

MAITRISER LES MATHS



4^{ème} ANNEE DES HUMANITES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

EDITION REVUE, CORRIGEE ET AUGMENTEE

**BATODISA Vuma G.
KASONGO Wetshimemba J.
MABAYA Kahungu Nathan**

**MASAMBA Salavoka J.
MBALA Moke G.
MPAKASA Kibulu D.**

**NKWESE Mazoni G
OSOBO Mupepele J
YAMBO Kamuanga**

EDITIONS LOYOLA 2024

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, y compris la photographie et les microfilms sont réservés aux éditions Loyola.

© **EDITIONS LOYOLA 2024**

Agrément : MINEPSP/PMD/84/SG/80/1064/2004

Dépôt Légal : N° B 3.0280-57136

ISBN : 99951-12-709

Kinshasa – République Démocratique du Congo

AVANT-PROPOS

Le gouvernement de la République Démocratique du Congo a élaboré depuis 2018 des programmes éducatifs innovés dans le domaine d'apprentissage des sciences pour se conformer aux instruments juridiques nationaux et internationaux. Le secondaire général a été transformé en « Cycle Terminal de l'Education de Base » (CTEB). La nouvelle nomenclature des classes qui viennent après le cycle terminal de l'éducation de base a été communiquée par l'arrêté ministériel MINEPSP/CABMIN/598/2019 du 3 juillet 2019. La sixième année secondaire est désormais appelée **Quatrième année des Humanités**.

Et par l'arrêté ministériel N°MINEPST/CABMIN/600/2019 du 3 juillet 2019, le Ministère de l'Enseignement Primaire, Secondaire et Technique a mis en place la section scientifique unique dénommée « **Section scientifique** » qui remplace la section scientifique dans son ancienne configuration comprenant les options « Math-physique » et « Chimie-biologie ».

Les programmes éducatifs du Domaine d'Apprentissage des Sciences pour la classe de quatrième année des humanités scientifiques sont validés et généralisés par l'arrêté ministériel N°MINEPST/CABMIN/070/2021 du 20 octobre 2021. Le régime pédagogique précise pour la classe de quatrième année des humanités scientifiques que le sous-domaine des Mathématiques compte sept heures par semaine dont trois heures d'Algèbre et Analyse, deux heures de géométrie, une heure de probabilité et une heure de géométrie descriptive.

Le manuel « Maîtriser les Maths 6 » conçu pour les sixièmes années Math-physique et Chimie-biologie de l'époque est revu, corrigé et augmenté pour le conformer aux nouveaux savoirs essentiels. Il devient « **Maîtriser les Maths 4H** » pour la classe de **quatrième année des Humanités Scientifiques et Technique**. Il fait suite aux manuels « Maîtriser les maths 7^{ème}_{EB} », « Maîtriser les maths 8^{ème}_{EB} », « Maîtriser les maths 1H », « Maîtriser les maths 2H », « Maîtriser les maths 3H », et « Maîtriser les maths 3.2H ». Il s'adresse essentiellement aux sections scientifiques et techniques dans une approche par situations pour atteindre des compétences.

La première partie consacrée à l'algèbre et l'analyse traite des Nombres Complexes (notions, constructions, représentations, opérations, équations, transformations du plan complexe), des fonctions logarithmiques et exponentielles (notions, dérivées, équations, inéquations, applications dans

d'autres domaines), de développement en séries (MacLaurin et Taylor), des différentielles et intégrales (notions, interprétation géométrique, primitive d'une fonction, intégrales indéfinies et définies, méthodes d'intégration, calculs des aires et volumes et notions d'équations différentielles).

La deuxième partie se focalise sur la probabilité pour l'organisation et la gestion des données. Elle comprend les notions de probabilité et les événements, les probabilités conditionnelles, les variables aléatoires, l'espérance mathématique, la variance, l'écart-type ainsi que la loi binomiale.

La géométrie analytique constitue la troisième partie de ce manuel. Elle commence par les courbes du second degré, les courbes paramétrées, lieux géométriques, les coniques pour finir avec la géométrie analytique dans l'espace. Le plan considéré dans cet ouvrage est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tandis que l'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour ne pas trop alourdir le présent manuel, la géométrie descriptive n'y a pas été traitée. Elle fera objet d'un autre volume. « Maîtriser les maths 6 » a commencé comme une œuvre de cinq auteurs. Trois ont tiré leur révérence de ce monde, à savoir messieurs **Godefroid Mbala Moke**, **Dino Mpakasa Kibulu** et **Jean-Batiste Yambo Kimunga** à qui les éditions Loyola rendent un vibrant hommage.

Pour revoir, corriger et augmenter le manuel afin de l'adapter aux savoirs essentiels des programmes innovés dans le Domaine d'Apprentissage des Sciences, de nouveaux auteurs ont mis la main à la pâte, à savoir : messieurs **José Kasongo Wetshimemba**, **Nathan Mabaya Kahungu**, **Grâce Nkwese Mazoni** et **Jacques Osobo Mupepele**. Quelques enseignants et inspecteurs de l'enseignement sont venus en appui pour qu'avec les auteurs une substance de qualité marque davantage ce manuel. Il s'agit des messieurs **Pierre Claver Boma Kitir-Kambamba**, **Paul Dianzenza Kapela** et **Nicolas Lele Ngakini** à qui les éditions Loyola expriment toute leur reconnaissance.

En dépit des efforts de pertinence et des attentions soutenues même sur les moindres détails, l'œuvre humaine est souvent entachée des erreurs ou des imperfections. Ainsi les éditions Loyola demandent-elles aux usagers de « *Maîtriser les Maths 4H* » de leur communiquer toutes observations et remarques susceptibles d'améliorer la prochaine version de l'ouvrage.

Augustin Kalubi sj

INTRODUCTION

Le succès aux épreuves nationales de l'Examen d'Etat, la réussite dans les études supérieures et la recherche au service d'autres disciplines préoccupent tout élève finaliste des humanités scientifiques et techniques. Il faut pour cela la maîtrise des définitions, des théorèmes fondamentaux et des techniques autour desquels s'articule l'ensemble du cours de mathématique en classe terminale.

Le manuel « **Maîtriser les maths 4H** » est conçu comme un instrument de travail efficace et rigoureux, en conformité avec le programme national en vigueur en République Démocratique du Congo. Il développe les matières relatives à l'algèbre et à l'analyse, à la probabilité et à la géométrie analytique.

Chaque chapitre est constitué des objectifs, des activités (exemples de situation) relatives aux compétences attendues, du cours proprement dit et des exercices résolus qui permettent à l'apprenant de maîtriser les savoirs essentiels correspondants et de parfaire son entraînement à la recherche. Des exercices d'auto-évaluation sont proposés à la fin de chaque chapitre, éventuellement avec des réponses pour rassurer l'apprenant. Une série de questions posées aux épreuves nationales de l'Examen d'Etat et aux concours d'admission dans certaines universités est reprise en annexe pour permettre à l'enseignant et à l'apprenant de pénétrer la manière dont ces questions sont conçues et présentées, et de se préparer en connaissance des causes.

Les enseignants y trouveront des textes de base qui soutiendront leur approche par des situations pour faire acquérir à leurs apprenants les compétences attendues à l'issue de la quatrième année des humanités scientifiques et techniques. Les apprenants y trouveront des informations qui portent sur des notions et résultats de base à connaître, à maîtriser et à savoir en tirer grand profit.

Tout en visant une solide formation mathématique adaptée au caractère propre des sections scientifiques et techniques, le manuel développe largement la part réservée au travail personnel de l'apprenant.

La mouture de ce manuel a été l'œuvre du **Père Pierre LECUIT, Sj** qui a tiré sa révérence de ce monde et à qui nous rendons un hommage déférent. Le présent ouvrage a vu le jour grâce à l'impulsion et au soutien matériel, intellectuel et technique du **Père Augustin KALUBI, Sj**. Que les collègues enseignants qui ont bien accepté d'expérimenter et de critiquer ce manuel avant sa forme actuelle trouvent ici l'hommage de notre reconnaissance. L'œuvre humaine n'étant jamais parfaite, les critiques et suggestions des usagers de ce manuel seront bien accueillies pour améliorer sa prochaine édition.

Les auteurs

QUELQUES SYMBOLES ET ABREVIATIONS UTILISES

$\bar{z}$	Conjugué de z
$\int$	Symbole d'intégration ou signe somme
$\int_a^b f(x)$	Intégrale définie de $f(x)$ entre a et b
$\overline{AB \cdot CD}$	Produit scalaire
$\overline{AB}$	Mesure algébrique du vecteur AB
δ	Désigne la distance
∂	Binôme caractéristique de l'équation générale du second degré
θ	Angle des axes de coordonnées
(A, a)	Point massif pondéré ou point A affecté de coefficient a
$\{ (A_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n \}$	Ensemble de n points pondérés
$ z $	Module du nombre complexe z
$\text{Arg } z$	Argument de z
BAC	Baccalauréat européen
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C} - \{0\}$	Ensemble des nombres complexes non nuls
C.P.	Condition préalable
E.R.M.	Ecole royale militaire
E_ϵ	Ellipse évanouissant
E_i	Ellipse imaginaire
E_r	Ellipse réelle
ER	Exercice Résolu
$\exp_a(x)$	Fonction exponentielle de base a
$f \sim g$	f est équivalente à g
F.A.S.	Faculté des arts et des sciences.
FPM	Faculté polytechnique de Mons
Hd	Hyperbole dégénérée en deux droites réelles sécantes
H_{nt}	Hyperbole non transverse
Hpd	Hyperbole proprement dite

H_t	Hyperbole transverse
L	Longueur d'une courbe
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls
Ppd	Parabole proprement dite
$Ppd-$	Parabole proprement dite tournée vers les x négatifs
$Ppd+$	Parabole proprement dite tournée vers les x positifs
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}^*$	Ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des réels non nuls
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
R.A.	Rapport anharmonique
R.C.A	Relation aux coefficients angulaires
U.L.B.	Université Libre de Bruxelles
u.s.	Unité de surface
u.v.	Unité de volume
UCL	Université Catholique de Louvain
ULG	Université de Liège
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{Z}^*$	Ensemble des entiers non nuls

PREMIERE PARTIE

ALGEBRE ET ANALYSE

CHAPITRE I : L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

A. OBJECTIFS

1. Définir un nombre complexe
2. Distinguer et déterminer les parties réelles et imaginaires d'un complexe.
3. Calculer dans $\mathbb{C}$
4. Utiliser les propriétés du conjugué et du module d'un complexe pour résoudre des problèmes divers.
5. Représenter ponctuellement un nombre complexe non nul
6. Passer d'une forme d'un nombre complexe à une autre.
7. Utiliser la forme trigonométrique d'un complexe pour effectuer des opérations telles que le produit et le quotient de deux complexes non nuls.
8. Calculer la puissance n^{e} et la racine n^{e} d'un nombre complexe non nul.
9. Linéariser les polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.
10. Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$

B. ACTIVITES

1. La professeure Buya Nalu entre dans sa classe de 4^{ième} des humanités scientifiques et met au tableau les équations suivantes :

a) $8x^2 = 14x + 15$

b) $x^2 - 3\sqrt{3}x = 30$

c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

Elle demande à ses élèves de les résoudre dans $\mathbb{R}$.

2. Ekanga Léonie, apprenante de la 4^{ième} année des humanités scientifiques du lycée Toyokana à Kinshasa résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$. Elle constate que son discriminant est négatif et conclut que l'équation n'a pas de solution réelle. Son professeur lui propose de continuer la résolution en remplaçant -1 par i^2 dans son discriminant.

a) Le professeur demande à la classe si les solutions trouvées par l'apprenante Ekanga Léonie sont des nombres réels.

b) En utilisant le même raisonnement, résous les équations suivantes :

a) $x^2 = -3x - 4$

c) $3x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$

d) $25x^2 + 64 = 0$

3. Décompose en facteurs en tenant compte de $i^2 = -1$ les expressions suivantes :

a) $x^2 + 16$

c) $x^4 - 81$

b) $8x^2 - 2x - 3$

d) $x^2 - x + 1$

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

I.1. DEFINITIONS

a. Un nombre complexe est tout nombre de la forme $z = a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i est appelé « unité imaginaire » ayant la propriété $i^2 = -1$.

b. Etant donné le nombre complexe $z = a + bi$,

a est appelé partie réelle de z et est noté $\text{Re}(z)$.

b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\text{Im}(z)$.

c. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

On a : $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$

d. Dans le nombre complexe $z = a + bi$,

- si $b = 0$ alors $z = a$ est dit « réel »

- si $a = 0$ alors $z = bi$ est dit « imaginaire pur »

- si $a = b = 0$ alors $z = 0$ est dit « complexe nul »

Exemples

$z = 2$, $z = -143$, $z = \sqrt{3}$ sont des réels.

$z = 3i$, $z = -\sqrt{5}i$, $z = \frac{1}{2}i$ sont des imaginaires purs.

$z = 0$ est le complexe nul.

e. Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes z et z' sont égaux lorsque leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont aussi égales.

On écrit :

$$(z = z') \Leftrightarrow (\text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z'))$$

Exemple

$z = x + 5i$ et $z' = -2 + yi$ sont égaux si et seulement si ($x = -2$ et $y = 5$)

f. Opposé d'un nombre complexe

L'opposé du nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe

$$-z = -a - bi$$

Exemple

L'opposé de $z = -9 + 4i$ est le complexe $-z = 9 - 4i$

g. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par

$$\bar{z} = a - bi.$$

Exemples

- $(z = 3 + 2i) \Rightarrow (\bar{z} = 3 - 2i)$
- $(z = 3) \Rightarrow (\bar{z} = 3)$
- $(z = 2 - 3i) \Rightarrow (\bar{z} = 2 + 3i)$
- $(z = -5i) \Rightarrow (\bar{z} = 5i)$
- $(z = -\frac{3}{2} + i) \Rightarrow (\bar{z} = -\frac{3}{2} - i)$
- $(z = -2) \Rightarrow (\bar{z} = -2)$

Conséquences

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, on a :

* $\mathcal{R}e(-z) = -\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(-z) = -\mathcal{I}m(z)$

* z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

* z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

h. Puissances entières de i

D'après la définition des puissances, on a :

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \quad \dots$$

De manière générale,

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i$$

Nous constatons que l'ensemble $\{-1; -i; i; 1\}$ est constitué de toutes les puissances entières de i .

Dans la pratique, pour calculer i^n , il suffit d'effectuer la division euclidienne de n par 4. Si r est le reste de cette division alors $i^n = i^r$.

Exemples

a) $i^{128} = i^0 = 1$

b) $i^{1443} = i^3 = -i$

c) $i^{543126} = i^2 = -1$

d) $i^{49} = i^1 = i$

Exercices

N° 1. Calcule :

a) i^{728}	c) i^{40327}	e) $i^{37} + i^{26}$
b) i^{1143}	d) $i^{543\,126}$	f) $i^7 - 5i^{129} + 4i^{99} - 6i^{1111} + 47i^{20031}$

N° 2. Soit $A = \{-1; -i; i; 1\}$ vérifie que $(A, \cdot)$ est un groupe commutatif.

I.2. OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$

Soient deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

I.2.1. ADDITION ET SOUSTRACTION

a) La somme de z et z' est le complexe

$$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$\text{Exemple : } (5 + 9i) + (-3 - 2i) = 5 + 9i - 3 - 2i = 5 - 3 + 9i - 2i \\ = 2 + 7i$$

b) La différence de z et z' est le complexe

$$z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$$

$$\text{Exemple : } (35 - 19i) - (-3 - 12i) = 35 - 19i + 3 + 12i \\ = 35 + 3 - 19i + 12i = 16 - 7i$$

I.2.2. MULTIPLICATION

Le produit de deux nombres complexes s'effectue en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction, et en tenant compte des puissances de i

$$\text{Exemple : } (3 - i) \cdot (-7 + 2i) = -21 + 6i + 7i - 2i^2 \\ = -21 + 6i + 7i + 2 = -19 + 13i$$

Remarque : si $z = a + bi$, alors $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

I.1.3. DIVISION

L'inverse d'un complexe $z = a + bi$ est le complexe z^{-1} , défini par :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Exemple : si $z = 3 - i$ alors $z^{-1} = \frac{3+i}{3^2+(-1)^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

b. Pour diviser deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

Exemples

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2+i}{3+i} &= \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} & \bullet \frac{1}{(1-i)(2+i)} &= \frac{1}{3-i} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i & \bullet \frac{6-4i}{7i} &= \frac{(6-4i)(-i)}{7i(-i)} = \frac{4-6i}{7} = \frac{4}{7} - \frac{6}{7}i \\ & & \bullet \frac{4i}{\sin\alpha + i\cos\alpha} &= \frac{4i(\sin\alpha - i\cos\alpha)}{(\sin\alpha + i\cos\alpha)(\sin\alpha - i\cos\alpha)} \\ & & &= 4\cos\alpha + 4i\sin\alpha \end{aligned}$$

Exercice

N° 3. En considérant les lois $+$, $\times$ et $\cdot$ définies dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{R}$$

$$* (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$* (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

$$* k(a, b) = (ka, kb)$$

a) vérifie que : $*$ ($\mathbb{C}$, $+$, $\times$) est un corps commutatif

$*$ ($\mathbb{C}$, $+$, $\cdot$) est un espace vectoriel réel de dimension deux dont une base est $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

b) Montre que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes et que $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

I.3. PROPRIETES DES NOMBRES COMPLEXES CONJUGUES

Pour tous nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on a :

$$P_1 : \bar{\bar{z}} = z \quad P_3 : \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad P_5 : \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (\text{avec } z' \neq 0)$$

$$P_2 : \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad P_4 : \overline{-z} = -\bar{z}$$

$$P_6 : z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad , \quad z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

En général, $z_1, z_2, \dots, z_n$ étant des nombres complexes, on a

$$P_{2'} : \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$$

$$P_{3'} : \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$$

En particulier si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ alors $\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercices résolus

ER 1. Trouve la forme cartésienne de :

a) $z = (3 + i)^2 - (7 + 3i)(4 - 3i)$

b) $z = (5 - 8i)(2i - 5)(-\frac{1}{2}i)$

Résolution

a) $z = 9 + 6i + i^2 - (28 - 21i + 12i - 9i^2)$
 $= -29 + 15i$

b) $z = (10i - 25 - 16i^2 + 40i)(-\frac{1}{2}i) = 25 + \frac{9}{2}i$

ER 2. Calcule l'opposé et l'inverse de chaque nombre complexe de l'exercice précédent.

Résolution

a) $* - z = 29 - 15i$ $* z^{-1} = \frac{-25}{(-29)^2 + (15)^2} - \frac{15}{(-29)^2 + (15)^2} i$ $= \frac{-29}{1066} - \frac{15}{1066} i$	b) $* - z = -25 - \frac{9}{2}i$ $* z^{-1} = \frac{25}{(25)^2 + (\frac{9}{2})^2} - \frac{\frac{9}{2}}{(25)^2 + (\frac{9}{2})^2} i$ $= \frac{100}{2581} - \frac{18}{2581} i$
--	--

ER 3. Détermine les nombres réels r et s de manière qu'on ait

$$(r + 3i)(3 - si) = 25i$$

Résolution

Nous trouvons la forme cartésienne du nombre complexe du premier membre et nous appliquons le principe d'égalité de deux nombres complexes.

$$[(r + 3i)(3 - si) = 25i] \Leftrightarrow [3(r + s) + (9 - rs)i = 25i]$$

$$\Leftrightarrow (r + s = 0 \quad \text{et} \quad 9 - rs = 25)$$

$$\Leftrightarrow (r = -s \quad \text{et} \quad s^2 = 16)$$

$$\Leftrightarrow [(r = -4 \text{ et } s = 4) \text{ ou } (r = 4 \text{ et } s = -4)]$$

ER 4. Soit $u = (r - 1) - (2 - s)i$ un nombre complexe.

Détermine les nombres réels s et r tels qu'on ait l'égalité $u = z$ lorsque :

$$z = (3i - 2)^2 + 5$$

Résolution

$$z = -12i.$$

$$[(r - 1) - (2 - s)i = 12i] \Leftrightarrow (r - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2 - s = 12)$$

$$\Leftrightarrow (r = 1 \quad \text{et} \quad s = -10)$$

ER 5. Soit $u = x + yi$ un nombre complexe. Détermine le(s) couple(s) des réels (x, y) pour le(s)quel(s) le nombre complexe z n'est pas défini.

$$z = \frac{1+3i}{(u-1)(2-u)}$$

Résolution

Le nombre complexe donné n'est pas défini lorsque son dénominateur est nul.

$$\begin{aligned}(u-1=0) &\Leftrightarrow (x+yi-1=0) \\ &\Leftrightarrow (x=1 \text{ et } y=0) \quad \text{ou} \quad (2-u=0) \Leftrightarrow (2-x-yi=0) \\ &\Leftrightarrow (x=2 \text{ et } y=0)\end{aligned}$$

Les couples cherchés sont $(1, 0)$ et $(2, 0)$.

ER 6. A quelle condition le carré de $z = a + bi$ est-il un imaginaire pur ?

Résolution

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(z \text{ est imaginaire pur}) \Leftrightarrow (a^2 - b^2 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (|a| = |b|)$$

ER 7. Donne le conjugué de :

$$a) z = \frac{1+3i}{5-4i}$$

$$b) z = \frac{1+2i}{(1+3i)(3+i)}$$

Résolution

$$\begin{aligned}a) z &= \frac{(1+3i)(5+4i)}{25+16} \\ &= \frac{-7}{41} + \frac{19}{41}i \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{-7}{41} - \frac{19}{41}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) z &= \frac{1+2i}{10i} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{10}i \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\end{aligned}$$

ER 8. Calcule : a) Le conjugué de l'opposé de $z = \frac{1+2i}{1-2i}$.

b) Le conjugué de l'inverse de $z = \frac{2i}{3+2i}$.

c) L'opposé du conjugué de $z = (3-2i)^2 - (2-3i)$.

d) L'inverse du conjugué de $z = (1-4i)(1+4i) - (14+2i)$

e) Le conjugué du conjugué de l'opposé de $z = \frac{1}{(\sqrt{3}i-1)(i-\sqrt{3})}$.

Résolution

$$\begin{aligned}a) z &= \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i \\ -z &= \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ -\bar{z} &= \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) z &= \frac{4}{13} + \frac{6}{13}i \\ z^{-1} &= 1 - \frac{3}{2}i \\ \overline{z^{-1}} &= 1 + \frac{3}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c) z &= 3 - 9i \\ \bar{z} &= 3 + 9i \\ -\bar{z} &= -3 - 9i\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{d) } z = 3 - 2i ; \bar{z} = 3 + 2i \\ \text{et } (\bar{z})^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{e) } z = \frac{1}{4}i ; -z = -\frac{1}{4}i \text{ et } -\bar{z} = \frac{1}{4}i \\ \text{Par suite, } -\bar{\bar{z}} = -\frac{1}{4}i \end{array} \right|$$

ER 9. Trouve z lorsque :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \bar{z} = -\frac{1}{2}i(2i - 5)(5 - 8i) & \text{c) } \overline{z^{-1}} = (3i - 4)(3i + 7) + (i + 3)^2 \\ \text{b) } (\bar{z})^{-1} = \frac{2+i}{4-3i} & \text{d) } z + \bar{z} = \frac{1-i \tan x}{\cos x - i \sin x} \text{ et } \\ & z - \bar{z} = \frac{1}{(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)} \end{array}$$

Résolution

$$\begin{array}{l} \text{a) } \bar{z} = 25 + \frac{9}{2}i \\ \text{D'où } z = \bar{\bar{z}} \\ = 25 - \frac{9}{2}i \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{b) } (\bar{z})^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ \text{D'où : } \bar{z} = [(\bar{z})^{-1}]^{-1} \\ = 1 - 2i \\ \text{Par suite, } z = \bar{\bar{z}} \\ = 1 + 2i \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{c) } \overline{z^{-1}} = -29 + 15i \\ \text{D'où : } z^{-1} = \overline{z^{-1}} \\ = -29 - 15i \\ \text{Par suite, } z = (z^{-1})^{-1} \\ = \frac{-29}{1066} + \frac{15}{1066}i \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{d) } \text{Nous savons que } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \text{ et } z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z) \\ * 2\operatorname{Re}(z) = \frac{1-i \tan x}{\cos x - i \sin x} \\ = \frac{(1-i \tan x)(\cos x + i \sin x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} \\ = \frac{1}{\cos x} \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2 \cos x} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} * 2i \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)} \\ = \frac{i}{4} \\ \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{8} \end{array} \right|$$

$$\text{D'où : } z = \frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{8}i$$

ER 10. Soit $u = x + yi$ un nombre complexe. Trouver, en fonction de x et y , les parties réelle et imaginaire de z .

$$\text{a) } z = (5 - 3i)u \quad \text{b) } z = \frac{1 + i}{u - 1} \quad \text{c) } z = \frac{u^2 + 5u + 6}{u + 1}$$

Résolution

Il suffit de remplacer u par $x + yi$, de trouver la forme cartésienne de z et enfin, d'en tirer $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

$$\begin{array}{l} \text{a) } z = (5 - 3i)(x + yi) = 5x + 3y + (5y - 3x)i \\ \text{D'où : } \operatorname{Re}(z) = 5x + 3y \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 5y - 3x \end{array}$$

b) z est défini pour :

$$(u - 1 \neq 0) \Leftrightarrow (x - 1 + yi \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ et } y \neq 0)$$

Nous avons :

$$z = \frac{1+i}{\frac{x+yi-1}{x+y-1}} = \frac{x+y-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}i$$

$$\text{D'où : } \operatorname{Re}(z) = \frac{x+y-1}{(x-1)^2+y^2} \\ \text{et } \operatorname{Im}(z) = \frac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}i$$

c) z est défini pour

$$(u + 1 \neq 0) \Leftrightarrow (x + yi + 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x \neq -1 \text{ et } y \neq 0)$$

Nous avons :

$$z = \frac{(x+yi)^2+5(x+yi)+6}{(x+1)+yi} \\ = \frac{x^3+xy^2+6x^2+4y^2+11x+6+(x^2y-y^3+2xy-y)i}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\text{D'où : } \operatorname{Re}(z) = \frac{x^3+xy^2+6x^2+4y^2+11x+6}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\text{et } \operatorname{Im}(z) = \frac{x^2y-y^3+2xy-y}{(x+1)^2+y^2}$$

ER 11. Soit $u = x + yi$ un nombre complexe. Quelle(s) condition(s) doivent remplir les réels x et y pour que le nombre complexe z soit réel lorsque : a)

$$z = (5 - 3i)u \quad \text{b) } z = \frac{1}{u} - 4i$$

Résolution

Nous savons que : (z est un réel) $\Leftrightarrow [\operatorname{Im}(z) = 0 \text{ ou } z = \bar{z}]$.

Ainsi,

$$\text{a) } z - \bar{z} = (5-3i)(x+yi) - (5+3i)(x-yi) \\ = (10y - 6x)i$$

$$\text{D'où : } (z - \bar{z} = 0) \Leftrightarrow (-10y - 6x = 0) \\ \Leftrightarrow (5y - 3x = 0).$$

La condition cherchée est : $5y - 3x = 0$

b) Notons que z est défini pour :

$$(u \neq 0) \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

$$(z = \frac{1-4ui}{u}) \Leftrightarrow (z = \frac{\bar{u}-4u\bar{u}i}{u\bar{u}})$$

$$\Leftrightarrow \left[z = \frac{x-(y+4x^2+4y^2)i}{x^2+y^2} \right]$$

$$(\operatorname{Im}(z) = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{4x^2+4y^2+y}{x^2+y^2} = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 4y^2 + y = 0)$$

Les conditions cherchées sont :

$$x \neq 0, y \neq 0 \text{ et } y + 4x^2 + 4y^2 = 0$$

ER 12. Soit un nombre complexe $z = \frac{5u-2}{u-1}$ où $u \in \mathbb{C}$.

Comment faut-il choisir u pour que z soit un réel ?

Résolution

Nous savons que z est défini si $u \neq 1$ et que z est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$

$$\text{Ainsi : } (z = \bar{z}) \Leftrightarrow \left(\frac{5\bar{u}-2}{\bar{u}-1} = \frac{5u-2}{u-1} \right)$$

$$\Leftrightarrow [(5\bar{u}-2)(u-1) = (5u-2)(\bar{u}-1)]$$

$$\Leftrightarrow (u = \bar{u}) \text{ avec } u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Donc z est réel si et seulement si $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercices

N° 4. Donne la forme algébrique de z .

a) $z = (2 + 3i) + (1 + 2i)$

c) $z = \left(\frac{1}{2} - 2i\right)^2(2i + \frac{1}{2}) - 7(\frac{1}{4} - i)$

b) $z = 7 - i - \left(\frac{1}{2}i - 3\right) - (8 - \frac{7}{2}i)$

d) $z = (\sqrt{x} + i\sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + i\sqrt{y})^2 + 2xy - i$

N° 5. Calcule l'opposé et l'inverse de z

a) $z = (4 + 3i)(3 - 4i)$

c) $z = (i - 3)(i - 2(i - 1)) + 5i$

b) $z = (3 - 2i)^2 - (2 - 3i)$

d) $z = (\sqrt{3} - i)^3 - (i - \sqrt{3})^2$

N° 6. Détermine les réels r et s tels que :

a) $(1 - 2i)(r + si)(3 + i) = 1$

b) $i(4 + ri) - (i - 2)(1 - i) = 0$

N° 7. Soit $u = (r - 1) + (s - 2)i$ un nombre complexe. Détermine les réels r et s tels que $u = z$ dans chacun des cas suivants :

a) $z = (1 - i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} - i)^3$

b) $z = (2 - 3i)(3 - 2i) - (2 - i)(2 + i)$

N° 8. Soit un nombre complexe $u = x + yi$.

Détermine le(s) couple(s) des réels (x, y) pour le(s)quel(s) le nombre complexe z ne sont pas définie dans chacun des cas suivants :

a) $z = \frac{3+i}{1-iu}$

b) $z = \frac{(1-i)^2}{u(2-3i)}$

c) $z = \frac{5-i}{(u+3)(u-2i)}$

d) $z = \frac{u+1}{(x+yi)ui}$

N° 9. Soit $z = u^3 - 2iu^2 - (1 - i)u - 2i$.

Détermine la forme cartésienne de z lorsque

a) $u = 1 + i$

b) $u = i$

c) $u = 2 - i$

d) $1 + i^{71}$

e) $1^{301} - i^{507}$

N° 10. Quelles relations doivent vérifier les réels r et s pour que le nombre complexe.

a) $z = r + 3i - (2 - i)(1 + si)$ soit imaginaire pur ?

b) $z = (1 - 2i)(r + si)(3 + i) - 1$ soit réel ?

N° 11. Trouve le conjugué de chaque nombre complexe z dans les cas suivants :

a) $z = 3 - i - (7 - 3i) + 4i - 2$

c) $z = \frac{\sqrt{3} + 2i}{1 - i\sqrt{3}} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i - \sqrt{3}}$

b) $z = \frac{(3 + 2i)i - (2 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)^2}$

d) $z = \frac{(2 + 3i)(3 - 2i)}{4 + 3i} - i \frac{7 - 2i}{3i - 4}$

N° 12. Calcule :

a) l'inverse du conjugué de $z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}$

b) le conjugué de l'opposé de l'inverse de $z = \frac{1+3i}{5-4i}$

c) le conjugué du conjugué de l'inverse de $z = \frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{2+i}$

N° 13. Trouve z lorsque :

a) $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2 - i(4 + 2i\sqrt{3})$ b) $\overline{z^{-1}} = \frac{(1-i)^5}{(1+i)^7}$

c) $(\bar{z})^{-1} = \frac{13i}{(3-2i)^2}$

N° 14. Soit $u = x + yi$. Recherche la condition que doivent satisfaire les réels x et y pour que z soit réel.

a) $z = (3i + 5)u$ b) $z = \frac{1}{(1-u)(u^{-2})}$ c) $z = \frac{(1-3i)u}{(3-i)^{-1}}$

N° 15. Soit $u = x + yi$. Trouve la condition que doivent vérifier les réels x et y pour que z soit imaginaire pur.

a) $z = u^2 - i\bar{u}$ b) $z = \frac{1+\bar{u}}{u}$ c) $z = \frac{1-3i}{(3-i)u}$

N° 16. Soit le nombre complexe $z = 1 - i$. Calcule la valeur numérique de z^3 .
Dédus-en la valeur numérique de $(1 - z)(1 + z + z^2)$

N° 17. Soit le nombre complexe $z = 1 + i$. Calcule la valeur numérique de z^3 .
Dédus-en la valeur numérique de $(1 + z)(1 - z + z^2)$

N° 18. Pour quelles valeurs de a et b le nombre complexe $z = 1 + i$ est solution de l'équation $z^5 + az^3 + b = 0$

N° 19. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres complexes, définie par $u_0 = 2 + i$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_0 \cdot i^{n+1}$.
Montre que (u_n) est une suite géométrique. Que vaut le 35^e terme de cette suite ? Que vaut la somme de 35 premiers termes de cette suite ?

N° 20. Les nombres complexes : $3 - 7i$; $8 - 5i$; $13 - 3i$ sont trois termes consécutifs d'une suite. Quelle est la nature de cette suite ? Quel est le 94^e terme de cette suite ? Que vaut la somme de 94 premiers termes de cette suite ?

N° 21. On donne pour une suite géométrique de raison q :

$U_0 = 1 + i$ et $q = \frac{i}{3}$, calculer U_6

$U_1 = 1 - i$ et $q = 2 + 2i$, calculer U_8

$U_3 = 2 - 6i$ et $U_4 = -4 - 8i$, calculer q, U_0 et U_6

$U_2 = 1 + 5i$ et $U_6 = -6 - 4i$, calculer q

N° 22. Les nombres complexes $16 + i$ et $44 + 8i$ sont respectivement le cinquième et le douzième terme d'une suite arithmétique. Détermine le 40^e terme de cette suite. Que vaut la somme des dix premiers termes de cette suite ?

N° 23. On considère la suite géométrique des nombres complexes dont les trois premiers termes sont : $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$; $z_3 = \frac{-1}{4} - \frac{1}{2}i$. Calcule la raison de cette suite ainsi que le terme général z_n et le module de celui-ci. On pose : $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$.

Représente les images de S_1, S_2, S_3, S_4

La suite des images de $S_1, S_2, S_3 \dots$ admet-elle un point limite ?

N° 24. On considère la suite des nombres complexes, définie par ses deux premiers termes : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; $z_2 = i$ et la relation de récurrence : $z_n = z_{n-1} \cdot z_{n-2}$. Détermine les cinq premiers termes de cette suite.

I.4. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

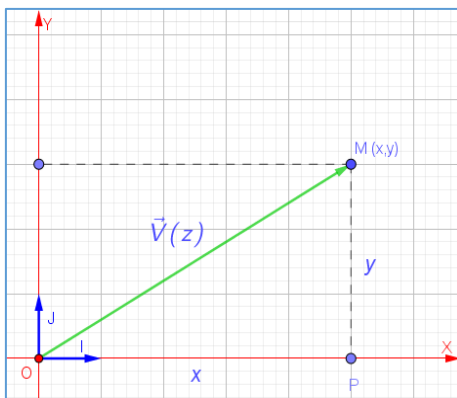
I.4.1. PLAN COMPLEXE

Soit le plan $\wp$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $M(x, y)$ un point du plan $\wp$

Les points O et M définissent le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de composantes (x, y) auquel on associe le nombre complexe $z = x + yi$.

Ainsi :

- à tout nombre complexe $z = x + yi$, on associe un et un seul point du plan $M(x, y)$. M est appelé point-image de z .
- à tout point $M(x, y)$ du plan est associé un et un seul nombre complexe $z = x + yi$.



z est appelé affixe de M.

Tout nombre complexe de la forme $z = x$ (avec $x \in \mathbb{R}$) se représente sur l'axe Ox appelé axe des réels.

Tout nombre complexe de la forme $z = yi$, se représente sur l'axe Oy appelé axe des imaginaires.

Le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où les points représentent des nombres complexes, est appelé plan complexe ou plan de Gauss.

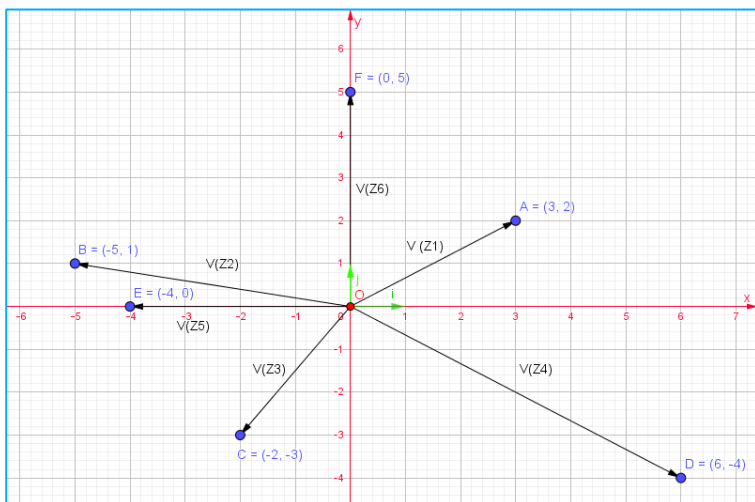
Exercices résolus

ER 13. Représente géométriquement les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = -5 + i; \quad z_3 = -2 - 3i; \quad z_4 = 6 - 4i;$$

$$z_5 = -4; \quad z_6 = 7i$$

Résolution :

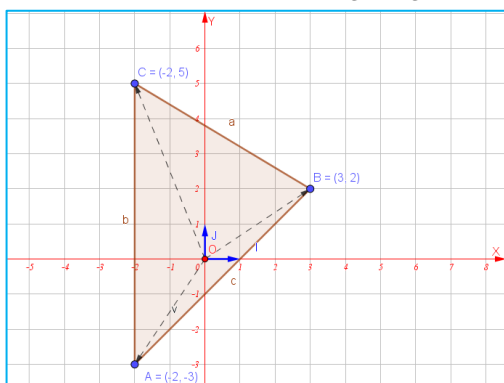


ER 14. Soit les nombres complexes $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$ et $z_3 = -2 + 5i$, des points-images respectifs A, B et C, dans le plan complexe. Calcule la surface du triangle ABC.

Résolution

On sait qu'en fonction des coordonnées des sommets, la surface d'un triangle ABC dans un repère orthonormé se calcule par :

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$



De cette façon,

$$z_1 = -2 - 3i \Rightarrow A(2; -3);$$

$$z_2 = 3 + 2i \Rightarrow B(3; 2); \text{ et}$$

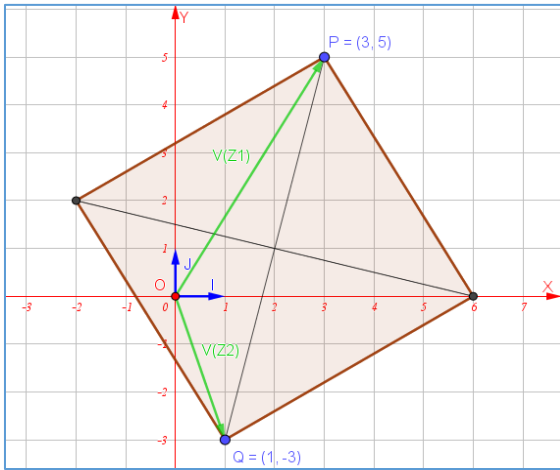
$$z_3 = -2 + 5i \Rightarrow C(-2; 5)$$

D'où

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

= 20 unités de surface.

ER 15. Soit les nombres complexes $z_1 = 3 + 5i$ et $z_2 = 1 - 3i$ des points–images respectifs P et Q dans le plan complexe. Calcule l'aire du carré ayant P et Q comme sommets opposés.



Résolution

La surface du carré dont P et Q sont deux sommets opposés se calcule par la formule

$$S = \frac{1}{2} d^2,$$

où $d = \delta(P, Q)$

Par suite,

$$z_1 = 3 + 5i$$

$$\Rightarrow P(3, 5);$$

$$\text{et } z_2 = 1 - 3i$$

$$\Rightarrow B(1, -3).$$

La diagonale de ce carré mesure

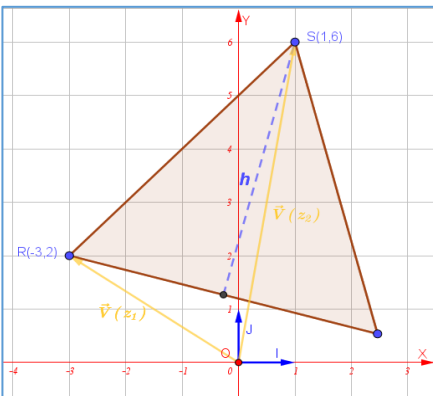
$$d = \delta(P, Q)$$

$$= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{68}$$

D'où la surface du carré : $S = 34$ us

ER 16. Soit les nombres complexes $z_1 = -3 + 2i$ et $z_2 = 1 + 6i$ de points –images R et S dans le plan complexe. Calcule l'aire du triangle équilatéral ayant R et S comme sommets.

Résolution



La surface du triangle équilatéral se calcule par : $S = \frac{1}{2} (\text{Base} \times \text{hauteur})$,

avec $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, où c désigne la mesure du côté.

Par suite,

$$z_1 = -3 + 2i \Rightarrow R(-3; 2);$$

$$\text{et } z_2 = 1 + 6i \Rightarrow S(1; 6).$$

Pour le cas d'espèce, le côté du triangle est :

$$c = \delta(R; S) = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2} = 4\sqrt{2}$$

et $h = 2\sqrt{6}$

La surface du triangle donné vaut donc : $S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ us}$

Exercices

N° 25. On désigne par M_1 et M_2 les points-images des nombres complexes

$$z_1 = 2(3 - i)^2 - (5 - 7i) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2-i}{1+i} - \frac{2+i}{1-i};$$

Evaluez la distance séparant ces deux points.

N° 26. Soient les nombres complexes $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 7 + 5i$ de point-images respectifs A et B dans le plan de Gauss. Quel nombre complexe z , imaginaire pur de point-image C, faut-il prendre pour que la surface du triangle ABC vaille $\frac{15}{2}$?

N° 27. Soient les nombres complexes $z_1 = -2 + 5i$ et $z_2 = 6 + 11i$, des points-images respectifs A et B dans le plan complexe. Déterminez le nombre complexe z_3 , de point-image C pour que ABC soit un triangle rectangle en A, de 64 unités d'aire ?

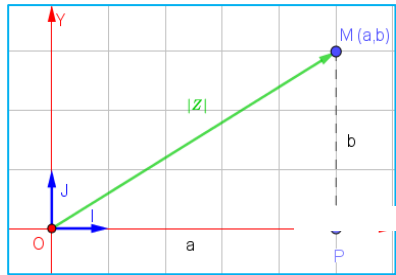
N° 28. Soient les nombres complexes $z_1 = 4 - 7i$ et $z_2 = 10 + 3i$, des points-images respectifs A et B dans le plan complexe. Déterminez le nombre complexe z_3 , de point-image C pour que ABC soit un triangle isocèle et rectangle en B ?

N° 29. Soient les nombres complexes $z_1 = 5 - 3i$ et $z_2 = 2 - 6i$, des points-images respectifs A et B dans le plan complexe. Quel nombre complexe z_3 , de point-image C faut-il prendre pour que le point-image du centre de gravité du triangle ABC ait pour affixe $z = 3 - 2i$?

I.4.2. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

a. Définition

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe de point-image M dans le plan de GAUSS.
On appelle module de z , le réel positif noté $|z|$ ou r , représentant la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



b. Expression

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe de point-image M(a, b) dans le plan complexe. Dans le triangle rectangle OPM (figure ci-dessus), le théorème de Pythagore donne :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$$

donc $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

c. Propriétés

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

$$P_1 : (|z| = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$$

$$P_2 : |zz'| = |z| |z'|$$

En général, si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes alors

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

En particulier si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ alors $|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$P_3 : |-z| = |\bar{z}| = |z|$$

$$P_4 : |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En général,

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

$$P_5 : \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (\text{avec } z' \neq 0)$$

En particulier, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (\text{avec } z \neq 0)$

Exercice

N° 30. Vérifie les propriétés énoncées ci-haut.

Remarques

– Pour tout nombre complexe non nul z , le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1.

En effet, $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$

– L'ensemble U des nombres complexes de module 1, noté $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$

Exercices résolus

ER 17. Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z = -1 + i\sqrt{3}$ $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)^2$ $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1-i}$ $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^5$	$z = \cos a - i \sin a$ $z = 1 + i \tan \alpha$ $z = \frac{1 - i \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
--	---

Résolution

Nous pouvons :

– soit recourir à la définition après avoir trouvé la forme cartésienne du nombre complexe;

– soit utiliser attentivement les propriétés du module d'un nombre complexe.

Ainsi,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|z| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \cdot |1+i|^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{(1)^2 + (1)^2}\right)^2$$

$$|z| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^2}{|1-i|} = 2\sqrt{2}$$

$$|z| = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2} \right)^5 = 2^5 = 32$$

$$|z| = |\cos a - i \sin a| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = 1$$

$$|z| = |1 + i \tan \alpha| = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = |\sec \alpha| = \left| \frac{1 - i \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right|$$

$$= |(1 - i \tan \alpha) \cos^2 \alpha|$$

$$= |1 - i \tan \alpha| |\cos^2 \alpha|$$

$$= |\cos \alpha|$$

ER 18. Détermine l'ensemble A des nombres complexes z tels que :

a) $|z - 2| = 1$ b) $|iz + 2| = |-3i|^2$ c) $|z - 1| - |3 + i - z| = 0$

Identifie éventuellement l'ensemble trouvé.

Résolution

Posons $z = x + yi$

$$\begin{aligned} \text{a) } |z - 2| = 1 &\Leftrightarrow (|x - 2 + yi| = 1) \Leftrightarrow (\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1) \\ &\Leftrightarrow [(x-2)^2 + y^2 = 1] \end{aligned}$$

$$A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : (x-2)^2 + y^2 = 1\};$$

c'est le cercle de centre (2,0) et de rayon 1.

$$\begin{aligned} \text{b) } |iz + 2| = |-3i| &\Leftrightarrow [(2-y) + ix| = |-3i| \Leftrightarrow (\sqrt{(2-y)^2 + x^2} = 3) \\ &\Leftrightarrow (2-y)^2 + x^2 = 9 \end{aligned}$$

$A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : (2-y)^2 + x^2 = 9\}$; c'est le cercle de centre (0,2) et de rayon 3.

$$\begin{aligned} \text{c) } (|z - 1| - |3 + i - z| = 0) &\Leftrightarrow (|x-1 + yi| = |(3-x) + (1-y)i| \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2}) \\ &\Leftrightarrow (4x + 2y - 9 = 0) \end{aligned}$$

$$A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : 4x + 2y - 9 = 0\};$$

c'est la droite d'équation $4x + 2y - 9 = 0$

ER 19. Détermine les nombres réels a, b tels que : $(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$

Résolution

$$\begin{aligned} (a + ib)^4 &= C_4^0 a^4 (ib)^0 + C_4^1 a^3 (ib)^1 + C_4^2 a^2 (ib)^2 + C_4^3 a (ib)^3 + C_4^4 a^0 (ib)^4 \\ &= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + i(4a^3b - 4ab^3) \end{aligned}$$

$$\left(|a + bi|^4 = \sqrt{\frac{5329}{256} + \frac{363}{4}}\right) \Leftrightarrow [(\sqrt{a^2 + b^2})^4 = \frac{169}{16}]$$

ous avons :

$$\begin{cases} a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = \frac{73}{16} \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)^2 - 8a^2b^2 = \frac{73}{16} \\ a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \\ 4a^3b - 4ab^3 = -\frac{11}{2}\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \\ 4ab(a^2 - b^2) = \frac{-11\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \\ 4ab(a^2 - b^2) = \frac{-11\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{13}{4} \\ 4ab(a^2 - b^2) = \frac{-11\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

(2) dans (1) donne :

$$\left(\frac{169}{16} - 8a^2b^2 = \frac{73}{16}\right) \Leftrightarrow (-8a^2b^2 = \frac{73}{16} - \frac{169}{16}) \Leftrightarrow (ab = \sqrt{\frac{3}{4}}) \Leftrightarrow (a = \frac{\sqrt{3}}{2b}) \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans (3) donne : } \left[4 \cdot b \frac{\sqrt{3}}{2b} \left(\frac{3}{4b^2} - b^2 \right) = -\frac{11\sqrt{3}}{2} \right] \Leftrightarrow (-4b^4 + 11b^2 + 3 = 0)$$

$$\text{En posant } b^2 = y, \quad (-4y^2 + 11y + 3 = 0) \Leftrightarrow [y = 3 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{4} \quad (\text{\`a rejeter})]$$

$$(b^2 = 3) \Leftrightarrow (b = \sqrt{3} \text{ et } b = -\sqrt{3}) \quad (5)$$

$$(5) \text{ dans (4), nous avons : } a = \frac{1}{2} \text{ et } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'o\`u: } z_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}i \text{ et } z_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}i \text{ sont les nombres cherch\'es}$$

Exercices

N° 31. Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3}i & \text{d) } z = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{(1-i)(\cos x - i \sin x)} & \text{f) } z = \frac{i-\sqrt{3}}{(i+\sqrt{3})^5} \\ \text{b) } z = \frac{1+i}{2-i} - \frac{1-i}{2+i} & \text{e) } z = \frac{1}{(\sqrt{3}-i)(1-i\sqrt{3})} & \text{g) } z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \\ \text{c) } z = 4i-3 - (3i-2) + 3-2i & & \end{array}$$

N° 32. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les nombres complexes *i* et *iz* soient align\'es avec M ?

N° 33. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que $|z - 3i| = 5$?

N° 34. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que $\frac{|z-i|}{|z-2i|} = 2$?

N° 35. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que $\frac{z-2}{z-6}$ a des parties r\'eelle et imaginaire \'egales ?

I.4.3. ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{j}, \vec{k})$, soit $z = a + bi$ un nombre complexe, de point-image P dans le plan de Gauss. On appelle argument de z, et on note **Arg(z)**, l'angle α des vecteurs $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OP}$, défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

On écrit : $\alpha = \text{Arg}(z)$

Remarque

L'argument d'un nombre complexe nul est indéterminé.

Calcul de l'argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul dont l'image est P dans le plan de Gauss (voir figure précédente).

Dans le triangle rectangle AOP, on a, par définition des nombres trigonométriques d'un angle aigu :

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

Tenant compte des mesures algébriques des segments de droites :

$$\overline{OA} = a; \quad \overline{AP} = b \quad \text{et} \quad \overline{OP} = |z| = r,$$

$$\text{On a : } \sin \alpha = \frac{b}{r} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}.$$

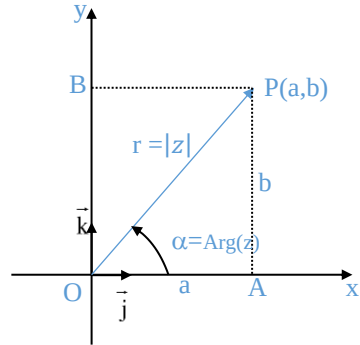
$$\text{D'où l'on tire : } \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Ainsi, si $z = a + bi$ est un nombre complexe de module r et d'argument α , alors :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases} \quad \text{(i)} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{(ii)}$$

Les égalités (i) et (ii) permettent de trouver l'argument α du complexe z.

La relation (ii) s'utilise lorsqu'on connaît le quadrant dans lequel se trouve le point-image de z.



Exercice résolu

ER 20. Trouve l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$

b) $z = -\sqrt{3}i - 1$

c) $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

Résolution

Nous avons : $r = 2$, $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

De même pour $z = -i\sqrt{3} - 1$, $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

En utilisant la relation (ii) pour $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$, le point-image $P(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$ de z est dans le second quadrant.

$$\text{on a : } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

I.4.4. FORMES TRIGONOMETRIQUE ET EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe de module r et d'argument α .

De $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r}$, on a : $a = r \cos \alpha$ et $b = r \sin \alpha$.

D'où : $z = a + bi \Leftrightarrow z = r \cos \alpha + r i \sin \alpha$; Soit :

$$\mathbf{z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)} \quad (1)$$

(1) est la forme trigonométrique du nombre complexe z .

Ainsi le nombre complexe est déterminé par son module et son argument.

On écrit parfois :

$$\mathbf{z = (r ; \alpha)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{z = r \operatorname{cis} \alpha} \quad \text{c'est la } \textit{forme polaire de } z.$$

Si l'on pose : $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$, (1) devient :

$$\mathbf{z = r e^{i\alpha}} \quad (2)$$

(2) est la forme exponentielle du nombre complexe z .

Dans la suite de ce chapitre, si z est un nombre complexe de module r et d'argument α , on écrira : $\mathbf{z = (r, \alpha)}$ (3)

(3) est la forme polaire du nombre complexe z .

Remarques :

Deux nombres complexes $z = (r ; \alpha)$ et $z' = (r' ; \alpha')$, sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux à $2k\pi$ près.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le conjugué de z est : $\bar{z} = (r ; -\alpha) = r e^{-i\alpha}$

On peut aussi écrire $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$.

Exercices résolus

ER 21. Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, trouve les formes trigonométriques, polaire et exponentielle.

