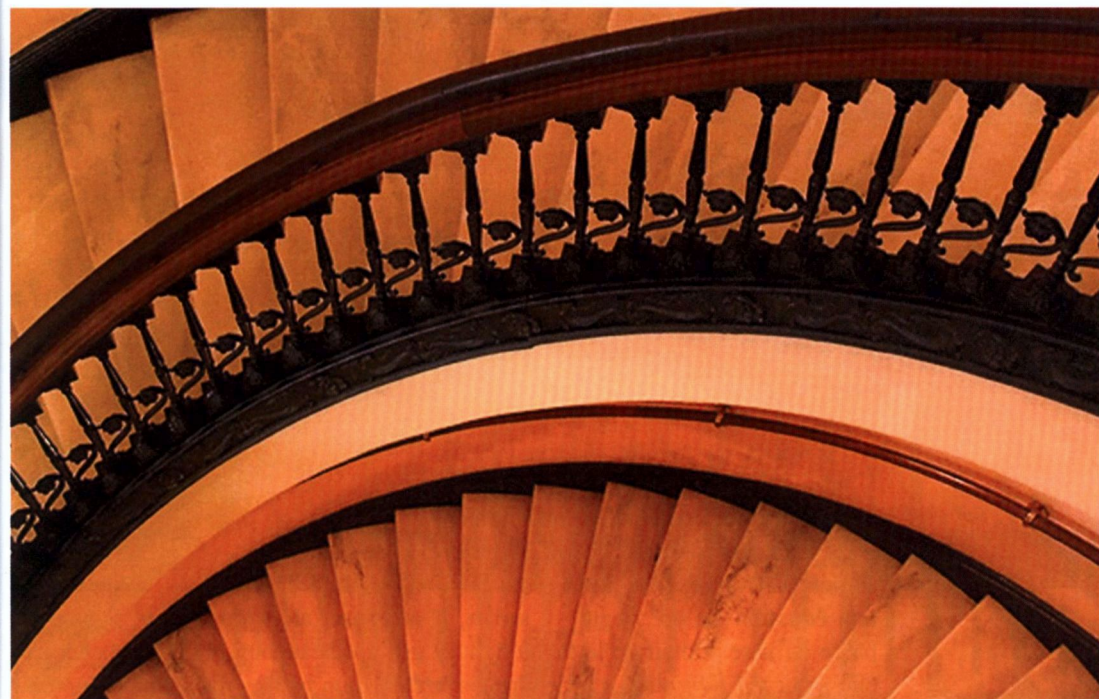
## Ni zéro, ni une !

Pendant ces années-là, la langue aussi semblait formelle : à des deltas « négatif, nul, positif » correspondaient harmonieusement 0, 1, ou 2 racines, sorte

de garantie comptable d'un petit escalier à trois niveaux. Comment alors ne pas être stupéfait de découvrir, plus tard, qu'on était en terrain... plat, ou plan !

Dur, dur, le sas par lequel il a fallu passer avant de découvrir les merveilles que jusqu'alors on nous avait cachées. Alors, question : pourquoi ne nous avait-on pas prévenus ?

Aujourd'hui, la cassure est moins nette, puisque c'est en terminale qu'apparaissent ces mots qui font forte impression : imaginaires, complexes. Mais je ne suis pas sûre que le choc se soit totalement émoussé, attesté par l'étrangeté de certains comportements, tels que, par exemple, *i* soit pris pour inconnue dans une équation. Pourquoi, puisque *c'est chaque année la même chose* ne se permettrait-on pas, transgressant la sacro-sainte linéarité des exposés mathématiques, d'anticiper l'existence de ces nombres avant qu'ils deviennent objet d'étude ? Pourquoi ne



pas parler de façon « informelle », qualitative, des ressources qu'offre le plan, là où s'arrêtent celles de la droite ? D'autant qu'on peut dire aujourd'hui, « pas de racines dans  $\mathbb{R}$  » cet  $\mathbb{R}$  étant un... appel d'air, précisément, pour laisser pressentir d'autres horizons. Donc non pas *une* racine double, mais *deux* confondues, parce que si « une », qu'en sera-t-il en géométrie analytique pour distinguer sécante de... tangente ? Donc *toujours* deux racines, bien sûr, qui tiennent, ou non, à un fil...

L'escalier, nous le savons, est ailleurs. Mais nombre de nos élèves n'en connaissent pas l'existence, quand, par exemple, ils considèrent que  $x = 3$  est la seule solution de  $x(x - 3) = 0$ , ou encore « font delta » alors que l'équation est en  $x^3$ .

### L'escalier dans l'histoire

De plus, convoquer l'esprit de cet escalier, qui a mis au défi de se tenir sur ses

marches, ses degrés, les mathématiciens des siècles passés, est passionnant. Je pense, par exemple, à la désinvolture – géniale – de Monsieur Descartes dans sa *Géométrie* (1637). Accumulant données et variables – instaurant ainsi un statut des lettres, connues et inconnues que nous lui devons –, il explique comment problèmes plans et solides se résolvent aisément par intersection de cercles et de droites, ou de cercles et de paraboles. Il ajoute qu'au delà, il laisse à ses « neveux » le plaisir d'inventer les résolutions d'équations aux degrés « plus composés à l'infini », espérant qu'ils lui sauront gré tant des « choses » expliquées qu'omisées.

Ce qu'il omet, c'est donc de démontrer ce qu'il affirme : il y a autant de racines que la quantité inconnue a de dimensions, c'est-à-dire autant qu'a de marches l'escalier. Pour en convaincre l'interlocuteur, rien de tel que de monter soi-même ces marches, une à une,

en multipliant des binômes du premier degré, à racines vraies – les positives –, ou fausses – les négatives –, comme par exemple

$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x - 5)$$

qui produit l'équation à trois racines fausses et une vraie

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$$

Et comme il accepte aussi comme racines des « quantités qu'on ne saurait rendre autres qu'imaginaires » comme dans

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$$

il est facile de montrer qu'avec des « briques » de une ou deux marches, on peut monter cet escalier... jusqu'au ciel. François Viète (1540-1603) mis au défi par Adrien Romain de résoudre une équation du 45<sup>e</sup> degré y arriva, parce qu'il se doutait de la façon dont elle avait été fabriquée « à l'endroit » avant d'être proposée « à l'envers ».

Les choses se compliquent quand, sans savoir comment ont été superposées ces marches, on se trouve placé sur une énième. Quand factorisations, racines apparentes, tentatives de réduction à des degrés inférieurs échouent ou font monter encore plus haut. Et là l'étonnement est inversé : Quoi, déjà ? Après le quatrième degré, pas de « résolution par radicaux » ? Cette toute-puissance qui s'arrête trop vite, il fut difficile, dans l'histoire aussi, de s'y résigner.

En outre, si la découverte du calcul infinitésimal, au xvii<sup>e</sup> siècle, permet de déterminer des racines avec autant de décimales qu'on veut, « pourquoi ces imbéciles de mathématiciens ont-ils



continué à chercher des solutions par radicaux, alors que celles-ci sont en général beaucoup plus difficiles à calculer que par les méthodes d'approximation » ? On aura peut-être reconnu la verdeur de langage de Jean Dieudonné, membre du groupe Bourbaki. Ce dernier précise « voilà un problème idiot qui continua tout de même à occuper les mathématiciens pendant un siècle et demi » et ajoute nonobstant que ce « problème idiot » est l'un de ceux qui ouvrit une des chambres du paradis d'aujourd'hui, peuplé de groupes de toutes sortes.

Alors pourquoi ne pas sacrifier à cet esprit de l'escalier, qui occupa si longtemps l'esprit des mathématiciens, et qui s'appelle aussi théorème fondamental de l'algèbre ? Avec une pensée émue pour Albert Girard (1595-1632), qui le premier, en 1629, hanté par cet esprit de l'escalier, affirma que sur chaque marche se tenaient autant de racines que le laissait entendre « la plus haute quantité ».

S. B.

*La vaine  
quête de  
solutions par  
radicaux  
ouvrit une des  
chambres  
d'un paradis  
peuplé de  
groupes.*

## Bibliographie

*Géométrie*, Descartes.

*Mathématiques vides et significatives in Penser les mathématiques*, Jean Dieudonné, Seuil 1982.

Le premier irrationnel	p. 48
Un problème d'algèbre à la règle et au compas	p. 52
Le problème des deux échelles	p. 58
Des équations, mais pas de calculs !	p. 60
Les nombres constructibles	p. 64
L'étoile en or	p. 70
Les courbes à résoudre	p. 72
Les abaques	p. 76

# géométrie ou graphique



La découverte du premier irrationnel remet en cause la représentation des grandeurs : d'une recherche de solutions rationnelles exactes, les anciens Grecs passèrent à celle de solutions constructibles à la règle et au compas ou de solutions rationnelles approchées. A partir de certaines grandeurs comme le côté d'un carré ou le rayon d'un cercle, le but était de construire une grandeur donnée en n'utilisant que les deux instruments : la règle et le compas. D'autre part, la méthode la plus simple pour résoudre une équation numériquement est sans doute de tracer le graphe du polynôme associé en ne se souciant ni de règle ni de compas.

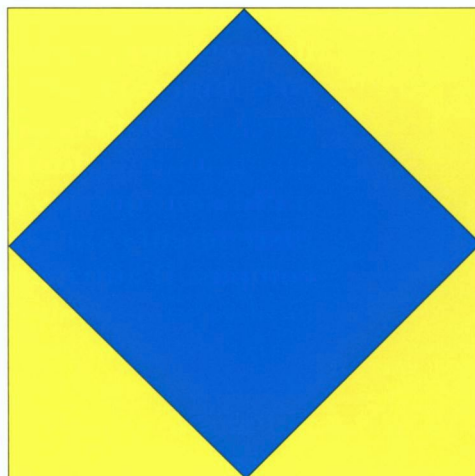
# Le premier irrationnel

La découverte du premier irrationnel remet en cause la représentation des grandeurs : d'une recherche de solutions rationnelles exactes, les anciens Grecs passèrent à celle de solutions constructibles à la règle et au compas ou de solutions rationnelles approchées.

*Pythagore croyait que deux grandeurs étaient toujours commensurables.*

La duplication du carré est l'un des problèmes posés et résolus par les mathématiciens de la Grèce antique. Il s'agit de construire un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné. Dans le *Ménon*,

Platon s'est fait l'écho de ce problème étudié par Pythagore. Voici en un seul dessin la solution soufflée par Socrate à un esclave de Ménon (voir l'encadré intitulé "les paroles de Socrate" pour suivre la démarche exacte de Platon) :

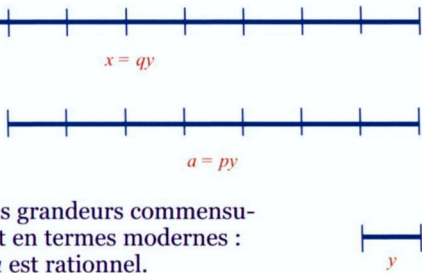


A gauche, l'aire en jaune est égale à l'aire en bleu. Pour le voir, il suffit de compter les triangles qui les composent (en bleu et jaune à droite). L'aire du carré en bleu à gauche est donc le double de celle du carré bleu et jaune de droite.

D'autre part, si  $a$  est la mesure du côté du carré donné et  $x$  celle du carré dupliqué, on a :  $x^2 = 2 a^2$  donc la diagonale du carré de côté  $a$  résout cette équation.

Résolution rationnelle

A l'époque de Pythagore, on croyait que deux grandeurs étaient toujours commensurables c'est-à-dire multiples d'une même longueur. La question était donc : quelle est la commune mesure entre  $a$  et  $x$  ?



$x$  et  $a$  sont des grandeurs commensurables, se dit en termes modernes :  $x/a$  est rationnel.

Autrement dit, Pythagore cherchait une grandeur  $y$  (mesure d'un segment) et deux nombres entiers  $p$  et  $q$  tels que :

$$a = p y \text{ et } x = q y.$$

Hélas pour sa conception des nombres, loin de trouver cette commune mesure du côté d'un carré et de sa diagonale, il prouva qu'il n'en existait pas. En

termes modernes,  $\sqrt{2}$  est le premier

Une preuve magique

Supposons que  $\sqrt{2}$  soit un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , en élevant au carré,

$$p^2 = 2 q^2.$$

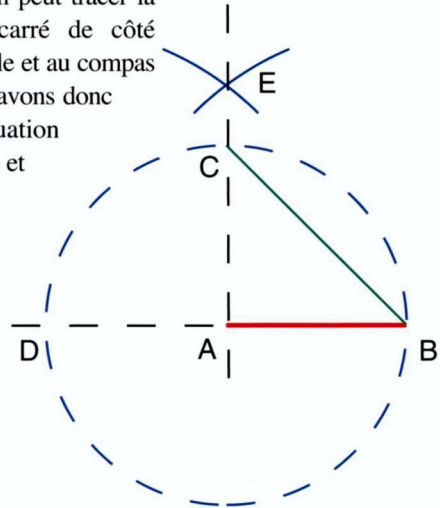
Soit  $n$  et  $m$  les exposants de 2 dans les décompositions de  $p$  et  $q$  en facteurs premiers. Les exposants de 2 dans les décompositions de  $p^2$  et de  $2 q^2$  sont donc  $2n$  et  $2m + 1$ .

On en déduit que  $2n = 2m + 1$  ce qui est absurde.

exemple de nombre irrationnel rencontré par l'humanité (voir l'encadré intitulé "une preuve magique").

Résolution à la règle et au compas

L'équation n'a pas de solution rationnelle mais on peut tracer la diagonale d'un carré de côté donné AB à la règle et au compas (cf. figure). Nous avons donc résolu l'équation  $x^2 = 2 a^2$  à la règle et au compas.



Pour construire une diagonale BC du carré de côté AB, prolonger le segment AB, tracer le cercle de centre A passant par B, l'intersection de cette droite et de ce cercle donne un point D. Tracer un cercle de centre B et de rayon supérieur à AB et le cercle de même rayon de centre D. Ces deux cercles se coupent en un point E. Tracer la droite AE, elle coupe le cercle de centre A passant par B en le point C cherché.

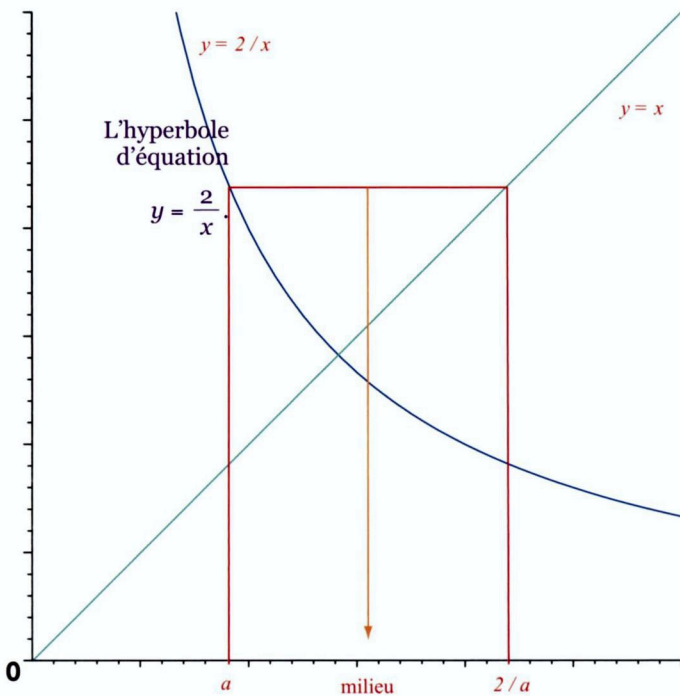
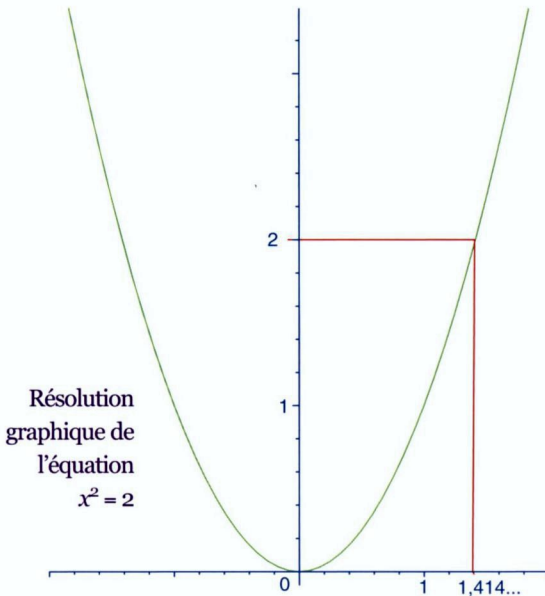
Résolution graphique

L'équation  $x^2 = 2$  se résout facilement graphiquement au moyen de la parabole d'équation  $y = x^2$  (cf. figure à la page suivante).

La droite d'équation  $y = 2$  coupe la parabole en deux points. Le point de

droite a pour abscisse  $\sqrt{2}$ . On peut donc ainsi en déterminer une valeur approchée. Bien entendu, il existe des méthodes plus précises pour détermi-

ner une valeur numérique de  $\sqrt{2}$ .



**L'algorithme d'Héron d'Alexandrie**

Héron part de la remarque géométrique suivante :

si  $a < \sqrt{2}$  alors  $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$ .

et de même, si  $a > \sqrt{2}$  alors  $a > \sqrt{2} > \frac{2}{a}$ .

La deuxième figure ci-contre montre que le milieu  $\frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right)$  entre ces deux

points  $a$  et  $\frac{2}{a}$  approche mieux  $\sqrt{2}$ .

En partant de 1, on obtient la suite de valeurs approchées :

$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}$  et  $\frac{665857}{470832}$ .

La précision est vite excellente comme le montre le calcul :

$\frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right) - \sqrt{2} = \frac{(a - \sqrt{2})^2}{2}$

On démontre ainsi que :

$\frac{665857}{470832} - 2 \cdot 10^{-12} < \sqrt{2} < \frac{665857}{470832} + 2 \cdot 10^{-12}$

Bien entendu, il est possible de convertir ces nombres rationnels en nombres décimaux, on trouve alors :

$\sqrt{2} = 1,41421356237$  à  $10^{-11}$  près.

**H.L**

**Héron d'Alexandrie**

Héron vécut sans doute au 1<sup>er</sup> siècle de notre ère. Il enseigna la mécanique et la géométrie au musée d'Alexandrie. Mis à part sa méthode pour trouver d'excellentes valeurs approchées des racines carrées, il a trouvé et prouvé la formule suivante : Si  $a, b$  et  $c$  sont les mesures des trois côtés d'un triangle et  $A$  son aire, on a :

$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$   
où  $s = \frac{a+b+c}{2}$

## Les paroles de Socrate

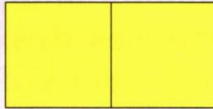
Socrate se propose de faire dupliquer un carré de quatre pieds carrés (qu'il nomme également pieds) à un jeune esclave de Ménon. Pour cela, il le guide au moyen de quelques dessins bien choisis tracés sur le sable :

**SOCRATE.** -- Dis-moi donc, garçon : ceci n'est-il pas pour nous l'espace de quatre pieds ?  
Comprends-tu ?



**L'ESCLAVE.** -- Certes.

**S.** -- Mais nous pourrions lui accoler un autre qui lui soit égal ?



**E.** -- Oui.

**S.** -- Et ce troisième ici, égal à chacun d'eux ?



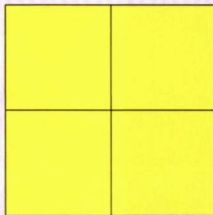
**E.** -- Oui.

**S.** -- Et ne pourrions-nous donc pas combler ce vide dans le coin ?



**E.** -- Tout à fait.

**S.** -- N'est-il donc pas vrai qu'il en résulte quatre espaces égaux là ?



**E.** -- Si.

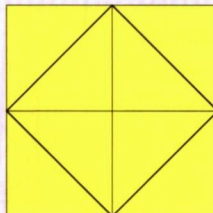
**S.** -- Quoi encore ? Ce tout, combien de fois plus grand que le premier devient-il ?

**E.** -- Quatre fois plus grand.

**S.** -- Or il devait devenir double pour nous ; ne t'en souviens-tu pas ?

**E.** -- Tout à fait.

**S.** -- Eh bien, cette ligne d'angle à angle ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces espaces ?

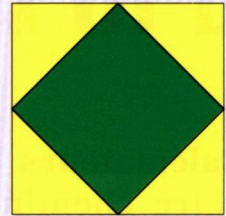


**E.** -- Si.



Socrate

**S.** -- Eh bien, cela ne fait-il pas quatre lignes égales, entourant l'espace que voici ?



**E.** -- Ça les fait.

**S.** -- Examine maintenant : de quelle grandeur est cet espace ?

**E.** -- Je ne vois pas.

**S.** -- Est-ce que, de ces quatre-là, chacune de ces lignes n'a pas séparé la moitié intérieure de chacun ? Ou quoi ?

**E.** -- Si.

**S.** -- Combien donc y en a-t-il de la même taille dans celui-ci ?

**E.** -- Quatre.

**S.** -- Mais combien dans celui-là ?

**E.** -- Deux.

**S.** -- Mais que sont les quatre par rapport aux deux ?

**E.** -- Le double.

**S.** -- Alors, pour celui-ci, combien de pieds cela fait-il ?

**E.** -- Huit.

**S.** -- Sur quelle ligne ?

**E.** -- Sur celle-ci.

**S.** -- Sur celle qui est tracée d'angle à angle dans celui de quatre pieds ?

**E.** -- Oui.

**S.** -- Or les spécialistes l'appellent justement « diagonale » ; de sorte que, si « diagonale » est son nom, ce serait sur la diagonale, à ce que tu dis, serviteur de Ménon, que se formerait l'espace double.

**E.** -- Très certainement, Socrate.

# Un problème d'algèbre à la règle et au compas

Calculateurs besogneux ou virtuoses des équations, passez votre chemin. Nous nous dispenserons de votre aide pour résoudre ce problème classique : trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.



La règle et le compas constituent une calculatrice... graphique ! En effet, on peut construire la somme, la différence, le produit ou le quotient de deux longueurs données, ainsi que le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle donné.

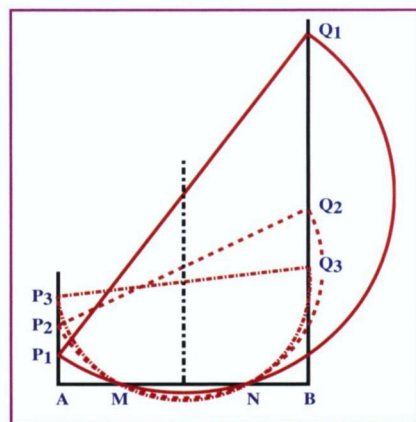
Et aussi résoudre un problème classique : trouver deux longueurs de somme et de produit donnés.

Dans la figure 1, on a :

$AP_1 = 1$  ;  $AP_2 = 2$  ;  $AP_3 = 3$ , et  
 $BQ_1 = 12$  ;  $BQ_2 = 6$  ;  $BQ_3 = 4$  ;

On a construit les demi-cercles de diamètres  $[P_1Q_1]$ ,  $[P_2Q_2]$ ,  $[P_3Q_3]$  : ils coupent tous trois le segment  $[AB]$  aux mêmes points  $M$  et  $N$  (voir figure 1).

Figure 1



Etude de la figure

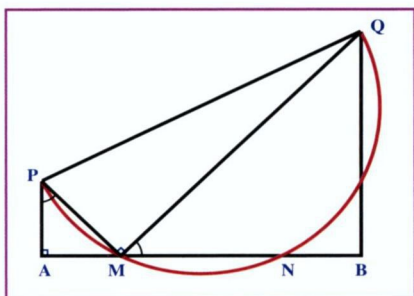


Figure 2

Reportons-nous à la figure ci-dessus. Les triangles  $APM$  et  $BMQ$  sont rectangles. Les angles  $\widehat{APM}$  et  $\widehat{BMQ}$  ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, donc ils ont même mesure, et même tangente :

$$\begin{aligned} \tan \widehat{APM} &= \frac{AM}{AP} \\ &= \frac{BQ}{BM} \\ &= \tan \widehat{BMQ}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité  $AM \cdot BM = AP \cdot BQ$ .

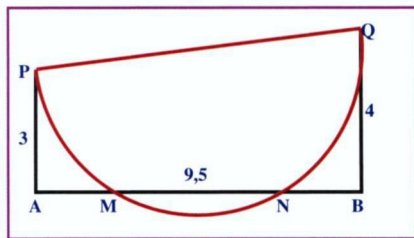
Autrement dit, le produit des longueurs  $AM$  et  $BM$  vaut  $AP \cdot BQ$ .

Or, la somme de ces longueurs n'est autre que  $AB$ . D'où l'idée : pour construire deux longueurs inconnues  $x$  et  $y$  dont le produit et la somme sont donnés, il suffit de reconstituer la figure 2.

Un exemple d'application

Cherchons à construire deux longueurs de produit 12 et de somme 9,5. Soit

Figure 3



[AB] un segment de longueur 9,5 (voir figure 3 ci-dessous).

Reportons sur les perpendiculaires à [AB] en A et B deux longueurs dont le produit est égal à 12 : soient P et Q tels que  $AP = 3$  et  $BQ = 4$ .

Construisons alors le demi-cercle de diamètre [PQ] : il coupe [AB] en deux points M et N, symétriques par rapport au milieu M de [AB]. D'après l'étude précédente, les longueurs  $AM$  et  $BM$  vérifient :

$$AM + BM = 9,5$$

$$\text{et : } AM \cdot BM = AP \cdot BQ = 3 \times 4 = 12.$$

Le point N donne les mêmes solutions, car  $AN = BM$  et  $BN = AM$ .

Nous avons choisi de prendre  $AP = 3$  et  $BQ = 4$ , mais n'importe quelles longueurs  $AP$  et  $BQ$  conviennent, du moment que leur produit vaut 12.

Ceci explique pourquoi, dans la figure 1, les trois demi-cercles coupaient [AB] aux deux mêmes points M et N.

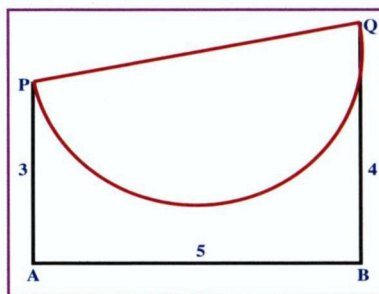
Si on a la curiosité de mesurer les longueurs  $AM$  et  $BM$ , on trouvera  $AM = 1,5$  et  $BM = 8$ , dont la somme fait 9,5 et le produit 12 : pas de surprise !

Les limites du problème

Supposons qu'on cherche à présent deux longueurs dont le produit vaut toujours 12, mais dont la somme vaut 5.

On est amené à construire une nouvelle figure (voir figure 4), et à constater que la valeur de la somme conditionne l'existence des solutions. Dans ce

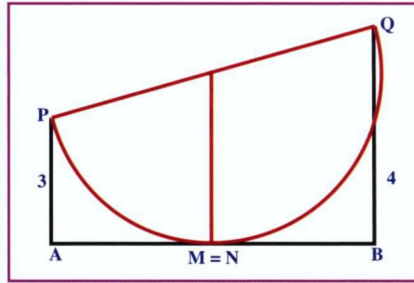
Figure 4



cas, par exemple, le demi-cercle ne coupe plus  $[AB]$  : il n'y a pas de solutions !

On imagine bien le cas-limite, où le demi-cercle est tangent à  $[AB]$ , et où  $M$  et  $N$  sont confondus (figure 5).

**Figure 5**



Si le produit vaut toujours 12, on aura  $x = y$  et  $xy = 12$ ,

d'où  $x^2 = 12$ , et  $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

La somme  $x + y$  vaut alors  $4\sqrt{3}$ , soit à peu près 6,9.

Si la somme est inférieure à  $4\sqrt{3}$ , il n'y aura pas de solutions.

Si elle est supérieure à  $4\sqrt{3}$ , il y aura des solutions.

**Bibliographie**

*Géométrie plane*

J. Hadamard

réédition J. Gabay 1988.



Si, au lieu de 12, on avait pris une valeur quelconque  $p$  pour le produit et  $s$  pour la somme, le raisonnement ci-dessus nous aurait conduit à la

condition  $s \geq 2\sqrt{p}$  pour qu'il y ait des solutions.

Autrement dit, pour tous les nombres positifs  $x$  et  $y$ , on a l'égalité :

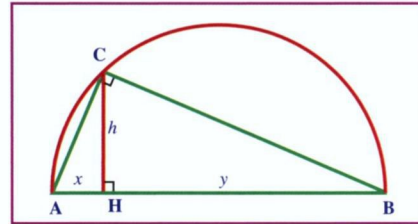
$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

**Une inégalité classique**

L'inégalité précédente peut aussi se démontrer à l'aide de la figure 6.

Dans le triangle rectangle ABC, la hauteur CH vérifie :

**Figure 6**



$$AH^2 = AH \cdot HB.$$

Si  $AH = x$  et  $HB = y$ , on obtient :

$$h = CH = \sqrt{xy}.$$

Si le point H se déplace sur le diamètre  $[AB]$ , la hauteur  $h$  est inférieure ou égale au rayon du cercle, qui vaut

$$\frac{(x + y)}{2}.$$

D'où :  $\sqrt{xy} \leq \frac{(x + y)}{2}$ , soit :

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Bien sûr, les irréductibles de l'algèbre préféreront utiliser l'identité remarquable :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y, \text{ positif.}$$

D'où, encore,  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ .

Mais, de toutes façons, ces irréductibles auraient déjà utilisé l'algèbre pour trouver deux nombres  $x$  et  $y$  dont le produit  $p$  et la somme  $s$  sont donnés...

Soit  $m$  la moyenne des deux nombres, et  $d$  l'écart qui sépare  $m$  de chacun des deux nombres ; si, par exemple,  $x \geq y$ , on aura :

$$m = \frac{s}{2} ; x = m + d ; y = m - d,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } xy &= (m + d)(m - d) \\ &= m^2 - d^2, \\ &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p, \\ &\text{et } d^2 = \frac{s^2}{4} - p. \end{aligned}$$

Si ce nombre est positif ou nul, c'est-à-dire

$$\text{si } \frac{s^2}{4} \geq p, \text{ ou encore } s \geq 2\sqrt{p},$$

on trouvera  $d$ , puis  $x$  et  $y$ .

Par exemple, avec  $p = 12$

et  $s = 9,5$ , on obtient  $m = 4,75$ , et  $d$  vérifie :

$$\begin{aligned} d^2 &= 4,75^2 - 12 = 10,5625 = 3,25^2, \\ \text{d'où } x &= 4,75 + 3,25 = 8, \\ \text{et } y &= 4,75 - 3,25 = 1,5 \dots \end{aligned}$$

Mais ceci est censé être un article de géométrie ...

### Une autre construction ?

Revenons à notre construction de la figure 3, et posons nous la question : que se passe-t-il, si, au lieu de reporter les longueurs 3 et 4 du même côté de  $[AB]$ , on les reporte de part et d'autre (figure 7 ci-contre) ?

Cette fois, il faut tracer le cercle en entier pour trouver deux solutions M et N.



Mais au fait, solutions de quoi ?  
Quelles relations vérifient les longueurs AM et BN ?

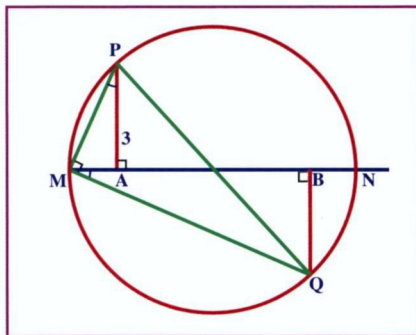
Les angles  $\widehat{APM}$  et  $\widehat{BMQ}$  sont toujours égaux, ainsi que leurs tangentes : les produits AM.BM et AP.BQ seront égaux.

La différence, c'est que la longueur AB est égale à la différence  $BM - AM$ . Cette construction permet donc de construire deux longueurs dont le produit et la différence sont donnés.

Et comme le cercle coupe la droite (AB) quelles que soient les longueurs AP, BQ et AB, il n'y a pas de condition d'existence des solutions.

J. L.

Figure 7



## Héritage grec

Les Grecs du VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C. au IV<sup>e</sup> siècle ap. J.-C. nous ont donné un mathématicien philosophe, Pythagore (VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C.), dont la réputation n'est plus à faire. Ils nous ont donné les « législateurs de la géométrie », comme disent les historiens des mathématiques, Euclide, Archimède, Eratosthène, Apollonius, au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère. Depuis cette époque, d'ailleurs, on ne conçoit plus une construction faite autrement qu' à

la règle et au compas, à la manière des Anciens Grecs chez qui l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  posait un problème philosophique autant que mathématique. Pas seulement géomètres d'ailleurs, ces savants : Pythagore a déjà recherché les « triplets pythagoriciens », nombres entiers tels que la somme des carrés de deux d'entre eux soit égal au carré du troisième comme 3, 4, 5, ou 5, 12 et 13. Euclide a été arithméticien et théoricien de la musique, Archimède nous a laissé l'*Arénaire*, exposé romancé d'un système de numération des grands nombres, et a déjà utilisé des sommes infinies pour calculer l'aire sous la parabole, Eratosthène a inventé le célèbre « crible » qui porte son nom pour faire le tri des nombres premiers. Ce dernier a en plus imaginé une approche purement géométrique du problème de la duplication du cube : construire à la règle et au compas un cube de volume double d'un cube donné. Eratosthène, ramenant ce problème à celui d'insérer deux moyennes quadratiques  $x$  et  $y$  entre deux nombres donnés  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire

de trouver  $x$  et  $y$  tels que  $\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y}$ , en a donné une solution complètement géométrique,

procédant par tâtonnements, nous dirions aujourd'hui par approximations successives.

Parmi tous les mathématiciens Grecs, l'un d'eux, Diophante d'Alexandrie, a joué un rôle prépondérant dans le développement de l'algèbre : il est d'une période plus tardive puisqu'il a vécu au IV<sup>e</sup> siècle après J.-C. On connaît peu de choses de sa vie, si ce n'est cette épitaphe qu'on dit retrouvée sur sa tombe, traduite en alexandrins par Emile Fourrey au XIX<sup>e</sup> siècle :

*Passant sous ce tombeau repose Diophante  
Ces quelques vers tracés d'une main savante  
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.  
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,  
Le sixième marqua le temps de son enfance,  
Le douzième fut pris par son adolescence,  
Des sept parts de sa vie encore une s'écoula,  
Puis s'étant marié, sa femme lui donna  
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère,  
Reçut de jours hélas, deux fois moins que son père.  
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.  
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.*

Hormis ce petit poème, on connaît de Diophante l'existence de ses livres, l'un sur les nombres figurés, et surtout l'autre, *Les arithmétiques*, d'autant plus célèbre que c'est dans la marge d'une réédition par Bachet de Méziriac (1621) de ce livre que Fermat indiqua avoir résolu son « grand » théorème, précisant qu'il n'avait pas assez de place pour en inscrire la démonstration. Les techniques arithmétiques de Diophante ont considérablement influencé les algébristes arabes du Moyen Age puis Viète et Fermat. Dans les écrits de Diophante, plus de cent cinquante problèmes, résolus pour la plupart, mais pas toujours de façon exhaustive. Pour le mathématicien Grec, les solutions ne pouvaient qu'être entières ou à la rigueur fractionnaires, et il se contentait bien souvent d'en donner une, sans chercher la généralité. Il s'agissait par exemple de décomposer un carré en somme de deux carrés, c'est-à-dire de trouver des triplets pythagoriciens, à défaut de les déterminer tous, de résoudre des équations en nombres entiers, qu'on appelle couramment aujourd'hui équations diophantiennes, comme par exemple  $x^2 + 1 = 2y^4$ . Diophante, le premier, a utilisé un début de symbolisme algébrique en appelant arithmos l'inconnue de ses équations. Lorsqu'il recherche par exemple deux nombres dont la différence des cubes est égale à la différence, donc qu'il est amené à résoudre l'équation  $x^3 - y^3 = x - y$ , qu'il transforme en  $x^2 + xy + y^2 = 1$ , il cherche  $x$  sous la forme

$\frac{a}{b}$  et  $y$  sous la forme  $\frac{b}{d}$ , puis, en posant  $a = u + v$  et  $b = u - v$ , se ramène à résoudre

l'équation  $3u^2 + v^2 = d^2$ .

Il se contentera d'en donner une solution,  $x = \frac{5}{7}$  et  $y = \frac{3}{7}$ , l'essentiel étant pour lui d'en

trouver « au moins une ».

Elisabeth Busser

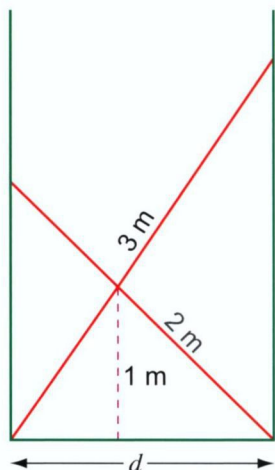


L'école d'Athènes par Raphaël

# Le problème des deux échelles

Voici un problème bien connu où on commence par poser deux échelles contre un mur et, en grim pant, on finit par résoudre une équation du quatrième degré.

C'est un problème classique : deux échelles sont appuyées sur les deux murs opposés d'un couloir, comme le montre la figure :



**La configuration des deux échelles dans le problème**

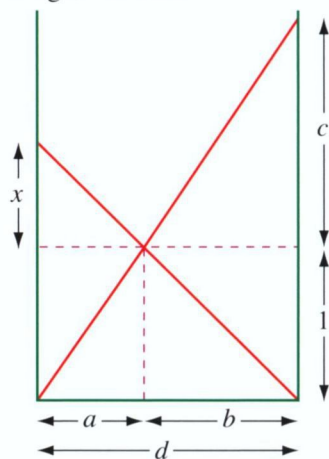
L'une mesure trois mètres de longueur, l'autre deux mètres. Sachant qu'elles se croisent à un mètre du sol on demande de calculer la largeur du couloir.

Ce problème se généralise naturellement

en considérant deux échelles de longueurs  $a$  et  $b$  se coupant à une hauteur  $h$ .

## Mise en équation

Pour résoudre le problème, il suffit de déterminer les cinq inconnues décrites sur la figure suivante :



## Les cinq inconnues du problème

Un peu de géométrie permet de déterminer des liens entre ces inconnues. Tout d'abord, les triangles rectangles

s'opposant en O sont semblables. Cela fournit les deux relations :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{c} \text{ et } \frac{b}{1} = \frac{a}{x}$$

ce qui donne :  $c = \frac{1}{x}$ .

Le théorème de Pythagore utilisé sur les triangles rectangles d'hypoténuses 2 et 3 fournit :

$$(1+x)^2 + d^2 = 4 \text{ et } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + d^2 = 9$$

ce qui donne par soustraction :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - (1+x)^2 = 5$$

et donc l'équation du quatrième degré :

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Une fois résolue,  $d$  est obtenu comme

$$\sqrt{4 - (1+x)^2}.$$

De façon générale, le même raisonnement permet de trouver l'équation :

$$x^4 + 2x^3 + mx^2 - 2x - 1 = 0 \text{ où}$$

$$m = \frac{a^2 - b^2}{h^2}.$$

Une fois résolue,  $d$  est obtenu comme

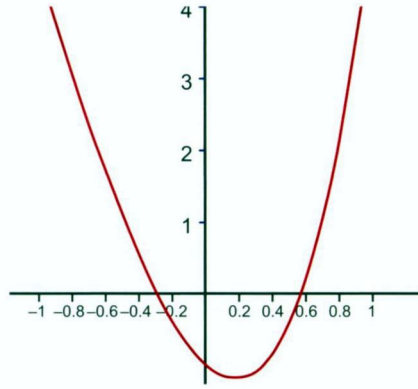
$$\sqrt{b^2 - (1+x)^2}.$$

### Discussion de l'équation

Dès lors, deux questions distinctes se posent : combien cette équation algébrique admet-elle de racines réelles ? Et comment les calculer ? La question est différente suivant que l'on reste sur le cas particulier ou que l'on passe au cas général. En effet, dans le cas particulier, une résolution numérique est envisageable. La présence du paramètre  $m$  dans le cas général interdit cette méthode.

Le tracé de la courbe d'équation  $y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$  montre que l'équation a une solution négative à

exclure et une solution positive. Un grossissement de la partie où le zéro se situe permet de le préciser. On trouve : 0,576 à 0,001 près ce qui donne un couloir de largeur 1,23 mètre à un centimètre près.



Tracé de la courbe d'équation  $y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$

### Une question d'intersection

Dans le cas général, l'équation peut s'écrire :

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (5-m)x^2.$$

La question revient donc à étudier l'intersection de la courbe précédente et de la parabole d'équation :  $y = (5-m)x^2$ . On montre qu'effectivement il en existe une et une seule positive.

### Amoncellement de radicaux

Il est également possible de résoudre cette équation par radicaux puisqu'elle est de degré quatre (voir l'encadré sur Ferrari p.25), on trouve alors :

$$d = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right) - h^2 \left(1 + \sqrt{w} + \sqrt{3k + 3 - w + \frac{2}{\sqrt{w}}}\right)}$$

$$\text{en posant : } w = k + 1 + \sqrt[3]{k} \left( \sqrt[3]{k^2 + 3k + \frac{3}{2}} + \sqrt{k + \frac{9}{4}} + \sqrt[3]{k^2 + 3k + \frac{3}{2} - \sqrt{k + \frac{9}{4}}} \right) \text{ et } k = \frac{(a^2 - b^2)^2}{12h^4}.$$

Mais à quoi bon, dès lors, cet amoncellement de radicaux, sinon pour la beauté des calculs algébriques ?

H.L.

# Des équations, mais pas de calculs !

Dans sa *Géométrie*, parue en 1637, René Descartes montre comment ramener un problème de géométrie à la résolution d'une ou plusieurs équations, exposant des techniques pour faciliter la recherche de leurs racines. En suivant les idées « cartésiennes », découvrons et démontrons trois beaux théorèmes.

La première idée de la géométrie cartésienne est de choisir un repère adapté à la question posée, c'est-à-dire un repère où les courbes ont les équations les plus simples possibles.

## Tangentes à une cubique

Par exemple, soit  $(\mathcal{C})$  une courbe du troisième degré – une cubique – admettant dans un repère  $R$  une équation de la forme  $y = P(x)$  :  $P$  est un polynôme du troisième degré.

Or, une telle courbe admet un centre de symétrie : si on déplace l'origine en ce point, en conservant la direction des axes de  $R$ , on obtient un nouveau repère  $R'$  dans lequel la nouvelle équation de  $(\mathcal{C})$  est de la forme  $y = f(x)$ , où  $f$  est, d'une part, un polynôme du troisième degré, et d'autre part une fonction impaire, à cause du centre de symétrie. L'équation de  $(\mathcal{C})$  dans  $R'$  est donc de la forme :

$y = ux^3 + vx$ , où  $u$  et  $v$  sont des constantes.

Étudions l'intersection de la cubique  $(\mathcal{C})$  avec une droite quelconque  $(d)$ . Cette droite admet une équation  $y = mx + p$ , où  $m$  et  $p$  sont des constantes. Chercher les points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et de  $(d)$  revient à chercher deux nombres  $x$  et  $y$  vérifiant à la fois :

$$y = mx + p \text{ et } y = ux^3 + vx.$$

En particulier,  $x$  est racine de l'équation  $ux^3 + vx = mx + p$ , qui se ramène à :

$$ux^3 + (v - m)x - p = 0.$$

Soit  $(E)$  cette dernière équation : si  $(E)$  admet trois racines  $a$ ,  $b$  et  $c$ , elle se factorise en :

$$u(x - a)(x - b)(x - c) = 0.$$

Développons et ordonnons suivant les puissances de  $x$  :

$$ux^3 - u(a + b + c)x^2 + u(ab + bc + ca)x - uabc = 0.$$

Cette équation doit être identique à  $(E)$ . En particulier, le coefficient de  $x^2$  doit être nul, d'où  $a + b + c = 0$ .

**Résumons :** si la droite (D) coupe la courbe (C) en trois points d'abscisses respectives  $a, b, c$ , alors  $a + b + c = 0$ .

Réciproquement, si  $a, b, c$  sont les abscisses respectives de trois points de la cubique (C), supposons que  $a + b + c = 0$ . Alors, l'équation dont ces trois nombres sont les racines pourra s'écrire :  $ux^3 + sx + t = 0$ , soit  $ux^3 = -sx - t$ , avec  $s = u(ab + bc + ca)$ , et  $t = -uabc$ .

Or, les coordonnées des trois points A, B, et C vérifient l'équation de la courbe, soit  $y = ux^3 + vx$ ; elles vérifient donc aussi :  $y = -sx - t + vx$ , ou  $y = (v - s)x - t$ ,

c'est-à-dire une équation de droite : A, B et C sont alignés. On a démontré l'équivalence :

(A, B et C alignés sur la cubique)  $\Leftrightarrow$   $(a + b + c = 0)$ .

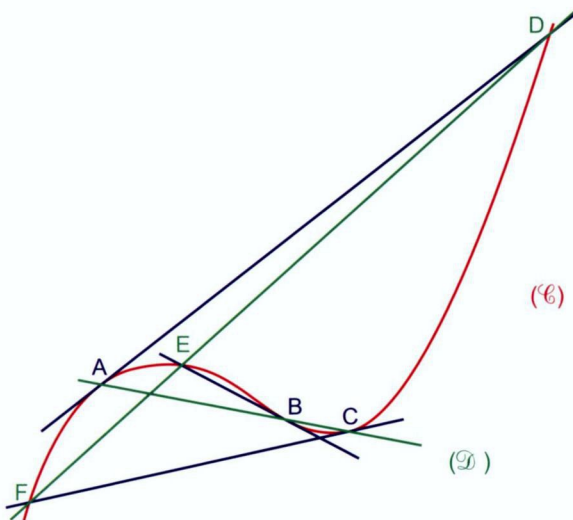
Considérons à présent trois points A, A' et D, d'abscisses  $a, a'$  et  $d$ , alignés sur la cubique (C). On a donc l'égalité :  $a + a' + d = 0$ .

Si le point A' tend vers le point A, la position limite de la droite (AA') est celle de la tangente en A à (C), et l'égalité devient  $a + a + d = 0$ , soit  $d = -2a$ . Autrement dit, si la tangente en A recoupe la cubique en D, on a  $d = -2a$ . Si, de même, les tangentes en B et C recoupent respectivement (C) en E et F, d'abscisses  $e$  et  $f$ , on aura :

$$e = -2b, \text{ et } f = -2c.$$

D'où  $d + e + f = -2(a + b + c) = 0$ , puisque A, B et C sont alignés sur (C). Et D, E, F sont aussi alignés sur la cubique.

On a démontré le **théorème 1** : Les tangentes en trois points alignés d'une cubique recoupent cette cubique en trois points alignés.



La démonstration précédente suppose un repère dans lequel la cubique admet une équation de la forme  $y = P(x)$ . Pour certaines cubiques, il n'est pas possible de trouver un tel repère, il faut alors des outils algébriques plus puissants pour montrer que le théorème 1 continue d'être vrai.

### Normales à une parabole

Soit (P) une parabole : il existe un repère orthonormé où elle admet pour équation  $y = x^2$ . Si A est le point de (P) de coordonnées  $(a; a^2)$ , la tangente en A admet pour coefficient directeur le nombre dérivé en ce point, soit  $2a$ . Considérons la perpendiculaire à cette tangente passant par A : elle s'appelle la normale à (P) en A. Elle aura pour

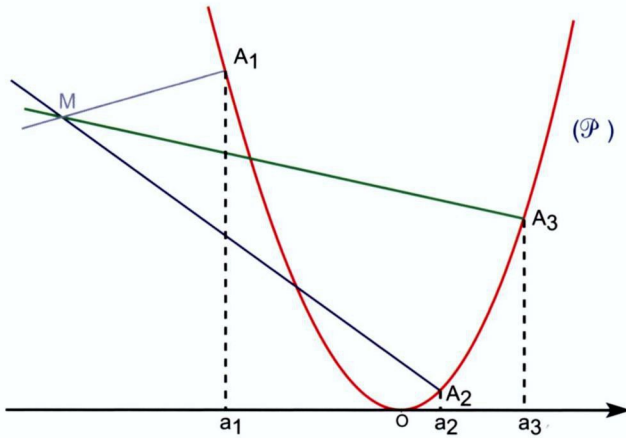
coefficient directeur  $-\frac{1}{2a}$  (on suppose  $a \neq 0$ ).

Son équation sera donc :

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a),$$

soit  $y = -\frac{x}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}$  (\*)

Soit à présent un point  $M(x,y)$  du plan, avec  $x \neq 0$ .



Question : Est-ce qu'une normale à la parabole passe par M ?

Les données sont  $x$  et  $y$ , et l'inconnue est le nombre  $a$  non nul vérifiant l'équation (\*), qu'on peut réécrire sous la forme :

$$a^3 + \left(\frac{1}{2} - y\right)a + \frac{x}{2} = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en  $a$ . Si elle admet trois racines, cela veut dire qu'il y a trois normales à  $(\mathcal{P})$  passant par M, donc concourantes.

Cette équation n'a pas de terme en  $a^2$ . Autrement dit, le coefficient de  $a^2$  est nul : on peut affirmer, comme pour l'équation (E) relative à la cubique, que la somme des racines est égale à 0. Résumons : Si les normales à la parabole  $(\mathcal{P})$  aux points d'abscisses  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont concourantes, alors  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ .

Réciproquement, si  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont trois nombres de somme nulle, ils sont racines de l'équation :

$$(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) = 0,$$

qui se développe en  $a^3 + sa + t = 0$ , où  $s = a_1 + a_2 + a_3$  et  $t = -a_1 a_2 a_3$ .

Ils sont donc aussi racines de :

$$a^3 + \left(\frac{1}{2} - y\right)a + \frac{x}{2} = 0,$$

en posant  $s = \frac{1}{2} - y$  et  $t = \frac{x}{2}$ , soit  $y = \frac{1}{2} - s$  et  $x = 2t$ .

Cela signifie que les normales aux points d'abscisses  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont concourantes au point M de coordonnées

$$\left(2t; \frac{1}{2} - s\right).$$

On a démontré l'équivalence : Les normales à  $(\mathcal{P})$  en trois points sont concourantes si et seulement si la somme de leurs abscisses est nulle.

### Un cercle et une parabole

Soit  $(I)$  un cercle. Étudions l'intersection de  $(I)$  avec la parabole  $(\mathcal{P})$ . Dans le repère où  $(\mathcal{P})$  a pour équation  $y = x^2$ , l'équation de  $(I)$  est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

où  $(x_0; y_0)$  désignent les coordonnées du centre du cercle, et R son rayon.

Les abscisses des points communs à  $(\mathcal{P})$  et  $(I)$  devront donc vérifier :

$$(x - x_0)^2 + (x^2 - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

Si l'on développait – nous ne le ferons pas ! on aurait des  $x^4$ , des  $x^2$ , des  $x$  et des constantes ... mais pas de  $x^3$ . Cela ressemblerait à :

$$x^4 + ux^2 + vx + w = 0,$$

où  $u, v, w$  sont des constantes.

Si  $(I)$  coupe  $(\mathcal{P})$  en quatre points d'abscisses  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$ , ces quatre nombres sont racines de l'équation ci-dessus, qui se factorise alors en :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Et si on développait encore – c'est juste pour réfléchir, on ne le fera pas vraiment – on trouverait un terme en  $x^3$ , dont le coefficient serait  $-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ .

Or, ce coefficient est nul, donc  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ .

**Moralité** : si  $(I)$  coupe  $(\mathcal{P})$  en quatre points, la somme des abscisses de ce points est nulle.

Supposons que l'un de ces quatre points, par exemple le dernier, soit le sommet de la parabole. Alors,  $x_4 = 0$ , et il reste  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

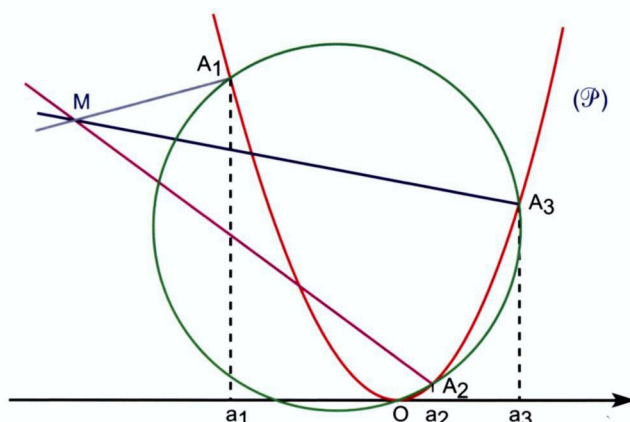
Mais alors les normales ... D'où le

**Théorème 2 :** si un cercle passe par le sommet d'une parabole, et recoupe celle-ci en trois autres points, les normales à la parabole en ces points sont concourantes.

Et, là encore, on pourrait démontrer la réciproque, qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

**Théorème 3 :** Si les normales en trois points d'une parabole sont concourantes, le cercle passant par ces trois points passe également par le sommet de la parabole.

Pour finir, observons qu'au centre des raisonnements ci-dessus se trouve un phénomène algébrique : lorsque la somme des racines est nulle, cela se



voit sur l'équation, sans calculs. Ce phénomène est particulièrement simple, mais il nous a permis d'obtenir des résultats géométriques élaborés, que nous aurions été bien en peine d'établir par une autre méthode ...

J. L.

### Les courbes algébriques

Dans le plan, considéré comme un espace affine, une courbe algébrique est un ensemble de points  $M(x; y)$  dont les coordonnées vérifient une équation  $f(x; y) = 0$ , où  $f$  est une fonction polynôme des variables  $x$  et  $y$ .

Les courbes dont l'équation utilise d'autres fonctions que des fonctions polynômes (exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques, ...) sont des courbes non algébriques, dites transcendantes.

Les courbes algébriques sont classées selon leur degré (ou ordre), qui n'est autre que le degré de la fonction polynôme associée.

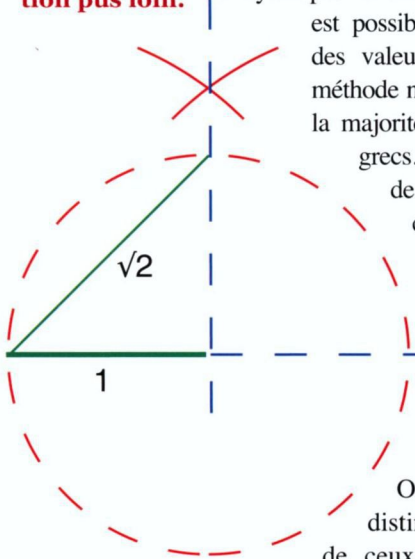
On distingue ainsi les droites (de degré 1), les coniques (de degré 2), les cubiques (de degré 3), les quartiques (de degré 4), les quintiques (de degré 5), les sextiques (de degré 6) et les septiques (de degré 7).

Michel Criton

# Les nombres constructibles

**Les mathématiciens grecs et leurs successeurs aimaient calculer à la règle et au compas. Peut-on ainsi tout calculer ? La réponse est non, seuls certains nombres peuvent être atteints de cette façon.**

**Construction de  $\sqrt{2}$  à la règle et au compas : voir la description plus loin.**



Dès que l'on quitte le premier degré, les équations ont rarement des solutions rationnelles comme  $1, 3/4$  ou  $4/5$ .

Bien sûr, nous pouvons rencontrer des exemples comme  $x^2 + x - 2 = 0$  dont les deux solutions sont entières (1 et  $-2$ ) mais d'autres également comme  $x^2 = 2$  n'ayant pas de solutions rationnelles. Il est possible alors d'en trouver des valeurs approchées. Cette méthode n'a pas eu la faveur de la majorité des mathématiciens grecs. Leur idéal d'exactitude leur a fait préférer des constructions à la règle et au compas.

Pour l'équation ci-dessus, cela donne la figure ci-contre.

## Points constructibles

On part de deux points distincts O et I. A partir de ceux-ci, on construit la

droite (OI) et le cercle de centre O passant par I. L'intersection de ces deux objets définit le point I', symétrique de I par rapport à O. Le cercle centré en I passant par I' coupe le cercle centré en I' passant par I en deux points à égale distance de I et I' donc sur leur médiatrice. En joignant ces deux points, nous obtenons ainsi la perpendiculaire en O à la droite OI. Cette droite coupe le cercle en un point J vérifiant  $OJ = OI$  (d'après le théorème de Pythagore,

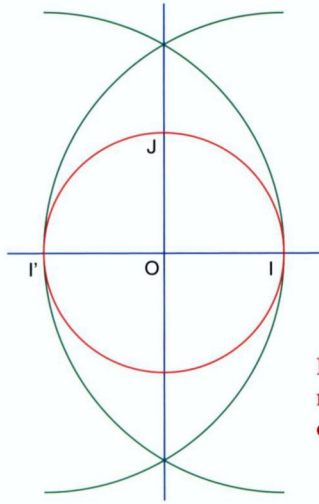
$IJ = I'J = \sqrt{2}$  ce qui explique la construction ci-dessus).

Ainsi, de proche en proche, à partir des premiers points O et I, nous pouvons construire des droites et des cercles. Les intersections de ces objets déterminent de nouveaux points et ainsi de suite. Tous les points obtenus par ce processus sont qualifiés de constructibles.

Rappelons qu'il est facile à la règle et au compas de construire :

- la médiatrice d'un segment, et donc

- son milieu (voir ci-dessus),
  - la perpendiculaire à une droite passant par un point donné (voir ci-dessous),
  - la parallèle à une droite passant par un point donné (on utilise deux fois le résultat précédent),
- et bien d'autres choses encore...



**Première construction à la règle au compas à partir de deux points O et I.**

**Nombres constructibles**

Les points O et I étant donnés, un nombre  $x$  est dit constructible si le point M défini par  $OM = xOI$  est

**Les quadrateurs**

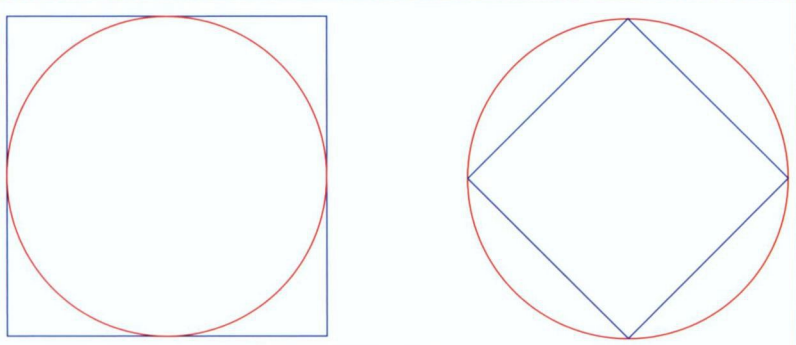
La quadrature du cercle à la règle et au compas est reconnue comme un problème impossible depuis plus de cent ans mais il reste toujours des quadrateurs pour en trouver des valeurs fantaisistes. Humour, ignorance ou folie ?

Voici la dernière valeur qui nous a été communiquée :  $\pi = \left[ \sqrt{2\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} \right]^2$ .

Vous pouvez constater qu'elle ne s'approche du fameux 3,14 que de 0,02 mais ce manque de précision n'arrête pas un quadrateur !

Ainsi, en 1754, le chevalier de Causans publie une quadrature qui conduit à  $\pi = 4$ .

Aucun savant ne s'intéressant à son travail, il fit poser des affiches dans Paris annonçant qu'il offrait mille livres à tout savant qui pointerait du doigt l'erreur – si erreur il y avait – qui empêcherait la résolution du problème. Cette fois, les réactions sont



**Confondre  $\pi$  et 4 revient à confondre le cercle et son carré circonscrit (dessin de gauche).**

**Confondre  $\pi$  et 2 revient à confondre le cercle et son carré inscrit (dessin de droite).**

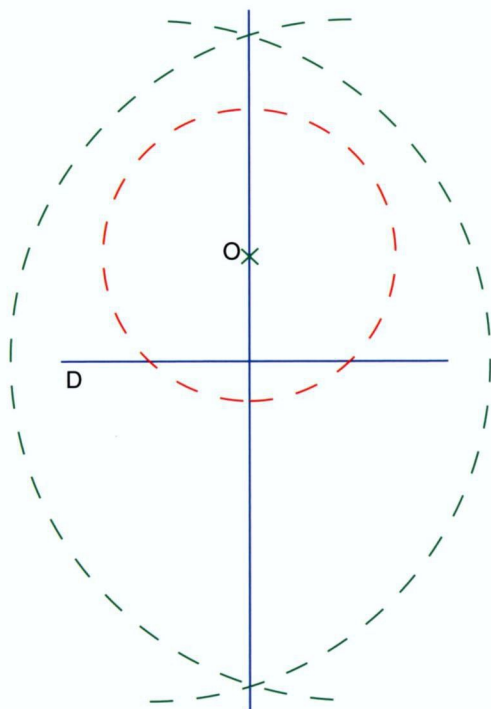
**Une approximation plus raisonnable consiste à prendre la moyenne entre les deux c'est-à-dire 3.**

nombreuses : on peut citer parmi les mathématiciens Pierre Estève et Louise Angélique Lemire. L'erreur est rapidement trouvée et le chevalier ne pouvant payer la somme fit appel au Roi, qui déclare que les actions en justice à ce propos sont annulées et les paris déclarés nuls. Le chevalier recommença une année plus tard avec la valeur "plus raisonnable" de 3,125. Ses essais infructueux ne prirent fin qu'à son mariage avec Marie-Madeleine de Villeneuve-Martignan.

*Les nombres rationnels sont constructibles mais ils ne sont pas les seuls.*

constructible. On remarque immédiatement qu'un nombre est constructible si et seulement s'il est en valeur absolue égal à la distance entre deux points constructibles. A partir de deux nombres constructibles, il est facile de construire un point dont les coordonnées sont les nombres en question. La détermination des points constructibles est donc équivalente à celle des nombres constructibles.

Comme il est possible de graduer la droite OI en y reportant la distance OI, les nombres entiers sont constructibles et donc tout point à coordonnées entières l'est aussi. Il est facile de faire la somme ou la différence de nombres constructibles. Il est aussi possible de faire le produit ou le rapport de deux réels constructibles en exploitant le



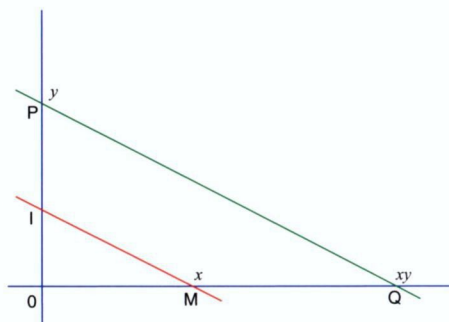
**Construction de la perpendiculaire à la droite D passant par O : un cercle de centre O coupe la droite en deux points, on construit la médiatrice de ces deux points comme précédemment.**

théorème de Thalès.

Les nombres rationnels sont donc des réels constructibles. Ce ne sont pas les seuls, le nombre irrationnel  $\sqrt{2}$  l'est aussi car égal à la longueur IJ. Plus généralement si  $a$  est un réel positif constructible, il est possible d'en construire la racine carrée en exploitant la relation :

$$\sqrt{a} = \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}$$

La construction correspondante est illustrée ci-contre :



**Construction du produit et du quotient de deux nombres.**

Suite à ces résultats, on peut affirmer que tout nombre réel obtenu par additions, soustractions, multiplications, rapports et passages à la racine carrée à partir de nombres entiers est constructible. Par exemple, le nombre

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ est constructible.}$$

Sa construction permet celle du pentagone régulier (voir l'article sur l'étoile en or).

De même, il est possible de construire

le nombre d'or  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  à la règle

et au compas (voir l'article *L'équation du beau*).

## Construction de l'heptagone

Est-il possible de construire à la règle et au compas un heptagone régulier ?

Si tel était le cas alors le nombre  $x = \cos \frac{2\pi}{7}$  serait constructible.

Le centre d'un heptagone étant aussi l'isobarycentre de ces sommets, on peut établir l'égalité suivante par calcul barycentrique sur les abscisses des sommets d'un heptagone de centre O et dont I est sommet :

$$1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0$$

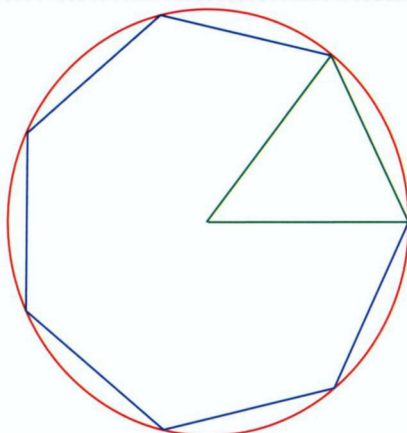
Or, on a

$$\cos \frac{12\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7} = x, \quad \cos \frac{10\pi}{7} = \cos \frac{4\pi}{7} = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad \cos \frac{8\pi}{7} = \cos \frac{6\pi}{7} = 4x^3 - 3x$$

donc  $x$  est solution de l'équation :  $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ .

Cette équation ne possède pas de racines rationnelles.

On en déduit que  $x$  est un nombre algébrique de degré 3, il n'est donc pas constructible.



Un heptagone régulier

## Caractérisation des nombres constructibles

De même, le nombre  $x = \frac{3 + \sqrt{5} - 1}{2}$

est constructible. Pour un tel nombre,

on observe que :  $(2x - 3)^2 = \sqrt{5} - 1$ .

donc  $[(2x - 3)^2 + 1]^2 = 5$ .

Ainsi  $x$  est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré 4.

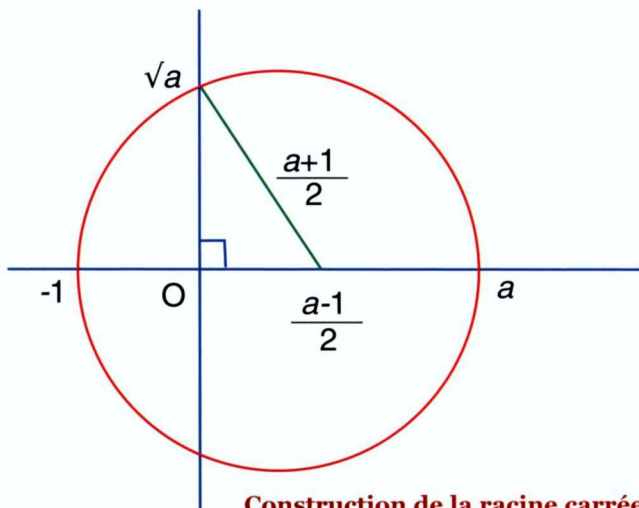
Un tel nombre est dit algébrique (voir l'article sur ce sujet). Plus généralement,

on montre que tout nombre constructible est algébrique de degré égal à une puissance de deux, c'est à dire que le plus petit degré d'une équation à coefficients entiers annulée par ce nombre est une puissance de deux.

Grâce à cette caractérisation, montrer qu'un problème peut ou ne peut pas être résolu à la règle et au compas

revient à prouver qu'un certain nombre est ou n'est pas constructible.

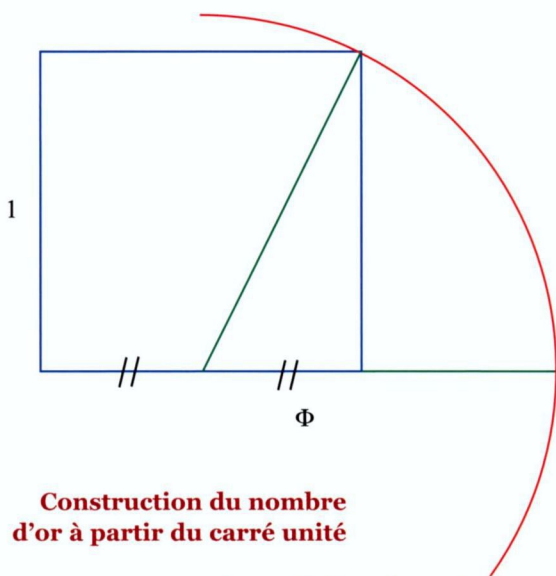
Voici quelques exemples célèbres.



Construction de la racine carrée

revient à prouver qu'un certain nombre est ou n'est pas constructible.

Voici quelques exemples célèbres.



**Construction du nombre d'or à partir du carré unité**

**La quadrature du cercle**

Les mathématiciens de la Grèce antique manipulaient les nombres par le biais de leur représentation géométrique. Ainsi les nombres entiers se comprenaient comme étant les multiples d'une longueur unité, les radicaux carrés comme les hypoténuses de triangles rectangles. Dans cette perspective, le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, c'est à dire le nombre  $\pi$ , se devait d'être constructible à la règle et au compas. Obtenir une construction du nombre  $\pi$  équivaut à savoir construire un carré délimitant une surface égale à celle délimitée par

un cercle donné, c'est le problème de la quadrature du cercle : la transformation d'un cercle en un carré équivalent. Pendant près de deux millénaires, les mathématiciens essaieront en vain de réaliser cette construction, mais vers le XVI<sup>e</sup> siècle commence à émerger l'idée :

*La quadrature du cercle est-elle vraiment possible ?*

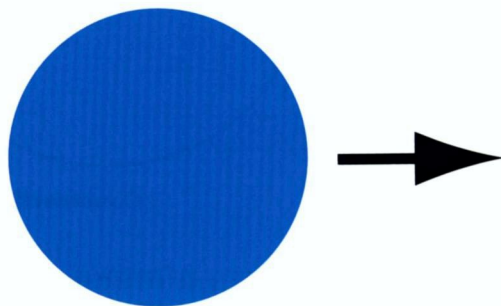
C'est en 1882 que F. Lindemann clos le débat en établissant l'impossibilité d'une telle construction. Désormais l'expression quadrature du cercle est devenue dans le langage courant synonyme de problème insoluble.

La quadrature du cercle revient à construire deux points A et B tels que :  $AB = \sqrt{\pi}$ . Si elle était réalisable, le nombre  $\pi$  serait constructible. En prouvant en 1882 que le nombre  $\pi$  est transcendant, c'est à dire qu'il n'est racine d'aucune équation algébrique, F. Lindemann établit par la même occasion que  $\pi$  n'est pas constructible : la quadrature du cercle est impossible.

**Duplication et trisection**

Dupliquer un cube consiste à construire un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné, cela revient

*La quadrature du cercle est impossible car  $\pi$  est transcendant.*



**La quadrature du cercle**

construire  $\sqrt[3]{2}$  (voir l'article *Les courbes à résoudre*) or ce nombre est algébrique de degré 3 qui n'est pas une puissance de 2. La duplication du cube est par conséquent impossible.

La trisection consiste à découper un angle en trois angles égaux. Il est possible de réaliser la trisection de certains angle. Par exemple, l'angle  $\pi/6$  étant constructible puisque  $\sin(\pi/6) = 1/2$ , on peut réaliser la trisection d'un angle droit (ci-contre.)

Le problème consiste à disposer d'une technique permettant de réaliser à la règle et au compas la trisection de n'importe quel angle. Si ce problème était soluble, on saurait construire l'angle  $\alpha = \frac{2\pi}{9}$

par trisection de l'angle constructible  $\frac{2\pi}{3}$ , par conséquent  $\cos \alpha$  serait un

nombre constructible. Or on observe :

$$\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \text{ et}$$

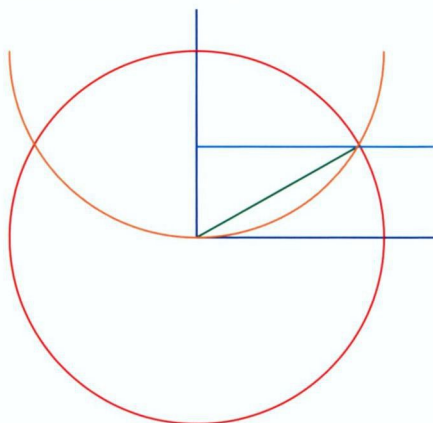
$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

ce qui permet d'affirmer que  $\cos \alpha$  est racine de l'équation algébrique :

$$8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Cette équation ne possédant pas de racines rationnelles, il n'existe pas d'équation algébrique à coefficients entiers de degré strictement inférieur à trois dont  $\alpha$  est solution. Le réel  $\cos \alpha$  est donc un nombre algébrique de degré trois et par conséquent n'est pas constructible. La trisection de l'angle est donc impossible.

D.D.



**Une trisection possible : celle de l'angle droit**

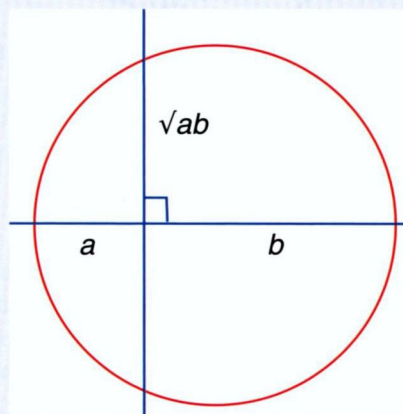
## La quadrature du rectangle

Ce problème consiste à construire un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle donné. En notant  $a$  et  $b$  les longueurs des côtés de ce rectangle, le problème revient à savoir construire le nombre  $\sqrt{ab}$ . En introduisant la longueur unité, nous avons vu ci-dessus comment construire le produit de deux nombres et nous saurons en extraire la racine carrée. Plus simplement, on obtient directement  $\sqrt{ab}$  par la construction suivante inspirée du calcul d'une racine carrée :

A partir de cette construction on peut résoudre le problème d'optimisation suivant :

*La somme de la largeur et de la longueur d'un rectangle étant donnée, quel est le rectangle d'aire maximale ?*

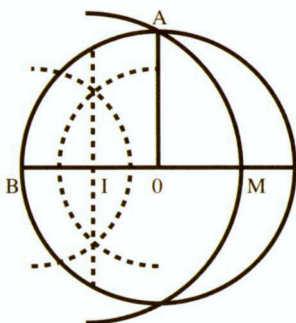
Sur la figure ci-dessus, la somme de la largeur et de la longueur du rectangle détermine le diamètre du cercle, la position du point  $O$  détermine quant à elle la proportion relative de la largeur par rapport à la longueur. L'aire du rectangle est maximale quand la longueur  $OM$  l'est c'est dire quand  $O$  est le centre du cercle. Ce cas de figure correspond au cas où le rectangle est un carré.



**Quadrature du rectangle**

# L'étoile en or

## Construction à la règle et au compas



**I est le milieu de [OB].  
Le cercle de centre I passant  
par A coupe le diamètre en M.**

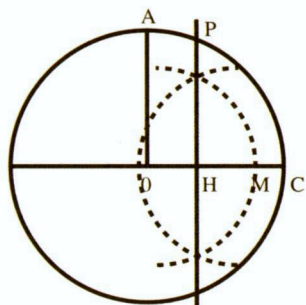
Dans la première étape, on construit dans un cercle de rayon 1 le point M tel que :

$$OM = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle IOA permet de vérifier cette formule si l'on tient compte de la relation :

$$OM = IA - \frac{1}{2}.$$

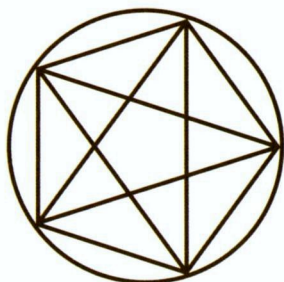
Remarquez en passant que nous retrouvons ici le nombre d'or.



**La médiatrice de [OM],  
elle coupe le cercle en P.**

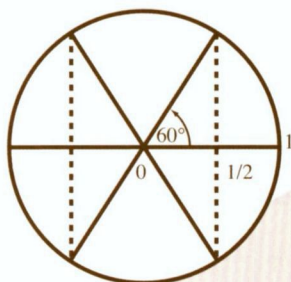
En traçant le milieu de [OM], nous obtenons donc :

$$OH = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ d'où : } OH = \cos \frac{2\pi}{5}.$$



Nous en déduisons le premier sommet de l'étoile cherchée, soit P. Il suffit alors de reporter la longueur CP avec le compas sur le cercle pour en déduire les autres sommets. Nous obtenons en même temps la construction du pentagone régulier ci-contre.

## Le gâteau



Pour construire une belle étoile à cinq branches, nous utilisons le pentagone régulier. On peut bien sûr partir d'un cercle et y construire avec un rapporteur cinq angles au centre de  $72^\circ$ , mais cette méthode manque d'élégance et de précision.

Comme on partage un gâteau en six en coupant le diamètre en quatre, (sans y penser, chacun utilise la relation :  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ),

nous construirons le pentagone régulier en utilisant le cosinus de  $72^\circ$  (ou  $\frac{2\pi}{5}$  radians).

Il s'agit donc de trouver  $x = \cos \frac{2\pi}{5}$ .

Posons  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ . Nous avons  $\cos 5\theta = 1$ .

La relation trigonométrique :  $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$  montre que  $x$  est solution de l'équation :

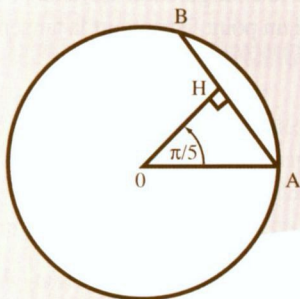
$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Cette équation se factorise en :

$(x - 1)(4x^2 + 2x - 1)^2 = 0$ . En éliminant les solutions impossibles, nous trouvons donc :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

## L'or de l'étoile



Si le rayon du cercle initial est 1, le côté du pentagone est  $2 \sin \frac{\pi}{5}$ .

Dans le triangle rectangle OHA on a  $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{HA}{OA}$  donc  $AB = 2 \sin \frac{\pi}{5}$ .

De même le côté de l'étoile est  $2 \sin \frac{2\pi}{5}$  donc le rapport entre les

deux est  $x = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}}$  puisque  $\sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$

alors on a  $x = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ .

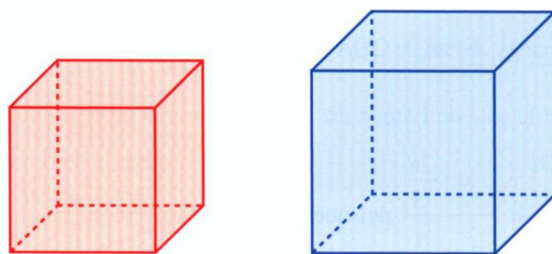
De même  $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$  donc  $x$  est solution de l'équation :

$$x^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} \text{ et } x > 0 \text{ donc } x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ qui est le nombre d'or.}$$

# Les courbes à résoudre

Pour construire des grandeurs à la règle et au compas, certaines courbes se révèlent d'un grand secours. Ainsi, celle que trouva Dioclès permet de résoudre le problème de la duplication du cube, tandis que celle de Mac Laurin sert à couper un angle en trois parties égales.

**L**a duplication du cube est l'un des problèmes légués par les mathématiciens de la Grèce antique. Il s'agit de construire un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné, comme sur le dessin ci-dessous.

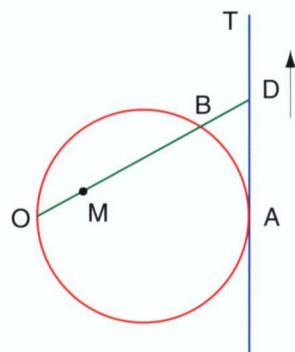


Si l'arête du cube donné est de longueur  $a$ , son volume est  $a^3$  donc la duplication du cube revient à résoudre l'équation algébrique  $x^3 = 2a^3$  à la règle et au compas c'est-à-dire à construire  $a\sqrt[3]{2}$  à partir de la donnée de  $a$  (voir l'article sur les constructions à la règle et au compas). Ce problème

s'est avéré insoluble sauf en autorisant d'autres méthodes. En voici une utilisant une courbe.

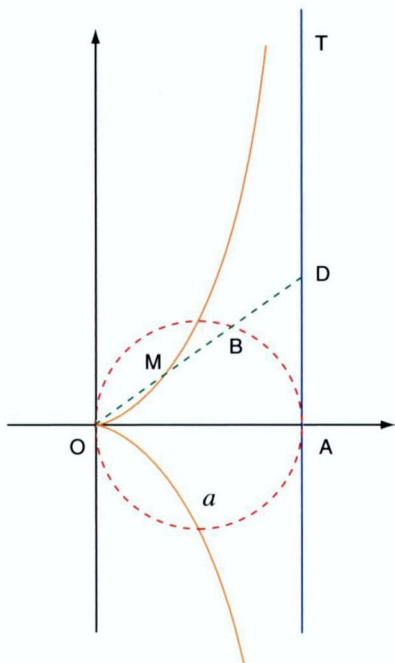
## Construction de la cissoïde

Pour construire la cissoïde de Dioclès, on part de la configuration suivante :  
Quand un point  $D$  parcourt la tangente en



Le point  $D$  décrit la tangente  $T$  au cercle de diamètre  $OA$  en  $A$ .  
On porte  $M$  sur le segment  $OD$  tel que  $OM = BD$ .