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$

b) $z = 1 + i$

Résolution

$$a) |z| = 2; \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{3}.$$

* la forme trigonométrique : $1 - i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$

* la forme polaire : $1 - i\sqrt{3} = (2, \frac{5\pi}{3})$

* la forme exponentielle : $1 - i\sqrt{3} = 2 e^{\frac{5\pi i}{3}}$

$$b) |z| = \sqrt{2}; (\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow (\alpha = \frac{\pi}{4})$$

$$* 1 + i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad * 1 + i = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \quad * 1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

ER 22. Soit $0^\circ \leq a \leq 360^\circ$. Discute de la possibilité de mettre sous la forme trigonométrique le nombre complexe z.

a) $z = \frac{\cos a}{\cos a + i \sin a}$

b) $z = 2 \cos^3 a - \cos a + i \frac{\sin 4a}{4 \cos a}$

Résolution

a) $z = \cos a (\cos a - i \sin a)$ (1)

$= \cos a [\cos (-a) + i \sin (-a)]$ (1')

L'égalité (1') est la forme trigonométrique de z si son module $\cos a$ est positif et son argument $-a$ est compris entre 0° et 360° .

D'où la discussion :

* Si $\cos a > 0$ alors $0^\circ < a < 90^\circ$ ou $270^\circ < a < 360^\circ$.

Ces dernières égalités impliquent respectivement $270^\circ < -a < 360^\circ$ ou $0^\circ < -a < 90^\circ$.

Dans ce cas $|z| = \cos a$ et $\text{Arg } z = -a$.

(1) est donc la forme trigonométrique de z.

* Si $\cos a = 0$ alors $a = 90^\circ$ ou $a = 270^\circ$

$$(|z| = \cos a \text{ et } \cos a = 0) \Rightarrow (|z| = 0 \text{ ou } z = 0)$$

L'argument de z n'étant pas déterminé, nous ne pouvons pas mettre z sous la forme trigonométrique.

* Si $\cos a < 0$ alors $90^\circ < a \leq 270^\circ$.

Nous prenons $|z| = -\cos a > 0$ et en utilisant l'égalité (1), nous obtenons :

$$z = -\cos a (\cos a - i \sin a) = \cos a (-\cos a + i \sin a) \\ = \cos a [\cos (180^\circ - a) + i \sin (180^\circ - a)]$$

C'est la forme trigonométrique de z .

$$b) z = \cos a (2\cos^2 a - 1) + i \frac{\sin 2a \cos 2a}{2 \cos a} = \cos a \cdot \cos 2a + i \cos 2a \cdot \sin a \\ = \cos 2a (\cos a + i \sin a) \quad (2)$$

* Pour $\cos 2a > 0$,

$$(0^\circ < 2a < 90^\circ \text{ ou } 270^\circ < 2a < 360^\circ) \Leftrightarrow (0^\circ < a < 45^\circ \text{ ou } 135^\circ < a < 180^\circ)$$

Dans ce cas, (2) est la forme trigonométrique de z .

* Pour $\cos 2a = 0$, $[2a \in \{90^\circ, 270^\circ\}] \Leftrightarrow [a \in \{45^\circ, 135^\circ\}]$

Dans ce cas $z = 0$ et la forme trigonométrique n'existe pas.

* Pour $\cos 2a < 0$, $(90^\circ < 2a < 270^\circ) \Leftrightarrow (45^\circ < a < 135^\circ)$

En prenant $|z| = -\cos 2a > 0$, nous obtenons la forme trigonométrique :

$$z = -\cos 2a (\cos a + i \sin a)$$

$$\text{ER 23. Trouve la forme cartésienne de } z = \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{4}})^2}{1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

Résolution

$$* \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} + \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \\ = 1 + 2(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) + \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = (1 + i)(1 + \sqrt{2})$$

$$* 1 - e^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 - (\cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2}) = 1 + i$$

$$\text{D'où : } z = \frac{(1+i)(1+\sqrt{2})}{1+i} = 1 + \sqrt{2}.$$

Exercices

N° 36. Mets sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$a) -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$b) \sqrt{3} - 3i$$

$$c) i$$

$$d) -\sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

$$e) 2 - 2i$$

$$f) 4$$

$$g) -3i$$

$$h) -i + 1$$

$$i) -\sqrt{7} + i\sqrt{21}$$

$$j) \sqrt{15} - i\sqrt{5}$$

$$k) 1 + i \cot \frac{7\pi}{6}$$

$$l) \sqrt{2} - i \sec \frac{39\pi}{4}$$

$$m) 1 - e^{2i\alpha}, \alpha \in [0; \pi]$$

N° 37. Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument 420° . Quelle est la forme algébrique de z ?

N° 38. Soit z le nombre complexe de module $2\sqrt{3}$ et d'argument $\frac{5\pi}{3}$. Quelle est la forme algébrique de l'opposé de z ?

N° 39. Soit z un nombre complexe de module $4\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{135\pi}{4}$. Quelle est la forme algébrique de l'inverse de z ?

N° 40. Soit z un nombre complexe de module $4\sqrt{3}$ et d'argument $\frac{137\pi}{6}$. Quelle est la forme algébrique de l'inverse de l'opposé de z ? Détermine le module et l'argument de :

a) $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$

b) $z = \sin 2\alpha + 2i \sin^2 \alpha$

c) $z = \sin \alpha (\sin \alpha + i \cos \alpha)$

N° 41. z est un nombre complexe de module 10 et d'argument θ tel que $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Quelle est sa forme algébrique ?

N° 42. z est un nombre complexe de module 13 et d'argument θ tel que $\tan \theta = \frac{5}{12}$ et $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Quelle est sa forme algébrique ?

N° 43. z est un nombre complexe de module 7 et d'argument θ tel que $\tan \theta = -4\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Quelle est la forme algébrique du carré de ce nombre complexe z ?

N° 44. Détermine le module et l'argument du nombre complexe z si $\alpha \in [0, \pi]$ et si :

a) $z = \tan \alpha + i$

b) $z = 1 - i \tan \alpha$

c) $z = \cot \alpha + i$

d) $z = 1 + i \cot \alpha$

e) $z = -\cot \alpha - i$

N° 45. Soit $z_1 = 3 - \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ et $z_2 = -2 + 7e^{\frac{3\pi}{2}i}$, deux nombres complexes de points-images respectifs M et N dans le plan complexe. Évalue la distance de M à N.

N° 46. Soit $a = 1 + i$, un nombre complexe. Détermine le nombre complexe z de module 5 et tel que az ait une partie réelle égale 7.

N° 47. Soit $a = 1 - i$, un nombre complexe. Détermine le nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et tel que $\frac{a}{z}$ ait une partie imaginaire égale $\frac{3}{5}$

N° 48. Soit $a = 2 + i$, un nombre complexe. Détermine le nombre complexe z de module $\sqrt{34}$ et tel que $a^2 z$ ait une partie réelle égale 11.

N° 49. Si z_1 est un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$; z_2 un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, quelle est la forme algébrique du nombre complexe u tel que $16z_2^3 u = z_1^4$?

N° 50. z_1 est un nombre complexe de module 16 et d'argument $\frac{5\pi}{3}$; z_2 est un nombre complexe de module $4\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Quelle est la forme algébrique du nombre complexe u tel que $z_1 = z_2 u$

N° 51. On considère le nombre complexe z , de module 1 et dont une mesure de l'argument est α ; ($-\pi < \alpha < \pi$). Calcule en fonction de α , le module et l'argument de $1 + z + z^2$

On considère un deuxième nombre complexe z' , de module 1 et dont une mesure de l'argument est β . Dans le cas où il est défini, montre que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un nombre réel.

I.4.5. REGLES DE CALCUL DES MODULES ET ARGUMENTS DES NOMBRES COMPLEXES

Produit de deux nombres complexes non nuls

Soit $z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$ et $z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$ deux nombres complexes écrits sous la forme trigonométrique. Calculons leur produit.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \end{aligned}$$

Ainsi, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de modules respectifs r_1 et r_2 et d'argument α_1 et α_2 , alors le produit de z_1 par z_2 est un nombre complexe dont :

le module vaut le produit des modules ;

l'argument vaut la somme des arguments.

On écrit : $(r_1, \alpha_1) \cdot (r_2, \alpha_2) = (r_1 \cdot r_2, \alpha_1 + \alpha_2)$

En général, si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes non nuls de modules respectifs $r_1, r_2, \dots, r_n$ et d'arguments respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors :

$$* \quad |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$$

$$* \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

En particulier si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = (r, \alpha)$ alors :

$$* |z^n| = r^n \quad * \operatorname{Arg} z^n = n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

Exemples

$$\bullet z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{et} \quad 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$|z| = 2\sqrt{2} \quad ; \quad \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{12} \quad \text{et} \quad z = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right]$$

Quotient de deux nombres complexes non nuls

Soit les nombres complexes $z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$ et $z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)}{r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2) + i(\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))] \end{aligned}$$

Ainsi, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de modules respectifs r_1 et r_2 et d'arguments respectifs α_1 et α_2 , alors le quotient de z_1 par z_2 est le nombre complexe dont :

Le module est le quotient du module de z_1 par le module de z_2 ,

L'argument est la différence entre l'argument de z_1 et l'argument de z_2 .

$$\text{On écrit alors : } \frac{(r_1, \alpha_1)}{(r_2, \alpha_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \alpha_1 - \alpha_2 \right)$$

$$\text{En particulier } \frac{1}{(r, \alpha)} = \left(\frac{1}{r}, -\alpha \right)$$

Exercice résolu

ER 24. Calcule :

$$\text{a) } z = \frac{1-i}{1+i}$$

$$\text{b) } z = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$\text{c) } z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9}}$$

Résolution

$$\text{a) } * |1-i| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}(1-i) = 315^\circ \quad * |1+i| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}(1+i) = 45^\circ$$

$$\text{D'où : } z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\cos (315^\circ - 45^\circ) + i \sin (315^\circ - 45^\circ)] = -i$$

$$\text{b) } * \quad |\sqrt{3}-i| = 2 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\sqrt{3}-i) = \frac{11\pi}{6}$$

$$* \quad |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{D'où : } z = \cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Puissance d'un nombre complexe non nul

Soit un nombre complexe donné sous la forme trigonométrique :

$$z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (1)$$

Calculons z^n avec $n \in \mathbb{N}^*$

z^n étant le produit de n facteurs égaux à z , alors

$$|z^n| = r^n \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z) = n \cdot \alpha$$

$$\text{D'où } z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \quad (2)$$

On peut alors énoncer :

Si z est un nombre complexe de module r et d'argument α , alors z^n est un nombre complexe dont :

le module égale la $n^{\text{ième}}$ puissance du module de r :

l'argument égale le produit de n par α

On sait, par définition d'une puissance que

$$z^n = [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \quad (1)$$

D'autre part la forme trigonométrique nous donne

$$z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \quad (2)$$

La comparaison de (1) et (2) donne

$$r^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

En simplifiant les modules non nuls, on obtient :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Cette dernière égalité porte le nom de formule de **Moivre**¹.

¹ **Moivre (Abraham de)**, mathématicien français (1667-1754)

Elle permet de calculer la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre complexe, y compris les nombres trigonométriques de l'angle $n\alpha$ connaissant les nombres trigonométriques de l'angle α

Exercices résolus

ER 25. Calcule : a) $(-1 + i\sqrt{3})^8$

b) $(3 - i\sqrt{3})^6$

Résolution

Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow z = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z^8 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)^8$$

$$\Rightarrow z^8 = \left(2^8, \frac{16\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z^8 = 2^8 \left(\cos \frac{16\pi}{3} + i \sin \frac{16\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z^8 = 2^8 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z^8 = -2^7 (1 + i\sqrt{3})$$

b) Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow z = \left(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow z^6 = \left(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)^6$$

$$\Rightarrow z^6 = (1728, 11\pi)$$

$$\Rightarrow z^6 = 1728(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$$

$$\Rightarrow z^6 = -1728$$

ER 26. Calcule $z = (i - 1)^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^7$

Résolution

$$* |z| = |i - 1|^6 \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right|^7 = 8$$

$$* \text{Arg } z = 6 \text{Arg}(i - 1) + 7 \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$[\text{Arg}(i - 1) = \frac{3\pi}{4}] \Leftrightarrow [6 \text{Arg}(i - 1) = 6 \cdot \frac{3\pi}{4}]$$

$$\Leftrightarrow [6 \text{Arg}(i - 1) = \frac{9\pi}{2}]$$

$$[\text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{7\pi}{4}] \Leftrightarrow [7 \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 7 \cdot \frac{7\pi}{4}]$$

$$\Leftrightarrow [7 \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{49\pi}{4}]$$

$$6 \text{Arg}(i - 1) + 7 \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{9\pi}{2} + \frac{49\pi}{4}$$

$$\text{D'où : } \text{Arg } z = \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad z = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -4\sqrt{2} (1 - i)$$

ER 27. Calcule $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$ et en déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Résolution

Posons $z_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= |z_1| = \sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = 2 \\ \sin \alpha_1 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \cos \alpha_1 &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha_1 = \frac{\pi}{8})$$

Ainsi, $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$

Et,

$$z = (z_1)^8 = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]^8 = -2^8.$$

D'où :

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

ER 28. Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 3i$.
Détermine les formes trigonométrique et algébrique de $z_1 \cdot z_2$ et de $\frac{z_1}{z_2}$.

Résolution

$$\begin{aligned} \text{On a : } z_1 &= \left(2, \frac{\pi}{3} \right) \text{ et } z_2 = \left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{3} \right) \\ z_1 \cdot z_2 &= \left(2 \cdot 2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \right) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (4\sqrt{3}, 2\pi) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \left(\frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

- La forme trigonométrique du produit :

$$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{3} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 4\sqrt{3}$$

Pour le quotient, on a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

ER 29. Calcule $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$

$$\text{On a : } z = \frac{\left(2, \frac{5\pi}{3} \right)}{\left(2, \frac{11\pi}{6} \right)} = \left(1, -\frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

ER 30. Calcule $z = \frac{(\sqrt{3}-i)^3(1-i)^4}{i^7(1+i)^6}$

$$\text{On a : } z = \frac{\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)^4}{\left(1, \frac{\pi}{2}\right)^7 \cdot \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)^6} = \frac{\left(8, \frac{11\pi}{2}\right) \cdot \left(4, 7\pi\right)}{\left(1, \frac{7\pi}{2}\right) \cdot \left(8, \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{\left(32, \frac{25\pi}{2}\right)}{\left(8, 5\pi\right)} = \left(4, \frac{15\pi}{2}\right)$$

D'où la forme trigonométrique de z :

$$Z = 4 \left(\cos \frac{15\pi}{2} + i \sin \frac{15\pi}{2} \right)$$

Pour avoir z sous la forme algébrique, il suffit de calculer les deux nombres trigonométriques $\cos \frac{15\pi}{2}$ et $\sin \frac{15\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{on a, pour cela : } z &= 4 \left(\cos \frac{15\pi}{2} + i \sin \frac{15\pi}{2} \right) \\ &= 4 \left[\cos \left(8\pi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(8\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -4i \end{aligned}$$

ER 31. Calcule : $z = (1+i)^n + (1-i)^n$

Résolution :

$$\begin{aligned} z &= (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)^n \\ &= \left(2^{\frac{n}{2}}, \frac{n\pi}{4}\right) + \left(2^{\frac{n}{2}}, \frac{7n\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{7n\pi}{4} + i \sin \frac{7n\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left[\left(\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{7n\pi}{4} \right) + i \left(\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{7n\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{\frac{n+2}{2}} \left[\cos n\pi \cos \left(-\frac{3n\pi}{4} \right) + i \sin n\pi \cos \left(-\frac{3n\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{3n\pi}{4} (\cos n\pi + i \sin n\pi) \\ &= 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{3n\pi}{4} (\cos \pi + i \sin \pi)^n \\ &= (-1)^n 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{3n\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercices

N° 52. Soit le nombre complexe $z = \frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-i}$.

- Détermine le module et l'argument de z
- Calcule z^{23} et z^{2024}

N° 53. Partant des formules de Carnot :

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \text{ et } 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2},$$

Calcule $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ et déduis les valeurs de, $(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^4$ et $(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^{10}$

N° 54. Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué ?

N° 55. Calcule :

$$\left. \begin{array}{l} (1 + i\sqrt{3})^3 \\ (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^2 \\ (\sin a + i \cos a)^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} (\sin a - i \cos a)^2 \\ (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 \\ z = (1 - i\sqrt{3})^9 \end{array}$$

N° 56. Mets les nombres complexes suivants sous la forme algébrique

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} \\ \frac{(8-3i)(1-4i)}{(2i-5)(3+7i)} \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{i}{2+3i} + \frac{1}{2-3i} \\ \frac{4-i}{2-i} + \frac{4+i}{2+i} \end{array}$$

N° 57. Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{1}{2i\sqrt{3}-2}$.

Donne la forme algébrique de :

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 \\ z_1 \cdot z_2 \\ \frac{z_1}{z_2} \end{array} \right| \begin{array}{l} z_1^2 \cdot z_2^2 \\ z_1 + z_1^2 + z_2^3 \end{array}$$

N° 58. Soit le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction f de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui associe au point M d'affixe $z = x + iy$, le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+1}$

- Détermine l'ensemble C_1 des points de $\mathcal{P}$ tels que z' soit imaginaire pur.
- Détermine l'ensemble C_2 des points M tels que leur image M' par f appartienne au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

N° 59. Trouve les formes trigonométriques, polaires et exponentielles de chacun des nombres complexes suivants ($0^\circ < a < 90^\circ$) :

- $z = 7$
- $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
- $z = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z = 1 + i\sqrt{3}$
- $z = \frac{\sqrt{2}}{2} [e^{ia} - e^{-i(90^\circ - a)}]$
- $(\sqrt{3} + i)^3 z = (1 - i)^4$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } z = -2 & \text{g) } (\sin a + i \cos a)z - i \sin a = 0 \quad \text{k) } z = \frac{1+ie^{-i(a-180^\circ)}}{\sin \frac{a}{2}} \\ \text{d) } z = \frac{1-ie^{i(90^\circ-a)}}{\cos \frac{a}{2}} & \text{h) } z = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin x + i \cos x)}{2(1-i)(\cos x - i \sin x)} \end{array}$$

N° 60. Examine selon les différentes positions du nombre réel α compris entre 0 et 360° , la possibilité de mettre chacun des nombres complexes suivants sous sa forme trigonométrique :

$$\text{a) } z = \frac{1}{1-i \tan \alpha} \qquad \text{b) } z = (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^2$$

N° 61. N° 62. Trouve la forme trigonométrique du nombre complexe u sachant que :

$$\text{a) } z = 2iu, \quad |z| = 4 \quad \text{et} \quad \text{Arg } z = 120^\circ$$

$$\text{b) } zu^3 - (i\sqrt{3} - 1)^3 = 0, \quad |z| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg } z = \frac{5\pi}{4}$$

N° 62. Mets sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$(a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{poser } a = \tan \alpha, \quad \text{avec } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{a) } z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \qquad \text{c) } z = \frac{1+ai}{1-ai} \qquad \text{e) } z = \frac{a(1+i \tan \theta)^2}{1+\tan^2 \theta}$$

$$\text{b) } z = \frac{1}{1+i \tan \frac{\pi}{4}} \qquad \text{d) } z = -\cot \frac{6933\pi}{4} + i \tan \frac{4003\pi}{6}$$

N° 63. Mets sous la forme algébrique :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}} \right)^9 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2005} & \text{b) } \frac{(-1+i)^2(\sqrt{3}+i)^5}{(-1+i\sqrt{3})^5} \\ \text{c) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 \right)^{11} & \text{e) } (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \\ \text{d) } \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1+i)^{20}} + \frac{(-1+i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{20}} & \text{f) } (1-i\sqrt{3})^5 - (1+i\sqrt{3})^5 \end{array}$$

$$\text{N° 64. Soit } z = \frac{2i}{1-i\sqrt{3}}$$

a) Détermine le module et l'argument de z

b) Calcule z^3 et en déduire $z^6, z^9, z^{12}, \dots, z^{3n}$

I.5. RACINES $n^{\text{ièmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

I.5.1. DEFINITION

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z , tout nombre complexe u dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est égale à z .

$$(u \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de } z) \Leftrightarrow (u^n = z)$$

Exemples :

$2+3i$ est une racine carrée de $-5+12i$ car $(2+3i)^2 = -5+12i$

$4-2i$ est une racine cubique de $16-88i$ car $(4-2i)^3 = 16-88i$

$1+2i$ est une racine cinquième de $41-38i$ car $(1+2i)^5 = 41-38i$

I.5.2. EXPRESSION GENERALE

Soit $z = (r, \alpha)$ et $u = (r', \alpha')$, l'une de ses racines $n^{\text{ièmes}}$. Par définition,

$$(u \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de } z) \Leftrightarrow u^n = z$$

$$\Leftrightarrow (r', \alpha')^n = (r, \alpha) \Leftrightarrow (r'^n, n\alpha') = (r, \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r'^n = r \\ n\alpha' = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \alpha' = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Ceci montre que toute racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe $z = (r, \alpha)$ est un nombre complexe u de module $r_k = \sqrt[n]{r}$ et d'argument $\alpha_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$.

Ce qui permet de conclure que tout nombre complexe $z = (r, \alpha)$ possède n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Remarques :

- Dans le plan complexe, les points-images des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle centré à l'origine des axes, et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
- Les arguments α_k de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ forment une progression arithmétique de premier terme α_0 et de raison $\frac{2\pi}{n}$.

Exercices résolus

ER 32. Détermine les racines quatrièmes de $z = \sqrt{3} + i$ et représente-les dans le plan complexe.

Résolution

On a : $z = \left[2 ; \frac{\pi}{6} \right]$.

Par suite, l'expression générale des racines quatrièmes de z est :

$$z_k = \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right) \right], k \in \{0,1,2,3\}$$

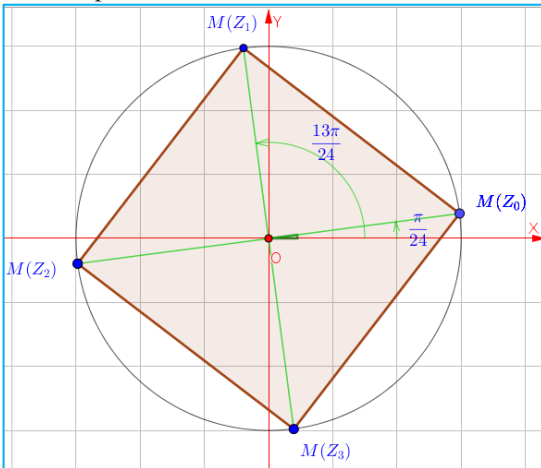
$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right)$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow z_1 &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{13\pi}{24} + i \sin \frac{13\pi}{24} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow z_2 &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{24} + \pi \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{25\pi}{24} + i \sin \frac{25\pi}{24} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \Rightarrow z_3 &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{37\pi}{24} + i \sin \frac{37\pi}{24} \right] \end{aligned}$$

Dans le plan de Gauss, on a :



ER 33. Détermine les racines sixièmes de $z = \frac{(1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$ et représente-les dans le plan complexe.

Résolution

$$\text{On a : } z = \frac{(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})^4}{(2, \frac{\pi}{6})^3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{13\pi}{2}\right)$$

Par suite, l'expression générale des racines sixièmes de Z est :

$$z_k = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) \right], k \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$$

Les racines détaillées sont :

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

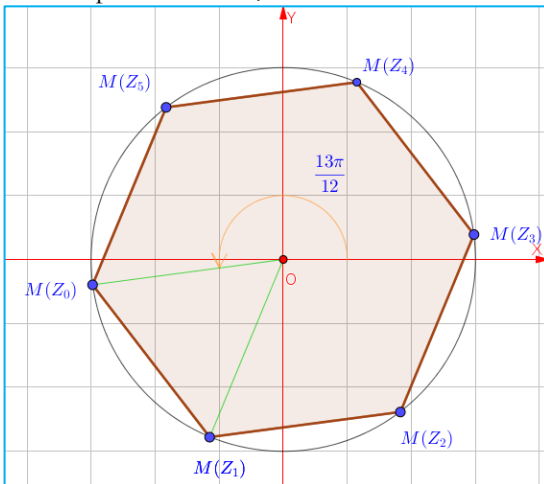
$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right)$$

$$k = 4 \Rightarrow z_4 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{29\pi}{12} + i \sin \frac{29\pi}{12} \right)$$

$$k = 5 \Rightarrow z_5 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$$

Dans le plan de Gauss, on a:



I.5.3. CAS PARTICULIERS

Racines n^{ièmes} de l'unité

Dans le cas où $z = 1$, on a : $z = (1, 0)$

L'expression générale des racines n^{ièmes} de z devient :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

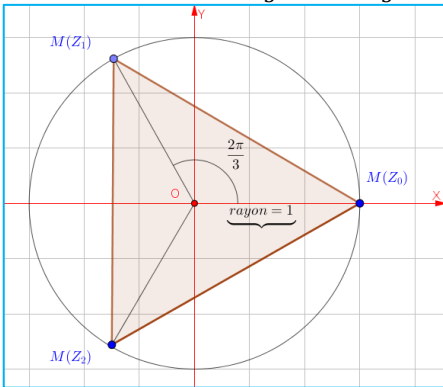
En particulier, si $n = 3$, on trouve les racines cubiques de l'unité, dont l'expression générale est :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2\}$$

Si $k = 0$, alors $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

Si $k = 1$, alors $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $k = 2$, alors $z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$



On peut vérifier que la somme de ces trois racines cubiques de 1 donne zéro et que leur produit donne 1.

Dans le plan complexe leurs points-images sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.

Racines carrées d'un nombre complexe sous la forme algébrique

Soit le nombre complexe $z = a + bi$ et soit $u = x + iy$ l'une de ses racines carrées.

Par définition,

$$\begin{aligned} u \text{ racine carrée de } z &\Leftrightarrow u^2 = z \\ &\Leftrightarrow |u^2| = |z| \\ &\Leftrightarrow |u|^2 = |z| \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (i) \end{aligned}$$

Par suite, $u^2 = z \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

D'après l'égalité de deux nombres complexes on a le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (ii) \\ 2xy = b & (iii) \end{cases}$$

Avec (i) et (ii), on constitue le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \end{cases} ; \text{ soit } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{cases} \text{ avec } 2xy = b$$

Sous la forme algébrique, les racines carrées d'un nombre complexe $z = a + bi$, sont de la forme $u = x + iy$ où

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad \text{avec } 2xy = b$$

Notons que les réels x et y sont de même signe ou non selon que le réel b est positif ou négatif.

Les racines carrées de $z = a + bi$ s'obtiennent aussi par les formules

$$u_1 = \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \varepsilon \cdot i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \quad \text{et} \quad u_2 = -\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \varepsilon \cdot i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

où ε désigne le signe de b

Exemples

(1). Les racines carrées de $z = 3 - 4i$

On a: $|z| = 5$.

Soit $u = x + iy$, l'une des racines.

$$\text{Alors, } x = \pm \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \pm 2 \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-3+5}{2}} = \pm 1;$$

Comme b est négatif ($b = -4$), les deux réels x et y sont de signes contraires

$$\text{D'où : } x = 2 \Rightarrow y = -1; u_1 = 2 - i$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 1; u_2 = -2 + i.$$

Les racines carrées de $z = 3 - 4i$ sont donc $\pm (2 - i)$.

(2). Les racines carrées de $z = -8 + 6i$

On a immédiatement : $|z| = 10$.

Soit $u = x + iy$, l'une des racines.

$$\text{Alors, } x = \pm \sqrt{\frac{-8+10}{2}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{8+10}{2}} = \pm 3;$$

Comme b est positif ($b = 6$), les deux réels x et y ont le même signe

$$x = 1 \Rightarrow y = 3; u_1 = 1 + 3i$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -3 ; u_2 = -1 - 3i.$$

Les racines carrées de $z = -8 + 6i$ sont donc $\pm(1 + 3i)$.

(3). Les racines carrées de $z = -9i$

$$\text{On a : } |z| = 9.$$

Soit $u = x + iy$, l'une des racines.

$$\text{Alors, } x = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} ;$$

Comme b est négatif ($b = -9$), les deux réels x et y sont de signes contraires

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} ; z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3i\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} ; z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3i\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Les racines carrées de $z = -9i$ sont donc $\pm \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3i\sqrt{2}}{2} \right)$

(4). Les racines carrées de $z = -1 + 2i\sqrt{2}$

$$\text{On a : } |z| = 3.$$

Soit $z = x + iy$, l'une des racines.

$$\text{Alors, } x = \pm \sqrt{\frac{-1+3}{2}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1+3}{2}} = \pm \sqrt{2} ;$$

Comme b est positif ($b = 2\sqrt{3}$), les deux réels x et y ont le même signe

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x = 1 &\Rightarrow y = \sqrt{2} ; u_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ x = -2 &\Rightarrow y = 1 ; u_2 = -1 - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Les racines carrées de $z = -1 + 2i\sqrt{2}$ sont donc $\pm(1 + i\sqrt{2})$.

Exercices

N° 65. Calcule les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants : -16

$$; 8 ; i ; -9i ; 3+4i ; -5+12i ; 1-2i\sqrt{2} ; 1 - 2i\sqrt{6} ;$$

$$-24i\sqrt{5} - 29, -23 - 12i\sqrt{3} ; -15 - 8i ; -2 + 2i$$

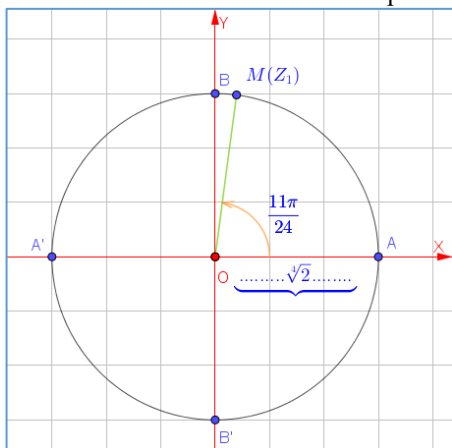
N° 66. Détermine le nombre complexe z dont une racine cinquième est

$$z = 2 \cos \frac{3\pi}{20} + 2i \sin \frac{3\pi}{20}.$$

N° 67. Dans le plan complexe, $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{19}$ sont les arguments des vingt racines vingtièmes d'un nombre complexe z de module 4. Sachant que

$$\theta_0 = \frac{\pi}{12}, \text{ que vaut : a. } \theta_{15} ? \quad \text{b. } z ?$$

N° 68. Le schéma ci-dessous représente dans le plan complexe l'une des racines sixièmes d'un nombre complexe z . Détermine sa forme algébrique.



N° 69. De $z^2 = -4 - 4\sqrt{3}i$, déduis le module et l'argument de z .

N° 70. Dans chacun des cas suivants, calcule les racines nièmes du nombre complexe z si :

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad n = 4$$

$$z = \frac{1}{24} (1 + i)^3 (1 - i\sqrt{3})^3 \quad n = 3$$

$$z = i^3 (1 + i)^2 \quad n = 5$$

$$z = \frac{8(-1+i)^3}{(1+\sqrt{3}i)^5} \quad n = 2$$

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^4}{16i^3} \quad n = 4$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{-2} \quad n = 5$$

N° 71. Calcule les racines cubiques de l'unité. Soit k et k' les racines complexes.

Montre que :

a) $k' = k^2$

b) $1 + k + k' = 0$

N° 72. Détermine les nombres complexes z tels que

a) $z^2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

b) $z^3 = 1 - i$

N° 73. Détermine les racines z_0, z_1 et z_2 de $z^3 = 2(1 - i\sqrt{3})$

Montre que $\frac{z_0 z_1}{z_2^2} = \frac{z_1 z_2}{z_0^2} = \frac{z_0 z_2}{z_1^2} = 1$

I.6. EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

I.6.1. EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A COEFFICIENTS (Exetat 2019)REELS

Forme générale : $az + b = 0$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Résolution

On procède comme dans $\mathbb{R}$:

$$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\} \text{ si } a \neq 0$$

$$S = \emptyset \text{ si } a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

$$S = \mathbb{C} \text{ si } a = 0 \text{ et } b = 0$$

Exemples :

$\bullet \quad 3z + 1 - i = 0$ $(3z + 1 - i = 0) \Leftrightarrow (3z = i - 1)$ $\Leftrightarrow (z = \frac{i-1}{3})$	$\bullet \quad (2 + i)z - 3 + i = 0$ $[(2 + i)z - 3 + i = 0]$ $\Leftrightarrow [(2 + i)z = 3 - i]$ $\Leftrightarrow (z = \frac{3-i}{2+i})$ $\Leftrightarrow (z = 1 - i)$
--	--

I.6.2. EQUATIONS DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS REELS

Principe de résolution

Soit $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

– Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède une racine double réelle : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

– Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemples

$\bullet \quad z^2 - z - 2 = 0$	$\bullet \quad z^2 - 6z + 9 = 0$	$\bullet \quad 2z^2 - 2z + \frac{5}{2} = 0$
$\Delta = 9$	$\Delta = 0$	$\Delta = -16$
$z_1 = 2 \text{ et } z_2 = -1$	$z_1 = z_2 = 3$	

$$z_1 = \frac{1}{2} + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} - i$$

Remarques

– Comme dans $\mathbb{R}$, on vérifie sans peine que si z_1 et z_2 sont les solutions d'une équation du second degré à coefficients réels alors :

$$S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad P = z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

– Si z_1 est un nombre complexe alors l'équation du second degré à coefficients réels dont z_1 est une racine est :

$$(z^2 - Sz + P = 0) \Leftrightarrow [z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1 \cdot \overline{z_1}] = 0]$$

Exemple

$z_1 = 1 + 2i$. On a l'équation :

$$\{z^2 - [(1 + 2i) + (1 - 2i)]z + (1 + 2i)(1 - 2i) = 0\} \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 5 = 0)$$

Exercices résolus

ER 34. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 2 = 0$

Résolution

Δ' désignant le discriminant simplifié de cette équation, on a :

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2 ; \sqrt{\Delta'} = \pm i$$

Les racines de cette équation sont $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -1 - i$.

ER 35. 2. Résous dans $\mathbb{C}$: $9z^2 - 12z + 16 = 0$;

Détermine le module et l'argument des racines.

Résolution

$$\text{On a : } \Delta' = 36 - 144 = -108 = 108i^2 ;$$

Ses racines carrées étant $\pm 6i\sqrt{3}$, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{6+6i\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3}(\sqrt{3} + i) = \left(\frac{4}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \frac{6-6i\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3}(\sqrt{3} - i) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$$

ER 36. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$

Résolution

$$\text{On a : } \Delta' = \cos^2 \alpha - 1 = -(1 - \cos^2 \alpha) = -\sin^2 \alpha = i^2 \sin^2 \alpha$$

Ses racines carrées étant $\pm i \sin \alpha$, Les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = 1 + i \sin \alpha = (1, \alpha) \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i \sin \alpha = (1, -\alpha)$$

Remarquons que les solutions d'une équation du second degré à coefficients réels sont deux nombres complexes conjugués.

ER 37. 4. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 - pz + q = 0$. Pour quelles valeurs des paramètres réels p et q le nombre complexe $z = 3 - 5i$ est-il solution de cette équation ?

Résolution

p et q étant des réels, $z = 3 - 5i$ et $\bar{z} = 3 + 5i$ sont les racines de l'équation.

$$\text{On a alors } S = p = z + \bar{z} \quad \text{et} \quad P = q = z \cdot \bar{z}$$
$$p = 6 \qquad q = 34$$

Application :

Décomposition d'un polynôme, à coefficients réels, en un produit des facteurs du premier degré à coefficients complexes.

Exemples :

$$\begin{aligned} (1) \quad z^2 + 16 &= z^2 - 16i^2 = (z - 4i)(z + 4i) \\ (2) \quad z^2 - 2z + 20 &= (z^2 - 2z) + 20 = (z - 1)^2 - 1 + 20 \\ &= (z - 1)^2 + 19 = (z - 1)^2 - 19i^2 \\ &= (z - 1 - i\sqrt{19})(z - 1 + i\sqrt{19}) \\ (3) \quad z^3 - 2z^2 + z - 2 &= (z^3 - 2z^2) + (z - 2) = z^2(z - 2) + (z - 2) \\ &= (z - 2)(z^2 + 1) = (z - 2)(z^2 - i^2) \\ &= (z - 2)(z - i)(z + i) \end{aligned}$$

Exercices

N° 74. Résous, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes puis, détermine le module et l'argument des racines :

a. $9z^2 - 24z + 41 = 0$	d. $9z^2 - 12z + 8 = 0$
b. $z^2 - 2z + 4 = 0$	e. $4z^2 - 14z + 31 = 0$
c. $z^2 + z + 1 = 0$	f. $9z^2 - 12\sqrt{3}z + 16 = 0$

N° 75. Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, d'inconnue z :

$$\begin{aligned} \text{a. } z^2 - \frac{2}{\cos \varphi} z + \frac{5}{\cos^2 \varphi} &= 4, \quad 0 < \varphi < \pi \quad \text{et} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} \\ \text{b. } (1 - \cos^2 \alpha)z^2 - 8z \sin \alpha + 16 + \cos^2 \alpha &= 0, \quad 0 < \alpha < \pi \end{aligned}$$

N° 76. Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, d'inconnue z , puis, déterminer le module et l'argument des racines :

$$\begin{aligned} \text{a. } z^2 + 2(1 - \cos \alpha)z + 2(1 - \cos \alpha) &= 0, \quad 0 < \alpha < \pi \\ \text{b. } 2(1 - \cos \beta)z^2 - 2z \sin \beta + 1 &= 0, \quad 0 < \beta < \pi \\ \text{c. } z^2 - 2z \cos \alpha + 1 + \cos^2 \alpha &= 0, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \\ \text{d. } 2z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 1 + \sin^2 \alpha &= 0, \quad 0 < \alpha < \pi \quad \text{et} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

I.6.3. EQUATION DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS COMPLEXES

Forme générale

Il s'agit de résoudre toute équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$;
Dans laquelle un au moins des coefficients a, b, c est un nombre complexe.

Principe de résolution

Sa résolution est celle d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$.

Exercices résolus

ER 38. Résous dans $\mathbb{C}$: $(1 - i)z^2 - 2z - (11 + 3i) = 0$

Résolution

$$a = 1 - i, \quad b = 2, \quad c = -(11 + 3i)$$

a) Calcul de Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1 - i)(11 + 3i) = 60 - 32i$$

b) Calcul des racines carrées de Δ

Soit $\delta = x + iy$ l'une des racines carrées de Δ ; dès lors, l'usage des formules

$$x = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(\Delta) + |\Delta|}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-\operatorname{Re}(\Delta) + |\Delta|}{2}} \quad \text{avec} \quad 2xy = \operatorname{Im}(\Delta)$$

donne :

$$x = \pm \sqrt{\frac{60 + \sqrt{60^2 + (-32)^2}}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-60 + \sqrt{60^2 + (-32)^2}}{2}}$$

$$x = \pm 8 \quad \text{et} \quad y = \pm 2 ;$$

comme $2xy = -32$ est négatif, x et y sont de signes contraires.

On a $\delta = 8 - 2i$.

les racines carrées de Δ sont donc : $\delta = \pm(8 - 2i)$

c) Détermination des solutions de l'équation donnée.

Les formules $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ donnent :

$$z_1 = 3 + 2i \text{ et } z_2 = -2 - i$$

La solution de l'équation donnée est donc $\mathcal{S} = \{3 + 2i : -2 - i\}$

ER 39. Résous dans $\mathbb{C}$: $iz^2 + (1 + i)z + \frac{1}{2} = 0$

Résolution

$$\Delta = 0 ; \quad z_1 = z_2 = \frac{-(1+i)}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

ER 40. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (5 - i)z + 8 - i = 0$

Résolution

On a : $\Delta = -8 - 6i$

L'une racine carrée de Δ est $1 - 3i$.

Les deux racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{-(5-i) + (1-3i)}{2} = -2 - i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-(5-i) - (1-3i)}{2} = -3 + 2i$$

ER 41. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$;

Détermine le module et l'argument chacune des solutions trouvées.

Résolution

De manière analogue, on trouve :

$$\Delta = -59 + 40i\sqrt{3} ; \quad \sqrt{\Delta} = \pm(4 + 5\sqrt{3}i).$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc :

$$z_1 = \frac{9+9i\sqrt{3}}{2} = \left(9, \frac{\pi}{3}\right) ; \quad z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \left(1, -\frac{\pi}{3}\right)$$

ER 42. Calcule les racines de l'équation $z^2 + 6iz - 25 = 0$

Résolution :

$$\Delta = (6i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = 64$$

Et on trouve : $z_1 = 4 - \frac{3}{2}i$ et $z_2 = -4 - \frac{3}{2}i$

Exercices

N° 77. Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a. $z^2 + (10i - 7)z - (11 + 41i) = 0$

b. $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$

- c. $z^2 + (9i - 5)z - 14 - 23i = 0$
- d. $z^2 + (3 + 2i)z + 5 + i = 0$
- e. $z^2 - 5(1 + i)z - 12 + 9i = 0$
- f. $z^2 + (1 + 2i)z + 3(1 + i) = 0$, puis détermine le module et l'argument de ces racines.
- g. $z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$, puis détermine le module et l'argument de ces racines.
- h. $-iz^2 + (2 + 2i)z + 10 + 5i = 0$
- i. $(1 - i)z^2 - 2z - (11 + 3i) = 0$
- j. $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$
- k. $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$
- l. $(4 - 3i)z^2 - (10 + 5i)z + 3 + 5i = 0$

N° 78. Détermine les valeurs de p et q sachant que :

- a. le nombre complexe $z = \frac{13}{3+2i}$ est l'une des racines de l'équation $z^2 + pz + q = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- b. le nombre complexe $z = \frac{25}{4-3i}$ est l'une des racines de l'équation $3z^2 + pz + q = 0$ dans $\mathbb{C}$.

N° 79. Etablis une équation du second degré ayant pour racines les nombres complexes :

- a. $z_1 = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2-3i}{i}$ et $z_2 = \frac{5i-4}{i} + \frac{3i-4}{1-2i}$?
- b. $z_1 = 3 - 5i$ et $z_2 = 2 + i$
- c. $z_1 = \frac{1+i}{i}$ et $z_2 = \frac{3i-5}{2}$
- d. $z_1 = 2i - \sqrt{3}$ et $z_2 = 3\sqrt{2} - i$
- e. $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 4 - 3i$

N° 80. Décompose les polynômes suivants en produit des facteurs à coefficients complexes :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> a. $z^2 + 3iz - 2$ b. $z^2 - z - (3i + 1)$ c. $2z^2 + (2 + 3i)z + 2i - 1$ d. $iz^3 + 8$ e. $iz^3 + (1 + 2i)z$ | <ul style="list-style-type: none"> f. $z^2 + 81$ g. $z^4 - 625$ h. $iz^2 + 4z - 5i$ i. $z^3 + 64$ |
|--|---|

N° 81. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

On désigne par t la racine de module 1.

Détermine le nombre réel x tel que $\frac{1+ix}{1-ix} = t$

N° 82. Trouve des nombres complexes tels que chacun soit le carré de l'autre.

1.6.4. EQUATION DU TYPE $z^n = \omega$ et EQUATIONS DU TYPE $az^{2n} + bz^n + c = 0$

Les solutions de l'équation $z^n = \omega$ sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ du complexe ω . La résolution de $az^{2n} + bz^n + c = 0$ s'obtient en posant $z^n = \omega$ et en résolvant l'équation du second degré $a\omega^2 + b\omega + c = 0$

Exercices résolus

ER 43. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = -8i$

Résolution

Les solutions de l'équation donnée sont les racines cubiques de $a = -8i$

$$\text{On a : } a = -8i \Rightarrow a = \left(8, \frac{3\pi}{2}\right)$$

L'expression générale des racines cubiques de a étant :

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], k \in \{0, 1, 2\};$$

$$. k = 0 \Rightarrow z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$. k = 1 \Rightarrow z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$. k = 2 \Rightarrow z_2 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i$$

ER 44. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i)z^3 - 2i = 0$

Résolution

L'équation donnée est une équation trinôme.

Posons $z^3 = \omega$, (1) pour avoir : $\omega^2 + (1 - 2i)\omega - 2i = 0$ (2).

Son discriminant étant $\Delta = -3 + 4i$, ses racines carrées sont : $\pm(1 - 2i)$.

D'où $\omega_1 = 2i$ et $\omega_2 = -1$.

De (1), - Si $\omega = 2i$ alors, $z^3 = 2i$.

Les z_k sont les racines cubiques de $2i$; avec $2i = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, l'expression générale des ces racines cubiques est :

$$\begin{aligned}
 z_k &= \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], k \in \{0,1,2\} \\
 . k = 0 &\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 . k = 1 &\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 . k = 2 &\Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt[3]{2}i \\
 - \text{ Si } \omega &= -1, \text{ alors, } z^3 = -1.
 \end{aligned}$$

Les z'_k sont les racines cubiques de -1 ; avec $-1 = (1, \pi)$,

L'expression générale de ces racines cubiques est :

$$\begin{aligned}
 z'_k &= \sqrt[3]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], k' \in \{0,1,2\} \\
 k = 0 &\Rightarrow z'_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 k = 1 &\Rightarrow z'_1 = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 &= (\cos \pi + i \sin \pi) = -1 \\
 . k = 2 &\Rightarrow z'_2 = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions de l'équation donnée est donc :

$$\mathcal{S} = \{z_0; z_1; z_2; z'_0; z'_1; z'_2\}$$

Remarque

Pour les équations de types $az + b\bar{z} + c = 0$ et $z^2 + |z|^2 + c = 0$, Nous conseillons de poser $z = x + iy$ afin d'appliquer la nullité d'un nombre complexe ; cela conduit à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Exemple

Résons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz + (1 - i)\bar{z} - (2 + i) = 0$.

Posons $z = x + iy$, l'équation donnée devient :

$$\begin{aligned} i(x + iy) + (1 - i)(x - iy) - (2 + i) &= 0 \\ \Rightarrow (x - 2y - 2) - (1 + y)i &= 0 \end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 1 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont $z = -i$ et $\bar{z} = i$

N.B. Une autre manière de procéder est de résoudre le système formé par l'équation donnée et celle formée par son conjugué :

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0 \\ \bar{b}z + \overline{az} + \bar{c} = 0 \end{cases}$$

Ceci nous amène à trouver deux solutions de notre équation : z et son conjugué $\bar{z}$

Ainsi, pour l'équation $iz + (1 - i)\bar{z} - (2 + i) = 0$,

son équation conjuguée est : $-i\bar{z} + (1 + i)z - (2 - i) = 0$

D'où le système :
$$\begin{cases} iz + (1 - i)\bar{z} - (2 + i) = 0 \\ (1 + i)z - i\bar{z} - (2 - i) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, on a :

$$D = \begin{vmatrix} i & 1 - i \\ 1 + i & -i \end{vmatrix} = -1 \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 + i & 1 - i \\ 2 - i & -i \end{vmatrix} = i$$

$$D_{\bar{z}} = \begin{vmatrix} i & 2 + i \\ 1 + i & 2 - i \end{vmatrix} = -i$$

$$\text{Par suite, } z = \frac{i}{-1} = -i \quad \bar{z} = \frac{-i}{-1} = i$$

Exemple

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + |z|^2 + i - 2 = 0$

Posons $z = x + iy$;

L'équation donnée devient alors :

$$(x + iy)^2 + |x + iy|^2 + i - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 + (2xy + 1)i = 0$$

D'où le système

$$\begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 & (1) \\ 2xy + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) Donne : $x = -1$ et $x = 1$.

Ainsi, de (2), $x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. D'où, $z_1 = -1 + \frac{1}{2}i$

$$x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}. \text{ D'où, } z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$$

La solution de l'équation donnée est donc : $\mathcal{S} = \left\{ -1 + \frac{1}{2}i; 1 - \frac{1}{2}i \right\}$

Exercices

N° 83. Résous dans $\mathbb{C}$:

- $|z|^2 - (2 + 3i)z + 3 + i = 0$
- $|z|^2 + iz = 5i + 31$
- $(2 + i)z - (11 - 7i)\bar{z} = 39i - 147$
- $iz + (3i - 1)\bar{z} = 4 - 7i$
- $z\bar{z} + (1 - i)z - 2\bar{z} = 12 + 8i$

N° 84. Résous dans $\mathbb{C}$:

- $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
- $z^6 - (4 - 2i)z^3 + 6 = 0$
- $z^6 - 2i\sqrt{3}z^3 - 4 = 0$

N° 85. Dans le corps des nombres complexes, quels sont les nombres complexes z vérifiant $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$?

N° 86. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$.

- Quelle est la solution de cette équation ?
- On désigne par A, B et C les points-images, dans le plan complexe, des solutions de cette équation. Place ces points dans le plan de Gauss et donne la nature du triangle ABC.

I.3.5. EQUATION DU TROISIEME DEGRE

a. Equations à coefficients réels

* **Forme générale :** $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ (1) où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

* Résolution

- Pose $z = x + \alpha$ avec $x, \alpha \in \mathbb{R}$.
- Porte cette valeur de z dans (1) pour obtenir l'équation en x :

$$x^3 + (3\alpha + a)x^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)x + \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (2)$$

– Détermine α de manière que l'équation (2) ne contienne pas des termes en x^2 .

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3) \quad \text{avec} \quad (3\alpha + a = 0) \Leftrightarrow (\alpha = \frac{-a}{3})$$

$$p = 3\alpha^2 + 2a\alpha + b \quad \text{et} \quad q = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$$

– Pose $x = u + v$, avec $u \cdot v = \frac{-p}{3} \in \mathbb{R}$.

L'équation (3), dans laquelle on porte cette valeur de x , permet d'obtenir le système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} \quad (4)$$

– Résoudre le système (4) par l'une des méthodes connues.

Exemple

$$\bullet \quad z^3 + 3z^2 + 15z + 76 = 0$$

(a)

En prenant $z = x + \alpha$ on obtient l'équation :

$$(x + \alpha)^3 + 3(x + \alpha)^2 + 15(x + \alpha) + 76 = 0 \quad \text{ou}$$

$$x^3 + (3\alpha + 3)x^2 + (3\alpha^2 + 6\alpha + 15)x + \alpha^3 + 3\alpha^2 + 15\alpha + 76 = 0 \quad (b)$$

L'équation (b) ne contient pas des termes en x^2 si : $(3\alpha + 3 = 0) \Leftrightarrow (\alpha = -1)$

En portant cette valeur de α dans (b) on obtient l'équation

$$x^3 + 12x + 63 = 0 \quad \text{où} \quad p = 12 \quad \text{et} \quad q = 63. \text{ D'où le système :}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -63 \\ uv = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u^6 + 63u^3 - 64 = 0 \\ v = \frac{-4}{u} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 63t - 64 = 0 \\ v = \frac{-4}{u} \end{cases} \quad (\text{avec } t = u^3) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ ou } t = -64 \\ v = \frac{-4}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 1 \text{ ou } u^3 = -64 \\ v = \frac{-4}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u = -4 \\ v = 1 \end{cases}$$

Comme $x = u + v$, on obtient : $x = -3$ ou $x = 3$

L'égalité $z = x + \alpha$ donne : $z = -4$ ou $z = 2$ (car $\alpha = -1$)

En portant chacune de ces valeurs dans (a), on constate que $z = -4$ vérifie l'équation mais $z = 2$ ne la vérifie pas. Par la méthode de Horner, on obtient :

$$(z^3 + 3z^2 + 15z + 76 = 0) \Leftrightarrow [(z + 4)(z^2 - z + 19) = 0]$$

$$\Leftrightarrow \left(z = -4, z = \frac{1+5\sqrt{3}i}{2}, z = \frac{1-5\sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\text{D'où : } S = \left\{ -4, \frac{1+5\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-5\sqrt{3}i}{2} \right\}$$

Remarques

- Dans la forme générale si le coefficient de z^3 n'est pas 1, alors on divise ou on multiplie les deux membres de l'équation par ce coefficient
- On peut aussi procéder par la factorisation pour résoudre ce type d'équation.

Exemples

$$\text{a) } \frac{1}{4}z^3 - \frac{13}{4}z + 3 = 0$$

$$\text{On a : } \left(\frac{1}{4}z^3 - \frac{13}{4}z + 3 = 0 \right) \Leftrightarrow (z^3 - 13z + 12 = 0)$$

(i)

On vérifie que 1 est une solution de l'équation (i) et on factorise par la méthode de Horner le premier membre de (i) :

$$(z^3 - 13z + 12 = 0) \Leftrightarrow [(z - 1)(z + 4)(z - 3) = 0]$$

$$\Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } z = -4 \text{ ou } z = 3). \quad S = \{1, -4, 3\}.$$

b) $2z^3 - z^2 + 2z - 1 = 0$

On a : $(2z^3 - z^2 + 2z - 1 = 0) \Leftrightarrow (z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{2} = 0)$ (ii)

On vérifie que i est solution de l'équation (ii), en procédant comme au premier exemple, on a :

$$(z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{2} = 0) \Leftrightarrow [(z - i)(z + i)(z - \frac{1}{2}) = 0]. \quad S = \{\frac{1}{2}, -i, i\}$$

b. Equations à coefficients complexes

b.1. Une des racines de l'équation est donnée, soit z_0 .

Première méthode

- Utiliser la règle de Horner pour factoriser le premier membre.
- Obtenir un produit de deux facteurs dont l'un est du premier degré et l'autre du second degré.
- Appliquer la règle du produit nul et résoudre les équations obtenues.

Exemple

$z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0$; $z_0 = 2i$. Par la règle de Horner, on a :

$$\begin{aligned} [z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0] &\Leftrightarrow \{(z - 2i)[z^2 - (2 - 2i)z - 10i] = 0\} \\ &\Leftrightarrow (z = 2i \text{ ou } z = 3 + i \text{ ou } z = -1 - 3i) \\ S &= \{2i, 3 + i, -1 - 3i\} \end{aligned}$$

Deuxième méthode

- Remplacer dans l'équation donnée (1) z par z_0 et obtenir une égalité (1').
- Retrancher (1') de (1) et obtenir une expression qui permet de mettre en évidence $z - z_0$.
- Factoriser par Horner et résoudre l'équation – produit obtenue.