A à un cercle de diamètre OA, le point M du segment OD déterminé par  $OM = BD$  décrit une courbe appelée Cissoïde de Dioclès. Remarquez que ce point M est constructible à la règle et au compas à partir de la longueur OA. Ainsi, tous les points de la cissoïde de Dioclès sont constructibles à la règle et au compas. Nous obtenons la courbe suivante :



La cissoïde de Dioclès

En introduisant une mesure  $\theta$  de l'angle entre le vecteur  $\vec{OA}$  et le vecteur  $\vec{OD}$ , on montre que les coordonnées du point M sont :

$$x = a \sin^2 \theta \text{ et } y = a \sin^2 \theta \tan \theta.$$

Cela permet d'établir que notre courbe a pour équation cartésienne :

$$x(x^2 + y^2) = ay^2.$$

Quand  $AD = a^3\sqrt{2}$ , on peut établir les

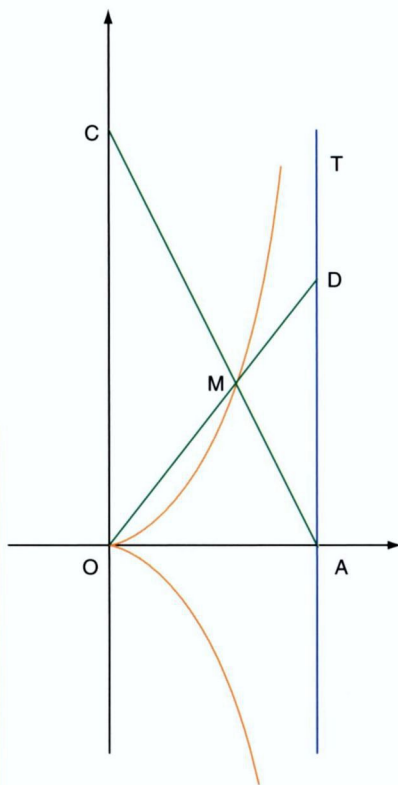
les coordonnées de M :

$$x = \frac{a^3\sqrt{4}}{1 + \sqrt[3]{4}} \text{ et } y = \frac{2a}{1 + \sqrt[3]{4}}.$$

Le détail des calculs effectués pour établir ces identités est expliqué dans l'encadré *Calcul des coordonnées de M.*

Le point M appartient donc à la droite d'équation cartésienne  $2x + y = 2a$ . En construisant l'intersection de cette droite et de la cissoïde de Dioclès, on obtient le point M et on en déduit le point D et donc une construction géométrique de  $a^3\sqrt{2}$ .

*Tous les points de la cissoïde de Dioclès sont constructibles à la règle et au compas.*



Construction de l'arête AD du cube dupliqué :  $OC = 2 OA$  (construction au compas), AC coupe la cissoïde en M et OM coupe T en D.

### Calcul des coordonnées de M

En utilisant les notations ci-dessus, comme OD se projette en OA sous l'angle  $\theta$ , on peut écrire  $a = OD \cos \theta$ . De même, OA se projette en OB sur OD donc on a aussi  $OB = a \cos \theta$ . Comme  $OM = OD - OB$ , on en déduit :

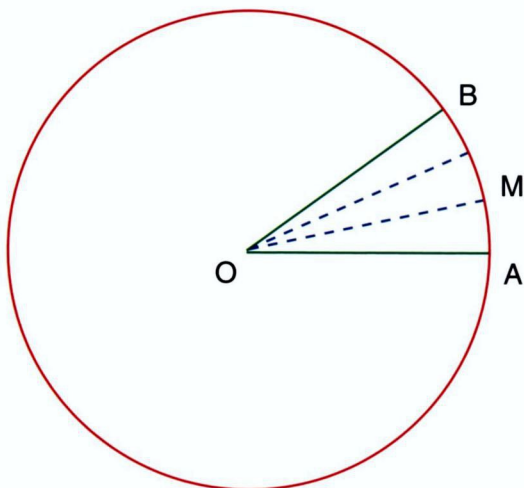
$$OM = \frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta = \frac{a}{\cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{a}{\cos \theta} \sin^2 \theta.$$

Donc  $x = OM \cos \theta = a \sin^2 \theta$  et  $y = OM \sin \theta = a \sin^2 \theta \tan \theta$ . Comme par ailleurs  $x^2 + y^2 = OM^2$ , on déduit facilement que  $x(x^2 + y^2) = ay^2$ .

Enfin, on a  $AD = OD \sin \theta$  donc si  $AD = a^3\sqrt{2}$  alors  $\tan \theta = \sqrt[3]{2}$  d'où les coordonnées de M.

**Diviser un angle en trois**

La trisection de l'angle est l'un des problèmes légués par les mathématiciens de la Grèce antique. Il s'agit de construire un angle égal au tiers d'un angle donné.



Si l'angle donné AOB a pour mesure  $3\theta$ , il s'agit de trouver l'angle AOM de mesure  $\theta$  ce qui revient à trouver la projection de M sur OA qui a pour mesure  $R \cos \theta$  où R est le rayon du cercle ci-dessus. La formule trigonométrique  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  montre que cette projection  $x$  est solution de l'équation algébrique :

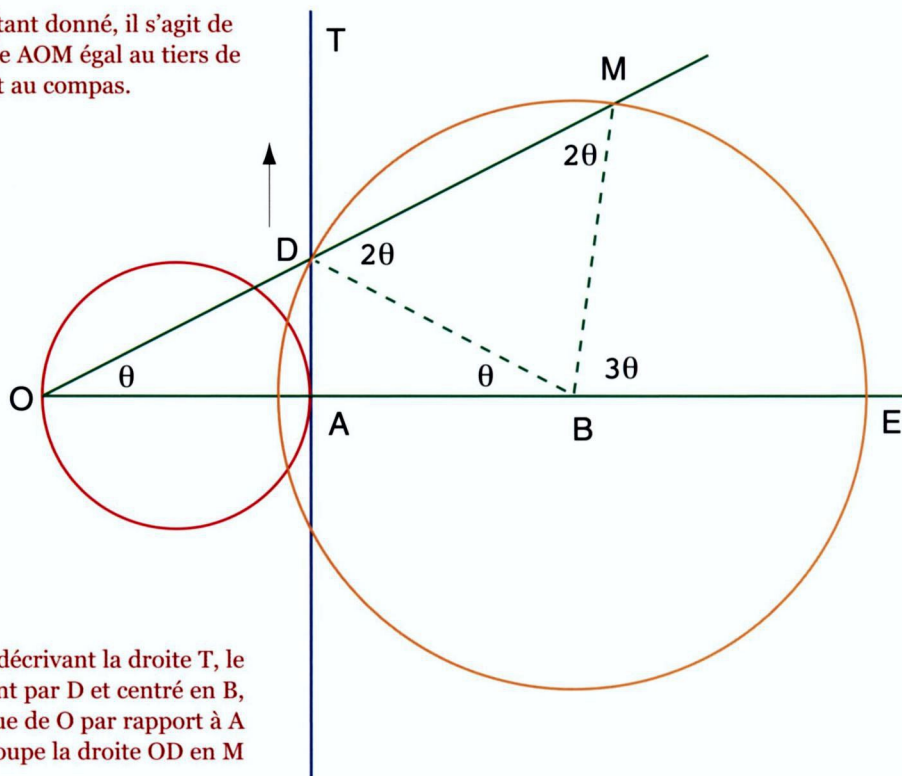
$$4x^3 - 3R^2x = aR^2$$

où  $a$  est la mesure de la projection de B sur OA. Il s'agit donc de construire la solution de cette équation à partir des données de  $a$  et de R. Ce problème s'est avéré insoluble à la règle et au compas, mais soluble avec d'autres méthodes. En voici utilisant une courbe.

**Construction de la trisectrice**

Pour construire la trisectrice, on part de la configuration suivante :

Un angle AOB étant donné, il s'agit de construire l'angle AOM égal au tiers de AOB à la règle et au compas.



Le point D décrivant la droite T, le cercle passant par D et centré en B, symétrique de O par rapport à A recoupe la droite OD en M

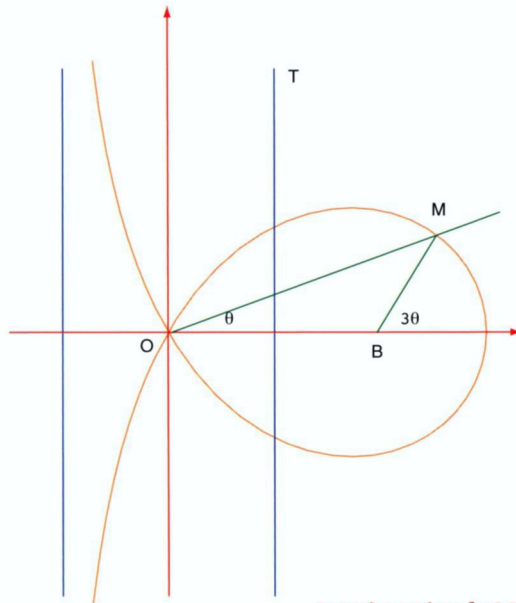


## Colin Mac Laurin

Colin Mac Laurin est né en 1698 et mort en 1746 en Ecosse. De cinquante ans son cadet, il défendit les théories de Newton contre ceux qui lui reprochaient son manque de rigueur. Pour cela, il tenta de les adapter aux méthodes rigoureuses d'Archimède. Ce type de méthodes ne réussit pleinement qu'au dix-neuvième siècle avec Cauchy.

Quand un point D décrit la droite T, médiatrice du segment OB, le cercle de centre B passant par D recoupe la droite OD en un point M. Ce point M décrit une courbe appelée trissectrice de Mac Laurin. Remarquez que ce point M est constructible à la règle et au compas à partir de la longueur OA. Ainsi, tous les points de la trissectrice sont constructibles à la règle et au compas.

Nous obtenons la courbe suivante :



La trissectrice de Mac Laurin

### Trisection de l'angle

Par construction, on a la double égalité :

$$OD = BD = BM$$

ce qui assure que les triangles ODB et DBM sont isocèles donc si la mesure de l'angle BOM est égale à  $\theta$ , celle de l'angle EBM est  $3\theta$ . Ainsi, pour réaliser une trisection, on porte l'angle  $3\theta$  en B. On obtient le point sur la trissectrice M. L'angle BOM est égal à  $\theta$ .

D.D.

## Dioclès

Dioclès est né à Karistos (île du Dodécanèse) vers 240 avant Jésus-Christ et mort à Eubée vers 180. Il s'agit donc d'un contemporain d'Apollonius de Perge. Comme lui, il a étudié les coniques. Il est reconnu comme le premier mathématicien à avoir découvert et montré la propriété focale de la parabole. A tort, cette propriété est parfois attribuée à Archimède qui l'aurait utilisée pour incendier les navires romaines au cours du siège de Syracuse. Les problèmes techniques pour réaliser de tels miroirs sont tels que ce fait relève sans doute de la légende.



# Les abaquages

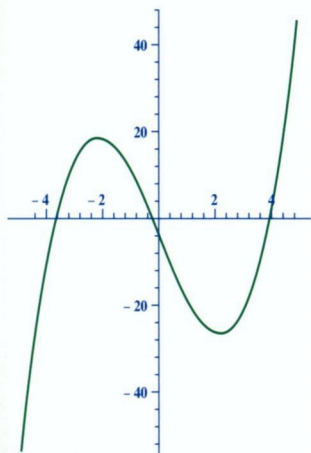
## Tracer un graphique

Pour résoudre une équation, par exemple :

$x^3 - 15x - 4 = 0$ , une idée est de tracer la courbe d'équation :

$y = x^3 - 15x - 4$  et de lire sur le graphique l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des  $x$ .

Nous voyons ici que l'équation a trois racines réelles. Avec un tel graphique, on peut les déterminer à 0,1 près :  $-3,7$ ,  $-0,3$  et  $4,0$ . Bien entendu, on peut constater ici que 4 est solution exacte. Les autres ne sont qu'approchées.



**Tracé de la courbe d'équation**  
 $y = x^3 - 15x - 4$

## Les valeurs intermédiaires

Pour préciser les approximations obtenues, nous remarquons que  $y = x^3 - 15x - 4$  change de signe en passant par ses racines. Nous calculons donc  $y$  pour  $-3,8$  et  $-3,6$ , nous trouvons :

$$y(-3,8) = -1,872 < 0$$

$$\text{et } y(-3,6) = 3,344 > 0$$

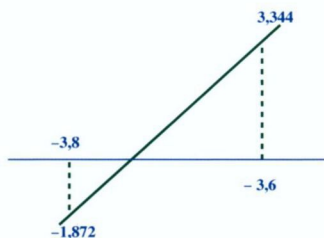
donc  $y$  s'annule entre  $-3,8$  et  $-3,6$  ce qui assure que  $-3,7$  est racine à 0,1 près.

Il est possible de continuer ainsi pour obtenir une meilleure précision de la racine.

## Interpolation linéaire

Une façon d'améliorer la précision de lecture de notre graphique consiste à remplacer des portions de courbe par des segments de droite. D'après les calculs qui précèdent, entre  $-3,8$  et  $-3,6$ , la courbe est approximativement :

Graphiquement, cette interpolation de la courbe permet de lire une nouvelle valeur approchée de la racine. La précision est meilleure en utilisant le théorème de Thalès :



$$\frac{h}{1,872} = \frac{0,2 - h}{3,344}$$

où la racine cherchée est  $-3,8 + h$ . Nous en déduisons :

$$h = \frac{0,2 \times 1,872}{1,872 + 3,344} = 0,07 \text{ d'où}$$

**Interpolation de la courbe** la racine  $-3,73$ .

**entre deux points**

pour s'assurer de la précision obtenue, nous utilisons à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires :

$y(-3,74) = -0,213624 < 0$  et  $y(-3,72) = 0,321152 > 0$   
donc  $y$  s'annule entre  $-3,74$  et  $-3,72$  ce qui assure que  $-3,73$  est racine à 0,01 près.

## Le théorème fondamental

De ces idées géométriques, on déduit que toute équation de degré impair a au moins une racine réelle puisqu'elle change de signe entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . En développant cette idée un peu plus subtilement, on peut démontrer que toute équation a au moins une racine complexe ce qui permet d'en déduire que son nombre de racines distinctes ou confondues est égal à son degré.

Les méthodes itératives	p. 78
Où sont les racines ?	p. 82
Joseph-Louis Lagrange	p. 83
Autour du théorème de Sturm	p. 84
Des racines au goutte à goutte	p. 88
Al Khwarizmi	p. 91
L'équation du beau	p. 92
François Viète	p. 95
Quel est le taux effectif d'un emprunt ?	p. 96
La méthode de Bairstow	p. 100

# numérique approchée



Abel, puis Évariste Galois, ont montré l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré supérieur à cinq par radicaux. Cette découverte a ouvert la voie aux méthodes numériques approchées. Ainsi apprit-on à localiser des racines par des méthodes graphiques, et à en obtenir des approximations très fines grâce à des méthodes itératives. La plus simple, la dichotomie, a des applications qui dépassent de loin les équations, tandis que celle dite de Newton a exprimé sa pleine puissance grâce aux ordinateurs. Toutes ces méthodes peuvent être appliquées à résoudre des équations particulières : celle donnant le nombre d'or, ou, bien pratique, celle calculant le taux effectif d'un emprunt.

# Les méthodes itératives

Héron employait la méthode de Newton plus d'un millénaire avant la naissance de ce dernier, mais seuls les ordinateurs ont permis à cette méthode itérative d'exprimer sa pleine puissance.

*La méthode peut être très rapide ou ... divergente.*

Si une suite définie par les formules :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n, \end{cases}$$

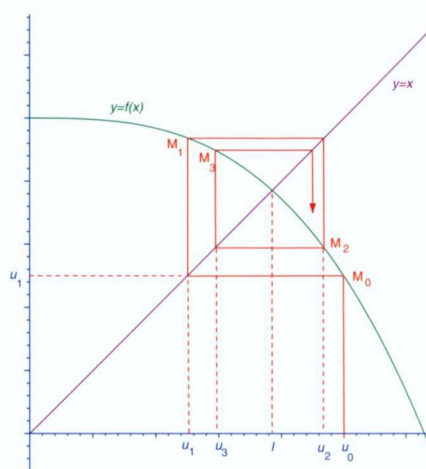
où  $f$  est une fonction continue et  $a$  un nombre, converge vers un nombre  $l$ , il vérifie :  $f(l) = l$ . Cette remarque a donné naissance aux méthodes itératives de calcul. Afin de calculer les racines d'une équation par une telle méthode, il s'agit donc de la mettre sous la forme  $f(x) - x = 0$ .

## Transformation de l'équation

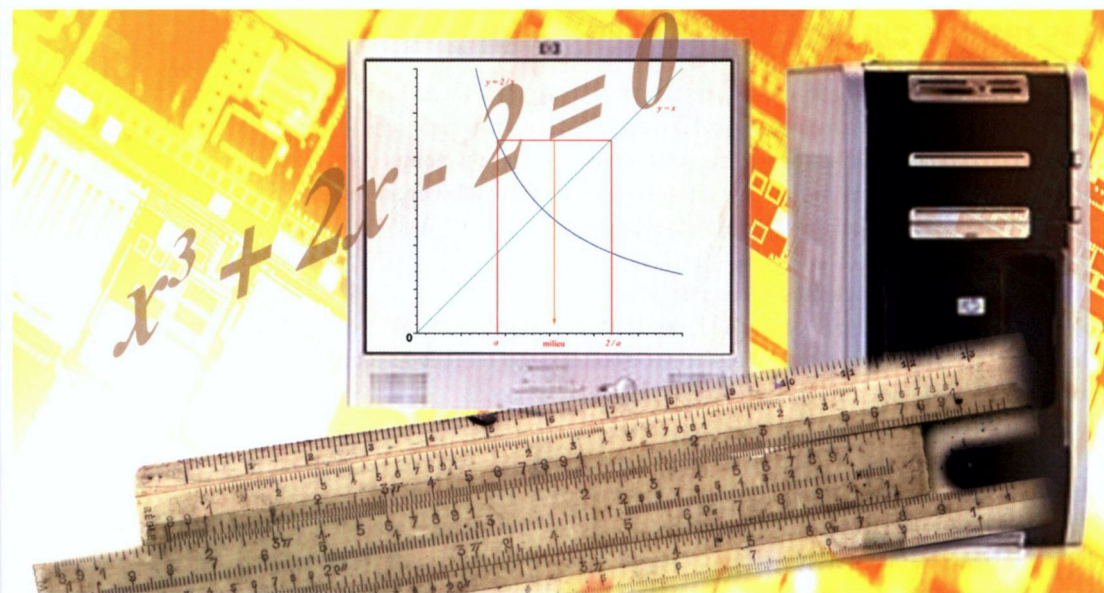
Examinons le problème sur le cas de l'équation :

$$x^3 + 2x - 2 = 0.$$

Nous séparons d'abord ses racines comme vu dans l'article "séparation des racines" et trouvons qu'elle en possède une seule et qu'elle appartient à  $]0, 1[$ .



Construction géométrique des termes de la suite un vérifiant :  $u_{n+1} = f(u_n)$ . On porte  $u_0$  sur l'axe des abscisses, la verticale en ce point coupe la courbe d'équation  $y = f(x)$  en un point  $M_0$  d'ordonnée  $u_1$ . L'horizontale en  $M_0$  coupe la droite d'équation  $y = x$  en un point d'abscisse  $u_1$ . En recommençant le procédé, on obtient  $u_2$  et ainsi de suite.



Une première idée est d'écrire cette équation sous la forme :  $1 - \frac{x^3}{2} = x$ .

En prenant comme valeur initiale  $a = 1$ , nous obtenons la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^3}{2} \text{ pour tout } n \end{cases}$$

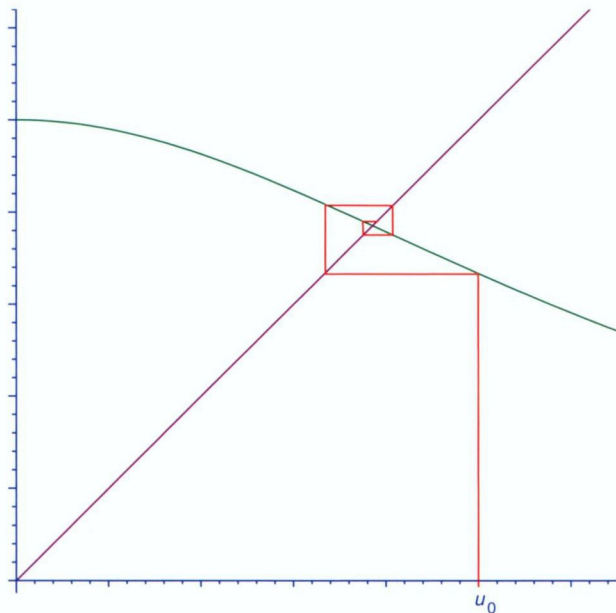
La suite des valeurs obtenues indique une convergence lente. Une construction géométrique des valeurs successives de la suite explique ce phénomène.

Nous obtenons :  $u_{50} = 0,77$ . Le calcul de  $x^3 + 2x - 2$  pour 0,76 et 0,78 montre un changement de signe entre ces deux valeurs donc 0,77 est une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la racine cherchée. Sur la figure ci-contre, nous voyons que la lenteur de la convergence de la suite est liée à la pente de la courbe d'équation  $y = f(x)$  au point d'abscisse  $l$ . En écrivant l'équation sous la forme :

$$\frac{2}{x^2 + 2} = x,$$

nous obtenons une convergence beaucoup plus rapide, ce qui s'explique par le dessin de la figure ci-contre.

Maintenant, 0,77 est obtenu après 8 itérations seulement. Après 30 itérations, on obtient : 0,7709169971. De même que précédemment, on peut alors vérifier l'approximation obtenue en calculant le signe de  $x^3 + 2x - 2$  pour 0,7709169970 et 0,7709169972.



Sur cette courbe, on remarque que la convergence de la suite vers la racine est beaucoup plus rapide.

**Les racines carrés au certificat d'étude**

La méthode de Newton aboutit à la méthode de Héron d'extraction des racines (voir l'article *Le premier irrationnel*). A l'opposé de cette idée adaptée aux ordinateurs, on enseignait autrefois une méthode d'extraction des racines "à la main".

Cette technique fût longtemps enseignée pour le certificat d'étude jusqu'à ce qu'elle devienne désuète après l'apparition des calculatrices électroniques. A titre d'exemple, nous allons calculer la racine carrée du nombre  $N = 54\ 321$ .

On commence par figurer une barre verticale et une barre horizontale comme pour une division. On dispose le nombre  $n$  à la place du dividende, sa racine carrée sera lue à la place du diviseur. On décompose ensuite  $n$  en tranches de deux chiffres en commençant par unités et dizaines.

5 43 21	
1 43	

On cherche alors le plus petit entier dont le carré est inférieur à la tranche de gauche, on l'écrit à la place du diviseur et on retire son carré de la première tranche.

5 43 21	2
1	

On abaisse ensuite la tranche suivante pour former ce qu'on appelle le reste partiel et on porte à la place du quotient le double du nombre écrit à la

place du diviseur. Vient alors l'étape la plus délicate : on recherche le plus grand chiffre  $x$  qui, substitué aux points d'interrogation, conduit à un résultat inférieur au reste partiel.

5 43 21	2
1 43	4? ? =

On reporte alors ce chiffre à la place du diviseur et on retire le résultat de l'opération du reste partiel.

5 43 21	23
1 43	43 3 = 129
14	

On abaisse ensuite la tranche suivante et on reprend le processus décrit ci-dessus...

5 43 21	233
1 43	43 3 = 129
14 21	463 3 = 1389
32	

On peut même poursuivre le calcul après la virgule en abaissant des tranches de 00.

5 43 21	233,06...
1 43	43 3 = 129
14 21	463 3 = 1389
32 00	4660 0 = 0
32 00 00	46606 6 = 279636
4 03 64	

**David Delaunay**

Remarquez également qu'un mauvais choix comme :  $x^3 + 3x - 2 = x$  peut donner une suite divergente.

**Le choix de Newton**

Une idée générale pour mettre une équation  $P(x) = 0$  sous la forme  $f(x) - x = 0$  est de choisir :

$$f(x) = x + k(x) P(x)$$

où  $k$  est une fonction. Pour que la convergence soit rapide, nous choisissons alors  $k$  tel que la dérivée de  $f$  s'an-

nule comme  $P$  c'est-à-dire :  $f'(x) = 0$  quand  $P(x) = 0$ .

Pour cela, il suffit de choisir :  $1 + k(x) P'(x) = 0$

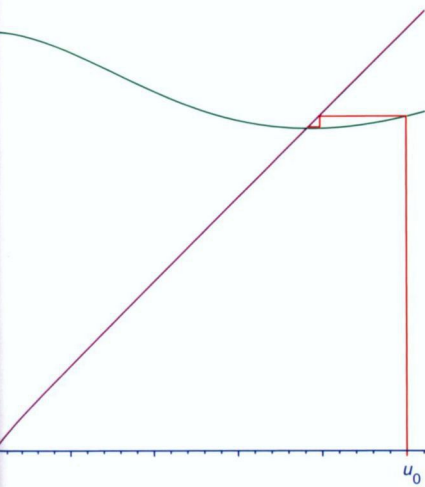
ce qui donne :

$$f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

Ce choix est celui de Newton. Dans notre cas particulier, nous obtenons donc :

$$f(x) = x - \frac{x^3 + 2x - 2}{3x^2 + 2} = 2 \frac{x^3 + 2}{3x^2 + 2}$$

La convergence est maintenant très rapide comme le montre la figure ci-après.



La tangente en la racine est horizontale ce qui donne une convergence très rapide.

Le résultat est maintenant obtenu avec 10 décimales exactes après 4 itérations seulement. Il est également possible de modifier la méthode en remplaçant  $P'(x)$  par une valeur approchée. Ici, on peut prendre  $P'(1) = 5$  d'où :

$$f(x) = x - \frac{x^3 + 2x - 2}{5} = 2 - \frac{-x^3 + 3x + 2}{5}$$

Le résultat est maintenant obtenu en 15 itérations mais les calculs à chaque itération sont plus simples.

### Programmation de la méthode

La programmation de cette méthode est très simple. Si nous voulons déterminer une racine de l'équation :  $P(x) = 0$  avec une incertitude égale à  $\varepsilon > 0$ , il suffit de partir d'une valeur  $a$  que nous pensons proche de la racine cherchée et exécuter le programme :

$$x := a$$

tant que  $|f(x) - x| > \varepsilon$  faire  $x := f(x)$

$$\text{où } f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

Si le programme s'arrête, en principe le résultat est une racine de l'équation  $P(x) = 0$  à la précision  $\varepsilon > 0$ .

Cependant, si nous avons de bonnes raisons de le penser, rien ne permet de l'affirmer. Pour en avoir la certitude, le plus simple est de déterminer les signes de  $P(x - \varepsilon)$  et  $P(x + \varepsilon)$ .

S'il y a changement,  $x$  est bien racine de  $P = 0$  à la précision  $\varepsilon > 0$ .

### De bonnes conditions

Même si dans la pratique, la question n'est guère importante, il est possible de déterminer des conditions pour lesquelles la méthode de Newton converge effectivement vers une racine de l'équation. Ces conditions viennent simplement d'une interprétation géométrique de la méthode :

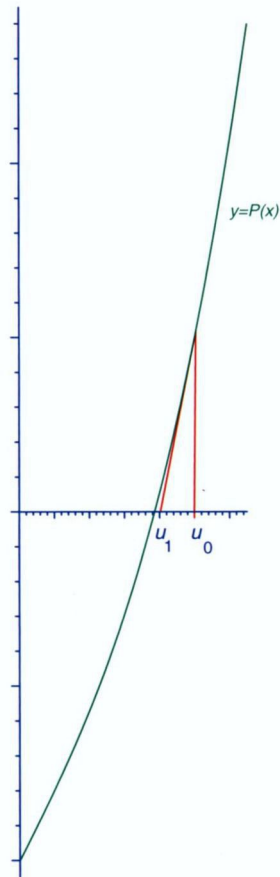
On en déduit que si  $P$  est positif en  $a$ , négatif en un point  $b < a$  et convexe sur  $[b, a]$  alors la méthode converge vers une racine de  $P$ . Il en est de même dans le cas symétrique :  $P$  négatif en  $a$ , positif en un point  $b > a$  et concave sur  $[a, b]$ .

### Newton et le chaos

Si on sort de ces conditions, tout est possible. La méthode peut converger vers une racine, diverger ou même se comporter de façon chaotique. On obtient ce type de comportement avec l'équation :

$$4x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0.$$

Si on commence la suite en 1, elle oscille entre 1 et 0. Un comportement plus étrange peut se produire pour d'autres valeurs. Tout dépend de la condition initiale. Cette question a ouvert la voie à un bon nombre d'études sur le chaos.



Interprétation géométrique de la méthode de Newton : on passe d'une valeur  $x$  de la suite à la suivante en traçant la tangente au point d'abscisse  $x$ . Elle coupe l'axe des  $x$  au point cherché.

H.L.

# Où sont les racines ?

Les méthodes graphiques permettent de localiser rapidement les racines. Des méthodes itératives donnent alors rapidement d'excellentes précisions.

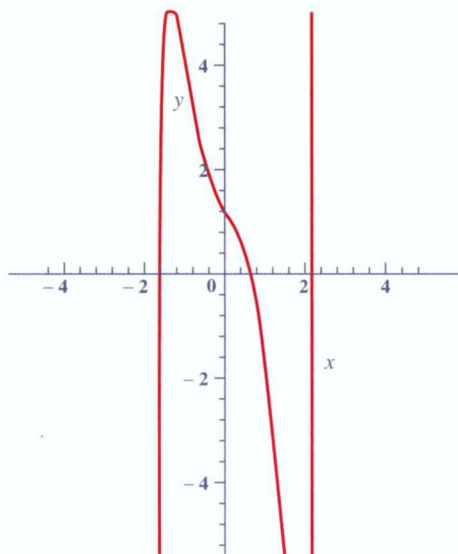
## Changements de signe

Pour résoudre numériquement une équation, la première idée est d'en localiser les racines ce qui revient à la résoudre de façon grossière. Pour cela, nous reprenons l'idée vue dans l'article sur les abaques. Considérons par exemple l'équation :

$$x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Nous traçons la courbe d'équation :

$$y = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1 :$$



**Courbe d'équation :**

$$y = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$$

L'équation a donc trois racines réelles entre  $-2$  et  $-1$ ,  $0$  et  $1$  et  $2$  et  $3$  ce que l'on vérifie grâce au théorème des valeurs intermédiaires puisque :

$$y(-2) = -17, y(-1) = 4, y(0) = 1, \\ y(1) = -2, y(2) = -5, y(3) = 88.$$

Les changements de signe ci-dessus montrent que  $y$  s'annule sur chacun des intervalles  $[-2, -1]$ ,  $[0, 1]$  et  $[2, 3]$ .

## La méthode de dichotomie

Considérons le dernier de ces intervalles en guise d'exemple. En calculant le signe de  $y$  en  $2,5$ , nous déterminons si la racine est entre  $2$  et  $2,5$  ou entre  $2,5$  et  $3$  :

$$y(2,5) = 16,46875 > 0$$

donc la racine se situe entre  $2$  et  $2,5$ . Nous pouvons recommencer ainsi. La précision est doublée à chaque étape :

$$y(2,25) > 0, y(2,125) < 0, y(2,1875) < 0, \\ y(2,21785) > 0, y(2,2027) < 0, y(2,2102) > 0$$

ce qui prouve que la racine est égale à  $2,20$  à  $0,01$  près. En une étape supplémentaire, nous obtenons  $2,205$  à  $0,001$  près et ainsi de suite.

Si nous partons d'un intervalle de longueur  $l$  contenant une racine, la méthode de dichotomie permet d'obtenir une précision de  $0,001$  en  $10$  étapes car  $2^{10} = 1024$ . La précision de  $10^{-6}$  est obtenue en  $20$  étapes et celle de  $10^{-9}$  en  $30$  étapes, etc.

## Les tests dichotomiques

Supposons que nous voulions tester la présence d'albumine dans les urines de cent personnes. Après que chacune ait rempli un tube à essai, comme le test est très sensible, il suffit de mélanger un dixième de chaque tube à essai dans un flacon. Testez le flacon entier. S'il est négatif, tous les tests sont négatifs. S'il est positif, recommencez avec les cinquante premiers. La méthode de dichotomie permet ainsi de retrouver toutes les personnes positives. Si aucune l'est, il suffit d'un test. Si une seule l'est, il suffit de sept tests. Dans les deux cas les plus probables, l'économie est donc considérable, ce n'est que dans le cas où toutes les personnes seraient positives que cent tests sont nécessaires.

# Joseph-Louis Lagrange

**Lagrange s'est intéressé à la résolution d'équations de tous les degrés. Il étudia les travaux de Cardan et Ferrari et ouvrit la voie à ceux de Galois.**

**B**ien que né à Turin, Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736-1813) est cependant considéré comme un mathématicien français, selon son souhait, son père étant d'origine française. Il garde cependant, au dire de son élève Fourier, un « accent italien très marqué, il prononce les *s* comme les *z* ». Il se passionne dès 17 ans pour les mathématiques en lisant un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique et les étudie si bien qu'à 19 ans il est déjà professeur à l'École d'Artillerie de Turin. Il passe presque vingt ans de sa vie à Berlin, sur l'invitation de Frédéric II, comme directeur des mathématiques à l'Académie royale des Sciences de Prusse. Il produit alors nombre de travaux en astronomie, probabilités, arithmétique, équations différentielles, théorie des fonctions, théorie des équations algébriques... Il revient en France en 1787 et devient membre de l'Académie des Sciences de Paris, puis, pendant la Révolution, président de la commission des poids et mesures. C'est lui qui favorisera l'introduction du système métrique et du système décimal pour les mesures. Ayant traversé la révolution sans encombre, il fut, à partir de 1795, le premier professeur d'analyse de l'École Polytechnique, alors École Centrale des Travaux Publics et termine sa vie comme sénateur et comte d'Empire, nommé par Napoléon.

## Résoudre toutes les équations

Parmi les sujets chers à Lagrange figure la théorie des équations. Il publie en 1798 un traité *De la résolution des équations numériques de tous les degrés*, utilisant comme base ses *Mémoires* de 1767. Dans cet ouvrage, il s'agit de calculer les racines des équations en les approchant par des fractions continues. En 1770 il publie un nouveau mémoire, sur la résolution des équations algébriques cette fois ; s'il ne tente pas d'y résoudre l'équation du cinquième degré qui fait tant rêver les mathématiciens d'alors, il analyse et comprend les démarches des mathématiciens italiens Cardan et Ferrari pour les équations de degré 3 et 4. Il indique alors comment abaisser le degré d'une équation en utilisant des équations auxiliaires, les résolvantes. Pour une équation de degré  $n$ , ces résolvantes doivent être de degré  $n$  ! étant donné qu'elles doivent rester invariantes par toute permutation des racines. Pour les équations de degré 3 ou 4, la résolvante est de degré 6 ou 24, mais on peut encore abaisser son degré à cause, pense Lagrange, d'une certaine symétrie. Par contre, il doute qu'on puisse trouver une telle symétrie lors de la résolution d'une équation de degré 5, où la résolvante serait... de degré 120 ! Sa conclusion n'est cependant pas affirmative, mais elle a ouvert la voie aux théories d'Évariste Galois.



É.B.

# Autour du théorème de Sturm

**Le théorème de Sturm - le *théorème dont j'ai l'honneur de porter le nom* disait Sturm - permet de déterminer le nombre de racines d'une équation algébrique dans un intervalle délimité. Il a aussi apporté une gloire immédiate à son auteur.**



**E**n 1829, Sturm a 23 ans et débarque de Suisse, muni d'une lettre de recommandation pour M. Gerono (un des co-fondateurs des *Nouvelles Annales*). L'éminent professeur accueille le jeune mathématicien et l'introduit notamment auprès d'Arago, Ampère et Fourier. Le 25 mai 1829, on peut lire dans les Procès Verbaux de l'Académie : « M. Arago présente de la part de M. Sturm un Mémoire sur la résolution des équations numériques. MM. Poinso, Fourier et

Navier sont nommés Commissaires. » La communication est remarquée mais le mémoire ne sera publié qu'en 1835 (un tel délai de publication était courant à l'époque) dans les *Mémoires des « Savans étrangers »*. Par étrangers, il faut comprendre étranger à l'Académie des sciences.

## Combien de racines dans cet intervalle ?

Dans ce *Mémoire* sur les équations, Sturm reprend en fait un travail antérieur de Fourier. Le texte de 1835 commence après quelques références historiques autour des résolutions d'équations par :

« Soit  $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$  une équation numérique de degré quelconque, dont on se propose de déterminer toutes les racines réelles. »

Comme Sturm, désignons par  $V$  la fonction entière  $Nx^m + Px^{m-1} + \dots$  et

et supposons qu'elle n'a pas de racines égales (pas de racines multiples) ce qui suppose que la dérivée de  $V$  (notée  $V_1$ ) par Sturm n'a pas de racine commune avec  $V$ . Opérons à une suite de divisions successives :

$$V = V_1 Q_1 - V_2$$

$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3$$

$$V_2 = V_3 Q_3 - V_4$$

...

...

$$V_{r-1} = V_{r-2} Q_{r-1} - V_r$$

On démontre que lorsque les racines sont simples, à la fin du processus,  $V_r$  est nécessairement une quantité numérique. Ces notations étant posées, Sturm énonce son théorème selon lequel pour savoir le nombre de racines comprises entre  $A$  et  $B$  (plus grand strictement que  $A$ ), il suffit de procéder ainsi :

« On substituera à la place de  $x$  le nombre  $A$  dans toutes les fonctions  $V, V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_r$ , puis on écrira par ordre sur une même ligne les signes des résultats, et l'on comptera le nombre de variations qui se trouveront dans cette suite de signes. On écrira de même la suite des signes que prendront ces mêmes fonctions, par la substitution de l'autre nombre  $B$ , et l'on comptera le nombre des variations qui se trouveront dans cette seconde suite. Autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'équation  $V = 0$  aura de racines réelles comprises entre les deux nombres  $A$  et  $B$ . »

### Le théorème dans la pratique

Avant de traiter des exemples, ce que fit Sturm dans son *Mémoire*, précisons, si besoin est, qu'on peut faire tendre  $A$  vers « moins l'infini » et  $B$  vers « l'infini » et qu'on peut également procéder ainsi : « Dans les divisions successives qui servent à former les fonctions  $V_2,$

$V_3,$  etc, on peut avant de prendre un polynôme pour dividende ou pour diviseur, le multiplier ou le diviser par tel nombre positif qu'on voudra. »

En pratique, cette remarque est très utilisée et le premier exemple traité par Sturm en atteste :

« Soit l'équation  $x^3 - 2x - 5 = 0$  ; on a ici

$$V = x^3 - 2x - 5,$$

$$V_1 = 3x^2 - 2.$$

Pour former  $V_2$  on divise  $V$  par  $V_1$  ; mais afin d'éviter les fractions, on multiplie d'abord  $V$  par 3 [...] : on obtient ainsi le reste  $-4x - 15$ , et l'on a, en changeant les signes,  $V_2 = 4x + 15$ . On divise ensuite  $V_1$  par  $V_2$ , et pour éviter les fractions, on multiplie par 4 la fonction  $V_1$ , ainsi que le reste du premier degré. Le reste, indépendant auquel on arrive est  $+643$  ; on a donc  $V_3 = -643$ . »

Si dans les fonctions  $V, V_1, V_2$  et  $V_3$ , on fait tendre  $x$  vers « moins l'infini » on obtient la suite de signe :

- + - - d'où 2 variations de signe.

De même, si on fait tendre vers « l'infini », on obtient la suite de signes :

+ + + - d'où 1 variation de signes.

D'après le résultat de Sturm, il y a donc une seule racine réelle. Ensuite, Sturm donne une indication numérique sur cette racine :

« En faisant  $x = 2$  dans  $V$ , on a un résultat négatif ; et en faisant  $x = 3$ , on a un résultat positif : la racine est donc comprise entre 2 et 3. On en obtiendra des valeurs aussi approchées qu'on voudra par les procédés ordinaires d'approximation [...] on trouvera  $x = 2,09455148$ . »

Ensuite, Sturm donne un exemple générique en s'intéressant aux nombres de racines réelles de l'équation du troisième degré de la forme :  $x^3 + px + q = 0$ . Il aboutit au résultat classique affirmant qu'une telle équation

**Le théorème de Sturm permet également d'obtenir une approximation des racines d'une équation.**

tion a ses trois racines réelles si et seulement si :  $4p^3 + 27q^2 < 0$  et ajoute « On pourrait trouver de la même manière les conditions nécessaires pour que l'équation  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  ait toutes ses racines réelles. » Il termine enfin par un dernier exemple numérique : « Soit l'équation  $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$ . On a  $V = x^3 + 11x^2 - 102x + 181$ ,  $V_1 = 3x^2 + 22x - 102$ ,  $V_2 = 854x - 2751$ ,  $V_3 = +441$ . » Intégrons dans un tableau les éléments nécessaires à la détermination du nombre de racines réelles :

	Signes en « moins l'infini »	Signes en « l'infini »
<b>V</b>	-	+
<b>V<sub>1</sub></b>	+	+
<b>V<sub>2</sub></b>	-	+
<b>V<sub>3</sub></b>	+	+
<b>Nombre variations</b>	3	0

Le polynôme a donc 3 racines réelles ! Comme pour le premier exemple, Sturm cherche ensuite une approximation des racines positives de l'équation : il obtient pour la première racine comme première approximation 3,213 et pour la seconde 3,229. Sturm, dans son *Mémoire*, donne évidemment la démonstration de son résultat, le traite exhaustivement (en l'étendant au cas des racines multiples) et apporte certaines sophistications techniques pour accélérer son utilisation en pratique. En particulier pour le traitement numérique des équations.