Exemple

$$z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0 ; \quad z_0 = 2i. \quad (i)$$

$$\text{Pour } z = 2i, \text{ on a : } (2i)^3 - (2i)^2 + 2(2 - 3i)(2i) - 20 = 0 \quad (ii)$$

(i) et (ii) donnent :

$$\begin{aligned}
& \{[z^3 - (2i)^3] - 2[z^2 - (2i)^2] + 2(2 - 3i)(z - 2i) = 0\} \\
& \Leftrightarrow [(z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) - 2(z - 2i)(z + 2i) + 2(2 - 3i)(z - 2i) = 0] \\
& \Leftrightarrow \{(z - 2i) = 0 \quad \text{ou} \quad [z^2 + 2(i - 1)z - 10i] = 0\} \\
& \Leftrightarrow (z_0 = 2i, \quad z_1 = 3 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 3i)
\end{aligned}$$

b.2. Une des racines de l'équation est réelle (respectivement imaginaire)

- Donner au premier membre de l'équation la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Appliquer le principe de nullité d'un nombre complexe. Ce qui permet de trouver la racine réelle (respectivement imaginaire).
- Procéder comme au point (1).

Exemples

- $z^3 - 6z^2 + (12 + 2i)z - 8 - 4i = 0$ sachant que l'une des racines est réelle.

L'équation donnée peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
(z^3 - 6z^2 + 12z + 2iz - 8 - 4i = 0) & \Leftrightarrow [z^3 - 6z^2 + 12z - 8 + (2z - 4)i = 0] \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \\ z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$z = 2$ est une racine réelle qui vérifie l'équation donnée.

On procède comme au point (1) pour résoudre l'équation.

$$\text{Ainsi : } z^3 - 6z^2 + (12 + 2i)z - 8 - 4i = 0 \quad (\text{i})$$

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + (12 + 2i) \cdot 2 - 8 - 4i = 0 \quad (\text{ii})$$

En soustrayant membre à membre (ii) de (i) on a :

$$\begin{aligned}
[(z^3 - 2^3) - 6(z^2 - 2^2) + (12 + 2i)(z - 2) = 0] & \Leftrightarrow [(z - 2)(z^2 - 4z + 4 + 2i) = 0] \\
& \Leftrightarrow (z = 2, \quad z = 3 - i \quad \text{et} \quad z = 1 + i)
\end{aligned}$$

- $z^3 - (1 + 8i)z^2 + (17i - 7)z - 10i + 30 = 0$ sachant que l'une de ses racines est imaginaire pure.

$$z^3 - (1 + 8i)z^2 + (17i - 7)z - 10i + 30 = 0 \quad (\text{i})$$

Soit xi une solution de (i).

$$\begin{aligned}
\text{On a : } & -x^3i - (1 + 8i)(xi)^2 + (17i - 7)(xi) - 10i + 30 = 0 \\
& -x^3i + (1 + 8i)x^2 + (17i - 7)xi - 10i + 30 = 0 \\
& -x^3i + x^2 + 8ix^2 - 17x - 7xi - 10i + 30 = 0 \\
& (x^2 - 17x + 30) + i(-x^3 + 8x^2 - 7x - 10) = 0 \\
& \begin{cases} x^2 - 17x + 30 = 0 & (ii) \\ -x^3 + 8x^2 - 7x - 10 = 0 & (iii) \end{cases}
\end{aligned}$$

Les solutions de (ii) sont : 15 et 2.

De ces deux valeurs seule 2 vérifie (iii).

Ainsi, $z_0 = 2i$ et on raisonne comme au point (1).

En effet, la factorisation de (i) donne :

$$(z - 2i)[z^2 - (1 + 6i)z + 5 + 15i] = 0 \quad (iv)$$

$$\text{où } z_0 = 2i \quad (v)$$

$$\text{et } z^2 - (1 + 6i)z + 5 + 15i = 0 \quad (vi)$$

La résolution de l'équation du second degré (vi) donne les racines :

$$z_1 = \frac{1+6i+3-8i}{2} = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+6i-3+8i}{2} = -1+7i.$$

D'où l'équation (i) a pour ensemble-solution : $S = \{2i, 2-i, -1+7i\}$.

Exercices

N° 87. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (Détermine d'abord la solution indiquée z_0).

a) $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i = 0 \quad (z_0 \in \mathbb{R})$

b) $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = 0 \quad (z_0 \text{ est imaginaire pur})$

c) $z^3 + 2(3 - 2i)z^2 + (8 - 15i)z + 3 - 11i = 0 \quad (z_0 \in \mathbb{R})$

d) $z^3 + (3 + 2i)z^2 + (3 - i)z + 2(1 - 5i) = 0 \quad (z_0 \in \mathbb{R})$

e) $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0 \quad (z_0 = 1 - i)$

f) $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - (6i + 2) = 0 \quad (z_0 \text{ est imaginaire pur})$

g) $2z^3 - 5z^2 + (5 - 2i)z + 3(i - 1) = 0 \quad (z_0 \in \mathbb{R})$

h) $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0 \quad (z_0 \in \mathbb{R})$

N° 88. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes où $x \in \mathbb{C}$.

a) $x^3 - 12x - 8\sqrt{2} = 0$

d) $x^3 - 2x^2 + 2(2 - 3i)x - 20 = 0 \quad (x_0 = 2i)$

b) $x^3 - 15x - 4 = 0$

e) $4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4 = 0$

c) $4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4 = 0 \quad (x_0 \in \mathbb{R})$

Remarque

Les méthodes exposées dans la résolution des équations du troisième degré servent aussi à résoudre les équations de degré supérieur à 3.

Exercice résolu

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$ (i)

Résolution

a) Le réel 1, diviseur de -5 , vérifie l'équation. Par la méthode diviseur binôme, le premier membre de (i) est divisible par $z - 1$.

Ainsi, (i) s'écrit :

$$(z - 1)[z^3 - (3 + 4i)z^2 + (8i - 3)z + 5] = 0 \quad (\text{ii})$$

L'équation $z^3 - (3 + 4i)z^2 + (8i - 3)z + 5 = 0$ est vérifiée pour $z = i$.

Ainsi, nous avons :

$$z^3 - (3 + 3i)z^2 + (8i - 3)z + 5 = (z - i)(z^2 - (3 + 3i)z + 5i)$$

L'équation (ii) devient : $(z - 1)(z - i)[z^2 - (3 + 3i)z + 5i] = 0$.

Ce qui donne : $z = 1$, $z = i$ et $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$.

$S = \{1, i, 2+i, 1+2i\}$.

Elles se résolvent par la décomposition en facteurs, généralement en s'appuyant sur la règle de HORNER.

Exercices

N° 89. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante sachant qu'elle admet deux racines opposées : $z^4 - 3z^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 0$

N° 90. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet z_0 comme racine.

$$z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0 \quad (z_0 = 1 - i)$$

N° 91. Soit P un polynôme de variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (5 + 2i)z^2 + (11 + 5i)z - 12i \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

a) Montre que P admet une racine imaginaire pure et détermine-la.

b) Résous l'équation $P(z) = 0$ et donne ses solutions sous forme algébrique

et sous forme trigonométrique.

c) Représente ces solutions dans un plan complexe. Appelant A, B et C leurs images, détermine la nature du triangle ABC.

N° 92. Soit l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24i$ où a et b sont des nombres complexes.

a) Détermine a et b de sorte que :

$$f(1) = -44 + 32i \quad \text{et} \quad f(-1) = -30 + 16i.$$

b) En prenant $a = 5$ et $b = -8 + 8i$, démontre qu'il existe un réel r , unique, tel que $f(r) = 0$.

N° 93. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes où $x \in \mathbb{C}$.

$$\text{a) } x^3 - 12x - 8\sqrt{2} = 0 \quad \text{d) } x^3 - 2x^2 + 2(2 - 3i)x - 20 = 0 \quad (x_0 = 2i)$$

$$\text{b) } x^3 - 15x - 4 = 0 \quad \text{e) } 4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4 = 0$$

$$\text{c) } 4x^3 - 6i\sqrt{3}x^2 - 3(3 + i\sqrt{3})x - 4 = 0 \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

I.7. APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

I.7.1. LINEARISATION D'UN POLYNOME TRIGONOMETRIQUE

Définition

Soit $P(x) = \sin^m x \cos^n x$, une expression trigonométrique.

Linéariser $P(x)$ revient à la transformer en somme ou différence des termes du premier degré en sinus ou cosinus des multiples de x .

Cette opération peut se réaliser en utilisant les grandes formules de la trigonométrie ou les formules d'Euler.

Formules d'Euler

Rappelons que :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad (1)$$

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \quad (2)$$

La somme membre à membre de (1) et (2) donne :

$$2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ ou } \cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (3)$$

La soustraction membre à membre de (1) et (2) donne :

$$2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ ou } \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (4)$$

$$\text{Par suite, } \cos m\theta + i \sin m\theta = e^{im\theta} \text{ ou } \cos m\theta + i \sin m\theta = z^m \quad (5)$$

$$\cos m\theta - i \sin m\theta = e^{-im\theta} \text{ ou } \cos m\theta - i \sin m\theta = \bar{z}^m \quad (6)$$

La somme membre à membre de (5) et (6) donne :

$$2 \cos m\theta = e^{im\theta} + e^{-im\theta} \Rightarrow \cos m\theta = \frac{e^{im\theta} + e^{-im\theta}}{2} \\ \text{ou } \cos m\theta = \frac{z^m + \bar{z}^m}{2}$$

La soustraction membre à membre de (5) et (6) donne :

$$2i \sin m\theta = e^{im\theta} - e^{-im\theta} \Rightarrow \sin m\theta = \frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{2i} \\ \text{ou } \sin m\theta = \frac{z^m - \bar{z}^m}{2i}$$

On obtient ainsi les formules :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\cos m\theta = \frac{e^{im\theta} + e^{-im\theta}}{2}, \quad \sin m\theta = \frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{2i} \quad (7)$$

$$\text{ou } \cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ \cos m\theta = \frac{z^m + \bar{z}^m}{2}, \quad \sin m\theta = \frac{z^m - \bar{z}^m}{2i} \quad (8)$$

appelées **formules d'Euler**.

– De même, élever à la $n^{\text{ième}}$ puissance chaque membre de (3) et (4) pour obtenir :

$$\cos^n \theta = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^n \text{ ou } \cos^n \theta = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n \quad (9)$$

$$\sin^n \theta = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^n \text{ ou } \sin^n \theta = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n \quad (10)$$

– Développer le second membre de (7) et (8) en utilisant le binôme de Newton. Tenir compte des égalités (5) et (6). Le résultat qu'on obtient exprime $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ comme une combinaison linéaire de $\cos kx$ ou $\sin kx$ avec $0 < k < n$.

Exercice résolu

ER 45. Linéarise chacune des expressions suivantes :

- a) $\cos^2 x$ b) $\sin^2 x \cos^2 x$ c) $\sin^2 x \cdot \cos^4 x$ d) $\sin^6 x$
e) $\sin^3 x \cdot \cos^4 x$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 x &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} + \frac{1}{2} z\bar{z} \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \\ (\text{Formule (3) et } z\bar{z} = |z| = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^2 \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{16} [(z-\bar{z})(z+\bar{z})]^2 \\ &= -\frac{1}{16} (z^2 - \bar{z}^2)^2 \\ &= -\frac{1}{16} (z^4 + \bar{z}^4 - 2) \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{z^4 + \bar{z}^4}{2} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{8} (\cos 4x - 1) \end{aligned}$$

c. $\sin^2 x \cdot \cos^4 x$

$$\begin{aligned} \text{On a: } P(x) &= (\sin x)^2 \cdot (\cos x)^4 \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= -\frac{1}{64} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})]^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}) (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{64}(e^{6ix} + 2e^{4ix} + e^{2ix} - 2e^{2ix} - 4 - 2e^{-2ix} + e^{-2ix} + \\
&2e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\
&= -\frac{1}{64}[(e^{6ix} + e^{-6ix}) + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix} - 4)] \\
&= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6ix} + e^{-6ix}}{2}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{1}{16} \\
&= -\frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

d. $\sin^6 x$. On a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (\sin x)^6 \\
&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 \\
&= \frac{-1}{64}(e^{ix} - e^{-ix})^6 \\
&= -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\
&= -\frac{1}{64}[(e^{6ix} + e^{-6ix}) - 6(e^{4ix} + e^{-4ix}) + (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 20] \\
&= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6ix} + e^{-6ix}}{2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) - \frac{15}{32}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{5}{16} \\
&= -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

e. $\sin^3 x \cdot \cos^4 x$

On a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (\sin x)^3 \cdot (\cos x)^4 \\
&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{ix} - e^{-ix})^3(e^{ix} + e^{-ix})^4 \\
&= -\frac{1}{128i}[(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})]^3(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{2ix} - e^{-2ix})^3(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix})(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{7ix} + e^{5ix} - 3e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{-3ix} \\
&\quad - e^{-5ix} - e^{-7ix})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{128i} [(e^{7ix} - e^{-7ix}) + (e^{5ix} - e^{-5ix}) - 3(e^{3ix} - e^{-3ix}) \\
&\quad - 3(e^{ix} - e^{-ix})] \\
&= -\frac{1}{64} \left(\frac{e^{7ix} - e^{-7ix}}{2i} \right) - \frac{1}{64} \left(\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} \right) + \frac{3}{64} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \right) + \frac{3}{64} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\
&= -\frac{1}{64} \sin 7x - \frac{1}{64} \sin 5x + \frac{3}{64} \sin 3x + \frac{3}{64} \sin x
\end{aligned}$$

Exercices

N° 94. Linéarise :

1. $P(x) = \cos^6 x$	4. $R(x) = \cos^4 x \cdot \sin^2 x$
2. $N(x) = \sin^6 x$	5. $S(x) = \cos^5 x \cdot \sin^4 x$
3. $Q(x) = \cos^2 x \cdot \sin^6 x$	6. $H(x) = \cos^3 x \cdot \sin^5 x$

1.7.2. POLYNOMES DANS $\mathbb{C}$

Rappel sur les racines d'un polynôme à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Tout polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ admet au plus n racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ et peut se factoriser comme suit :

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Formules de Viète

Les formules de **Viète**² établissent un lien entre les racines d'un polynôme et les coefficients des termes de ce polynôme.

1. Cas d'un polynôme du second degré

Soit, dans $\mathbb{C}$, le polynôme

$$P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (1), \text{ admettant } \alpha \text{ et } \beta \text{ comme racines.}$$

On doit avoir :

$$P(z) = a_2 (z - \alpha)(z - \beta)$$

$$\text{Soit, } P(z) = a_2 z^2 - a_2(\alpha + \beta)z + a_2 \alpha \beta \quad (2).$$

L'identification de (1) et (2) donne :

(²)François **Viète**, mathématicien français (1540-1604)

$$\begin{cases} -a_2(\alpha + \beta) = a_1 \\ a_2\alpha\beta = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{a_1}{a_2} \\ \alpha\beta = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

Ce sont là les formules de Viète pour un polynôme du second degré. Dans $\mathbb{R}$, elles correspondent au problème de somme et produit des racines d'une équation du second degré.

2. Cas d'un polynôme du troisième degré

Soit le polynôme du troisième degré :

$$P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad (1)$$

Admettant α, β et γ comme racines.

On doit avoir : $P(z) = a_3(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$

$$\text{Soit, } P(z) = a_3z^3 - a_3(\alpha + \beta + \gamma)z^2 + a_3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)z - a_3\alpha\beta\gamma \quad (2)$$

L'identification de (1) et (2) donne :

$$\begin{cases} -a_3(\alpha + \beta + \gamma) = a_2 \\ a_3(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) = a_1 \\ -a_3\alpha\beta\gamma = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{a_2}{a_3} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{a_1}{a_3} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

On obtient ainsi les formules de Viète pour un polynôme du troisième degré.

On démontre de même que si $P(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ est un polynôme du quatrième degré de racines α, β, γ et δ , alors les formules de Viète pour ce polynôme s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{a_3}{a_4} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{a_2}{a_4} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{a_1}{a_4} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma\delta = -\frac{a_0}{a_4} \end{cases} \quad (4)$$

En général, si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

est un polynôme admettant $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ comme racines, alors d'après Viète, on a les formules :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Ces formules généralisent ainsi le problème de somme et de produit des racines d'une équation dans $\mathbb{C}$.

Exercices résolus

ER 46. 1. Soit z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 + (2i - 5)z^2 + 7(1 - i)z - 2 + 6i = 0$$

Sans les déterminer préalablement, calcule l'expression $E = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

Résolution

Pour $n = 3$, les formules de Viète s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 &= 5 - 2i \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 &= 7 - 7i \\ z_1 z_2 z_3 &= 2 - 6i \end{cases}$$

Par suite, l'expression

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \\ &= \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{z_1 z_2 z_3} \\ &= \frac{7 - 7i}{2 - 6i} \\ &= \frac{7}{5} + \frac{7}{10}i \end{aligned}$$

ER 47. 2. Si z_1, z_2 et z_3 sont les racines de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0,$$

Sans les déterminer préalablement, calcule chacune des expressions suivantes :

$$\text{a. } F = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 3z_1z_2z_3$$

$$\text{b. } G = \frac{1}{z_1^2 z_2^2} + \frac{1}{z_2^2 z_3^2} + \frac{1}{z_1^2 z_3^2}$$

Résolution

Pour $a_0 = 3(2i - 1)$; $a_1 = -(i + 4)$; $a_2 = 2i - 1$; $a_3 = i$;

1. Les formules de Viète s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 &= -2 - i \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 &= -1 + 4i \\ z_1z_2z_3 &= -6 - 3i \end{cases}$$

2. a. L'expression donnée se transforme en :

$$\begin{aligned} F &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 3z_1z_2z_3 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) - \\ &\quad 3z_1z_2z_3 \\ &= (-2 - i)^2 - 2(-1 + 4i) - 3(-6 - 3i) \\ &= 4 + 4i - 1 + 2 - 8i + 18 + 9i \\ &= 23 + 5i \end{aligned}$$

b. L'expression donnée se transforme en :

$$\begin{aligned} F &= \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} \\ &= \frac{(z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)}{(z_1z_2z_3)^2} \\ &= \frac{(-2 - i)^2 - 2(-1 + 4i)}{(-6 - 3i)^2} \\ &= \frac{5 - 4i}{27 + 36i} \\ &= \frac{-1}{225} - \frac{32}{225}i \end{aligned}$$

Exercices

N° 95. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $(2i - 1)z^2 - (1 + i)z + i = 0$ admet deux racines z_1 et z_2 . Sans les déterminer préalablement, calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

$$\text{a. } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$$

$$\text{c. } \frac{2}{z_1^2} + \frac{2}{z_2^2}$$

$$\text{e. } \frac{4}{z_2 - i} + \frac{4}{z_1 - i}$$

b. $z_1^3 + z_2^3$

d. $3z_1^2 z_2 + 3z_2^2 z_1 - iz_1 - iz_2$

f. $\frac{z_1-3}{2z_1+5} + \frac{z_2-3}{2z_2+5}$

N° 96. Soit l'équation $(1 - i)z^2 + \lambda z - 11 - 3i = 0$ définie dans $\mathbb{C}$.

- Détermine le paramètre λ pour que les racines z_1 et z_2 de cette équation vérifient la relation $z_1 - z_2 = 5 + 3i$.
- Pour la valeur de λ ainsi obtenue, trouve la solution de l'équation donnée ?

N° 97. On donne l'équation $z^3 - 3(1 + i)z^2 + \lambda z + 4 - 4i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

- Détermine le paramètre λ pour que les racines z_1, z_2 et z_3 de cette équation forment une progression arithmétique.
- Quelles sont alors les solutions de cette équation pour la valeur de λ ainsi obtenue ?

N° 98. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (6 - i)z^2 - 4z - 2\lambda + i = 0$.

- Pour quelle valeur de λ cette équation admet-elle deux racines opposées ?
- Déduis-en, dans ces conditions, les solutions de l'équation.

N° 99. L'équation dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 2z^3 + (a - 3)z^2 - (2b - i)z + 1 - a = 0$ admet deux racines opposées ; les deux autres étant inverses. Détermine a et b, puis déduis la solution de l'équation.

N° 100. L'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (1 - 3i)z^2 + (13 - 12i)z - (10 - 15i) = 0$, admet trois racines en progression arithmétique de raison réelle et positive. Quelle est sa solution ?

N° 101. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - \lambda z + 3 - 4i = 0$. Détermine λ sachant que cette équation admette trois racines z_1, z_2 et z_3 et que $z_1 + z_2 = 1$

N° 102. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (2 - \lambda i)z^2 + \left(i - \frac{\lambda^2}{2}\right)z + 4 - i = 0$ Détermine λ pour que ses racines α, β et γ vérifient la relation

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 2 - i$$

N° 103. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$iz^3 + (2i - 1)z^2 - (4 - i)z - 3(5i - 1) = 0$ dont les racines sont notées α, β et γ . Sans les déterminer préalablement, calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

a. $E = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

b. $F = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

c. $G = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

N° 104. L'équation $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - (6i + 2) = 0$ définie dans $\mathbb{C}$ admet les racines notées α, β et γ . Sans les déterminer préalablement, calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

a. $A = \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha\beta}$

b. $B = \frac{\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

I.7.3. APPLICATION AUX CIRCUITS ELECTRIQUES

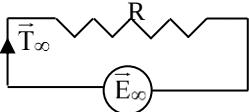
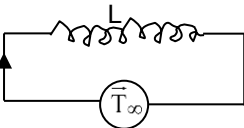
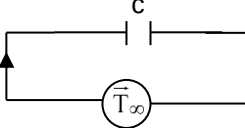
1. Circuit simple

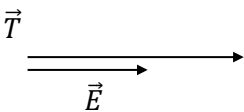
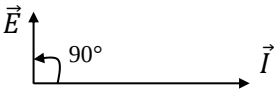
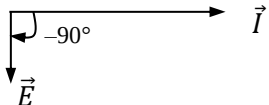
En électricité, un circuit est dit simple s'il ne comporte qu'un seul des éléments suivants :

- une résistance pure dont la valeur est notée R (ohm)
- une bobine dont le coefficient de self-induction est noté L (henry)
- un condensateur dont la capacité est notée c (farad).

Lorsqu'on applique aux bornes d'un circuit simple une tension alternative E de pulsation ω , un courant alternatif I de pulsation ω ($\omega = 2\pi N$) parcourt ce circuit tout en étant limité par un « frein » appelé impédance du circuit. Celle-ci est notée Z .

Rappels sur les impédances des circuits simples :

Résistance pure	Bobine	Condensateur
		

$\vec{E}$ est en phase avec $\vec{T}$.  $\vec{E} = R\vec{I}$ $Z = R$ R est la résistance du circuit.	$\vec{E}$ est déphasé de 90° en avant sur avec $\vec{I}$.  $\vec{E} = iL\omega\vec{I}$ $Z = iL\omega$ $L\omega$ est la réactance du circuit. Z est toujours l'impédance complexe du circuit.	$\vec{E}$ est déphasé de 90° en arrière sur avec $\vec{I}$.  $\vec{E} = -i\frac{1}{C\omega}\vec{I}$ $z = -i\frac{1}{C\omega}$ $\frac{1}{C\omega}$ est la capacitance du circuit.
---	---	---

2. Circuit composé

En électricité, un circuit est dit « composé » s'il comporte plusieurs circuits simples associés en série et/ou en parallèle.

Dans un circuit composé, les lois d'association des impédances complexes en série et en parallèle sont les mêmes que les lois d'association des résistances en série et en parallèle en courant continu.

$Z = a + bi$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) désigne l'impédance complexe du circuit composé, $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$ désigne le module de z et $\cos \varphi = \frac{a}{Z}$ représente le facteur de puissance du circuit.

Exercices résolus

ER 48. 1. Un circuit est formé d'une lampe de $R = 220 \Omega$, d'une bobine de self de 2Ω de résistance ohm et de 2 Henry de coefficient de self. Ainsi qu'un condensateur de $10 \mu\text{F}$. La tension aux bornes du circuit est de 130 V et la fréquence $N = 50 \text{ Hz}$. Calcule l'intensité efficace, le déphasage φ , $\cos \varphi$, la fréquence de la résonance N_0 et l'intensité à la résistance.

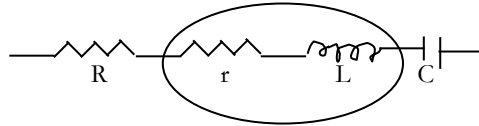
Résolution

Données

$$R = 220 \, \Omega ; r = 2 \, \Omega ; L = 2 \, \text{H}$$

$$C = 10 \, \mu\text{F} ; U = 130 \, \text{V} \quad \text{et } N$$

$$= 50 \, \text{Hz}$$



$$\begin{aligned} z &= (R + r) + i(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \quad \left| \begin{array}{l} \tan \theta = \frac{310}{222} \approx 1,4 \\ \theta = 54,5^\circ \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} i = \frac{U \cos 0}{Z \cos \theta} \\ = \frac{130 \text{ cis } 0}{381 \text{ cis } 54,5^\circ} \\ = 0,34 \text{ cis } (-54,5^\circ) \end{array} \right. \\ &= 222 + i(628 - 318,5) \\ &= 222 + 309,5i \\ Z &= \sqrt{(222)^2 + (310)^2} \quad z = 381 \text{ cis } (54,5^\circ) \\ &= 381 \, \Omega \end{aligned}$$

L'intensité efficace est 0,34 A. Le déphasage est $-54,5^\circ$.

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{222}{381} = 0,58.$$

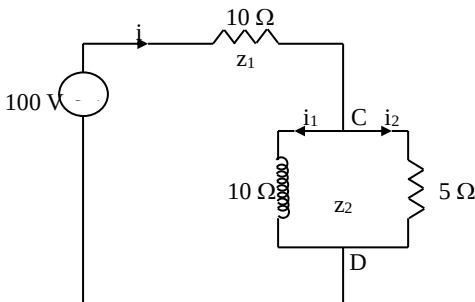
$$\begin{aligned} \text{Fréquence à la résonance : } T &= 2\pi\sqrt{Li} \\ \left(\frac{1}{N_0} = 2\pi\sqrt{Li}\right) &\Leftrightarrow \left(N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{Li}}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(N_0 = \frac{1}{6,28\sqrt{20 \cdot 10^{-6}}}\right) \\ &\Leftrightarrow (N_0 = 35,7 \, \text{Hz}) \end{aligned}$$

Intensité à la résonance :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U}{R+r} \\ &= \frac{130}{222} \\ &= 0,58 \, \text{A} \end{aligned}$$

$$I = 0,34 \, \text{A}$$

ER 49. 2. Détermine le courant dans chaque élément du circuit en série et du circuit en parallèle ci-dessous :



Résolution

$$z = z_1 + z_2$$

Calculons z_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10i}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z_2} = \frac{2i+1}{10i}\right) \\ \Leftrightarrow (z_2 = 4 + 2i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad z &= z_1 + z_2 \\
 &= 10 + 4 + 2i \\
 &= 14 + 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad i &= \frac{u}{z}; \quad |z| = \sqrt{14^2 + 4} = 14,14 \, \Omega. \\
 \left[\theta &= \text{Arc tan} \left(\frac{2}{14} \right) \right] \Rightarrow (\theta = 8,1^\circ) \\
 z &= 14,14(\cos 8,1^\circ + i \sin 8,1^\circ) \\
 i &= \frac{100(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)}{14,14(\cos 8,1^\circ + i \sin 8,1^\circ)} \\
 &= 7,07[\cos(-8,1^\circ) + i \sin(-8,1^\circ)] \\
 z_2 &= \sqrt{16 + 4} = 4,47
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad \left[\theta_2 &= \text{Arc tan} \left(\frac{2}{4} \right) \right] \Rightarrow (\theta_2 = 26,6^\circ) \\
 z_2 &= 4,47(\cos 26,6^\circ + i \sin 26,6^\circ) \\
 u_{cd} &= z_2 \cdot i = 31,6 (\cos 18,5^\circ + i \sin 18,5^\circ) \\
 i_1 &= \frac{31,6(\cos 18,5^\circ + i \sin 18,5^\circ)}{10(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)} \\
 i_1 &= 3,16[\cos(-71,5^\circ) + i \sin(-71,5^\circ)] \\
 i_2 &= \frac{31,6(\cos 18,5^\circ + i \sin 18,5^\circ)}{5(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)} \\
 i_2 &= 6,3 (\cos 18,5^\circ + i \sin 18,5^\circ)
 \end{aligned}$$

Exercices

N° 105. Dans un circuit R-L, on a en série une résistance de 400 ohms, et une self d'inductance 300 ohms.

- Quelle est l'impédance de ce circuit ?
- Quelle est l'intensité efficace ? Si la tension efficace est de 200 V.

N° 106. Une ampoule d'éclairage P_R consomme 100 W lorsqu'elle est alimentée par un courant continu sous une tension $U = 120$ V.

On connecte aux bornes du réseau alternatif un circuit comprenant l'ampoule R en série avec un condensateur $C = 10 \, \mu\text{F}$.

Quelles sont les différences potentielles efficaces que l'on mesure entre les bornes de R et entre les bornes de C ? Note : $\pi^2 = 10$.

N° 107. Une bobine de résistance $R = 50$ ohms et de coefficient de self-induction $L = 120$ mH est alimentée sous une tension de 120 volts.

On demande :

- L'impédance pour une fréquence de 50 périodes.
- La valeur du courant qui le traverse dans ce cas.

N° 108. Une bobine où $R = 50$ ohms est soumise à une fréquence de 1000 périodes par seconde et placée en série une capacité $1 \, \mu\text{F}$. On demande :

- La résistance d'induction.
- La résistance de capacité
- L'impédance du circuit

d) La valeur du courant qui le traverse dans ce cas.

N° 109. Une bobine est traversée par un courant alternatif dont la fréquence est 50 Hz. La résistance du fil est de 3 ohms et $L = 0,8$ H. Détermine l'impédance du circuit.

I.8. TRANSFORMATIONS DANS $\mathbb{C}$

I.8.1. DEFINITION

Une transformation dans $\mathbb{C}$ est toute application

$t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes.

Cette transformation peut être une identité, une translation, une homothétie, une rotation ou une similitude.

I.8.2. SORTES ET CARACTERISATION

La nature de la transformation t dépend des valeurs de a et de b .

Soit $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b$

Posons : $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$; $b = x_0 + iy_0$

et notons $M_z(x, y)$ et $M_{z'}(x', y')$, les points images de z et z' dans le plan complexe.

Identité :

La transformation t est une identité lorsque $a = 1$ et $b = 0$. Ainsi, on a : $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = z$

Translation :

La transformation t est une translation lorsque $a = 1$. Ainsi, on a :

$t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = z + b$, où $b \in \mathbb{C}$

Par définition,

$$z' = t(z) \Leftrightarrow z' = z + b$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = x + iy + x_0 + iy_0$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = (x + x_0) + i(y + y_0)$$

D'après l'égalité de deux nombres complexes, on a le système :

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

Ce système donne les formules analytiques d'une **translation** de vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Homothétie

La transformation t est une **homothétie** lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Ainsi, on a :

$$t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b \text{ où } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

Pour : $z = x + iy; z' = x' + iy'$ et $b = x_0 + iy_0$

Par définition,

$$\begin{aligned} z' = t(z) &\Leftrightarrow z' = az + b \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = ax + iay + x_0 + iy_0 \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = (ax + x_0) + i(ay + y_0) \end{aligned}$$

D'après l'égalité de deux nombres complexes, on a le système :

$$\begin{cases} x' = ax + x_0 \\ y' = ay + y_0 \end{cases}$$

Ce système donne les formules analytiques de la transformation t , correspondent à celles d'une *homothétie* dont les caractéristiques sont :

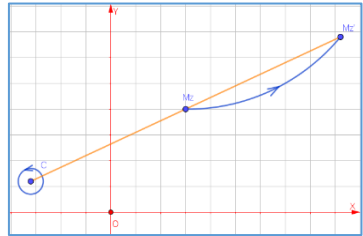
Le rapport $k = a$

Le centre est C, **point-image de la solution de l'équation : $t(z) = z$** est aussi le point fixe ou le point invariant de l'homothétie.

Cas particuliers :

Si $b = 0$, on retrouve une homothétie de rapport $k = a$, centrée à l'origine des axes des coordonnées.

Si $k = a = -1$, l'homothétie devient une symétrie centrale dont le centre est défini par la solution de l'équation $t(z) = z$.



Rotation

La transformation t est une **rotation** lorsque $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

On a alors : $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b$ où $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$

Soit $a = \cos \alpha + i \sin \alpha, z = x + iy; z' = x' + iy'$

et $b = x_0 + iy_0; \alpha$ quelconque.

Par définition,

$$\begin{aligned} z' = t(z) &\Leftrightarrow z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) + x_0 + iy_0 \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = (x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0) + i(x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0) \end{aligned}$$

D'après l'égalité de deux nombres complexes, on a le système :

$$\begin{cases} x' = x_0 + x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = y_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

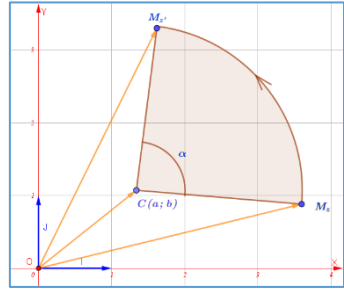
Ces formules qui traduisent l'expression analytique de la transformation t , correspondent aux formules d'une rotation.

Pour le cas d'espèce, ses caractéristiques sont :

L'angle $\alpha = \text{Arg}(a)$

Le centre est le point C, point-image de la solution de l'équation $t(z) = z$.

En particulier, si $b = 0$ on retrouve une rotation centrée à l'origine des coordonnées.



Similitude

La transformation t est une **similitude** lorsque $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$.

On a alors :

$$t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b, \text{ où } a \in \mathbb{C}; |a| \neq 1 \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$\text{Soit } a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha), z = x + iy, z' = x' + iy',$$

$$b = x_0 + iy_0; \alpha \text{ quelconque.}$$

Par définition,

$$z' = t(z) \Leftrightarrow z' = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) + x_0 + iy_0$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = x_0 + |a|(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + i|a|(y_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

D'après l'égalité de deux nombres complexes, on a le système :

$$\begin{cases} x' = x_0 + |a|(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\ y' = y_0 + |a|(x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{cases}$$

Ces formules qui traduisent l'expression analytique de la transformation t , correspondent aux formules d'une similitude.

Pour le cas d'espèce, ses caractéristiques sont :

L'angle $\alpha = \text{Arg}(a)$

Le rapport est $r = |a|$

Le centre est le point C, point-image de la solution de l'équation $t(z) = z$

En résumé, la transformation $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z' = az + b$ est :

Une identité dans $\mathbb{C}$ si $a = 1$ et $b = 0$

Une translation si $a = 1$ et $b \in \mathbb{C}$

Une homothétie si $a \in \mathbb{R}_0$

Une rotation si $|a| = 1$

Une similitude si $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$

I.8.3. SIMILITUDE DANS LE PLAN COMPLEXE

a) Similitude directe

Soit $z = x + iy$ et $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

Si on pose $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ alors on a :

$$(z' = az + b) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases}$$

Le passage des points images de z à z' correspond à une similitude directe

$$s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z' = az + b$$

Pour trouver les éléments de cette similitude, on procède comme suit :

* le centre étant un point invariant, il suffit de résoudre l'équation

$$(az + b = z) \Leftrightarrow (z = \frac{b}{1-a})$$

* le rapport $k = |a|$ ($k \neq 1$)

* l'argument $\alpha = \text{Arg}(a)$ ($\alpha \neq 0$)

On peut écrire que $s = h \circ r = r \circ h$ où h est une homothétie et r une rotation

Cependant,

– si $k = 1$ et $\alpha \neq 0$ alors s est une rotation de centre C et d'angle α

– si $k \neq 1$ et $\alpha = 0$ alors s est une homothétie de centre C et de rapport k .

b) Similitude indirecte

Soit $z = x + iy$ et $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

Si on pose $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ alors on a :

$$(z' = a\bar{z} + b) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_1x + a_2y + b_1 \\ y' = a_2x - a_1y + b_2 \end{cases}$$

Le passage des points images de z à z' correspond à une similitude indirecte.

Cependant,

– si $|a| = 1$ alors s est un antidéplacement

* si $a\overline{b} + b = 0$, s est une symétrie axiale

* si $a\overline{b} + b \neq 0$, s est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale

– si $|a| \neq 1$, s a un seul point invariant et peut se décomposer sous la forme $s = h \circ s_d = s_d \circ h$ où s_d est une symétrie axiale par rapport à une droite d passant par C et h l'homothétie de centre C et de rapport $|a|$.

Exercices résolus

ER 50. 1. Le plan π est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit l'application s qui à tout point $M(x, y)$ associé le point $M'(x', y')$ avec :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases} \quad \text{Monte que } s \text{ est une similitude}$$

Résolution

Soit deux points $M(x, y)$, $B(a, b)$ d'images $M'(x', y')$, $B'(a', b')$ on a :

$$\begin{aligned} |M'B'|^2 &= (a' - x')^2 + (b' - y')^2 \\ &= (a - b + 1 - x + y - 1)^2 + (a + b - x - y)^2 \\ &= [(a - x) - (b - y)]^2 + [(a - x) + (b - y)]^2 \\ &= (a - x)^2 - 2(a - x)(b - y) + (b - y)^2 + (a - x)^2 + 2(a - x)(b - y) + (b - y)^2 \\ &= 2[(a - x)^2 + (b - y)^2] \\ &= 2|MB|^2 \end{aligned}$$

$$|M'B'| = \sqrt{2}|MB|$$

Donc s est une similitude de rapport $\sqrt{2}$.

ER 51. 2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) associe M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

Montre que l'application f est une similitude directe et la caractériser.

Résolution

Nous avons : $\begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

$a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $b_1 = 1$; $b_2 = -1$. La transformation f est une similitude directe.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \text{ et } z' = x' + iy' \\ z' &= (x - y + 1) + i(x + y - 1) = (1 + i)(x + iy) + (1 - i) \\ &= (1 + i)z + (1 - i) \\ z' &= az + b \text{ avec } a = 1 + i \text{ et } b = 1 - i. \end{aligned}$$

– Le centre de la similitude S est le point C d'affixe z tel que :

$$(z = \frac{1-i}{-i}) \Leftrightarrow (z = 1 + i)$$

Donc le centre de la similitude est le point $C(1, 1)$.

– $a = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. L'argument $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et le rapport $k = \sqrt{2}$.

ER 52. 3. Soit z un nombre complexe et f la fonction qui, à z , associe $z' =$

$$f(z) = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}.$$

- Trouve le domaine de définition de f .
- Montre que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur lui-même.
- Montre que f est involutive.
- Détermine l'ensemble des points invariants par f .

Résolution

- $\text{Dom } f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$
- f est bijective si et seulement si f est une application et f^{-1} est une application.

Cherchons f^{-1} et déterminons son domaine ($\text{Im } f$).

$$\begin{aligned} \left(z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i} \right) &\Leftrightarrow (zz' - z'i = iz - 2 + 4i) \\ &\Leftrightarrow \left(z = \frac{z'i - 2 + 4i}{z' - i} \right) \\ &\Leftrightarrow \left[f^{-1}(z) = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i} \right] \end{aligned}$$

$\text{Dom } f$

$f^{-1} = \text{Im } f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Donc f est une bijection.

c) f est involutive car $f = f^{-1}$.

d) Détermine l'ensemble des points invariants par f .

$$\begin{aligned} [f(z) = z] &\Leftrightarrow \left(\frac{iz-2+4i}{z-i} = z \right) \\ &\Leftrightarrow (z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0) \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{2i+2+4i}{z-i} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2i-2-4i}{z-i} = \frac{-2-6i}{2} = -1 - i.$$

L'ensemble M des points invariants est $\{1 + 3i, -1 - i\}$.

ER 53. 4. Donne la nature de la transformation qui, à z associe $z' = f(z) = -i\bar{z} + 1 + i$ et caractérise-la.

Résolution

– C'est une similitude indirecte. $|a| = |-i| = 1$. s est un antidéplacement

– Calculons $a\bar{b} + b$:

$a = -1$, $b = 1 + i$ et $a\bar{b} + b = -i(1 - i) + 1 + i = 0$. C'est une symétrie d'axe.

– Déterminons l'ensemble des points invariants :

$$\begin{aligned} [f(z) = z] &\Leftrightarrow (z = -i\bar{z} + 1) \\ &\Leftrightarrow (x + y - 1 = 0) \end{aligned}$$

La transformation est la symétrie d'axe d d'équation $x + y - 1 = 0$.

ER 54. 5. Donne la nature de la transformation s qui, à z associe $z' = (2 + i)\bar{z} + 1 - 3i$.

Résolution

s est une similitude indirecte. Calculons le rapport de s : $|a| = |2 + i| = \sqrt{5}$.

$|a| \neq 1$, donc s n'est pas un antidéplacement.

Déterminons le centre de s :

$|2 + i|\bar{z} + 1 + 3i = z$. Le centre C est : $(0, -1)$.

Déterminons la droite invariante de s :

Utilisons la définition analytique de s , nous avons :
$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - 2y - 3 \end{cases}$$

La droite d est l'ensemble des points P tels que : $\overrightarrow{CP'} = \sqrt{5} \overrightarrow{CP}$

Cela signifie que les coordonnées de P vérifient :

$$\begin{cases} x\sqrt{5} = 2x + y + 1 \\ (y + 1)\sqrt{5} - 1 = x - 2y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow [(2 - \sqrt{5})x + y + 1 = 0]$$

La droite cherchée est : $(2 - \sqrt{5})x + y + 1 = 0$

Exercices

N° 110. Dans le plan de Gauss, étudie la transformation f qui applique z sur z' .

a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = (-1 - i)z + 2i$

b) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = (-1 + i)z$

c) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = (\sqrt{3} - i)z + 2i$

d) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = (1 - i)\bar{z} + 4i + 1$

e) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = 2\bar{z} + 3i$

N° 111. Soit t_1 et t_2 les transformations du plan complexe associées à :

$$t_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z_1 = (\sqrt{3} + i)z \text{ et}$$

$$t_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z_2 = (1 - i\sqrt{3})z + 3$$

a) Précise t_1 et t_2 ainsi que $t_2 \circ t_1$ et $t_1 \circ t_2$.

b) Montre qu'il existe un point P qui a même image par t_1 et par t_2 .

Quelles sont les coordonnées de P et de son image P' ?

c) Montre que P est fixe pour $t_2 \circ t_1^{-1}$ et $t_1 \circ t_2^{-1}$.

Quelle est la nature de chacune de ces transformations ?

N° 112. a) Soit $f(z) = \frac{z-i}{iz+3}$ une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Trouve l'ensemble des points invariants de f

- b) Même question pour $f(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) Montre que $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ est une application involutive dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

N° 113. Reconnais chaque transformation du plan π qui, à un point $M(x, y)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} 3x' = x + 8 \\ 3y' = y - 4 \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \\ \text{b)} \quad \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 2 \end{cases} & \text{f)} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases} \end{array}$$

N° 114. Le plan π est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct.

Soit f l'application de π dans π définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y + 3 - \sqrt{5} \\ y' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{\sqrt{5}}{5}y - 1 \end{cases}$$

- a) Montre que f est une isométrie. Cherche l'ensemble de ses points invariants.
- b) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(-2, 3)$ et soit $g = t \circ f$.
Montre que g est une isométrie
- c) Définis analytiquement g et cherche l'ensemble de ses points invariants.
Déduis-en la nature de y .
- d) Que peut-on conclure pour f ?

N° 115. On considère la transformation t définie par :

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

Montre que la transformation t est une similitude plane dont on précisera les éléments.

N° 116. Les points A, B, C sont d'affixes respectifs

$$z_A = 1 + i, z_B = 3 + 4i \text{ et } z_C = 4 - i.$$

a) Détermine la similitude $S : z \longmapsto z' = az + b$ telle que $S(A) = B$ et $S(C) = C$

b) Détermine le point invariant, le rapport et l'angle de cette similitude.

I.8.4. PROBLEME INVERSE : RECHERCHE D'UNE FONCTION COMPLEXE TRADUISANT UNE TRANSFORMATION DANS $\mathbb{C}$

Lorsque $a \neq 1$, la transformation algébrique définie par $z' = az + b$, peut également se mettre sous la forme de

$$z' - z_0 = a(z - z_0),$$

Où z_0 est l'affixe du centre de la transformation.

En effet, si z_0 est l'affixe du centre de la transformation $t(z) = z' = az + b$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, t(z) = z' = az + b \text{ et, en particulier } t(z_0) = z_0 = az_0 + b.$$

Il vient alors : $z' = az + b$ (i) et $z_0 = az_0 + b$ (ii).

La soustraction membre à membre de (i) et (ii) donne : $z' - z_0 = a(z - z_0)$.

Cette remarque permet de chercher une fonction complexe caractérisant une transformation ponctuelle.

Exemples

La translation de vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se traduit par $z' = z + (-2 + 3i)$

L'homothétie de centre $C(1; -2)$ et de rapport 3, se traduit par :

$$z' - (1 - 2i) = 3[z - (1 - 2i)]$$

La rotation de centre $C(2; 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ se traduit par :

$$z' - (2 + i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) [z - (2 + i)]$$

La similitude de centre $C(-1; 5)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$ se traduit par :

$$z' - (-1 + 5i) = (1 - i\sqrt{3})[z - (-1 + 5i)]$$

Exercices résolus

ER 55. 1. Caractérise chacune des transformations t suivantes définies dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$t: z \mapsto z' = 2 + i$$

$$t: z \mapsto z' = z$$

$$t: z \mapsto z' = -z + 3 - i$$

$$t: z \mapsto z' = iz + 1$$

$$t: z \mapsto z' = -iz + 2i$$

$$t: z \mapsto z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$t: z \mapsto z' = z + 1 - 2i$$

$$t: z \mapsto z' = (1 - i)z + i + 2$$

Résolution

Soit $t(z) = az + b$,

Comme $a = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $t(z) = b$.

t est donc une transformation constante.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad t(z) = z$$

t est la transformation identique

$a \in \mathbb{R}_0 \Rightarrow t$ est une homothétie, (une symétrie centrale) dont les caractéristiques sont :

rapport : $r = -1$

centre : $C\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$; c'est-à-dire, solution de l'équation, $t(z) = z$

$|a| = |i| = 1 \Rightarrow t$ est une rotation dont les caractéristiques sont :

angle: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

centre: $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; c'est-à-dire, solution de l'équation, $t(z) = z$

$|a| = |-i| = 1 \Rightarrow t$ est une rotation dont les caractéristiques sont :

angle: $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

centre: $C(1; -1)$; c'est-à-dire, solution de l'équation, $t(z) = z$

$|a| = \left|\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Rightarrow t$ est une rotation dont les caractéristiques sont :

angle: $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

centre: $C(1; 0)$; c'est-à-dire, solution de l'équation, $t(z) = z$

comme $a = 1$, t correspond à une translation de vecteur $\vec{V}\left(\frac{1}{-2}\right)$

$|a| = |1 - i| = \sqrt{2} \neq 1 \Rightarrow t$ est une similitude dont les caractéristiques sont :

rapport: $\sqrt{2}$

angle: $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

centre: $C(1; -2)$; c'est-à-dire, solution de l'équation , $t(z) = z$

ER 56. 2. Caractérise t_1 , t_2 et $t_1 \circ t_2$ lorsque :

$$t_1: z \mapsto z_1 = (1+i)z - 2 + 3i \quad \text{et} \quad t_2: z \mapsto z_2 = \frac{(1-i)}{2}z - 1 - 5i$$

Résolution

En raisonnant comme à l'exercice précédent, on trouve:

t_1 est une similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de centre $C(-3; -2)$

et t_2 est une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{-\pi}{4}$, de centre $C(-6; -4)$.

Par suite,

$$\begin{aligned}(t_1 \circ t_2)(z) &= t_1[t_2(z)] \\ &= t_1\left[\frac{(1-i)}{2}z - 1 - 5i\right] \\ &= (1+i)\left[\frac{(1-i)z}{2} - 1 - 5i\right] - 2 + 3i \\ &= z + 2 - 3i\end{aligned}$$

$t_1 \circ t_2$ Correspond donc à une translation de vecteur $\vec{V}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$

ER 57. Ecris la fonction complexe correspondant à chacune des transformations suivantes :

- t est l'homothétie de centre $C(2, 1)$ et de rapport 3
- t est une rotation de centre $C(-1, 2)$ et d'angle 90° ;
- t est une rotation de centre $C(2, 3)$ et d'angle 300° ;
- t est une similitude de centre $C(1, 1)$ de rapport 2 et d'angle 135° ;
- t est une similitude de centre $C(0, 2)$ de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle 150° .

Résolution

a. C'est mieux d'écrire la transformation donnée sous la forme $z' = f(z)$.

z_0 étant l'affixe du centre, la relation

$$\begin{aligned}z' - z_0 &= a(z - z_0) \Rightarrow z' - (2 + i) = 3[z - (2 + i)] \\ &\Rightarrow z' - 2 - i = 3z - 6 - 3i \\ &\Rightarrow z' = 3z - 8 - 2i\end{aligned}$$

ER 58. D'où, la transformation $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z' = 3z - 8 - 2i$

En raisonnant de la même manière, on trouve :

- $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z' = iz + 1 + 3i$
- $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)i$
- $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z' = (i\sqrt{2} - \sqrt{2})z + (1 + 2\sqrt{2}) + i$

ER 59. On donne les transformations suivantes :

t la translation de vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

h l'homothétie de centre $C(2, -1)$ de rapport 2.

Détermine et caractérise $t \circ h$ et $h \circ t$.

Calcule l'image, par chacune de ces transformations, de $z = 1 + i$?

Détermine l'image de la droite $d \equiv 3x - 2y - 6 = 0$ par $h \circ t$

Résolution

On a : $t : z \mapsto z + 3 + 2i$ et $h : z \mapsto 2z - 2 + i$;

D'où $\forall z \in \mathbb{C}$, $(t \circ h)(z) = 2z + 1 + 3i$ et $(h \circ t)(z) = 2z + 4 + 5i$

En tout état de cause, $t \circ h$ est une homothétie de rapport 2 et de centre $C(-1, -3)$ et $h \circ t$ est une homothétie de rapport 2 et de centre $C'(-4, -5)$.

$$\begin{aligned} (t \circ h)(1 + i) &= 2(1 + i) + 1 + 3i & (h \circ t)(1 + i) &= 2(1 + i) + 4 + 5i \\ &= 3 + 5i & &= 6 + 7i \end{aligned}$$

c. Les expressions analytiques respectives de ces deux transformations du plan sont :

$$\begin{aligned} \text{Pour } t \circ h : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases} \quad (1) & \quad \text{pour } h \circ t : \begin{cases} x' = 2x + 4 \\ y' = 2y + 5 \end{cases} \quad (2) \\ (1) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'-1}{2} \\ y = \frac{y'-3}{2} \end{cases} & \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'-4}{2} \\ y = \frac{y'-5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Porter (1) et (2) tour à tour dans l'équation de la droite donnée pour avoir :

$$(t \circ h)(d) \equiv 3\left(\frac{x'-1}{2}\right) - 2\left(\frac{y'-3}{2}\right) - 6 = 0 \Rightarrow (t \circ h)(d) \equiv 3x' - 2y' - 3 = 0$$

$$(h \circ t)(d) \equiv 3\left(\frac{x'-4}{2}\right) - 2\left(\frac{y'-5}{2}\right) - 6 = 0 \Rightarrow (h \circ t)(d) \equiv 3x' - 2y' - 8 = 0$$

Exercices

N° 117. Le plan complexe étant réduit à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit la transformation $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z' = az + b$.

Caractérise t si : $z \mapsto z' = 3z - 10i + 4$

$$z \mapsto z' = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}z + \left(\frac{6-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$z \mapsto z' = z + (1-i)(1+2i)$$

$$z \mapsto z' = z + \frac{5-3i}{2+i}$$

$$z \mapsto z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + (3 - 4\sqrt{2}) - (2\sqrt{2} + 1)i$$

$$z \mapsto z' = (1-i)z + 2 - 3i$$

$$z \mapsto z' = 2z + 3i$$

$$z \mapsto z' = -iz + 5i + 3$$

$$z \mapsto z' = 3iz + 1 - i$$

$$z \mapsto z' = -z + 4i + 6$$

$$z \mapsto z' = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) z$$

$$z \mapsto z' = -4z$$

$$z \mapsto z' = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) z + \left(\frac{5\sqrt{3} + 7}{2} \right) + \left(\frac{3\sqrt{3} + 17}{2} \right) i$$

$$z \mapsto z' = 4iz + 7 + 6i$$

N° 118. Dans un plan complexe,

t_1 est une translation de vecteur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$;

t_2 est une homothétie de rapport 2 et de centre $C(3; 1)$

Caractérise $t_2 \circ t_1$ et $t_1 \circ t_2$

Calcule l'image de $z = 6 + i$ par $t_2 \circ t_1$

Trouve l'image de la droite $d \equiv x - 3y + 6 = 0$ par $t_2 \circ t_1$.

N° 119. Dans le plan complexe,

t_1 est une rotation de centre $C(-1; 1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

t_2 est une homothétie de centre $C(2; -3)$ et de rapport 3.

a. Détermine $t_2 \circ t_1$ et $t_1 \circ t_2$

b. Calcule l'image de $z = -12 - 5i$ par $t_2 \circ t_1$

c. Trouve l'image du cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{5}$ par $t_2 \circ t_1$.