**Cruelle postérité**

Aux funérailles de Sturm, le jeudi, 20 décembre 1855, Joseph Liouville prononce un discours qu'il publiera dans son journal (qui accueillait pourtant très peu de notices nécrologiques) : « Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué ; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeurs, il me rappelait le maître vénéré, qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère. [...] » Il ajoute, au sujet du théorème : « Prenez au hasard un des candidats à notre Ecole Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm : vous verrez s'il répondra ! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme : elle est rentrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples. [...] » Et enfin, il conclut : « Ah ! cher ami, ce n'est pas toi qu'il faut plaindre. Echappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science. Adieu, Sturm, adieu. » Liouville ne savait pas en prononçant ces mots que la tombe de Sturm, située au cimetière du Montparnasse, resterait longtemps à l'état d'abandon avant d'être revendue il y a quelques années !

**Un résultat qualitatif et quantitatif**

Le théorème de Sturm est d'abord qualitatif en ce sens qu'il indique le nombre de racines contenues dans un intervalle donné mais il est aussi quantitatif dans la mesure où il permet de construire un algorithme d'approximation des racines de l'équation. Sturm détaille sa méthode d'approximation sur un exemple dans son article de 1835. Voici comment un des commentateurs du théorème de Sturm, Louis-Etienne Lefébure de Fourcy, l'explique en général dans *Leçons d'algèbre*, en 1845 : « Après avoir reconnu qu'il y a des racines entre deux nombres entiers consécutifs,  $\alpha$  et  $\alpha + 1$ , que je suppose positifs, on fera  $x = \alpha + 1/x'$  dans la suite (x) [ $V(x), V_1(x), V_2(x), V_3(x), \dots$ ], et il en résultera une nouvelle suite ( $x'$ ) ; au moyen de laquelle on trouvera les parties entières des valeurs de  $x'$  qui

## Un accueil à bras ouverts

sont  $> 1$ . Soit  $\beta$  une de ces parties entières, on fera  $x' = \beta + 1/x''$  dans la suite ( $x'$ ), et l'on aura une nouvelle suite ( $x''$ ), qui servira trouver les parties entières des valeurs de  $x''$ . On continuera de cette manière aussi loin qu'on le jugera convenable. »

En « continuant de cette manière », Sturm précise les approximations de « son » équation :

$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$ . Pour les deux racines positives, il aboutit à 3,213 128 pour la première, 3,229 521 pour la seconde. Un logiciel de calcul formel (*Mathematica*) confirme les valeurs numériques de Sturm et donne la courbe de la fonction polynomiale associée. Sur un intervalle pas assez serré autour des racines, on pourrait penser qu'il n'y a qu'une seule racine (cf. figure 1) . Une étude plus fine sur [3.2 , 3.25] (cf. figure 2) « montre » les deux racines :

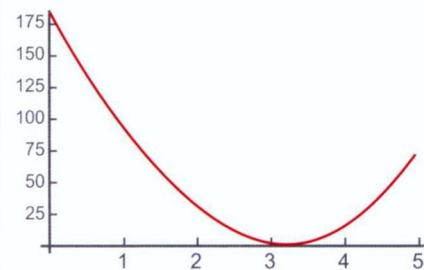


Figure 1

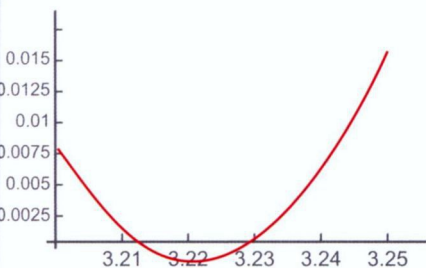


Figure 2

**Étude de**  
 $x \rightarrow x^3 + 11x^2 - 102x + 181$   
 sur  $[0,5]$  (figure 1)  
 et sur  $[3,2 ; 3,25]$  (figure 2)

Le travail de Sturm sera accueilli à bras ouverts en France et en Europe. Joseph Liouville le qualifie de *Découverte capitale* et de *magnifique travail*. Olry Terquem, l'autre co-fondateur des *Nouvelles Annales*, parle d'un *événement considérable* (qui) *produisit une profonde sensation sur les géomètres*. Chasles, à la phrase pourtant souvent grinçante, s'extasie : *exemple rare de simplicité et d'élégance, qui ouvre l'ère nouvelle de l'algèbre moderne*. Au-delà des frontières françaises, même son de cloche ! Dès 1830, il est exposé par von Ettingshausen, à Vienne, dans ce qui constitue une des premières revues mathématiques : *Zeitschrift für Physik, Mathematik und verwandte Wissenschaften*. En 1835, à Berlin, Crelle consacre dans son journal une étude au théorème. Les travaux anglais sur le même sujet apparaîtront ultérieurement. La carrière de Sturm est lancée. En 1836, soit l'année suivant la publication du résultat, il entre à l'Académie des Sciences avec une majorité de vote écrasante !

N.V.

**Bibliographie :**

Hourya Sinaceur, Cauchy, *Sturm et les racines des équations*, Revue d'histoire des sciences, Tome XLV, 1992, pp. 51-67.

Pierre Speziali, Charles-François Sturm (1803-1855) : documents inédits, Conférence du Palais de la Découverte, série D, n°96, 1964.

Charles Sturm, Dossier personnel, in Archives de l'Académie des sciences.

**Sitographie :**

Colloque du bicentenaire de Charles-François Sturm, Genève, 15-19 septembre 2003 :

<http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/pole-bnf/Sturm.html>

# Des racines

## au goutte à goutte

Dans les algorithmes de calcul au « goutte à goutte », les chiffres tombent successivement comme les gouttes d'une perfusion. Dans le cas de l'extraction d'une racine carrée, l'exécution n'utilise que des soustractions. Quel est l'intérêt quand on dispose d'une calculatrice ? La beauté...



**P**our calculer la racine carrée d'un nombre entier à une unité près, il suffit de retrancher de ce nombre les nombres impairs successifs, et ce tant que le reste appartient à  $\mathbb{N}$ . La racine cherchée est le nombre de soustractions effectuées. Par exemple, pour la racine carrée de 16 :

$$16 - 1 = 15$$

$$15 - 3 = 12$$

$$12 - 5 = 7$$

$$7 - 7 = 0$$

Nous comptons, 4 soustractions donc 4 est la racine carrée cherchée. Bien entendu, le reste final n'est pas forcément 0. Dans ce cas, nous obtenons un encadrement de la racine. Par exemple pour 27 :

$$27 - 1 = 26$$

$$26 - 3 = 23$$

$$23 - 5 = 18$$

$$18 - 7 = 11$$

$$11 - 9 = 2$$

Nous comptons, 5 soustractions donc 5 est la racine carrée cherchée. Plus précisément, la racine carrée est comprise entre 5 et 6. Vous pouvez essayer sur tout nombre, la méthode donne toujours le bon résultat.

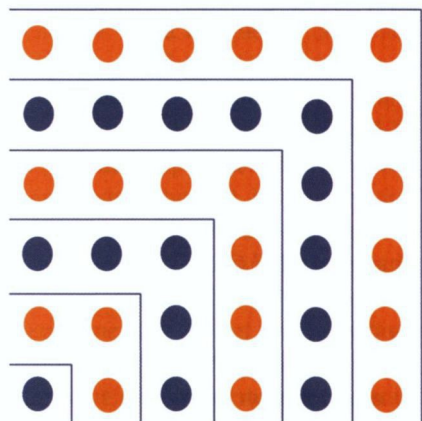
## Comment ça marche ?

En fait dans notre premier cas, nous utilisons simplement l'égalité :

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

De façon plus générale, notre résultat signifie simplement que la somme des  $n$  premiers nombres impairs est égale au carré de  $n$ .

Ce résultat peut être démontré de diverses façons. La plus visuelle est contenue dans le dessin ci-dessous :



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Sur cette figure, les boules forment un carré de côté  $n$ . Elles sont réparties par groupes de 1, 3, 5, etc. Le dernier groupe en contient  $2n - 1$  car chaque groupe a deux boules de plus que le précédent.

## Précision des calculs

*A priori*, nous pouvons ainsi calculer la racine carrée de tout nombre entier à une unité près par défaut.

Nous en déduisons la racine carrée à

0,1 près par défaut très facilement. Pour cela, il suffit de calculer la racine de cent fois le nombre donné et diviser le résultat par 10.

Par exemple, pour la racine carrée de 17 à 0,1 près, nous considérons 1700 :

$$1\ 700 - 1 = 1\ 699$$

$$1\ 699 - 3 = 1\ 696$$

.....

$$179 - 79 = 100$$

$$100 - 81 = 19$$

donc  $41^2 < 1700 < 42^2$  et en divisant par 100 :

$$4,1^2 < 17 < 4,2^2.$$

Ainsi la racine carrée de 17 est comprise entre 4,1 et 4,2.

Nous voyons ici que les calculs ne sont plus vraiment praticables « à la main ».

## Amélioration de la méthode

En fait, on peut effectuer les calculs des chiffres successifs l'un après l'autre. On commence par calculer la racine de 17 à une unité près :

$$17 - 1 = 16$$

$$16 - 3 = 13$$

$$13 - 5 = 8$$

$$8 - 7 = 1$$

Cette suite de soustractions donne l'égalité :

$$17 = 4^2 + 1.$$

donc en multipliant par 100 :

$$1\ 700 = 40^2 + 100.$$

L'idée est ici d'interpréter le carré de 40 comme la somme des nombres impairs de 1 à 79. Pour appliquer la méthode, il suffit donc de retrancher les nombres impairs à partir de 81 :

$$100 - 81 = 19$$

d'où le 1 après la virgule. Si l'on veut continuer, on écrit :  $1\ 700 = 41^2 + 19$

d'où en multipliant par 100 :

$$170\ 000 = 410^2 + 1\ 900.$$

### Trois preuves pour un résultat

**Le résultat ci-dessus peut être établi de deux autres façons différentes (au moins).**

- On retourne l'écriture de la somme  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  et on les ajoute terme à terme. On trouve  $n$  termes égaux à  $2n$ , d'où le résultat.

- On utilise une démonstration « par récurrence ».
  - On montre que si le résultat est vrai pour  $n$ , il est vrai pour  $(n + 1)$ .

Ainsi, on suppose le résultat vrai pour  $n$  :

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Alors,  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ .

- Comme le résultat est vrai pour  $n = 1$ , on en déduit qu'il est vrai pour tout  $n$ .

Le carré de 410 est la somme des nombres impairs de 1 à 819. On recommence donc à retrancher les nombres impairs à partir de 821 :

$$1\ 900 - 821 = 1\ 079$$

$$1\ 079 - 823 = 256$$

d'où la racine carrée de 17 à 0,01 près par défaut est 4,12.

On peut continuer ainsi indéfiniment. Les chiffres tombent l'un après l'autre.

#### Extension de la méthode

Nous voyons donc que nous sommes toujours amenés à chercher la racine carrée de nombres entiers à une unité près par défaut. En effet, si nous voulons la racine de 17 avec deux chiffres après la virgule, nous calculons celle de 170 000 à une unité près. De façon générale, il suffit d'ajouter autant de couples de zéros que de chiffres après la virgule désirés.

Nous pouvons également utiliser cette remarque à l'envers.

Par exemple, pour calculer la racine de 2 476, nous calculons d'abord celle de 24 :

$$24 - 1 = 23$$

$$23 - 3 = 20$$

$$20 - 5 = 15$$

$$15 - 7 = 8$$

ce qui s'écrit  $24 = 4^2 + 8$  d'où l'on déduit comme précédemment :

$$2\ 400 = 40^2 + 800$$

et donc :

$$2\ 476 = 40^2 + 876.$$

Le principe précédent s'applique donc encore ici :

$$876 - 81 = 795$$

$$795 - 83 = 712$$

$$712 - 85 = 627$$

$$627 - 87 = 540$$

$$540 - 89 = 451$$

$$451 - 91 = 360$$

$$360 - 93 = 267$$

$$267 - 95 = 172$$

$$172 - 97 = 75$$

ouf ! Nous obtenons 49 comme racine carrée à une unité près par défaut.

Si nous voulons aller plus loin, nous considérons 247 600. Comme :

$$2\ 476 = 49^2 + 75$$

nous avons :

$$247\ 600 = 490^2 + 7\ 500$$

et nous retranchons les nombres impairs à partir de  $2 \times 490 + 1 = 981$  :

$$7\ 500 - 981 = 6\ 519$$

$$6\ 519 - 983 = 5\ 536$$

$$\dots\dots\dots$$

$$1\ 564 - 1\ 003 = 561$$

ce qui donne 7 soustractions donc 49,7 est la racine carrée de 2 476 à 0,1 près par défaut.

Pour finir, il vous reste à transposer cet algorithme sur votre calculette. Pour cela, vous aurez intérêt à écrire d'abord un sous-programme opérant (et comptant) les soustractions ci-dessus.

**H. L.**

# Al-Khwarizmi

**Al-Khwarizmi faisait partie d'un groupe de savants qui ont œuvré au sein de la « Maison de la Sagesse », sorte de centre de recherche situé à Bagdad.**

De Muhammad Ibn Mussa al-Khwarizmi (env. 780—850, originaire du Kharezm, actuellement en Ouzbékistan), il nous reste cinq ouvrages traitant d'arithmétique, d'astronomie, de géographie, du calendrier et d'algèbre, qui eurent une influence majeure sur le développement des mathématiques.

« Kitab al jabr w'al muqabala » autrement dit « Lever le voile sur la science de la transposition et de la réduction », est considéré comme le premier traité d'algèbre proprement dit. « Al jabr » est pour al-Khwarizmi (dont le nom a donné « algorithmes »), la transposition des termes d'un membre dans l'autre d'une équation. « Al muqabala » est la réduction des termes semblables dans chaque membre et « al hatt », la division de chaque membre par un même nombre. En homme de science soucieux de pédagogie, al-Khwarizmi a rédigé son traité d'arithmétique en l'ouvrant essentiellement sur la pratique de la vie quotidienne : problèmes d'héritage, partage ou autres. Dans ses écrits, pas de symbolisme, pas de lettres à la place des inconnues, seulement des nombres écrits en toutes lettres ou en chiffres romains, mais surtout la description très précise d'une technique particulière.

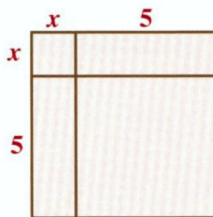
N'utilisant pas les nombres négatifs, il avait partagé les équations de degré 2 au plus en six classes :

des carrés sont égaux à des racines (aujourd'hui  $ax^2 = bx$ ) ; des carrés sont égaux à un nombre ( $ax^2 = c$ ) ; des racines sont égales à un nombre ( $bx = c$ ) ; des carrés et des racines sont égaux à un nombre ( $ax^2 + bx = c$ ) ; des carrés et un nombre sont égaux à des racines ( $ax^2 + c = bx$ ) ; des carrés et un nombre sont égaux à des carrés ( $bx + c = ax^2$ ).

L'équation que nous écririons de nos jours  $4x^2 + 10x + 2 = 2x^2 - 10x + 80$  peut ainsi se ramener, par al jabr, à  $4x^2 + 20x + 2 = 2x^2 + 80$ , puis, par al muqabala, à  $2x^2 + 20x = 78$ , puis, par al hatt, à  $x^2 + 10x = 39$ . Toute équation de degré 2 au plus se ramènera donc par ces opérations à l'une de ces six-là.

C'est précisément l'une des équations que cite notre mathématicien comme exemple. Il commence par en donner une magnifique interprétation géométrique. Il utilise en fait la décomposition « canonique »  $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$ , qui permet de résoudre l'équation en question selon sa méthode : « Prends la moitié des racines, ici 5. Tu la multiplies par elle-même, cela fera 25 ; additionne-les à 39, cela fera 64. Tu prends la racine, qui est 8, dont tu retranches la moitié des racines, 5. Il restera 3 et c'est la racine du carré que tu voulais ». On ne fait rien d'autre en calculant aujourd'hui le discriminant  $\Delta$  et en appliquant les fameuses formules de résolution.

É.B.



# L'équation du beau

**Perfection, mathématiques et équations sont étroitement associées dans notre imaginaire. Dans ces conditions, quoi d'étonnant à vouloir trouver et résoudre l'équation du beau ?**

*La « divine proportion » concerne l'ésotérisme, pas les mathématiques.*

**L**e nombre d'or attire. Certains y voient la clef du beau, d'autres celle du monde lui-même. Une multitude de livres ésotériques lui sont consacrés. Ses sectateurs vont le chercher partout, de la pyramide de Chéops aux coquillages en passant par la vénus de Milo et ils le trouvent ! Pourquoi ?

## La section dorée

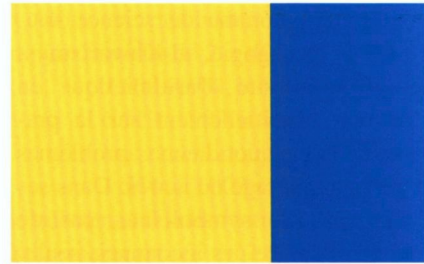
Pour répondre à cette question, commençons par donner l'origine de ce nombre. Euclide s'est intéressé au partage d'un segment AB en moyenne et extrême raison c'est-à-dire à trouver un point M du segment AB tel que :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$$



Proportion en moyenne et extrême raison sous l'antiquité. Elle ne devint divine qu'à la Renaissance.

Nulla mystique ici mais un problème mathématique. Ce partage ne prendra le nom de section dorée que bien plus tard au début de la Renaissance. On y verra alors une proportion divine permettant de construire le plus beau rectangle. Le voici :



Rectangle d'or bâti selon la section dorée : quand on lui enlève le carré jaune, il garde ses proportions.

## Mise en équation

Appelons  $x$  la largeur et  $y$  la longueur de ce rectangle, l'égalité des rapports

s'écrit :

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$$

Le nombre  $\Phi = \frac{y}{x}$  (voir l'encadré sur

"l'origine d'une notation") est donc solution de l'équation :

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$  que l'on peut écrire :

$$\left(\Phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

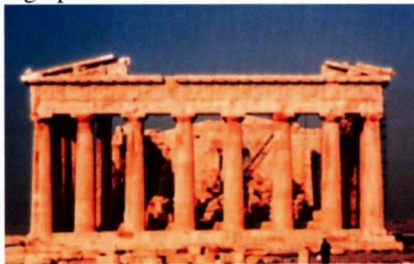
Cette équation a donc une seule solution positive :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

qui est appelé nombre d'or ou encore divine proportion. Bien entendu, il est possible de construire ce nombre à la règle et au compas et d'en donner toutes les approximations désirables. Pour un tracé ordinaire 1,6 suffit sans doute.

### Cherchez et vous trouverez

Les peintres de la renaissance ont été fascinés par le nombre d'or. Il est vrai que si on le cherche, on peut le trouver partout. Voici comment procéder sur quelques exemples. Prenons une photographie du Parthénon :



Le Parthénon vu de côté.

Cherchez le nombre d'or.

Bien entendu, sa façade s'inscrit dans un rectangle. Calculez le rapport entre

## Les formats de l'art contemporain

De nos jours, on distingue trois types de formats pour les tableaux : figure, paysage et marine. Dans chaque type de format, on peut trouver plusieurs tailles standards. Les voici :

Numéros	Figure	Paysage	Marine
1	22 × 16	22 × 14	22 × 12
2	24 × 19	24 × 16	24 × 14
3	27 × 22	27 × 19	27 × 16
4	33 × 24	33 × 22	33 × 19
5	35 × 27	35 × 24	35 × 22
6	41 × 33	41 × 27	41 × 24
8	46 × 38	46 × 33	46 × 27
10	55 × 46	55 × 38	55 × 33
12	61 × 50	61 × 46	61 × 38
15	65 × 54	65 × 50	65 × 46
20	73 × 60	73 × 54	73 × 50
25	81 × 65	81 × 60	81 × 54
30	92 × 73	92 × 65	92 × 60
40	100 × 81	100 × 73	100 × 65
50	116 × 89	116 × 81	116 × 73
60	130 × 97	130 × 89	130 × 81
80	146 × 114	146 × 97	146 × 89
100	162 × 130	162 × 114	162 × 97
120	195 × 130	195 × 114	195 × 97

Aucun de ces rectangles ne suit les canons de la beauté ésotérique. De même, le standard de la photographie est  $24 \times 36$  d'où le rapport 1,5. La télévision utilise le rapport  $4/3$  et le cinéma  $16/9$ . Trouver le nombre d'or dans les formats de l'art contemporain demande une subtilité très ésotérique.

longueur et hauteur. On trouve 2,4 environ. C'est raté. Si vous vous en tenez là, vous n'êtes pas faits pour les sciences ésotériques. Comme pour la pierre philosophale, il faut savoir chercher et chercher encore. Pour cela, n'oubliez pas l'objectif : 1,618 !

Mesurez donc chaque morceau identifiable, faites tous les rapports. Avec de la patience, vous trouverez ! Voici une solution : prenez le rectangle formé par deux colonnes consécutives (colonnes

### Le nombre d'or et le corps humain

Tendez la main et mesurez la distance entre votre coude et l'extrémité de votre majeur. Mesurez maintenant la longueur de votre pied. Divisez l'un par l'autre. Qu'obtenez-vous ?



Si vous êtes une femme, mesurez votre tour de hanche puis votre tour de taille. Divisez l'un par l'autre. Qu'obtenez-vous ?

Vous ne trouvez pas 1,618 ? Dommage, vous n'êtes donc pas dans les canons de la beauté ésotérique.

La femme idéale : le nombre d'or se trouve dans toutes ses mensurations.

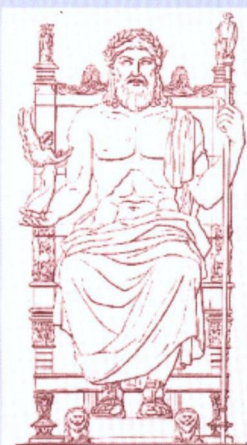


Exercice : trouver le nombre d'or dans ce tableau de Bernard Conte

comprises). Calculez. N'est-ce pas le nombre d'or que Phidias a caché là pour que son œuvre soit belle et harmonieuse ?

De façon plus classique, vous pouvez recommencer avec la face du Parthénon. Ici encore la façade s'inscrit dans un rectangle dont le rapport entre largeur et hauteur n'est pas le nombre d'or mais un peu plus que 2. Cependant, si vous inscrivez aussi une

### L'origine d'une notation



Depuis 1914, le nombre d'or est noté  $\Phi$  en hommage au sculpteur Phidias qui l'aurait utilisé pour rendre ses sculptures harmonieuses. Cette recette n'a été découverte que près de deux mille ans plus tard car personne n'en a jamais parlé avant Fra Luca Pacioli dans *De Divina Proportione* parue en 1509 sauf de bouche d'initié à oreille d'initié bien sûr, ésotérisme oblige !

Statue chrysiléphantine de Zeus par Phidias : troisième merveille du monde.

partie du toit mais pas trop et quelques marches mais pas toutes, vous pouvez arriver à une approximation de 1,618. Vous n'êtes toujours pas convaincus de l'omniprésence de cette divine proportion ? Décidément, vous le faites exprès.

Comme exercice de rattrapage, nous vous recommandons de le chercher dans le tableau figuratif moderne de Bernard Conte, ci-contre.

En cherchant un peu, vous trouverez le nombre d'or plusieurs fois dans la structure même du tableau ! Pas dans les dimensions du châssis bien sûr car les fabricants ne les calculent pas suivant les canons de la beauté ésotérique, ils préfèrent suivre le goût des peintres (voir l'encadré "les formats de l'art contemporain").

### Où sont les maths ?

Où sont donc les mathématiques dans ces fantaisies ? Bien sûr, elles restent dans l'équation :  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ . Par exemple, on peut en déduire :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

et donc :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}$$

puis :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}$$

et ainsi de suite à l'infini :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

La beauté du nombre d'or est dans ce type de formules. La chercher ailleurs n'a rien à voir avec les mathématiques.

H. L.

# François Viète

**Mathématicien à ses heures perdues, François Viète, bien que juriste de métier, a laissé une trace considérable dans les pratiques mathématiques.**

L'histoire retiendra de François Viète (1540–1603) ses *Principes de Cosmographie*, parus en 1637, son *Supplementum geometriae* publié en 1593, mais aussi ses propositions de réforme du calendrier du pape Grégoire XIII ou son habileté à décrypter les messages codés. L'essentiel pourtant de son œuvre n'est pas là. « Touche à tout » de génie, il investit la plupart des domaines mathématiques de son époque et y introduit systématiquement les notations littérales. Avec lui naît véritablement l'écriture algébrique.

Viète va faire progresser les techniques de résolution d'équations de toutes sortes. Il commence par résoudre complètement l'équation du second degré puis, s'intéressant à la trisection de l'angle, il la ramène à la résolution d'une équation de degré 3, qu'il résout dans sa forme  $x^3 + ax = b$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres positifs. Pour lui, les racines négatives sont des fausses racines, mais il accepte déjà les racines imaginaires inventées par Bombelli et va pressentir le théorème fondamental de l'algèbre.

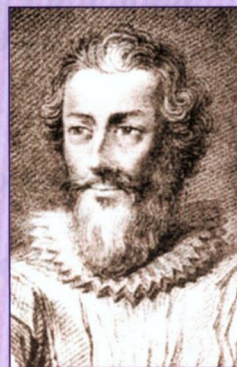
En 1615, François Viète expose clairement la méthode trouvée par Ferrari, élève de Cardan, pour résoudre les équations de degré 4 en se ramenant par translation à une équation du type  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ . Viète va même au-delà de la simple résolution des équations : il remarque qu'il existe entre les racines et les

coefficients d'une équation des relations. Pour le second degré, les racines  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation  $x^2 + px + q = 0$  vérifient  $x_1 + x_2 = -p$  et  $x_1 x_2 = q$  ; pour le degré 3,  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  la somme des racines vaut  $-p$ , leur produit vaut  $-r$  et la somme des produits deux à deux est égale à  $q$ .

## Une équation de degré... 45

En 1595, le mathématicien flamand Adrien Romain mit « toute l'Europe » au défi de résoudre une énorme équation de degré 45. Viète en trouve aussitôt les 23 racines positives. Son secret ? Il pose  $x = 2\sin t$  et cherche  $t$  pour que le second membre de l'équation soit égal à  $\sin 45t$ . Viète avait compris que cette équation, de par son degré, correspondait en fait à la division d'un angle en 45 parties égales, et il procède en trois étapes. Comme  $45 = 3 \times 3 \times 5$ , on commence par diviser l'angle en trois, ce qui conduit,  $a$  étant la corde sous-tendue par l'angle au centre total,  $z$  celle de l'angle trisécté, à l'équation  $3z - z^3 = a$ , on recommence la trisection, d'où l'équation  $3y - y^3 = z$ , et on termine en divisant l'angle par 5, ce qui correspond à l'équation  $5x - 5x^3 + x^5 = y$ . En regroupant habilement ces trois équations, on retrouve exactement celle d'Adrien Romain !

É.B.



Viète utilise les voyelles A, E, O, ... pour désigner les inconnues et les consonnes B, C, D, ... pour les quantités connues. Il simplifie également la symbolique algébrique : *A cubus* (pour  $A^3$ ), *equalis* (pour  $=$ ), *A in B* (pour  $A \times B$ ), note déjà la division par la barre de fraction et utilise couramment les signes  $+$  et  $-$ .

# Quel est le taux effectif d'un emprunt ?

Comment calculer le taux effectif d'un emprunt ? La réponse tient dans la résolution d'une équation algébrique de degré élevé. Pour la résoudre, on dispose d'une méthode approchée : la méthode de l'échéance moyenne.

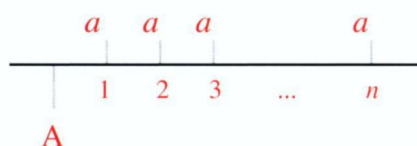
*Dans la publicité, le taux effectif de l'emprunt était écrit en petits caractères.*

**D**e nos jours, quand une personne désire acquérir un bien onéreux (maison, voiture ou même gros appareil électroménager), elle ne paie pas son achat au comptant mais à tempérament. En d'autres termes, elle ne règle pas la somme totale due en une fois et au moment de l'acquisition, mais s'engage à rembourser sa dette en plusieurs versements. Les commerçants, ainsi que de multiples organismes financiers de crédit, proposent sur le marché plusieurs modalités de remboursement.

## Position du problème

Nous nous limiterons ici au cas, simple mais courant, d'un bien acquis au prix  $A$  à payer au moyen de  $n$  versements mensuels constants, chacun de valeur  $a$ , le premier paiement ayant lieu un mois après l'achat. Les flux financiers intervenant dans cette transaction peuvent être visualisés par un schéma : en adoptant le point de vue du commer-

çant, chaque versement  $a$  (respectivement le prix  $A$ ) correspond à un flux financier positif (respectivement négatif), puisqu'il fait office d'entrée (respectivement de sortie) d'argent. Dès lors, il est matérialisé par une barre verticale dirigée vers le haut (respectivement le bas), sachant que l'axe horizontal représente le temps qui est exprimé en mois après la date d'achat (moment initial  $t = 0$ ).



## Diagramme représentant les différents flux financiers.

Bien entendu, la totalité des  $n$  versements, à savoir la somme  $na$ , dépasse la valeur  $A$ . Il importe alors de pouvoir estimer le « coût » de cette opération financière.



Le prêteur sur gages et son épouse, 1514, Massys Quentin

## Notion de taux effectif

Les législateurs de divers pays se sont penchés à plusieurs reprises sur cette question. A la fin du siècle dernier, une directive des Communautés européennes a introduit la notion de taux effectif qui, selon un texte du Moniteur Belge : « devra, en principe, servir d'instrument de comparaison pour toutes les formes de crédit à la consommation dans tous les Etats membres ... [c'est] le taux à exprimer en pourcent qui rend égales les valeurs actuelles des engagements existants ou futurs, pris par le prêteur et par le consommateur. »

Ce texte législatif repose sur une règle d'or en mathématique financière : il s'agit d'égaliser les flux financiers positifs et négatifs lorsqu'ils ont été évalués à une même date.

En choisissant pour celle-ci l'instant initial  $t = 0$ , et en désignant par  $i_m$  le taux effectif mensuel d'intérêt dans la

théorie de l'intérêt composé, on dispose dans le cas traité de cette égalité :

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{a}{(1 + i_m)^k}.$$

Posons

$$\bullet \quad x = \frac{1}{1 + i_m} : \text{ce sera l'inconnue de notre}$$

problème ; cette expression est appelée le facteur d'actualisation ;

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k : \text{c'est la moyenne}$$

arithmétique des  $n$  premières puissances de l'inconnue  $x$  ; la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique permet encore d'écrire,

$$\text{lorsque } x \neq 1, f(x) = \frac{x}{n} \times \frac{1 - x^n}{1 - x} ;$$

$$\bullet \quad C = \frac{A}{n a} : \text{c'est le rapport entre le prix}$$

A et la somme de tous les versements non actualisés.

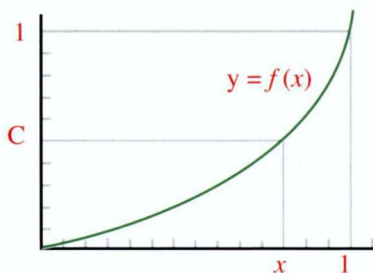
**Equation du taux effectif**

Il convient dès lors de résoudre l'équation algébrique  $f(x) = C$ .

Comme le nombre  $n$  de remboursements est d'ordinaire supérieur à 4, le problème posé consiste alors à trouver une racine réelle positive d'un polynôme de degré élevé, ce qui ne peut être généralement réalisé que de manière approchée. Remarquons toutefois que cette équation possède une et une seule solution positive, notée par la suite  $x$ , puisque la fonction  $f$  est continue et strictement croissante pour les  $x$  positifs avec de plus

$$0 = f(0) < C = \frac{A}{n a} < f(1) = 1.$$

Cette solution peut être visualisée sur la représentation graphique de la fonction  $f: x$  est l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'horizontale d'ordonnée  $C$ .



**Approche graphique de la solution**

**Résolution numérique**

Plusieurs méthodes numériques (de dichotomie, de Newton, du point fixe, ...) permettent d'approcher cette solution unique  $x$ . Nous présentons dans cette note la *méthode de l'échéance moyenne* ; c'est une technique bien adaptée à notre problématique, mise au point par l'actuaire belge C. Jaumain et

décrite, dans un contexte quelque peu plus général qu'ici, dans une annexe du *Moniteur belge* de 1992.

A chaque itération, il s'agit de remplacer les  $n$  versements par un seul capital dont l'échéance correspond donc à une sorte de « moyenne » des échéances des divers versements, ce qui justifie évidemment le nom attribué à cette méthode. Géométriquement, il s'agit de remplacer le graphe de  $f$  par celui d'une fonction puissance  $x \rightarrow x^q$  pour un exposant  $q$  convenable. Dans un premier temps, on choisit pour  $q$  la moyenne arithmétique des deux dates extrêmes des paiements, soit  $q_1 = \frac{n+1}{2}$  ;

observons que la courbe représentative de la fonction  $f_1: x \rightarrow x^{q_1}$  possède la même tangente que celle de  $f$  au point d'abscisse  $x_1$ . Le graphe de  $f_1$  rencontre l'horizontale d'ordonnée  $C$  au point d'abscisse  $x_1$ . On considère ensuite l'exposant  $q_2$  tel que le graphe de  $f_2: x \rightarrow x^{q_2}$  passe par le point  $(x_1; f(x_1))$ . De proche en proche, connaissant  $q_j$  et  $x_j$ , on choisit la fonction  $f_j: x \rightarrow x^{q_{j+1}}$  dont le graphe passe par le point  $(x_j; f(x_j))$  : l'intersection de cette courbe avec l'horizontale  $y = C$  donne en abscisse  $x_{j+1}$ . On constate intuitivement que la suite des  $x_j$  se rapproche constamment de la solution  $x$  cherchée.

D'un point de vue analytique, on trouve d'abord  $x_1$  en résolvant l'équation  $x_1^{q_1} = C$ , avec

$$q_1 = \frac{n+1}{2}, \text{ d'où } x_1 = C^{\frac{2}{n+1}}.$$

Ensuite, on calcule l'exposant  $q_2$  auquel il faut élever  $x_1$  pour retrouver  $f(x_1)$ , soit  $x_1^{q_2} = f(x_1)$  si et seulement si

$$q_2 = \log_{x_1} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_1^k \right).$$

On en déduit le nombre  $x_2$  dont la  $q_2$ -<sup>ème</sup> puissance redonne C, soit  $x_2^{q_2} = C$  si et seulement si  $x_2 = C^{\frac{1}{q_2}}$

De proche en proche, on construit les suites des  $q_j$  et des  $x_j$  définies par :

$x_{j-1}^{q_j} = f(x_{j-1})$  si et seulement

$$\text{si } q_j = \log_{x_{j-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{j-1}^k \right)$$

$C = x_j^{q_j}$  si et seulement si  $x_j = C^{\frac{1}{q_j}}$

Il est possible de démontrer que la suite composée des  $x_j$  ainsi construits est décroissante et minorée, de sorte que sa convergence est assurée : la limite de cette suite est précisément la solution  $x$  recherchée.

### Analyse d'un exemple

Comme application concrète, examinons le contrat, baptisé « crédit 10 + 1 », proposé naguère par une firme belge et qui connut un certain succès commercial, dû vraisemblablement à sa simplicité. Il s'agit de rembourser une somme quelconque A par 11 versements mensuels égaux chacun au dixième du prix A. On a donc

$$n = 11, a = \frac{A}{10} \quad C = \frac{A}{11 \times \frac{A}{10}} = \frac{10}{11}$$

Les résultats des calculs à effectuer sont données dans ce tableau :

$j$	$q_j$	$x_j$
1	6	0,984241
2	5,92059	0,984031
3	5,91952	0,984028
4	5,91951	0,984028
5	5,91951	0,984028

Le taux effectif mensuel relatif à ce contrat est donc égal à

$$i_m = \frac{1}{0,984028} - 1 = 0,0162314 ;$$

le taux effectif annuel  $i_a$  équivalent, encore appelé le *taux annuel effectif global* (TAEG, en abrégé), est fourni par la formule d'équivalence des taux, à savoir  $i_a = (1 + i_m)^{12} - 1 = 0,213141$ . Pour l'anecdote, signalons que l'organisme de crédit qui avait lancé ce produit financier annonçait, dans ses premières publicités, un TAEG de 17,42 % ... en caractères très petits !

J.B. & V.H.



# La méthode de Bairstow

Les méthodes classiques permettent de trouver des approximations des racines réelles des équations, mais pas de leurs racines complexes. Pour approcher ces dernières, on peut utiliser une méthode développée par Léonard Bairstow.

Les méthodes approchées vues dans les articles précédents sont inopérantes pour déterminer les solutions complexes d'une équation. Pour atteindre cet objectif, nous transformons donc la recherche des solutions en celle de la factorisation du polynôme. Ainsi, pour résoudre l'équation :

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0,$$

nous cherchons à factoriser le polynôme  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$  en un produit de deux facteurs du second degré. Cette idée est bien entendu générale mais, pour simplifier les calculs, nous la développons sur cet exemple.

## Un premier essai

Nous commençons par diviser  $P$  par un polynôme du second degré que nous estimons être un diviseur possible. En l'absence d'idée, nous pouvons aussi le choisir au hasard. Ici, nous utilisons :

$$x^2 - 3x + 7.$$

En divisant  $P(x)$  par  $x^2 - 3x + 7$  (voir

l'article *Les anneaux de polynômes*), nous obtenons :

$$P(x) = (x^2 - 3x + 7)(x^2 + x) - 4x + 1.$$

Nous avons donc échoué à factoriser  $P$ .

## Correction du tir

Pour corriger ce premier essai, nous divisons  $P$  par un polynôme proche du premier c'est-à-dire de la forme :

$$x^2 + (-3 + h)x + (7 + k)$$

où  $h$  et  $k$  sont « petits ». Les termes de degrés supérieurs à deux sont donc négligeables. Nous obtenons ainsi le reste :

$$(-4 - 5h - 4k)x + (1 + 28h + 7k).$$

Comme nous le désirons nul, nous cherchons  $h$  et  $k$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} 5h - 4k = -4 \\ 28h + 7k = -1 \end{cases}$$

En le résolvant de façon approchée, nous obtenons  $h = 0,2$  et  $k = -1$  à  $0,1$  près d'où le diviseur :

$$x^2 - 2,8x + 6.$$

*Parfois, il faut savoir ne pas changer une méthode qui échoue.*

Le calcul du reste montre que nous avons encore échoué puisque nous trouvons :

$$-1,128x - 0,44$$

### Nouvelles corrections

Il faut parfois savoir ne pas changer de méthode même si elle échoue. Nous recommençons donc en divisant le polynôme par  $x^2 + (-2,8 + h)x + (6 + k)$ . En négligeant les termes de degrés supérieurs à deux, nous obtenons le reste :

$$\begin{aligned} &(-1,128 - 4,32h - 3,6k)x + \\ &(-0,44 + 21,6h + 5,76k) \end{aligned}$$

qui s'annule pour  $h = 0,15$  et  $k = -0,5$  à  $0,01$  près d'où le diviseur :

$$x^2 - 2,65x + 5,5.$$

Le reste est maintenant :

$$0,014625x - 0,22375.$$

Nous recommençons une fois de plus pour obtenir le diviseur :

$$x^2 - 2,634x + 5,488$$

et le reste :

$$0,000119896x - 0,001425472$$

est voisin de 0.

### Calcul des racines

La division de  $P(x)$  par

$$x^2 - 2,634x + 5,488 \text{ donne le quotient : } x^2 + 0,634x + 0,181956$$

donc  $P(x)$  est égal au produit :

$$\begin{aligned} &(x^2 - 2,634x + 5,488) \\ &\times (x^2 + 0,634x + 0,181956), \end{aligned}$$

l'erreur étant égale au reste de la division :  $0,000119896x - 0,001425472$ .

Nous résolvons alors les deux équations du second degré en utilisant leur discriminant, nous obtenons les quatre racines :

$$1,317 \pm 1,937 i \text{ et } -0,317 \pm 0,285 i.$$

### Précision des résultats

Il est facile de vérifier la précision des racines réelles en s'assurant du signe



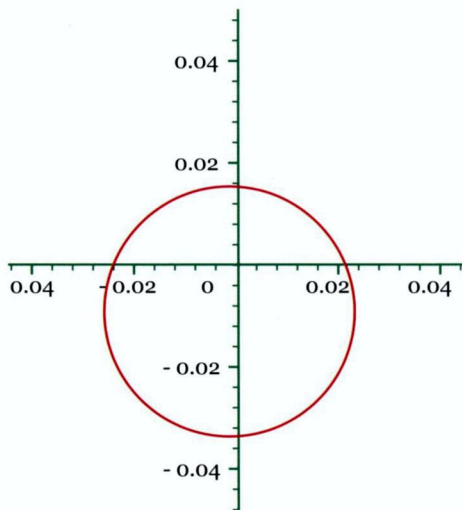
d'une valeur par excès et d'une valeur par défaut (voir l'article *Les méthodes itératives*). Cette méthode est inopérante pour les racines complexes. Sur notre exemple, voyons comment faire pour nous assurer que le nombre :

$$a = 1,317 - 1,937 i$$

est égal à une racine de l'équation à  $0,001$  près.

Géométriquement, il s'agit de vérifier que le cercle  $C$  centré en  $a$  et de rayon  $0,001$  contient une racine de l'équation  $P(x) = 0$ . Au lieu de ce cercle, considérons son image par  $P$ . Il s'agit d'une courbe  $\Gamma$  du plan.  $C$  contient une racine de l'équation si et seulement si  $\Gamma$  contient  $0$ . Il suffit donc de tracer cette courbe (avec l'aide d'un traceur de courbe bien sûr) pour s'assurer de la précision du résultat. Nous obtenons :

**Racines d'un ficus de Cuba.**



**L'image par P du cercle C de centre a et de rayon 0,001 contient 0 donc C contient une racine de  $P(x) = 0$ .**

La figure montre que l'image par P du cercle C contient 0 donc C contient une racine de l'équation proposée. On en déduit que  $a = 1,317 - 1,937 i$  est racine à 0,001 près.

**Racines multiples**

La méthode de Bairstow ne permet jamais d'affirmer qu'une racine est multiple même si elle permet de le soupçonner.

Prenons l'exemple de l'équation :

$$Q(x) = 70x^5 - 99x^4 - 280x^3 + 396x^2 + 280x - 396 = 0.$$

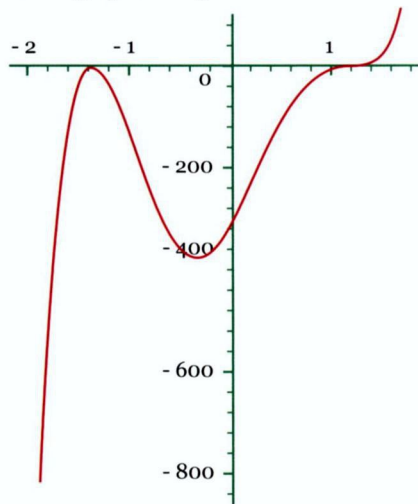
En utilisant notre méthode, nous trouvons cinq racines :

1,414, -1,414, 1,416, -1,416, 1,414.

Examinons la précision de la racine 1,414. Est-elle égale à 0,001 ? Comme il s'agit d'une racine réelle, on peut calculer les signes de Q en 1,413 et 1,415. On trouve effectivement un

**La méthode de Bairstow ne permet jamais d'affirmer qu'une racine est multiple, mais elle permet de le soupçonner.**

changement de signe donc 1,414 est racine à 0,001 près. En revanche, il n'y a pas de changement de signe entre -1,413 et -1,415. Ceci peut faire penser à une racine triple en 1,414 et une racine double en -1,414 ce que confirme le graphe de Q :



**Le graphe de Q suggère l'existence d'une racine double et d'une racine triple.**

Seule une méthode algébrique de recherche des racines multiples permet de lever le doute. En effet, une racine multiple  $x$  vérifie le système :

$$\begin{cases} Q(x) = 0 \\ Q'(x) = 0 \end{cases}$$

donc Q est racine du p.g.c.d. de Q et Q' (voir l'article *Les anneaux de polynômes*) c'est-à-dire de :

$$x^2 - 2.$$

Les deux nombres  $\pm \sqrt{2}$  sont donc racines doubles de Q. Nous le divisons par  $(x^2 - 2)^2$  pour obtenir :

$$Q(x) = (x^2 - 2)^2 (70x - 99).$$

L'équation  $Q(x) = 0$  a donc deux

racines doubles  $\pm \sqrt{2}$  et une racine

simple  $\frac{99}{70}$ .

H.L.

Jean le Rond d'Alembert	p. 104
Les anneaux de polynômes	p. 106
Les livres à équations	p. 111
Le champ des complexes	p. 112
Karl Friederich Gauss	p. 116
Puiseux et les coefficients en $t$	p. 118
Algébriques et transcendants	p. 124

# Au-delà des équations



Quand une méthode de calcul voit le jour, le mathématicien cherche toujours jusqu'où il peut l'appliquer. La structure de groupe est née ainsi de la résolution des équations du premier degré, les nombres constructibles, algébriques et transcendants des résolutions à la règle et au compas. De même, les résolutions des algébristes italiens de la Renaissance ont ouvert le champ des nombres complexes et fait découvrir les corps algébriquement clos. Enfin, leurs limites ont amené la découverte de la théorie de Galois.

# Jean le Rond d'Alembert

**D'Alembert est un enfant trouvé qui a bien tourné. On lui doit de nombreux résultats mathématiques et une encyclopédie.**



Jean le Rond D'Alembert

**A**bandonné à sa naissance sur les marches de l'église Saint-Jean-Le-Rond, d'où son nom, d'Alembert (1717-1783), malgré ses débuts difficiles, a laissé une trace éminente dans l'histoire des sciences et des lettres.

Très écouté de son temps, d'Alembert fit preuve d'une remarquable intuition scientifique puisqu'il démontra de nombreux résultats, en conjectura d'autres qui furent démontrés par la suite : critère de d'Alembert pour la convergence d'une série à termes positifs, solution de d'Alembert de l'équation des cordes vibrantes, par exemple. Mathématicien, écrivain, philosophe, membre de l'Académie des Sciences, il est avant tout l'homme de l'*Encyclopédie*, qu'il créa avec Diderot. Parue d'abord en 35 fascicules entre 1752 et 1777 sous le nom de *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, elle est publiée en 1779 sous forme d'une *Encyclopédie méthodique*. L'ouvrage reprend par disciplines et en les com-

plétant les articles de la grande encyclopédie et c'est d'Alembert qui a rédigé une bonne partie des trois tomes consacrés aux mathématiques. On y trouve, dans un vocabulaire un peu suranné, des notions comme le *lieu géométrique* : *c'est une ligne par laquelle se résout un problème géométrique et on distingue le lieu à la ligne droite, le lieu au cercle, le lieu à l'ellipse*. C'est aussi à d'Alembert qu'on doit le texte sur les équations, où l'on apprend que *toutes les équations dont les lieux sont du premier ordre peuvent se réduire à quelqu'une des quatre formules suivantes* :

$$y = \frac{bx}{a}, y = \frac{bx}{a} + c, y = \frac{bx}{a} - c, y = c - \frac{bx}{a}.$$

Il est vrai qu'à l'époque, aucune grandeur comme  $y$  ne saurait être négative !

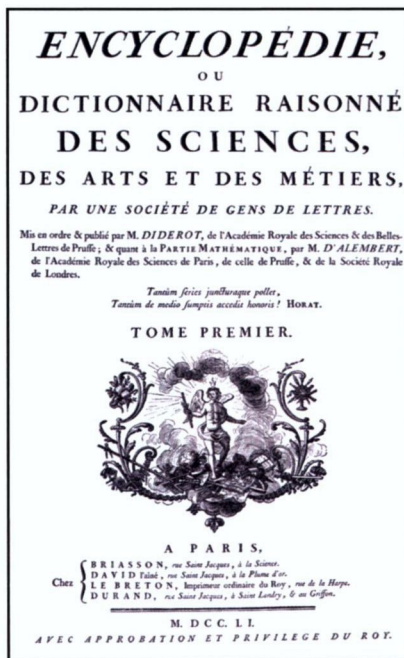
### Le théorème fondamental de l'algèbre

Sa principale contribution dans le domaine mathématique reste cependant le *Théorème fondamental de l'al-*

*gèbre*, connu évidemment sous le nom de *Théorème de d'Alembert-Gauss*. Malgré la référence à l'algèbre, ce théorème ne peut d'ailleurs se démontrer sans faire appel à l'analyse. Il s'énonce en termes savants sous la forme : « le corps des complexes est algébriquement clos ». En d'autres termes, cela signifie que tout polynôme non constant à coefficients complexes

se factorise en un produit de polynômes du premier degré, autrement dit, que polynôme non constant à coefficients complexes a toutes ses racines complexes. C'est en ce sens qu'on peut qualifier cet ensemble de nombres d'algébriquement clos. Le résultat avait déjà été conjecturé par Girard au début du XVII<sup>e</sup> siècle, et la démonstration qu'en fait d'Alembert est incomplète. C'est Gauss qui va en publier la première démonstration complète en 1799. Trois autres preuves vont suivre, deux en 1816, la troisième en 1849, largement après la disparition de d'Alembert.

Les mathématiques ont été la première passion de d'Alembert. *C'est à la simplicité de leur objet qu'elles sont principalement redevables de leur certitude*, disait-il et, en philosophie comme en mathématiques, d'Alembert a su illustrer pleinement sa doctrine *savoir attendre et douter*.



É.B.

# Les anneaux de polynômes

La résolution des équations algébriques amène à manipuler des polynômes de la même façon que des nombres entiers : l'algorithme d'Euclide, les notions de facteurs premiers, de PGCD ou de PPCM restent valables. Par conséquent, on aboutit également à une notion d'anneau.

Pour étudier l'équation algébrique  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ , il peut être intéressant d'introduire la fonction polynomiale  $f: x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2$  et d'en étudier les variations (voir l'article sur la localisation des racines). Mais pour aller plus loin, nous allons introduire le polynôme  $P = x^3 - 3x^2 + 2$  afin de nous intéresser non plus à la variable  $x$  mais aux coefficients des puissances de  $x$ .

## Polynômes

Quelle différence y a-t-il entre fonction polynomiale et polynôme ? Dans une fonction polynomiale, la lettre  $x$  désigne la variable : il s'agit d'un nombre réel ou d'un nombre complexe selon le domaine de définition considéré. Pour un polynôme, la lettre  $x$  ne désigne plus un élément variant dans un ensemble mais sert seulement à repérer les coefficients du polynôme



en question, on dit que  $x$  est une indéterminée. Dans l'exemple initial, le coefficient de degré 3 du polynôme  $P$  vaut 1, celui de degré 2 vaut  $-3$ , celui de degré 1 est nul et enfin le coefficient constant vaut 0.

En fait, un polynôme n'est rien d'autre que la liste de ses coefficients et deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients : c'est le principe d'identification des coefficients polynomiaux. Pour un polynôme non nul, la plus grande puissance de  $x$  affectée d'un coefficient non nul est appelée degré de ce polynôme. Ci-dessus le degré du polynôme  $P$  est égal à 3. Il est usuel de poser le degré du polynôme nul égal à  $-\infty$ , c'est une convention.

Il est facile de revenir du polynôme à la fonction polynomiale, il suffit pour cela de savoir évaluer un polynôme  $P$  en n'importe quel nombre  $a$ . Ceci s'obtient en substituant à chaque puissance de l'indéterminée  $x$  la puissance correspondante de  $a$ , la valeur ainsi obtenue est notée  $P(a)$ . Lorsque celle-ci est nulle on dit que  $a$  est une racine (ou un zéro) du polynôme  $P$ . Désormais, résoudre une équation algébrique revient à déterminer les racines d'un polynôme. Par exemple le théorème de d'Alembert-Gauss (voir l'article sur le champ des complexes) s'énonce en termes polynomiaux :

*Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.*

### L'anneau des polynômes

En opérant sur les coefficients des polynômes il est aisé de définir l'addition et la multiplication de deux polynômes. Ainsi pour :

$$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \text{ et}$$

$$Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

on pose :

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x$$

$$+ (a_2 + b_2) x^2 + \dots$$

et

$$PQ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x$$

$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

Les opérations ainsi définies possèdent



Joseph-Louis Lagrange

les mêmes propriétés que les opérations correspondantes sur les entiers relatifs, cela permet de dire que l'ensemble des polynômes est muni d'une structure d'anneau commutatif.

On peut aussi remarquer les propriétés :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \text{ et}$$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

*Tout comme avec les nombres entiers, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux polynômes.*

### L'algorithme de la division euclidienne

La division euclidienne d'un polynôme  $A$  par un polynôme non nul  $B$  se pose comme une division entre entiers. On commence par rechercher le plus grand monôme qui, multiplié par le polynôme  $B$ , permet d'égaliser la plus grande puissance du polynôme  $A$ . On retranche alors de  $A$  le produit obtenu et on recommence cette manipulation jusqu'à obtenir un polynôme de degré strictement inférieur à celui de  $B$ . On lit enfin quotient et reste aux places usuelles.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 1 & x^2 + x + 1 \\ - \rightarrow x^3 + x^2 + x & \\ \hline = \rightarrow -2x^2 - x + 1 & \\ - \rightarrow -2x^2 - 2x - 2 & \\ \hline = \rightarrow x + 3 & \end{array}$$

Ci-dessus  $A = x^3 - x^2 + 1$ ,  $B = x^2 + x + 1$ ,  $Q = x - 2$  et  $R = x + 3$ .



D'Alembert

### Arithmétique polynomiale

Comme sur les nombres entiers, il est possible de faire de l'arithmétique avec les polynômes. Pour commencer nous disposons d'une division euclidienne : si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes avec  $B$  non nul, il existe d'unique polynômes  $Q$  et  $R$  tels qu'on ait :

### L'algorithme de Hörner

Lorsque  $a$  est racine d'un polynôme  $P$ , on peut factoriser  $P$  par  $x - a$  et le facteur correspondant est obtenu en posant la division euclidienne de  $P$  par  $x - a$ . La méthode de Hörner permet de réaliser efficacement cette division sur trois lignes. On dispose en première ligne les coefficients du polynôme  $P$  par puissance décroissante. On commence par abaisser sur la dernière ligne le coefficient de la première colonne. On le multiplie par  $a$ , on place le résultat sur la deuxième ligne à la colonne suivante. On abaisse ensuite la différence sur cette colonne et on reprend le processus. Sauf erreur de calcul, la dernière valeur doit être nulle. On lit enfin les coefficients du quotient cherché sur la dernière ligne.

1	- 1	- 5	2
	2	- 6	2
1	- 3	1	0

Ci-dessus  $P = x^3 - x^2 - 5x + 2$ ,  $a = 2$  et on obtient le facteur  $x^2 - 3x + 1$ .

$A = BQ + R$  et  $\deg R < \deg B$ .  $Q$  et  $R$  sont alors appelés quotient et reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . L'algorithme pour réaliser cette opération est analogue à celui que l'on utilise couramment sur  $\mathbb{Z}$  (voir l'encadré sur l'algorithme de la division euclidienne).

A partir de cette division euclidienne, on retrouve les notions arithmétiques usuelles, par exemple, on dit que  $B$  divise  $A$  lorsque le reste de la division euclidienne correspondante est nul. On peut aussi parler de PGCD et de PPCM de deux polynômes et tout comme avec les nombres entiers, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux polynômes par une succession de divisions euclidiennes diviseur par reste.

### Arithmétique et racines

Le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par  $x - a$  est un polynôme de degré strictement inférieur à 1, c'est donc un polynôme constant et cette division s'écrit :

$$P = (x - a)Q + C^{te}.$$

En évaluant cette relation en  $a$ , on obtient  $C^{te} = P(a)$ . Ainsi on démontre que le polynôme  $x - a$  divise  $P$  si et seulement si  $a$  est racine de  $P$  : on retrouve ainsi la possibilité qu'il y a de factoriser par  $x - a$  une équation algébrique dont  $a$  est racine (voir l'article sur les manipulations algébriques). De plus, en posant la division euclidienne, on peut déterminer le facteur correspondant.

Cette caractérisation arithmétique des racines d'une équation algébrique ne s'arrête pas là, on peut aussi définir la multiplicité d'une racine  $a$  d'un polynôme  $P$  comme étant la plus grande puissance de  $x - a$  divisant  $P$ . Par exemple 1, 2 et 3 sont racines respecti-

## Somme et produit des racines

Un polynôme  $P$  de degré 2 possède deux racines  $a$  et  $b$  (avec éventuellement  $a = b$  dans le cas où  $P$  serait de discriminant nul). Comme vu précédemment, on peut alors factoriser  $P$  sous la forme

$$P = \lambda (x - a)(x - b).$$

et en développant :

$$P = \lambda [x^2 - (a + b)x + ab].$$

Cette relation détermine les coefficients du polynôme  $P$  au coefficient de proportionnalité  $\lambda$  près. On ne peut pas préciser mieux ce dernier, sauf si par exemple on connaît le coefficient de la plus grande puissance de  $x$ .

La résolution des systèmes somme / produit est une application courante du résultat ci-dessus : si l'on connaît la somme  $S$  et le produit  $P$  de deux inconnues, on peut affirmer que celles-ci sont les racines de l'équation algébrique :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

et réciproquement. En résolvant cette dernière, on résout le système étudié.

vement simple, double et triple du polynôme  $P = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$ .

### Décomposition en facteurs irréductibles

Si  $a, b, \dots, s$  désignent toutes les racines complexes d'un polynôme non constant et si leurs multiplicités respectives sont  $\alpha, \beta, \dots, \sigma$ , on peut factoriser  $P$  par  $(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - s)^\sigma$ . Le facteur correspondant n'aura alors plus de racines complexes et d'après le théorème de d'Alembert-Gauss il sera constant, égal à un certain complexe  $\lambda$ . Ainsi tout polynôme non constant  $P$  à coefficients complexes peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - s)^\sigma.$$

avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $a, b, \dots, s \in \mathbb{C}$  les racines de  $P$  et  $\alpha, \beta, \dots, \sigma \in \mathbb{N}^*$  leurs multiplicités respectives.

De cette factorisation, on tire que la somme des multiplicités des racines d'un polynôme  $P$  est égale à son degré. Ainsi les équations de degré 2, ont deux racines, celles de degré 3, ont trois racines, quitte à compter ces dernières avec multiplicité, etc.

La factorisation du polynôme  $P$  présen-

tée ci-dessus est appelée la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme  $P$ . Elle est unique. On peut faire un parallèle avec la décomposition d'un nombre entier en produit de nombres premiers : dans le cadre des polynômes, les termes  $x - a$  jouent le rôle des nombres premiers.

## Un problème électrique

Deux résistances ont une résistance équivalente égale à 20W lorsqu'elles sont montées en parallèle et égale à 90W lorsqu'elles sont montées en série. Que valent ces résistances ?

Ce problème revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ x + y = 90 \end{cases}$$

qui est équivalent au système somme / produit

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ xy = 180 \end{cases}$$

Les solutions de celui-ci sont les racine de l'équation  $t^2 - 90t + 180 = 0$ . Les résistances cherchées valent 30W et 60W.

**Cas du degré 3**

Un polynôme  $P$  de degré 3 possède trois racines  $a, b$  et  $c$  comptées avec multiplicité. Par la factorisation de  $P$ , on obtient :

$$P = \lambda (x - a) (x - b) (x - c).$$

Pour développer cette expression, il est usuel d'introduire les quantités suivantes appelées *expressions symétriques élémentaires* :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + b + c \\ \sigma_2 = ab + bc + ca \\ \sigma_3 = abc \end{cases}$$

et on observe :

$$P = \lambda [x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3].$$

En application de ce résultat, nous pouvons résoudre les systèmes à partir desquels il est possible de déterminer la somme  $\sigma_1$  de trois inconnues, la somme  $\sigma_2$  des doubles produits et le produit  $\sigma_3$  de ces inconnus. Cela permet par exemple de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

Si  $(a, b, c)$  est un triplet solution alors  $\sigma_1 = 1$ . On obtient  $\sigma_2 = -4$  en observant :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \sigma_2.$$

Enfin on obtient  $\sigma_3 = -4$ , en vérifiant :

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 6 \sigma_3.$$

Ainsi  $a, b, c$  sont les racines de l'équation :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Après résolution, on obtient que  $a, b, c$  correspondent à l'ordre près à 1, 2 et -2.

**Relations entre coefficients et racines d'un polynôme**

Résoudre une équation algébrique revient à déterminer les racines d'un polynôme à partir de la connaissance de ses coefficients. Le problème inverse, déterminer les coefficients connaissant les racines, est beaucoup plus facile et se résout par simple développement. Introduisons un polynôme  $P$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par la factorisation présentée ci-dessus, on peut écrire :

$$P = \lambda (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n).$$

en introduisant les  $n$  racines  $a_1, a_2, \dots, a_n$  du polynôme  $P$ , celles-ci étant comptées avec multiplicité c'est-à-dire chacune apparaissant autant de fois dans la liste qu'elle est racine multiple de  $P$  : une racine simple apparaît une fois,

une racine double deux fois etc.

Le développement général du produit ci-dessus est un peu lourd mais sans réelle difficulté. Celui-ci réalisé, on est capable d'exprimer les coefficients du polynôme en fonction de ses racines. Nous voyons en encadrés les cas des degrés 2 et 3.

A partir de ces résultats, Lagrange a développé une méthode de résolution de l'équation du troisième degré qui a permis à Abel et Galois de montrer l'impossibilité de résolution par radicaux des équations de degrés supérieurs à cinq. Nous abordons ce sujet dans l'article de ce numéro intitulé *L'impossibilité de Galois*.

**D. D.**

# Les livres à équations

Lorsqu'une œuvre littéraire prend un titre comportant le mot « équation », c'est rarement pour sa définition mathématique mais plutôt pour évoquer problèmes, énigmes à résoudre, difficultés, ou simplement pour le jeu de mots.

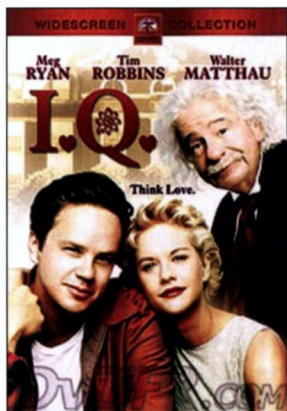
## Pour l'énigme et l'inquiétude

*L'Équation froide*, de Jean-Marie Mathoul, est un album de photographies commentées, à mi-chemin entre le polar et la fiction. Équation se réfère ici au caractère énigmatique des photographies et à sa résolution par le texte. *Lazare ou l'équation F.*, pièce de théâtre en trois actes de Mireille Batut d'Haussy, nous plonge quant à elle dans le monde de la folie et l'enfermement de Lazare en asile psychiatrique.

## Pour les personnages

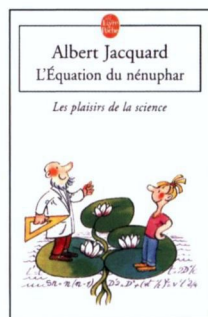
*L'équation de Kolmogoroff*, de M. Petit, raconte la vie et la mort de Wolfgang Doeblin, un génie des mathématiques, dans la tourmente nazie. Avant de se suicider en 1940 il avait envoyé à l'Académie des Sciences un mémoire « Sur l'équation de Kolmogoroff » qui a été ouvert en avril 2000. Plus gai et parce qu'il n'y a pas que les livres, le film

*L'Amour en équation (I.Q.)* met en scène Albert Einstein donnant un coup de main à un jeune homme qui est amoureux de sa nièce. La présence du père de l'une des plus célèbres équations est le prétexte du titre du film.



## Pour la science ou pseudo-science

Tandis que dans *L'Équation du bonheur: P = mC ?*, de Henri Rubinstein et Roland Topor, un artiste et un médecin élaborent en commun un guide pratique de la vie moderne, *L'équation des rêves et leur déchiffrement psychanalytique*, de Gisèle Chaboudez est une tentative de plus, 100 ans après Freud, d'interprétation psychanalytique du rêve, dans laquelle l'auteur met en évidence l'unité étonnante de la structure du rêve. Enfin, dans *L'équation du nénuphar - Les plaisirs de la science*, Albert Jacquard tente de lutter contre l'ignorance, le racisme et toute forme d'exclusion, en nous faisant partager le fruit de ses multiples rencontres avec des classes primaires et secondaires en illustrant ses propos par des exercices destinés, selon lui, à développer l'esprit critique de ses jeunes auditeurs. Le problème de la croissance exponentielle du nénuphar est abordé et sert de prétexte au titre du livre.



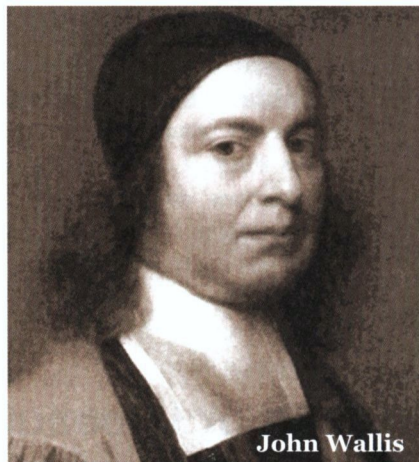
## Pour la beauté du mot

Poésie dans le droit fil du surréalisme et de la Beat Generation, *L'Équation du feu*, de J.-M. Debenedetti célèbre le regard et l'imaginaire. Le sens métaphorique du titre concerne sans doute les essais de mises en équations de la propagation du feu. Dans *Équation à deux inconnus*, de André-Paul Duchâteau, roman policier pour adolescents écrit en 1942, l'action se passe dans un lycée où l'auteur a fait ses études et où une pièce de théâtre va être interprétée par professeurs et élèves... Le titre est un clin d'œil à l'expression mathématique habituelle qui se réfère à une seule inconnue.

# Le champ des complexes

Longtemps conçus comme utiles mais imaginaires, les nombres complexes n'ont pris une réalité géométrique qu'à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle avec John Wallis. Carl Gauss a ensuite montré qu'il s'agissait du champ ultime où chercher les inconnues.

*En France, le théorème de Gauss porte le nom de d'Alembert car celui-ci en a donné une démonstration fausse.*



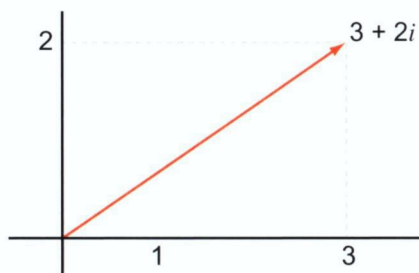
John Wallis

Dans des calculs surréalistes, les algébristes italiens de la Renaissance ont utilisé des quantités impossibles comme la racine carrée de nombres négatifs. Pourtant, leurs résultats étaient justes ! Dans l'article sur les manipulations algébriques, nous voyons comment ils procédèrent. Ici, nous examinons pour-

quoi leurs calculs étaient finalement exacts et comment ils se généralisent à d'autres corps.

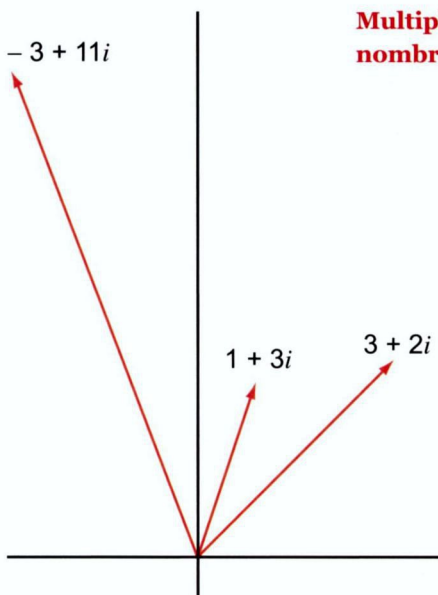
## Réalité des nombres imaginaires

Il est possible de donner une réalité aux nombres imaginaires en les représentant comme des vecteurs du plan. John Wallis l'a fait sans doute le premier en 1685. En France, cette invention est attribuée à Jean Argand qui l'utilisa en 1806 :



Représentation vectorielle du nombre complexe  $3 + 2i$

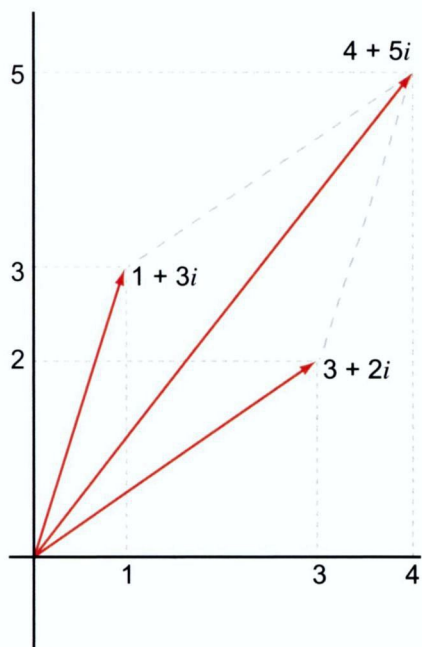
**Multiplication de deux nombres imaginaires**



Par commodité, notons  $i = \sqrt{-1}$  et représentons le nombre imaginaire  $3 + 2i$  par le vecteur de coordonnées 3 et 2. La somme de deux nombres imaginaires comme  $3 + 2i$  et  $1 + 3i$  se fait en utilisant les règles usuelles de l'addition donc :

$$(3 + 2i) + (1 + 3i) = (3 + 1) + (2 + 3)i = 4 + 5i.$$

Autrement dit, la somme des nombres imaginaires correspond à celle des vecteurs, comme on le voit sur la figure ci-dessous :



Il est un peu plus délicat d'interpréter la multiplication géométriquement (voir l'encadré *Multiplier des nombres complexes*). L'important est de remarquer qu'elle suit les mêmes règles que la multiplication réelle. En particulier, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Suite à ces représentations, les nombres imaginaires acquièrent une plus grande réalité en se voyant attribuer le titre de « nombres complexes ». Il est finalement possible de calculer avec ces nombres comme avec les nombres réels en ajoutant une seule règle :

$$i^2 = -1.$$

**Somme de deux nombres imaginaires**

Le produit se fait de même en ajoutant la règle  $i^2 = -1$  :

$$\begin{aligned} &(3 + 2i)(1 + 3i) \\ &= 3(1 + 3i) + 2i(1 + 3i) \\ &= 3 + 9i + 2i + 6i^2 \\ &= (3 - 6) + (9 + 2)i = -3 + 11i. \end{aligned}$$

**Examen des calculs**

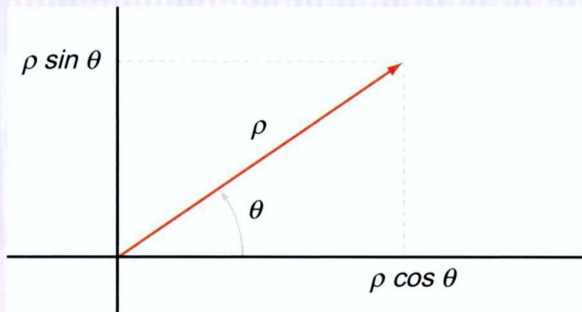
Examinons les calculs de Cardan vus dans l'article sur les manipulations algébriques sous ce nouveau jour. Il part de l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

et pose : 
$$\begin{cases} u + v = x \\ uv = 5 \end{cases}$$

### Multiplier des nombres complexes

Un nombre complexe  $z$  étant donné, en tant que vecteur du plan, il possède une longueur  $\rho$  et forme un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses :



#### Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Ces deux nombres définissent complètement ce nombre complexe qui s'écrit donc :  $\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Le produit de deux nombres complexes écrits sous cette forme correspond au produit des longueurs et à la somme des angles d'après le calcul trigonométrique :

$$\begin{aligned} & \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho' (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \rho \rho' [(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ & \quad + i [(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')]] \\ &= \rho \rho' [\cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta')] \end{aligned}$$

De ces calculs, nous déduisons que tout nombre a au moins une racine  $n^{\text{ième}}$  pour tout  $n$  : il suffit d'extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  réelle de sa longueur et de diviser son angle par  $n$ .

*C'est la clôture de  $\mathbb{R}$ .*

pour obtenir :  $u^3 + v^3 = 4$ . En posant  $U = u^3$  et  $V = v^3$ , il arrive au système :

$$\begin{cases} U + V = 4 \\ UV = 125 \end{cases}$$

dont les solutions sont celles de l'équation du second degré :

$$(X - 2)^2 = -121.$$

Nous pouvons maintenant justifier le calcul surréaliste de Cardan en l'écrivant :

$$(X - 2)^2 - (11i)^2 = 0.$$

Cette dernière équation se transforme en :

$$(X - 2 - 11i)(X - 2 + 11i) = 0$$

qui a donc deux racines :  $X = 2 \pm 11i$

$$\text{d'où : } \begin{cases} U = 2 + 11i \\ V = 2 - 11i \end{cases}$$

On a bien :  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$  donc :

$$\begin{cases} \left(\frac{u}{2+i}\right)^3 = 1. \\ uv = 5 \end{cases}$$

Nous sommes amenés à calculer les racines cubiques de 1. D'après les calculs de l'encadré « la multiplication des nombres complexes », ce sont 1 et

$$\cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

d'où les trois solutions pour  $u$  :  $2 + i$ ,

$$-(2 + i) \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } -(2 + i) \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Des calculs fastidieux mais simples permettent de retrouver les résultats de l'article sur les manipulations algébriques. En généralisant les calculs précédents, on montre que, dans ce nouveau champ de nombres, toute équation du second degré se voit attribuer deux solutions distinctes ou confondues.

### Le théorème de Gauss

Après les calculs des algébristes italiens de la Renaissance, les mathématiciens furent vite persuadés que toute équation de degré  $n$  avait  $n$  solutions distinctes ou confondues pouvant s'exprimer avec cette racine carrée étrange. Ce théorème sera démontré par Carl Gauss en 1799 mais porte le nom de d'Alembert en France car celui-ci en a donné une démonstration fautive en 1746 (voir l'encadré

### Fondamental, le théorème !

Considérons  $P$  un polynôme non constant. On démontre assez facilement qu'il existe un point  $z_0$  en lequel  $|P(z)|$  est minimal. Supposons que  $|P(z_0)| \neq 0$ , les deux termes de plus bas degrés du

polynôme  $\frac{P(z_0 + z)}{P(z_0)}$  sont  $1 + az^p$  où  $p \geq 1$  et  $a \neq 0$ . Soit  $b$  une racine  $p^{\text{ième}}$  de  $-a$  et  $Q$  le polynôme

$$\text{défini par : } Q(z) = \frac{P\left(z_0 + \frac{z}{b}\right)}{P(z_0)}$$

Ce polynôme s'écrit :

$$Q(z) = 1 - z^p + z^{p+1} R(z)$$

où  $R$  est un polynôme. On montre alors qu'il existe  $M > 1$  tel que :  $|R(z)| \leq M$  si  $|z| \leq 1$ .

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| Q\left(\frac{1}{2M}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{(2M)^p} + \frac{M}{(2M)^{p+1}} \text{ ce qui implique } \left| Q\left(\frac{1}{2M}\right) \right| < 1 \text{ et donc est absurde.}$$

On en déduit que  $P(z_0) = 0$ . Tout polynôme non constant admet donc au moins un zéro.

Nous pouvons donc diviser  $P$  par  $z - z_0$  (voir l'encadré « zéros et factorisation »). Soit  $Q$  le quotient. Si  $Q$  n'est pas constant, en appliquant ce qui précède, nous démontrons que  $Q$  admet au moins un zéro. En itérant ce raisonnement, nous démontrons que le nombre de zéros (distincts ou confondus) de  $P$  est égal à son degré. Ce résultat est le théorème fondamental de l'algèbre.



### Clôture algébrique

Ce procédé peut être généralisé aux autres corps. De façon générale, un corps  $K$  est dit algébriquement clos si toute équation à coefficients dans  $K$  admet au moins une racine dans  $K$ . Ernst Steinitz a montré en 1910, pour tout corps commutatif  $k$ , il existe un corps  $K$  tel que  $K$  est le plus petit corps algébriquement clos contenant  $k$ . Ce corps  $K$  est appelé la clôture algébrique de  $k$ . Pour ce qui nous concerne,  $\mathbb{C}$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$  et le corps des nombres algébriques, celle de  $\mathbb{Q}$  (voir l'article *Algébriques et transcendants*).

H.L.

*Fondamental, le théorème !* pour une idée de démonstration). En mathématiques, on peut être prophète en son pays. C'est plus difficile à l'étranger.

# Karl Friederich Gauss

**Mathématicien génial dès son plus jeune âge , Karl Friederich Gauss (1777-1855) a investi tous les domaines que les mathématiques vont explorer par la suite.**



**A**bel avait surnommé Gauss « le renard des mathématiques » car, disait-il, « cet animal efface avec sa queue les traces de ses pas sur le sable ». Il est vrai que Gauss était un spécialiste du camouflage de ses démonstrations : craignant le ridicule, il publiait très peu ses résultats. C'était pourtant un mathématicien génial, au talent précoce.

Dans sa thèse déjà, en 1799, Gauss démontre ce qu'on appellera par la suite le *Théorème fondamental de l'algèbre*, complétant ainsi la démonstration d'Alembert : *Tout polynôme non constant à coefficients réels se factorise*

*en un produit de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients réels, autrement dit, tout polynôme non constant à coefficients réels admet au moins une racine complexe.* Gauss emploie déjà pour sa démonstration la représentation plane des nombres complexes  $a + bi$  (avec le fameux  $i^2 = -1$ ), associant à tout nombre de cette forme le point du plan de coordonnées  $(a, b)$  dans un repère orthonormal. La démonstration du génial mathématicien se fonde alors sur des considérations géométriques et Gauss, toujours perfectionniste, en publiera deux autres, en 1816 puis en 1850.

## Un mathématicien touche-à-tout

Malgré son peu d'empressement à publier ses écrits, Gauss nous a laissé une œuvre inoubliable, publiée en 1801, en même temps d'ailleurs que sa découverte, par le calcul, de l'astéroïde Cérés, ses *Disquisitiones arithmeticae*. Il y étudie notamment l'équation  $x^p - 1 = 0$ , où  $p$  est un nombre pre-

**Les cascades  
de Terni,  
Jacob Philipp  
Hackert, 1779**



nous dirons qu'elle consiste à transformer un système en un système équivalent, c'est-à-dire qui a les mêmes solutions, triangulaire, donc plus facile à résoudre. Par exemple, s'il s'agit de résoudre simultanément les trois équations :  $3x + 2y + z = 5$ ,  $2x + 3y + z = 1$ ,  $2x + y + 3z = 11$ , on remplacera successivement, à l'aide de combinaisons linéaires des lignes, le tableau des coefficients qui s'écrit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \text{par } 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & -7 \end{array} \text{ puis par}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & & & 5 \\ 0 & -5 & -1 & \text{et la colonne } 1 & & \text{des} \\ 0 & 0 & -36 & & & 11 \end{array}$$

coefficients des seconds membres

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 5 & & 5 \\ \text{par } 7 & \text{puis par } & & 7 & & . \\ -23 & & & -108 & & \end{array}$$

Il reste donc à résoudre  $-36z = -108$ , qui donne  $z = 3$ . Le calcul des autres inconnues va suivre :  $-5y - z = 7$  donne  $y = -2$  et  $x + 2y + 1 = 5$  donne  $x = 2$ .

L'omniscience de Gauss dépasse de loin le cadre de l'étude des équations : il fut non seulement à la théorie des nombres ce qu'Euclide fut à la géométrie, mais donna de la géométrie une nouvelle approche, lui appliquant des théories d'analyse, et fit des courbes et des surfaces une étude systématique autour d'un point. Il excella aussi en astronomie, où il développa des techniques très précises de calcul d'orbites d'astres, inventa des appareils de mesure géodésiques ou magnétiques, laissant son nom à une unité d'électromagnétisme.

É.B.

mier. Il prouve alors que ses racines se calculent en résolvant une série d'équations à coefficients rationnels ayant pour degré les diviseurs premiers de  $p - 1$ . Ainsi est née la fameuse construction à la règle et au compas du polygone régulier à 17 côtés et une généralisation de la constructibilité des autres polygones réguliers. C'est donc grâce aux études de Gauss sur les équations qu'on sait aujourd'hui que le polygone régulier à  $n$  côtés n'est constructible que si  $n$  s'écrit  $2^m \times p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ , avec  $m$  entier naturel et les  $p_i$  des nombres de Fermat, c'est-à-dire de la forme  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Ainsi, non seulement le polygone à 17 côtés est constructible, mais aussi celui de 257 ( $F_3$ ) ou de 65537 ( $F_4$ ) sont constructibles, mais pas celui à 4 294 967 297 ( $F_5$ ).

Gauss a également laissé son nom à une méthode de résolution des systèmes linéaires d'équations, la *méthode du pivot*. Pour simplifier les choses,

# Puiseux

## et les coefficients en $t$

De même que pour résoudre des équations algébriques à coefficients entiers, rationnels ou réels, nous considérons des solutions complexes, de même, pour résoudre des équations à coefficients dépendant d'un paramètre, nous cherchons des solutions dans des domaines plus généraux.

Jusqu'à présent, toutes les équations algébriques rencontrées s'écrivaient sous la forme  $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ , où les  $a_i$  étaient des nombres.

On cherchait alors naturellement les « nombres » solutions. Cependant, il n'est pas moins légitime de se donner une famille de polynômes  $P_0(t), \dots, P_n(t)$  et de se demander s'il existe des polynômes  $X(t)$  vérifiant l'équation :

$P_n(t) X^n(t) + \dots + P_1(t) X(t) P_0(t) = 0$ , au sens où lorsque l'on développe le terme de gauche, on trouve le polynôme nul. Notons au passage que la variable  $t$  ne sert qu'à écrire le polynôme, elle n'a aucune autre interprétation. En particulier, on n'aura jamais besoin par la suite de la remplacer par un véritable nombre.

Un exemple de telle équation est :  
 $t^2 X^6 + 6t^2 X^5 + (8t^3 - 2t^2 + t) X^3 +$   
 $(7t^4 - t^2 - 2t) X^2 +$   
 $(8t^3 - 3t) X - t^8 + t^3 = 0,$   
 qui est de degré 6.