N° 120. Dans le plan complexe,

r_1 est la rotation de centre $C_1(2; 3)$ et d'angle 270° ,

r_2 est la rotation de centre $C_2(-2; -3)$ et d'angle 135° .

a. Détermine $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$

b. Détermine le transformé du nombre complexe $z = 3 - 5i$ par $r_2 \circ r_1$

N° 121. Dans le plan complexe, détermine la fonction complexe $z' = t(z)$ si :

a. t est une homothétie de centre $C(5; 3)$ et de rapport 2.

b. t est une homothétie de centre $C(-2; 4)$ et de rapport 3.

c. t est une translation de vecteur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

d. t est une rotation de centre $C(\sqrt{3}; -1)$ et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

e. t est une similitude de centre $C(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

N° 122. Dans le plan complexe, t est une homothétie de centre $C(2, 1)$ et de rapport 3

a. Détermine l'homothétique du nombre complexe

$$z = 9 + 2i.$$

b. Détermine l'image de la droite d_{AB} où A et B sont les points images de $z_1 = 4i - 7$ et $z_2 = 3 + 2i$

N° 123. Dans le plan complexe, t est la rotation de centre $C(2; 3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Détermine le transformé du nombre complexe $z_1 = -4 + i$.

b. Détermine le transformé du cercle centré à l'origine des axes et de rayon 2.

N° 124. Soit dans le plan de Gauss :

h_1 , l'homothétie de centre O et de rapport 2

h_2 , l'homothétie de centre $C\left(7; \frac{7}{2}\right)$ et de rapport -3

a.1 Détermine et caractérise $h_2 \circ h_1(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ que vaut, en particulier, l'image de $5 - i$, de $2i$ et de $3i - 1$ par $h_2 \circ h_1$?

a.2 Détermine le transformé de la droite d_{AB} par $h_2 \circ h_1$ où $A(-1; 3)$ et $B(2; -1)$.

N° 125. Soit dans le plan de Gauss :

t , la translation appliquant O sur le point $M(-1, 2)$.

r , la rotation de centre $C(1, -2)$ et d'angle 120° .

a. détermine et caractérise $(t \circ r)(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$

b. que vaut, en particulier, l'image de $4 - 3i$, de $3 + i$ et de $i - 1$ par $t \circ r$?

c. détermine le transformé du cercle centré à l'origine et de rayon 3 par $t \circ r$

N° 126. Dans le plan de Gauss, étudie la transformation f qui applique z sur z' .

a) $f: C \longrightarrow C: z \longmapsto f(z) = (-1 - i)z + 2i$

b) $f: C \longrightarrow C: z \longmapsto f(z) = (-1 + i)z$

c) $f: C \longrightarrow C: z \longmapsto f(z) = (\sqrt{3} - i)z + 2i$

$$d) f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = (1-i)\bar{z} + 4i + 1$$

$$e) f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z) = 2\bar{z} + 3i$$

Soit t_1 et t_2 les transformations du plan complexe associé à :

$$t_1: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z_1 = (\sqrt{3}+i)z$$

$$\text{et } t_2: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto z_2 = (1-i\sqrt{3})z + 3$$

a) Précise t_1 et t_2 ainsi que $t_2 \circ t_1$ et $t_1 \circ t_2$.

b) Montre qu'il existe un point P qui a même image par t_1 et par t_2 .

Trouve les coordonnées de P et de son image P' ?

c) Montre que P est fixe pour $t_2 \circ t_1^{-1}$ et $t_1 \circ t_2^{-1}$.

Détermine la nature de chacune de ces transformations ?

a) Soit $f(z) = \frac{z-i}{iz+3}$ une bijection de $\mathbb{C} - \{3i\}$ dans $\mathbb{C} - \{-i\}$.

N° 127. Trouve l'ensemble des nombres z tels que $f(z) = z$.

b) Même question pour $f(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Montre que $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ est une application involutive dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

I.9. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 128. Calcule :

a) $i^{171} - 2i^{139} + 3i^{8742} - i^{5923}$

Rép.: $2i - 3$

b) $(4i^{27} - 5i^{1960})(5i^{1960} + 4i^{27})$

Rép.: -41

N° 129. Mets sous la forme cartésienne chaque nombre complexe z.

a) $z = (i - 1)(2 + i) + (2i + 1)^2$ Rép.: $z = -6 + 5i$

b) $z = (1 + i\sqrt{3})^3$ Rép.: $z = -8$

c) $z = (2 + 3i)^2 - (3 + 4i)(2 + 3i)$ Rép.: $z = 1 - 5i$

N° 130. Soit $z = x + yi$. Quelle(s) relation(s) doivent vérifier x et y pour que :

a) $u = (z + i)(z - 1)$ soit réel Rép.: $2xy - y + x - 1 = 0$

b) $u = (z - i)(z + 1)$ soit imaginaire pur Rép.: $x^2 - y^2 + y + x$

c) $u = z^2 + i - 1$ soit nul Rép.: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$

d) $u = (1 - 2i)(x + yi)(3 + i) - 1$ vaut 4 Rép.: $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$

N° 131. Détermine l'ensemble des points M(z) tels que les points images des nombres z et $z' = 1 + z^2$ soient alignées.

Rép.: $y = 0$ et $x^2 + y^2 - 2x = 0$

N° 132. Trouve le conjugué de chaque nombre complexe z

a) $z = \frac{\sin x}{\cos x - i \sin x}$ Rép.: $\bar{z} = \frac{1}{2} \sin 2x - i \sin^2 x$

b) $z = \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(2+i)^2 - (2-i)^2}$ Rép.: $\bar{z} = \frac{3i}{4}$

c) $z = \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}$ Rép.: $\bar{z} = -1 - \sqrt{3}i$

d) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9 + 2 + \frac{1}{2}i$ Rép.: $\bar{z} = 2 + \frac{1}{2}i$

N° 133. Simplifie et trouve le conjugué de $y = \frac{1 - \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$.

Rép.: $y = -itan \frac{x}{2}$ et $\bar{y} = itan \frac{x}{2}$

N° 134. Calcule le module de chacun des nombres complexes suivant :

a) $z = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ Rép.: $|z| = 2$

b) $z = \frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2+i)^2-(2-i)^2}$ Rép.: $|z| = \frac{3}{4}$

c) $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{50}$ Rép.: $|z| = 1$

N° 135. Soit un nombre complexe $z = x + iy$.

Détermine l'ensemble E des couples (x, y) tels que :

a) $|1 - z| = |i - z|$ Rép.: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

b) $\left|\frac{z-4}{z+1}\right| = \sqrt{2}$ Rép.: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 12x - 14 = 0\}$

N° 136. Détermine les nombres complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module. Rép.: $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

N° 137. Trouve la forme trigonométrique de chaque nombre complexe.

a) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 (\sqrt{3} + i)^4$ Rép.: $z = 2^4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

b) $z = (\sqrt{3}i - 1)^5 i^{875}$ Rép.: $z = 2^5 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

c) $z = (1 + i)^n + (1 - i)^n$ Rép.: $z = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$

d) $\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i}$ Rép.: $2^{\frac{n+2}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$

N° 138. Soit $u = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot \bar{z}$

a) Détermine l'argument de z pour que $u = 0$ Rép.: $\text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$

b) Si u n'est pas nul, calcule le module et l'argument de u .

Rép.: $|u| = x - \sqrt{3}y$ et $\text{Arg } u = \frac{5\pi}{3}$

N° 139. Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $(2 - i)(4 + 3i) - 2iz = 9z + i$ Rép.: $z = \frac{101}{85} - \frac{13}{85}i$

b) $27 + 6\bar{z} = 3 + 2i$ Rép.: $z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}i$

c) $z^2 + (4i - 3)z - 1 - 5i = 0$ Rép.: $z_1 = 1 - i; z_2 = 2 - 3i$

d) $z^2 + \bar{z} = 0$ Rép.: $z_1 = 0; z_2 = -1;$

e) $z^2 + z\bar{z} = 0$ $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Rép.: $z = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

(tous les complexes imaginaires purs)

N° 140. Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^3 + 4(-1 + i)z^2 + (2 - 9i)z + 1 + 5i = 0$

Rép.: $z = 1$, $z = 2 - 3i$ et $z = 1 - i$.

b) $z^3 + (i - 2)z^2 + 3(1 - i)z + 2i - 2 = 0$

Rép.: $z = 1$, $z = 1 + i$ et $z = -2i$.

N° 141. Soit le triangle déterminé par les points-images A, B et C des nombres complexes $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = 2 - i$

a. Donne sa nature Rép.: Isocèle rectangle

b. Calcule sa surface Rép.: $S = \frac{5}{2}$ u.s

N° 142. Soit z_0 la solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(1 - 2i\sqrt{3})z - 5 - 3i\sqrt{3} = 0$$

a. Détermine z_0 , sous la forme algébrique. Rép: $-1 + i\sqrt{3}$

b. Calcule z_0^2 et z_0^3 Rép : $-2 - 2i\sqrt{3}$ et 8

N° 143. Les nombres

complexes $2 - 3i$; $5 - 2i$ et $8 - i$ sont trois termes consécutifs d'une suite donnée (U_n) ; $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. Quel est le soixante-deuxième terme de cette suite ? Rép.: $185 + 58i$

N° 144. Soit une suite arithmétique dont on donne

$$t_3 = -34 - i \text{ et } t_8 = -64 - 11i$$

a. Détermine son premier terme ainsi que sa raison.

Rép.: $-22 + 3i$ et $-6 - 2i$

b. Trouve la somme de 20 premiers termes de cette suite.

Rép.: $1580 - 320i$

N° 145. Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au

conjugué ? Rép.: 0, 1, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

N° 146. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^3 - (1 - 5i)z^2 - 4(3 - 2i)z - 16 + 16i = 0$, sachant qu'elle admet trois racines en progression géométrique.

Rép. : $z_1 = i - 1$; $z_2 = -2 - 2i$ et $z_3 = 4 - 4i$

b. $z^3 - 3(1 + 3i)z^2 - (27 - 22i)z + 41 + 23i = 0$, sachant qu'elle admet trois racines en progression arithmétique.

Rép. : $z_1 = -1 + 4i$; $z_2 = 1 + 3i$ et $z_3 = 3 + 2i$

N° 147. z_1, z_2 et z_3 étant les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0,$$

Sans les déterminer, calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

$$\text{a. } E = \frac{3}{z_2} + \frac{3}{z_3} + \frac{3}{z_1} \quad \text{Rép. : } E = \frac{-2-9i}{5}$$

$$\text{b. } F = \frac{225}{z_1^2 z_2^2} + \frac{225}{z_2^2 z_3^2} + \frac{225}{z_1^2 z_3^2} \quad \text{Rép. : } F = -1 - 32i$$

N° 148. Détermine la somme et le produit des zéros du polynôme

$$z^8 + (3 - 4i)z^7 + 5z^4 - (2 + 3i)z + 4 - 5i$$

$$\text{Rép. : } S = -3 + 4i \text{ et } P = 4 - 5i$$

N° 149. Reconnais les transformations de π qui, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ associent à un point $M(x, y)$, le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\text{a) } \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 2 \end{cases} \quad \text{Rép. : Translation de vecteur } (-2, 2)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 1 \end{cases} \quad \text{Rép. : Homothétie de centre } A\left(1, \frac{1}{3}\right) \text{ et de rapport } -2$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' = -x + 5 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \quad \text{Rép. : Homothétie de centre } B\left(\frac{5}{2}, 1\right) \text{ de rapport } -1 \text{ ou symétrie de centre } B$$

N° 150. Détermine analytiquement l'homothétie h de centre A et de rapport k dans chacun des cas suivants

$$\text{a) } A(2, -3) \text{ } k = -\frac{3}{2}. \quad \text{Rép. : } \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x + 5 \\ y' = -\frac{3}{2}y - \frac{15}{2} \end{cases}$$

b) $A(1, 2)$ et $M(2, 3)$ a pour image $M'(-1, 0)$; calculer k ;

$$\text{Rép. : } \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases} \text{ et } k = -2$$

c) $k = -\frac{1}{2}$ et $M(2, -1)$ a pour image $M'(0, -3)$, détermine A ;

$$\text{Rép. : } A\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right) \text{ et } \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{1}{2}y - \frac{7}{2} \end{cases}$$

- d) h est la composée de $h_1 \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ et $h_2 \left(0, -\frac{6}{7}\right)$. Rép.: $h \left(0, \frac{2}{7}\right)$
e) $h = h_1 \circ h_1 \circ h_1$ avec $h_1 \left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Rép.: $h \left(0, -\frac{1}{27}\right)$
f) $h = h_3 \circ h_3$ avec $h_3 \left(A, \frac{1}{2}\right)$ et A a pour coordonnées $(-1, 3)$.
Rép.: $h \left(A, \frac{1}{4}\right)$

N° 151. Soit les points $A(3, 2)$, $B(3, 4)$, $C(0, 3)$ et $D(-2, 3)$. Montre qu'il existe une transformation f d'écriture complexe $z' = az + b$ qui transforme A en C et B en D .
Rép.: $z' = iz + 2$.

N° 152. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, le nombre complexes z solution de l'équation

$$(3 - i)\bar{z} = \frac{1+i}{1-i} \text{ est :}$$

1. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$ 2. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$ 3. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ 4. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$ 5. $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

N° 153. On note par z_0 la solution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $\frac{z+3}{\bar{z}+i} = 1 + i$

Dans ces conditions, z_0^2 vaut :

1. $25 - 333i$ 2. $7 + 4i$ 3. $33 + 56i$ 4. $33 + 25i$ 5. $7 - 56i$

N° 154. Soit les nombres complexes $z_1 = 3 + 5i$ et $z_2 = -2 - i$ de points-images respectifs A et B dans le plan complexe. Le nombre imaginaire pur z , de point-image C , qu'il faut prendre pour que la surface du triangle ABC vaille $\frac{11}{2}$ est

1. $z = \frac{4i}{5}$ ou $z = -\frac{10i}{3}$ 3. $z = -4i$ ou $z = \frac{10}{3}i$
2. $z = \frac{4i}{5}$ ou $z = -\frac{18i}{5}$ 4. $z = \frac{-4}{5}i$ ou $z = \frac{18}{5}i$

5. $z = 7i$ ou $z = -\frac{9}{5}i$

N° 155. La forme cartésienne de l'inverse du conjugué du nombre complexe z de module 4 et d'argument $\frac{41\pi}{4}$, est

1. $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$ 2. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12}i$ 4. $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ 5. $\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i$

N° 156. Si z_1 est un nombre complexe de module 4 et d'argument $\frac{\pi}{3}$;
 z_2 un nombre complexe de Module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. La forme algébrique
du nombre complexe u tel que $z_1^4 u - 32z_2^3 = 0$ est :

1. $\frac{81\sqrt{3}}{16} + \frac{81}{16}i$
2. $16\sqrt{3} + 16i$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
4. $16\sqrt{3} + 16i$
5. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

N° 157. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$z^2 + pz + q = 0$, où p et q sont des nombres réels. Les valeurs
respectives de p et q pour que le nombre complexe $z_0 = \frac{25}{3+4i}$ soit
solution de cette équation sont

1. $p = 13$ et $q = -4$
3. $p = -6$ et $q = 25$
5. $p = 9$ et $q = 16$
2. $p = 7$ et $q = 9$
4. $p = -4$ et $q = -6$

N° 158. Soit $a = 1 + i$, un nombre complexe. Les nombres complexes
de module 10, tel que $\frac{a}{z}$ ait une partie imaginaire égale $\frac{7}{50}$ sont

1. $z_1 = 8 + 6i$ et $z_2 = 3 - i$
4. $z_1 = 8 + 6i$ et $z_2 = 6 + 8i$
2. $z_1 = 1 - 3i$ et $z_2 = 6 - 8i$
5. $z_1 = 8 - 6i$ et $z_2 = 6 - 8i$
3. $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = 1 - 3i$

N° 159. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - (2 + 6i) = 0$. Elle admet une racine imaginaire pure z_0 dont le point-image dans
le plan complexe est noté A .

a. L'ensemble de solutions de cette équation est :

1. $\{-2i; -1 + i; -2 - i\}$
4. $\{2i; -1 + i; -2 - i\}$
2. $\{2i; -1 + i; 2 - i\}$
5. $\{2i; 1 - i; 2 + i\}$
3. $\{-2i; -1 - i; 2 + i\}$

b. On désigne par B et C les points-images de deux autres racines.
Détermine la nature ainsi que la surface du triangle ABC

1. ABC est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\frac{3}{2}$ unités de surface
2. ABC est un triangle équilatéral dont l'aire vaut $\frac{9}{2}$ unités de surface
3. ABC est un triangle simplement isocèle dont l'aire vaut $\frac{3}{2}$ unités de surface
4. ABC est un triangle scalène dont l'aire vaut 5 unités de surface
5. ABC est un triangle isocèle et rectangle dont l'aire vaut $\frac{5}{2}$ unités de surface.

N° 160. Soit l'équation $z^3 + (a - i)z^2 + (b - ai)z - bi = 0$ dans $\mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), de racines

z_1, z_2 et z_3 . Les valeurs de a et b pour lesquelles la somme et le produit de ces racines valent respectivement $1 + i$ et i sont :

1. $a = -1$ et $b = 1$ 3. $a = 1$ et $b = -1$ 5. $a = -1$ et $b = -1$
2. $a = 0$ et $b = 1$ 4. $a = 1$ et $b = 0$

N° 161.

On considère l'équation

dans $\mathbb{C}$: $z^3 + (5 - 7i)z^2 - (4 + 12i)z - 20 + 4i = 0$, dont l'une des racines, réelle, a son point-image noté A.

a. Les solutions de cette équation à coefficients complexes sont

1. 2 ; $1 - i$ et $3 + 2i$ 3. -2 ; $1 - i$ et $-4 + 6i$
2. 2 ; $1 + i$ et $3 + 2i$ 4. -2 ; $-4 + 6i$ et $2 + i$
5. -2 ; $1 + i$ et $-4 + 6i$

b. Dans le plan de Gauss, on désigne par B et C les points-images respectifs des racines imaginaires de cette équation ; que vaut l'aire du carré ayant B et C comme sommets opposés ?

1. $5\sqrt{2}$ us 2. 50 us 3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ us 4. 25 us 5. $\frac{25}{2}$ us

N° 162.

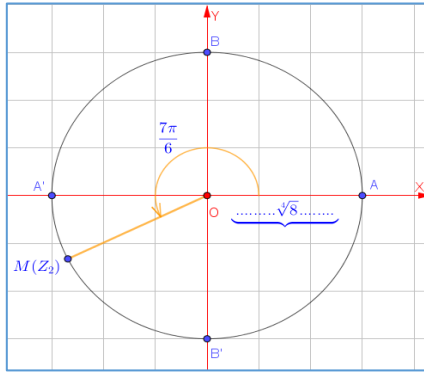
On désigne par z_0, z_1 et z_2 les racines cubiques du nombre complexe

$z = (1 - i\sqrt{3})^3$. Sous la forme algébrique, ces racines cubiques s'écrivent :

1. $z_0 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
2. $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -2$
3. $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_1 = -2$; $z_2 = i$
4. $z_0 = 2i$; $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$
5. $z_0 = -2i$; $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

N° 163.

Ci-dessous se trouve être représenté le plan complexe des racines quatrièmes d'un nombre complexe inconnue z :



Le nombre complexe z vaut :

1. $-4 - 4i\sqrt{3}$
2. $-4 + 4i\sqrt{3}$
3. $4 + 4i\sqrt{3}$
4. $4 - 4i\sqrt{3}$
5. $1 + i\sqrt{3}$

N° 164. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (5 - 3\lambda i)z - 2\lambda^2 - 14 = 0$; $\lambda \in \mathbb{C}$.

a. La valeur de λ pour que les racines z_1 et z_2 de cette équation vérifient la relation : $z_1 - z_2 = 3 + \lambda i$, est :

1. $\lambda = 2 - i$
2. $\lambda = 1 - 2i$
3. $\lambda = -2i$
4. $\lambda = 1 - i$
5. $\lambda = 3i$

b. La solution de l'équation donnée pour la valeur de λ ainsi obtenue est :

1. $z_1 = -3 + 2i$ et $z_2 = 2i$
2. $z_1 = -3$ et $z_2 = 2$
3. $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = 3 + 2i$
4. $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -3 + 2i$
5. $z_1 = -3 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$

N° 165. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (3 - 4\lambda i)z - 4\lambda(4i + \lambda) + 2(11i - 7) = 0$, de racines z_1 et z_2 ; $\lambda \in \mathbb{C}$.

a. La valeur de λ pour que les racines z_1 et z_2 de cette équation vérifient la relation $z_1 - z_2 = 11 - 4i$, est :

1. $\lambda = -\frac{5}{6}i$
2. $\lambda = 3 - 4i$
3. $\lambda = 2 + i$
4. $\lambda = 11i - 7$
5. $\lambda = -i$

b. Avec cette valeur de λ , les solutions z_1 et z_2 de l'équation donnée sont :

1. $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -9 + i$
2. $z_1 = 7$ et $z_2 = -4 + 4i$
3. $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -1 + i$
4. $z_1 = 5 - 3i$ et $z_2 = -6 + i$
5. $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -2 + 8i$

N° 166.

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(2+i)z^2 - (3\lambda+i)z + 2 - \lambda i = 0,$$

dont les racines sont notées z_1 et z_2 . La valeur de λ , pour que z_1 et z_2 satisfont à la relation $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = 1$, est :

$$1. \lambda = \frac{1}{4}(2+i)$$

$$4. \lambda = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$2. \lambda = \frac{1}{3}(2-i)$$

$$5. \lambda = \frac{1}{4}(2-i)$$

$$3. \lambda = \frac{1}{2}(1+i)$$

N° 167. Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{i + \tan \alpha}$; $0 < \alpha < 2\pi$.

a. La forme polaire de z est

$$1. \left(\frac{1}{|\sec \alpha|}; \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \quad 2. \left(|\cos \alpha|; \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad 3. \left(|\cos \alpha|; \alpha - \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$4. \left(|\sec \alpha|; \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad 5. \left(|\sin \alpha|; \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

b. L'ensemble des points-images de z , si α est un paramètre, est

$$1. \text{ Le cercle } x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$2. \text{ L'hyperbole } x^2 - y^2 - 2x = 0$$

$$3. \text{ L'axe } Ox \text{ ou le cercle } x^2 + y^2 + y = 0$$

$$4. \text{ L'axe } Ox \text{ ou la droite } 2x + 2y + 1 = 0$$

$$5. \text{ L'hyperbole équilatère } x^2 - y^2 - 2 = 0$$

N° 168. Si $z = \frac{6+4i}{5-i}$, alors $z^5 + \frac{1}{z^3}$ vaut :

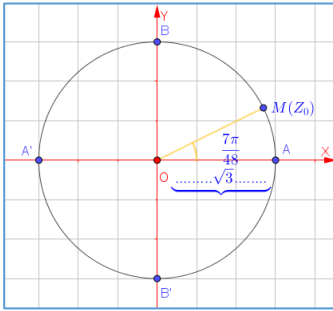
$$1. 1+i \quad 2. 4+4i \quad 3. \frac{-17}{4} - \frac{17}{4}i \quad 4. \frac{6}{5} + 4i \quad 5. \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

N° 169. Si $z = \sqrt[6]{2} \cos \frac{40\pi}{27} +$

$\sqrt[6]{2} i \sin \frac{40\pi}{27}$ est une racine neuvième d'un nombre complexe z , alors z vaut :

$$1. -3 - i\sqrt{3} \quad 2. \sqrt{6} - i\sqrt{2} \quad 3. \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad 4. \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad 5. \sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

N° 170. Le schéma ci-dessous représente, dans le plan complexe, l'une des racines huitièmes d'un nombre complexe z .



Ce nombre est :

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + i\sqrt{2})$
2. $-\frac{81}{2}(\sqrt{3} + i)$
3. $-4\sqrt{3} - 4i$
4. $\frac{7\sqrt{3}}{48}(1 + \sqrt{3})$
5. $\sqrt{3} - i$

N° 171. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $iz^2 + (1 - 3i)z + 2 - 7i = 0$, dont les racines complexes sont α et β .

Que vaut l'expression $E = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$?

1. $-7 - 2i$
2. $3 + i$
3. $22 + 10i$
4. $56 + 52i$
5. $14 + 4i$

N° 172. L'équation dans $\mathbb{C}$: $(1 - i)z^2 + \lambda z - 5 + 3i = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, admet deux racines complexes α et β , liées par la relation: $\frac{17}{\alpha} + \frac{17}{\beta} = 6 + 7i$. Que vaut λ ?

1. $3 + i$
2. $5 - 3i$
3. $1 + i$
4. $3 - i$
5. $-1 - i$

N° 173. Soit: $z_1 = 5 + \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ et $z_2 = 6e^{\frac{5\pi}{6}i} + 3\sqrt{3}$, deux nombres complexes de points - images respectifs P et Q dans le plan complexe. L'aire du carré ayant P et Q comme sommets opposés vaut :

1. $2\sqrt{5}us$
2. $20us$
3. $2\sqrt{5}us$
4. $10us$
5. $5\sqrt{2}us$

N° 174. Soit $z_1 = 7e^{\frac{3\pi}{2}i} - 4$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} + 5$ deux nombres complexes de points - images respectifs R et S dans le plan complexe. L'aire du triangle équilatéral ayant R et S comme sommets vaut :

1. $10us$
2. $5\sqrt{3}us$
3. $25\sqrt{3}us$
4. $100us$
5. $50\sqrt{3}us$

N° 175. Si $-6z = 1 - i\sqrt{5}$ alors $z^{-1} =$

1. $1 - i\sqrt{5}$
2. $\frac{1}{6}(1 + i\sqrt{5})$
3. $\frac{1}{6}(-1 - i\sqrt{5})$
4. $-1 - i\sqrt{5}$
5. $\frac{1}{6}(-1 + i\sqrt{5})$

N° 176. Les exercices a et b se rapportent aux nombres complexes

$$z_1 = 4x - 3yi \text{ et } z_2 = x + 6yi$$

a) si $iz_1 - z_2 = 3$ alors $(x, y) =$

1. $(2, 3)$ 2. $(3, -2)$ 3. $(3, 2)$ 4. $(-3, 2)$ 5. $(-3, -2)$
 b) si $z_1 - iz_2 = 2i$ alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$
 1. $\frac{1}{4}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $-\frac{5}{4}$ 5. $-\frac{15}{4}$

N° 177. L'égalité $(x - i)^2 - 24 + 10i = 0$ est satisfaite lorsque le réel x est égal à :

1. -5 2. 5 ou -5 3. 5 4. $\frac{1}{5}$ 5. $-\frac{1}{5}$

N° 178. Soit l'expression $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des nombres complexes. Détermine a, b et c sachant que

$f(1) = 8 + 16i$, $f(-1) = 16 - 8i$ et $f(i) = 0$. La somme $a + b + c$ vaut :

1. $7 + 16i$; 2. $7 - 16i$; 3. $-7 + 16i$; 4. i 5. $-i$

N° 179. Soit $z = [(10 - a) + i(2 + a)](a - i)$ où a est un nombre réel.

Le nombre z est un réel pour a égal à :

1. -4 ou 3 ; 2. 0 ou -1 ; 3. 2 ou -5 ; 4. 1 ou $\frac{1}{2}$; 5. $\frac{1}{3}$ ou 5

N° 180. Soit $f(z) = z^{-2}$ une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$. L'ensemble des points invariants par f est :

1. $\{0, 1\}$ 2. $\left\{0, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 3. $\left\{0, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 4. $\left\{1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5. $\left\{1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

N° 181. Dans le plan complexe, on considère les transformations ponctuelles

$$s : z \mapsto z' = 4 + iz \quad \text{et} \quad t : z \mapsto 2z + 3 - 2i.$$

a. La proposition correcte concernant la caractérisation de s et t est :

- s est une rotation de centre $C(2, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, tandis que t est une homothétie de centre $C'(3, 3)$ et de rapport 2.
- s est une rotation de centre $C(-3, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, tandis que t est une homothétie de centre $C'(2, 2)$ et de rapport 2.
- s est une similitude de centre $C(0, 2)$ de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, tandis que t est une homothétie de centre $C'(-3, 2)$ et de rapport 2.
- s correspond à une rotation de centre $C(2, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, tandis que t est une homothétie de centre $C'(-3, 2)$ et de rapport 2.

5. s correspond à une translation de vecteur $\vec{V}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, tandis que t est une symétrie de centre $C(-3, 2)$.
- b. La transformation ponctuelle du plan complexe $s \circ t$ correspond à une :
1. rotation de centre $(2, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 2. homothétie de centre $C(-3, 2)$ et de rapport 2
 3. similitude de centre $C(0, 3)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 4. translation de vecteur $\vec{V}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$
 5. symétrie de centre $C(-3, 2)$
- c. $(s \circ t)\left(-\frac{4i+5}{2}\right)$ vaut :
1. $10 + 8i$
 2. $-4i - 5$
 3. $-4i + 5i$
 4. $6 - 3i$
 5. $10 - 2i$
- d. On note par d_{AB} , la droite du plan passant par les points A et B, d'affixes respectifs $z_A = -3 + 2i$ et $z_B = 1 - 4i$. Alors l'image de d_{AB} par $s \circ t$ est la droite d' dont l'équation est :
1. $2y' + 3x' + 9 = 0$
 2. $3y' - 2x' + 9 = 0$
 3. $2y' + 3x' + 6 = 0$
 4. $2y' - 4x' - 9 = 0$
 5. $4y' - 3x' + 12 = 0$
- N° 182. Dans le plan complexe, on considère les transformations ponctuelles
- $t_1: z \mapsto (1 + i)z - 2 + 3i$ et $t_2: z \mapsto (1 - i)z - 1 - 5i$
- A. $t_1 \circ t_2$ correspond à une :
1. translation de vecteur $\vec{V} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$.
 2. similitude de centre $C(-2, 3)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$
 3. rotation de centre $C(-3, -2)$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$
 4. symétrie centrale de centre $C(-5, 1)$
 5. homothétie de centre $C(-2, 3)$ et de rapport 2.
- B. Soit (C) , le cercle centré à l'origine et passant par le point A, image du nombre complexe $z = -3 + 4i$. Alors l'image de (C) par $t_1 \circ t_2$ est la courbe (C') dont une équation cartésienne est :
1. $x'^2 + y'^2 - 4x' + 6y' - 87 = 0$
 2. $x'^2 + y'^2 - 6x' + 4y' + 9 = 0$
 3. $x'^2 + y'^2 - 4x' + 6y' + 24 = 0$
 4. $x'^2 + y'^2 - 4x' + 8y' + 9 = 0$
 5. $x'^2 + y'^2 - 4x' + 3y' - 12 = 0$

CHAPITRE II : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

A. OBJECTIFS

1. Définir les fonctions logarithmiques et exponentielles : domaine de définition, domaine de continuité, intervalles de variation ;
2. Résoudre les équations, les inéquations, les systèmes d'équations et d'inéquations logarithmiques et exponentielles ;
3. Calculer la dérivée d'une fonction logarithmique ou exponentielle ;
4. Calculer la limite d'une fonction logarithmique ou exponentielle ;
5. Etudier et représenter graphiquement une fonction logarithmique ou exponentielle ;
6. Définir et déterminer la valeur approchée du nombre e ;
7. Définir et représenter les fonctions hyperboliques ainsi que leurs réciproques ;
8. Déterminer les dérivées des fonctions hyperboliques et de leurs réciproques.

B. ACTIVITES

1. Calcule chacun des nombres suivants :

a. $\text{Exp}_4\left(\frac{1}{2}\right)$; $\text{Exp}_{36}\left(\frac{3}{2}\right)$; $\text{Exp}_{32}\left(\frac{-2}{5}\right)$; $\text{Exp}_{100}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\text{Exp}_{0,0625}\left(\frac{1}{4}\right)$
 b. $\text{Exp}_8\left(\frac{2}{3}\right)$; $\text{Exp}_{16}\left(\frac{-3}{4}\right)$; $\text{Exp}_{36}\left(\frac{5}{2}\right)$; $\text{Exp}_2\left(\frac{7}{2}\right)$; $\text{Exp}_{\frac{4}{9}}\left(\frac{-3}{2}\right)$
 c. $\text{Exp}_{25}(0,5)$; $\text{Exp}_4(1,5)$; $\text{Exp}_2(-3,5)$; $\text{Exp}_9(1,75)$; $\text{Exp}_{0,25}(0,5)$

2. Que dire de x si :

$$32^x = \frac{1}{\sqrt{2}} ; 729^x = \sqrt[3]{9} ; 2^x = 2\sqrt[5]{16} ; 4^x = \sqrt{32} ; 4^x - 128 = 0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256} ; \left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} = 0 ; 27 \cdot 2^x = 8 \cdot 3^x ; 16 \cdot 3^{x-2} = 4^x ; 2^{\sqrt{x}} = 16$$

$$3^x \sqrt[3]{9} = 3^{x-2} \quad 3^{3x} = 243 ; 2^{3x} = 512 ; 3^{x^2-3x+5} = 27 ; 4^{x^2} = 2^{5x-2}$$

3. Que dire de x si

a) $4^{2x-1} < \frac{1}{128}$ c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x-2} \geq 1$ e. $64^{1-|x|} - \frac{1}{2^{|3-x|}} > 0$
 b) $3^{\sqrt{x^2-9}} \geq 81$ d. $25^{|x-2|} - 625 \leq 0$ f. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 25^{\sqrt{x-2}}$

2. Calcule chacun des nombres suivants :

a. $\log_2 128$ f. $\log_4 \sqrt[5]{512}$

$$\begin{array}{ll} \text{b. } \log_5 625 & \text{g. } \log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{125} \\ \text{c. } \log_{243} 81 & \text{h. } \log_{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} 16 \\ \text{d. } \log_{\sqrt{3}} 27 & \text{i. } \log_6 \sqrt[7]{216} \\ \text{e. } \log_{\frac{1}{4}} 256 & \text{j. } \log_{0,2} 3125 \end{array}$$

3. Trouve x si :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \log_{0,625} x = \frac{1}{4} & \text{e. } \log_{32} x = -\frac{1}{2} & \text{i. } \log_{100000} x = \frac{1}{10} \\ \text{b. } \log_{25} x = 2,5 & \text{f. } \log_{100} x = \frac{1}{4} & \text{j. } \log_4 x = -\frac{1}{4} \\ \text{c. } \log_{\sqrt{5}} x = 8 & \text{g. } \log_4 x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \text{d. } \log_{\sqrt{3}} x = \frac{-4}{3} & \text{h. } \log_{0,2} x = 3 & \end{array}$$

4. Détermine x pour que :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \log_x \frac{1}{32} = -5 & \text{e. } \log_{\frac{x}{2}} 64 = 3 \\ \text{b. } \log_x \frac{1}{9} = -4 & \text{f. } \log_{\sqrt[3]{x}} 216 = 6 \\ \text{c. } \log_x 2\sqrt{2} = 6 & \text{g. } 3 \log_{\sqrt[5]{x}} 81 = 10 \\ \text{d. } \log_{2x} \sqrt{3} = 5 & \text{h. } 2 \log_{\sqrt[10]{x}} 4 = 5 \end{array}$$

5. Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Pour une dose initiale de 10 mg, la quantité $Q(t)$ éliminée dans le corps après t heures est modélisée par la relation $Q(t) = 10(0,8)^t$.

a) Donne approximativement la quantité de médicament dans le corps 8 heures après la dose initiale.

b) Trouve le pourcentage du médicament encore présent dans le corps à éliminer chaque heure ?

6. Le nombre des bactéries dans une culture croît de 600 à 1800 entre 7 heures et 9 heures du matin. En supposant que la croissance soit exponentielle, le nombre $f(t)$ de bactéries t heures après 7 heures du matin est donné par

$$f(t) = 600(3)^{\frac{t}{2}}.$$

Donne approximativement le nombre de bactéries dans la culture de 8 heures à 10 heures, et à 11 heures du matin.

7. On estime qu'une automobile perd 10% de sa valeur tous les ans. Au bout de combien d'années perdra-t-elle la moitié de sa valeur ?

8. Le capital de 500 u.m au départ est placé dans une banque à un taux de 5% par an. Ce montant n'étant capitalisable qu'en fin d'année.

a. Exprime le capital acquis au bout de n années

b. Comment évolue le coefficient multiplicateur de ce capital d'une année à l'autre ?

9. L'équipe de l'Institut National de Recherche en Biomédical (INRB) a mis en place un système sanitaire permettant d'éradiquer la maladie à virus Ébola en République Démocratique du Congo (RDC). L'une des villes de la RDC connaît maintenant une variation positive de sa population définie par la fonction :

$$p(t) = p_0(1 + i)^t$$

où p_0 représente la population initiale,

$p(t)$ la population à l'instant t (en années)

et i le taux de croissance de la population.

En 2010, la population s'élevait à 2 500 000 d'habitants et à 2 750 000 en 2011. L'enseignant de mathématiques de la 4^{ème} année des humanités scientifiques demande à ses élèves de trouver la valeur de i puis d'utiliser cette valeur pour prédire ce que la population de cette ville sera en l'an 2024, en 2030 et en 2050.

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

II.1. FONCTIONS EXPONENTIELLES

II.1.1. DEFINITION

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

On appelle fonction exponentielle de base a , notée Exp_a , la fonction

$Exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \mapsto y = Exp_a(x)$

On écrit : $y = Exp_a(x)$ ou simplement $y = a^x$

Exemples : • $y = 2^x$ • $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

II.1.2. VARIATIONS ET GRAPHIQUE DE LA FONCTION

y = a^x

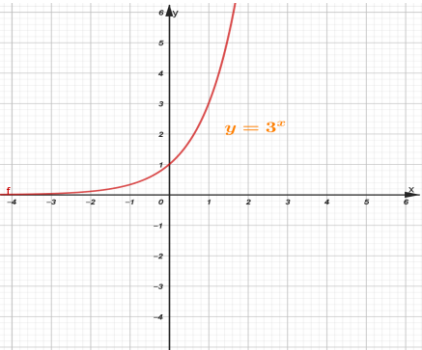
Soient les fonctions exponentielles :

• f : ℝ → ℝ+* : x |→ y = 3^x • g : ℝ → ℝ+* : x |→ y = (1/3)^x

On considère quelques points des graphiques de f et g qu'on représente :

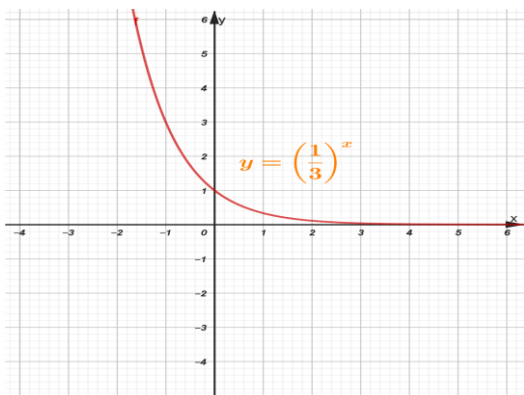
* y = 3^x

x	-∞	...	-2	-1	0	1	2	...	+∞
y	0	...	1/9	1/3	1	3	9	...	+∞



* y = (1/3)^x

x	-∞	...	-2	-1	0	1	2	...	+∞
y	+∞	...	9	3	1	1/3	1/9	...	0



On constate que :

- * $y = 3^x$ est définie, continue, strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est injective et admet l'axe Ox comme asymptote horizontale.
- * $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ est définie, continue, strictement positive et décroissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est injective et admet l'axe Ox comme asymptote horizontale.

D'une manière générale :

- la fonction $y = a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- si $a > 1$ alors $y = a^x$ est croissante
C'est-à-dire $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 \leq x_2) \Leftrightarrow (a^{x_1} \leq a^{x_2})$
- si $0 < a < 1$ alors $y = a^x$ est décroissante
C'est-à-dire $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 \leq x_2) \Leftrightarrow (a^{x_1} \geq a^{x_2})$
- la fonction $y = a^x$ est strictement positive : $\forall x \in \mathbb{R} : a^x > 0$
- les graphiques de $y = a^x$ et $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe des y
- le graphique de $y = a^x$ passe par le point $(0, 1)$ et le point $(1, a)$
- $y = a^x$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_0^+$. En d'autres termes elle est à la fois injective et surjective.

- * $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (a^{x_1} = a^{x_2}) \Rightarrow (x_1 = x_2)$; $y = a^x$ est injective
- * $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R} : a^x = y$; $y = a^x$ est surjective.

II.1.3. LIMITES AUX BORNES DU DOMAINE DE DEFINITION

– si $a > 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

– si $0 < a < 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

Conséquences

– si $a > 1$, le graphique de $y = a^x$ admet comme asymptote horizontale l'axe ox : $y = 0$ pour $x \rightarrow -\infty$

– si $0 < a < 1$, le graphique de $y = a^x$ admet comme asymptote horizontale l'axe ox : $y = 0$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Remarques : La fonction exponentielle respecte les propriétés des puissances dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : & * a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} & * a^{x_1} \cdot a^{-x_1} = 1 \\ & * (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} & * \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2} \end{aligned}$$

II.1.4. NOMBRE e

Définition

Le nombre e est irrationnel et transcendant. Il n'est solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

Il est défini par $e = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ou $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$ où $\frac{1}{m} = h$.

b. Valeur approchée

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ posons : } E_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Pour des valeurs entières successives de m , trouvons E_m .

$$\begin{aligned} - \quad m = 1 & \Rightarrow E_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \\ - \quad m = 2 & \Rightarrow E_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \\ - \quad m = 3 & \Rightarrow E_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,3703703... \\ - \quad m = 4 & \Rightarrow E_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,44140625 \\ - \quad m = 5 & \Rightarrow E_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2,48832 \\ - \quad m = 6 & \Rightarrow E_6 = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 = 2,521626... \\ & \vdots \end{aligned}$$

Lorsque m augmente, E_m prend des valeurs de plus en plus grandes, comprises entre 2 et 3, mais reste toujours inférieur à 3.

Il en résulte que, lorsque m tend vers l'infini par des valeurs entières positives, E_m a une valeur déterminée, représentée par e . Le raisonnement reste valable lorsque m est réel et positif.

En conclusion, la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, lorsque m tend vers l'infini, par des valeurs réelles positives ou nulles, existe. On écrit : $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$ (1)

En posant : $\frac{1}{m} = h$, on a : $m = \frac{1}{h}$.

Dès lors, si m tend vers l'infini alors h tend vers zéro.

$$(1) \text{ devient : } \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e \quad (2)$$

Le nombre e peut donc être défini de deux manières :

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \text{ou} \quad e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

Ce nombre est compris entre 2 et 3. Il est irrationnel et transcendant³.

Sa valeur approximative à 10^{-10} près est **$e = 2,71828182846$**

Exercices résolus

ER 60. Détermine la base de la fonction exponentielle $y = a^x$ si sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par le point $P\left(\frac{1}{25}; \sqrt[5]{3}\right)$.

Résolution

$$P\left(\frac{1}{25}; \sqrt[5]{3}\right) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \sqrt[5]{3} = a^{\frac{1}{25}} \text{ d'où } a = 243$$

ER 61. Détermine la base de la fonction exponentielle $y = a^x$ si sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par le point $P(4; 1296)$.

Résolution

$$P(4; 1296) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 1296 = a^4 \text{ d'où } a = 6$$

ER 62. Calcule chacune des limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4x} \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

Résolution

³ N'est pas solution d'une équation polynôme

$$\begin{aligned}
\text{a. } \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3} &= \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = e \cdot 1 = e \\
\text{b. } \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4x} &= \lim_{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^4 = \left[\lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^4 = e^4 \\
\text{c. } \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{+\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = \left[\lim_{+\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3 \\
\text{d. } \lim_{+\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2} &= \lim_{+\infty} \left[\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\right] \\
&= \left[\lim_{+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}\right] = \frac{\left[\lim_{+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2}{\left[\lim_{+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}} = \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3
\end{aligned}$$

Exercices

- N° 183. On considère la fonction exponentielle $y = a^x$.
Détermine la base de cette fonction pour que son graphique passe par le point $P(8; 16)$.
- N° 184. On considère la fonction exponentielle $y = a^x$.
Détermine la base de cette fonction pour que son graphique passe par le point $P(3; 625)$.
- N° 185. On considère la fonction exponentielle $y = a^x$.
Détermine la base de cette fonction pour que son graphique passe par le point $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$.

II.2. FONCTIONS LOGARITHMIQUES

II.2.1. DEFINITION

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

On appelle fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, la fonction

$$\log_a: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = \log_a x$$

Exemples

$y = \log_3 x$ et $y = \log_{\frac{3}{4}}(2x - 5)$ sont des fonctions logarithmiques.

II.2.2. VARIATIONS ET GRAPHIQUES DE LA FONCTION

$y = \log_a x$

Exemples :

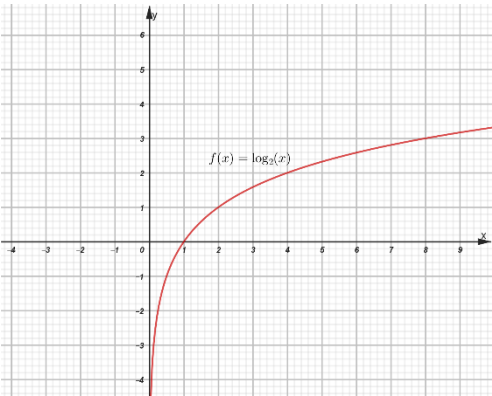
Considérons les fonctions suivantes

• $\log_2 : x \mapsto y = \log_2 x$ • $\log_{\frac{1}{2}} : x \mapsto y = \log_{\frac{1}{2}} x$

et quelques points de leurs graphiques :

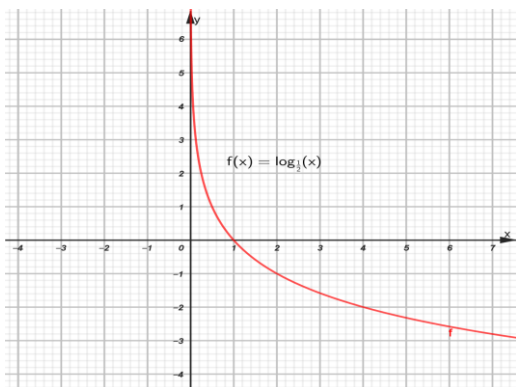
* $y = \log_2 x$

x	0	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$+\infty$
y	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$



* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	0	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$+\infty$
y	$+\infty$	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...	$-\infty$



On constate que :

* $y = \log_2 x$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_0^+$.

Elle est injective et admet l'axe Oy comme asymptote verticale.

* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ est définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_0^+$.

Elle est injective et admet l'axe Oy comme asymptote verticale.

De manière générale :

– La fonction $y = \log_a x$ est définie, continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_0^+$.

– Si $a > 1$, alors $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$, on a : $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (\log_a x_1 < \log_a x_2)$.

La fonction $\log_a$ est strictement croissante.

– Si $0 < a < 1$, alors $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$, on a : $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (\log_a x_1 > \log_a x_2)$

La fonction $\log_a$ est strictement décroissante.

– Si $x > 1$ et $a > 1$ alors $\log_a x \in \mathbb{R}_+$ et si $x > 1$ et $0 < a < 1$ alors $\log_a x \in \mathbb{R}_-$.

– Les graphiques des $y = \log_a x$ et $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ sont symétriques par rapport à l'axe des x

– Le graphique de la fonction $y = \log_a x$ passe par les points $(1, 0)$ et $(a, 1)$.

– La fonction $y = \log_a x$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, en d'autres termes :

* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $(\log_a x_1 = \log_a x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$; $y = \log_a x$ est injective.

* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^* : \log_a x = y$; $y = \log_a x$ est surjective.

Limites aux bornes du domaine de définition

– Si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

– Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

Conséquence

Le graphique de $y = \log_a x$ admet l'asymptote verticale d'équation $x = 0$ en 0^+ .

En particulier,

– si $a = e$, la fonction $y = \log_e x$ se note $y = \ln x$ ou $y = \text{Log } x$ et s'appelle **fonction logarithmique népérien ou naturel** et $y = \log x$ fonction logarithme décimal.

– si $a = 10$, la fonction $y = \log_{10} x$ se note $y = \log x$ et s'appelle fonction logarithmique décimal.

Propriétés des logarithmes

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^* : \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\text{En général : } \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \cdots + \log_a x_n$$

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

Remarques :

$$\begin{aligned} \text{a. Si } n = -1 \text{ alors } \log_a x^n &= \log_a x^{-1} \\ &= -\log_a x \end{aligned}$$

$$\text{b. } \log_a x^n \neq (\log_a x)^n \quad \text{et} \quad (\log_a x)^n = \log_a^n x$$

II.3. LIEN ENTRE $y = \log_a x$ ET $y = a^x$

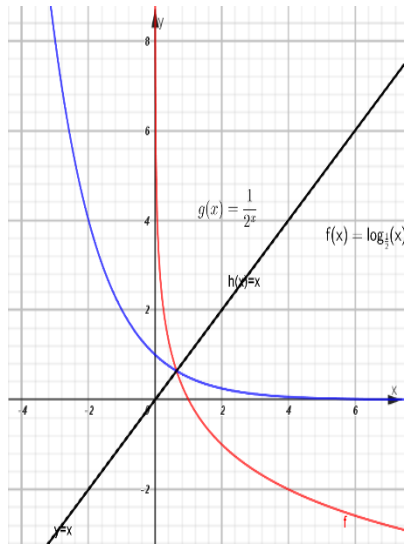
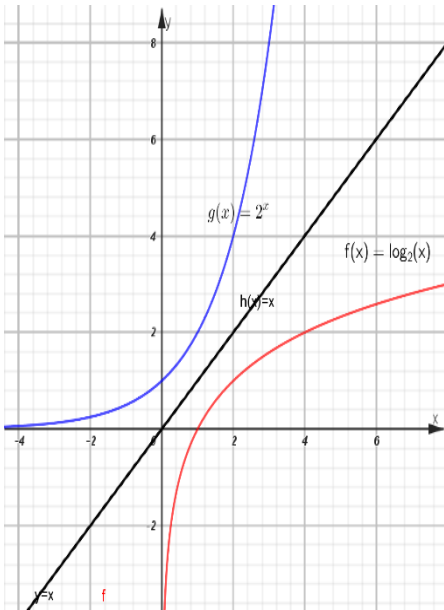
La fonction $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$. Il en résulte que le logarithme de base a d'un nombre x est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir x .

$$(y = \log_a x) \Leftrightarrow (a^y = x)$$

Ainsi, $y = \log_a x$ et $y = a^x$ ont des graphiques symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$



II.4. FORMULE DE CHANGEMENT DE BASES

Nous savons que la formule de passage de la base a à la base b est :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

En particulier,

si $b=10$, $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$,

si $b = e$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

et si $b = x$, $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Exercices résolus

ER 63. Soit a un réel positif et différent de 1. Calcule :

a) $\log_a \sqrt{\sqrt{a}}$ b) $\log_a \frac{1}{a^2 \sqrt[3]{a}}$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_a \sqrt{\sqrt{a}} &= \log_a \sqrt[4]{a} & \text{b) } \log_a \frac{1}{a^2 \sqrt[3]{a}} &= \log_a 1 - \log_a a^2 \sqrt[3]{a} \\ &= \frac{1}{4} \log_a a & &= -\log_a a^2 \sqrt[3]{a} \\ &= \frac{1}{4} & &= -(\log_a a^2 + \log_a \sqrt[3]{a}) \\ & & &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

ER 64. Trouve la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$\text{a) } \log_2 (\log_7^3 49) - \log_4^2 \frac{1}{64} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32} \qquad \text{b) } (\log_9^4 81)^{\log_{\frac{1}{4}} 5}$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 (\log_7^3 49) - \log_4^2 \frac{1}{64} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32} &= \log_2 (\log_7 7^2)^3 - (\log_4 4^{-3})^2 + \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5} \\ &= \log_2 8 - 9 - 10 \\ &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\log_9^4 81)^{\log_{\frac{1}{4}} 5} &= (2^4)^{\log_{2^{-2}} 5} = 2^{\log_2 5^{-2}} \\ &= 5^{-2} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

ER 65. Simplifie les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\log_{\frac{1}{3}} x + \log_9 x}{\log_{\frac{1}{9}} x - \log_3 x} \quad (x > 0) & \quad \text{c) } a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}} \quad (a > 0 \text{ et } a \neq 1) \\ \text{b) } (3^3 \log_3 x)^{\log_{\frac{1}{27}} x} \quad (x > 0) & \end{aligned}$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\log_{\frac{1}{3}} x + \log_9 x}{\log_{\frac{1}{9}} x - \log_3 x} &= \frac{\log_{3^{-1}} x + \log_{3^2} x}{\log_{3^{-2}} x - \log_3 x} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \log_3 x}{-\frac{3}{2} \log_3 x} = \frac{1}{3} \\ \text{b) } (3^3 \log_3 x)^{\log_{\frac{1}{27}} x} &= (3^{\log_3 x^3})^{\log_{\frac{1}{27}} x} \\ &= (x^3)^{\log_{\frac{1}{27}} x} \\ &= x^{-9} \\ &= \frac{1}{x^9} \end{aligned}$$

$$\text{c) Posons } y = a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } \left[\ln y = \ln a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}} \right] &\Leftrightarrow \left[\ln y = \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \cdot \ln a \right] \\ &\Leftrightarrow (y = \ln a) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}} = \ln a$$

ER 66. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $y = \ln \frac{e^x}{1-e^x}$ b) $y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ c) $y = \sqrt{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$ d) $y = \sqrt{\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+1)}}$

Résolution

Il suffit de déterminer les conditions pour que l'expression donnée ait un sens. Nous les appelons conditions préalables (C.P.).

a) C.P. : $\frac{e^x}{1-e^x} > 0$

x	-∞ 0 +∞		
e^x	+ + +		
$1 - e^x$	+ 0 -		
y	+ -		

$D_f =] -\infty, 0 [$

b) C.P. : $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0$; or $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) C.P. : $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \geq 0$ et $x > 0$

x	-∞	0	$\frac{1}{e}$	e	+∞
$\ln x - 1$	- - - 0 +				
$\ln x + 1$	- 0 + + +				
y	+ - 0 +				

$D_f =] 0, \frac{1}{e} [\cup [e, +\infty [$

d) C.P. : $\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+1)} \geq 0$

$x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

X	-∞	-1	0	1	2	+∞
$\ln(x - 1)$	- - - - 0 +					
$\ln(x + 1)$	- 0 + +					
Y	- 0 +					

$D_f = [2, +\infty [$

ER 67. Détermine x pour que chacune des équations soit vérifiée.

a) $\ln[(2x-3)(x+1)] = \ln(2x-3) + \ln(x+1)$ b) $\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x} = \frac{(x-1)^{2x}}{(x-2)^{2x}}$

Résolution

a) C.P.: $(2x-3)(x+1) > 0$

$(2x-3 > 0) \Leftrightarrow (x > \frac{3}{2})$

$(x+1 > 0) \Leftrightarrow (x > -1)$

x	$-\infty$		-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$		-	-	0	+
$x+1$		-	0	+	+
y		+	0	-	0

L'égalité donnée est vérifiée pour tout $x \in]\frac{3}{2}, +\infty[$

b) C.P.: $\frac{x-1}{x-2} > 0$ et $\frac{x-1}{x-2} \neq 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
x-1		-	0	+	+	+
x-2		-	-	-	0	+
y		+	0	-		+

$(x-1 > 0) \Leftrightarrow (x > 1)$ et $(x-1 \neq 1) \Leftrightarrow (x \neq 2)$

$D_1 =]1, 2[\cup]2, +\infty[$

$(x-2 > 0) \Leftrightarrow (x > 2)$ et $(x-2 \neq 1) \Leftrightarrow (x \neq 3)$

$D_2 =]2, 3[\cup]3, +\infty[$

L'égalité donnée est vérifiée pour tout $x \in]2, 3[\cup]3, +\infty[$

ER 68. On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{x-2}}{e^{x+1}}$. Calcule $f(-3\ln 2)$

Résolution

$$f(-3\ln 2) = \frac{e^{-3\ln 2 - 2}}{e^{-3\ln 2 + 1}} = -\frac{5}{3}$$

ER 69. a) Détermine la base d'une fonction exponentielle $f(x) = a^x$ pour que le point $P(\sqrt{3}, 8)$ appartienne au graphe de f .

b) Détermine la base de la fonction $g(x) = \log_a x$ pour que sa représentation graphique passe par le point (400, 4).