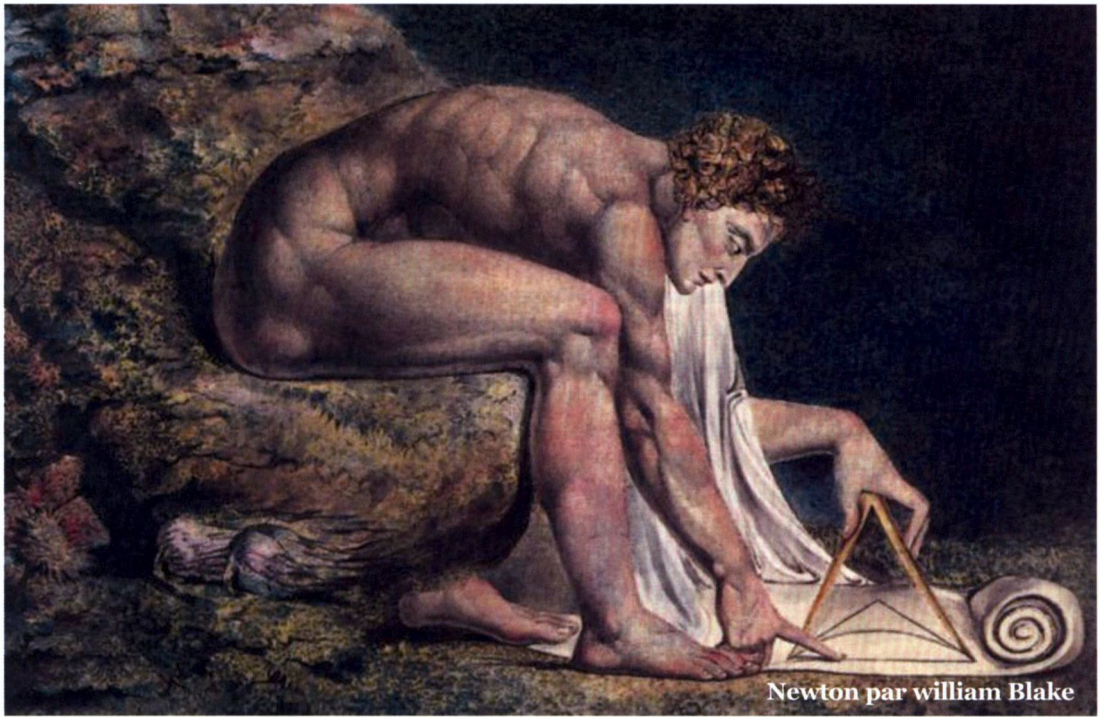
En effet, le degré de l'équation est le plus

grand exposant qui décore l'inconnue  $X$  (on n'a pas à tenir compte des exposants portant sur la variable  $t$ ). Mentionnons que dans l'écriture précédente, nous avons remplacé  $X(t)$  par  $X$ . C'est un abus que nous osons nous permettre. Cependant il faut garder à l'esprit que  $X$  est lui aussi un polynôme en  $t$ . Pour ne pas les confondre avec des nombres, nous notons, tout au long de ce texte, tous les polynômes et autres séries qui interviennent par des lettres majuscules.

Résoudre l'équation consiste à déterminer tous les polynômes (en réalité, on verra par la suite qu'il est trop réducteur de se restreindre aux polynômes)  $X$  qui vérifient l'égalité quand on les reinjecte dans l'équation. Par exemple si on injecte  $X = t - 1$ , on obtient l'expression :

$$t^2(t-1)^6 + 6t^2(t-1)^5 + (8t^3 - 2t^2 + t)(t-1)^3 + (7t^4 - t^2 - 2t)(t-1)^2 + (8t^3 - 3t)(t-1) - t^8 + t^3$$

Si vous avez la patience de tout développer, vous vérifierez que cette



Newton par William Blake

expression est nulle et donc que  $X = t - 1$  est bien une solution. Nous nous proposons ici de donner un analogue du théorème de d'Alembert-Gauss (voir l'article *Le champ des complexes*) dans cette nouvelle situation. En premier lieu, on se demande ce qui doit remplacer l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble dans lequel on cherche les solutions.

### Champ de recherche des solutions

Il est naïf de penser trouver toutes les solutions parmi les polynômes ! Ainsi, il n'existe aucun polynôme vérifiant l'une des équations :

$$tX = 1 \text{ ou } (t+1)X = 1$$

La simple considération du monôme de plus haut degré d'une solution éventuelle suffit pour le démontrer.

Pour trouver une solution, il faudrait au moins accepter celles qui s'écrivent comme quotient de deux polynômes,

ce que l'on appelle les fractions rationnelles. Mais là encore, il reste de nombreuses équations n'admettant pas de solution, comme les plus vulgaires des équations du second degré :

$$X^2 = t \text{ ou } X^2 = (t+1)$$

comme on le voit encore par une considération de degrés. Il nous faut donc trouver un ensemble plus gros pouvant loger toutes nos solutions.

### Les séries formelles

L'idée, pour le moins originale, est de considérer des polynômes infinis, que l'on appelle plutôt séries formelles. On note  $\mathbb{C}[[t]]$  l'ensemble des expressions de la forme :

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n + \dots$$

où les nombres  $c_i$  sont des nombres complexes.

Notez qu'il est possible d'additionner et de multiplier de tels objets. L'addition se fait sans problèmes. La multiplication est un peu plus délicate :

il s'agit de faire des développements infinis et cela est possible comme on peut l'expliquer sur l'exemple suivant :  $(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots + t^n + \dots) \times (t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + \dots + nt^n + \dots)$

On remarque que si l'on veut calculer le terme en  $t^2$  du produit, on a juste besoin de multiplier le 1 du premier facteur avec le  $2t^2$  du second et le  $t$  du premier facteur avec le  $t$  du second. Ainsi dans le produit, le coefficient devant  $t^2$  est  $1 + 2 = 3$ . De la même façon, le coefficient de  $t^3$  est :  $3 + 2 + 1 = 6$  et on peut obtenir le coefficient devant  $t^n$  pour tout entier  $n$ .

L'intérêt des séries formelles est qu'elles permettent de résoudre au moins deux des équations citées précédemment, à savoir  $(t + 1)X - 1 = 0$  et  $X^2 - (t + 1) = 0$ . Voyons comment. On cherche des nombres complexes  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  tels que :  $(t + 1) \times (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n + \dots) = 0$ .

En identifiant les coefficients, on arrive directement à  $c_0 = 1$  et  $c_i + c_{i+1} = 0$  pour tout  $i \geq 0$ . On en déduit l'unique solution suivante :  $1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots + (-1)^n t^n + \dots$

On procède de façon analogue pour la seconde équation. On cherche des nombres complexes  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  tels que :  $(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n + \dots)^2 = t + 1$ . Il est cette fois-ci un peu plus délicat de faire le développement. Toutefois, on peut commencer par regarder les termes constants (c'est-à-dire en  $t^0$ ). À gauche, il n'y a que  $c_0^2$  et à droite il y a 1. Ainsi,  $c_0^2 = 1$  et  $c_0 = \pm 1$ . On sépare alors les deux cas. Nous allons simplement esquisser le cas  $c_0 = 1$ . On regarde le coefficient en  $t$ . Dans l'élevé au carré, un terme en  $t$  ne peut être obtenu que par multipli-

cation d'un terme en  $t$  et d'un terme constant. Ainsi, à gauche, le terme en  $t$  est

$$2 c_0 c_1 = 1 \text{ d'où on déduit } c_1 = \frac{1}{2}.$$

On regarde ensuite les termes en  $t^2$  : on obtient  $c_1^2 + 2 c_0 c_2 = 0$  puis

$$c_2 = -\frac{1}{8}. \text{ On peut continuer ainsi}$$

jusqu'au bout ! Voici le résultat que l'on trouve au final :

$$x = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}t^n + \dots$$

où  $n!$  désigne le produit  $1 \times 2 \times \dots \times n$ . Ce n'est pas un exercice facile de le trouver par soi-même ou même à défaut de vérifier qu'il convient bien.

### Les séries de Laurent

Ce qui précède est bien joli, mais il reste un problème avec l'équation  $tX = 1$ . En effet, il est facile de voir que, même si  $X$  est une série formelle, le coefficient constant de  $tX$  est toujours 0 et que donc l'équation précédente n'admet pas de solution. Il faut encore une fois « augmenter » l'espace des solutions. Évidemment on a envie qu'une solution de l'équation  $tX = 1$  soit donnée

$$\text{par } x = \frac{1}{t} = t^{-1}, \text{ et donc on a envie de}$$

rajouter l'élément  $t^{-1}$  à notre espace de solutions. Faisons-le ! Bien sûr, il faut pouvoir additionner et multiplier les éléments de l'espace de solutions, et donc le rajout de  $t^{-1}$  va impliquer le rajout de la somme de  $t^{-1}$  et d'une série formelle quelconque, mais également le produit de  $t^{-1}$  par lui-même, c'est-à-dire  $t^{-2}$  et ainsi de suite. On

semble ainsi amené à considérer des éléments de la forme :

$$\dots + c_{-n} t^{-n} + \dots + c_{-1} t^{-1} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n + \dots$$

Mais cela pose un problème pour la multiplication. En effet, si l'on essaie de développer le produit suivant :

$$(\dots + t^{-n} + \dots + t^{-1} + 1) \times (1 + t + \dots + t^n + \dots)$$

tous les produits de la forme  $t^{-n} \times t^n$  vont donner un terme constant, et on n'est pas en mesure de calculer la somme de toutes ces contributions. Il faut donc retravailler notre espace. Après réflexion, on se rend compte qu'il suffit de considérer les éléments de la forme :

$c_m t^m + c_{m+1} t^{m+1} + \dots + c_n t^n + \dots$  où  $m$  est un entier positif ou négatif (et qui varie d'un élément à l'autre). Dans un tel élément, il ne pourra apparaître qu'un nombre fini de termes en  $t^n$  pour  $n$  négatif ; cependant, on garde la souplesse d'autoriser des  $n$  arbitrairement petits. On vérifie ensuite, comme dans le cas de  $\mathbb{C}[t]$ , qu'il est bien possible d'effectuer des additions et de développer des produits. On obtient ainsi un nouvel ensemble, appelé ensemble des séries de Laurent et noté  $\mathbb{C}((t))$ . Et on a, cette fois, un premier théorème encourageant :

**Toute équation algébrique de la forme  $Ax = B$  où  $A$  et  $B$  sont des polynômes à coefficients complexes admet une unique solution  $x$  dans  $\mathbb{C}((t))$ .**

L'idée principale pour démontrer ce théorème ressemble fort à ce que l'on a déjà fait pour les équations  $(t+1)X = 1$  et  $X^2 = (t+1)$ .

On pose :  $X = c_m t^m + c_{m+1} t^{m+1} + \dots + c_n t^n + \dots$  où les  $c_i$  sont des nombres complexes. On transforme la condition  $AX = B$  en une condition sur les  $c_i$ , et on essaie de

résoudre le système obtenu. Cependant, il y a, ici, une difficulté supplémentaire qui consiste à trouver  $m$ . Pour cela, on aura besoin d'introduire la notion de valuation : la valuation d'une série de Laurent  $X \neq 0$ , notée  $v(X)$ , est le plus petit exposant (qui existe bien !) qui apparaît dans son écriture.

Par exemple, la valuation de  $t + t^2 + t^7$  est 1, celle de  $t^{-2} + t^{-1} + t + t^5$  est  $-2$  et celle de  $t + 5$  est 0. On convient que  $v(0) = \infty$ .

La valuation possède des propriétés agréables vis-à-vis des opérations d'addition et de multiplication. Exactement, on a :

- I)  $v(XY) = v(X) + v(Y)$  ;
- II)  $v(X + Y) \geq \min(v(X), v(Y))$  avec égalité dès que  $v(X) \neq v(Y)$ .

Fort de la notion de valuation, on peut déduire de  $AX = B$ , l'égalité  $v(A) + v(X) = v(B)$  et donc  $v(X) = v(B) - v(A)$ . Il suffit maintenant de choisir  $m = v(B) - v(A)$ . Ceci étant fait, on trouve en comparant les termes de plus bas degré de  $AX$  et de  $B$  une équation (dont on vérifie qu'elle est de degré 1) ne faisant intervenir que  $c_m$ , d'où on déduit la valeur de  $c_m$ . En comparant ensuite les termes du degré immédiatement supérieur, on trouve une équation ne faisant intervenir que  $c_m$  et  $c_{m+1}$ . On connaît déjà la valeur de  $c_m$  et donc on obtient une équation en  $c_{m+1}$  (dont on vérifie qu'elle est de degré 1). On détermine ainsi la valeur de  $c_{m+1}$  et on continue comme ça jusqu'à l'infini...

### Les séries de Puiseux

Le théorème précédent règle le cas du degré 1 mais l'équation  $X^2 = t$  n'admet toujours pas de solution. En effet, si c'était le cas sa valuation serait égale à

*Les séries de Puiseux permettent de résoudre des équations à coefficients polynomiaux.*

$\frac{1}{2}$ . Une fois de plus, nous devons agrandir notre espace de solutions. Pour avoir une solution à l'équation  $X^2 = t$  le plus simple serait de rajouter l'élément  $t^{1/2}$ . De même, pour tout  $n$ , on aimerait ajouter un élément  $t^{1/n}$ . On considère alors naturellement l'ensemble des :

$$\sum_{q \geq r} a_q t^q$$

où  $r$  est un nombre rationnel positif ou négatif (qui varie d'un élément à un autre) et où la notation précédente signifie que l'on étend la somme à tous les rationnels  $q$  supérieurs ou égaux à  $r$ . Seulement, encore une fois, ces expressions sont trop générales pour pouvoir être multipliées.

Par exemple, on ne peut pas développer le produit suivant :

$(t^{1/2} + t^{1/3} + t^{1/4} + \dots + t^{1/n} + \dots) \times (t^{-1/2} + t^{-1/3} + t^{-1/4} + \dots + t^{-1/n} + \dots)$   
 car les produits de la forme  $t^{1/n} \times t^{-1/n}$  fournissent une infinité de termes constants.

La solution consiste à imposer que toutes les fractions qui apparaissent en exposant dans la série puissent s'écrire avec un même dénominateur.

On obtient ainsi ce que l'on appelle une série de Puiseux. Autrement dit, une série de Puiseux en  $t$  est une série de Laurent en  $t^{1/D}$  pour un certain entier  $D$  (qui correspond au dénominateur commun).

On vérifie alors que l'on peut bien additionner et multiplier les séries de Puiseux. En outre, la notion de valuation s'étend.

**Le théorème de Puiseux**

On ne voit maintenant plus aucun obstacle évident à un énoncé analogue au théorème de d'Alembert-Gauss. Et de fait, on a le résultat suivant :

Soient  $A_0, \dots, A_n$  des polynômes en  $t$  à coefficients complexes avec  $A_n \neq 0$ . Il existe  $n$  séries de Puiseux  $X_1, \dots, X_n$  telles que l'on ait la factorisation :  
 $A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_0 = A_n (X - X_1) (X - X_2) \dots (X - X_n)$ .

La démonstration de ce théorème est très proche de celle du théorème précédent (solution dans  $\mathbb{C}((t))$ ). Elle se décompose en deux étapes distinctes : on commence par déterminer les valuations possibles pour les solutions et une fois cela fait, on construit effectivement les solutions en calculant successivement les coefficients.

**Le polygone de Newton**

Expliquons comment on règle le premier point. Si  $X$  est une solution de l'équation :

$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0$ ,  
 il est nécessaire que la plus petite valuation des termes du membre du gauche apparaissent au moins deux fois (si tel n'était pas le cas, la somme aurait pour valuation ce minimum, et donc ne saurait être nulle) et donc qu'il existe  $i$  et  $j$  tels que :

$$v(A_i X^i) = v(A_j X^j)$$

$$\text{soit } v(X) = \frac{v(A_i) - v(A_j)}{j - i}$$

et tels que pour tout  $k$  on ait l'inégalité :  
 $v(A_k X^k) \geq v(A_i X^i) = v(A_j X^j)$

Les conditions précédentes peuvent s'interpréter graphiquement. Pour tout  $i$  tel que  $A_i \neq 0$ , on place dans le plan le point  $M_i$  de coordonnées  $(i, -v(A_i))$ . L'équation ci-dessus nous dit que les  $v(X)$  autorisés sont parmi les pentes des droites  $(M_i M_j)$ . L'inéquation nous dit que parmi ces droites, on ne doit retenir que celle qui sont au-dessus de

tous les segments du type  $[A_k A_i]$  ou  $[A_k A_j]$ .

Reprenons pour illustration l'exemple de l'introduction :

$$t^2 X^6 + 6 t^2 X^5 + (8t^3 - 2t^2 + t) X^3 + (7t^4 - t^2 - 2t) X^2 + (8t^3 - 3t) X - t^8 + t^3 = 0,$$

Le dessin associé est appelé polygone de Newton de l'équation (voir ci-contre), et les segments tracés en gras sont ceux dont les pentes fournissent les valuations possibles pour X, qui sont donc 2,

$$0 \text{ et } -\frac{1}{3}.$$

**Quelques mots sur la fin de la preuve**

On sélectionne une des valuations retenues, par exemple 0. On cherche X de valuation 0 vérifiant :

$$\underbrace{t^2 X^6 + 6t^2 X^5}_{\text{Val} = 2} + \underbrace{(8t^3 - 2t^2 + t) X^3}_{\text{Val} = 2} +$$

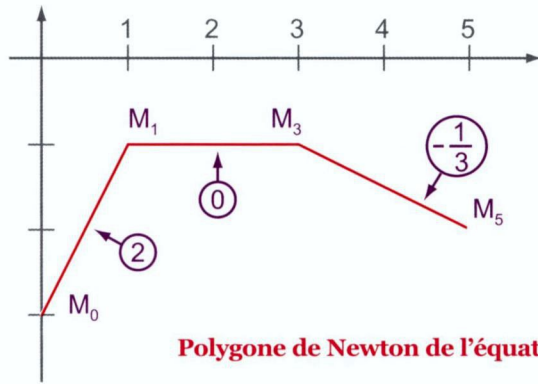
$$\underbrace{(7t^4 - t^3 - 2t) X^2}_{\text{Val} = 1} + \underbrace{(8t^3 - 3t) X}_{\text{Val} = 1} +$$

$$\underbrace{(-t^8 + t^3)}_{\text{Val} = 1} = 0$$

On identifie les termes de plus bas degré (ici 1) : si l'on écrit  $X = a_0 + X'$  avec  $a_0 \neq 0$ , on obtient  $a_0^3 - 2a_0^2 - 3a_0 = 0$  qui se simplifie en  $a_0^2 - 2a_0 - 3 = 0$  et donne  $a_0 = -1$  ou  $a_0 = 3$ .

On peut alors compléter ces deux débuts de solutions pour obtenir des séries de Puiseux solutions de l'équation de départ. La solution précédente  $a_0 = -1$  fournit la solution  $t - 1$  donnée dans l'introduction.

De façon générale, il est facile de voir que lorsque l'on cherche le premier



**Polygone de Newton de l'équation**

coefficient d'une série de Puiseux solution de valuation  $v$ , on est amené à résoudre une équation à coefficients complexes dont le degré  $d$  est la longueur sur l'axe des abscisses du segment de pente  $v$  ; on obtient ainsi  $d$  solutions qui chacune fournissent une solution au problème de départ (toutefois des problèmes assez subtils peuvent apparaître lorsque l'équation à coefficients complexes admet des racines multiples). Cela implique qu'une équation de degré  $n$  admet toujours  $n$  solutions.

De même que lorsque l'on a à résoudre des équations algébriques à coefficients entiers, on est obligé d'aller chercher les solutions dans  $\mathbb{C}$ , lorsque l'on a à résoudre des équations dont les coefficients sont des polynômes, on a besoin d'aller chercher les solutions parmi les séries de Puiseux.

Remarquez toutefois que si l'on ne veut que les solutions polynomiales, il suffit de retenir celles-ci parmi toutes celles trouvées, de la même façon que lorsque l'on souhaite résoudre une équation algébrique en nombres entiers, on peut commencer par la résoudre en nombre complexes et ne garder parmi les solutions que celles qui nous intéressent.

X.C.

# Algébriques et transcendants

**La plupart des nombres ne sont pas algébriques (c'est à dire solutions d'une équation algébrique à coefficients entiers) mais transcendants. Il existe pourtant très peu de nombres dont la transcendance ait pu être démontrée.**

*L'ensemble des nombres algébriques est un corps algébriquement clos.*

**L**es mathématiciens de la Grèce antique ont longtemps pensé que la droite réelle n'était constituée que de nombres rationnels. En effet ils présumaient que si l'on se donnait deux segments de longueurs quelconques, ceux-ci étaient commensurables, c'est à dire qu'ils étaient multiples entiers d'une même longueur. La découverte par l'école pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et de l'arête d'un carré a contredit l'hypothèse de commensurabilité : c'est l'irrationalité du nombre  $\sqrt{2}$ .

## Le degré des nombres algébriques

Un nombre réel ou complexe est dit algébrique si et seulement s'il existe une équation algébrique à coefficients entiers dont il est solution.

Ainsi,  $\sqrt{2}$  est algébrique puisque solu-

tion de  $x^2 - 2 = 0$ .

De même, tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$

est algébrique car racine de l'équation à coefficients entiers  $qx - p = 0$ . Le nombre complexe  $i$  est également un nombre algébrique puisque solution de l'équation  $x^2 + 1 = 0$ .

Quand un nombre algébrique est racine d'une équation de degré  $n$ , mais d'aucune de degré strictement inférieur, ce nombre est dit de degré  $n$ .

Par exemple  $\sqrt[3]{2}$  est un nombre algébrique de degré 3 car il est racine de l'équation  $x^3 - 2 = 0$  sans être racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers de degré inférieur à 2. Pour des raisons semblables,  $\sqrt{2}$  et  $i$  sont des nombres algébriques de degré 2 tandis que les nombres rationnels correspondent exactement aux nombres algébriques de degré 1.

## Opérations sur les nombres algébriques

Quand un nombre  $a$  non nul est solution d'une équation :

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + ux + v = 0$$

alors les nombres  $-a$  et  $1/a$  sont racines des deux équations :

$$(-1)^n a x^n - (-1)^n b x^{n-1} + \dots - u x + v = 0,$$

$$v x^n + u x^{n-1} + \dots + b x + a = 0.$$

Par conséquent, l'opposé et l'inverse d'un nombre algébrique non nul est un nombre algébrique. On peut également montrer que la somme et le produit de deux nombres algébriques sont des nombres algébriques mais ce résultat est beaucoup plus complexe à établir.

A titre d'exemple, voici comment obtenir une équation à coefficients entiers de racine  $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  :

On commence par développer l'expression :  $(a - \sqrt{2})^3 = 2$  ce qui donne :

$$a^3 + 6a - 2 = (3a^2 + 2) \sqrt{2}$$

puis en élevant au carré :

$$a^6 - 6a^4 - 4a^3 + 12a^2 - 24a - 4 = 0.$$

Enfin, on peut aussi montrer que les racines d'une équation algébrique dont les coefficients sont des nombres algébriques sont elles-mêmes des nombres algébriques. Ainsi, si  $a$  un nombre

algébrique positif alors  $\sqrt{a}$  est un nombre algébrique car racine de l'équation :  $x^2 - a = 0$ , dont les coefficients sont des nombres algébriques.

On résume ces deux propriétés en disant que l'ensemble des nombres algébriques est un corps algébriquement clos. Il s'agit de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  (voir l'article "Le champ des complexes").

## Les nombres transcendants

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, peu de temps après l'apparition du concept de nombre algébrique, les mathématiciens s'interrogent : Tous les nombres de la droite réelle sont-ils algébriques ? Et en particulier, le nombre  $\pi$  est-il algébrique ?



En 1844, Joseph Liouville est le premier à exhiber un nombre non algébrique c'est-à-dire transcendant. En 1872, Charles Hermite démontre que le nombre  $e$ , la base des logarithmes népériens, est également un nombre transcendant. Avec une démarche semblable, bien que plus complexe, Ferdinand von Lindemann, établit en 1882 la transcendance du nombre  $\pi$ . Il résout ainsi par la négative le problème millénaire de la quadrature du cercle (voir l'article *Les nombres constructibles*).

## Vers d'autres nombres transcendants

A partir de ces premiers nombres transcendants, il est facile d'en construire d'autres. Par exemple  $1/e$  ne peut être algébrique car sinon son inverse le serait aussi. Un argument semblable permet aussi de justifier la transcendance des nombres  $\sqrt{\pi}$  ou  $\pi^2$ .

On peut aussi former des nombres transcendants par opérations avec des nombres algébriques. Par exemple,  $a$  étant algébrique, le nombre  $a = \pi + 2$  est transcendant car sinon  $\pi = a - 2$  serait algébrique. Plus généralement la somme et le produit d'un nombre algébrique

**L'école pythagoricienne découvrit l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .**

non nul et d'un nombre transcendant sont des nombres transcendants.

### Le septième problème de Hilbert

En 1900, au deuxième congrès international de mathématiques, David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes dont la pertinence devait guider les recherches mathématiques durant le xx<sup>e</sup> siècle. Il a estimé que l'étude de la transcendance

de certains réels comme  $2^{\sqrt{2}}$  ou  $e^\pi$  était suffisamment digne d'intérêt pour constituer le septième problème de sa liste. En 1934, Alexandre Gelfond et Theodor Schneider résolvent ce problème en établissant séparément le théorème suivant :

*Si  $\alpha$  est un nombre algébrique strictement positif et différent de 1 alors  $\alpha^\beta$  est transcendant pour tout nombre algébrique  $\beta$  irrationnel.*

Ce résultat permet bien entendu d'établir

la transcendance de  $2^{\sqrt{2}}$  mais aussi celle de  $e^\pi$  car :

$$(-1)^{-i} = (e^{i\pi})^{-i} = e^\pi .$$



### Alan Baker

Alan Baker, né à Londres en 1939, a reçu la médaille Fields en 1970 pour ses travaux sur les nombres algébriques et les équations diophantiennes.

### Somme ou produit ?

Les nombres  $e$  et  $\pi$  sont tous deux racines de l'équation

$$x^2 - (e + \pi)x + e\pi = 0.$$

Si les deux nombres  $e + \pi$  et  $e\pi$  étaient algébriques, il en serait de même des nombres  $e$  et  $\pi$  ! Par suite, au moins l'un des deux nombres  $e + \pi$  ou  $e\pi$  est transcendant, mais lequel ? A ce jour, on l'ignore. Sans doute le sont-ils tous les deux.

Plus tard, A. Baker établit grâce à la transcendance du nombre  $e$  et la théorie des fonctions holomorphes le théorème suivant :

*Si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  alors  $\alpha$  et  $e^\alpha$  ne sont pas tous deux algébriques.*

Ce résultat particularisé à  $\alpha = i\pi$  permet de retrouver la transcendance du nombre  $\pi$ . Il permet aussi de justifier la transcendance, et donc a fortiori l'irrationalité, des nombres  $\ln 2, \ln 3, \dots$  Baker a obtenu la médaille Fields en 1970 pour ses travaux sur les nombres transcendants.


Il y a donc infiniment plus de nombres transcendants qu'il y a de nombres algébriques. Même si certains résultats récents ont permis d'établir la transcendance de nombres tels que  $\ln 3 / \ln 2, \sin 1$ , il reste néanmoins beaucoup de nombres simples dont la transcendance n'est que conjecture :  $\pi^e, e + \pi, e\pi$  ou la constante d'Euler définie par la relation :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Pire, à ce jour, on ignore encore si cette constante est ou non rationnelle !

D.D.

Diophante et ses équations	p. 128
Pierre de Fermat	p. 132
Le problème des bœufs du Soleil	p. 134
Le crime en équation	p. 140
Flair policier	p. 144
L'hyperbole du crime	p. 146
L'équation des prisons	p. 148



Bien des problèmes de mathématiques, célèbres ou pas, se ramènent à la résolution d'une ou plusieurs équations. Il en est de même, quelquefois, des énigmes des romans policiers. Résolues par Sherlock Holmes ou par ses dignes successeurs, celles-ci ne sont très souvent que des problèmes déguisés par un habillage littéraire.

# ÉNIGMES POLICIÈRES

## Équations à problèmes

# Diophante

## et ses équations

**Les équations diophantiennes ont passionné les mathématiciens depuis l'Antiquité jusqu'aux travaux les plus récents. Les plus simples se résolvent à l'aide de divisions euclidiennes. Les plus ardues ont donné lieu à des conjectures célèbres.**

**D**iophante d'Alexandrie, mathématicien grec, est considéré comme un des pères de l'Algèbre. On pense qu'il vécut au III<sup>e</sup> siècle de notre ère (200 à 284 après Jésus-Christ). Il est l'inventeur du Plethos, première notion de symbolisme mathématique, qui emploie une abréviation pour désigner l'inconnue.

Son œuvre la plus célèbre est un traité de 13 livres, *Les Arithmétiques*, dont on ne connaissait que six volumes jusqu'en 1968, date à laquelle quatre autres ont été retrouvés en Iran. Il s'agit d'une collection de 130 problèmes, en général des équations dont Diophante cherche les solutions positives entières ou fractionnaires.

Tous les progrès dus à Diophante ont été longtemps oubliés dans le monde occidental, mais heureusement, ils furent préservés par les Arabes. Ce n'est qu'à la Renaissance que l'on réalise une

traduction latine des *Arithmetiques*, la plus achevée étant celle de Bachet de Mézirac en 1621.

Diophante fut le premier mathématicien à rechercher systématiquement les solutions en nombres entiers (ou rationnels) d'une équation ou d'un système d'équations qui portent son nom.

Une équation *diophantienne* est une équation de la forme  $P(x, y, z) = 0$  où  $P$  est un polynôme à coefficients entiers (ou rationnels) dont on cherche les zéros dans  $\mathbb{N}$  (entiers naturels) ou  $\mathbb{Q}$  (nombres rationnels ou fractions).

Bachet de Méziriac, qui traduit et généralisa les travaux de Diophante, publia dans son livre *Problèmes plaisants et délectables* la méthode de résolution des plus simples d'entre elles, de la forme :  $ax + by = c$  (voir encadré).

### Diophante dans les maths modernes

Les trois côtés  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un triangle rectangle peuvent-ils être tous trois entiers ? C'est le problème des fameux



Pierre de Fermat

**Le théorème de Fermat est un exemple d'équation diophantienne.**



« triplets Pythagoriciens », dont la solution générale est de la forme :

$$x = k(a^2 - b^2), y = 2kab \text{ et } z = k(a^2 + b^2).$$

L'aire d'un triangle rectangle dont les côtés sont mesurés par des entiers peut-elle être un carré parfait se demandait Diophante ? C'est encore Bachet de Méziriac qui a démontré l'impossibilité d'une solution au système :

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } y.z = 2t^2.$$

La célèbre conjecture de Pierre de Fermat (1601-1665), devenue théorème depuis 1994, en est un exemple :

« un cube n'est jamais somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais somme de deux puissances quatrièmes, et plus généralement aucune puissance supérieure stricte à 2 n'est somme de deux puissances analogues. », que l'on traduit en notation algébrique par :  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solution pour  $n > 2$ .

Fermat prétendait posséder une démonstration de cette proposition,

démonstration *merveilleuse mais trop longue pour tenir dans la marge*.

La conjecture fut invincible durant trois siècles, jusqu'à ce que l'Anglais Andrew Wiles, né en 1953, en fasse la démonstration en octobre 1994... en 151 pages ! Le théorème porte désormais le nom de Fermat-Wiles.

On le voit, les travaux de Diophante sont une source d'inspiration inépuisable pour les mathématiciens anciens et modernes.

Une autre équation diophantienne célèbre est celle qui porte le nom de Pell-Fermat :

$$x^2 = n y^2 + 1$$

avec  $n$  est positif et non carré (comme par exemple dans  $9^2 = 5.4^2 + 1$ ).

Le célèbre mathématicien de Syracuse, Archimède (287-212 avant Jésus-Christ), puis l'Indien Bhaskara (né vers 1114) ont tenté de résoudre ce type d'équations. Plus tard, Fermat (encore lui !) comprit qu'il y avait une infinité de solutions. Ce résultat fut démontré

plus tard par Lagrange (1736-1813). Euler (1707-1783) baptisa cette équation du nom du mathématicien Pell (1610-1685). On l'associe souvent à celui de Fermat.

Diophante semble également avoir su que chaque nombre peut être écrit

comme somme de quatre carrés. Ce résultat remarquable sera également annoncé par Fermat sans plus de démonstration d'ailleurs. Il fallut attendre Lagrange pour ce faire, sur la base de travaux d'Euler.

A.Z.

## Une résolution d'équation diophantienne

Les équations Diophantiennes non triviales les plus simples sont :  $ax + by = 0$  ( $E_0$ ) et  $ax + by = c$  ( $E_c$ ), où  $a$ ,  $b$  et  $c$  appartiennent à  $\mathbb{Z}^*$ . Leur résolution dans  $\mathbb{Z}^2$  fait intervenir la notion de PGCD.

### L'équation $ax + by = 0$ ( $E_0$ ) se résout grâce au théorème de Gauss .

$ax + by = 0$  équivaut à  $ax = -by$ , donc  $a$  divise  $by$ .

♦ Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, le théorème de Gauss nous dit que  $a$  divise  $y$ . Par conséquent, si  $(x,y)$  est un couple-solution alors il existe nécessairement un entier relatif  $\mathbb{Z}$  tel que :

$$(x,y) = (-bz, az)$$

Cette condition est également suffisante : quelque soit l'entier relatif  $z$ ,  $(-bz, az)$  vérifie l'équation ( $E_0$ ).

♦ Si  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux, soit alors  $d$  leur PGCD, et  $(a', b')$  tels que  $(a'd, b'd) = (a, b)$ . On trouve  $a'$ ,  $b'$  et  $d$  grâce à l'algorithme d'Euclide.

En simplifiant par  $d$ , l'équation ( $E_0$ ) équivaut à :  $a'x + b'y = 0$ .  $a'$  et  $b'$  étant premiers entre eux, on est ramené au cas précédent.

Les solutions sont donc les couples  $(-b'k, a'k)$ ,  $k$  décrivant  $\mathbb{Z}$ , ce qui revient à l'ensemble des couples  $(-bz, az)$ ,  $z$  décrivant  $\mathbb{Z}$ .

### L'équation $ax + by = c$ ( $E_c$ ) se résout grâce au théorème de Bézout, dû en réalité à Bachet.

♦ Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, l'identité de

Bézout nous dit qu'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :

$$au + bv = 1. \text{ Donc } auc + bvc = c.$$

Le couple  $(uc, vc)$  est donc solution de l'équation ( $E_c$ ).

Soit  $(x_0, y_0)$  une solution connue de ( $E_c$ ).

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases} a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases}$$

Les couples  $(X = x - x_0, Y = y - y_0)$  sont solutions de l'équation de type ( $E_0$ ) :  $aX + bY = 0$ . Ils sont de la forme  $(X,Y) = (-bz, az)$ ,  $z$  décrivant  $\mathbb{Z}$ .

Les solutions de ( $E_c$ ) sont les couples  $(x, y) = (x_0 - bz, y_0 + az)$ .

♦ Si  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux, soit  $d$  leur PGCD. Il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = a'd$  et  $b = b'd$ .

$$ax + by = c \text{ équivaut à } a'dx + b'dy = c.$$

• Si  $d$  ne divise pas  $c$  alors l'équation n'a pas de solution.

• Si  $d$  divise  $c$ , on pose  $c' = c/d$  et l'équation ( $E_c$ ) équivaut à  $a'x + b'y = c'$  avec  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux : on s'est donc ramené au cas précédent.

Donc si le PGCD de  $a$  et  $b$  divise  $c$ , la solution générale de l'équation est  $(x_0 - bz, y_0 + az)$ ,  $z$  décrivant  $\mathbb{Z}$  et  $(x_0, y_0)$  étant une solution particulière.

## Problème XVII du livre VI des *Arithmétiques* de Diophante

Trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, augmenté du nombre de l'hypoténuse, forme un carré, et que le nombre de son périmètre soit un cube.

Posons que le nombre de l'aire d'un triangle est 1 arithme, et que le nombre de son hypoténuse est une quantité quadratique d'unités moins l'arithme, notamment 16 unités moins l'arithme. Mais puisque nous avons supposé que le nombre de l'aire du triangle est 1 arithme, il s'ensuit que le produit des côtés situés autour de l'angle droit devient 2 arithmes.

Or 2 arithmes constituent le produit de l'arithme et de 2 unités ; donc, si nous posons que l'une des perpendiculaires est 2 unités, l'autre sera 1 arithme. Dès lors, le périmètre devient 18 unités ; ce qui n'est pas un cube. Or, 18 provient d'un carré augmenté de 2 unités ; en conséquence, il faudra trouver un carré qui, augmenté de 2 unités, forme un cube ; de manière qu'un cube excède un carré de 2 unités.

Posons donc que la racine de ce carré est l'arithme plus 1 unité, et que la racine du cube est 1 arithme moins 1 unité. Le carré devient 1 carré d'arithme plus 2 arithmes plus 1 unité, et le cube devient 1 cube d'arithme plus 3 arithmes moins 3 carrés d'arithme moins 1 unité. Nous voulons donc que ce cube excède ce carré de 2 unités ; en conséquence, le carré, augmenté de 2 unités, c'est-à-dire 1 carré d'arithme plus 2 arithmes plus 3 unités, sont égaux à 1 cube d'arithme plus arithmes moins 3 carrés d'arithme moins 1 unité, d'où l'on trouvera comme arithme 4 unités. En conséquence, la racine du carré sera 5 unités, et celle du cube 3 unités ; le carré même sera 25 unités, et le cube 27 unités.

Modifions le triangle rectangle et, ayant posé que son aire est 1 arithme, posons que l'hypoténuse est 25 unités moins 1 arithme, tandis que la base reste 2 unités, et la verticale l'arithme. Il faut enfin que le carré de l'hypoténuse soit égal aux carrés des côtés situés autour de l'angle droit. Or, ce carré devient 1 carré d'arithme plus 625 unités moins 50 arithmes ; donc, il sera égal à 1 carré d'arithme plus 4 unités, d'où l'arithme

sera  $\frac{621}{50}$ . Revenons à ce que nous avons posé, et la proposition est établie.

### Commentaires

$ab/2 + h$  est un carré,  
 $a + b + h$  est un cube.  
 «Arithme» désigne une inconnue du problème  $ab/2 = x$  donc  $x + h$  est un carré  $n^2$ . (Diophante prend l'exemple de  $n = 4$ .)  $ab = 2x$ .

Si on choisit  $a = 2$ , alors  
 $a + b + h = 2 + n^2$ .  
 Ce dernier résultat doit être un cube  $p^3$  (l'exemple  $n = 4$  ne marche donc pas). En résumé, il faut trouver  $n$  et  $p$  tels que  $p^3 = 2 + n^2$ .

Prenons donc  $X$  comme autre inconnue de façon que  $n = X + 1$  et supposons que  $p = X - 1$ .

On a alors :  $n^2 = X^2 + 2X + 1$   
 et  $p^3 = X^3 + 3X - 3X^2 - 1$ .

On veut que

$$X^2 + 2X + 3 = X^3 + 3X - 3X^2 - 1$$

c'est-à-dire  $4X^2 + 4 = X^3 + X$

ou encore  $4(X^2 + 1) = X(X^2 + 1)$ , d'où  $X = 4$ .

On a donc :  $n = 5, p = 3, n^2 = 25, p^3 = 27$ .

Puisque  $x + h = n^2$ , on a  $h = 25 - x$ ,  
 $a = 2, b = x$ .

Mais  $h^2 = a^2 + b^2$ , soit  
 $(25 - x)^2 = 4 + x^2$ .

Donc  $625 - 50x = 4$ .

Finalement  $x = \frac{621}{50}$ .

La solution est donc :

$$a = 2, b = \frac{621}{50} \text{ et } h = \frac{629}{50}.$$

# Pierre de Fermat

**Pierre de Fermat était passionné de mathématiques au point d'y consacrer tous les loisirs que lui laissait sa charge de magistrat, et on ne peut dire de lui qu'il était un simple amateur en la matière.**



Pierre de Fermat

**A**mateur de mathématiques ou mathématicien amateur ? S'il n'était pas professionnel des mathématiques, Pierre de Fermat (1601-1665) en est devenu une figure incontournable. Sans avoir manifesté dans sa jeunesse de disposition particulière pour les mathématiques, Fermat s'est passionné pour elles beaucoup

plus tard et les a travaillées presque en dilettante, en publiant très peu. Son œuvre est cependant digne des professionnels. L'abondante correspondance qu'il entretenait avec tout ce que l'Europe d'alors contenait de mathématiciens, Pascal, Mersenne, Wallis et les autres est là pour en témoigner.

## Friand d'énigmes et de nombres entiers

C'est par cette correspondance que Fermat s'est acquis une réputation : il adressait des lettres à ses confrères mathématiciens pour leur communiquer ses plus récents résultats, sans toutefois leur dévoiler la solution, les mettant au défi de la découvrir. Parmi ces énigmes, beaucoup portaient sur les nombres entiers, comme par exemple les nombres amicaux, ces paires d'entiers comme 220 et 284, dont chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre.

La recherche d'énigmes a dopé l'imagination de Fermat et de nombreux théo-

rèmes d'arithmétique portent son nom :

- *Le petit théorème de Fermat* : si  $p$  est un nombre premier et  $n$  un entier naturel, alors  $n^p - n$  est divisible par  $p$ ,
- *Le théorème de Fermat* : tout nombre premier de la forme  $4n + 1$  est somme de deux carrés.

- *Le théorème de Fermat-Lagrange* : tout entier est somme de quatre carrés. Fermat n'a d'ailleurs pas démontré personnellement ce dernier théorème : Lagrange a fini le travail.

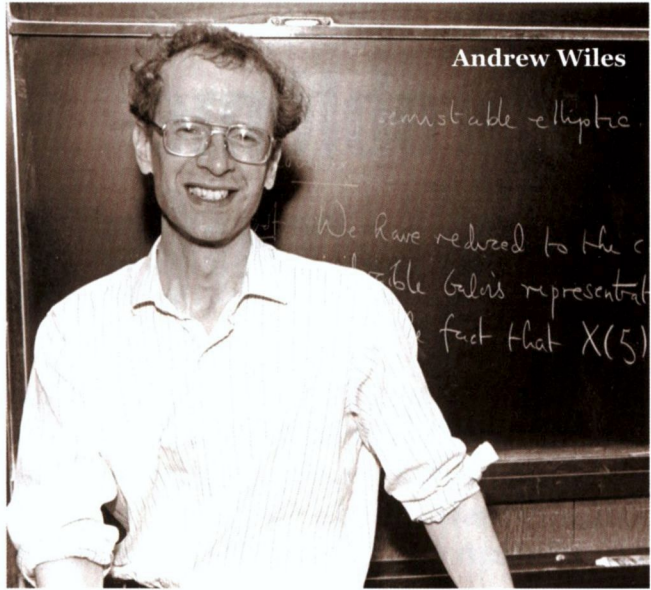
Parmi les problèmes sur les entiers qui peuplaient les « rêveries » de Fermat, revenaient souvent des questions d'équations, et Fermat avait l'art de les introduire à bon escient. C'est lui, par exemple, tout comme Descartes, a envisagé l'application de la géométrie analytique à l'étude des figures de l'espace, lui aussi qui ramenait la résolution de n'importe quelle équation au problème de l'intersection de deux courbes. C'est lui enfin qui, après avoir émis le principe (dit *de Fermat*) du chemin minimum parcouru par la lumière, l'illustra en résolvant des équations du quatrième degré. Sa spécialité en matière de résolution d'équations ? La méthode de *descente infinie*, utilisant le fait qu'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'entiers positifs. C'est avec cette méthode simple mais efficace qu'il prouve que l'aire d'un triangle « rectangle en nombres » (à côtés entiers  $x$  et  $y$ ) ne peut être un carré, autrement dit, si

$$x^2 + y^2 = z^2, \frac{xy}{2} \text{ ne peut être un carré}$$

d'entier.

### La fameuse conjecture

Il est des équations qui ont fait la renommée mondiale de Fermat : ce sont les équations diophantiennes.



Andrew Wiles

Elles portent le nom du célèbre algébriste grec, dont Fermat lisait et relisait les œuvres. L'une d'elles, d'un type particulier,  $y^2 - ax^2 = 1$  ou  $-1$ , porte d'ailleurs le nom d'*équation de Fermat-Pell*. C'est dans la marge d'un des livres de Diophante que Fermat laissa comprendre qu'il venait de trouver un résultat génial, mais que la place lui manquait pour le démontrer. Ses collègues avaient l'habitude ; doué d'une exceptionnelle intuition, Fermat leur laissait souvent le soin de compléter la démonstration de ses assertions. La méthode a réussi puisque l'énoncé de sa fameuse *conjecture de Fermat* : l'équation  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solutions entières hormis pour  $n = 2$ , a donné à des générations de mathématiciens 350 ans de travail avant de pouvoir la démontrer !

C'est Andrew Wiles qui en 1993 a terminé le travail et a fait, après de multiples péripéties, de cette conjecture un théorème à part entière.

É.B.

*La recherche d'énigmes a dopé l'imagination de Fermat et de nombreux théorèmes d'arithmétique portent son nom.*

# Le problème des bœufs du Soleil

Trois siècles avant notre ère, Archimède de Syracuse proposa, si l'on en croit la tradition antique, un problème d'arithmétique, sous forme de couplets élégiaques, dans une lettre adressée à son ami Ératosthène de Cyrène et aux savants d'Alexandrie. La solution complète a été trouvée en 1965.



Représentation des bœufs du Soleil (et d'un lièvre) sur un vase grec trouvé à Cerveteri (5<sup>e</sup> av. J.-C.). Musée du Louvre, Paris.

On trouve dans l'*Odyssée* d'Homère les vers suivants, qui inspirèrent probablement Archimède lorsqu'il en vint à concevoir l'habillage de son défi arithmétique (*Rhapsodie* XII, traduction de Leconte de Lisle).

*Tu arriveras ensuite à l'île Thrinakié. Là, paissent les bœufs et les gras troupeaux de Hélios. Et il a sept troupeaux de bœufs et autant de brebis, cinquante par troupeau. Et ils ne font point de petits, et ils ne meurent point, et leurs pasteurs sont deux Nymphes divines, Phaéthousa et Lampétié, que la divine Néaira a conçues du Hypérionide Hélios.*

**« Lorsque Archimède trouva la pesanteur spécifique des corps, il rendit service au genre humain ; mais à quoi nous servira de trouver trois nombres tels que la différence des carrés de deux ajoutée au cube des trois fasse toujours un carré, et que la somme des trois différences ajoutée au même cube fasse un autre carré ? »**  
**Voltaire, Dictionnaire philosophique**

## Énoncé du problème d'Archimède

On doit au dramaturge allemand Gotthold E. Lessing, alors bibliothécaire à Wolfenbüttel, la découverte d'un manuscrit en grec du problème des bœufs de Hélios.

En 1773, Lessing publia la lettre d'Archimède, accompagnée d'une traduction en français (voir page suivante) et d'une scholie proposant une solution... fautive.

Voici, résumé, l'essentiel du problème : Hélios, le dieu du Soleil avait un troupeau composé de taureaux et de vaches ; une partie des bêtes était blanche, une autre était noire, une troisième était tachetée et une quatrième était brune.

Pour ce qui est des taureaux, le nombre de blancs surpassait le nombre de noirs d'un demi plus un tiers du nombre de bruns ; le nombre de noirs était plus grand que le nombre de bruns d'un quart plus un cinquième du nombre de tachetés ; le nombre de tachetés dépassait le nombre de bruns d'un sixième plus un septième du nombre de blancs.

## Mesure, ami, si tu as la sagesse

en partage, avec une application soutenue, le nombre des bœufs d'Hélios qui jadis paissaient dans les plaines de l'île Thrinacienne, la Sicile, répartis en quatre troupeaux de couleurs variées, l'un d'un blanc de lait, le second d'un noir brillant, le troisième blond, et le quatrième bigarré. Dans chaque troupeau, il y avait un nombre considérable de taureaux dans les proportions que voici : imagine, ami, les blancs en nombre égal à la moitié, augmentée du tiers, des taureaux noirs et augmentée de tous les blonds, et le nombre des noirs égal au quart et au cinquième du nombre des bigarrés et au nombre de tous les blonds. Observe, d'autre part, que le nombre des bigarrés restants est égal au sixième augmenté du septième du nombre des taureaux blancs et au nombre de tous les blonds. Les proportions des vaches étaient les suivantes : le nombre des blanches était exactement égal à la somme du tiers et du quart de tout le troupeau noir, alors que les noires égalaient en nombre la somme du quart et du cinquième du nombre des bigarrées quand elles venaient toutes paître avec les taureaux. Les bigarrées, d'autre part, avaient un nombre égal à la somme de la cinquième et de la sixième partie de tout le troupeau des blondes, et les blondes étaient égales en nombre à la moitié du tiers augmentée du septième du troupeau blanc. Ami, si tu peux me dire exactement combien il y avait de bœufs d'Hélios en précisant le nombre des taureaux robustes et, à part, celui des vaches pour chaque couleur, tu ne seras, certes, pas appelé ignorant ni inculte en matière de nombres, mais tu ne te feras pas pour autant ranger parmi les savants. Mais examine encore toutes les manières dont les bœufs d'Hélios ont



été groupés. Chaque fois que les taureaux blancs venaient joindre leur multitude aux noirs, ils se rangeaient fermement en un groupe ayant la même mesure en profondeur et en largeur, et les vastes plaines de la Thrinacie étaient remplies de cet amas carré. Les blonds et les bigarrés, réunis, se rangeaient de leur côté de façon à former un groupe qui, commençant par un, allait s'élargissant jusqu'à parfaire une figure triangulaire, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ni absents. Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science.

**Archimède**  
(287- 212 av.  
J.-C.)  
gravure de  
Charles PAUL  
LONDON,  
1760-1826.

En ce qui concerne les vaches, le nombre de blanches était égal à un tiers plus un quart du nombre total d'animaux noirs ; le nombre de noires égalait un quart plus un cinquième du nombre de bêtes tachetées ; le nombre de tachetées valait un sixième plus un septième du nombre d'animaux blancs ; le nombre de vaches brunes se montait à un sixième plus un septième du nombre total d'animaux blancs.

De plus, les bœufs noirs et blancs regroupés formaient un carré et ceux, tachetés et bruns, pouvaient être disposés en une figure triangulaire.

Quelle était la composition du troupeau ?

### Mise en équations

Notons respectivement par  $W, X, Y, Z$  le nombre de taureaux blancs, noirs, tachetés et bruns, puis, par  $w, x, y, z$  le nombre de vaches des couleurs correspondantes.

La première partie de l'énoncé se traduit par les sept équations linéaires :

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Y ;$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Z + Y ;$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Y ;$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Z + z) ;$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) ;$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Y + y).$$

Les relations additionnelles sont :

$W + X = \text{nombre carré} ;$

$Y + Z = \text{nombre triangulaire.}$

### Résolution du système linéaire

La résolution du système linéaire de sept équations à huit inconnues ne pose aucune difficulté théorique.

À l'aide de *Mathematica* ou de *Maple*, on trouve en quelques secondes :

$$S = (W, X, Y, Z, w, x, y, z) = W \left( 1, \frac{267}{371}, \frac{297}{742}, \frac{790}{1113}, \frac{171580}{246821}, \frac{815541}{1727747}, \frac{1813071}{3455494}, \frac{83710}{246821} \right).$$

Cet ensemble de solutions rationnelles dépend d'un paramètre  $W$  que l'on peut ajuster pour obtenir des solutions entières, plus propices à dénombrer cet immense troupeau.

Le dénominateur commun à toutes les fractions précédentes étant 10 366 482, nous trouvons, après multiplication, la solution générale en nombres entiers :

$$S = n(10\,366\,482, 7\,460\,514, 4\,149\,387, 7\,358\,060, 7\,206\,360, 4\,893\,246, 5\,439\,213, 351\,5820)$$

pour  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Prise en compte des contraintes

L'incroyable difficulté du problème d'Archimède tient aux deux contraintes non-linéaires :

$$\begin{aligned} W + X &= \square \\ Y + Z &= \triangle . \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} X + Y &= (10366482 + 7460514)n \\ &= 17826996n \end{aligned}$$

et de la factorisation

$$17\,826\,996 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657,$$

on tire que  $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$  doit être un carré et que, par suite,

$$\begin{aligned} n &= 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657m^2 \\ &= 4456749m^2 \end{aligned}$$

pour un entier  $m$  approprié.

Un nombre triangulaire est un nombre de la forme

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + \\ &3 + 4 + \dots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Les premiers nombres triangulaires sont

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= 3 \\ T_3 &= 6 \\ T_4 &= 10 \\ &\dots \end{aligned}$$

La solution générale  $S$  devient ainsi :  
 $S = (46\ 200\ 808\ 287\ 018, 33\ 249\ 638\ 308\ 986,$   
 $18\ 492\ 776\ 362\ 863, 32\ 793\ 026\ 546\ 940,$   
 $32\ 116\ 937\ 723\ 640, 21\ 807\ 969\ 217\ 254,$   
 $24\ 241\ 207\ 098\ 537, 15\ 669\ 127\ 269\ 180)m^2.$

L'entier  $Y + Z$  étant un nombre triangulaire, nous devons résoudre l'équation :

$$(18492776362863 + 32793026546940)m^2 = \frac{q(q + 1)}{2},$$

qui peut encore s'écrire

$$q^2 + q - 2 \cdot 51285802909803m^2 = 0.$$

Cette équation a une solution entière si et seulement si le discriminant

$$1 + 4 \cdot 2 \cdot 51285802909803m^2$$

est un carré parfait  $k^2$  et la seule solution positive est alors  $k(k - 1)/2$ .

Le problème des bœufs du Soleil se ramène donc à la résolution de l'équation de Pell :

$$1 + 410286423278424m^2 = k^2$$

dont une forme équivalente est

$$k^2 - 4729494 s^2 = 1$$

où  $s$  est un entier divisible par 2 et 4657.

### Les fractions continues entrent en jeu

La théorie des équations de Pell, inaugurée par Pierre de Fermat, fait jouer un rôle essentiel aux fractions continues.

En effet, l'équation

$$k^2 - 4729494 s^2 = 1 (*)$$

peut s'écrire

$$\left| \frac{k}{s} - \sqrt{4729494} \right| = \frac{1}{s(k + s\sqrt{4729494})}$$

où le membre de droite est majoré par  $1/s^2$ .



Autrement dit, toute solution de (\*) est une très bonne approximation de  $\sqrt{4729494}$ , ce qui implique que  $k/s$  peut être obtenu par troncature du développement en fraction continue de la racine carrée  $\sqrt{4729494}$ .

Plus précisément, le développement en fraction continue de la racine carrée d'un entier est *périodique* et la propriété d'approximation optimale entraîne que la troncature de la fraction à des multiples de la longueur de la période donne des rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont des solutions de l'équation de Pell associée.

Voici, sous sa forme classique, le début du développement en fraction continue de  $\sqrt{4729494}$  :

$$\sqrt{4729494} = 2174 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{25 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

**Cicéron**  
*découvrant*  
*le tombeau*  
*d'Archimède,*  
 peinture de  
**Martin Knoller,**  
 1775.

Mais, il est préférable d'utiliser la forme compacte suivante où, outre la partie entière, seuls les dénominateurs significatifs sont donnés :

$\sqrt{4729494} = [2174, 1, 2, 1, 5, 2, 25, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 15, 1, 2, 16, 1, 2, 1, 1, 8, 6, 1, 21, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 6, 1, 1, 5, 1, 17, 1, 1, 47, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 3, 47, 1, 1, 17, 1, 5, 1, 1, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 21, 1, 6, 8, 1, 1, 2, 1, 16, 2, 1, 15, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 25, 2, 5, 1, 1, 4348, \dots]$

En tronquant juste avant 4348 (le dernier nombre de la période), on obtient le rationnel :

$$\frac{109931986732829734979866232821433543901088049}{50549485234315033074477819735540408986340}$$

qui amène la solution minimale de (\*) :

$$k = 109931986732829734979866232821433543901088049$$

$$\text{et } s = 50549485234315033074477819735540408986340.$$

Un résultat classique de la théorie des nombres affirme que cette solution minimale engendre la "solution générale"

$$\epsilon = k + s \sqrt{4729494},$$

dans le sens où toutes les solutions de (\*) sont de la forme  $(k_d, s_d)$  avec

$$\epsilon^d = k_d + s_d \sqrt{4729494}.$$

Il nous reste à trouver un entier  $d$  pour lequel  $s_d$  est divisible par 2 et 4657.

### La dernière ligne droite

Il n'est pas possible, dans le cadre élémentaire de cet article, d'exposer les détails de la recherche de  $d$ , recherche qui fait appel à certains résultats "pointus" de la théorie des corps finis.

Le lecteur intéressé pourra consulter l'article d'Ilan Vardi, *Archimedes' Cattle Problem*, qui fait le tour complet de la question, et dont le présent texte n'est qu'un résumé succinct.

On trouve  $d = 2329$ .

Toutes les solutions de (\*) sont alors données par  $k = \alpha_n$  et  $s = \beta_n$  où

$$\epsilon^{2329n} = \alpha_n + \beta_n \sqrt{4729494},$$

pour  $n = 1, 2, \dots$

Finalement, la solution complète du problème des bœufs du Soleil est, pour  $n = 1, 2, \dots$

$$W = \left[ \frac{159}{5648} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$X = \left[ \frac{801}{39536} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$Y = \left[ \frac{391}{79072} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$Z = \left[ \frac{395}{19768} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$w = \left[ \frac{128685}{6575684} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$x = \left[ \frac{2446623}{184119152} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$y = \left[ \frac{5439213}{368238304} \epsilon^{2329n} \right]$$

$$z = \left[ \frac{125565}{13151368} \epsilon^{2329n} \right]$$

où  $[x]$  désigne le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$  (fonction *plafond* de  $x$ ).

Pour avoir une idée du gigantisme des solutions obtenues, voici une valeur approchée du nombre total des bœufs du Soleil dans le cas minimal ( $n = 1$ ) :

$$7,760\,271\,406\,486\,818\,269\,530\,232\,833\,213\,886\,664\,232\,240\,592\,337\,610\,315\,062 \times 10^{206544},$$

résultat que l'on doit rapprocher du nombre ridiculement bas de particules dans l'univers, estimé à  $10^{80}$ .

Si on voulait écrire, par exemple, le nombre  $W$  exact de bœufs blancs, soit 15965108046... 05462938515034180, nombre de 206 545 chiffres, il nous faudrait sacrifier 55 pages de ce hors-série.

### Sources

Ilan Vardi,  
*Archimedes' Cattle Problem*,  
AMERICAN  
MATHEMATICAL  
MONTHLY,  
Volume 105,  
(avril 1998)  
pages 305-319.  
Cet article est  
disponible sur le  
site d'Ilan Vardi  
au format pdf.

LE site sur le  
problème  
d'Archimède :  
<http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html>  
ou tapez *Cattle Problem* dans  
GOOGLE.

## Archimède a-t-il résolu le problème d'Archimède ?



Archimède. Gravure de M. Weber, 1892, d'après une peinture de Niccolò Barabino (1832-1891).

### L'ère des ordinateurs

Dans une lettre adressée au *New York Times* du 18 janvier 1931, un lecteur pessimiste écrivait : « Puisque il a été calculé qu'il faudrait le travail d'une centaine d'hommes pendant une centaine d'années pour déterminer le nombre exact des bœufs de Hélios, il est évident que le monde ne connaîtra jamais la solution du problème d'Archimède. »

Cette opinion était parfaitement justifiée en considération des avancées sur la question à cette époque.

En 1880, A. Amthor avait donné dans son article *Das Problema bovinum des Archimedes* la première solution partielle du problème en estimant la taille du troupeau (un entier de 206 545 chiffres) dont il avait calculé les trois premiers chiffres : 776.

Ce travail fut poursuivi par le *Hillsboro Mathematical Club*, réunion de trois membres (Edmund Fish, Geo. H. Richards, et A. H. Bell), qui consacra tout son temps de 1889 à 1893 à la détermination des 31 premiers chiffres et des 12 derniers chiffres du plus petit nombre de bœufs : 776 027 140 648 681 826 953 023 283 320 9 . . . 719 455 081 800. Résultat, on le sait aujourd'hui, entaché d'une erreur : 09 doit être remplacé par 13.

Rien ne bougea avant l'arrivée des ordinateurs.

En 1965, H. C. Williams, R. A. German, et C. R. Zamke de l'université de Waterloo trouvèrent la première solution complète du problème d'Archimède à l'aide d'un IBM 7040. Le calcul dura 7 heures et 49 minutes.

Harry Nelson du Lawrence Livermore National Laboratory publia, en 1981, les 47 pages contenant les 206 545 chiffres de la plus petite valeur possible de la taille du troupeau, résultat qui avait nécessité 10 minutes de calcul d'un Cray 1.

Platon dans son *Charmides* fait référence à un problème qu'"Archimède appela problème des bœufs de Hélios".

Il n'y a guère de doute qu'Archimède ait inventé son problème. Il est beaucoup moins certain que la formulation proposée dans le manuscrit de Lessing soit de sa plume.

Il est hautement improbable qu'il ait pu le résoudre effectivement, vue l'énormité des solutions. Mais savait-il que le problème avait une solution ? Le doute demeure.

La touche finale fut apportée par Ilan Vardi qui en 1998, proposa des formules explicites, simples et élégantes, formules que nous avons évoquées à la page précédente, et qui permettent d'engendrer toutes les solutions.

De nos jours, la résolution du problème des bœufs du Soleil est à la portée de tout un chacun. Il suffit d'avoir à sa disposition un simple ordinateur, de charger le programme *Mathematica* ou *Maple* à l'adresse <http://www.mcs.drexel.edu/~crrres/Archimedes/Cattle/Statement.html> et d'avoir un peu de patience.

D.B.

# Le crime en équations

**Loin des méthodes classiques, un nouveau type de roman policier est né. Détective ou criminel sont devenus mathématiciens et trouver la solution du crime revient en réalité à résoudre une équation.**

**E**n 1841, Edgar Allan Poe invente un détective dont Conan Doyle s'inspirera pour créer Sherlock Holmes, Monsieur C. Auguste Dupin. Notre ami, à l'instar du romancier Alain Demouzon part du principe "qu'il n'y a pas de crimes parfaits, il n'y a que des crimes impunis, ceux dont l'imperfection n'a pas été découverte". Auguste Dupin possède un esprit méthodique et une âme de poète. Ses déductions logiques et la pratique de l'identification psychologique vont être ses outils pour démasquer les criminels. "Lorsque des éléments,

***“Les mathématiques sont la seule science parfaitement ouverte, une construction intellectuelle d’une objectivité parfaite, donc synonyme d’ouverture”.***

***Andréa Japp***

*des détails anodins reviennent régulièrement dans une enquête, il faut toujours les retenir parce qu'ils dissimulent à coup sûr une signification profonde”* dira de la même façon un des héros plus contemporains de l'auteur des *Rivières pourpres*, Jean-Christophe Grangé.

Rouletabille, le fringant reporter du *Mystère de la Chambre Jaune* de Gaston Leroux élucidera l'énigme de la tentative d'assassinat de la belle Mathilde, fille du professeur Stangerson. Qui est l'agresseur, son mobile ? Comment a-t-il fait pour s'échapper d'une chambre fermée de l'intérieur ? Et bien, tout simple, on appelle cela un raisonnement de type booléen.

Si les seules solutions envisageables sont A, B et C. Si A et B sont avérés impossibles alors la clé du mystère

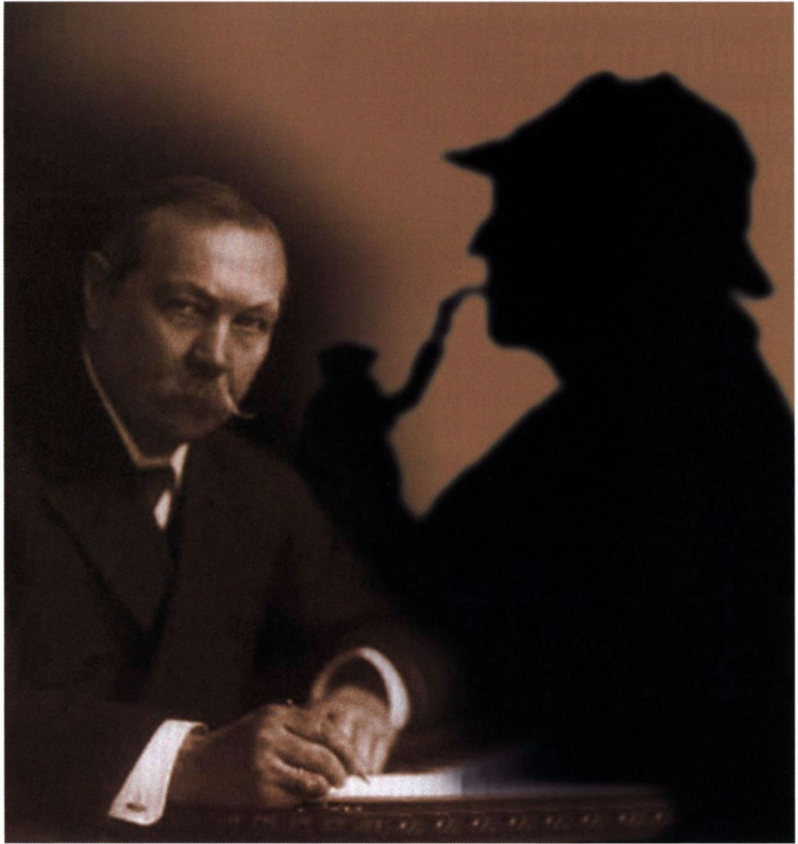
est forcément C, même si cela a l'air complètement invraisemblable. Apparemment cela marche, grâce à son "bon bout de raison" notre héros trouvera un coupable tout à fait inattendu ! Notons par ailleurs que cette même méthode est utilisée sur la toile pour les moteurs de recherche avancés sur Internet.

### Le tueur et son équation

Progrès technologique oblige, Gloria Parker-Simmons, née de l'imagination d'Andréa Japp, biochimiste de formation, est un véritable petit génie des mathématiques. Dotée d'un QI largement supérieur à la

moyenne, passionnée de philosophie, elle a fait ses études au célèbre M.I.T sous la férule d'Hugues de Barzan, professeur de mathématiques fondamentales, devenu son mentor. Depuis elle travaille comme consultante pour diverses sociétés.

Mais c'est avec James Cagney, spécialiste des comportements tordus au FBI, qu'elle va donner le meilleur d'elle-même et contribuer largement à la résolution d'enquêtes difficiles concernant des tueurs en série. Son outil, un super logiciel ultra sophistiqué qu'elle a entièrement conçu, vient au secours de la très grande complexité des éléments que James Cagney et son équipe recueillent. Gloria Parker Simmons sait que "ce qui lie les victimes et les lieux, c'est le tueur  $x$  pour qui elle va chercher



Conan Doyle

une équation". Pour elle, l'important est tout d'abord de bien poser la question. "La solution découle obligatoirement du problème" lui a martelé pendant des années son professeur. Elle se sert des mathématiques pour prévoir. Cette sorte de mathématiques prédictives peut, selon elle, s'appliquer à n'importe quel problème, pour peu qu'on sache trier les données et trouver le bon système d'expression. Définir l'essence du problème pour mettre le meurtre en équation, tel est le credo de Gloria. Quand elle ne trouve pas de solution, les paroles de Hugues de Barzan lui reviennent en mémoire : "si vous ne trouvez pas la solution d'un problème bien posé, ce n'est pas la faute du problème, c'est la conséquence de votre incompetence personnelle et de

voire désir d'avoir raison alors que vous avez tort". Inutile d'insulter copieusement son ordinateur, Gloria garde son calme, déguste un verre de Chablis frais et déverrouille le mystère ! Élémentaire n'est-ce pas ?

Son auteur n'a pas choisi la spécialité de son héroïne par hasard. En effet, elle pense que *"les mathématiques sont la seule science parfaitement ouverte, une construction intellectuelle d'une objectivité parfaite, donc synonyme d'ouverture"*.

***"Si vous ne trouvez pas la solution d'un problème bien posé, ce n'est pas la faute du problème, c'est la conséquence de votre incompetence personnelle et de votre désir d'avoir raison alors que vous avez tort."***

### Les racines du mal

A la limite de la science fiction, dans les *Racines du mal* de Maurice G. Dantec, Darcandier dit Dark, jeune scientifique qui a pour sujet d'étude l'intelligence artificielle est surtout intéressé par la théorie du chaos.

Il n'est pas policier, mais se lancera à la poursuite d'une bande de criminels qui tuent pour le plaisir du jeu. Encore plus fort, il va inventer une machine qui "pense" avec laquelle il va progressivement "dialoguer".

Sa recherche se fait selon des références aux mathématiques, aux découvertes scientifiques réelles, à la philosophie et à toutes sortes de connaissances qu'il va introduire dans sa machine selon ses intuitions personnelles. Avec elle, il va résoudre des équations de plus en plus difficiles parce que les tueurs sont diaboliquement créatifs. En outre, ils éprouvent une véritable jouissance intellectuelle à brouiller les pistes ! Pour notre enquêteur, il s'agit de remonter aux origines du "mal", de comprendre pourquoi ces assassins produisent de la violence gratuite.

On est loin du professeur Tournesol !

### Les apprentis sorciers

Les chercheurs en informatique sont devenus une source d'inspiration pour les auteurs, tout ce qui nous échappe et nous fait peur dans l'avancée des technologies modernes fait le matériau de nombreuses intrigues policières. Le thème des apprentis sorciers géniaux qui deviennent fous et se mettent au service du mal est récurrent dans l'histoire du roman policier. Il se trouvera toujours un jeune chercheur surdoué pour enquêter et stopper les avancées monstrueuses de la science devenue folle. Un des plus représentatifs actuellement est Michael Crichton, habitué du "technopolar", (également créateur de la série "Urgences"). Dans *La proie*, c'est un ingénieur en informatique au chômage de la Silicon Valley qui va s'attaquer à des méchants high tech. Ici, nous sommes plongés dans l'univers des nanotechnologies. Des chercheurs ont fabriqué des micro-robots agglutinés en essaim pour créer une caméra non repérable destinée à la recherche militaire. Seulement, voilà, comme cela ne fonctionnait pas bien, ils ont eu l'idée de reconfigurer ces nano-particules en y ajoutant l'énergie solaire, un algorithme génétique pour les laisser se reproduire et se débrouiller toutes seules, sans réfléchir aux conséquences, tant et si bien que ces particules vont se transformer en un prédateur infiniment petit qui va menacer la planète. Dieu merci, notre jeune chômeur mettra fin à ce processus de prolifération infernal, grâce à ses connaissances aussi nombreuses que variées dans le domaine mathématique, génétique, biologique, etc. *"Science sans conscience n'est que ruine de l'âme"* pourrait s'appeler ce style de romans, dans lesquels la Science est en fait la véritable héroïne.

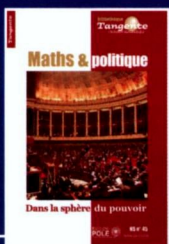
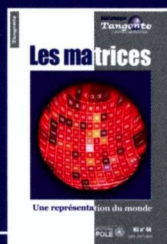
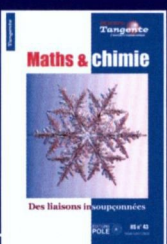
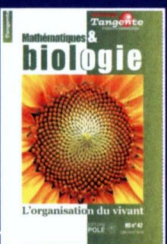
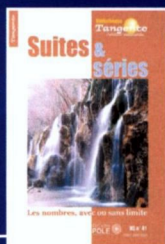
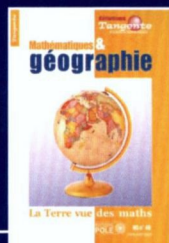
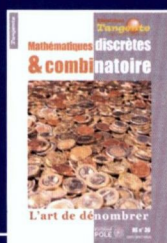
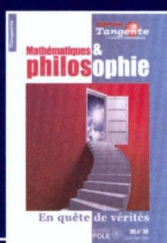
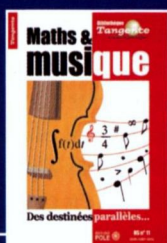
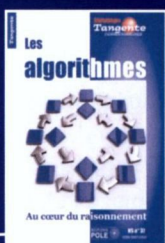
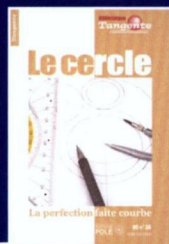
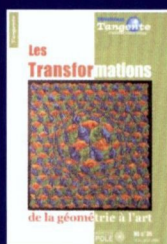
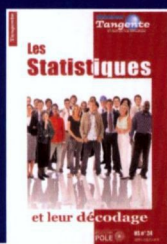
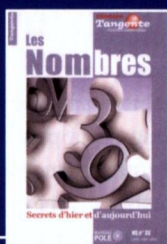
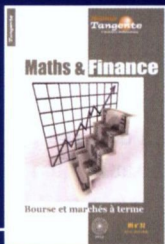
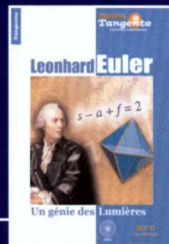
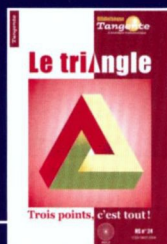
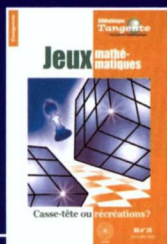
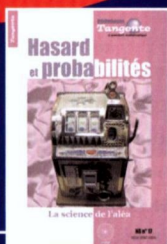
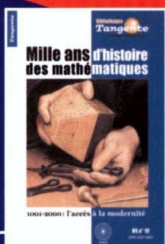
S.V.

# Bibliothèque **Tangente**

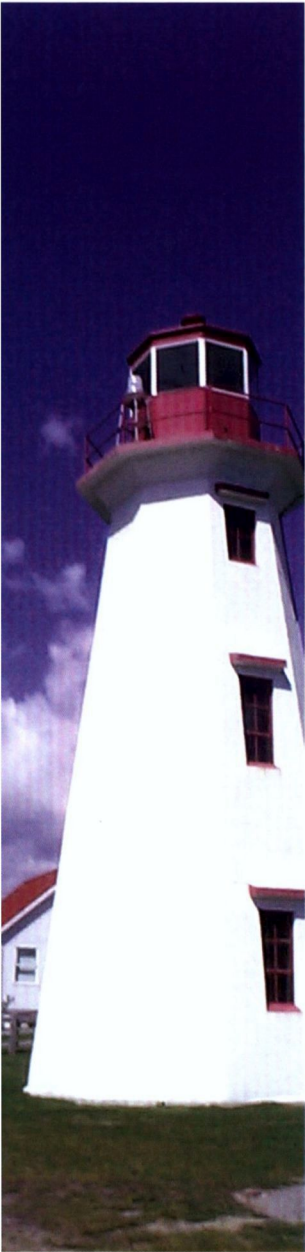
L'aventure mathématique

Ces magnifiques ouvrages en couleur de 160 pages feront l'admiration des visiteurs de votre bibliothèque

Une nouvelle façon de faire rimer mathématique avec esthétique



# Flair policier



**E**liott est gardien de phare, entre l'île de Guernesey et la côte française, à une distance de 5 km de celle-ci. Il connaît tous les « bons » coups, et il n'a plus rien à apprendre des trafics en tous genre : contrebande d'alcool, de cigarettes, etc. C'est justement pour cela que les hommes du capitaine Brillant, de la Brigade de Surveillance Côtière, l'ont repéré. Ils épient ses allées et venues : c'est qu'il a un canot rapide, le bougre ! Son engin fait facilement du 12 km/h, même quand la mer est mauvaise. D'ailleurs, il va presque aussi vite avec ce canot à moteur que lorsqu'il fait son jogging sur la plage. La dernière fois, il s'est chronométré : il fait du 13km/h lorsqu'il court, ce n'est pas si mal !

Ce soir, justement, il doit recevoir une grosse livraison de cartouches de cigarettes arrivant directement d'Angleterre et, il ne sait pas pourquoi, il est un peu anxieux. La police, qui a depuis longtemps mis son téléphone portable sur écoute, est déjà au courant et compte bien cette fois le prendre en flagrant délit.

— Le transport doit se faire vers minuit, la nuit est sans lune, qu'est-ce que je risque ? se dit Eliott. D'ailleurs j'aperçois le bateau de mon ami Jordy qui arrive de Guernesey. Il sera là dans une poignée de secondes, nous ferons le déchargement de la marchandise et après, pour nous réchauffer, je lui offrirai un de ces whisky... celui de la dernière livraison, il est fameux...

Soudain, un bruit de moteur, et puis ce reflet bleu sur la mer. Eliott connaît cela, beaucoup trop bien d'ailleurs.

— Ça y est, je suis cuit, c'est la vedette de la police qui me fonce droit dessus ! Et les cartouches qu'on n'a même pas commencé à décharger ! Quelle misère... Mais, rien à faire, si je veux éviter le « flag », il faut que je me sauve. Je vais essayer d'aller, en un temps minimum, chez mon pote Momo, celui qui habite dans une maison de pêcheurs, le long de la plage, à 18 km de l'aplomb du phare sur la côte. Il saura où me cacher et, même si j'ai pour cette fois perdu mon chargement, j'aurai sauvé ma peau.

Aussitôt dit, aussitôt fait, Eliott saute dans son bateau, rallie la côte aussi vite que le moteur le lui permet, va accoster exactement à l'endroit qu'il sait être idéal pour minimiser son temps de parcours total et compte finir les derniers kilomètres à pied jusqu'à la maison de Momo, en courant sur la plage le long de l'eau aussi vite que lors de son dernier jogging, pour arriver chez Momo en un temps record. Jamais il ne pourra aller plus vite !

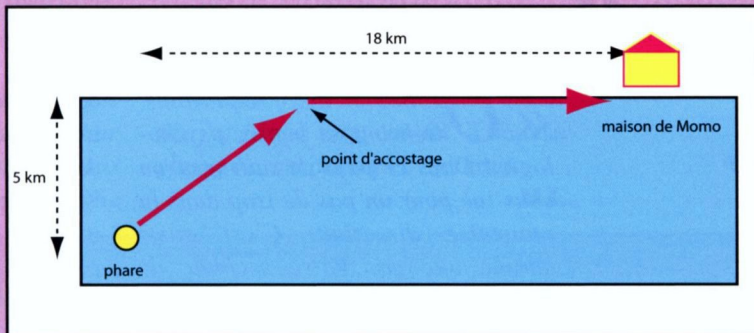
Mais surprise ! Au point même où son canot touche la côte, les hommes du capitaine Brillant sont là, prêts à lui passer les menottes.

— Ça, c'est trop fort, lâche Eliott ! Dites-moi que c'est par hasard que vous êtes juste là !

— La police ne laisse jamais rien au hasard, Monsieur Eliott...

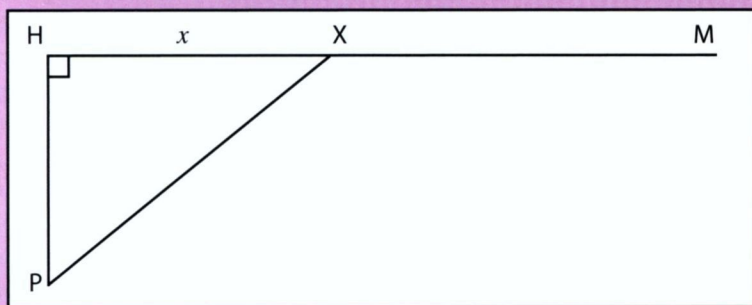
## L'équation du flair

Voici le plan des lieux :



Comment les policiers ont-ils trouvé exactement le point d'accostage d'Elliott ?

Appelons P le phare, H son projeté orthogonal sur la plage, M la maison de Momo, X le point idéal d'accostage. Les distances sont exprimées en km. Désignons par  $x$  la distance HX. D'après l'histoire,  $PH = 5$  et  $HM = 18$ .



La distance PX est parcourue en bateau à une vitesse de 12 km/h, la distance XM à pied à 13 km/h. Le temps total du parcours est donc égal à :

$$t(x) = \frac{PX}{12} + \frac{XM}{13} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{12} + \frac{18-x}{13}$$

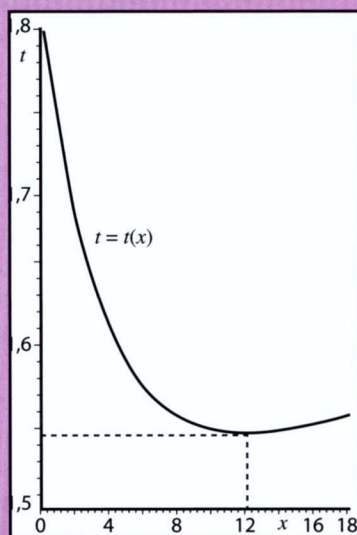
En fonction de  $x$ , le temps est représenté par la courbe :

Le temps semble donc minimal pour  $x = 12$ . Pour préciser cette valeur, il suffit d'étudier le signe de la dérivée de la fonction  $t$ .

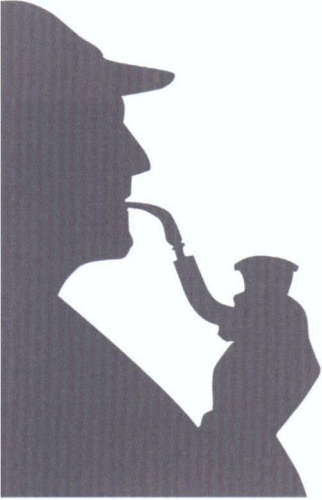
$$\text{On trouve : } t'(x) = \frac{13x - 12\sqrt{25+x^2}}{12 \times 13 \times \sqrt{25+x^2}}$$

Elle s'annule en changeant de signe pour  $13x - 12\sqrt{25+x^2} = 0$ .