Résolution

a) Soit C_f le graphe de la fonction f .

b) Soit C_g le graphe de la fonction.

$$P(\sqrt{3}, 8) \in C_f$$

$$P(400, 4) \in C_g$$

$$[f(x) = a^x] \Rightarrow [f(\sqrt{3}) = a^{\sqrt{3}}]$$

$$[g(x) = \log_a x] \Rightarrow [g(400) = \log_a 400]$$

$$\Rightarrow (8 = a^{\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow (4 = \log_a 400)$$

$$\Rightarrow (a = 2^{\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow (a = 2^{\sqrt{5}})$$

Exercices

N° 186. Calcule :

a) $\log_{0,1} 0,001$

c) $\log_8 \left(\frac{1}{8}\right)^2$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 256$

g) $\log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{49}\right)^{-1}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25^4$

f) $\log_{0,5} 4$

h) $\log_{0,25} \frac{1}{16}$

N° 187. Détermine b pour que chacune des égalités suivantes soit vraie

a) $\log_b 0,2 = 2$

b) $\log_b 10^4 = -2$

c) $\log_b 3 = \frac{1}{3}$

N° 188. Simplifie

a) $\ln^5 \sqrt{e^2}$

c) $\ln \left(\frac{1}{e^2}\right)^3$

e) $2^{\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}}$

g) $\frac{\log_4 x}{\log_{0,5} x}$

b) $\left(\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)^2$

d) $\log_{a^2} x + \log_{\frac{1}{a}} x$

f) $(5^{\ln 2})^{\log_5 e}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 8}$

N° 189. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $y = (1-x)^{\frac{1}{x+3}}$

f) $y = \sqrt{\frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}}$

k) $y = \frac{x}{\ln(x-2)-1}$

b) $y = x^{\sqrt{1-2\cos x}} \quad (0 \leq x \leq \pi)$

g) $y = \frac{1}{\ln(\ln x)}$

l) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{1-x}{1+x}}$

$$c) y = \sqrt{1 - e^{3x}}$$

$$h) y = \text{Arc cos}(\ln 2x) \quad m) y = \log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$$

$$d) y = \log \left[\log \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right) \right] \\ (0 < x < \pi)$$

$$i) y = \log_{x-2} \frac{x-2}{4-x}$$

n)

$$y = \log_{-x^2 - 2x} \sqrt{2 - x}$$

$$e) y = \log_3(3-4x) + \log_3(2-2x)$$

$$j) y = \frac{e^x - 1}{e^{x-1} - \sqrt{e}}$$

$$o) y = 2^{\sqrt{2-x-x^2}}$$

N° 190. Exprime x en fonction de y lorsque

$$a) y = \ln(1 + x^3)$$

$$b) y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$c) y = 1 + e^{\frac{\ln 2 |2x| - 2}{2}}$$

$$d) y = e^{\sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}}$$

N° 191. Exprime y en fonction de x et réciproquement

$$a) e^{1+\ln 3x} = \ln(1 + e^{3y})$$

$$b) (y + 1)^{\ln 2} = (\ln 2)^{x+1}$$

N° 192. Détermine la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} \quad c) f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$d) f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

N° 193. Soit la fonction logarithmique définie par $f(x) = \log_b x$, $b > 0$ et $b \neq 1$. Détermine la valeur de b sachant que la courbe passe par le point : a) A (125, 3) b) B (1 296, 4) c) C ($\frac{1}{16}$, -2) d) D(2, $-\frac{1}{4}$)

N° 194. Détermine le centre de symétrie de la fonction définie par

$$y = \frac{1}{e^x - 1}$$

II.5. EQUATIONS ET INEQUATIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Les équations et inéquations exponentielles et logarithmiques ont été introduites en classe de 3^e année des humanités scientifiques et techniques. A ce niveau, on se contente de résoudre quelques exercices dans le but d'approfondir la matière.

Exercices résolus

ER 70. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$$\text{a) } 3 \cdot 3^{2x+1} - 3^x = 9(3^{x+2} - 1) \qquad \text{b) } \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-2}$$

$$\text{c) } \sqrt{5^x} + \sqrt{\frac{1}{5^x}} = 2,9$$

Résolution

a) L'équation donnée peut s'écrire : $9 \cdot 3^{2x} - 3^x - 81 \cdot 3^x - 9 = 0$

En posant $3^x = t$, nous avons $(9t^2 - t = 81t - 9) \Leftrightarrow (t = 9 \text{ et } t = \frac{1}{9})$

$$* (3^x = 9) \Rightarrow (x = 2) \qquad * (3^x = 9^{-1}) \Rightarrow (x = -2)$$

$$S = \{2, -2\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-2} \right] &\Leftrightarrow \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2x+2} \right] \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x = -2x + 2) \\ &\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 2) \qquad S = \{-1, 2\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left(\sqrt{5^x} + \sqrt{\frac{1}{5^x}} = 2,9 \right) \Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}x}} = \frac{29}{10} \right)$$

En posant $5^{\frac{1}{2}x} = k$, ($k > 0$), nous avons : $\left(k + \frac{1}{k} = \frac{29}{10}\right) \Leftrightarrow [(k = \frac{5}{2} \text{ ou } k = \frac{2}{5})]$

$$\begin{aligned} * \left(k = \frac{2}{5}\right) &\Leftrightarrow (5^{\frac{1}{2}x} = \frac{2}{5}) & * \left(k = \frac{5}{2}\right) &\Leftrightarrow (5^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{2}) \\ &\Leftrightarrow (5^x = \frac{4}{25}) & &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x \log_5 5 = \log_5 \frac{5}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (x \log_5 5 = \log_5 \frac{4}{25}) & &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = \log_5 \frac{5}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (x = \log_5 \frac{4}{25}) & &\Leftrightarrow \left(x = 2 \log_5 \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \log_5 \frac{4}{25}, 2 \log_5 \frac{5}{2} \right\}$$

ER 71. Détermine l'ensemble - solution de chacune des équations suivantes :

$$\text{a) } e^x + \frac{1}{e^{x-7}} = 9 \qquad \text{b) } \log_x 4 = \log_4 x \qquad \text{c) } \log_2(\log_x 81) = 2$$

Résolution

a) En posant $e^x = t$ ($t > 0$), nous avons: $\left(t + \frac{1}{t-7} = 9\right) \Leftrightarrow (t^2 - 16t + 64 = 0)$

$$\Leftrightarrow [(t-8)^2 = 0]$$

$$(e^x = 8) \Leftrightarrow (\ln e^x = \ln 8) \\ \Leftrightarrow (x = \ln 8)$$

$$S = \{\ln 8\}$$

$$b) \text{ C. P : } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \quad D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$(\log_x 4 = \log_4 x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_4 x} = \log_4 x \right) \Leftrightarrow (\log_4^2 x - 1 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x = 1 \text{ ou } \log_4 x = -1) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4})$$

$$S = \left\{ 4, \frac{1}{4} \right\}$$

$$c) \text{ C. P : } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \quad D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$[\log_2(\log_x 81) = \log_2 2^2] \Leftrightarrow (\log_x 81 = 4)$$

$$\Leftrightarrow (x^4 = 81)$$

$$\Leftrightarrow (x = 3)$$

$$S = \{3\}$$

ER 72. Résous l'équation $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4 144$

Résolution

$$\text{C. P : } (2^x - 1 > 0) \Leftrightarrow (2^x > 1)$$

$$\Leftrightarrow (2^x > 2^0)$$

$$\Leftrightarrow (x > 0)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\text{Nous avons : } [\log_2(2^x - 1) + \log_2 2^x = \log_2 12]$$

$$\Leftrightarrow [\log_2(2^x - 1) \cdot 2^x = \log_2 12]$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 2^x - 12 = 0)$$

En posant $2^x = t$ ($t > 0$), nous obtenons : $t^2 - t - 12 = 0$ avec $\Delta = 49$
 $t_1 = 4$ et $t_2 = -3$ (à rejeter)

$$(2^x = 4) \Leftrightarrow (2^x = 2^2) \Leftrightarrow (x = 2)$$

$$S = \{2\}$$

ER 73. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$a) \log_x(x^2 + 2x - 3) \cdot \log_{x+3} x - \log_{x+3} x^{\frac{1}{\log_3 x}} = \log_x x$$

$$c) (x \cdot 10^4)^{\log x} = 0,000 2^{\log^2} \quad d) \log_2(2^x - 5)^{\log_3 2} + \log_3 2^{x-3} = 1$$

Résolution

$$a) \text{ C.P : } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \quad x + 3 > 0 \text{ et } x + 3 \neq 1 \text{ et } x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$x > -3 \quad x \neq -2 \quad]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

Les solutions existent pour : $x > 1$

$$\begin{aligned} & \left[\log_x(x^2 + 2x - 3) \cdot \log_{x+3} x - \frac{1}{\log_3 x} \log_{x+3} x = \log_x x \right] \\ & \Leftrightarrow \left\{ \log_{x+3} x \left[\log_x(x^2 + 2x - 3) - \frac{1}{\log_3 x} \right] = 1 \right\} \\ & \Leftrightarrow [\log_x(x^2 + 2x - 3) - \log_x 3 = \log_x(x + 3)] \\ & \Leftrightarrow \left[\log_x \frac{x^2 + 2x - 3}{3} = \log_x(x + 3) \right] \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3 = 3x + 9) \\ & \Leftrightarrow [x_1 = 4 \text{ ou } x_2 = -3 \text{ (à rejeter)}]. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S = \{4\}$$

b) Posons $t = e^x$ ($t > 0$), nous avons :

$$(2t^3 - 9t^2 - 2t + 9 = 0) \Leftrightarrow [(t-1)(2t-9)(t+1) = 0]$$

$$t = 1 \quad \text{ou} \quad t = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad t = -1 \text{ (à rejeter)}$$

$$\begin{aligned} (t = 1) & \Rightarrow (e^x = 1) \\ & \Rightarrow (x = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t = \frac{9}{2}) & \Rightarrow (e^x = \frac{9}{2}) \\ & \Rightarrow (x = \ln \frac{9}{2}) \end{aligned}$$

$$S = \left\{ 0, \ln \frac{9}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) C.P : } (x > 0 \text{ et } x \cdot 10^4 \neq 1) & \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x \neq 10^{-4}). \quad x \in \left] 0, \frac{1}{10^4} \right[\cup \left] \frac{1}{10^4}, +\infty \right[\\ [\log(x \cdot 10^4)^{\log x} = \log(0,0002)^{\log 2}] & \Leftrightarrow [\log x (\log x + \log 10^4) = \log 2 \cdot (\log 2 + \log 10^{-4})] \\ & \Leftrightarrow [(\log x)^2 + 4 \log x = (\log 2)^2 - 4 \log 2] \\ & \Leftrightarrow [(\log x)^2 + 4 \log x + 4 \log 2 - (\log 2)^2 = 0] \end{aligned}$$

Nous avons une équation du second degré en $\log x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 - 16 \log 2 + 4(\log 2)^2 \quad \log x = -\log 2 ; \quad \log x = -4 + \log 2 \\ &= (4 - 2 \log 2)^2 \quad x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{5000}. \\ \sqrt{\Delta} &= 4 - \log 4 \quad S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5000} \right\} \end{aligned}$$

d) C.P : $(2^x - 5 > 0) \Leftrightarrow (x > \log_2 5)$

$$[\log_2(2^x - 5)^{\log_3 2} + \log_3 2^{x-3} = 1] \Leftrightarrow [\log_3 2 \cdot \log_2(2^x - 5) + (x - 3) \log_3 2 = 1]$$

$$\Leftrightarrow [\log_2(2^x - 5) + (x - 3) = \log_2 3]$$

$$\Leftrightarrow [\log_2(2^x - 5) \cdot 2^{x-3} = \log_2 3]$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0)$$

En posant : $t = 2^x$ ($t > 0$), nous avons : $(t^2 - 5t - 24 = 0) \Leftrightarrow (t = 8 \text{ ou } t = -3)$

$$(2^x = 8) \Rightarrow (x = 3) \text{ et } S = \{3\}$$

ER 74. Résous et discute l'équation : $(m + 1) \cdot a^{2x} + m \cdot a^x + m = 0$
(x inconnue et m paramètre réel).

Résolution

Posons $t = a^x$ ($t > 0$), nous avons : $(m + 1)t^2 + mt + m = 0$

$\Delta = -3m^2 - 4m$	m	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	0	$+\infty$
	Δ	-	0	+	0

$S = \frac{-m}{m+1}$	m	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
	-m	+	+	0	-
	m+1	-	0	+	+
	S	-			+

$P=\frac{m}{m+1}$	M	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
	M	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	m+1	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	P	$+$			$-$	0

Dressons le tableau résumant l'étude

m	Δ	P	S	Conclusions en fonction de t	Ensemble-solutions en fonction de a^x
-	-	+	-	pas de racines réelles	$S = \emptyset$
$-\frac{4}{3}$	0	+	-	une racine double négative	$S = \emptyset$
	+	+	-	2 racines négatives	$S = \emptyset$
-1	+	//	//	l'équation est du 1 ^e degré en t	$S = \emptyset$
	+	-	+	2 racines de signes contraires $t_1 < 0$ et $t_2 > 0$; $ t_1 < t_2 $	$S = \{ \log_a t_2 \}$
0	0	0	0	une racine double nulle	$S = \emptyset$

	-	+	-	pas de racines réelles	$S = \emptyset$
--	---	---	---	------------------------	-----------------

ER 75. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{4}}(2x+3) \quad b) \ln(2-x) > \frac{1}{2} \ln x$$

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-3} \geq 1$$

Résolution

$$a) \text{ C.P: } (x-1 > 0) \Leftrightarrow (x > 1) \text{ et } (2x+3 > 0) \Leftrightarrow (x > -\frac{3}{2})$$

$$x \in]1, +\infty[$$

$$\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{4}}(2x+3) \right] \Leftrightarrow \left[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2 < \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1 > 2x + 3) \text{ (car la base est inférieure à 1)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 2 > 0) \quad (i)$$

X	-∞	2-√6	2+√6	+∞
$x^2 - 4x - 2$	+	0	-	0
	+	0	+	+

La solution de l'inéquation (i) est : $S_1 =]-\infty, 2-\sqrt{6}[\cup]2+\sqrt{6}, +\infty[$

$$S = S_1 \cap]1, +\infty[=]2+\sqrt{6}, +\infty[$$

$$b) \text{ C.P: } (2-x > 0) \Leftrightarrow (x < 2) \text{ et } x > 0. \quad x \in]0, 2[$$

$$\left[\ln(2-x) > \frac{1}{2} \ln x \right] \Leftrightarrow \left[\ln(2-x)^2 > \ln x \right] \Leftrightarrow \left[(2-x)^2 > x \right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4 > 0) \quad j)$$

La solution de l'inéquation (j) est : $S_1 =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

$$S = S_1 \cap]0, 1[=]0, 1[$$

$$c) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right] \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3 \leq 0) \quad S = [-3, 1]$$

ER 76. Résous dans $\mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} \log_3 x > \log_3 2 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{16}\right)^x \end{cases}$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{C.P : } x > 0 \quad \begin{cases} \log_3 x > \log_3 2 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{16}\right)^x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $S =]2, +\infty[$

ER 77. Résous dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le système
$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

Résolution

C.P : $x > 0$ et $x \neq 1$; $y > 0$ et $y \neq 1$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x^y = \ln y^x \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ln x - x \ln y = 0 \\ y = ax \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(a \ln x - \ln ax) = 0 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) \ln x = \ln a \\ y = ax \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln a^{\frac{1}{a-1}} \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^{\frac{1}{a-1}} \\ y = a^{\frac{a}{a-1}} \end{cases} \quad \text{D'où : } S = \left\{ \left(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Exercices

N° 195. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 0,04^x = 0,008 & \text{d) } 27 \cdot 2^x = 8 \cdot 3^x & \text{g) } 2^x + 4^x = 6 \\ \text{b) } 4^{1-2x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0 & \text{e) } \left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} = 0 & \text{h) } \left(\frac{1}{9}\right)^x - 8 \left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0 \\ \text{c) } 3^x = \sqrt[3]{3} & \text{f) } \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 1 & \text{i) } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4}{3} \end{array}$$

N° 196. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 10^{6x} - 3 \cdot 10^{3x} - 4 = 0 & \text{f) } 2^{3x+1} - 2^{3x} - 2^{x+5} + 16 = 0 \\ \text{b) } e^{4x} - 2 \cdot e^{3x} - e^{2x} + 2e^x = 0 & \text{g) } 2 \cdot 5^{3x} - 5^{2x} - 32 \cdot 5^x + 16 = 0 \\ \text{c) } e^{\frac{1}{x+1}} - \frac{x+5}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} = 0 & \text{h) } e^x - 2 + \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 0 \\ \text{d) } 2 \cdot e^{2x-2} + 5 \cdot e^{x-1} = 3 & \text{i) } e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{4x+2}} + e^{x+1} = 0 \\ \text{e) } 2 \cdot e^{3x} - 9 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^x + 15 = 0 & \text{j) } e^x + e^{x+1} + 3e^x + e^{x+2} + 5 \cdot e^x + e^{x+3} = \frac{9 - 8e - e^4}{1 - e} \end{array}$$

N° 197. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\log^4 x - 34 \log^2 x + 225 = 0$

b) $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

c) $\frac{1}{\log_x 2} + 2 \log_4(6x^2 - 1) = 3 \log_8 5x^2$

d) $\log_6 x + \log_x 6 = \frac{13}{6}$

e) $2(\log_3 x)^3 - (\log_3 x)^2 - 32 \log_3 x + 16 = 0$

f) $\log_3 9^{\frac{3}{2}} \cdot \log_9(2x - 7)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \log_{27}(x - 2) - \log_3 2$

g) $1 + \log_x 2 - \log_x(2x + 1) = \log_x(x - 4) \cdot \log_{x-4}(x + 3) - \frac{1}{\log_{x+4} x}$

h) $\ln(-x^2 + x + 6) + 2 \ln x = \ln(x + 2) + \ln(x^2 - x + 2)$

j) $\log_3(3^x + 1) = (-x - 2) + \log_3 4$

k) $\log(2x - 5) + \log(3x + 7) = \log 16$

l) $\log \sqrt{7x + 3} - \frac{1}{2} = \log 3 - \log \sqrt{4x + 5}$

m) $\frac{1}{\log_{x+6} x} + \log_x(x - 1) - 2 = \frac{1}{\log_2 x}$

N° 198. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\log_{2x-3} 5 = \log_{x^2-5x+3} 5$ e) $\frac{x^{\log 7x^2}}{7x^{\log 4x}} = \frac{7^{\log 4}}{7}$

b) $(\ln |x|)^2 = 6 - \ln |x|$ f) $\frac{2(e^{x+1} - 1)}{\log_x x^2} = \frac{-1}{\sqrt{e^{-x}}}$

$$c) \log_x(2x)^{\ln x} - \ln^2 x = 0$$

$$d) e^{\log_{3x} x} - x^{\ln 3 + \ln x} = 0$$

N° 199. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$$\begin{array}{lll} a) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} > 2 & e) \frac{1}{e^{1-2x}} > 3 & i) (0,125)^{x-8} \geq \left(\frac{1}{64}\right)^x \\ b) e^{2x-1} - \frac{1}{e} > 0 & f) \frac{(e^x)^2 - 1}{e^{x^2} - e} \geq 0 & j) 10^x - (2 \cdot 10^x - 3) > 10 \\ c) 5^{2x} \geq 4 & g) (0,25)^{1-3x} > 4^{2x+3} & k) 2^x < 5 \\ d) e^{x^2-4} \geq 1 & h) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9} & \end{array}$$

N° 200. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) \ln \frac{x-1}{x+1} + \ln x < 0 & e) \log_2 \frac{x^2-3x}{1-x} \geq 0 \\ b) \ln(2e-x) + 2\ln(x+e) \geq 3 + \frac{2\ln 2}{2} & f) \log_{\frac{1}{2}}(x^2-9) < 1 \\ c) 2 \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} 3 < \frac{1}{16} & g) 2\ln^2 x - 7\ln x + 5 \leq 0 \\ d) \log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) + \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x & h) 1 + \log_2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) > 0 \end{array}$$

N° 201. Résous et discute dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\log_a x^3 > \log_a(3x-2)$$

N° 202. Résous et discute dans $\mathbb{R}$ selon les valeurs de m les équations suivantes en x :

$$\begin{array}{ll} a) (m+1)a^{2x} + m a^x + m = 0 & c) e^{x^2-2x-1} = m \\ b) e^{2x} - (m+1)e^x + 2(m-1) = 0 & d) a^{2x} + m a^x - 5m = 0 \end{array}$$

N° 203. Résous et discute l'équation en x où m est un paramètre réel et ensuite résous-la pour la valeur de m indiquée :

$$\begin{array}{ll} a) e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0 & m = 1 \\ & m = -3 \end{array} \quad b) m e^x + e^{-x} + 2 = 0 \quad m$$

N° 204. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} 5^{3x-2y} = 3125 \\ 11^{6x-7y} = 14641 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} \ln(x+1) - 2 \ln(y+2) = 1 \\ 3 \ln(x+1) - \ln(y+2) = -2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} \frac{27^y}{27} = 3^{2x} \cdot 3^5 \\ 25^{y+3} = 5^x \cdot 5^9 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} \ln(xy) = 7 \\ \ln \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} e^{x+y} = 12 \\ e^{x-y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$$

$$\text{j)} \begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{1}{3} \\ \log_e x y = 12 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 3^x = 10 \cdot 5^{-y} \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\text{k)} \begin{cases} e^x \cdot e^y = e^3 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 - \ln 2 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} \ln x + \ln y = 2 + \ln 2 \\ x + y = 32 \end{cases}$$

$$\text{l)} \begin{cases} e^{2x-1} \cdot e^{y+7} = 1 \\ \ln(x+2y) - \ln 2 = \ln(8+x) + \ln 3 \end{cases}$$

$$\text{m)} \begin{cases} 2^x(2^{1+x} + 1) + 4^y(2^{1-x} - 1) - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{p)} \begin{cases} x \ln x = x \ln y \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

$$\text{n)} \begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 100 \end{cases}$$

$$\text{q)} \begin{cases} a^x = y^a \\ a^{x+2} = y^{a+1} \end{cases}$$

$$\text{o)} \begin{cases} 5 \log x - 2 \log y = 13 \\ 6 \log x + 3 \log y = 21 \end{cases}$$

$$\text{r)} \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$$

N° 205. Résous et discute le système (m paramètre réel):

$$\text{a.} \begin{cases} e^x - 2e^y = m \\ e^{2x} - 4e^{2y} = 16e^y \end{cases}$$

b. Déduis l'ensemble-solution du système pour $m = 2$

N° 206. Résous les systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(1-x) \geq -1 \\ e^{x^2-3x} < \frac{1}{e^{-4}} \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1-x^2}{x} < \log_3 x \\ \log^2 x < 9 \end{cases}$$

II.6. DERIVEES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

II.6.1. DERIVEE DE LA FONCTION $y = \log_a x$

On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

En particulier, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Et si u est une fonction de x alors :

$$* \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \qquad * \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

II.6.2. DERIVEE DE LA FONCTION $y = a^x$

$$\begin{aligned} \text{On a : } (y = a^x) &\Leftrightarrow (\ln y = \ln a^x) \Leftrightarrow \left[\frac{y'}{y} = (x \ln a)' \right] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y} = \ln a \right) \\ &\Leftrightarrow (y' = a^x \ln a) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = a^x \ln a$$

En particulier, $(e^x)' = e^x$

Si u est une fonction de x , alors : $(a^u)' = u' a^u \ln a$ et $(e^u)' = u' e^u$

Remarques

$$\begin{aligned} - \quad (\ln |u|)' &= (\ln u)' \quad \text{En effet, } \ln |u| = \begin{cases} \ln u & \text{si } u > 0 \\ \ln(-u) & \text{si } u < 0 \end{cases} \\ (\ln |u|)' &= (\ln u)' \quad \left| \quad (\ln |u|)' = [\ln(-u)]' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \right. \\ &= \frac{u'}{u} \quad (u > 0) \end{aligned}$$

– La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow [u(x)]^{v(x)}$ où u et v sont des fonctions non constantes, n'est ni exponentielle ni logarithmique.

Pour dériver $u(x)^{v(x)}$, si $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$

* On transforme la fonction : $[u(x)]^{v(x)} = e^{\ln[u(x)]^{v(x)}}$

* On applique une propriété des logarithmes : $e^{v(x) \ln[u(x)]}$

* On dérive cette fonction exponentielle.

II.6.3. DERIVEE DE LA FONCTION $y = u^v$

Soit $y = u^v$ où u et v sont des fonctions de x avec $u > 0$. On a :

$$\begin{aligned} (y = u^v) &\Leftrightarrow (\ln y = \ln u^v) \\ &\Leftrightarrow (\ln y = v \cdot \ln u) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\ &\Leftrightarrow [y' = y(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u})] \\ (u^v)' &= u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \end{aligned}$$

Exercices résolus

ER 78. Dérive les fonctions suivantes :

a) $y = \log_2(4x^2 + 3)$ c) $y = 10^{x^3 + 2x + 1}$ e) $y = x^{\sin x}$

b) $y = \ln(\text{Arc sin } x)$ d) $y = e^{-x^2 + x}$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } [y' &= \frac{(4x^2+3)'}{(4x^2+3) \ln 2}] \Leftrightarrow [y' = \frac{8x}{(4x^2+3) \ln 2}] \\ \text{b) } [y' &= \frac{(\text{Arc sin } x)'}{\text{Arc sin } x}] \Leftrightarrow \left(y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\text{Arc sin } x} \text{ ou } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \text{Arc sin } x} \right) \\ \text{c) } [y' &= (x^3 + 2x + 1)' 10^{x^3 + 2x + 1} \ln 10] \Leftrightarrow [y' = (3x^2 + 2) 10^{x^3 + 2x + 1} \ln 10] \\ \text{d) } [y' &= (-x^2 + x)' e^{-x^2 + x}] \Leftrightarrow [y' = (-2x + 1) e^{-x^2 + x}] \\ \text{e) En posant } u &= x, v = \sin x \text{ et comme } (u^v)' = u^v(v' \ln u + v \frac{u'}{u}), \text{ nous} \\ &\text{avons :} \end{aligned}$$

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x} \right) = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$$

ER 79. On donne la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calcule la dérivée première de cette fonction au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Résolution

$$\left[f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} \right] \Leftrightarrow \left(f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \right) \Leftrightarrow \left(f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \right)$$

Nous avons : $f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{1+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2}+1+2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ER 80. Etablis l'équation de la tangente à la courbe $y = \ln x$ au point d'abscisse $x_0 = e$

Résolution

L'équation de la tangente est établie par la relation : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\begin{array}{l|l} * (x_0 = e) \Rightarrow [f(x_0) = \ln e] \\ \Rightarrow (y_0 = 1) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} * (y = \ln x) \Rightarrow \left(y' = \frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow \left[y'(e) = \frac{1}{e}\right] \end{array} \right.$$

L'équation de la tangente est : $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ ou $y = \frac{1}{e}x$

Exercices

N° 207. Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $y = \log \left(\tan \frac{x}{2} \right)$ g) $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ m) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $y = \log_5 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ h) $y = \ln \frac{x^4}{(3x-4)^2}$ n) $y = 2^{\sin \sqrt{x}}$

c) $y = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ i) $y = \log_2 \sqrt[3]{\sin 4x}$ o) $y = e^{\frac{x-1}{x}}$

d) $y = \sqrt{1 - e^{2x}}$ j) $y = \ln |\sec x + \tan x|$ p) $y = \log_2 4(2x + 3)$

e) $y = \ln^2(x + 3)$ k) $y = \ln(\log_3 x)$ q) $y = \ln(x^3 + 2)(x^2 + 3)$

f) $y = 2^{\text{Arc tan } \sqrt{x^2 - 1}}$ l) $y = \ln(\text{Arc sin } x)$ r) $y = e^{\sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}}$

N° 208. Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $y = \sin e^{3x}$ g) $y = \text{Arc tan } \ln x^2$ l) $y = e^x \cdot \text{Arc tan } x$

b) $y = e^{-2x} \sin 3x$ h) $y = 1 + e^{\frac{\ln 2 |2x| - 1}{2}}$ où $x \in \mathbb{R}$ m) $y = \frac{1+2^x}{1-2^x}$

c) $y = (\sin x)^{\tan x}$ i) $y = \text{Arc tan } \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ n) $y = (x - 2)^{(x-2)}$

d) $y = \sin x^{\tan x}$ j) $y = \text{Arc tan } e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}}$ o) $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

e) $y = x^{\ln x}$ k) $y = \text{Arc sin } (\ln x^2)$ p) $y = (1 - e^x)^{\ln x}$

$$f) y = x \ln (4 + x^2) + 4 \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{2} x - 2x$$

N° 209. Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} & c) y = \operatorname{Arc} \tan \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \quad e) y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan x \\ b) y = \cos(x^{\cos x}) & d) y = (\operatorname{Arc} \tan x)^{\ln x} \end{array}$$

N° 210. Trouve y'' étant donné que :

$$a) y = e^{-x} \ln x \quad b) y = e^{-2x} \sin 3x \quad c) y = \ln \left(\operatorname{Arc} \sin \frac{2x}{1+x} \right)$$

N° 211. Si $y = e^{-2x} (\sin 2x + \cos 2x)$, montrer que $y'' + 4y' + 8y = 0$

N° 212. Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = 4x(x-1)e^{-x}$ et $g(x) = x^2 \ln x - x^2$

a) Calcule $f'(x)$, $f''(x)$; $g'(x)$ et $g''(x)$

b) Détermine l'équation cartésienne de la tangente à chacune des courbes de f et g au point d'abscisse 2.

c) Etablis le tableau des variations de f , f' et f'' ; g , g' et g''

N° 213. Calcule les dérivées premières des fonctions suivantes au point x_0 indiqué

$$\begin{array}{lll} a) y = |x|^3 \cdot e^{-x} & x_0 = 0 & c) y = \ln (x^2 - x + 1) \quad x_0 = 1 \\ b) y = x e^{-x^2} & x_0 = -1 & d) y = x \ln x - x \quad x_0 = e \end{array}$$

II.7. LIMITES DES FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Les règles de calcul vues en 3^èH restent valables. Cependant d'autres formes d'indétermination appelées *indéterminations exponentielles* s'ajoutent. Il s'agit de : 0^0 , ∞^0 , 1^∞ et ∞^∞ .

II.7.1. FORMES $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Exercices résolus

ER 81. Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(1+x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow e} (\ln x - 1) \cdot \ln(x - e)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{e^{3x}+4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

Résolution

a) Pour $x \rightarrow 0$, la limite prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Ainsi, en appliquant la règle de l'Hospital, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^x(1+x) = -1$$

b) Nous avons la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. La règle de l'Hospital donne :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{e^{3x}+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{3e^{3x}} = 0$$

c) Nous obtenons la forme indéterminée : $0 \cdot (-\infty)$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow e} (\ln x - 1) \cdot \ln(x - e) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x-e)}{\ln x - 1} = \frac{\ln(e-e)}{\ln e - 1}$$

La limite prend une nouvelle forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

En appliquant la règle de l'Hospital, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} (\ln x - 1) \cdot \ln(x - e) &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x-e)}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x-e}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{-x(\ln x - 1)^2}{x - e} \end{aligned}$$

Nous obtenons l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

La règle de l'Hospital donne :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} (\ln x - 1) \cdot \ln(x - e) &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{-(\ln x - 1)^2 - 2x(\ln x - 1) \frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow e} (\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) La limite prend une première forme d'indétermination : $\infty - \infty$

En transformant la fonction, nous avons : $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \frac{0-1+1}{0}$$

La limite prend une deuxième forme d'indétermination : $\frac{0}{0}$.

En appliquant la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x - \frac{1}{x} + 1}$$

Le calcul conduit encore à la forme d'indétermination $\frac{0}{0}$.

La règle de l'Hospital conduit à :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

II.7.2. FORMES 0^0 , ∞^0 , 1^∞ et ∞^∞

En général pour lever l'indétermination exponentielle d'une fonction $y = u(x)^{v(x)}$, lorsque x tend vers x_0 , on remplace l'étude de la limite de la fonction $y = u(x)^{v(x)}$, par celle de la fonction $\ln y = \ln u(x) \cdot v(x)$.

Exercices résolus

ER 82. Calcule les limites des fonctions suivantes au point x_0 :

$$\text{a) } y = x^{\frac{1}{3 \ln x}} \quad x_0 \rightarrow 0^+ \quad \text{c) } y = \left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8}}{3} \right)^x \quad x_0 \rightarrow \infty$$

$$\text{b) } y = (e^{2x} + 3x)^{\frac{1}{x}} \quad x_0 \rightarrow \infty \quad \text{d) } y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}} \quad x_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Résolution

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{3 \ln x}}$$

En remplaçant x par 0, nous avons une indétermination de la forme 0^0 .

$$\text{Par suite, } y = x^{\frac{1}{3 \ln x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{\ln x}{3 \ln x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{e}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{3 \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{e} = \sqrt[3]{e}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + 3x)^{\frac{1}{x}}.$

La limite à l'infini de la fonction $y = (e^{2x} + 3x)^{\frac{1}{x}}$ présente une indétermination de la forme ∞^0 .

Par suite, $\ln y = \frac{1}{x} \ln (e^{2x} + 3x) = \frac{\ln(e^{2x} + 3x)}{x}.$

Nous avons la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

En appliquant la règle de l'Hospital, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{2x} + 3x} (2e^{2x} + 3)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x} + 3}{e^{2x} + 3x}. \end{aligned}$$

La forme $\frac{\infty}{\infty}$ persiste, appliquons de nouveau la règle d'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x} + 3}.$$

La forme $\frac{\infty}{\infty}$ persiste encore, appliquons de nouveau la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x}}{4e^{2x}} = 2.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 2$ et $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[x]{2} + \sqrt[x]{4} + \sqrt[x]{8}}{3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x$ prend la forme indéterminée 1^∞ .

En posant $y = \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{x}}}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{x}}}{3}}{\frac{1}{x}}$$

Cette dernière limite prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Par la règle de l'Hospital, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{3} \left(2^{\frac{1}{x}} \ln 2 + 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 + 8^{\frac{1}{x}} \ln 8 \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} \ln 2 + 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 + 8^{\frac{1}{x}} \ln 8}{\frac{1}{2^x} + 4^x + 8^x} = \frac{\ln 2 + \ln 4 + \ln 8}{1 + 1 + 1} = \frac{\ln 64}{3} = \ln 4$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln 4$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8}}{3} \right) = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$. Nous avons la forme indéterminée ∞^∞ .

$$y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\left[\ln y = \frac{\ln(\tan x)}{\cos x} \right] \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \tan x}{\cos x} \right) \Leftrightarrow \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}} = \infty \right]$$

Remarque

Parfois on peut calculer la limite d'une fonction qui présente une indétermination de la forme 1^∞ en procédant de la manière suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (u-1)v}$$

En particulier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax + b}{ax + c} \right)^{mx+d} = e^{\frac{m(b-c)}{a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{a \cdot b} \quad (a \in \mathbb{R}^*, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Exercice résolu

ER 83. Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{2}x \right)^{\frac{4}{3x}}$

Résolution

a) Nous avons la forme indéterminée 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{2}{x^2-1} \right)} = e^2$$

b) Nous avons la forme indéterminée 1^∞ .

$$\begin{aligned} \text{Par suite, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} - 1 \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x + \sin^2 x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{\cos x + 2 \sin x \cos x}} \end{aligned}$$

$$= e^0 = 1$$

c) La limite prend la forme indéterminée 1^∞ . Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{2x} = e^{\frac{2}{3}(-1-5)} = e^{-4}$$

d) La limite prend la forme indéterminée 1^∞ . Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{2}x \right)^{\frac{4}{3x}} = e^{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}} = e^2$$

Exercices

N° 216. Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2x^2}{3e^x + 4e^x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(1+x)}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \ln(1+x)}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$$

N° 217. Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2 \operatorname{Arc} \tan x)}{\ln(1+x^2)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{19^x - 7^x}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(\sin \operatorname{Arc} \sin x)}{\ln(1+x^2)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 x + \sin 3x - 3 \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a^{\sin x} - a}{\ln \sin x} \quad (a \in \mathbf{R}^* \text{ et } a \neq 1)$$

N° 218. Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\ln(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{Arc} \sin \frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\ln x)^3}{\ln(1+ax)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \pi \frac{x}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln x$$

N° 219. Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{2x+1} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+2 \ln x}{x-3 \ln x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 x}{x^2}$$

$$\begin{array}{lll} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+3 \ln x}{x + \ln x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln \frac{1+x}{x} \right) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}} \end{array}$$

N° 220. Détermine les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^{-3x} & \text{c) } \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{1}{2x}} & \text{e) } \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2-10^{-1}} & \text{g) } \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{4x^2} \\ \text{i) } \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^{-\pi x^2} & & & \\ \text{b) } \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{x+2} & \text{d) } \left(1 - \frac{e^{-x}}{2} \right)^{e^x} & \text{f) } \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)^{2-\sqrt{x}} & \text{h) } \left(\frac{x+1}{2x} \right)^x \\ \text{j) } (1 - e^{-x})e^x & & & \end{array}$$

N° 221. Détermine les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers zéro

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (1+x)^{\frac{1}{3x}} & \text{c) } (1-3x)^{\frac{-4}{x}} & \text{e) } (2+x)^{\frac{1}{x}} & \text{g) } (1+x)^{\frac{1}{x} \log 7} \\ \text{b) } \left(\frac{2+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} & \text{d) } \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} & \text{f) } \left(\frac{1}{2} + x \right)^{\frac{1}{x}} & \text{h) } (1 + x)^{\frac{1}{x} \ln \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} \end{array}$$

N° 222. Calcule les limites des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)^{x^2} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{1}{\sin x}} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{\tan^2 x} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{\frac{1}{\sin x}} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x + 10^x + 20^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

N° 223. Détermine les asymptotes de chacune des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x - 2 + e^x & \text{c) } y = \frac{x^2-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} & \text{e) } y = x^2 \cdot e^{-x^2} \\ \text{b) } y = \frac{x}{2} - 1 - e^{-x} & \text{d) } y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} & \text{f) } y = \frac{e^{-x}}{\ln x \sin x} \end{array}$$

N° 224. Soit la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Détermine les extrema, le point d'inflexion, les domaines de croissance et de décroissance et évaluer les limites aux bornes du domaine de définition

II.8. ETUDE DE QUELQUES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Exercices résolus

ER 84. Etudie chacune des fonctions suivantes :

II.8.1. FONCTION $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Résolution

1°) $D_f = \mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$. Cette fonction n'est ni paire ni impaire, ni périodique.

2°) Les limites aux bornes du D_f et asymptotes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} & \text{et} & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{1-x} = -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0 \end{aligned}$$

L'axe Ox est asymptote au voisinage de $+\infty$.

3°) Calcul et signes de la dérivée première

$$f'(x) = e^{1-x} (1-x) \quad \text{et} \quad [f'(x) = 0] \Leftrightarrow (x = 1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^{1-x}	+	+	+
$1-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ (1,1) max $\searrow$	

Le graphique de la fonction f passe par le point maximum (1, 1).

4°) Calcul et signes de la dérivée seconde

$$f''(x) = e^{1-x} (x-2) \quad [f''(x) = 0] \Leftrightarrow (x = 2)$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
e^{1-x}	+	+	+
$x-2$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	$I(2, \frac{2}{e})$	$\cup$

La courbe admet un point d'inflexion au point $\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

5°) Tableau des variations

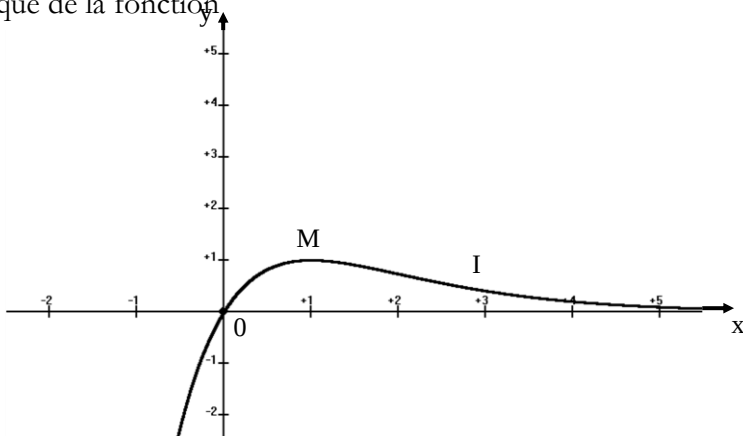
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f''(x)$	-		0	+
f(x)	$-\infty$ $\cap$	$\nearrow$ (1,1) max	$\searrow$ $\cap$ I(2, $\frac{2}{e}$)	$\searrow$ $\cup$ 0

6°) Points d'intersection de la courbe avec les axes des coordonnées.
La courbe rencontre Ox et Oy au point (0, 0).

Points supplémentaires

x	0	-1	3
y	0	$-e^2$	$\frac{3}{e^2}$

7°) Graphique de la fonction



II.8.2. FONCTION $y = f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

Résolution

1°) $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$. La fonction n'est ni périodique, ni paire, ni impaire.

2°) Les limites aux bornes du D_f et asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = 1$ et la courbe admet deux asymptotes : $y = 1$ et $x = e$.

e.

3°) Calcul et signes de la dérivée première :

$$y' = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$$

La courbe n'admet pas d'extremum

x	0	e		$+\infty$
-2		-	-	
x	0	+	+	+
$(\ln x - 1)^2$		+	0	+
y'		-		-
y		↘		↘

4°) Calcul et signes de la dérivée seconde :

$$y'' = \frac{2(\ln x + 1)}{x^2(\ln x - 1)^3}$$

La courbe de f admet un point d'inflexion $I(\frac{1}{e}, 0)$.

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
2	+	+	+	+
$\ln x + 1$	−	0	+	+
x^2	0	+	+	+
$(\ln x - 1)^3$	−	−	−	0
y''		+	0	−
y		∪	0	∩

5°) Tableau des variations

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$			
y'		-	-	0	-		
y''		+		-	0	+	
y	1	$\searrow$ $\cup$	$I(\frac{1}{e},0)$	$\searrow$ $\cup$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$ $\cup$	1

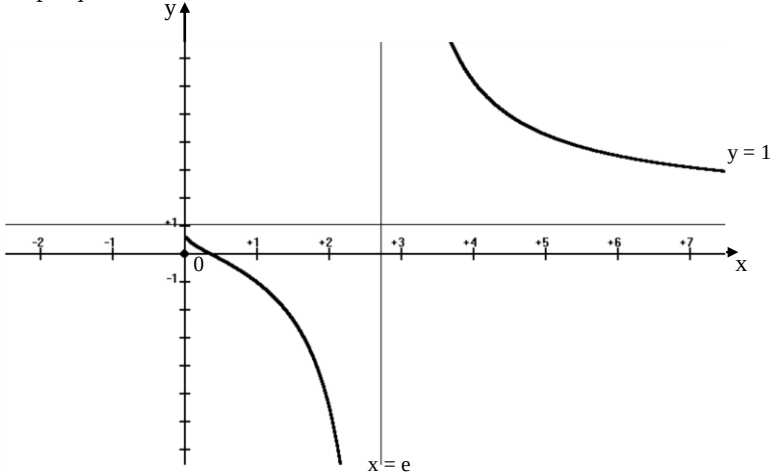
6°) Les points communs avec les axes

- L'intersection avec Ox : ($y = 0$ et $x = \frac{1}{e}$, (C) rencontre Ox en $(\frac{1}{e}, 0)$)
- L'intersection avec Oy : ($x = 0$ et $y = 1$). (C) rencontre Oy en $(0, 1)$.

Points supplémentaires :

x	1	e^2
y	-1	3

7°) Graphique de la fonction



II.8.3. FONCTION $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$

1. Domaine de définition.

C.P : $2 - e^x > 0$, ssi $x < \ln 2$. d'où, $Df =]-\infty; \ln 2[$

2. Limites aux borne du Df et asymptotes

On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln(2 - e^x)] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} [x + \ln(2 - e^x)] = -\infty$

On déduit que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale : la droite d'équation $x = \ln 2$ car $\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = -\infty$

Par contre elle n'a pas d'asymptote horizontale car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

L'asymptote oblique a pour équation A.O $\equiv y = mx + p$

Alors :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(2 - e^x)}{x} = 1$$

et
$$p = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \ln(2 - e^x) - x] = \ln 2$$

D'où : A.O $\equiv y = x + \ln 2$

3. Calcul de la dérivée première et signes

$$f(x) = x + \ln(2 - e^x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2 - 2e^x}{2 - e^x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = 0 \quad \text{et} \quad 2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln 2$$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$
$2 - 2e^x$	+	0	−
$2 - e^x$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↘

4. Calcul et signes de la dérivée seconde

$$f'(x) = \frac{2 - 2e^x}{2 - e^x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2e^x}{(2 - e^x)^2}$$

$f''(x)$ ne s'annule pas, et est toujours négative. Cela est justifié dans son tableau de signes :

x	$-\infty$	$\ln 2$
$-2e^x$	−	−
$(2 - e^x)^2$	+	+
$f''(x)$	−	−
$f(x)$	∩	∩

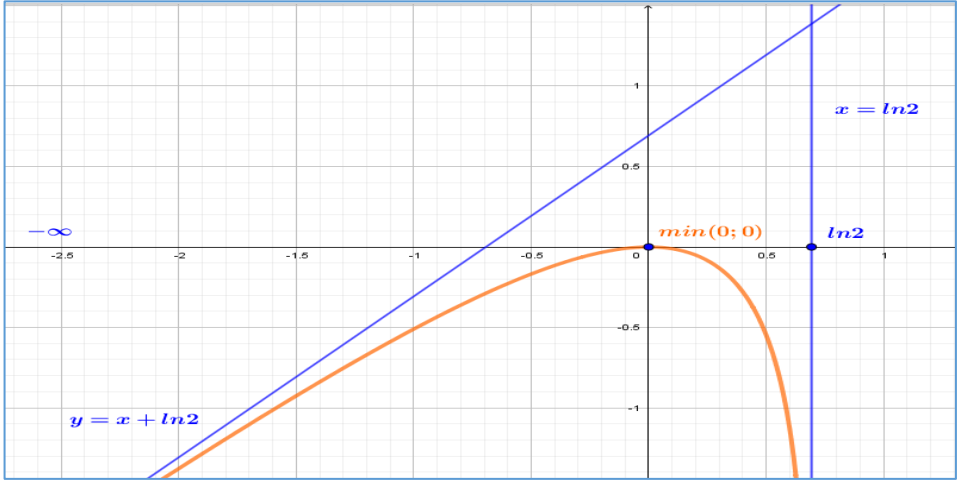
5. Tableau des variations

x	$-\infty$		0		$\ln 2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \cap$	0	$\searrow \cap$	$-$
	∞	$Max. (0, 0)$			

6. Les points d'intersection avec les axes

La courbe rencontre Ox et Oy au point $(0, 0)$

7. Le graphique :



II.8.4. FONCTION $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$

Soit la fonction réelle : $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé xOy .

Trace la courbe $\mathcal{C}$ en s'appuyant sur les éléments suivants :

- a. Le domaine de définition de la fonction f ;
- b. Les limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes ;
- c. Son intersection avec les axes ;
- d. Les extrema de la fonction f .

Résolution

a. **Domaine de définition** : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

b. **Limites aux bornes et asymptotes**

$$\begin{aligned} * \lim_{-\infty} f(x) &= \lim_{-\infty} [e^x(2x^2 - 3x)] & * \lim_{+\infty} f(x) &= \lim_{+\infty} [e^x(2x^2 - 3x)] \\ &= \lim_{-\infty} \left[e^x x^2 \left(2 - \frac{3}{x} \right) \right] & &= \lim_{+\infty} \left[e^x x^2 \left(2 - \frac{3}{x} \right) \right] \\ &= 2 \lim_{-\infty} (e^x x^2) & &= 2 \lim_{+\infty} (e^x x^2) \\ &= 2 \lim_{-\infty} \left(\frac{e^x}{\frac{1}{x^2}} \right) & &= 2 \cdot (+\infty) \\ &= 2 \lim_{-\infty} \frac{(e^x)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} = 0 & &= +\infty \end{aligned}$$

Asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$

1. $\lim_{-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A.H \equiv y = 0$
2. Pas d' $A.V$ car aucun réel x ne fait tendre $y = f(x)$ vers l'infini.
3. Pas d' $A.O$ car $A.H$ existe.

c. **Intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes**

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{C} \cap ox : y = 0 &\Rightarrow e^x(2x^2 - 3x) = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ et } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

D'où, sur l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ compte deux points : $P_1(0,0)$ et $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

$$2. \mathcal{C} \cap oy : x = 0 \Rightarrow y = 0. \text{ C'est encore le point } P_1(0,0).$$

d. **Extréma de la fonction**

1. Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = e^x(2x^2 - 3x) &\Rightarrow f'(x) = (e^x)'(2x^2 - 3x) + e^x(2x^2 - 3x)' \\ &\Rightarrow f'(x) = e^x(2x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

2. Les zéros de $f'(x)$

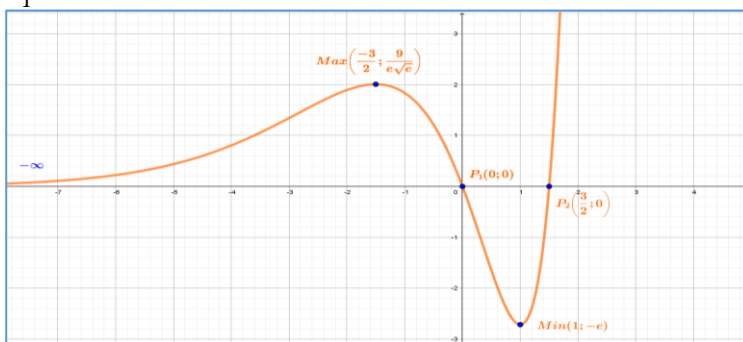
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow e^x(2x^2 + x - 3) = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ et } x = 1 \end{aligned}$$

3. Signe de $f'(x)$

On a le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$2x^2 + x - 3$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	9 $\overline{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

Graphique



II.8.5. FONCTION $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$

Soit la fonction réelle : $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Détermine le domaine de définition de f ;
- Calcule les limites aux bornes du domaine de définition et déterminer les asymptotes de la courbe.
- Détermine les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f et les extrema éventuelles de la courbe $\mathcal{C}$.
- Dresse le graphique de la courbe $\mathcal{C}$.

Résolution

a. Domaine de définition

$$x > 0 \text{ et } (1 - \ln^2 x) \neq 0.$$

$$D_1 : x > 0 \Rightarrow D_1 = \mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$$

$$D_2 : 1 - \ln^2 x \neq 0 \Rightarrow 1 - \ln x \neq 0 \text{ et } 1 + \ln x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq e \text{ et } x \neq \frac{1}{e}.$$

$$\Rightarrow D_2 = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right[\cup \left] \frac{1}{e}, e \right[\cup]e, +\infty[$$

$$D = D_1 \cap D_2 \Rightarrow D = \left] 0, \frac{1}{e} \right[\cup \left] \frac{1}{e}, e \right[\cup]e, +\infty[.$$

b. Limites aux bornes et asymptotes

$$\diamond \lim_{0^+} f(x) = -1 \Rightarrow P(0, -1) \text{ est un point d'arrêt de la courbe.}$$

$$\diamond \lim_{\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x) = +\infty$$

$$\diamond \lim_{e^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{e^+} f(x) = -\infty$$

$$\diamond \lim_{+\infty} f(x) = -1$$

❖ Asymptotes

$$\text{A.V : } x = \frac{1}{e} \text{ et } x = e$$

$$\text{A.H : } y = -1$$

c. Calcul et signe de la dérivée première

1. Calcul de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{1 - \ln^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 \ln x}{x(1 - \ln^2 x)^2}$$

2. Les zéros de $f'(x)$

$$N(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

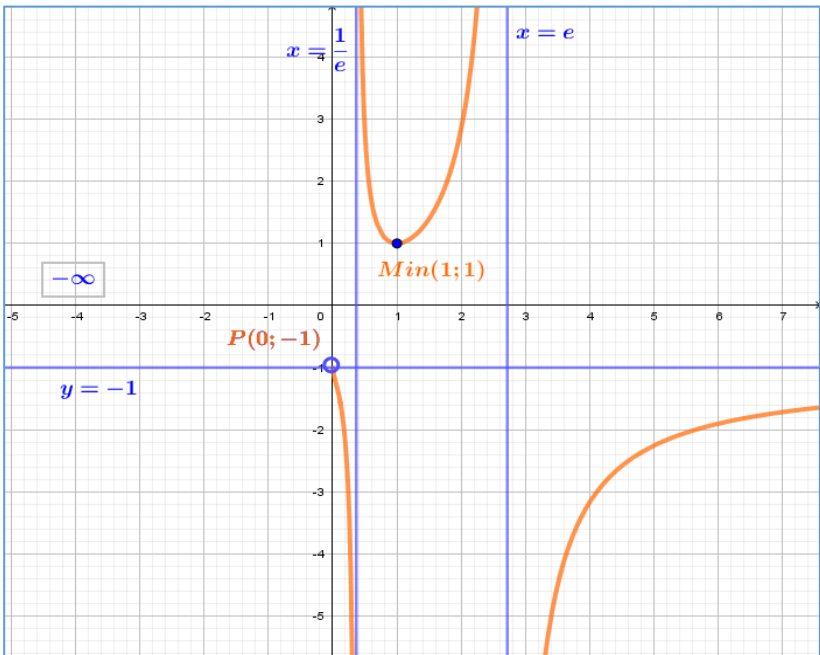
$$D(x) = 0 \quad x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - \ln^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{e} \text{ ou } x = e$$

3. Signe de $f'(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$		
$4 \ln x$	—	—	0	+	+		
x	+	+	+	+	+		
$(1 - \ln^2 x)^2$	+	0	+	+	+		
$f'(x)$	—		—	+		+	
$f(x)$	↘		↘	1	↗		↗
	M						

L'étude de la dérivée seconde parait fastidieuse, on peut tracer son graphique avec les informations sur les asymptotes et la dérivée première. Graphique



Exercices

N° 214. Etudie et représente graphiquement les fonctions suivantes :

a) $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$

f) $y = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$

k) $y = \ln \frac{x^2}{|x^2 - 9|}$

b) $y = x \cdot e^{-x^2}$

g) $y = x^2 \ln x - x^2$

l) $y = |\ln x|$

c) $y = 4x(x - 1) e^{-x}$

h) $y = \ln(x^2 - x + 1)$

m) $y = \ln |x|$

d) $y = |x|^3 e^{-x}$

i) $y = x \ln x$

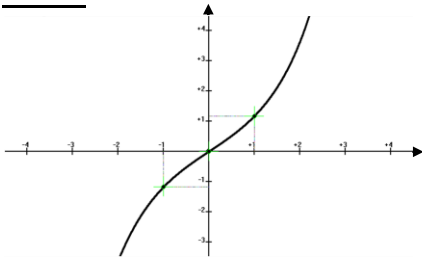
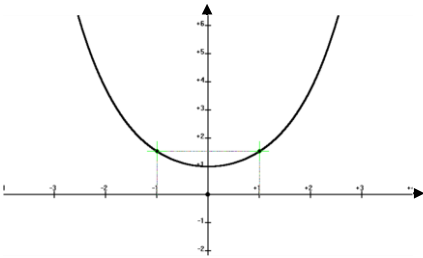
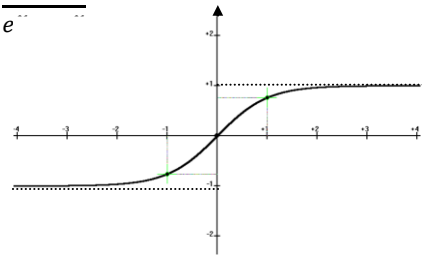
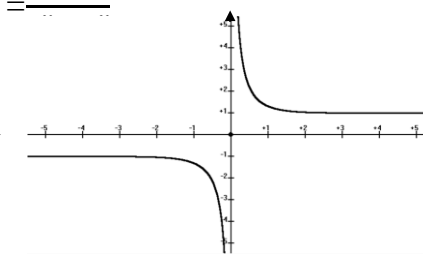
e) $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

j) $y = e^{-x} (x \ln x + 1)$

II.9. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

II.9.1. DEFINITION

Les fonctions hyperboliques sont des fonctions notées et définies par :

Sinus hyperbolique $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}: x \longmapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 	Cosinus hyperbolique $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}: x \longmapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 
Tangente hyperbolique $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}: x \longmapsto \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 	Cotangente hyperbolique $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}: x \longmapsto \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 

II.9.2. IDENTITÉS REMARQUABLES

1. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
2. $\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$
3. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

Exercice

N° 215. a) Vérifie les identités remarquables ci – dessus

b) Montre que les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont respectivement paire et impaire.

II.9.3. FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES

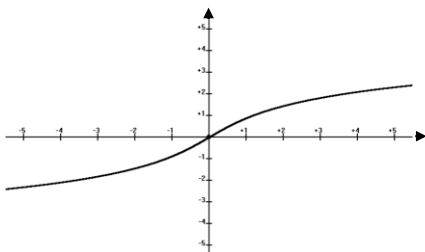
Les fonctions hyperboliques réciproques sont désignées par le terme « Argument » en abrégé « Arg ».

Pour sh , on a : Arg sh ; pour ch , on a : Arg ch x ;

pour th , on a : Arg th. ; pour coth , on a : Arg coth.

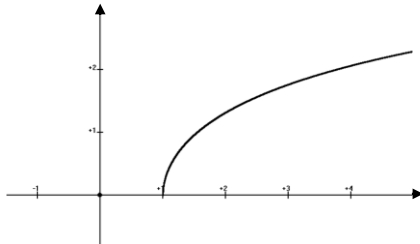
Argument sinus hyperbolique

$$f: x \mapsto \text{Arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$



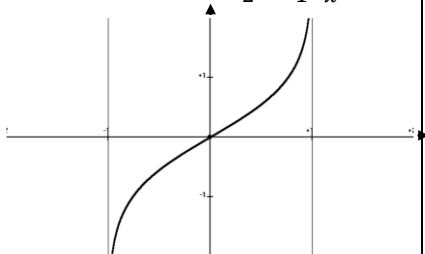
Argument cosinus hyperbolique

$$f: x \mapsto \text{Arg ch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$



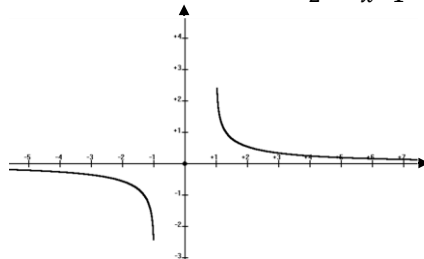
Argument tangente hyperbolique

$$f: x \mapsto \text{Arg th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$



Argument cotangente hyperbolique

$$f: x \mapsto \text{Arg coth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$



Détermination de Arg sh x et Arg th x

a) Soit $y = \text{Arg sh } x$

$$\begin{aligned}(y = \text{Arg sh } x) &\Leftrightarrow (x = \text{sh } y) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (2x = e^y - e^{-y})\end{aligned}$$

En posant $e^y = k$ ($k > 0$), nous avons : $2x = k - \frac{1}{k}$

$$k^2 - 2xk - 1 = 0 \quad (\text{avec } \Delta' = x^2 + 1)$$

$$k_1 = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } k_2 = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{\`a rejeter})$$

$$\begin{aligned}\text{Or } (e^y = k) &\Rightarrow (e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &\Rightarrow [\ln e^y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] \\ &\Rightarrow [y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]\end{aligned}$$

$$\text{D'o\`u : Arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

b) Soit $y = \text{Arg th } x$

$$\begin{aligned}(y = \text{Arg th } x) &\Leftrightarrow (x = \text{th } y) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right) \\ &\Leftrightarrow [x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}] \\ &\Leftrightarrow [(x-1)e^y + (x+1)e^{-y} = 0]\end{aligned}$$

En posant $e^y = k$ ($k > 0$), nous avons :

$$[(x-1)k + \frac{x+1}{k} = 0] \Leftrightarrow [(x-1)k^2 + (x+1) = 0]$$

$$\Leftrightarrow (k^2 = \frac{x+1}{1-x})$$

$$\Leftrightarrow (k = \pm \sqrt{\frac{x+1}{1-x}})$$

Or $e^y = k$ ($k > 0$)

$$\begin{aligned}\left(e^y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right) &\Rightarrow \left(y \ln e = \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right) \\ &\Rightarrow \left(y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x}\right)\end{aligned}$$

$$\text{D'o\`u : Arg th } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

Remarque

De la même manière, on établit les formules suivantes:

$$\text{a) } \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{b) } \operatorname{Arg} \operatorname{coth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

II.9.4. DERIVEE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Les dérivées des fonctions hyperboliques, découlent de celles des fonctions exponentielles.

$$y = \operatorname{ch} x \Rightarrow y' = \operatorname{sh} x$$

$$y = \operatorname{sh} x \Rightarrow y = \operatorname{ch} x$$

$$y = \operatorname{th} x \Rightarrow y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$y = \operatorname{coth} x \Rightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Exercices résolus

ER 85. Calcule :

a. $\operatorname{sh}(\ln 2)$

b. $\operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}\ln 5\right)$

c. $\operatorname{th}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)$

d. $\operatorname{cth}(-3)$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a. } \operatorname{sh}(\ln 2) &= \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}\ln 5\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\ln 5} - e^{-\frac{1}{2}\ln 5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln \sqrt{5}} - \frac{1}{e^{\ln \sqrt{5}}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{d. } \operatorname{cth}(-3) = \frac{e^{-3} + e^3}{e^{-3} - e^3} = \frac{1 + e^6}{1 - e^6}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \operatorname{th}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\ln 2} - e^{\frac{1}{2}\ln 2}}{e^{-\frac{1}{2}\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 2}} \\ &= \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln 2}} - e^{\frac{1}{2}\ln 2}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln 2}} + e^{\frac{1}{2}\ln 2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

ER 86. Calcule :

a. $\cos[\pi \operatorname{sh}(\ln 2)]$

b. $\sin\left[\frac{5\pi}{24} \operatorname{th}(\ln 3)\right]$

c. $\tan\left[\frac{25\pi}{78} \operatorname{ch}(-\ln 5)\right]$

Résolution

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \cos[\pi \operatorname{sh}(\ln 2)] &= \\
 \cos\left(\pi \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2}\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} \left(e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right)\right] \\
 &= \cos\frac{3\pi}{4} \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \sin\left[\frac{5\pi}{24} \operatorname{th}(\ln 3)\right] &= \\
 \sin\left[\frac{5\pi}{24} \frac{\operatorname{sh}(\ln 3)}{\operatorname{ch}(\ln 3)}\right] &= \sin\left[\frac{5\pi}{24} \cdot \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}\right] \\
 &= \sin\left[\frac{5\pi}{24} \cdot \frac{e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}}}{e^{\ln 3} + \frac{1}{e^{\ln 3}}}\right] \\
 &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \tan\left[\frac{25\pi}{78} \operatorname{ch}(-\ln 5)\right] &= \tan\left[\frac{25\pi}{78} \cdot \frac{1}{2}(e^{-\ln 5} + e^{\ln 5})\right] \\
 &= \tan\left[\frac{25\pi}{78} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\ln 5}} + e^{\ln 5}\right)\right] \\
 &= \tan\left[\frac{25\pi}{78} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + 5\right)\right] \\
 &= \tan\frac{5\pi}{6} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

Exercices

N° 216. Exprime comme une fonction algébrique de x :

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \operatorname{sh}(\ln 2x) \quad & \text{b. } \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln x\right) \quad & \text{c. } \operatorname{th}(-2 \ln 3x) \\
 \text{d. } \operatorname{cth}\left(\frac{1}{3} \ln 4x\right)
 \end{aligned}$$

N° 217. Calcule

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \cos[\pi \cdot \operatorname{sh}(\ln 2)] \quad & \text{b. } \sin\left[-\frac{17}{30} \cdot \operatorname{th}(-\ln 4)\right] \\
 \text{c. } \tan\left[-\frac{30\pi}{29} \cdot \operatorname{ch}(\ln 12)\right] \quad & \text{d. } \cot\left[-\frac{48\pi}{39} \cdot \operatorname{cth}(\ln 5)\right] \\
 \text{e. } \operatorname{argch}[\operatorname{cth}(\ln 3)]
 \end{aligned}$$

a. $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$ b. $th\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sh x}{1 + ch x}$
 c. $sh 2x = 2shx \cdot chx$

c. $sh\ 2x = 2shx \cdot chx$

d. $ch\ 2x = 2\ sh^2x - 1$ e. $ch^2x - sh^2x = 1$

$$\begin{cases} x = sh\,t \\ y = ch\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Détermine les points M_0 , M_1 et M_2 de cette courbe correspondant respectivement à $t_0 = \ln 2$; $t_1 = \ln \frac{5}{3}$ et $t_2 = 1$.
- Donne une équation cartésienne de cette courbe.

N° 220. Soit la fonction hyperbolique $f(x) = sh\,x$ et soit $f^{-1}(x)$, sa réciproque. Calculer $f^{-1}(-7) + f^{-1}(-1) + 8$

N° 221. Calcule les coordonnées du point de la courbe d'équation $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ où la tangente a pour coefficient angulaire $\frac{4}{3}$.

N° 223. Calcule les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a) $y = \ln(\operatorname{ch}x) + \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$ b) $y = \frac{2 \sin x \operatorname{sh}x}{(\operatorname{sh}x + \sin x)^2}$
c) $y = \operatorname{Arg} \tan(\operatorname{th}x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (chx + shx)$ b) $\lim_0 \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{th x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Arg sh } x - \ln x)$

a) $y = \operatorname{sh} \frac{x+1}{x-1}$ b) $y = \frac{1}{1+\coth x}$

N° 226. On peut vérifier que $sh \left(\frac{1}{3} \ln 27x^6 \right) = \frac{9x^4 - 1}{6x^2}$. Dans ces conditions, que vaut $ch^2 \left(\frac{1}{3} \ln 27x^6 \right)$?

II.10. APPLICATIONS DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

L'importance des exponentielles et des logarithmes demeure considérable pour les modélisations mathématiques des phénomènes dans les domaines diversifiés tels que l'économie, la biologie, la démographie, la chimie, la radioactivité, la physique, la médecine, la statistique, etc.

II.10.1. CROISSANCE BACTERIENNE

Dans les conditions favorables de reproduction des bactéries, on observe que le nombre des bactéries double chaque jour. S'il y a, au départ 1000 bactéries et que le même rythme de reproduction se maintient, calcule :

- le nombre des bactéries 1,5 jour après ;
- Le nombre des jours que le nombre de bactéries atteindra 64 000.

Résolution :

S'il y a au départ 1000 bactéries, nous observons ce qui suit (t = temps en jour), (N_b = nombre de bactéries) :

temps	N_b
0	1000
1	$1000 \cdot 2 = 2000 \cdot 2^1 = 2\ 000$
2	$(1000 \cdot 2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2 = 4\ 000$
3	$(1000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^3 = 8\ 000$
4	$(1000 \cdot 2^3) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^4 = 16\ 000$
.	.
.	.
.	.
t	$= 1000 \cdot 2^t$

Ainsi, cette culture bactérienne s'exprime comme une fonction exponentielle :

$$f(t) = 1000 \cdot 2^t.$$

On peut par exemple calculer :

- le nombre des bactéries 1,5 jour après ;
- Le nombre des jours que le nombre de bactéries atteindra 64 000.

En effet,

- le nombre des bactéries 1,5 jour après est :

$$N_b = f(1,5) = 1000 \cdot 2^{1,5} \cong 2828$$

- Le nombre des jours nécessaire que le nombre de bactéries atteindra 64 000.

$$f(t) = 64000 \Rightarrow 1000 \cdot 2^t = 64\ 000$$

$$\Rightarrow 2^t = 64$$

$$\Rightarrow t = 6$$

C'est donc en 6 jours que le nombre de bactéries passera de 1000 à 64 000.

II.10.2. INTERETS COMPOSES

Un capital est placé à intérêts composés quand, à la fin de chaque année (période), les intérêts s'ajoutent au capital pour produire, eux aussi des intérêts pendant les années qui suivent.

On dit que les intérêts se capitalisent à la fin de chaque année.

Supposons que l'on dispose d'un capital C_0 , placé à intérêts composés, pendant n années, au taux i pour 1.

Pendant la première année, C_0 a produit l'intérêt $C_0 i$; donc le capital devient :

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i)$$

Pendant la deuxième année, C_1 produit à son tour l'intérêt *et* devient :

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + C_1 i \\ &= C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i \\ &= C_0(1 + i)(1 + i) \\ &= C_0(1 + i)^2 \end{aligned}$$

Après 3 années, C_0 est devenu

$$C_3 = C_0(1 + i)^3$$

...

Après n années, C_0 est devenu

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Les intérêts obtenus au moyen de cette formule sont les intérêts composés.

C_n est donc une fonction exponentielle de base $1 + i$.

La période d'intérêt peut être exprimée en années, en mois, en semaines, en jour ou en n'importe quelle autre unité de temps.

En appliquant la formule pour le calcul de C_n , ne pas oublier que i est l'intérêt pour une période donnée et qu'il est capitalisé sous forme décimale.

Par exemple, si le taux par mois est de 6% par ans, capitalisé mensuellement, alors le taux par mois est $\frac{6}{12}\% = 0,5\%$. Donc, $i = 0,005$ et n représente le nombre des mois.

De manière générale, on a la formule :

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}, \text{ où}$$

C_0 est le capital initial;

i est le taux d'intérêt annuel exprimé sous forme décimale ;
 n est le nombre de période d'intérêt par année ;
 t est le nombre d'année pendant lesquelles le capital C est investi ;
 C_n est le montant après t années.

Applications numériques

Un capital de 1000 u.m soient investis à un taux de 9% capitalisés mensuellement.

a. Calculer le nouveau montant du capital après 5 ans, après 10 ans et après 15 ans

b. En combien d'années ce capital atteindra-t-il 15 000 u.m ?

Résolution

Pour $C_0 = 1000$ u.m , $i = 9\% = 0,09$, $n = 12$ et t , le nombre d'année, la formule de l'intérêt composé donne :

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = 1000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12t}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{a. - après 5 ans, } C &= 1000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12 \times 5} = 1565,68 \text{ u.m.} \\ \text{- après 10 ans, } C &= 1000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12 \times 10} = 2451,36 \text{ u.m.} \\ \text{- après 15 ans, } C &= 1000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12 \times 15} = 3830,04 \text{ u.m.} \\ \text{b. } C_n &= 15\,000 \text{ u.m} \Leftrightarrow 1000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12t} = 15\,000 \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12t} = 15 \\ &\Leftrightarrow \ln \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12t} = \ln 15 \\ t &= \frac{\ln 15}{12 \ln \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)} \cong 30,20 \text{ ans} \end{aligned}$$

II.10.3. EVALUATION DE LA QUANTITE D'UN MEDICAMENT DANS LE SANG

Si un adulte prend oralement un comprimé de 100 mg d'un certain médicament, le taux de pénétration P du médicament dans le sang après t minutes est donné par

$$P = 5(0,95)^t \text{ mg/min}$$

et la quantité Q de médicament dans le sang au temps t est donnée approximativement par

$$Q = 97,4786[1 - (0,95)^t] \text{mg.}$$

a. Evalue le temps mis par 50 mg de médicament pour se retrouver dans la circulation sanguine.

b. Evalue le nombre de milligrammes de médicament dans le sang si le taux de pénétration est 3 mg/min.

Résolution

a. pour $Q = 50 \text{ mg}$, on demande de calculer t . En effet,

$$Q = 97,4786[1 - (0,95)^t] \text{mg} \Leftrightarrow 97,4786[1 - (0,95)^t] = 50$$

$$\Leftrightarrow (0,95)^t = 1 - \frac{50}{97,4786}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,95)^t = \ln\left(1 - \frac{50}{97,4786}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(1 - \frac{50}{97,4786}\right)}{\ln 0,95}$$

$$\Leftrightarrow t = 14,02 \cong 14 \text{ minutes}$$

b. pour $P = 3 \text{ mg}$, on demande de calculer t . En effet,

$$P = 5(0,95)^t \text{ mg/min} \Leftrightarrow 5(0,95)^t = 3$$

$$\Leftrightarrow (0,95)^t = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,95)^t = \ln \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 3 - \ln 5}{\ln 0,95}$$

$$\Leftrightarrow t = 9,9587 \cong 10 \text{ minutes.}$$

4. Détermination de la formule de la croissance d'une population à un taux constant i

Soit p_0 la valeur initiale de la population. On a :

$$\text{Au temps } t = 0, \quad p(0) = p_0$$

$$\text{Au temps } t = 1, \quad p(1) = p_1 = p_0(1 + i)$$

$$\begin{aligned} \text{Au temps } t = 2, \quad p(2) &= p_2 = p_1(1 + i) \\ &= p_0(1 + i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au temps } t = 3, \quad p(3) &= p_3 = p_2(1 + i) \\ &= p_0(1 + i)^3 \end{aligned}$$

...

$$\text{Au temps } t \quad p(t) = p_t = p_0(1 + i)^t$$

En posant $a = (1 + i)$ on a $p_t = p_0 \cdot a^t$

Ainsi, la population croît en progression géométrique de raison a (a étant le facteur d'augmentation de la population).

On a donc : $p_t = p_0 \cdot a^t$

Application numérique

La population d'une ville était de 153 800 habitants en 2010. En admettant que la population croisse constamment de 5% par an, prévoir le nombre d'habitant de cette ville en 2050.

Résolution

$$p_0 = 153\,800 ; i = 0,05 \text{ et } t = 2\,050 - 2\,010 = 40.$$

La formule

$$\begin{aligned} p &= p_0 a^t \Leftrightarrow p = 153\,800 \cdot (1 + 0,05)^{40} \\ &= 153\,800(1,05)^{40} \\ &= 1\,082\,750,264 \\ &\cong 1\,082\,750 \text{ habitants.} \end{aligned}$$

Exercices

- N° 227. Détermine la valeur acquise d'un capital de 123 000 u.m placé à intérêts composés au taux annuel de 4%.
- N° 228. Quelle somme qu'il faut placer à intérêts composés pour avoir 12 ans après, 250 000 u.m :
- Sachant que le taux annuel est 3,5% ;
 - Sachant que le taux annuel est 3% ?
- N° 229. Combien de temps faut-il placer la somme de 100 000 u.m) intérêts composés, au taux annuel de 3%, pour obtenir :
- 130 477 u.m ?
 - 150 000 u.m ?
 - 200 000 u.m ?
- N° 230. Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par $R = \log \frac{I}{I_0}$, où I_0 est une intensité minimale donnée.
- Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 I_0$, calculer R .
 - Exprime I en fonction de R et de I_0 .
- N° 231. La loi de refroidissement de Newton peut être utilisée pour montrer, sous certaines conditions, que la température T (en °C) d'un objet

au temps t (en heures) est donnée par $T = 75 e^{-2t}$. Exprime t en fonction de T .

N° 232. Une population croît régulièrement au taux de 4% par an.

- Donne approximativement le temps nécessaire pour que le nombre d'individus double, c'est-à-dire le temps de dédoublement de l'effectif.
- En déduis la formule donnant le temps de dédoublement de l'effectif d'une population.

N° 233. Que vaut la magnitude d'un séisme dont l'intensité est :

- 100 fois celle de I_0
- 10 000 fois celle de I_0
- 100 000 fois celle de I_0 ?

N° 234. Détermine la valeur acquise d'un capital de 123 000 u.m placé à intérêts composés au taux annuel de 4%.

N° 235. Quelle somme qu'il faut placer à intérêts composés pour avoir 12 ans après, 250 000 u.m :

- Sachant que le taux annuel est 3,5%
- Sachant que le taux annuel est 3% ?

N° 236. Combien de temps faut-il placer la somme de 100 000 u.m intérêts composés, au taux annuel de 3%, pour obtenir :

- 130 477 u.m ?
- 150 000 u.m ?
- 200 000 u.m ?

N° 237. Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par $R = \log \frac{I}{I_0}$,

Où I_0 est une intensité minimale donnée.

- Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 I_0$, calcule R .
- Exprime I en fonction de R et de I_0 .
- Trouve la magnitude d'un séisme dont l'intensité est :
 - 100 fois celle de I_0 ;
 - 10 000 fois celle de I_0 ;
 - 100 000 fois celle de I_0 .

N° 238. La loi de refroidissement de Newton peut être utilisée pour montrer, sous certaines conditions, que la température T (en °C) d'un objet au temps t (en heures) est donnée par $T = 75 e^{-2t}$. Exprime t en fonction de T .

- N° 239. Une population croît régulièrement au taux de 4% par an.
- Donne approximativement le temps nécessaire pour que le nombre d'individus double, c'est-à-dire le temps de dédoublement de l'effectif.
 - Déduis la formule donnant le temps de dédoublement de l'effectif d'une population.
- N° 240. L'isotope ^{210}Bi du bismuth a une demi-vie⁴ de 5 jours. S'il y a 100 mg de ^{210}Bi au temps $t = 0$, alors la quantité résiduelle $f(t)$ après t jours est donné par $f(t) = 100(2)^{\frac{-t}{5}}$.
- Quelle quantité de ^{210}Bi reste-t-il après 5 jours ? 10 jours ? 12,5 jours ?
 - Représente le graphique pour $0 \leq t \leq 30$.

II.11. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

- N° 241. Calcule :
- $\log_6 \sqrt[3]{36}$. Rép.: $\frac{2}{3}$
 - $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$. Rép.: -2
 - $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt{9}}$. Rép.: $-\frac{1}{3}$
- N° 242. Déterminer b pour que chacune des égalités suivantes soit vraie
- $\log_b 0,01 = -1$. Rép.: $b = 100$
 - $\log_b 7 = 3$. Rép.: $\sqrt[3]{7}$
 - $\log_b 4 = \frac{1}{4}$. Rép.: $b = 256$
 - $\log_b 1 = 0$. Rép.: $\forall b \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } b \neq 1$
- N° 243. Simplifie :
- $e^{-\ln 5}$. Rép.: $\frac{1}{5}$
 - $(e^2)^{\ln 3x}$. Rép.: $9x^2$
 - $\left(5^{\frac{1}{\ln 5}}\right)^{\ln(\ln 5)}$. Rép.: $\ln 5$
 - $e^{3 \ln 2} + e^{-\ln 5} - (\ln e)^2$. Rép.: $\frac{36}{5}$
- N° 244. Si $p = \frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3}$, calcule $3^{\frac{p}{2}}$. Rép.: $\sqrt{6}$
- N° 245. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes:
- $f(x) = (x^2 - x + 1)^{\sqrt{x-x^2}}$. Rép.: $]0, 1[$
 - $f(x) = (1 - \cos x)^{\sqrt{1+2 \sin x}}$ ($0 \leq x \leq \pi$). Rép.: $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

⁴ La période ou demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de sa matière initiale

$$c) \sqrt[4]{\frac{1 - \log_{\frac{1}{2}} x}{1 + \log_{\frac{1}{2}} x}}$$

$$\text{Rép. : } D_f = \left[\frac{1}{2}, 2 \right[$$

N° 246. Exprime x en fonction de y lorsque : $y = \frac{1+2^x}{1-2^x}$. Rép. : $x =$

$$\log_2 \left| \frac{y-1}{y+1} \right|$$

N° 247. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \sqrt[2x]{9} = 3^{x-2}$$

$$\text{Rép. : } S = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

$$b) \frac{e^x - 3e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} = -1$$

$$\text{Rép. : } S = \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right\}$$

$$c) \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x)$$

$$\text{Rép. : } S = \emptyset$$

$$d) (\ln x)^4 - 2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 + 2\ln x = 0$$

$$\text{Rép. : } S = \left\{ 1, \frac{1}{e}, e, e^2 \right\}$$

N° 248. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \left(\frac{3}{4} \right)^{2x} < \frac{16}{9} \quad \text{Rép. : } x \in]-1, +\infty[\quad b) \ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x) \quad \text{Rép. : } \left] 0, \frac{2}{7} \right]$$

N° 249. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 5^{3x} = 25^{y-7} \\ 3^{3y} = 3^{x+1} \end{cases} \quad \text{Rép. : } S = \left\{ \left(\frac{-40}{7}, \frac{-11}{7} \right) \right\}$$

$$b) \begin{cases} e^x \cdot e^{y-1} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y+1) \end{cases} \quad \text{Rép. : } \{(1 + \ln \sqrt{2}, \ln \sqrt{2})\}$$

N° 250. On donne la fonction $y = x^2 e^x$, calculer la dérivée 3^e de y .

$$\text{Rép. : } y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

N° 251. Calcule les dérivées $\frac{d^n f}{dx^n}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x e^x \quad \text{Rép. : } (x+n)e^x \quad b) f(x) = (x^{n-1} \ln x) \quad \text{Rép. : } \frac{(n-1)!}{x}$$

N° 252. On donne la fonction $f(x) = x e^x$. Détermine :

$$a) \text{ le minimum relatif de } f \quad \text{Rép. : } \left(-1, -\frac{1}{e} \right)$$

$$b) \text{ le point d'inflexion de } f \quad \text{Rép. : } \left(-2, -\frac{2}{e^2} \right)$$

N° 253. Calcule la dérivée première de $y = \text{Arc tan } \ln x^2$.

$$\text{Rép. : } y' = \frac{2}{x(1 + \ln^2 x^2)}$$

N° 254. Calcule :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\tan \frac{\pi x}{2}}$$

$$\text{Rép. : } e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 4x)^{\frac{2}{x}}$$

$$\text{Rép. : } e^{-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^{\tan x} \quad \text{Rép. : } \frac{1}{e} \quad h) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-a}{x+a} \quad \text{Rép. : } -2a$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{1 - e^x} \quad \text{Rép. : } -1 \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\tan \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)} \quad \text{Rép. : } \frac{1}{e}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{Rép. : } e^{-\frac{1}{2}} \quad j) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \quad \text{Rép. : } \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} \quad \text{Rép. : } \frac{1}{2} \ln 2$$

N° 255. Soit la fonction réelle f , de courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé xoy , définie par : $f(x) = \ln(1+x)^3$ et soit f^{-1} sa réciproque.

Alors $f^{-1}(6 \ln 2) + 3f^{-1}(3 \ln 3)$ Vaut :

$$1. \quad 3 \quad 2. \quad -\frac{2}{3} \quad 3. \quad 11 \quad 4. \quad -\frac{3}{4} \quad 5. \quad 9$$

N° 256. Le nombre réel $(\log 2) \left(\log \frac{1}{2} \right)^{-1}$ est égal à :

$$1. \quad -1 \quad 2. \quad 0 \quad 3. \quad 1 \quad 4. \quad 4 \quad 5. \quad \log 4$$

N° 257. Si $4^{6x} = 5$, alors 64^{4x} est égal à :

$$1. \quad 80 \quad 2. \quad 25 \quad 3. \quad 125 \quad 4. \quad 10 \quad 5. \quad \sqrt{3}$$

N° 258. Si $4^{\log_3 x} = 256$, alors x est égal à :

$$1. \quad 4 \quad 2. \quad 4^3 \quad 3. \quad 3^4 \quad 4. \quad 4^4 \quad 5. \quad 3^{64}$$

N° 259. Les trois nombres $\log_b 2$, $\log_b(3^m - 2)$, $\log_b(3^m + 2)$ sont en progression arithmétique si et seulement si m est égal à :

$$1. \quad \log_3 4 \quad 2. \quad \log_4 33 \quad 3. \quad \log_3 8 \quad 4. \quad \log_8 3 \quad 5. \quad \log_3 6$$

N° 260. Si une progression arithmétique est telle que $t_2 = \log_4 x^3$, $t_5 = \log_2 x^3$ et $8 - t_7 = 0$, alors x vaut :

$$1. \quad 4 \quad 2. \quad 2 \quad 3. \quad \sqrt{2} \quad 4. \quad \frac{1}{2} \quad 5. \quad 1$$

N° 261. L'égalité $\left(\frac{4-x}{x-3} \right)^x = \frac{(4-x)^x}{(x-3)^x}$ est vérifiée lorsque x appartient à l'ensemble

$$1. \quad]3, 4[\quad 2. \quad]3, \frac{7}{2}[\cup]\frac{7}{2}, 4[\quad 3. \quad]3, +\infty[\quad 4. \quad]4, +\infty[\quad 5. \quad]-3, 4[$$

N° 262. Si $x = (\log_{27} 3)^{\log_3 27}$ alors $\log_3 x =$

$$1. \quad -2 \quad 2. \quad \frac{1}{3} \quad 3. \quad -\frac{1}{3} \quad 4. \quad 3 \quad 5. \quad -3$$

N° 263. Si $0 < a < 1$ et $a^{\frac{1}{2}} = x$, $a^{-\frac{1}{2}} = y$, $a^{\frac{\pi}{2}} = z$ alors

1. $x < y < z$ 2. $y < x < z$ 3. $y < z < x$ 4. $z < x < y$ 5. $z < y < x$

N° 264. Le(s) réel(s) x tel(s) que $1 + \log_{2x} x = 0$ est(sont) :

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $-\sqrt{2}$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ 5. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2}$

N° 265. L'équation $3^{x+1} + \frac{54}{3^x} = 83$ possède deux racines dont l'une est entière

notée a et l'autre non entière, réelle est désignée par b . Alors $\frac{a-3^b}{2}$ vaut :

1. 3 2. $-1 + \log_3 2$ 3. $1 - \log_3 2$ 4. $\frac{7}{6}$ 5. $\frac{2}{3}$

N° 266. La solution de l'équation $\log_3 x \cdot \log_x 9 - \ln x = 0$ est :

1. $\ln 5$ 2. e^2 3. $\frac{1}{\ln 3}$ 4. e^{-2} 5. $\ln \frac{1}{3}$

N° 267. L'équation $\frac{1+e^x}{1-2e^x} = 1 - e^x$ est satisfaite pour une seule valeur notée t .

Alors $2^{\frac{1}{t}}$ vaut :

1. e 2. $\ln 2$ 3. $\log_2 e$ 4. 2 5. $\frac{1}{2}$

N° 268. Le système d'inéquations $0 < \log_{\frac{1}{4}} x < 2$ est vérifiée si :

1. $0 < x < 1$ 2. $0 < x < \frac{1}{16}$ 3. $\frac{1}{16} < x < 1$ 4. $x > \frac{1}{16}$ 5. $1 < x < 16$

N° 269. On donne l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. Le produit des racines de cette équation est :

1. 0 2. 4 3. 2 4. 1 5. 8

N° 270. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2 \ln(1-x) \leq \ln(x+5)$ est :

1. $[-1, 1[$ 2. $\frac{e^3}{2}, +\infty[$ 3. $[\sqrt{3}, +\infty[$ 4. $]0, \frac{9}{e^2}[$ 5. $]0, \frac{1}{25}[$

N° 271. La dérivée première $y = \text{Arc tan} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ est :

1. 2 2. $\frac{x}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{\cos x}$ 5. $\frac{1}{\cos x}$

N° 272. Soit $f(x) = \sqrt{e^{3x-1}}$ et $g(x) = e^{\sqrt{3x-1}}$

On pose $p = f'\left(\frac{2}{3}\right)$, $q = g'\left(\frac{5}{3}\right)$ et $r = f'\left(\frac{1}{3}\right) - g'\left(\frac{2}{3}\right)$.

Alors $\sqrt{2p^2 + 2q} + r =$

1. $\sqrt{6}(1+e)$ 2. $\frac{\sqrt{6}}{2}(1+e)$ 3. $1+e$ 4. $\sqrt{6}(1-e)$ 5. $\frac{\sqrt{6}}{2}(1-e)$

N° 273. $\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)'$ vaut :

1. $\ln \frac{2}{1-x^2}$ 2. $\frac{2}{(1-x)^2}$ 3. $\frac{-2}{1-x^2}$ 4. $\ln \frac{1-x^2}{2}$ 5. $\frac{2}{1-x^2}$

N° 274. $\left\{ \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] \right\}'$ vaut :

1. $\cos x$ 2. $\sin x$ 3. $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$ 4. $\frac{1}{\cos x}$ 5. $\frac{1}{\sin x}$

N° 275. On donne la fonction $f(x) = \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$, $f'(\sqrt{3})$ vaut :

1. $\ln 3$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2} \ln 3$ 4. $\frac{1}{\ln 3}$ 5. 2

N° 276. La dérivée de la fonction $y = \frac{3x^2-1}{3x^2} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{Arctg} x$ est :

1. $y' = \frac{x^5+1}{x^6+x^4}$ 3. $y' = \frac{x^4+1}{x^6+x^3}$ 5. $y' = \frac{6x^4+3x^3+2x^2+2}{3x^3+5x^5}$
 2. $y' = \frac{x^4+1}{x^5+x^2}$ 4. $y' = \frac{x}{x^5+x^3}$

N° 277. $y = e^{x^x}$ a pour dérivée

1. $y' = e^{x^x} (1 + \ln x) x^x$ 3. $y' = e^{x^x} \cdot x^x$ 5. $y' = e^{x^x} (\ln x) x^x$
 2. $y' = e^{x^x} (1 + \ln x)$ 4. $y' = e^{x^x} (1 - \ln x) x^x$

N° 278. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc} \tan x}{x^2} \cdot \ln(1 + \tan x)$ vaut :

1. 1 2. $\frac{1}{2}$ 3. 0 4. $-\frac{1}{2}$ 5. -1

N° 279. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2-1} \right)^{\frac{1-x^2}{x}}$ vaut :

1. $\frac{1}{e}$ 2. 1 3. e^2 4. ∞ 5. 0

N° 280. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{2x}} \right)^{2x}$ vaut :

1. e 2. $\frac{1}{e}$ 3. e^2 4. $\frac{1}{e^2}$ 5. -e

N° 281. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a+1}{x+1} \right)^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, où $a \in \mathbf{R}$

alors a vaut :

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. -1 4. $-\frac{1}{2}$ 5. 5

N° 282. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a+\frac{1}{x}}{a-\frac{1}{x}} \right)^{-x} = \frac{1}{e}$ alors a vaut :

1. 2 2. 1 3. 3 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{3}$

N° 283. Si $a = \lim_{x \rightarrow 2} [1 + 3(x-2)]^{\frac{1}{2x-4}}$ alors $\ln a$ vaut :

1. $-\frac{3}{2}$ 2. $-\frac{2}{3}$ 3. -1 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{3}{2}$

N° 284. Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{4x^2} = k$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)^{2-\sqrt{x}} = l$

Si $mk - l = 0$ alors la valeur du réel m vaut :

1. $\sqrt{e}$ 2. e^8 3. $\frac{1}{e^9}$ 4. $\frac{1}{e}$ 5. 1

N° 285. Si $p = \lim_0 \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{1}{\sin x}}$, $q = \lim_{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{\tan^2 x}$ et

$$r = \lim_0 (1+x)^{\frac{1}{x} \ln \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}, \text{ alors}$$

La valeur du réel s pour que $(pq^2)^s = e^{r^2}$ vaut :

1. e^2 2. $\sqrt{e}$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. e 5. $\frac{1}{6}$

N° 286. Sachant que $a = \lim_0 \frac{36^x - 4^x}{2x}$ et $b = \lim_0 \frac{1 - \cos(2 \operatorname{Arc} \tan x)}{\ln(1+x^2)}$, le réel c tel que $c - b = a$ vaut :

1. $\ln 3$ 2. $\ln 3e^2$ 3. 2 4. 3 5. $\ln 2 e^3$

N° 287. Si $p = \lim_0 \left(\frac{3^x + 9^x + 27^x}{3} \right)^{\frac{2}{x}}$ et $q = \lim_0 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x}$ alors le réel r vérifiant $6q + 19r = p$, vaut :

1. 81 2. 3 3. 4 4. 9 5. 27

N° 288. Le réel $r = 64 \operatorname{sh}(5 \ln 2) - \frac{9}{41} \operatorname{ch}(-2 \ln 3)$ vaut :

1. $\frac{1023}{64}$ 2. $\frac{41}{9}$ 3. 1022 4. -1024 5. $\frac{41}{64}$

N° 289. Si $m = \operatorname{th}(\ln \sqrt{3})$ et $n = \operatorname{cth}(2 \ln \sqrt{7})$, alors le quotient de m par n est le réel :

1. $\frac{12}{25}$ 2. $\frac{7}{2}$ 3. $\frac{3}{7}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{2}{25}$

N° 290. Le nombre $A = \tan \left[\frac{15\pi}{82} \operatorname{ch}(2 \ln 3) \right]$ vaut :

1. 1 2. $-\sqrt{3}$ 3. $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ 4. $\sqrt{3}$ 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

N° 291. Le réel $B = \sec \left[\frac{-28\pi}{63} \operatorname{sh}(-3 \ln 2) \right]$ vaut :

1. $\sqrt{2}$ 2. -2 3. $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ 4. 1 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

N° 292. La forme rationnelle de la fonction $f(x) = \operatorname{sh}(2 \ln 3x) + \operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln 4x^2)$ est:

1. $f(x) = \frac{81x^4 - 18x^3 + 9x - 2}{18x^2}$ 4. $f(x) = \frac{81x^4 + 18x^3 + 9x - 1}{18x^2}$
 2. $f(x) = \frac{162x^4 + 36x^3 + 9x - 2}{36x^2}$ 5. $f(x) = \frac{81x^4 + 9x^3 + 9x - 1}{36x^2}$
 3. $f(x) = \frac{36x^4 + 18x^3 - 9x - 1}{18x^2}$

N° 293. L'équation dans $\mathbb{R} : 2 \operatorname{th} x - 1 = 0$ a pour solution :

1. $\ln \sqrt{2}$ 2. 1 3. $\frac{1}{2}$ 4. $3 \ln \sqrt{2}$ 5. $\ln \sqrt{3}$

N° 294. On considère la fonction réelle $f(x) = \operatorname{cth} x$ et on note par $\mathcal{C}$, sa courbe dans un repère orthonormé xOy .

Détermine les points de cette courbe où la tangente a pour coefficient angulaire $-\frac{16}{9}$.

1. $P_1\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$ et $P_2\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$
2. $P_1(1, \ln 2)$ et $P_2\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$
3. $P_1\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ et $P_2\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$
4. $P_1\left(-\ln 2, -\frac{5}{3}\right)$ et $P_2\left(\ln 2, \frac{5}{3}\right)$
5. $P_1\left(-\frac{5}{3}, -\ln 2\right)$ et $P_2\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$

N° 295. Le point appartenant à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f(x) = 3 + \ln x$ est :

1. A(3,0)
2. B $\left(\ln 2, \frac{3}{5}\right)$
3. C $\left(-\ln 2, \frac{3}{4}\right)$
4. D $\left(\ln 2, \frac{1}{5}\right)$
5. E $\left(\ln 2, \frac{18}{5}\right)$

N° 296. L'un des points de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f(x) = \ln x$ a pour coordonnées :

1. P $\left(\ln 5, \frac{3}{5}\right)$
2. P $\left(\ln 2, \frac{12}{5}\right)$
3. P $\left(\ln 5, \frac{12}{5}\right)$
4. P $\left(\frac{5}{3}, \ln 2\right)$
5. P $\left(\ln 2, \frac{3}{5}\right)$

N° 297. En se basant sur les taux de natalité et de mortalité actuels, on peut s'attendre que la population du territoire de Kabeya Kamwanga dans le Kasai central en République Démocratique du Congo augmente selon la formule

$p_t = p_0 (1,041)^t$, avec p_t donné en millions d'habitants, $t = 0$ correspondant à 1985 et en cette année $p_0 = 20,2$ millions d'habitants.

Le nombre d'années à peu-près au bout desquelles la population va doubler est :

1. 12
2. 10
3. 24
4. 17
5. 21

N° 298. Une substance radioactive se désintègre selon la formule

$q(t) = q_0 e^{-0,0063 t}$ où q_0 est la quantité initiale de la substance et t le temps exprimé en jours. La demi-vie de la substance vaut approximativement :

1. 63 jours
2. 360 jours
3. 110 jours
4. 250 jours
5. 630 jours

N° 299. Si un sachet de 100 mg d'un médicament contre l'asthme est pris oralement alors qu'il n'y a pas de médicament dans le corps, la quantité totale A dans le sang après t minutes est donnée par la formule

$$A = 100[1 - (0,95)^t], \text{ pour } 0 \leq t \leq 10.$$

Le nombre des minutes nécessaires pour que 50 mg de médicament pénètre dans le sang est :

1. 5,57min
2. 6,58min
3. 8,27min
4. 7,37min
5. 4 min

N° 300. Un Médicament est éliminé du corps par les urines. Supposons que pour une dose de 10 mg, la quantité $A(t)$ résiduelle dans le corps t heures après la prise soit donnée par $A(t) = 10(0,8)^t$. De plus, pour que le médicament soit efficace, il faut qu'au moins 2 mg reste dans le corps.

a. La durée t pour qu'il reste 2 mg du médicament dans le corps est :

1. 7,21 heures
2. 8 heures
3. 12 heures
4. 6 heures
5. 4,12 heures.

b. La demi-vie du médicament est :

1. 10 heures 2. 5 heures 3. 8 heures 4. 6 heures 5. 3 heures

N° 301. La demi-vie du radium est 1600 ans. Si la quantité initiale est q_0 milligrammes, alors la quantité résiduelle après t années est donnée par $q(t) = q_0 2^{kt}$. k vaut :

1. $-\frac{1}{1600}$

2. $\frac{1}{3200}$

3. $-\frac{1}{16}$

4. $-\frac{1}{32}$

5. $-\frac{1}{800}$

CHAPITRE III : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR ET DE MACLAURIN

A. OBJECTIFS

1. Donner les conditions pour qu'une fonction soit développée suivant par la formule de Taylor ou de MacLaurin.
2. Développer une fonction suivant la formule de Taylor ou de MacLaurin.
3. Déterminer le reste d'ordre n du développement d'une fonction.
4. Estimer la valeur approchée d'un nombre en utilisant la formule de Taylor ou de MacLaurin.
5. Calculer la limite d'une fonction en utilisant les équivalences des fonctions.

B. ACTIVITES

1. Soit la fonction réelle $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, sur l'intervalle $[0, 3]$
 - a) Détermine le réel c vérifiant le théorème de Rolle pour cette fonction.
 - b) Détermine le réel c qui vérifie le théorème des accroissements finis.
2. Soit la fonction réelle $f(x) = 2^x$.
 - a) Calcule la dérivée 10^e de $f(x)$
 - b) Que vaut cette dérivée au point $x_0 = 0$?
3. Soit le nombre réel $A = \ln 1,02$. Trouve avec cinq décimales exactes une valeur approchée du réel A sans recourir à la calculatrice scientifique.
4. On considère la fonction réelle $f(x) = e^{2x}$.
 - 1) Calcule ses dérivées première, seconde, troisième et quatrième.
 - 2) Dédus la formule de la dérivée n^e de cette fonction.
5. En utilisant le binôme de Newton, développe les expressions suivantes :
 - a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$
 - b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^8$
6. Calcule la dérivée 3^e de la fonction $y = x^2 e^x$
7. Calcule la dérivée n^e de chacune des fonctions suivantes :
 - a) $f(x) = x e^x$.
 - b) $f(x) = x^{x-1} \ln x$
8. Calcule chacune des sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^4 k^2(k-3)$$

$$B = \sum_{k=0}^3 \frac{2^k}{k+1}$$

9. Détermine le cinquième terme du développement de $(x^2 + \sqrt{y})^8$

10. Trouve le coefficient du terme en x^2 du développement de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$

11. Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$. Montre que :

a) $f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0)$

b) $f(x) = f(3) + \frac{(x-3)}{1}f'(3) + \frac{(x-3)^2}{2}f''(3) + \frac{(x-3)^3}{6}f'''(3)$

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

III.1. INTRODUCTION

Par sa forme simple, un polynôme paraît facile à aborder sous différents aspects. Cette facilité nous permettra d'étudier, dans ce chapitre, les possibilités d'approximer n'importe quelle fonction f donnée par un polynôme avec une certaine précision au voisinage d'un point donné $x = a$

En d'autres termes, il sera question de chercher une approximation polynomiale d'une fonction f donnée au voisinage d'un point $x = a$ suivant les puissances entières croissantes du binôme $x - a$.

Comme applications numériques, on pourra calculer la valeur approchée d'un logarithme, d'une racine nième, de certaines puissances des nombres, d'un cosinus ou d'un sinus ; le tout, sans recourir à l'outil technologique moderne : une calculatrice ou un ordinateur.

III.2. FORMULE DE TAYLOR ET DE MACLAURIN

III.2.1. CAS D'UN POLYNOME DE DEGRE n

Soit un polynôme P de degré n défini dans $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

Ce polynôme peut s'écrire suivant les puissances entières de $x - a$.

Soit

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \dots + \alpha_{n-1}(x - a)^{n-1} + \alpha_n(x - a)^n \quad (2)$$

Déterminons les valeurs des constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ en utilisant les dérivées successives du polynôme (2)

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 + \dots + n\alpha_n(x-a)^{n-1} \\
P''(x) &= 2\alpha_2 + 2 \cdot 3 \cdot \alpha_3(x-a) + \dots + (n-1)n\alpha_n(x-a)^{n-2} \\
P'''(x) &= 2 \cdot 3 \cdot \alpha_3(x-a) + 2 \cdot 3 \cdot 4\alpha_4(x-a)^2 + \dots + (n-2)(n-1)n\alpha_n(x-a)^{n-3} \\
&\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
P^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \alpha_n = n! \alpha_n
\end{aligned}$$

Les réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont obtenus en calculant les valeurs respectives des polynômes $P(x), P'(x), P''(x), P'''(x), \dots, P^{(n)}(x)$ pour $x = a$.

Ainsi, $P(a) = \alpha_0$

$$P'(a) = \alpha_1$$

$$(P''(a) = 2\alpha_2) \Rightarrow \left(\alpha_2 = \frac{P''(a)}{2} = \frac{P''(a)}{2!} \right)$$

$$(P'''(a) = 3 \cdot 2\alpha_3) \Rightarrow \left(\alpha_3 = \frac{P'''(a)}{3 \cdot 2} = \frac{P'''(a)}{3!} \right)$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$(P^{(n)}(a) = n! \cdot \alpha_n) \Rightarrow \left(\alpha_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \right)$$

En substituant les différentes valeurs de $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ dans le polynôme (1), on obtient la relation :

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (2)$$

L'égalité (2) est appelée **formule de Taylor** au point a pour un polynôme de degré n ou développement de Taylor d'ordre n au point a du polynôme ou développement du polynôme suivant les puissances croissantes de $x - a$ ou développement de $P(x)$ au voisinage de a .

Remarquons que dans le développement du polynôme suivant les puissances croissantes de $x - a$, le coefficient du terme en $x - a$ de degré k vaut le quotient de la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $P(x)$ au point a et du factoriel de k

$$\alpha_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

Ce développement est fini car la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de $P(x)$ est nulle.

Sous la forme condensée la formule (2) s'écrit :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

En particulier si $a = 0$ alors l'égalité (2) devient :

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Elle est appelée **formule de MacLaurin** d'ordre n du polynôme.

Ainsi, tout polynôme de degré n admet un développement de Taylor (respectivement de MacLaurin) d'ordre n en tout réel a .

Exercices résolus

ER 87. 1. Développe chacun des polynômes suivants au voisinage de a .

$$\text{a) } P(x) = x^2 + 3x + 1 \quad a = 1,$$

$$\text{b) } P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 4 \quad a = -2$$

Résolution

$$\text{a) } p(1) = 5$$

$$p'(x) = 2x + 3 \quad p'(1) = 5$$

$$p''(x) = 2 \quad p''(1) = 2$$

$$p(x) = 5 + \frac{5}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2$$

$$= 5 + 5(x-1) + (x-1)^2$$

$$\text{b) } p(-2) = -2$$

$$p'(x) = 6x^2 + 6x + 1 \quad p'(-2) = 13$$

$$p''(x) = 12x + 6 \quad p''(-2) = -18$$

$$p'''(x) = 12 \quad p'''(x) = 12$$

$$p(x) = -2 + \frac{13}{1!}(x+2) - \frac{18}{2!}(x+2)^2 + \frac{12}{3!}(x+2)^3$$

$$p(x) = -2 + 13(x+2) - 9(x+2)^2 + 2(x+2)^3$$

ER 88. 2. Développe le binôme $(x + a)^n$ avec $(n \in \mathbb{N})$ selon MACLAURIN.

Résolution

Soit $p(x) = (x + a)^n$ un polynôme de degré n . Nous avons pour $x = 0$:

$$p(0) = a^n$$

$$p'(x) = n(x + a)^{n-1}$$

$$p''(x) = n(n-1)(x + a)^{n-2}$$

$$p'''(x) = n(n-1)(n-2)(x + a)^{n-3}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p^{(k)}(x) = n(n-1)\dots[n-(k-1)](x + a)^{n-k}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p^{(n)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$p'(0) = n a^{n-1}$$

$$p''(0) = n(n-1)a^{n-2}$$

$$p'''(0) = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$$

$$\dots \quad \dots$$

$$p^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k}$$

$$\dots \quad \dots$$

$$p^{(n)}(0) = n!$$

D'où :

$$(x + a)^n = a^n + \frac{n a^{n-1}}{1!}x + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \dots + x^n$$

On obtient le même résultat par la formule du binôme de Newton.