La seule solution positive de cette équation est bien  $x = 12$ . Les policiers vont donc « cueillir » le contrebandier à 12 km de H, car il sont sûrs que c'est là qu'il va accoster.



# L'hyperbole du crime



« *Oubliez vos équations, Gehring, et pensez psychologie ! Dans ce pays de sauvages, on vous tue pour un pas de trop dans la mauvaise direction. C'est aussi simple que ça. Votre seconde de décalage, c'est de la foutaise. Croyez-en mon expérience, un témoignage, c'est pas au millimètre près.* »

Le commissaire Grobert est têtue. Il n'abandonne pas ses théories si facilement. Pourtant les témoignages eux aussi sont têtus et ils contredisent son explication des faits, mais rien à faire. Grobert tient son coupable, il ne le lâchera pas. Impossible de le convaincre. C'est ennuyeux. Je dois absolument le disculper pour toucher mes honoraires. Pourquoi ai-je signé un contrat pareil ? J'étais convaincu que ce serait facile, mais c'était sans compter sur Grobert. Pour lui, tout est clair : un inconnu a été trouvé mort à l'entrée du terrain d'Hans Klein. L'adjoint de Grobert, l'inspecteur Lachman, a découvert l'arme du crime près de sa maison. Et ça lui suffit ! Un enfant de 5 ans l'aurait pourtant mieux dissimulée, mais ça ne gêne pas Grobert. « *La psychologie, Gehring, la psychologie du primaire. Vous, vous auriez sans doute mieux fait mais c'est déjà étonnant qu'il n'ait pas raccroché l'arme au râtelier. La dissimuler, il a dû voir ça à la télé !* »

— *Justement, son râtelier est plein.*

— *Et alors, ce fusil-là, il est pour les intrus, les autres pour les lapins et les sangliers ?* »

Quand ça arrange Grobert, Klein est idiot. En plus, les témoignages sont maigres. Ça ne va pas être facile de le

convaincre. Outre Klein lui-même, seuls trois de ses voisins ont entendu le coup de feu : Strini, Muguet et Lang. Comme Klein, Strini situe le coup de feu à environ vingt heures alors que chacun d'eux préparait son repas. Lang et Muguet regardaient la télévision et sont beaucoup plus précis. Pour rien au monde, ils n'auraient raté le sourire d'Odile Reich, la présentatrice vedette. Muguet a entendu le coup de feu à la fin du générique, Lang à l'instant même où Odile Reich commençait à parler. Un décalage infime, une seconde environ, mais qui s'explique scientifiquement : Muguet était plus proche du lieu du crime que Lang. Alors que je ne vois pas comment en convaincre Grobert, le ciel vient à mon secours. Un éclair nous illumine et Grobert se met à compter. Le tonnerre retentit alors qu'il en est à trois. Le commissaire conclut : « *Neuf cents mètres ! La foudre n'est pas tombée loin.* »

— *Répétez ça !*

— *Quoi encore ?*

— *Neuf cents mètres, pourquoi neuf cents mètres ?*

— *Tout le monde le sait : trois fois trois cents mètres.* »

Le visage de Grobert s'illumine à son tour : « *Lachman, passez-moi la carte.* » Son adjoint l'étale devant nous. En quelques instants, Grobert localise le lieu où le corps a été découvert et les maisons de Muguet et de Lang. « *Voyons, du lieu du crime, il y a huit cents mètres pour aller chez Muguet et cinq cents pour aller chez Lang. C'est absurde !* »

— *Je vous le disais.*

— Non, vous me parliez d'équations, d'hyperboles...

— Je parlais de l'ensemble des points possibles : ils forment une hyperbole, et elle ne passe pas par chez Klein ! »

Grobert regarde la carte :

« Ici, c'est l'inverse. Bon Dieu, c'est Strini le coupable ! Il a tué la victime chez lui avant de déposer le corps chez Klein. Lachman, faites-moi une

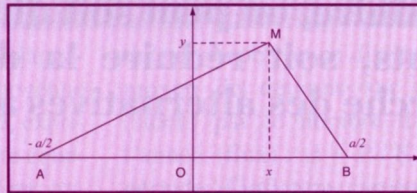
enquête de voisinage, je veux connaître tous les rapports entre ces deux-là. Et regardez également si le râtelier de Klein est plein. »

Peut-être que Grobert va un peu vite en besogne, il reste une infinité de possibilités mais, peu importe, Klein disculpé, j'ai rempli mon contrat, il ne reste plus qu'à toucher mes honoraires.

H.L.

## L'origine d'une hyperbole

D'où vient l'hyperbole de Gehring ? Si A et B représentent les positions des maisons de Lang et Muguet qui, renseignement pris, sont distantes de 900 m, le coup de feu a été tiré à un endroit M vérifiant l'équation  $MA = MB + 300$ , puisque Lang l'a entendu une seconde après Muguet. Cherchons l'ensemble C des points M tels que  $MA = MB + d$  où  $d < a$ , la distance entre A et B. Utilisons le repère suivant :



Repère utilisé pour respecter les symétries du problème.

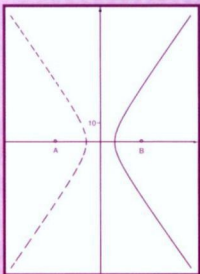
Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées de M dans ce repère, alors  $MA = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$

et  $MB = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$  d'où  $\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} + d$ .

Donc, en élevant au carré, en isolant la racine restante puis en élevant à nouveau au carré, on obtient :

$$4 \frac{x^2}{d^2} - 4 \frac{y^2}{a^2 - d^2} = 1.$$

Il s'agit de l'équation d'une hyperbole H. Ces calculs montrent l'inclusion  $C \subseteq H$ . Bien sûr, la réciproque est fautive car l'hyperbole H contient également les points M tels que  $MB = MA + d$ . Une analyse plus fine montre que  $C \subseteq H^+$  où  $H^+$  est l'ensemble des points de H dont l'abscisse est positive. La réciproque est alors vraie, donc  $C = H^+$ .



**Hyperbole H :** elle est constituée du lieu C des points M tels que  $MA = MB + 3$ . La branche en pointillé correspond à la symétrique de C, lieu des points M tels que  $MB = MA + 3$ .

# L'équation des prisons

**L'effectif de la population carcérale obéit à une équation simple. Pour le réduire, on peut soit diminuer le nombre d'emprisonnements, soit réduire la durée des peines. Pour cela, on cherche des alternatives à la prison.**

L'existence des populations humaines est régie par le mécanisme suivant : des individus naissent et entrent dans la population ; des individus meurent et sortent. Un laps de temps s'écoule entre la naissance et la mort d'un individu ; cette durée de vie ou temps de présence, différente selon les individus, assure la coexistence à tout moment d'un nombre variable de personnes qui constituent la population. En cas de migrations, immigrer et émigrer constituent aussi des modes d'entrée et de sortie. Instrument d'étude de ces modes de renouvellement des populations, l'analyse démographique dispose de modèles élémentaires, fournissant des populations de référence, faciles à décrire, qui permettent par comparaison de juger certaines situations concrètes. Le modèle le plus simple est celui de la population stationnaire.



Prison de la Bastille.

## Le modèle stationnaire

Une population est dite *stationnaire* si les entrées annuelles dans la population (E) sont constantes et si les sorties de chaque génération – au sens des individus entrés une même année – se font selon le même rythme, selon le même calendrier. On peut alors démontrer que l'effectif de la population (P) à un instant donné est égal au produit du nombre des entrées annuelles (E) par l'espérance de vie à

**Les politiques à mener contre l'inflation carcérale ne sont pas de même nature s'il s'agit d'une question d'entrées ou de durées.**



la naissance, ou, pour utiliser un langage plus général, par la durée moyenne de séjour dans la population ( $d$ , exprimée en années) :  $P = E \times d$ . Cette équation implique qu'une population stationnaire a un effectif constant.

Quand, au début des années 1980, nous avons appliqué les techniques de l'analyse démographique à la population des prisons françaises, l'Administration pénitentiaire disposait de données sur la population détenue, à une date donnée :

- sur sa structure selon différentes caractéristiques socio-démographiques et pénales ;
- sur les « mises sous écrou » (entrées en détention) et les libérations (sorties de détention).

Mais il faudra attendre le début des années 1990 pour disposer de statistiques sur les durées de détention individu par individu, et donc de la moyenne exacte de ces durées. Aussi a-t-on introduit ce que l'on a appelé l'indicateur de la durée moyenne de

détention, obtenu en divisant l'effectif moyen de détenus sur une année (stock) par le nombre d'entrées de l'année (flux) :  $d = P / E$ . En pleine période d'inflation carcérale (depuis 1975), il pouvait paraître osé de se référer ainsi au modèle de la population stationnaire. Si un tel indice ne permet évidemment pas de faire de l'analyse de conjoncture, calculé sur dix ou vingt ans, il apporte des informations fort précieuses sur les raisons de telle ou telle tendance. Ainsi avons-nous pu mettre en évidence que la période 1975–1995 de forte croissance du nombre de détenus (+ 100 %, contre 10 % pour la population globale de la France métropolitaine) était en fait constituée de deux phases bien différentes. Au cours des années 1970, l'inflation était due à une augmentation des entrées en détention (96 955 en 1980 contre 72 491 en 1974), la durée moyenne étant stable (autour de 4,6 mois). À partir des années 1980, les entrées se sont stabilisées, voire ont diminué, mais ce phénomène a été masqué par une croissance continue

*Le placement  
sous  
surveillance  
électronique  
est le dernier  
avatar  
de la prison  
du XXI<sup>e</sup> siècle.*

des durées de détention (7,6 mois en 1995). On conçoit aisément que les politiques à mener contre l'inflation carcérale ne sont pas de même nature s'il s'agit d'une question d'entrées ou une question de durées.

### Trouver des alternatives

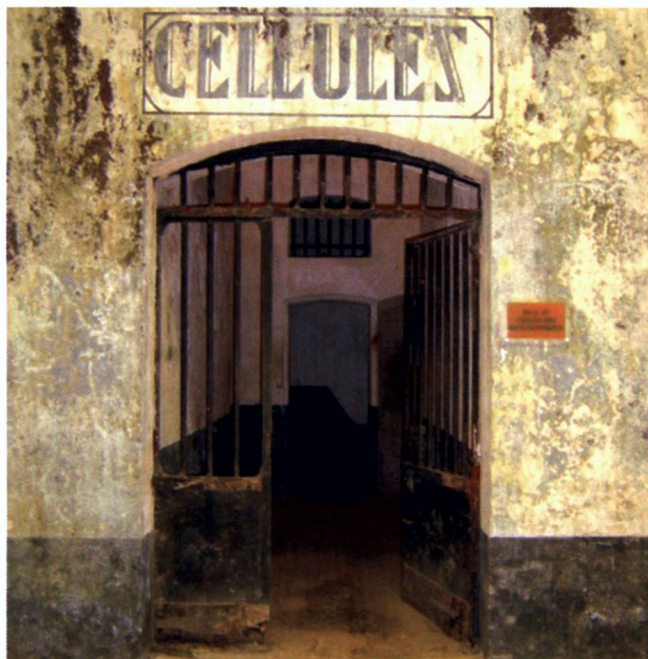
Avoir cette équation sous les yeux,  $P = E \times d$ , c'est se rappeler que l'on ne peut pas agir efficacement sans s'occuper de deux fronts : les entrées et les durées. Aussi avons-nous été amenés logiquement à construire une typologie des mesures et sanctions pénales alternatives à la privation de liberté qui s'en inspire. Est dite *alternative de première catégorie* toute mesure qui a pour conséquence de réduire le nombre d'entrées en détention. Il en est ainsi des peines d'emprisonnement avec sursis ou du travail d'intérêt général, quand la sanction est prononcée à l'encontre d'un prévenu libre. Ces alternatives peuvent être dites

*radicales*. En évitant l'entrée en détention, elles permettent au prévenu ou au condamné d'y échapper totalement, de ne pas connaître la prison.

Les *alternatives de deuxième catégorie* permettent de réduire la durée de la détention, ou plus précisément le temps passé sous écrou. C'est alors une mesure de moindre mal, elle est *partielle* ou *relative* : le recours à la prison n'a pas pu être évité, mais on fait en sorte de réduire le temps passé sous écrou par tel ou tel moyen. Dans ce schéma, les réductions de peine pour « bonne conduite » ou pour « gages sérieux de réadaptation sociale », les grâces, individuelles ou collectives, concernant des personnes détenues, sont des alternatives de deuxième catégorie. Il en est de même de la libération conditionnelle : elle ne réduit pas le temps d'exécution de la peine, mais elle permet une libération anticipée – avec levée d'écrou –, le reliquat de la peine étant alors effectué en « milieu ouvert » sous le contrôle du juge de l'application des peines. Ainsi la question de l'*aménagement des peines* apparaît bien comme partie intégrante de la problématique des alternatives à la privation de liberté. Mais il existe aussi des mesures qui réduisent le temps réellement passé derrière les murs sans levée d'écrou. C'est le cas des permissions de sortir, de la semi-liberté, du placement à l'extérieur, mesures qui, elles aussi, sont, de fait, des mesures alternatives à la prison mais qui n'évitent pas la mise sous écrou et ne réduisent pas la durée du temps passé sous écrou. C'est aussi dans ces *alternatives de troisième catégorie* que l'on doit classer le placement sous surveillance électronique, dernier avatar de la prison du XXI<sup>e</sup> siècle.

P.T.

Bagne de Cayenne.

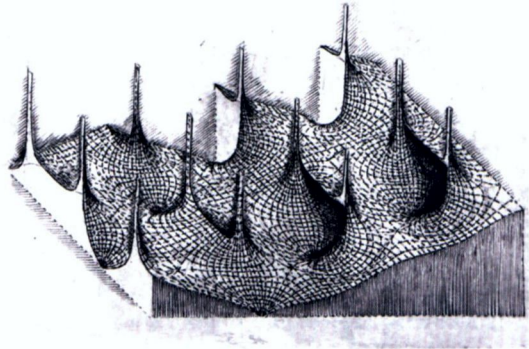


# Patrice Jeener

L'artiste Patrice Jeener, graveur sur cuivre inspiré par l'univers des courbes et des surfaces mathématiques, manie les équations algébriques aussi bien que le burin. Voici un florilège de ses œuvres, gravures, dessins ou aquarelles, qui expriment sa vision du monde mathématique.



*Le Serpent à trois têtes.*



*Fonction d'amplitude.*



*Le Chat.*



(© Patrice Jeener)

Les œuvres de Patrice Jeener peuvent être commandées sur : [www.librairie-archimede.com](http://www.librairie-archimede.com).

## Niveau de difficulté :

○ très facile

✓ facile

✓✓ difficile

✓✓ pas facile

✓✓✓ très difficile.

### HS2201 - Le vélocipède ✓

La roue de devant d'un vélocipède a 1 mètre de diamètre, la roue de derrière a 0,80 mètre.

**Quel est le chemin parcouru sur une route lorsque la petite roue a fait cinquante-cinq tours de plus que l'autre ?**



### HS2202 - Renversant ✓✓

Un nombre est composé de quatre chiffres dont la somme est 21 ; le chiffre des mille est la moitié de la somme des trois autres ; le chiffre des unités est la moitié du chiffre des dizaines ; enfin, si du nombre on retranche 3906, on obtient ce nombre renversé.

**Quel est ce nombre ?**

### HS2203 - L'impair perd ✓✓

Montrez que si un polynôme à coefficients entiers  $f(x)$  prend des valeurs impaires pour  $x = 0$  et pour  $x = 1$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de racines entières.

### HS2204 - Quatrième degré ✓✓✓

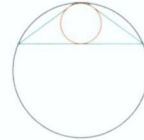
Résoudre l'équation  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$ .

Indication : on posera  $z = x - \frac{1}{x}$ .

### HS2205 - Trapèze isocèle ✓✓✓

Un trapèze isocèle de périmètre 64 cm est circonscriptible à un cercle et son cercle circonscrit a un rayon égal à 16 cm.

**Calculez les longueurs de ses côtés.**



### HS2206 - Égalité ✓✓

Démontrez que si  $x, y, z$  sont trois nombres tels que

$$\frac{x-y}{1+xy} + \frac{y-z}{1+yz} + \frac{z-x}{1+zx} = 0,$$

alors au moins deux des nombres sont égaux.

### HS2207 - Les racines de l'année ✓✓

Soient  $a, b, c$  les racines de l'équation  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ .

**a. Montrez que  $a, b, c$  sont distinctes.**

**b. Montrez que**

$$\frac{a^{2005} - b^{2005}}{a - b} + \frac{b^{2005} - c^{2005}}{b - c} + \frac{c^{2005} - a^{2005}}{c - a}$$

**est un nombre entier.**

### HS2208 - Radicalement ✓✓✓

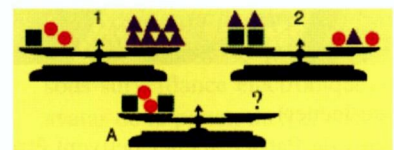
Trouvez les racines réelles de l'équation suivante :

$$\sqrt{x+2} \sqrt{x+2} \sqrt{x+2} \dots \sqrt{x+2} \sqrt{3x} = x.$$

### HS2209 - Équations sans lettres ✓

Les mêmes formes pèsent le même poids.

**Combien de triangles** faut-il pour équilibrer la balance A ?



## HS2210 - L'inconnue (1) o

Que vaut  $x$  si  $\frac{1}{5} = \frac{1}{7} + \frac{1}{x}$  ?

- A. 35/2    B. 2/35  
C. - 2/35    D. - 1/35  
E. - 35/2

## HS2211 - L'inconnue (2) o

Pour quelle valeur de  $x$  l'égalité

$$\frac{2}{x-3} = 0,5 \text{ est-elle vraie ?}$$

- A. - 3,5    B. 2,5  
C. 4,5    D. 7  
E. Une autre valeur que les précédentes

## HS2212 - La girafe de Charles X ✓

Saviez-vous que le Pacha d'Egypte offrit à Charles X une girafe qui débarqua à Marseille en 1826 ? Elle parcourut les huit cents kilomètres de route pour arriver au Jardin des plantes. Au début de l'expédition, la girafe avait froid et n'avancait que de dix-sept kilomètres par jour. Grâce au zoologue Geoffroy Saint-Hilaire, qui lui fit confectionner un manteau de toile cirée bordée de velours, on put lui en faire parcourir vingt-neuf.

**Sachant qu'elle mit quarante jours pour atteindre Paris, où reçut-elle son manteau ?**



Geoffroy Saint-Hilaire.

## HS2213 - Toi + Moi = Tante Eulalie ✓

J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Quand tu auras mon âge, nous aurons ensemble 108 ans. Mais aujourd'hui, nous n'avons ensemble que l'âge de Tante Eulalie, **c'est-à-dire... ?**

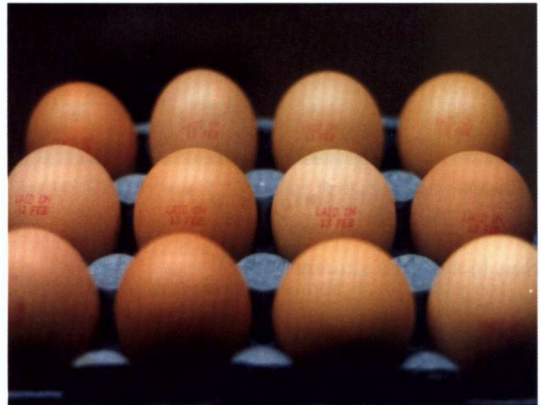
## HS2214 - Racine commune ✓/✓

Pour quelles valeurs de  $b$  les deux équations  $2005x^2 + bx + 5002 = 0$  et  $5002x^2 + bx + 2005 = 0$  admettent-elles une racine commune ?

## HS2215 - Les œufs ✓

Un jour, le cuisinier d'un puissant personnage, Afin de contenter trois filles du village, Qui demandaient des œufs, leur dit en les voyant : « *Je vais donner tous ceux que j'ai dans le moment.* »

Il donne la moitié d'abord à la première Et la moitié d'un œuf, par faveur singulière ; À la seconde aussi, il offre du meilleur coeur La moitié qui lui reste, avec la même faveur De la moitié d'un œuf dont la fille s'empare ; Enfin continuant son partage bizarre, Il donne à la troisième avec même amitié, De son troisième reste encore l'humble moitié, Plus la moitié d'un œuf : il eut donc l'avantage De tout distribuer. Dans cet heureux partage, Qui paraît singulier, **combien en avait-il**, Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil, Pour donner des moitiés à chaque jeune fille Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile ?





# Abonnez-vous à **tangente**

l'aventure mathématique

## \*\*\* Tangente le magazine des mathématiques \*\*\*

Pour mieux comprendre le monde : *Tangente*  
**Le seul magazine au monde**  
**sur les mathématiques.**  
 Tous les deux mois depuis 25 ans.

## \*\*\* Les hors-séries Bibliothèque Tangente \*\*\*

Ce sont de magnifiques ouvrages d'en moyenne 160 pages (prix unitaire 19,80€), richement illustrés, approfondissant le sujet du dernier numéro des HS « kiosque » de *Tangente*.  
 Disponibles  
 - chez votre libraire  
 - avec l'**abonnement SUPERPLUS**  
 - avec l'**abonnement Math++**  
 à un prix exceptionnel (33% de réduction).

## \*\*\* Tangente Sup \*\*\*

6 numéros par an (ou 4 dont 2 doubles), destinés à ceux qui veulent aller plus loin ou aux étudiants de premier cycle. Dans chaque numéro, un dossier : Surfaces, Groupes, Galois, Prédiction...

## \*\*\* Les hors-séries « kiosque » \*\*\*

4 fois par an, un hors-série « kiosque » d'au moins 52 pages, explorent l'actualité des grands dossiers du savoir ou de la culture mathématique.

### Derniers parus :

*Les matrices, Théorie des jeux*  
 Disponibles

- chez votre marchand de journaux
- avec l'**abonnement PLUS**
- avec l'**abonnement Math+**.

## \*\*\* Spécial Logique \*\*\*

**Nouveau !** Dans la collection *Tangente Jeux et Stratégie*, un trimestriel contenant près de 200 jeux : tests de logique, grilles à remplir, énigmes mathématiques...  
 Accès numérique gratuit pour les abonnés à la version papier.

## \*\*\* Tangente Éducation \*\*\*

Trimestriel qui traite de thèmes pédagogiques variés : les programmes, les TICE, la formation des enseignants, MathC2+, l'informatique et les sciences du numérique... **Permet l'accès à de nombreuses ressources en ligne.**



codif : BIB22

**Bulletin d'abonnement à retourner à :**  
 Espace Tangente - 80, Bd Saint-Michel - 75006 PARIS

Nom ..... Prénom .....

Établissement .....

Adresse .....

Code Postal ..... Ville .....

Profession ..... E-mail .....

Oui, je m'abonne à	FRANCE MÉTROPOLITAINE		EUROPE	AUTRES
	1 AN	2 ANS	Supplément par an	
<b>TANGENTE</b>	■ 36 €	■ 68 €	■ + 12 €	■ + 15 €
<b>TANGENTE PLUS</b>	■ 56 €	■ 108 €	■ + 20 €	■ + 25 €
<b>TANGENTE SUPERPLUS</b>	■ 88 €	■ 172 €	■ + 24 €	■ + 30 €
<b>TANGENTE SUP</b>	■ 25 €	■ 46 €	■ + 6 €	■ + 8 €
<b>TANGENTE ÉDUCTION</b>	■ 12 €	■ 22 €	■ + 2 €	■ + 3 €
<b>SPÉCIAL LOGIQUE</b>	■ 19,50 €	■ 37 €	■ + 8 €	■ + 10,50 €
<b>ABONNEMENT MATH+ *</b>	■ 105 €	■ 199 €	■ + 30	■ + 30 €
<b>ABONNEMENT MATH++ **</b>	■ 135 €	■ 260 €	■ + 32	■ + 32 €
<b>ABONNEMENT SOUTIEN ***</b>	■ 155 €	■ 300 €	■ + 35 €	■ + 35 €

\* Tous les titres avec les HS « kiosque ». \*\* Tous les titres avec les HS Bibliothèque. \*\*\* Tous les titres avec les deux HS.

Total à payer

**Je joins mon paiement par** (établissements scolaires, joindre bon de commande administratif) :

Chèque (uniquement payable en France)

Carte (à partir de 30 €) numéro :

Date et Signature: crypto:

Expiration le: ...../.....

**HS2201** - Désignons par  $x$  le nombre de tours effectués par la petite roue et prenons le périmètre de la petite roue comme unité. Lorsque la petite roue fait un tour, la grande roue effectue quatre cinquièmes de tour.

Nous avons donc  $x - \frac{4}{5}x = 55$ , d'où  $x = 275$ . Lorsque la petite roue a effectué 275 tours, la grande n'en a effectué que 220 et a donc parcouru  $220\pi$ , soit environ 691 mètres.

**HS2202** - Désignons respectivement par  $m, c, d, u$  les chiffres des mille, des centaines, des dizaines et des unités du nombre cherché.

Nous avons :

$$m + c + d + u = 21 \quad (1);$$

$$d = 2u \quad (2);$$

$$m = \frac{(c + d + u)}{2} = \frac{(c + 3u)}{2} \quad (3)$$

et

$$1000m + 100c + 10d + u - 3906 = 1000u + 100d + 10c + m$$

qui donne  $999m + 90c = 999u + 90d + 3906 \quad (4)$ .

Utilisons (2) et (3) dans (1) et (4). Nous obtenons :  $c + 3u = 14$  et  $1179c + 639u = 7812$ , qui se simplifie en  $131c + 71u = 868$ . Ce dernier système conduit à  $u = 3$  et  $c = 5$ , d'où l'on déduit  $d = 6$  et  $m = 7$ . On vérifie que  $7563 - 3906 = 3657$ .

**HS2203** - Soit  $n$  le degré du polynôme qu'on peut supposer strictement supérieur à 0 (sinon, le résultat est immédiat). Si  $f(0)$  est impair, on en déduit que le coefficient constant  $a_0$  est impair. Si  $f(1)$  est impair, on en déduit que la somme des coefficients  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$  est impaire et donc que la somme des coefficients  $a_1 + \dots + a_n$  est paire. Cette dernière somme comprend donc un nombre pair de coefficients impairs, et quelle que soit la valeur entière que prend  $x$ ,  $a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n$  sera pair et  $f(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n$  sera impair, donc différent de 0.

**HS2204** - On écrit l'équation proposée sous la forme

$$x^2 + 4x - 6 - 4\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0, \text{ qui donne}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0,$$

$$\text{d'où } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

En prenant  $z = x - \frac{1}{x}$ , on obtient  $z^2 + 4z - 4 = 0$ ,

qui a pour solutions  $-2(1 + \sqrt{2})$  et  $-2(1 - \sqrt{2})$ . On en déduit les quatre solutions de l'équation initiale :

$$-1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}; -1 - \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$-1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}; -1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

**HS2205** - Soient  $2a$  et  $2b$  les longueurs des côtés parallèles du trapèze. Son périmètre est alors égal à  $4(a + b)$ , d'où  $a + b = 16$ . On peut ensuite calculer la hauteur du trapèze, égale à  $-(ab)$ .

Désignons par  $x$  la distance IO entre les centres des cercles inscrit et circonscrit au trapèze.

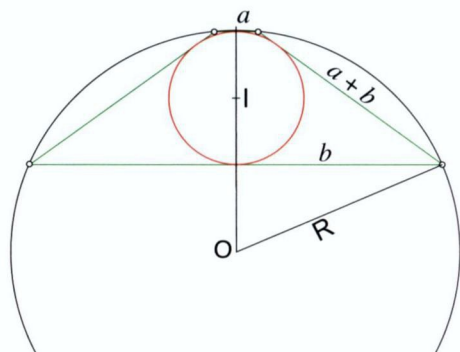
$$\text{On a } (x + -p)^2 = 16^2 - a^2 \text{ et } (x - -p)^2 = 16^2 - b^2.$$

En éliminant  $x$  de ces deux équations, on obtient  $(b^2 + a^2)^2 = 20a^2b^2 + 8ab(a^2 + b^2)$ , puis, en utilisant le fait que  $b = 16 - a$ , on arrive à l'équation  $3a^2 - 48a + 64 = 0$ , dont les solutions  $8 \pm 8 - \frac{6}{3}$

sont les valeurs de  $a$  et de  $b$  cherchées.

Les côtés du trapèze ont donc pour dimensions

$$16\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right), 16, 16\left(1 + 8\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ et } 16 \text{ cm.}$$



**HS2206 -** De l'équation de l'énoncé, on déduit l'égalité suivante :

$$(1 + yz)(1 + zx)(x - y) + (1 + xy)(1 + zx)(y - z) + (1 + xy)(1 + yz)(z - x) = 0,$$

équivalente à

$$(y - x)(z - y)(x - z) = 0.$$

Cette dernière égalité n'est vérifiée que si deux au moins des trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont égaux.

**HS2207 -**

a. Nous avons  $a + b + c = 1$ , et  $ab + bc + ca = -1$ . Supposons que l'on ait par exemple  $b = c$ .

On aurait alors  $a = 1 - 2b$  et  $2(1 - 2b)b + b^2 = -1$ , c'est-à-dire  $3b^2 - 2b - 1 = 0$ , qui a pour solutions

$$b = 1 \text{ et } b = -\frac{1}{3}.$$

On vérifie que ces valeurs de  $b$  et de  $c$  conduisent à des valeurs de  $a$  telles que les triplets  $(a; b; c)$  ne vérifient pas l'équation  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ , d'où une contradiction.

b. On démontre par récurrence que pour  $n$  entier

$$\text{naturel, } \frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a} \text{ est toujours un}$$

entier. On vérifie que pour  $n = 0$ , l'expression vaut 0, pour  $n = 1$ , elle vaut 3, pour  $n = 2$ , qu'elle vaut 2 (en effet,  $2a + 2b + 2c = 2$ ) et pour  $n = 3$ , qu'elle vaut 5.

Ensuite, on utilise le fait que  $a^3 = a^2 + a + 1$ ,  $b^3 = b^2 + b + 1$ ,  $c^3 = c^2 + c + 1$  pour établir l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{a^{k+3} - b^{k+3}}{a - b} + \frac{b^{k+3} - c^{k+3}}{b - c} + \frac{c^{k+3} - a^{k+3}}{c - a} = \\ & \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a - b} + \frac{b^{k+2} - c^{k+2}}{b - c} + \frac{c^{k+2} - a^{k+2}}{c - a} + \\ & \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} + \frac{b^{k+1} - c^{k+1}}{b - c} + \frac{c^{k+1} - a^{k+1}}{c - a} + \\ & \frac{a^k - b^k}{a - b} + \frac{b^k - c^k}{b - c} + \frac{c^k - a^k}{c - a}, \text{ vraie pour tout } k \geq 1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{a^{2005} - b^{2005}}{a - b} + \frac{b^{2005} - c^{2005}}{b - c} + \frac{c^{2005} - a^{2005}}{c - a}$$

est un nombre entier (ce nombre compte quelque... 531 chiffres !).

**HS2208 -** Désignons par  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  les nombres réels positifs tels que  $3x = y_1^2$ ,  $x + 2y_1 = y_2^2$ ,  $x + 2y_2 = y_3^2 \dots x + 2y_{n-2} = y_{n-1}^2$ ,  $x + 2y_{n-1} = y_n^2$ . Nous avons  $x = y_n$ .

Si on a  $x > y_1$ , alors  $y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_{n-1} > y_n$ , ce qui contredit l'égalité  $x = y_n$ . On a donc  $x = y_1 = -(3x)$ , soit  $x^2 = 3x$ . Cette équation possède deux solutions :  $x = 0$  et  $x = 3$ .

**HS2209 -** De l'égalité (2), on déduit que :

2 ronds rouges = 2 carrés + 1 triangle.

En remplaçant les deux ronds rouges dans l'égalité (1), on obtient :

$$3 \text{ carrés} + 1 \text{ triangle} = 7 \text{ triangles,}$$

$$\text{d'où } 3 \text{ carrés} = 6 \text{ triangles,}$$

$$1 \text{ carré} = 2 \text{ triangles}$$

$$\text{et } 1 \text{ rond rouge} = 2,5 \text{ triangles.}$$

On en déduit qu'il faut 9 triangles pour équilibrer la balance A.

**HS2210 -** La réponse est  $\frac{35}{2}$ .

**HS2211 -** La réponse est 7.

**HS2212 -** Si  $x$  désigne le nombre de jours de voyage restants lorsque la girafe reçoit son manteau, nous avons l'équation  $29x + 17(40 - x) = 800$ , qui a pour solution  $x = 10$ .

Nous sommes donc à 10 jours de Paris, soit approximativement à Pouilly-en-Auxois.

**HS2213 -** Désignons par  $m$  mon âge et par  $t$  le tien.

Nous avons :  $m = 2[t - (m - t)]$ , d'où  $m = 4t/3$ .

D'autre part,  $m + [m + (m - t)] = 108$ , donc  $3m - t = 108$ .

On en déduit que  $t = 36$  et  $m = 48$ . Tante Eulalie a donc 84 ans.

**HS2214 - S -** On a :

$$b = \frac{-2005x^2 - 5002}{x} = \frac{-5002x^2 - 2005}{x}$$

On en déduit les deux valeurs possibles pour  $b$  :  $-7007$  (pour  $x = 1$ ) et  $7007$  (pour  $x = -1$ ).

**HS2215** - Désignons par  $x$  le nombre d'oeufs.

Nous avons :  $x = 2 \times [ 2 \times (2 \times 1/2 + 1/2) + 1/2 ]$ , soit  $x = 7$ . On vérifie que la première jeune fille reçoit

$2,5 + 0,5 = 4$  oeufs, la seconde  $1,5 + 0,5 = 2$  oeufs et la troisième  $0,5 + 0,5 = 1$  oeuf.

**HS2216** - De (1) on tire  $x = 5 - y - z$ , puis en remplaçant  $x$  dans (2),  $(5 - y - z)y + yz + (5 - y - z)z = 3$ . On en déduit  $y^2 + y(z - 5) + z^2 - 5z + 3 = 0$ . Pour que  $y$  soit un nombre réel, il est nécessaire que le discriminant de cette équation en  $y$  soit positif :

$$(z - 5)^2 - 4(z^2 - 5z + 3) \geq 0$$

$$-3z^2 + 10z + 13 \geq 0$$

$$3z^2 - 10z - 13 \leq 0$$

$$(3z - 13)(z + 1) \leq 0$$

$-1 \leq z \leq 13/3$ . La plus grande valeur possible de  $z$  est donc  $13/3$ , et cette valeur est atteinte pour  $x = y = 1/3$ .

**HS2217** - L'équation s'écrit  $y^2 + xy + (x^2 - 2) = 0$ .

Si on résout cette équation par rapport à  $y$ , on obtient

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{8-3x^2}}{2}$$

qui est rationnel si et seulement si  $8 - 3x^2$  est le carré d'un nombre rationnel.

Si  $x = \frac{p}{q}$  ( $p$  et  $q$  entiers non nul premiers entre eux),

l'entier  $8q^2 - 3p^2$  doit donc être un carré. On montre que ceci est impossible en considérant le reste dans la division de ce nombre par 3.

**HS2218** - On montre que  $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$  ;

$$1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} ; 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1} ; \dots$$

L'équation peut s'écrire sous la forme  $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ ,

$a, b, c, d$  étant des entiers qui dépendent du nombre  $n$  de traits de fraction. Une équation de ce type, qui se ramène à une équation du second degré, possède au plus deux racines réelles. Comme on nous demande de résoudre une équation où le nombre  $n$  de traits de fraction n'est pas connu, on peut supposer que la solution ne dépend pas de celui-ci, c'est-à-dire que l'on a

$1 + \frac{1}{x} = x$ , ou encore  $x^2 - x - 1 = 0$ , équation bien connue dont les solutions sont données

$$\text{par } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**HS2219** - La bonne réponse est D. L'équation mise sous la forme  $x^6 + 8 = 3x^5 + 6x^3 + x$  montre qu'il n'existe pas de racine réelle négative (pour  $x$  négatif, le membre de gauche serait strictement positif et le membre de droite négatif). L'équation mise sous la forme  $x^6 - 3x^5 - 6x^3 - x = -8$  montre qu'il existe au moins une valeur réelle positive. En effet, posons  $f(x) = x^6 - 3x^5 - 6x^3 - x$ . On a  $f(0) = 0$  et  $f(1) = -9$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous indique qu'il existe une valeur  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  pour laquelle  $f(t) = -8$ .

**HS2220** - En supposant  $x \neq -1$ , l'équation est équivalente à

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$$

$(x^2 + 3x + 3)(x^2 - x - 1) = 0$ , qui a pour solutions

$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**HS2221** - Il est clair que  $y \neq 0$  et  $z \neq 0$ .

De  $x/y = x - z$  (1) et de  $x/z = x - y$  (2), on tire, pour  $y \neq 0$  et  $z \neq 0$ ,  $x = xy - yz$  et  $x = xz - yz$ , d'où  $x(y - z) = 0$ .

On ne peut avoir  $x = 0$  (car on aurait  $z = 0$  par (1) et  $y = 0$  par (2)). On a donc  $y = z = k$ , où  $k$  est un réel non nul. Il s'ensuit que  $x = xk - k^2$ , soit  $x(k - 1) = k^2$ .

Si  $k = 1$ , les équations initiales n'ont pas de solution. Si  $k \neq 1$ ,  $x = k^2/(k - 1)$ . L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des triplets de réels  $(k^2/(k - 1); k; k)$  où  $k$  est un réel différent de 0 et de 1.

Déterminons les bornes de  $x$ .

Soit  $a$  un réel.  $x$  prend cette valeur si et seulement si  $k^2/(k - 1) = a$ , c'est-à-dire si et seulement si l'équation  $k^2 - ak + a = 0$  admet des solutions réelles. Le discriminant de l'équation vaut  $a(a - 4)$ . Il en découle que  $x \geq 4$  ou  $x \leq 0$ .

**HS2222** - Il existe un premier découpage évident, en trois rectangles de dimensions 1 et  $1/3$  (voir figures ci-dessous). Il en existe un deuxième qui conduit à l'équation  $x = 1 - x/0,5$ , dont la solution est  $x = 2/3$ . Une troisième solution est moins évidente à trouver. On établit que  $a = x - x^2$  et que  $b = (1 - x) / x$ , et on arrive à l'équation du troisième degré :  $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ , dont une valeur approchée de la solution réelle est  $x \approx 0,56984029$ .

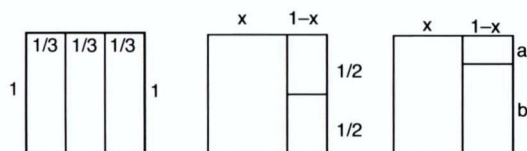


Illustration de John Tenniel.

## TANGENTE

Publié par Les Éditions POLE  
SAS au capital de 42 000 euros  
Siège social : 80 bd Saint-Michel - 75006 Paris  
Commission paritaire : 1016 R 80883  
Dépôt légal à parution

**Directeur de Publication  
et de la Rédaction**  
Gilles COHEN

**Rédacteur en chef de ce numéro**  
Hervé LEHNING

**Secrétaire de rédaction**  
Gaël OCTAVIA,  
Karine BRODSKY (nouvelle édition)

**Ont collaboré à ce numéro**  
Stella BARUK, Élisabeth BUSSEY, Francis CASIRO,  
Joseph CÉSARO, Michel CRITON, Denis GUEDJ,  
Jean-Christophe NOVELLI, Marie-José PESTEL,  
Claude SAUSER, Daniel TEMAM, Norbert VERDIER,  
Alain ZALMANSKI

**Maquette & Iconographie**  
Thibaud DI DOMENICO, Laurence GAUTHIER,  
Dominique SOTLAR, Patrice JEENER (gravures)  
Autres photos : droits réservés

**Publicité, abonnements**  
Marie DURAND md@poleditions.com  
01 47 07 51 15 - Fax : 01 47 07 88 13

**Achévé d'imprimer**  
**pour le compte des Éditions POLE**  
**sur les presses de l'imprimerie SPEI à Pulnoy**  
**Imprimé en France**  
**Dépôt légal — Novembre 2012**



# Les équations algébriques

- Résolution exacte
- Résolution graphique
- Résolution approchée
- Au-delà des équations
- Jeux, problèmes et énigmes policières

Édition augmentée 2012

À Babylone, en Égypte ou en Grèce, l'homme antique est confronté à des partages de champs ou d'héritages qui le conduisent déjà à résoudre des équations algébriques, parfois sans le savoir. De ces problèmes de la vie quotidienne naîtra l'inconnue. Depuis, les équations se résolvent aussi pour elles-mêmes, sans souci du concret. Afin de percer leur mystère, le mathématicien affûte ses méthodes. Il doit accepter l'insuffisance de la stricte algèbre, ne dédaigner ni les ressources de la géométrie, ni le recours aux approximations. Cette quête le mènera aux confins de l'univers des nombres, dans des mondes peuplés d'irrationnels, de transcendants, d'imaginaires. Elle sera l'origine de révolutions mathématiques, telles que la théorie de Galois.



Prix : 19,80 €

EDITIONS  
**POLE** 