III.2.2. CAS D'UNE FONCTION

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ telle que f admet n dérivées successives continues sur $[a, b]$ et la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de f existe sur $]a, b[$.

La formule qui nous permet de développer la fonction f donnée suivant les puissances du binôme $x - a$ est de la forme (2). Puisque la dérivée $(n+1)^e$ de f est non nulle au point a , le développement de Taylor de f n'est pas fini et se note

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (3)$$

Où $a < c < b$, c est le réel qui vérifie la théorème des accroissements finis.

Posons $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

La formule (3) devient alors

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \quad (4)$$

R_n représente le reste dans le développement en série de Taylor

Sous forme condensée elle s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

En particulier, si $a = 0$, l'égalité (4) devient :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n \quad (5)$$

$$\text{Où} \quad r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad 0 < \theta < 1$$

L'égalité (5) est appelée « Formule de MACLAURIN ».

r_n représente le reste dans le développement de MACLAURIN

Sous forme condensée, elle s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n$$

Remarques

- Si $f^{(n+1)}$ est bornée, alors $R_n(x) \leq f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- Si f est une fonction polynôme, alors $R_n(x) = 0$.
- Dans la pratique, pour développer une fonction f donnée selon les puissances de $x - a$, on procédera de la manière suivante :
 - * Calculer $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$.
 - * Calculer $f^{(n+1)}(c)$ et préciser le reste soit de Taylor ($a \neq 0$) soit de MacLaurin ($a = 0$).
- Pour calculer $f(a)$ avec n décimales exactes, on doit majorer la valeur absolue du reste par 10^{-m} ($m \geq n$).
- Dans la formule de MacLaurin, on obtient une valeur approchée du reste en remplaçant θ par 0 ou par 1 selon qu'il se retrouve au dénominateur ou numérateur.
- Les formules des fonctions trigonométriques sont valables si les angles sont exprimés en radians. Pour de petites valeurs de x , on obtient une bonne approximation en se limitant aux 2 ou 3 premiers termes.

III.3. DEVELOPPEMENT DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

III.3.1. DEVELOPPEMENT SUIVANT MacLaurin

Développement de $f: x \rightarrow f(x) = (1 + x)^k$, ($k \in \mathbb{R}^*$)

$f(x) = (1 + x)^k$	$f(0) = 1$
$f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$	$f'(0) = k$
$f''(x) = k(k-1)(1 + x)^{k-2}$	$f''(0) = k(k-1)$
$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1 + x)^{k-3}$	$f'''(0) = k(k-1)(k-2)$
$f^{IV}(x) = k(k-1)(k-2)(k-3)(1 + x)^{k-4}$	$f^{IV}(0) = k(k-1)(k-2)(k-3)$
...	...
$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2) \dots (1 + x)^{k-n}$	$f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)$
$f^{(n+1)}(x) = k(k-1)(k-2) \dots (1 + x)^{k-(n+1)}$	$f^{(n+1)}(0) = k(k-1)(k-2) \dots (k-n)(1 + \theta x)^{k-(n+1)}$

La fonction f admet au voisinage de 0 des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre $(n + 1)$.

En appliquant la formule de MacLaurin pour tout $k > -1$, on a :

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + r_n$$

$$\text{avec } r_n = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)x^{n+1} \quad \text{où } 0 < \theta < 1$$

En particulier :

– Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ la formule de MacLaurin pour la fonction f se réduit au binôme de Newton.

– Pour $k = -1$, la fonction f s'écrit :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + r_n \quad \text{avec } r_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

– Pour $k = -2$, la fonction f s'écrit :

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots + (-1)^n (n+1)x^n + r_n$$

$$\text{avec } r_n = \frac{(-1)^{n+1} (n+2)x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+3}}$$

– Si $k = \frac{1}{2}$, alors la fonction f s'écrit :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n + r_n$$

$$\text{avec } r_n = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)x^{n+1}}{2^{n+1}(1+n)!} (1+\theta x)^{k-n-1}$$

Exercices résolus

ER 89. 1. En utilisant la formule de MacLaurin pour $n = 2$ de la fonction $\sqrt{1+x}$, détermine la valeur approchée de $\sqrt{1,14}$.

Résolution

Nous savons que : $\sqrt{1,14} = \sqrt{1+0,14}$ et le développement d'ordre 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + r_2$ avec $r_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{(1+\theta x)^5}}$

$$\text{Par suite, } \sqrt{1+0,14} = 1 + \frac{1}{2}(0,14) - \frac{1}{8}(0,14)^2 + \dots$$

$$= 1,06755 + \dots \quad (\text{avec } r_2 < \frac{(0,14)^3}{16} < 10^{-3})$$

$$\approx 1,067$$

ER 90. 2. Ecris le développement de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ au voisinage de 0.

Résolution

Posons $x^3 = t$. La fonction s'écrit : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

en utilisant le développement d'ordre n de la fonction $f(x) = (1 + x)^k$, nous avons :

$$f(t) = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}t + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}t^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}t^3 + \dots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^n + r_n$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \dots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^n + r_n$$

En substituant t par x^θ , nous obtenons :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \dots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n)}{n!}x^{3n} + r_n$$

$$\text{Avec } r_n = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (1 + \theta x_n)^{3(n+1)} \quad (0 < \theta < 1)$$

Exercice

Calcule la valeur approchée de $\sqrt[3]{1,041}$ en indiquant le nombre des décimales exactes par la formule de MacLaurin d'ordre 2.

Développement de $f: x \longrightarrow f(x) = e^x$

On sait que pour tout x réel, $(e^x)' = e^x$.

Ainsi, $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ et par conséquent :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

Les dérivées successives de $f(x) = e^x$ sont continues $\forall x \in \mathbb{R}$; en appliquant MacLaurin, on a :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n \quad \text{avec } r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad (0 < \theta < 1)$$

En particulier, si on remplace x par $-x$, alors :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + r_n \quad \text{avec } r_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} e^{-\theta x}}{(n+1)!}$$

Exercice résolu

ER 91. Détermine la valeur approchée de $e^{0,2}$ par la formule de MacLaurin.

Résolution

Nous savons que le développement jusqu'à l'ordre 3 de $f(x) = e^x$ est :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + r_3 \quad \text{avec } r_3 = \frac{e^{\theta x}}{4!} x^4$$

$$\text{Ainsi, } e^{0,2} = 1 + \frac{(0,2)}{1!} + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1,221\,333\dots$$

Développement de $f: x \longrightarrow f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = a^x \ln a \qquad f'(0) = \ln a$$

$$f''(x) = a^x (\ln a)^2 \qquad f''(0) = (\ln a)^2$$

$$f'''(x) = a^x (\ln a)^3 \qquad f'''(0) = (\ln a)^3$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n \qquad f^{(n)}(0) = (\ln a)^n$$

$$f^{(n+1)}(x) = a^x (\ln a)^{n+1} \qquad f^{(n+1)}(0) = a^{0x} (\ln a)^{n+1}$$

Les dérivées successives de $f(x) = a^x$ existent et sont continues pour tout x réel.

Ainsi, en appliquant la formule de MACLAURIN au voisinage de 0, on a :

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{x^n (\ln a)^n}{n!} + r_n$$

$$\text{avec } r_n = \frac{x^{n+1} a^{\theta x} (\ln a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (0 < \theta < 1)$$

Exercice résolu

ER 92. Détermine la valeur approchée de $2^{0,24}$

Résolution

Nous savons que : $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{3!} + r_3$ et

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1} x + \frac{\ln^2 2}{2} x^2 + \frac{\ln^3 2}{6} x^3 + r_3 \qquad \text{avec } r_3 = \frac{\ln^4 2}{24} 2^{\theta x} x^4$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } 2^{0,24} &= 1 + (0,24) \ln 2 + (0,24)^2 \cdot \frac{\ln^2 2}{2} + (0,24)^3 \cdot \frac{\ln^3 2}{6} + r_3 \\ &= 1 + (0,24) \cdot (0,693\,147) + (0,057\,6) \cdot (0,240\,226\,5) + (0,013\,824) \cdot (0,055\,504) + r_3 \\ &= 1 + 0,166\,355\,323 + 0,013\,837\,046 + 0,000\,767\,288 + r_3 \\ &= 1,180959657 + r_3 \end{aligned}$$

Développement de la fonction $f : x \longrightarrow f(x) = \sin x$

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^{(IV)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(IV)}(0) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \end{array}$$

Les dérivées successives de $f(x) = \sin x$ sont continues dans $\mathbb{R}$. Et la formule de MacLaurin permet d'écrire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_{2k}$$

$$\text{avec } r_{2k} = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x \quad (0 < \theta < 1)$$

Exercice résolu

ER 93. Calcule la valeur approchée de $\sin 1$ par la formule de MacLaurin d'ordre 5.

Résolution

Nous savons que le développement jusqu'à l'ordre 5 de $f(x) = \sin x$ est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + r_5$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \sin 1 &= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + r_5 \\ &= 1 - 0,166\,666\,6 + 0,008\,333\,3 + r_5 \\ &= 0,841\,666\,7 + r_5 \end{aligned}$$

Développement de $f : x \longrightarrow f(x) = \cos x$

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \cos x & & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f'''(0) = 0 \\ f^{(IV)}(x) = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f^{(IV)}(0) = 1 \\ f^{(V)}(x) = -\sin x = \cos\left(x + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f^{(V)}(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) & & f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \end{array}$$

Les dérivées successives de $f(x) = \cos x$ étant continues dans $\mathbb{R}$, La formule

$$\text{de MacLaurin donne : } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2k}$$

+ 1

$$\text{avec } r_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x \quad (0 < \theta < 1)$$

Exercice résolu

ER 94. Détermine la valeur approchée de $\cos 1,1$ par la formule de MacLaurin d'ordre 4

Résolution

Nous savons que le développement par MacLaurin d'ordre 4 de $\cos x$ est :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + r_4$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \cos 1,1 &= 1 - \frac{(1,1)^2}{2} + \frac{(1,1)^4}{24} + r_4 \\ &= 1 - 0,605 + 0,061\,004\,1 + r_4 \\ &= 0,456\,0041 + r_4 \\ &= 0,456\,464 \quad (\text{avec deux décimales exactes}) \end{aligned}$$

Développement de $f : x \longrightarrow f(x) = \ln(1-x)$

$f(x) = \ln(1-x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = -(1-x)^{-1}$	$f'(0) = -1$
$f''(x) = -(1-x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = -2(1-x)^{-3}$	$f'''(0) = -2$
$f^{(IV)}(x) = -6(1-x)^{-4}$	$f^{(IV)}(0) = -6$
$f^{(V)}(x) = -24(1-x)^{-5}$	$f^{(V)}(0) = -24$
...	...
$f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1-x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$

Les dérivées successives de $f(x) = \ln(1-x)$ sont continues pour tout $x < 1$.

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + r_n\right]$$

avec $r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$

Exercice résolu

ER 95. Calcule la valeur approchée de $\ln 1,1$ suivant MacLaurin d'ordre 4.

Résolution

Nous savons que $\ln 1,1 = \ln(1+0,1) = \ln[1-(-0,1)]$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \ln(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + r_4\right) \\ \ln[1-(-0,1)] &= -\left(-0,1 + \frac{(-0,1)^2}{2} + \frac{(-0,1)^3}{3} + \frac{(-0,1)^4}{4} + r_4\right) \\ &= 0,095\,310\,1 + \dots + r_4. \quad \text{D'où } \ln 1,1 = 0,095\,310\,1 \end{aligned}$$

III.3.2. DEVELOPPEMENT SUIVANT TAYLOR

Le développement d'une fonction par la formule de Taylor se fait au voisinage d'un point a non nul.

Développement de $f: x \longrightarrow f(x) = \ln x$ au voisinage de 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\
 f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \\
 f^{(IV)}(x) &= -\frac{6}{x^4} & f^{(IV)}(1) &= -6 \\
 &\dots & &\dots \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \\
 \ln x &= \frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} (x-1)^n + r_n \\
 \ln x &= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n + r_n \\
 \text{avec } r_n &= \frac{(-1)^n n! (x-1)^{n+1}}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}} \text{ ou } r_n = \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1} (n+1)}
 \end{aligned}$$

Développement de $f: x \longrightarrow f(x) = e^x$ au voisinage de 2

$$\begin{aligned}
 e^x &= e^2 + \frac{e^2(x-2)}{1!} + \frac{e^2(x-2)^2}{2!} + \frac{e^2(x-2)^3}{3!} + \dots + \frac{e^2(x-2)^n}{n!} + r_n \text{ ou} \\
 e^x &= e^2 \left[1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n!} \right] + r_n
 \end{aligned}$$

Note : Détermination du nombre des chiffres exacts

Dans le calcul de la valeur approchée d'un nombre E avec une marge d'erreur r_n par la formule de MacLaurin, les parties décimales des réels $E + r_n$ et $E - r_n$ présentent une série successive de décimales identiques. Cette série indique le nombre des décimales exactes du réel E calculé.

Exercices résolus

ER 96. 1. Développe le polynôme donné suivant les puissances du binôme $x - 2$

$$f(x) = 5x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 5$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 5x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 5 & \Rightarrow f(2) &= \frac{125}{2} \\ f'(x) &= 20x^3 - 9x^2 + x - \frac{1}{4} & \Rightarrow f'(2) &= \frac{503}{4} \\ f''(x) &= 60x^2 - 18x + 1 & \Rightarrow f''(2) &= 205 \\ f'''(x) &= 120x - 18 & \Rightarrow f'''(2) &= 222 \\ f^{(IV)}(x) &= 120 & \Rightarrow f^{(IV)}(2) &= 120 \\ f^{(V)}(x) &= 0 & \Rightarrow f^{(V)}(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 5 &= \frac{125}{2} + \frac{503}{4}(x-2) + \frac{205}{2}(x-2)^2 + \frac{222}{6}(x-2)^3 + \frac{120}{24}(x-2)^4 \\ &= \frac{125}{2} + \frac{503}{4}(x-2) + \frac{205}{2}(x-2)^2 + 37(x-2)^3 + 5(x-2)^4 \end{aligned}$$

ER 97. 2. Développe jusqu'à l'ordre 3 chacune des fonctions suivantes au voisinage de a.

$$\text{a) } y = \text{Arc sin } x \quad a = 0 \qquad \text{b) } y = \frac{x-1}{x} \quad a = -2$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \text{Arc sin } x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-3/2} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} & f'''(0) &= 0 \\ f^{(IV)}(x) &= 3x(3+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} & f^{(IV)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{3!} + r_3 \quad \text{avec } r_3 = \frac{3\theta x[3+2(\theta x)^2]x^4}{4![1-(\theta x)^2]^{\frac{7}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \frac{x-1}{x} & y(-2) &= \frac{3}{2} \\ y' &= x^{-2} & y'(-2) &= \frac{1}{4} \\ y'' &= -2x^{-3} & y''(-2) &= \frac{1}{4} \\ y''' &= 6x^{-4} & y'''(-2) &= \frac{3}{8} \\ y^{IV} &= -24x^{-5} & y^{IV}(-2) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}(x+2)^2 + \frac{1}{16}(x+2)^3 + R_3 \quad \text{avec } R_3 = -\frac{(x+2)^4}{(\theta x)^5}$$

ER 98. 3. Détermine le terme en x^{36} du développement par Mac Laurin de la fonction

$$f : x \longrightarrow f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

Résolution

$$\begin{array}{l|l} f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) & \text{Le terme en } x^{36} \text{ est } \frac{x^{36}}{36!}f^{(36)}(0) \\ f''(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\sin \frac{x}{2} & \text{Comme } f^{(IV)}(x) = -\frac{1}{4}f(x), \text{ nous déduisons} \\ f'''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) & \text{les dérivées d'ordre multiple de 4 :} \\ f^{IV}(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{4}f(x) & f^{(8)}(x) = \frac{1}{16}f(x), f^{(12)}(x) = -\frac{1}{64}f(x) \\ & \text{et } f^{(4n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{4^n}f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Par suite, } f^{(36)}(x) = (-1)^9 \cdot \frac{1}{4^9}f(x) & f^{(36)}(0) = -\frac{1}{4^9} \\ = & \text{Le terme en } x^{36} \text{ est donc : } -\frac{1}{4^9} \cdot \frac{x^{36}}{36!} \\ -\frac{1}{4^9}e^{-\frac{x}{2}}\cos \frac{x}{2} & \end{array}$$

ER 99. 4. Calcule la valeur approchée de $\sqrt{1,01}$ avec 3 décimales exactes.

Résolution

Nous savons que $\sqrt{1,01} = (1 + 0,01)^{\frac{1}{2}}$ avec $x = 0,01$ et $k = \frac{1}{2}$

Selon MacLaurin, le développement d'ordre 2 de $(1 + x)^k$ donne

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + r_2,$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (1 + 0,01)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (0,01) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(0,01)^2}{2} + r_2 \\ &= 1,0049875 \end{aligned}$$

$$\text{avec } r_2 = \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x) = \frac{x^3}{3!}k(k-1)(k-2)(1 + \theta x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \theta \text{ intervient au dénominateur, nous avons : } r_2 &= \frac{(0,01)^3}{3!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 0,000\,000\,062 \end{aligned}$$

$$|r_2| < 10^{-3}$$

$$\text{Ainsi, } (1 + 0,01)^{1/2} = 1,0049875 + r_2 \approx 1,004$$

ER 100.5. Quelle est la meilleure majoration de la valeur absolue de l'erreur commise en

calculant $\text{Arc tan } 0,01$ et en se limitant au terme $\frac{x^2}{2!}f''(0)$ par MacLaurin.

Résolution

Considérons la fonction $f(x) = \text{Arc tan } x$ et déterminons ses dérivées jusqu'à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arc tan } x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} - 8x^2(1+x^2)^{-3} & f'''(0) &= -2 \end{aligned}$$

Le troisième terme constitue le reste : $R_3 < \left| f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} \right|$
 $< \left| \frac{x^3}{3} \right|$

Pour $x = 0,01$, nous obtenons $R_3 < \frac{10^{-6}}{3}$. La meilleure majoration est $\frac{10^{-6}}{3}$.

ER 101.6. En appliquant la formule de MacLaurin ($n = 2$) à la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$, donne une valeur approchée de $\sqrt{1,14}$ et précise le nombre de décimales exactes obtenues.

Résolution

Nous savons que le développement limité d'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 est : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$ avec $r_2 = \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$

Pour $x = 0,14$; nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+0,14} &= 1 + \frac{0,14}{2} - \frac{0,0196}{8} & \text{et} & & r_2 < \left| \frac{x^3}{16} f'''(0) \right| \\ &= 1,06755. & & & r_2 < 0,0001715 \end{aligned}$$

Pour déterminer le nombre des décimales exactes, considérons :

$E = 1,06755$; $r_2 < 0,0001715$ et effectuons successivement:

$$E + r_2 = 1,06755 + 0,0001715 = 1,0677215 \quad (\text{i})$$

$$E - r_2 = 1,06755 - 0,0001715 = 1,0673785 \quad (\text{ii})$$

En comparant les résultats de (i) et (ii) , nous constatons qu'après la virgule, il y a 3 chiffres qui sont les mêmes (ou qui ne changent pas) dans l'ordre.

D'où $\sqrt{1,14} = 1,06755$ avec trois décimales exactes.

ER 102.7. Andy veut calculer le réel $E = \frac{1}{\sqrt[4]{0,99}}$.

Il est placé dans des conditions telles qu'il lui est interdit de faire usage de la calculatrice scientifique ou de l'ordinateur.

Il se souvient fort heureusement qu'il peut utiliser la formule de MacLaurin.

- Avec cinq décimales exactes, quelle l'approximation de E trouvera-t-il ?
- Quelle est la borne supérieure de l'erreur commise ?
- Avec cette approximation, combien de chiffres exacts trouvera-t-il ?

Résolution

a. Calcul de E

$$E = \frac{1}{\sqrt[4]{0,99}} = \frac{1}{(0,99)^{\frac{1}{4}}} = (0,99)^{-\frac{1}{4}} = (1 - 0,01)^{-\frac{1}{4}}$$

Par identification avec $(1+x)^k$, on trouve : $x = -0,01$ et $k = -\frac{1}{4}$.

Par suite, l'usage de la formule

$$(1+x)^k = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} +$$

...

$$\text{montre que } (1 - 0,01)^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} \cdot (-0,01)^1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{4} - 1\right) (-0,01)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \left(-\frac{1}{4} - 2\right) (-0,01)^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} + \frac{5}{32} \cdot 10^{-4} + \frac{15}{128} \cdot 10^{-6} + \dots \\ = 1 + 0,25 \cdot 10^{-2} + 0,15625 \cdot 10^{-4} + 0,1171875 \cdot 10^{-6} + \dots \\ = 1 + 0,0025 + 0,000015625 + 0,0000001171875 + \dots \\ = 1 + 0,0025 + 0,00002 + r_2$$

Ainsi, avec cinq décimales exactes, la formule de Mac Laurin donne :

$$E = \frac{1}{\sqrt[4]{0,99}} = 1,00252$$

b. Evaluation de l'erreur commise

Comme on s'est arrêté au terme de degré 2, l'erreur commise est

$$r_2 = \frac{x^3}{3!} f'''(\theta x) = \frac{(-0,01)^3}{3!} \cdot \frac{45}{64 \sqrt[4]{(1-\theta x)^{13}}} \leq \frac{15 \cdot 10^{-6}}{128}$$

c. Nombre des décimales exactes

On sait que

$$r_2 \leq \frac{15 \cdot 10^{-6}}{128} = 1171875 \cdot 10^{-13}$$

De cette façon,

$$E + r_2 = 1,0025201171875$$

$$E - r_2 = 1,0025198828125$$

Il y a 4 chiffres qui se répètent juste après la virgule. Donc Andy trouve **quatre décimales exactes**.

ER 103.7. Détermine la valeur approchée de $e^{0,03}$ suivant la formule de MacLaurin d'ordre 3.

Résolution

Nous savons que $e^{0,03} = e^{3(0,01)}$ et en appliquant le développement selon MacLaurin de $e^{3x} = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + r_3$, nous obtenons :

$$e^{3(0,01)} = 1 + \frac{3(0,01)}{1!} + \frac{9(0,01)^2}{2!} + \frac{27(0,01)^3}{3!} + r_3$$

$$= 1,030\,454\,5 + r_3$$

$$\text{D'autre part : } \left(r_3 < \left| \frac{3^4 e^{3\theta x} x^4}{4!} \right| \right) \Leftrightarrow \left(r_3 < \left| \frac{81(0,01)^4}{24} \right| \right)$$

$$\Leftrightarrow (r_3 < 0,000\,000\,033\,75)$$

D'où : $e^{0,03} \approx 1,030\,454$ (avec 6 décimales exactes).

ER 104.8. Les quatre premiers termes non nuls du développement selon MacLaurin de

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \text{ donne un polynôme } g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4.$$

Calcule a) $2a + b + c - 3d$ b) $g(x)$ pour $x = -1$

Résolution

Déterminons les dérivées successives de $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x$:

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x \qquad f'(0) = 2$$

$$f''(x) = -\frac{15}{4} e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x \qquad f''(0) = -2$$

$$f'''(x) = \frac{47}{8} e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x - \frac{13}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x \qquad f'''(0) = -\frac{13}{2}$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{161}{16} e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x + 15e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x \qquad f^{(IV)}(0) = 15$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!}x^4 = 2x - x^2 - \frac{13}{12}x^3 + \frac{15}{24}x^4$$

$$\text{Soit } g(x) = 2x - x^2 - \frac{13}{12}x^3 + \frac{15}{24}x^4$$

Nous déduisons $a = 2$, $b = -1$, $c = -\frac{13}{12}$ et $d = \frac{15}{24}$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2a + b + c - 3d &= 4 - 1 - \frac{13}{12} - \frac{15}{8} = \frac{1}{24} \\ \text{b) } g(-1) &= -2 - 1 + \frac{13}{12} + \frac{15}{24} = -\frac{31}{24} \end{aligned}$$

III.4. DEVELOPPEMENTS LIMITES

III.4.1. DEFINITION

Soit $I =]a, b[$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Une fonction f définie dans I (sauf peut être en x_0) admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x-x_0)^n \text{ avec } p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$p_n(x)$ est appelé **partie entière** ou **partie principale** ou encore **partie régulière**.

$r_n(x-x_0)^n$ est appelé le **terme complémentaire** ou **le reste du développement**.

En particulier, si $x_0 = 0$, alors : $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$

III.4.2. PROPRIETES

P_1 : Si une fonction f admet des dérivées successives jusqu'à l'ordre n et si ses dérivées sont continues dans $I =]a, b[$ alors f admet au voisinage de x_0 le développement limité d'ordre n .

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x-x_0)^n$$

En particulier, si $x_0 = 0$, on obtient la formule :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

P_2 : Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 alors ce développement est unique.

P_3 : Si f est une fonction paire (respectivement impaire) et admet un développement limité alors les coefficients des termes de rang impair (respectivement de rang pair) sont nuls.

P_4 : Si p et n sont deux naturels tels que $p < n$ et f une fonction admettant un développement limité d'ordre n alors f admet un développement limité d'ordre p .

III.4.3. OPERATIONS SUR LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

Soit f et g deux fonctions admettant les développements limités d'ordre n .

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \text{ et } g(x) = q_n(x) + s_n(x)$$

a) $f \pm g$ admet un développement d'ordre n défini par :

$$(f \pm g)(x) = p_n(x) \pm q_n(x) + (r_n \pm s_n)(x)$$

b) $f \cdot g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie entière s'obtient en multipliant les deux parties entières $[p_n(x) \cdot q_n(x)]$ et ne gardant que les termes de degré au plus égal à n .

c) $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie entière s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes de $p_n(x)$ par $q_n(x)$ jusqu'à l'ordre n .

d) Si $g \circ f$ existe alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie entière s'obtient en substituant dans la partie entière de g , la partie entière de f et en supprimant les puissances de x d'ordre supérieur à n .

Exemples

- $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x)$

On sait que $\cos 2x$ est la composée des fonctions $y = \cos x$ et $y = 2x$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \cos 2x &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + r_n(x) \\ &= 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x) \end{aligned}$$

- $f(x) = a^x = 1 + x \ln a + \frac{1}{2!} (\ln a)^2 x^2 + \dots + \frac{1}{n!} (\ln a)^n x^n + r_n(x)$

On sait que a^{2x} est une fonction composée de a^x et $2x$.

En se limitant au terme de rang 4,

$$\begin{aligned} \text{On a : } a^{2x} &= 1 + 2x \ln a + \frac{1}{2!} (\ln a)^2 (2x)^2 + \frac{1}{3!} (\ln a)^3 (2x)^3 + \\ &\quad \frac{1}{4!} (\ln a)^4 (2x)^4 + r_4(x) \end{aligned}$$

III.4.4. DEVELOPPEMENT LIMITE D'UNE FONCTION DERIVEE

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n . La dérivée de f admet un développement limité d'ordre $(n - 1)$ qui s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f .

Exemple

$$\text{Soit } y = \ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n + r_n$$

$$y' = \frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^{n-1} (x-1)^{n-1} + r_n$$

III.4.5. DEVELOPPEMENT LIMITE ET CALCULS DES LIMITES

a) Définition

Deux fonctions f et g définies dans $I =]a, b[$ ($x_0 \in I$) sont équivalentes lorsque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1 \quad [g(x) \neq 0]$$

On note : $f \sim g$

b) Propriétés

P_1 : Si f_1, g_1, f_2 et g_2 sont des fonctions telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$
 et $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ $f_2 \neq 0$ et $g_2 \neq 0$).

La propriété p_1 ne s'applique pas nécessairement à une somme ou une différence des fonctions.

P_2 : Soit $x_0 \in I =]a, b[$. Si f et g sont deux fonctions équivalentes

$$\text{et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$$

Remarques

– Ces deux propriétés montrent que dans la recherche de la limite d'un produit (ou quotient) des fonctions f et g lorsque $x \rightarrow x_0$, on peut remplacer une fonction

par sa fonction équivalente.

– Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ alors la fonction f est dite « infiniment petit »,

Ainsi, dans la levée d'indétermination de certaines limites, on peut remplacer une fonction par un infiniment petit qui lui est équivalent.

P_3 : Si une fonction f admet un développement limité pour $x = 0$, alors elle est équivalente au premier terme non nul de son développement lorsque $x \rightarrow 0$.

Ainsi, a) les fonctions $\sin x$, $\tan x$, $\text{Arc sin } x$, $\text{Arc tan } x$, $\ln(1+x)$ et $e^x - 1$ sont équivalentes à x lorsque $x \rightarrow 0$;
 b) les fonctions $(1+x)^m - 1$ et $\cos x - 1$ sont respectivement équivalentes à mx et $-\frac{x^2}{2}$.

Remarques

- Si $x \rightarrow 0$, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ et $\sin x \sim x$
- Si $x \rightarrow 0$, alors tout polynôme est équivalent à son terme indépendant non nul.
- Si $x \rightarrow \infty$, alors tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Toute fonction est équivalente à sa limite quand $x \rightarrow x_0$.

Quelques exemples des fonctions équivalentes

Lorsque x tend vers 0, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} \sin x \sim x & \text{Arc sin } x \sim x & (1+x)^m \sim 1 + mx \\ \tan x \sim x & \text{Arc tan } x \sim x & \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) \sim x & e^x \sim x + 1 & \sqrt{1 \pm x^2} \sim 1 \pm \frac{x^2}{2} \\ \ln x \sim x - 1 & & \end{array}$$

Remarque

Pour les formes indéterminées 1^∞ , ∞^0 , 0^0 , on utilise le logarithme de la manière suivante : $[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$
 et $g(x) \cdot \ln[f(x)]$ prend la forme $\infty \cdot 0$ pour laquelle on peut utiliser les équivalences.

Exercices résolus

ER 105.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

Résolution

La fonction prend la forme $\frac{0}{0}$. Utilisons le développement limité d'ordre 1 de :

$$2^x = e^{x \ln 2} = 1 + x \ln 2 + r_1(x) \quad \text{et} \quad 3^x = e^{x \ln 3} = 1 + x \ln 3 + r'_1(x)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{2^x - 3^x}{x} &= \frac{[1 + x \ln 2 + r_1(x)] - [1 + x \ln 3 + r'_1(x)]}{x} \\ &= \frac{x \ln 2 - x \ln 3}{x} \\ &= \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{2}{3}$

En utilisant la technique des fonctions équivalentes, nous obtenons :

$$\left. \begin{array}{l} 2^x - 1 \approx x \ln 2 \\ 3^x - 1 \approx x \ln 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{2^x - 3^x}{x} = \ln 2 - \ln 3 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2^x - 3^x}{x} = \ln \frac{2}{3} \right)$$

ER 106.2. Trouve une fonction équivalente à la fonction donnée sachant que $x \rightarrow 0$.

a) $y = \sin^2 x$

b) $y = \ln(1 + x^2)$

c) $y = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$

Résolution

a) Nous savons que : $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ et $\sin x \sim x$

Ainsi, $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x \sim x \cdot x$ ou $\sin^2 x \sim x^2$

b) Notons que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1$

Ainsi, $\ln(1 + x^2) \sim 1 + x^2 - 1$ ou $\ln(1 + x^2) \sim x^2$

c) Comme $\sin x \sim x$, $\frac{\sin x}{1 - \sin x} \sim \frac{x}{1 - x}$

ER 107.3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sec x}$ en utilisant les équivalents.

Résolution

$$\frac{\sin x}{1 - \sec x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos x - 1}$$

Nous savons que $\sin x \sim x$ et $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

Par suite, $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos x - 1} \sim \frac{1 \cdot 2x}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^2} = -\frac{2}{x}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sec x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x}\right) = \infty$

où $\lim_{0^+} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{0^-} \left(-\frac{2}{x}\right) = +\infty$

Exercices

N° 302. Développe chacune des fonctions suivantes au voisinage du point a.

a) $y = \sqrt{1 - x}$

$a = 0$

b) $y = x e^x$

$a = 0$

- c) $y = \ln x$ $a = 2$ (prendre 4 termes)
d) $y = \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ $a = 0$ (prendre 3 termes)
e) $y = \sin x$ $a = \frac{\pi}{3}$ (prendre 4 termes)
f) $y = 3x^7 + 2x^6 + 4x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ $a = 1$

N° 303. Les 4 premiers termes non nuls du développement selon MacLaurin de

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \text{ forment un polynôme } g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4.$$

a) Calcule $2a + b + c - 3d$

b) Trouve la valeur numérique de $g(-1)$.

N° 304. Combien de termes non nuls du développement de MacLaurin de

$f(x) = (1 + x)^m$ peut-on prendre pour calculer $\sqrt[3]{9}$ avec 3 décimales exactes.

N° 305. En appliquant la formule de MacLaurin d'ordre 4, développe $\ln(1 + x)$. En utilisant ce développement, évalue la valeur approchée de $\ln 1,31$

et détermine le nombre de chiffres exacts obtenus.

N° 306. Détermine le développement de $f(x) = \ln \cos x$ au voisinage de zéro.

N° 307. Ecris la formule de MacLaurin pour la fonction $f: x \rightarrow f(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{3}}$ en s'arrêtant au le troisième terme.

Calcule $\sqrt[3]{1,2}$ au moyen de la formule trouvée et évalue l'erreur absolue commise.

N° 308. Développe les polynômes de degré n ci-dessous suivant les puissances

croissantes du binôme $x - a$

a) $p(x) = 4x^4 - 15x^3 + 20x^2 - 10x + 14$ $a = 1$

b) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ $a = -2$

c) $p(x) = 3x^4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x + \frac{1}{4}$ $a = 2$

N° 309. Détermine le développement de la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ au voisinage de 0.

N° 310. Calcule avec cinq décimales exactes

- a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{123}$ e) $\sqrt[5]{135}$ g) $(1,1)^{20}$ i) $\sqrt{0,99}$ k) $\sin 44^\circ$
 b) $\sqrt{1,03}$ d) $\ln 0,95$ f) $(1,03)^{20}$ h) $(0,95)^{15}$ j) $\frac{1}{\sqrt{1,01}}$ l) $\cos 29^\circ$

N° 311. Calcule la valeur approchée de $\sqrt[3]{1,041}$ en y indiquant le nombre de décimales exactes à partir de la formule de MacLaurin.

N° 312. Calcule la valeur approchée de :

- a) $\sin 1,1$ b) $\cos 1$ c) $\tan 1,1$

N° 313. Trouve le développement limité d'ordre n suivant Mac-Laurin de chacune des fonctions suivantes :

- | | | | |
|-------------------------|---------|---|---------|
| a) $y = \sin 3x$ | $n = 5$ | h) $y = e^{\sin x} \cos x$ | $n = 2$ |
| b) $y = e^{-2x}$ | $n = 4$ | i) $y = \text{Arc sin } e^{-x}$ | $n = 3$ |
| c) $y = \ln(1 + x^2)$ | | j) $y = e^x - \sqrt{1 + 2x}$ | $n = 2$ |
| $n = 3$ | | | |
| d) $y = e^{\sin x}$ | $n = 2$ | k) $y = \text{ch } x$ | $n = 3$ |
| e) $y = 2^{2x}$ | $n = 2$ | | |
| f) $y = \frac{1}{2x+1}$ | $n = 2$ | l) $y = \ln(1 - 3x) \cdot \cos x$ | $n = 3$ |
| g) $y = \sin^2 3x$ | $n = 4$ | | |
| | | m) $y = \frac{\text{Arc tan } x}{\sqrt{1-x}}$ | $n = 2$ |

N° 314. Détermine la limite de chacune des fonctions suivantes lorsque $x \rightarrow a$

(utilise les fonctions équivalentes).

- | | | | |
|--|---------|---|---------|
| a) $y = \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$ | $a = 0$ | d) $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ | $a = 0$ |
| b) $y = x \ln \left(1 + \frac{3}{2x-1}\right)$ | $a = 0$ | e) $y = (1 - \cos x)^{\tan x}$ | $a = 0$ |
| c) $y = [\ln(1 + \sin x)]^{\sin x}$ | $a = 0$ | f) $y = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ | $a = 0$ |

N° 315. Ange pense calculer le réel $A = \ln 1,4$ sans faire usage de la calculatrice.

- Quelle approximation doit-il obtenir en utilisant les quatre premiers termes du développement en série de MacLaurin de $f(x) = \ln(1 + x)$.
- Evalue l'erreur maximale commise ;
- Détermine le nombre de termes qu'il est appelé à utiliser pour que l'erreur maximale commise en évaluant approximativement $\ln 1,4$ soit inférieure à 0,0001.

N° 316. Donne le développement en série de Taylor autour de la valeur donnée, des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$; c. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$; $a = 2$

b. $f(x) = e^x$, $a = 1$; d. $f(x) = \sin 2x$; $a = \pi$

III.5. EXERCICES D'AUTO - EVALUATION

N° 317. Détermine la somme des coefficients des termes en $(x-1)^3$ et $(x-1)^7$ du développement du polynôme $p(x) = 3x^7 + 2x^6 + 4x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ suivant le binôme $(x-1)$. Rép. :

152

N° 318. Soit a, b, c , et d les coefficients des quatre premiers termes du développement de MacLaurin de $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.

Calcule $a^2 + b^2 - (c + d)$. Rép. : $\frac{23}{16}$

N° 319. Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + ax^2)^{\frac{1}{2}}$ où a est un réel. Détermine a sachant que la partie régulière du développement par MacLaurin d'ordre 2 de cette fonction est $\frac{1}{2}x^2$ Rép. : $a = 1$

N° 320. Calcule :

$$a) \lim_{0} \frac{\text{Arc tan } x}{x^2} \cdot \ln(1 + \tan x) \quad \text{Rép : } 1 \quad b) \lim_{0} \frac{(1 - \cos x) \text{Arc sin } x}{x \tan^2 x} \quad \text{Rép } \frac{1}{2}$$

N° 321. Trouve une fonction équivalente à la fonction donnée :

$$a) y = \sin^2 x \quad \text{Rép : } x^2$$

$$b) y = \cos x \cdot \ln(1 + \tan x) \quad \text{Rép : } x$$

$$c) y = \frac{(1 - \cos x) \text{Arc sin } x}{(e^x - 1) \sinh x} \quad \text{Rép : } \frac{1}{2}x$$

N° 322. Détermine la valeur approchée de $(2,0003)^5$ à moins 10^{-3} près.

Rép. : 32,024

N° 323. Les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-e^x}{\cos x}$ forment un polynôme

$p(x) = a + bx + cx^2$. Détermine la valeur numérique de $p(-\frac{1}{2})$. Rép.: $-\frac{3}{4}$

$$N^{\circ} 324. \quad \text{Soit } p(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x}{k} - r_k(x)$$

Détermine la fonction dont le développement par MacLaurin est égal à $p(x)$.

Rép. : $y = \ln(1 + x)$

N° 325. Donne les quatre premiers termes du développement suivant MacLaurin

de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = x e^{x+1}$. Rép. : $ex + ex^2 + \frac{1}{2}ex^3 + \frac{1}{6}ex^4$

N° 326. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x^2)$ en utilisant la fonction équivalente de $\ln(1 + x^2)$.

Rép. : 0

N° 327. Le coefficient du terme en x^4 dans le développement en série de MacLaurin de la fonction définie par $f(x) = x^2 e^x$ est :

1. $\frac{1}{16}$ 2. 3 3. 12 4. $\frac{1}{24}$ 5. $\frac{1}{2}$

N° 328. Calcule par la formule de MacLaurin avec trois décimales exactes

$$f(x) = \sqrt[3]{1,1} + 0,132$$

1. 1,167 2. 1,71 3. 1,166 4. 1,168 5. 1,164

N° 329. Le développement de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ par la formule de MacLaurin est une suite dont les 5 premiers termes forment un polynôme de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Alors $a + c + e =$

1. $-\frac{13}{12}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. 16 4. 48 5. $\frac{37}{24}$

N° 330. La chaînette est une courbe plane, qui correspond à la forme que prend un câble lorsqu'il est suspendu par ses extrémités et soumis à une force gravitationnelle uniforme (son propre poids).

Son équation est $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$. Le coefficient du terme en x^2 par la formule de MacLaurin de cette fonction est :

1. $\frac{1}{2a}$ 2. $2a^2$ 3. $2a$ 4. a^2 5. $\frac{1}{2a^2}$

N° 331. Soit la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Le développement en série de MacLaurin d'ordre 3 est de la forme $f(x) = ax + bx^2 + cx^3$.

L'expression $a - b + c$ vaut :

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. $\frac{7}{6}$ 4. $\frac{11}{6}$ 5. $\frac{17}{6}$

N° 332. En utilisant les 3 premiers termes non-nuls du développement de $\ln(1 + x)$ d'après MacLaurin. Le calcul de l'approximation de $\ln(1,02)$ et la meilleure majoration du reste concédés valent respectivement :

1. 0,091 08 et $4 \cdot 10^{-4}$ 3. 0,019 80 et $0,04 \cdot 10^{-6}$ 5. 0,091 08 et $0,04 \cdot 10^{-2}$
 2. 0,189 0 et $0,04 \cdot 10^{-4}$ 4. 0,059 40 et $0,04 \cdot 10^{-6}$

Avec une telle majoration le nombre des décimales exactes obtenu est :

1. cinq 2. quatre 3. six 4. sept 5. trois

N° 333. Le coefficient du terme en x^{20} dans le développement en série de MacLaurin de la fonction f définie par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2}$ est :

1. $\frac{(64)^3}{12!}$ 2. $-\frac{(64)^3}{12!}$ 3. $\frac{-4^3}{12!}$ 4. $\frac{4^3}{12!}$ 5. $\frac{-1}{(64)^3 \cdot 12!}$

N° 334. Laquelle des séries ci-après allons-nous obtenir si nous additionnons les développés des fonctions e^x et e^{-x} d'après MacLaurin ? (les fonctions e^x + e^{-x} sont développés jusqu'au 5^e terme)

1. $2 \cdot (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})$ 3. $2 \cdot (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})$ 5. $2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{4!})$
 2. $2 \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})$ 4. $2 \cdot (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})$

N° 335. Le deuxième terme non nul du développement en série de MacLaurin de la fonction f définie par $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ est :

1. $\frac{2}{3}x^3$ 2. $2x^2$ 3. $\frac{2}{3}x^2$ 4. $2x$ 5. $2x^3$

N° 336. Pendant l'étude du rendement d'une usine, un économiste rencontre la fonction réelle $f(x) = \sin x$, qui doit intervenir dans ses conclusions, après l'avoir transformée d'après MacLaurin. Il désigne par $g(x)$ le développement de $f(x)$ en considérant les trois premiers termes non nuls.

Pour $x = 1$, $\frac{g(x)}{x}$ à 10^{-3} près vaut:

1. 0,842 2. 0,833 3. 0,766 4. 0,541 5. 0,333

N° 337. On donne la fonction $f(x) = \ln(e + 2x)$

Le développement de f selon MacLaurin d'ordre 3 est de la forme

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Le nombre $A = \ln a_3 - \ln(-a_2) + a_0 =$

1. $\ln \frac{3}{4}$ 2. $\ln \frac{2}{3}$ 3. $\ln 2$ 4. $\ln \frac{4}{3}$ 5. $\ln \frac{1}{2}$

N° 338. Le développement de la fonction $f: x \rightarrow f(x) = 9^x$ par la formule de MacLaurin est une suite dont le huitième terme a pour coefficient :

$$1. \frac{\ln^7 9}{8!} \quad 2. \frac{\ln^7 9}{7!} \quad 3. \frac{\ln^8 9}{7!} \quad 4. \frac{\ln^7 9}{9!} \quad 5. \frac{\ln^8 9}{8!}$$

N° 339. Le développement en série d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \text{Arc sin } 2x$, permet d'écrire : $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + kx^5$.

Dans ces conditions, $f(-1)$ vaut :

$$1. -\frac{4}{3} \quad 2. \frac{12}{5} \quad 3. 2 \quad 4. 0 \quad 5. -\frac{46}{5}$$

N° 340. Quel est le terme en x^8 du développement en série d'après MacLaurin de la fonction $f(x) = e^{2x}$?

$$1. \frac{4}{15} \quad 2. \frac{4}{45} \quad 3. \frac{8}{315} \quad 4. -\frac{4}{3} \quad 5. \frac{2}{315}$$

N° 341. Soit la fonction réelle $f(x) = (1-x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Le développement en série d'après MacLaurin de cette fonction est une suite de termes dont le coefficient du terme en x^3 vaut :

$$1. -\frac{3}{2} \quad 2. \frac{11}{16} \quad 3. \frac{7}{8} \quad 4. \frac{-11}{16} \quad 5. \frac{-5}{24}$$

N° 342. Le développement en série, dans le voisinage de zéro, ($n = 3$) de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ suggère : $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.
 $f(-1) =$

$$1. \frac{8}{3} \quad 2. -\frac{7}{6} \quad 3. \frac{5}{2} \quad 4. \frac{3}{4} \quad 5. 2$$

N° 343. Le terme général du développement en série d'après MacLaurin de la fonction $f(x) = e^{-2x}$?

$$1. \frac{2^n}{n} x^n \quad 2. \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n \quad 3. \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n!} x^n \quad 4. \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} x^n \quad 5. \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(n+1)!} x^n$$

N° 344. Quel est le coefficient du terme en x^n du développement en série d'après MacLaurin de la fonction $f(x) = 2^{2x}$?

$$1. \frac{\ln^n 2}{n!} \quad 2. \frac{2^{n+1} \ln^n 2}{(n+1)!} \quad 3. \frac{2^{n-1} \ln^n 2}{(n-1)!} \quad 4. \frac{2^n \ln^n 2}{n!} \quad 5. \frac{2^{2n+1} \ln^n 2}{(2n+1)!}$$

N° 345. Jonathan Nseka veut calculer la valeur du réel $K = \sqrt[5]{1,002}$.

a. Le nombre de termes du développement en série d'après MacLaurin de la fonction $f(x) = (1+x)^m$ que Jonathan Nseka doit utiliser pour obtenir k avec cinq décimales exactes est :

1. Trois 2. Quatre 3. Deux 4. Cinq 5. Six
- b. Dans cette hypothèse, la valeur approchée de K obtenue vaut :
1. 1,00040 2. 1,00399 3. 1,00039 4. 1,00004 5. 1,00041
- c. La valeur absolue de l'erreur commise dans cette approximation reste inférieure ou égale à :
1. $64 \cdot 10^{-6}$ 2. $32 \cdot 10^{-8}$ 3. $25 \cdot 10^{-8}$ 4. $8 \cdot 10^{-6}$ 5. $64 \cdot 10^{-8}$
- d. Dans la valeur approchée ainsi obtenue, le nombre des décimales exactes vaut :
1. Deux 2. Quatre 3. Cinq 4. Un 5. Trois
- N° 346. Pendant l'épreuve des mathématiques lors des examens d'Etat en République Démocratique du Congo, l'élève Benjamin Mergo est appelé à calculer $A = \ln 1,035$. Les examinateurs interdisent l'usage de la calculatrice scientifique. Mais Benjamin se souvient qu'il peut recourir à la formule de MacLaurin.
- a. le nombre des termes du développement de la fonction $\ln(1+x)$ que Benjamin doit utiliser pour calculer A avec 5 décimales exactes vaut :
1. Cinq 2. Quatre 3. Deux 4. Trois 5. Sept
- b. La valeur de A qu'il doit obtenir est
1. 0,03439 avec une marge d'erreur de $1,5 \cdot (0,035)^5$
 2. 0,03436 avec une marge d'erreur de $2,5 \cdot (0,035)^4$
 3. 0,03441 avec une marge d'erreur de $1,05 \cdot (0,035)^3$
 4. 0,03435 avec une marge d'erreur de $0,75 \cdot (0,035)^4$
 5. 0,03440 avec une marge d'erreur de $1,5 \cdot (0,035)^4$
- N° 347. Kévin Idouba tient à faire de la fonction irrationnelle $f(x) = \sqrt[4]{(1+x)^3}$, un polynôme dans le voisinage de zéro. Il appelle $p(x)$, la partie entière du développement autour de 0 de $f(x)$.
 Le coefficient du terme en x^4 de $p(x)$?
1. $\frac{1}{24}$ 2. $\frac{225}{64}$ 3. $\frac{75}{512}$ 4. $\frac{35}{24}$ 5. $\frac{3}{128}$
- N° 348. Le développement autour de zéro, à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = [\ln(1+x)]^2$ est :
1. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{11x^4}{12}$ 3. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^4}{12}$ 5. $x^2 + x^3 + \frac{5x^4}{12}$
 2. $x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12}$ 4. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$
- N° 349. Le développement en série de la fonction $f(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3}$ autour de zéro, à l'ordre 6 est :

$$\begin{array}{lll}
 1. x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} & 3. \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} & 5. \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \\
 2. \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} & 4. \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} &
 \end{array}$$

N° 350. Le 4^e terme non nul du développement en série, d'après MACLAURIN de la fonction $f(x) = \tan x$ est

$$1. \frac{17x^7}{315} \quad 2. \frac{x^3}{3} \quad 3. \frac{2x^5}{15} \quad 4. \frac{x^4}{4!} \quad 5. \frac{x^6}{6!}$$

N° 351. Le développement limité autour de zéro, à l'ordre 3, de la fonction

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \text{ est un polynôme } g(x) = k + lx + mx^2 + nx^3$$

. Le réel $(k+m) - 10 \cdot l \cdot n$ vaut :

$$1. 1 \quad 2. \frac{1}{2} \quad 3. -1 \quad 4. 0 \quad 5. -5$$

N° 352. Le développement limité autour de zéro, à l'ordre 6 de la fonction

$$f(x) = \arcsin[\ln(1+x^2)] \text{ donne :}$$

$$\begin{array}{lll}
 1. f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} & 3. f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} & 5. f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \\
 2. f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} & 4. f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} &
 \end{array}$$

N° 353. Le terme général du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ est :

$$\begin{array}{lll}
 1. \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n! 2^n} & 2. \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n! 2^{n-1}} & 3. \frac{(-1)^n x^n}{n! 2^n} \\
 4. \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)! 2^n} & & \\
 5. \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n+1)! 2^n} & &
 \end{array}$$

N° 354. Le terme général du développement en série d'après MacLaurin de la fonction $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

$$\begin{array}{lll}
 1. \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n! 2^n} & 2. \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n! 2^{n-1}} & 3. \frac{(-1)^n x^n}{n! 2^n} \\
 4. \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)! 2^n} & & \\
 5. \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n+1)! 2^n} & &
 \end{array}$$

CHAPITRE IV : DIFFÉRENTIELLES

A. OBJECTIFS

1. Définir la différentielle d'une fonction ;
2. Interpréter géométriquement la différentielle ;
3. Déterminer les différentielles successives d'une fonction
4. Appliquer les différentielles aux calculs des erreurs et de la valeur approchée d'un nombre.

B. ACTIVITES

1. On donne les fonctions suivantes :

a. $y = \arcsin(3x - 4x^3)$ b. $y = \operatorname{arcsec} \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Calcule $\frac{dy}{dx}$ pour chacune des fonctions données.

2. Biwata élève de la 4^e année des humanités scientifiques a l'intention d'augmenter de 2 centimètres chaque arête de leur citerne à eau de forme cubique.

Il utilise l'approximation $\frac{dy}{dx}$ pour déterminer une valeur approchée de l'augmentation du volume obtenu de cette citerne.

Son professeur lui demande de vérifier que l'erreur commise sur l'approximation précédente est de 6.10^{-3}m^3 .

3. Une plaque circulaire de métal se dilate sous l'influence de la chaleur de telle sorte que son rayon croît de 0,01 centimètre par seconde. Comment la surface croît – elle quand le rayon est de 2 centimètres?

B. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

IV.1. DEFINITION

On appelle différentielle d'une fonction $y = f(x)$ et on note dy le produit de sa dérivée par l'accroissement Δx de la variable x tel que $x + \Delta x$ appartient au domaine de définition de f . Ainsi, $dy = y' \Delta x$

En particulier, si $y = x$ alors $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$.

La différentielle de y s'écrira désormais $dy = y' dx$ (1)

Exemples

• $y = x^3 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$

• $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x dx$

Remarques

- De l'égalité (1) on tire une nouvelle écriture de la dérivée de $y = f(x)$ par rapport à x . Ainsi, $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y'$
- Ne pas confondre l'accroissement de la fonction $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ et la différentielle de f . En général, $dy \leq \Delta y$, dans le cas d'une fonction affine $dy = \Delta y$.

Exemples

- $y = x^2$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$= 2x \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = 2x \Delta x. \text{ Ainsi, } 2x \Delta x$$

$$< 2x \Delta x + (\Delta x)^2$$

- $y = 3x + 5$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x) + 5 - 3x - 5$$

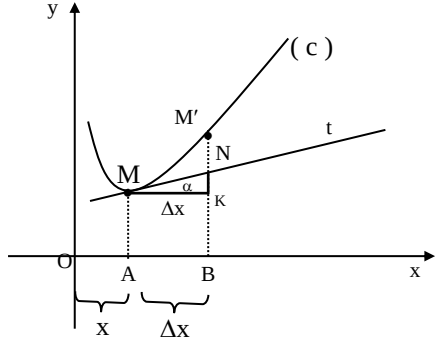
$$= 3 \Delta x$$

$$dy = 3 \Delta x. \text{ Ainsi, } \Delta x = dy$$

IV.2. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA DIFFERENTIELLE

Soit (C) la courbe représentative de la fonction d'équation $y = f(x)$ et $M(x, y)$ un point de (C). Menons par M la tangente t à (C) et considérons deux points A et B sur Ox tels que $OA = x$ et $AB = \Delta x$.

Par B traçons la parallèle à Oy qui rencontre (C) en M' et t en N puis par M menons la parallèle à Ox qui rencontre BM' en K.



Posons α l'angle $\widehat{KMN}$. Dans le triangle MKN nous avons $NK = MK \tan \alpha$.

Comme $\tan \alpha$ représente la dérivée première y' au point M et $MK = AB = \Delta x$, nous obtenons : $NK = y' \Delta x = dy$.

Ainsi, NK représente la différentielle de la fonction $y = f(x)$. Dans $dy = y' \Delta x$, Δx représente un accroissement arbitraire de la variable indépendante x par rapport à un point $M(x, y)$ de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$, dy représente l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente à la courbe au point M.

IV.3. OPERATIONS SUR LES DIFFERENTIELLES

Si f et g sont des fonctions dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

1. $d(f + g) = df + dg$
2. $d(f \cdot g) = f dg + g df$
3. $d(k \cdot f) = k df \quad (\forall k \in \mathbb{R})$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - f dg}{g^2} \quad (\text{avec } g \neq 0)$
5. Si f et g sont telles que $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ et $x \rightarrow f(x)$ et $u \rightarrow g(u) = g[f(x)]$, alors $d(g \circ f)(x) = g'(u)df$.

Les démonstrations de ces règles de calcul découlent de la définition des différentielles et des calculs des dérivées. Donnons-en quelques unes :

1. $d(f + g) = (f + g)'dx = (f' + g')dx = f'dx + g'dx = df + dg$
2. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(f'g - fg')}{g^2}dx = \frac{gf'dx - fg'dx}{g^2} = \frac{gdf - f dg}{g^2}$
3. $d(g \circ f)(x) = (g \circ f)'dx = g'[f(x)]f'(x)dx = g'(u)du$ avec $u = f(x)$

IV.4. DIFFERENTIELLES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $d(0) = 0$ | 11) $d(\cos u) = -\sin u du$ | 21) $d(a^u) = a^u \ln a du$ |
| 2) $d(x) = dx$ | 12) $d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$ | 22) $d(e^x) = e^x dx$ |
| 3) $d(ax + b) = a dx$ | 13) $d(\tan u) = \frac{du}{\cos^2 u}$ | 23) $d(e^u) = e^u du$ |
| 4) $d(x^n) = n x^{n-1} dx$ | 14) $d(\cot x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ | 24) $d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$ |
| 5) $d(u^n) = n u^{n-1} du$ | 15) $d(\cot u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$ | 25) $d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a}$ |
| 6) $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ | 16) $d(\text{Arc sin } x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | 26) $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ |
| 7) $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ | 17) $d(\text{Arc sin } u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ | 27) $d(\ln u) = \frac{du}{u}$ |
| 8) $d(\sin x) = \cos x dx$ | 18) $d(\text{Arc tan } x) = \frac{dx}{1+x^2}$ | 28) $d(u^v) = u^v \left(\ln u dv + v \frac{du}{u} \right)$ |
| 9) $d(\sin u) = \cos u du$ | 19) $d(\text{Arc tan } u) = \frac{du}{1+u^2}$ | |
| 10) $d(\cos x) = -\sin x dx$ | 20) $d(a^x) = a^x \ln a dx$ | |

Exercices résolus

ER 108.1. Calcule la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \text{Arc tan} \frac{x+1}{x}$

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

c) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin 3x$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a) } d\left(\text{Arc tan} \frac{x+1}{x}\right) &= \frac{d\left(\frac{x+1}{x}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x d(x+1)-(x+1)dx}{x^2}}{1+\frac{(x+1)^2}{x^2}} = \frac{x dx-(x+1)dx}{x^2+(x+1)^2} \\ &= \frac{-dx}{2x^2+2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d(\sin x)^{\cos x} &= (\sin x)^{\cos x} \left[\ln \sin x d(\cos x) + \cos x d\left(\frac{\sin x}{\sin x}\right) \right] \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left[\ln \sin x \cdot (-\sin x) dx + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} dx \right] \\ &= (\sin x)^{\cos x} (-\ln \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cotan x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } d(e^{2x} \sin 3x) &= \sin 3x d(e^{2x}) + e^{2x} d(\sin 3x) \\ &= \sin 3x \cdot 2e^{2x} dx + e^{2x} \cdot 3\cos 3x dx \\ &= e^{2x} (2\sin 3x + 3\cos 3x) dx \end{aligned}$$

ER 109.2. Partant des expressions ci-dessous, exprime dy en fonction de x, y et dx.

a) $x^2 + y^2 = 9$

c) $e^{2x-3y} = e^{3y-2x}$

b) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$

d) $\ln(5y - 7x) = 5y + 7x$

Résolution

Ces expressions sont des fonctions implicites de variables x et y :

– pour un terme comprenant une variable, on calcule la différentielle par rapport à cette variable,

– pour un terme qui est produit de deux variables, on applique la formule de différentielle d'un produit.

a) $(2x dx + 2y dy = 0) \Leftrightarrow (2y dy = -2x dx)$

D'où : $dy = -\frac{x}{y} dx$ $dy = \frac{-x dx}{\sqrt{9-x^2}}$

b) $(6x dx + 5y dx + 5x dy + 4y dy = 0) \Leftrightarrow [(5x + 4y) dy = -(6x + 5y) dx]$
 $\Leftrightarrow \left(dy = \frac{-6x-5y}{5x+4y} dx\right)$

c) $d(e^{2x-3y}) = d(e^{3y-2x})$

$d(2x - 3y) e^{2x-3y} = d(3y - 2x) e^{3y-2x}$

$(2 dx - 3 dy) e^{2x-3y} = (3 dy - 2 dx) e^{3y-2x}$

$(3 e^{3y-2x} + 3 e^{2x-3y}) dy = (2 e^{2x-3y} + 2 e^{3y-2x}) dx$

$dy = \frac{2(e^{2x-3y} + e^{3y-2x})}{3(e^{3y-2x} + e^{2x-3y})} dx = \frac{2}{3} dx$

d) $d[\ln(5y - 7x)] = d(5y + 7x) \Leftrightarrow \left(\frac{5dy-7dx}{5y-7x} = 5dy + 7dx\right)$

$\Leftrightarrow 5dy - 7dx = 25y dx + 35y dx - 35xdy - 49xdx$

$$\Leftrightarrow (5 + 35x)dy = (7 + 60y - 49x)dx$$

$$\Leftrightarrow \left(dy = \frac{7+60y-49x}{5+35x} dx \right)$$

IV.5. APPLICATION DES DIFFERENTIELLES

IV.5.1. APPROXIMATION PAR USAGE DE LA DIFFERENTIELLE

Le calcul approximatif d'une valeur donnée par usage de la différentielle passe par les étapes suivantes :

- Déterminer une fonction approchée
- Déterminer x_0 et dx
- Calculer la différentielle en utilisant les deux premières étapes
- Calculer approximativement la valeur cherchée.

Exercices résolus

ER 110.1. Calculons $\sqrt{17}$ à l'aide de la différentielle

Résolution

Le problème consiste à calculer la racine carrée d'un nombre réel. On peut choisir comme fonction approchée : $f(x) = \sqrt{x}$

Par suite,

$$17 = 16 + 1 \Leftrightarrow x_0 = 16 \text{ et } dx = 1$$

$$\text{et } y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Au point } x_0 = 16, \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{16}} = 0,125$$

$$\text{De } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y,$$

on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{17} - \sqrt{16} = \Delta y &\Rightarrow \sqrt{17} = \sqrt{16} + \Delta y \\ &\Rightarrow \sqrt{17} \cong 4 + dy \text{ (Car } \Delta y \cong dy) \\ &\Rightarrow \sqrt{17} \cong 4,125 \text{ (Car } dy \cong 0,125) \end{aligned}$$

ER 111.2. Calcule approximativement $\sqrt[3]{62}$, en utilisant la différentielle.

Résolution

On peut effectuer cette opération par l'approche de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Par suite, le cube le plus proche de 62 étant 64, en prenant

$$x_0 = 64 \text{ et } x_0 + dx = 62, \text{ on trouve } dx = 62 - 64 = -2$$

$$\text{et } f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{64^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{62} - \sqrt[3]{64} = -\frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{62} = \sqrt[3]{64} - \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{62} = 4 - \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{62} \approx 3,958\bar{3}$$

IV.5.2. CALCUL DE L'ERREUR COMMISE SUR UNE MESURE

Les différentielles permettent de résoudre des problèmes relatifs au calcul des erreurs.

Exercices résolus

ER 112.1. En mesurant le diamètre de son champ circulaire, Monsieur Kabulu a commis

une erreur de 0,02 m. Sachant qu'il a obtenu un diamètre de 15 m estime l'erreur qu'il a commise dans la détermination de l'aire de son champ.

Résolution

Posons x la mesure du diamètre du champ. L'erreur commise sur le diamètre est dx . L'aire du champ est donnée par la formule $S = \frac{\pi x^2}{4}$.

L'erreur commise sur l'aire sera alors $dS = \frac{\pi x}{2} dx$.

Ainsi, pour $x = 15 \text{ m}$ et $dx = 0,02 \text{ m}$ nous obtenons :

$$dS = \frac{\pi \cdot 15}{2} \cdot 0,02 \text{ m}^2$$

ER 113.2. Dans la détermination du volume d'un cube de 7 dm d'arête, Mademoiselle

Samuella Yayi a commis une erreur de 0,03 dm³. Quelle erreur a-t-elle alors commise dans la mesure de l'arête ?

Résolution

Posons x la mesure de l'arête du cube et V son volume.

Nous avons alors $x = 7 \text{ dm}$ et $dV = 0,03 \text{ dm}^3$. Nous déterminons dx à partir de

la formule ($V = x^3$) $\Rightarrow$ ($dV = 3x^2 dx$).

Ainsi, ($0,03 = 3 \cdot 49 dx$) $\Rightarrow$ ($0,03/147 = dx$)
 $\Rightarrow$ ($dx = 0,000 02$)

L'erreur commise sur l'arête est donc 0,000 02 dm.

Exercices

N° 355. Calcule Δy et Δx pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 4$ et $dx = 0,41$

b. $g(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = -2$ et $\Delta x = -0,5$

N° 356. Calcule de façon approximative les nombres suivants en utilisant la différentielle :

a. $\sqrt[5]{31,5}$

b. $\ln 1,1$

c. $(1,98)^8$

N° 357. Sous l'effet de la chaleur, le rayon d'une plaque circulaire métallique croît de 10cm à $100,5\text{cm}$. Calcule la valeur en utilisant sa différentielle, la valeur approximative de l'aire A .

N° 358. En mesurant le diamètre d'une balle de tennis à l'aide d'un calibre à coulisse, dont la précision est $\pm 0,050\text{cm}$, on obtient $6,5\text{cm}$. A l'aide de la différentielle,

a. Détermine approximativement l'erreur absolue E_a de la mesure du volume V de la balle.

b. Détermine approximativement la précision du calibre à coulisse pour obtenir une erreur relative de 1%.

N° 359. Quelle doit être la précision dans la mesure des arêtes d'un cube pour que le volume obtenu soit $125 \pm 3\text{cm}^3$?

N° 360. Calcule $\frac{dy}{dx}$ pour les fonctions suivantes :

a. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b. $y = \log_3 x^3 + 3x^4$

c. $y = e^{\cos x} \cdot \ln \sec x$

d. $y = \sin(\ln x) - e^{\ln x}$

e. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

f. $y = \ln(\ln x)$

Calcule $\frac{dy}{dx}$ si :

a. $x^{\sin y} = \ln(x^2 + 1)$ b. $y = x^{2x} + (3x + 2)^{5x}$ c. $y = x^{\sin x} (\cos x)^x$

N° 361. Utilise la dérivation logarithmique pour calculer $\frac{dy}{dx}$ si :

a. $y = \frac{10^{x^2} \cos 3x}{\sqrt{x}}$

b. $y = (\ln x)^{\ln x}$

c. $1 - x = y^y$

d. $y = \sqrt[5]{\frac{(1-x^4)e^x}{(5x^2-2x+1)}}$

e. $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{x-1}$

f. $y = (\sin x^2)^{\cos 3x}$

- N° 362. On fait accroître l'arête d'un cube de 8 centimètres à 8,01 centimètres.
- Calcule dV , l'augmentation approximative du volume, et ΔV , l'augmentation réelle du volume de ce cube.
 - Calcule dA , l'augmentation approximative de l'aire des faces du cube, et ΔA , l'augmentation réelle de l'aire des faces.
- N° 363. La longueur d'un champ rectangulaire vaut le triple de sa largeur. Cette largeur, mesurée avec une précision de $\pm 0,05$ metre donne 12,4 metres.
- Calcule :
- l'erreur absolue E_a de la mesure de l'aire A du champ;
 - l'erreur relative E_r de mesure du champ.
- N° 364. En mesurant le coté d'un carré à l'aide d'un instrument dont la précision est de $\pm 0,3cm$, on obtient 20cm. Calcule :
- l'erreur absolue E_a de la mesure de l'aire A
 - l'erreur relative E_r de la mesure de l'aire A
- N° 365. Trouve la différentielle de chacune des fonctions suivantes :
- $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 1$
 - $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$
 - $y = \ln^3(x^2 + 3x + 4)$
 - $y = 3 \cos x$
 - $y = \sin^3(x^3 - 1)^2$
 - $y = 3^{2x-5}$
 - $y = \sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}$
 - $y = \log_3 \sin x$
 - $y = \ln^2 x$
 - $y = \frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$
 - $y = \sin(x^{\cos x})$
- N° 366. Partant des expressions ci-dessous, trouve dy en fonction de x , y et dx .
- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) $x^2 + 3xy + 4y^2 = 5$ | d) $x - y = e^{x+y}$ | g) $\sin(2x-5y) = \cos(2x-5y)$ |
| b) $e^{x+y} = e^{x-y}$ | e) $xy - e^x \cdot \sin y = e^2$ | h) $x^3 + 3xy + 2y^3 = 10$ |
| c) $\ln(3x + 2y) = \ln(3x-2y)$ | f) $xy = \text{Arc tan} \frac{y}{x}$ | i) $\sin(3x - 4y) = \sin(3x + 4y)$ |
- N° 367. Dans la fabrication d'une boîte cubique de 6 cm d'arête, Monsieur Owandji a commis une erreur de $0,02 \text{ cm}^3$ dans le calcul du volume. Estime l'erreur commise sur l'arête ainsi que sur l'aire de ce cube.
- N° 368. Dans la mesure du rayon d'une sphère, on a commis une erreur de 10^{-3} cm . Sachant que le diamètre de la sphère mesure 15 cm. Quelle est l'erreur commise dans la mesure du volume de la sphère ?

IV.6. DIFFERENTIELLES SUCCESSIVES

Comme dans les dérivées, on définit les différentielles successives de la manière suivante :

$dy = f'(x)dx$: différentielle première

$d^2y = f''(x)dx^2$: différentielle seconde

...

$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$: différentielle d'ordre n

Ainsi, on a les dérivées suivantes :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) \quad ; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

Exercices résolus

ER 114.1. Trouve la différentielle troisième de $y = x^5 - 2x^3 + 3x - 5$ et en déduis $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

Résolution

$$y = x^5 - 2x^3 + 3x - 5$$

$$dy = (5x^4 - 6x^2 + 3) dx \quad ; \quad d^2 y = (20x^3 - 12x) dx^2 \quad ; \quad d^3 y = (60x^2 - 12) dx^3$$

$$\text{Ainsi, } \frac{d^3 y}{dx^3} = 60x^2 - 12.$$

ER 115.2. Utilise les différentielles pour trouver la valeur approchée de :

a) $\sqrt[3]{124}$ b) $\sin 60^\circ 1'$

Résolution

a) Posons $y = x^{\frac{1}{3}}$; $dy = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} dx$. Prenons $x = 125 = 5^3$ et $dx = -1$.

$$\text{Ainsi, } dy = \frac{1}{3(125)^{\frac{2}{3}}} (-1) = \frac{-1}{75} \quad \text{ou} \quad dy = -0,013 \, 3$$

$$\begin{aligned} \text{La valeur approchée } (y + dy) &\Rightarrow (y = 5 - 0,013 \, 3) \\ &\Rightarrow (y = 4,986 \, 7) \end{aligned}$$

b) Pour $x = 60^\circ$ et $dx = 1' = 0,0003 \text{ rad}$

$$\begin{aligned} y &= \sin x & dy &= \cos x \, dx \\ &= \sin 60^\circ & &= \frac{1}{2} (0,000 \, 3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & &= 0,000 \, 15 \\ &= 0,866 \, 03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, la valeur approchée } \sin 60^\circ 1' &= y + dy \\ &= 0,866 \, 03 + 0,000 \, 15 \\ &= 0,866 \, 18 \end{aligned}$$

ER 116.3. En utilisant la notion de différentielle, calcule la dérivée de la fonction définie par :

a) $y^3 = x^3 + 3x + 1$ b) $\cos y = \sin^2 x$

Résolution

a) $3y^2 dy = (3x^2 + 3) dx$
 $y^2 dy = (x^2 + 1) dx$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{y^2}$

$$\left| \begin{aligned} \text{b) } -\sin y \, dy &= 2 \sin x \cdot \cos x \, dx \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{\sin y} \\ \text{D'où : } y' &= -\frac{2 \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}}$$

D'où : $y' = \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x + 1)^2}}$

IV.7. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 369. Trouve la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

a) $y = \sqrt{1 + x^2}$	Rép. : $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
b) $y = (e^x + e^{-x})^2$	Rép. : $dy = 2(e^{2x} - e^{-2x}) dx$
c) $y = e^x \ln x$	Rép. : $dy = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx$
d) $y = \tan x + \sec x$	Rép. : $dy = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$

N° 370. A partir des expressions ci-dessous, exprime dy en fonction de x , y et dx .

a) $3x^2 + 2xy + 4y^2 - 5x + 2y = 1$	Rép. : $dy = \frac{-6x - 2y + 5}{2x + 8y + 2} dx$
b) $e^{2x - 3y} = 2x + 3y$	Rép. : $dy = \frac{2(e^{2x - 3y} - 1)}{3(1 + e^{2x - 3y})} dx$

N° 371. Trouve une valeur approchée de l'erreur commise sur l'aire A et le volume V d'un cube de 7 cm d'arête sachant qu'une erreur de 0,03 cm a pu être faite dans la mesure de cette arête.

Rép. : $dA = 2,52 \text{ cm}^2$ $dV = 4,41 \text{ cm}^3$

N° 372. La mesure approchée du diamètre d'un cercle est 4,3 cm ; une barre supérieure de l'erreur étant égale à 0,02 cm. Détermine l'erreur commise sur l'aire du signe enfermé par ce cercle.

Rép. : $dA = 0,135 \text{ cm}^2$

N° 373. On donne $\ln y = \frac{1}{\ln x}$. Détermine $\frac{dy}{dx}$.

1. $-\frac{y}{x} \ln^2 x$ 2. $\frac{x}{y} \ln x$ 3. $-\frac{x}{y} \ln^2 x$ 4. $\frac{y \ln x}{x \ln y}$ 5. $-\frac{y}{x} \ln^2 y$

N° 374. On donne $y = e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{dy}{dx}$ vaut :

1. $\frac{y}{x-y}$ 2. $\frac{y}{1-y^2}$ 3. $\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{x-y^2}$ 4. $\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$ 5. $\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{1-e^{-\frac{x}{y}}}$

N° 375. On donne $y = x^{2x}$, $\frac{dy}{dx}$ vaut :

1. $\frac{2x^{2x}}{x}$ 2. $2x \ln x$ 3. $2 - x^{2x}$ 4. $x^{2x} (2 \ln x + 2)$ 5. $\frac{x^{2x}}{\ln x}$

N° 376. Soit la fonction réelle de deux variables x et y : $2x^4 y^{\frac{7}{2}} - 5x^3 y^4 = 5$.

Alors $\frac{dy}{dx}$ vaut :

1. $\frac{x(3\sqrt{y}-2x)}{y(7x-13\sqrt{y})}$
2. $\frac{y(15\sqrt{y}-8x)}{x(7x-20\sqrt{y})}$
3. $\frac{x(3\sqrt{y}+12x)}{y(5x-13\sqrt{y})}$
4. $\frac{x(7\sqrt{y}-2x)}{y(3x+13\sqrt{y})}$
5. $\frac{y(3\sqrt{y}-20x)}{x(7x-8\sqrt{y})}$

N° 377. Soit la fonction : $\cos(\theta\varphi^2) = \varphi$. Alors $\frac{d\varphi}{d\theta}$ vaut :

1. $\frac{-\varphi^2 \sin(\theta\varphi^2)}{1+2\theta\varphi \sin(\theta\varphi^2)}$
2. $\frac{-\theta^2 \sin(\theta\varphi^2)}{1+2\theta\varphi \cos(\theta\varphi^2)}$
3. $\frac{-2\varphi^2 \sin(\theta\varphi^2)}{1-2\theta\varphi \sin(\theta\varphi^2)}$
4. $\frac{-\theta^2 \cos(\theta\varphi^2)}{1+2\theta\varphi \sin(\theta\varphi^2)}$
5. $\frac{\varphi^2 \sin(\theta\varphi^2)}{3+2\theta\varphi \sin(\theta\varphi^2)}$

N° 378. Si $\sin(x^2 + y^2) = 2y + 5x$, alors $\frac{dy}{dx}$, au point $(0, 0)$ vaut :

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{-3}{4}$
3. $\frac{4}{5}$
4. $\frac{2}{5}$
5. $\frac{-5}{2}$

N° 379. Une fonction implicite de deux variables réelles x et y est telle que :

$$\ln y - x^2 \ln x = 0$$

$\frac{dy}{dx}$ vaut :

1. $(1 + 2 \ln x)xy$
2. $y(1 + 2 \ln x)x^{x^2-1}$
3. $(x + \ln x)xy$
4. $(1 + 2 \ln x)x$
5. $x \ln \frac{y}{x^2}$

N° 380. Une fonction implicite de deux variables réelles x et y est telle que :

$$3x \ln y - \ln(x + x) = 0$$

$\frac{dy}{dx}$ au point $A(1, e)$ vaut :

1. $\frac{1}{e}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{e}{3}$
4. $-\frac{5}{6}$
5. -30

N° 381. Une fonction implicite de deux variables réelles x et y est telle que :

$$\ln \frac{y}{x} = \arcsin \sqrt{x}. \quad y' \text{ vaut :}$$

1. $\frac{(x+2\sqrt{x-x^2})y}{2x\sqrt{1-x^2}}$
2. $xy + 2y\sqrt{x-x^2}$
3. $\frac{xy-2y\sqrt{x-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$
4. $\frac{(x+2\sqrt{x-x^2})y}{2x\sqrt{1+x^2}}$
5. $\frac{xy-2y\sqrt{x+x^2}}{x^2}$

N° 382. On fait accroître l'arrête d'un cube de **8cm** à **8;01 cm**.

a. l'augmentation approximative dV du volume de ce cube vaut

1. 1,01 cm^3
2. 1,92 cm^3
3. 1,9201 cm^3
4. 1,9224 cm^3
5. 0,9606 cm^3

b. l'augmentation exacte ΔV du volume de ce cube vaut

1. 0,96 cm^3
2. 1,92 cm^3
3. 1,9201 cm^3
4. 1,9224 cm^3
5. 0,9606 cm^3

c. l'augmentation approximative dA de l'aire des faces de ce cube vaut

1. 1,01 cm^2
2. 1,92 cm^2
3. 0,96 cm^2
4. 1,9224 cm^2
5. 0,9606 cm^2

d. l'augmentation exacte ΔA de l'aire des faces de ce cube vaut

1. 1,01 cm^2
2. 1,92 cm^2
3. 1,96 cm^2
4. 1,9224 cm^2
5. 0,9606 cm^2

N° 383. En mesurant la hauteur d'un cylindre droit, fermé aux extrémités, à l'aide d'un instrument de mesure dont la précision est de $\pm 0,02 \text{ cm}$, on obtient $14,3 \text{ cm}$. Sachant que la hauteur de ce cylindre égale son diamètre,

a. Le calcul approximatif, à l'aide de la différentielle, de l'erreur absolue E_a de la mesure de l'aire A du cylindre donne :

1. $0,49 \text{ cm}^2$ 2. $0,0028 \text{ cm}^2$ 3. $0,49 \text{ cm}^2$ 4. $0,752 \text{ cm}^2$ 5. $0,572 \text{ cm}^2$

b. Le calcul approximatif, à l'aide de la différentielle, de l'erreur relative E_r de la mesure de l'aire A du cylindre donne :

1. $0,49 \text{ cm}^2$ 2. $0,0028 \text{ cm}^2$ 3. $0,49 \text{ cm}^2$ 4. $0,752 \text{ cm}^2$ 5. $0,572 \text{ cm}^2$

N° 384. Si $\ln(x^2 + y^3) = ye^x$, alors y' vaut :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\frac{2x - ye^x(x^2 + y^3)}{3y^2 - e^x(x^2 + y^3)}$ | 3. $\frac{2x - (x^2 + y^3)\ln(x^2 + y^3)}{3y^2 - e^x(x^2 + y^3)}$ | 5. $\frac{2x - (x^2 + y^3)\ln(x^2 + y^3)}{e^x(x^2 + y^3) - 3y^2}$ |
| 2. $\frac{2x - ye^x(x^2 + y^3)}{3y^2 + e^x(x^2 + y^3)}$ | 4. $\frac{2x - ye^x(x^2 + y^3)}{3y^2 - e^x(x^2 + y^3)}$ | |

CHAPITRE V : INTEGRALES

A. OBJECTIFS

1. Définir la primitive et l'intégrale indéfinie d'une fonction ;
2. Interpréter géométriquement l'intégrale indéfinie ;
3. Déterminer les formules des dérivées et celles des primitives immédiates ou usuelles d'une fonction ;
4. Définir l'intégrale définie et donner sa signification géométrique ;
5. Donner les différentes méthodes d'intégration ;
6. Evaluer l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie d'une fonction ;
7. Utiliser les intégrales définies pour calculer l'aire d'une surface et le volume d'un corps de révolution ;
8. Résoudre les équations différentielles ordinaires simples.
9. Enumérer quelques applications des intégrales dans les autres domaines : administration, physique, biologie, écologie, économie, ...

B. ACTIVITES

1. Calcule la différentielle de chacune des fonctions ci-après :

$$\text{a) } f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \quad \text{b) } f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

2. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$.

Vérifie que g est la dérivée de f . Trouve d'autres fonctions ayant g pour dérivée.

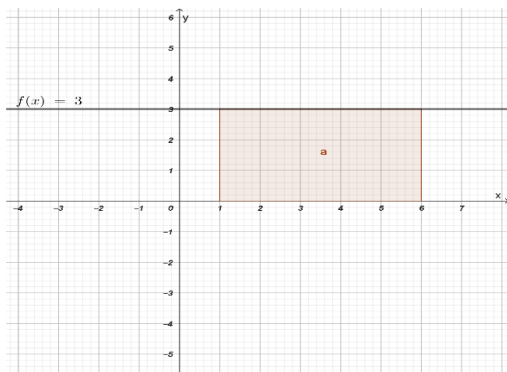
3. Donne les fonctions définies sur un intervalle dont la dérivée est toujours nulle sur cet intervalle.

4. F et G sont deux fonctions de dérivées respectives f et g sur un intervalle I . Détermine les dérivées des fonctions $(F + G)(x)$, $F(x) + k$ et $G(x) + k$ où k est une constante réelle.

5. A l'aide des formules des dérivées, trouve une fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 5x^4 & \text{sur } \mathbb{R} & \text{b) } f(x) = 5 & \text{sur } \mathbb{R} & \text{c) } f(x) = 3x^2 - 2x + 1 & \text{sur } \mathbb{R} \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{sur }]0, +\infty[& \text{e) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{sur }]0, +\infty[& \text{f) } f(x) = 6(2x - 1)^2 & \text{sur } \mathbb{R} \end{array}$$

6. La droite d d'équation $y = 3$ est la représentation géométrique d'une fonction f dans le repère orthonormé ci – dessous.

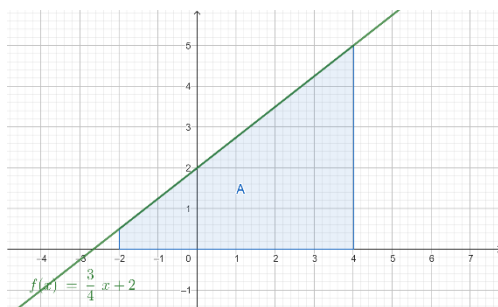


a. Calcule l'aire du rectangle hachuré.

b. Donne une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

c. Calcule $E = F(6) - F(1)$; puis compare la valeur de E avec celle de l'aire du rectangle trouvée au n° a).

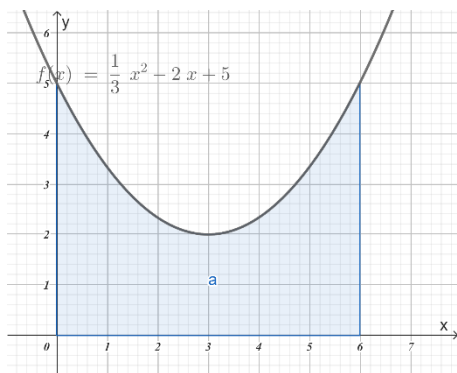
7. La droite d d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente une fonction f dans le repère orthonormé.



a. Calcule l'aire du trapèze hachuré.

b. Détermine une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calcule $F(4) - F(-2)$.

c. Compare le résultat trouvé avec l'aire du trapèze déterminé au n° a).



8. Le gouverneur de la ville de Kinshasa décide de construire, à la frontière avec la province du Kongo Central sur la route de Matadi, un panneau à deux faces sur lequel l'une des faces affiche « BONJOUR KINSHASA » et l'autre « AU REVOIR KINSHASA ». Son architecte lui propose le profil suivant dont la partie hachurée est modélisée par la courbe de la fonction f , définie dans $[0, 6]$ par $f(x) =$

$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$, tracée dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

- Montre que $F'(x) = f(x)$ où $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 5x + 10$
- Calcule la valeur numérique de l'expression $\mathcal{A} = F(6) - F(0)$
- L'aire de la surface d'une figure comprise entre la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$, l'axe des x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Le professeur Tshikudi Mbaule de Mathématiques de la 4^{ème} des Humanités scientifiques demande à ses élèves de calculer l'aire de la partie hachurée du schéma ci-dessus du panneau dans le but d'évaluer le coût des travaux.

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

V.1. INTEGRALE INDEFINIE

V.1.1. NOTIONS

Dans le chapitre précédent, il était question de calculer les différentielles des fonctions. Nous amorçons maintenant l'étude du processus inverse : déterminer une fonction inconnue dont la dérivée est donnée.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x$. (1)

Trouvons une fonction dont la dérivée est f .

– La pratique de la dérivation suggère les fonctions suivantes :

$$x^2, x^2 + 1, x^2 - 1, x^2 + 2, x^2 - 2, \dots, x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

– L'opération qui permet de passer de la fonction (1) à l'ensemble des fonctions (2) est *l'opération réciproque de la dérivation*. Elle est appelée « **intégration** ».

– Chacune des fonctions de l'ensemble (2) est appelée **primitive de f** .

– L'ensemble des fonctions (2) est appelé « **intégrale indéfinie de f** ».

V.1.2. DEFINITIONS

Soit f une fonction continue sur une partie I de $\mathbb{R}$.

a) Une primitive de f définie sur I est toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

b) Une intégrale indéfinie de f sur I est l'ensemble des primitives F de f sur I .

On note : $F(x) = \int f(x)dx$

$\int f(x)dx$ se lit : « intégrale de $f(x)$, dx ».

$$[\int f(x)dx = F(x) + C] \Leftrightarrow [(F(x) + C)' = f(x)] \quad (C \in \mathbb{R})$$

$\int$ est le symbole d'intégration ou le signe somme.

dx indique que x est la variable d'intégration.

$f(x)$ est appelée « **intégrande** »

Notons que l'écriture $\int f(x)dx$ indique que l'on cherche une fonction $F(x)$ dont la différentielle par rapport à la variable x est $f(x)$

Conséquence de la définition

La dérivée de l'intégrale indéfinie d'une fonction f est égale à la fonction f .

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x)dx \right] = f(x)$$

V.1.3. PROPRIETES

P_1 . Si F est une primitive de f sur I alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ l'est aussi.

P_2 . Une fonction continue sur $I = [a, b]$ possède une infinité des primitives.

P_3 . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe C tel que pour tout $x \in I$, $F(x) - G(x) = C$ ($C \in \mathbb{R}$)

P_4 . Soit f et g deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$.

$$\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

P_5 . Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

P_6 . L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une fonction f est égale à la fonction f à une constante additive C près.

$$\int df(x) = f(x) + C$$

Remarques

- Une primitive F d'une fonction f est une fonction dérivable.
- Intégrer une fonction f signifie rechercher une ou plusieurs fonctions dont la dérivée est f .
- Une variable d'intégration peut avoir une forme simple $x, t, u, \dots$ ou une forme compliquée $x^2, \cos x, \ln x, \dots$

Ainsi, l'intégrale indéfinie d'une fonction f peut être notée:

$$\int f(x)dx, \int f(t)dt, \int f(\cos x)d\cos x, \int f(t)dt, \int f(u)du, \int f(\ln x)d\ln x$$

– Si $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des fonctions continues sur I alors :

$$\int (f_1 + f_2 + \dots + f_n)(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

On écrit aussi :

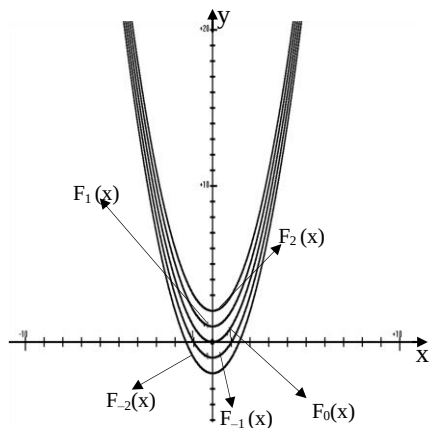
$$\int \left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x)dx$$

V.1.4. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE L'INTEGRALE INDEFINIE

Soit la fonction $f : x \rightarrow f(x) = 2x$.

Son intégrale indéfinie est $F(x) = x^2 + C$ qu'on peut aussi noter

$$F_C(x) = x^2 + C \quad (1)$$



On a pour :

$$C = 0, F_0(x) = x^2; C = 2, F_2(x) = x^2 + 2;$$

$$C = 1, F_1(x) = x^2 + 1, C = -2, F_{-2}(x) = x^2 - 2$$

$$C = -1, F_{-1}(x) = x^2 - 1, C = \sqrt{3}, F_{\sqrt{3}}(x) = x^2 + \sqrt{3}$$

Ainsi, l'égalité (1) est l'équation d'une famille des paraboles de paramètre C .

– Chacune de ces paraboles est appelée **courbe intégrale**.

$$\text{– Comme } F'_0(x) = F'_1(x) = \dots = F'_C(x) = 2x$$

($C \in \mathbb{R}$) on a, pour tout réel x_0 ,

$$F'_0(x_0) = F'_1(x_0) = \dots = F'_C(x_0) = 2x_0.$$

Ce qui signifie que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles.

En général, f étant une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$,

- * L'intégrale indéfinie de f sur I est une famille de courbes planes appelée courbes intégrales de f .
- * Les tangentes au point d'abscisse x_0 à chacune des courbes intégrales sont parallèles.
- * Si x_0 est fixé alors il existe une et une seule courbe intégrale passant par le point d'abscisse x_0 .

V.1.5. INTEGRALES IMMEDIATES

Les définitions, la pratique des dérivées et des différentielles conduisent aux formules suivantes :

$$1 \quad \int dx = x + C$$

$$2 \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$3 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$4 \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$5 \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$6 \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$7 \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$8 \quad \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$9 \quad \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$10 \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx \\ = \tan x + C$$

$$11 \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx \\ = -\cot x + C$$

$$12 \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\ = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

$$13 \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \\ = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$14 \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \tan x + C$$

$$15 \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \cot x + C$$

$$16 \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$17 \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$$

$$18 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x + C$$

$$19 \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \cos x + C$$

$$20 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

$$1' \quad \int a dx = ax + C \quad (a \in \mathbf{R})$$

$$2' \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$2'' \quad \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a(-n+1)(ax+b)^{n-1}} + C \\ (n \neq -1)$$

$$3' \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C \quad (n \neq -1)$$

$$4' \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$5' \quad \int a^{rx+b} dx = \frac{1}{r} \frac{a^{rx+b}}{\ln a} + C$$

$$6' \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$7' \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$8' \quad \int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + C$$

$$9' \quad \int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + C$$

$$10' \quad \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$$

$$11' \quad \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$$

$$12' \quad \int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax+b}{2} \right| + C \\ = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cosec}(ax+b) - \cot(ax+b)| + C$$

$$13' \quad \int \frac{dx}{\cos(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left(\frac{ax+b}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \\ = \frac{1}{a} \ln |\sec(ax+b) + \tan(ax+b)| + C$$

$$14' \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc} \tan \frac{x}{a} + C$$

$$15' \quad \int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc} \cot \frac{x}{a} + C$$

$$16' \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$17' \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$18' \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

$$19' \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arc} \cos \frac{x}{a} + C$$

$$20' \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

$$21 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \qquad 21' \quad \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

$$22 \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$23 \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} + C$$

$$24 \quad \int f'(x)[f(x)]^r dx = \frac{1}{r+1} [f(x)]^{r+1} + C \quad (\text{avec } r \neq -1)$$

$$25 \quad \left[\int f(x) dx = F(x) + C \right] \Rightarrow \left[\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right]$$

Dans bien des cas, une simple transformation de l'écriture de la fonction donne la primitive.

Exercices résolus

ER 117.1. Calcule:

$$a) \int (x^3 + 2x + 7) dx \qquad c) \int \sqrt[3]{t} \sqrt{t^3} dt \qquad e) \int (2t + 3)^7 dt$$

$$b) \int \frac{1}{(3t+4)^5} dt \qquad d) \int \frac{1}{(5-2x)^3} dx \qquad f) \int \frac{1}{6-5t} dt$$

Résolution

$$\begin{aligned} a) \int (x^3 + 2x + 7) dx \\ &= \int x^3 dx + 2 \int x dx + \int 7 dx \\ &= \frac{x^4}{4} + x^2 + 7x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int \frac{1}{(3t+4)^5} dt &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(-4)} \frac{1}{(3t+4)^4} + C \\ &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(3t+4)^4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \int \sqrt[3]{t} \sqrt{t^3} dt &= \int t^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int t^{\frac{11}{6}} dt \\ &= \frac{6}{17} t^{\frac{17}{6}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \int \frac{1}{(5-2x)^3} dx &= \int \frac{1}{(-2x+5)^3} dx \\ &= -\frac{1}{2(-2)(-2x+5)^2} + C \\ &= \frac{1}{4(5-2x)^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \int (2t+3)^7 dt &= \frac{1}{2} \frac{(2t+3)^8}{8} + C \\ &= \frac{1}{16} (2t+3)^8 + C \end{aligned}$$

$$f) \int \frac{1}{6-5t} dt = -\frac{1}{5} \ln |6-5t| + C$$

ER 118.2. Calcule chacune des intégrales suivantes

$$\begin{array}{llll} a) \int e^{5x+2} dx & c) \int 2^{-3x+2} dx & e) \int \cos(5t+3) dt & g) \int \cot \frac{1}{2} x dx \\ b) \int (\cos t + \sin t)^2 dt & d) \int \sin^2 t dt & f) \int \left(\frac{1}{x} - \cos 2x \right) dx & h) \int \tan 2x dx \end{array}$$

Résolution

$$a) \int e^{5x+2} dx = \frac{1}{5} e^{5x+2} + C$$

$$\begin{aligned} b) \int (\cos t + \sin t)^2 dt \\ = \int (\cos^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t) dt \\ = \int (1 + \sin 2t) dt \\ = t - \frac{1}{2} \cos 2t + C \end{aligned}$$

$$c) \int 2^{-3x+2} dx = -\frac{2^{-3x+2}}{3 \ln 2} + C$$

$$\begin{aligned} d) \int \sin^2 t \, dt &= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C \end{aligned}$$

$$e) \int \cos(5t + 3) dt = \frac{1}{5} \sin(5t + 3) + C$$

$$g) \int \cot \frac{1}{2} x \, dx = 2 \ln \left| \sin \frac{1}{2} x \right| + C$$

$$h) \int \tan 2x \, dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$$

ER 119.3. Calcule les primitives de chaque fonction :

$$a) f(t) = \frac{1}{25 + 36t^2} \quad c) f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 5} \quad e) f(x) = (\tan x + \cot x)^2$$

$$b) f(x) = \frac{1}{16 - 25x^2} \quad d) f(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 7} \quad f) \int \left(\frac{4x^3 - 5x + 1}{x^2} \right) dx$$

Résolution

$$\begin{aligned} a) \int \frac{1}{25 + 36t^2} dt &= \frac{1}{6} \int \frac{6}{5^2 + (6t)^2} dt \\ &= \frac{1}{30} \text{Arc tan } \frac{6t}{5} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int \frac{1}{16 - 25x^2} dx &= \int \frac{1}{4^2 - (5x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \ln \left| \frac{4 + 5x}{4 - 5x} \right| + C \\ &= \frac{1}{40} \ln \left| \frac{4 + 5x}{4 - 5x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \int (\tan x + \cot x)^2 dx \\ = \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\ = \int (\tan^2 x + 1 + 1 + \cot^2 x) dx \\ = \int (1 + \tan^2 x) dx + \int (1 + \cot^2 x) dx \\ = \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{2}{4x^2 + 4x + 10} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{(2x+1)^2 + 9} dx \\ &= \frac{1}{3} \text{Arc tan } \frac{2x+1}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \int \frac{1}{x^2 + 8x + 7} dx &= \int \frac{1}{(x+4)^2 - 9} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+4)-3}{(x+4)+3} \right| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x+7} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \int \left(\frac{4x^3 - 5x + 1}{x^2} \right) dx \\ = \int \left(\frac{4x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ = 4 \int x \, dx - 5 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx \\ = 2x^2 - 5 \ln |x| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

ER 120.4. Calcule chacune des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} & \text{c)} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx & \text{e)} \int (x^2 + x + 1)^5 (2x+1) dx \\ \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x-5}} dx & \text{d)} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} & \text{f)} \int \frac{dt}{\sqrt{4t+t^2}} \end{array}$$

Résolution

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4} \text{Arc sin } \frac{4x}{3} + C & \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2} \text{Arc sin } \frac{2x-3}{2} + C \\ \text{c)} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln |\sin x + \cos x| + C & \text{e)} \text{ Comme } 2x+1 = d(x^2+x+1), \\ & \int (x^2+x+1)^5 (2x+1) dx = \frac{1}{6} (x^2+x+1)^6 + C \\ \text{d)} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4^2}} = \ln(t + \sqrt{t^2+16}) + C & \text{f)} \int \frac{dt}{\sqrt{4t+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-4}} = \ln \left[t+2 + \sqrt{(t+2)^2-4} \right] + C \\ & = \ln(t+2 + \sqrt{4t+t^2}) + C \end{array}$$

ER 121.5. Calcule par rapport à la variable donnée :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \cos x \, d(\cos x) & \text{c)} \int (x^2-1) \, d(x^2+1) & \text{e)} \int \ln x \, d(\ln x) & \text{g)} \int \tan^2 x \, d(\cos x) \\ \text{b)} \int x \, d\left(\frac{x}{2}\right) & \text{d)} \int \cos^2 x \, d(\sin x) & \text{f)} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} d(e^{-x}) & \text{h)} \int \frac{1+\ln x}{\ln^2 x} d(\ln x) \end{array}$$

Résolution

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \cos x \, d(\cos x) = \frac{1}{2} \cos^2 x + C & \text{e)} \int \ln x \, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \\ \text{b)} \int x \, d\left(\frac{x}{2}\right) = \int 2 \cdot \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + C = \frac{x^2}{4} + C & \text{f)} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} d(e^{-x}) = \int (e^x - e^{-x}) e^{-x} d(e^{-x}) = \int (1 - e^{-2x}) d(e^{-x}) = e^{-x} - \frac{(e^{-x})^3}{3} + C \\ \text{c)} \int (x^2-1) d(x^2+1) = \int [(x^2+1) - 2] d(x^2+1) = \int (x^2+1) d(x^2+1) - 2 \int d(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^2}{2} - 2(x^2+1) + C = \frac{(x^2+1)(x^2-3)}{2} + C & \text{g)} \int \tan^2 x \, d(\cos x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) d(\cos x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) - \int d(\cos x) = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C \\ \text{d)} \int \cos^2 x \, d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int d(\sin x) - \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C & \text{h)} \int \frac{1+\ln x}{\ln^2 x} d(\ln x) = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} + \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = -\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) + C \end{array}$$

ER 122.6. Détermine la primitive $F(t)$ de $f(t)$ qui vaut α pour la valeur de t donnée

$$\text{a) } f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{t^2}, \quad t = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \qquad \text{b) } f(t) = \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}, \quad t = 4, \quad \alpha = \frac{52}{3}$$

Résolution

$$\text{a) } F(t) = \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{t} + C$$

$$F(t) = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{t} + C \quad \text{or } t = 2 \quad \text{et } \alpha = \frac{1}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[F(2) = \frac{1}{2} \right] &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(C = -\frac{4}{3} \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{La primitive cherchée est } F(t) = \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{1}{t} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}} dt &= \int \frac{(1-t)(1+t)}{1-\sqrt{t}} dt \\ &= \int \frac{(1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})(1+t)}{1-\sqrt{t}} dt \\ &= t + \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\text{Soit } F(t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= t + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^2\sqrt{t}}{5} + C$$

$$\begin{aligned} \left[F(4) = \frac{52}{3} \right] &\Leftrightarrow \left(4 + 8 + \frac{16}{3} + \frac{64}{5} + C = \frac{52}{3} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(C = \frac{-64}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\text{La primitive cherchée est } F(t) = t + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^2\sqrt{t}}{5} - \frac{64}{5}$$

ER 123.7. Trouve l'équation de la courbe définie par $y = f(x)$:

- Si $f''(x) = 3$, $f'(2) = 5$ et la courbe passe par le point $P(-2, 3)$
- Passant par le point $Q(3, -2)$ et dont la pente de la tangente en tout point $P(x, y)$ est donnée par $2x^2 + 3$.
- Passant par le point $P(1, 6)$ et dont la tangente en ce point de la courbe est parallèle à la droite $d \equiv y = 3x + 1$ et telle que $y'' = -\frac{1}{x^2}$.

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a. Soit } \mathcal{C} \equiv y = f(x). \quad \text{On a } f''(x) = 3 &\Rightarrow f'(x) = \int 3 dx \\ &\Rightarrow f'(x) = 3x + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{Par suite, } f'(2) = 5 \Rightarrow 3 \cdot 2 + C_1 = 5$$

$$\Rightarrow C_1 = -1 \text{ et } f'(x) = 3x - 1$$

$$\text{Il vient alors : } f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x - 1) dx \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} - x + C_2$$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{C}) \equiv y = \frac{3x^2}{2} - x + C_2$$

D'autres part,

$$P(-2; 3) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow 3 = \frac{3(-2)^2}{2} + 2 + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = -5$$

$$\text{D'où, } (\mathcal{C}) \equiv y = \frac{3x^2}{2} - x - 5$$

d. On sait qu'en tout point $P(x, y)$ de la courbe $(\mathcal{C})$, la pente de la tangente est

$$\text{donnée par } y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{aligned} \text{Dès lors, } y' = \frac{dy}{dx} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x^2 + 3) \\ &\Rightarrow dy = (2x^2 + 3)dx \\ &\Rightarrow \int dy = \int (2x^2 + 3)dx \\ &\Rightarrow y = \frac{2x^3}{3} + 3x + C \end{aligned}$$

$$\text{C'est-à-dire : } (\mathcal{C}) \equiv y = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

Par la suite, $Q(3; -2) \in (\mathcal{C})$ montre que les coordonnées de Q vérifient l'équation de la courbe. C'est-à-dire : $-2 = 2 \cdot \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 + C \Rightarrow C = -29$

$$\text{Ainsi, } (\mathcal{C}) \equiv y = \frac{2x^3}{3} + 3x - 29$$

$$\begin{aligned} \text{e. Soit } f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \int -\frac{dx}{x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} + C \quad \text{or } y' = 3 \quad \text{en } P(1; 6) \\ &\Rightarrow \frac{1}{1} + C = 3 \Rightarrow C = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f'(x) &= \frac{1}{x} + 2 \quad \text{et } f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} + 2 \int dx \\ y &= \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1; 6) \in (\mathcal{C}) &\Rightarrow 6 = \ln 1 + 2 + C \\ &\Rightarrow C = 4 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (\mathcal{C}) \equiv y = \ln x + 2x + 4$$

Exercices

N° 385. Détermine l'intégrale indéfinie de chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(2+3x)^3}$$

$$\text{g) } f(t) = \sin t + \cos^4 t$$

$$\text{b) } f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2 \quad \text{e) } f(x) = (1 + e^x)^3 \quad \text{h) } f(t) = \cos^2 t + \cos^2 2t$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{(e^{5x+2})^3 - (2x+5)^4}{(5+2x)^4 (e^{2+5x})^3} \quad \text{f) } f(t) = (\tan 2t + \sec 2t)^2$$

N° 386. Calcule en tenant compte des indications données

$$\text{a) } \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \quad (1 = \cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{\cos^4 x} dx \quad \left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right)$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{1+\cos x} dx \quad (\text{multiplier le numérateur et le dénominateur par } 1 - \cos x)$$

N° 387. Calcule l'intégrale indéfinie de chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(u) = \frac{1}{u^2 - 3u + 7} \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{3 - (x+2)^2} \quad \text{f) } f(t) = \sqrt[5]{\cos t}$$

$$\text{b) } f(u) = \frac{1}{-2u^2 + 4u - 5} \quad \text{e) } f(x) = \frac{1}{4x^2 - 3} \quad \text{i) } f(k) = \frac{e^k}{1 - e^k}$$

$$\text{c) } f(u) = \frac{1}{e^u + 2e^{-u}}$$

N° 388. Quelle est la primitive de $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, qui passe par le point

$$P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\right) ?$$

N° 389. Quelle est la primitive de $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$, qui prend la valeur de $\ln 4$ pour $x = 5$?

N° 390. Quelle est l'équation $y = f(x)$ de la courbe $\mathcal{C}$ qui passe par le point $P(0, 2)$, si $f'(1) = -3$ et $f''(x) = 10$?

N° 391. En tout point $P(x, y)$ d'une courbe $\mathcal{C}$, la tangente s'obtient par $15x^4 - 2$.

Quelle est l'équation cartésienne de cette courbe si elle passe par le point $P(1, 7)$?

N° 392. Une fonction f est telle que $f'(x) = \frac{3}{2} \cos 2x$. Détermine - la si

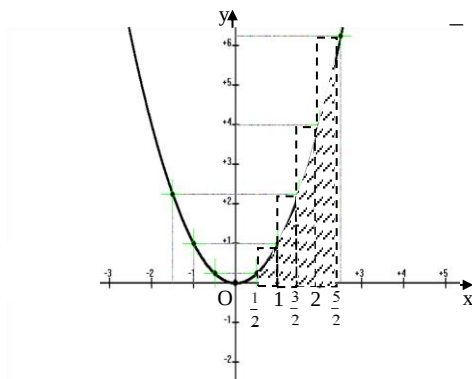
$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{5}{2}.$$

V.2. INTEGRALES DEFINIES

V.2.1. NOTIONS

a) Considérons la fonction $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto f(x) = x^2$.

On se propose de calculer la valeur approchée de l'aire de la surface S limitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{5}{2}$.



– Partageons l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ en quatre intervalles consécutifs de même amplitude : $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et $\left[2, \frac{5}{2}\right]$.

Pour chaque intervalle partiel, construisons deux rectangles de même largeur égale à l'amplitude de l'intervalle et des longueurs respectivement égales aux valeurs de la fonction aux extrémités.

On obtient quatre rectangles supérieurs (dépassant la parabole) et quatre autres rectangles inférieurs (ne dépassant pas la parabole).

En désignant par S_4 la somme des aires des rectangles supérieurs et par s_4 la somme des aires des rectangles inférieurs, on a $s_4 < S < S_4$.

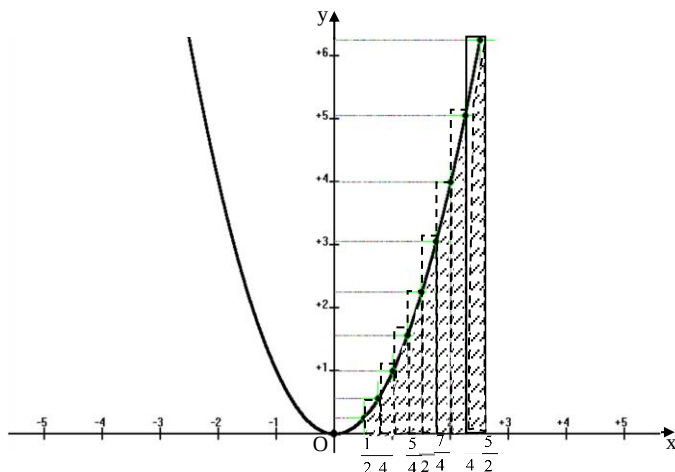
$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6,75$$

$$s_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 3,75$$

– En partageant l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ en huit sous-intervalles de même amplitude :

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right], \left[1, \frac{5}{4}\right], \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right], \left[\frac{7}{4}, 2\right], \left[2, \frac{9}{4}\right] \text{ et } \left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right];$$

la situation précédente se présente comme suit :



$$\begin{aligned}
S_8 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (2)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{9}{64} + \frac{1}{4} + \frac{25}{64} + \frac{9}{16} + \frac{49}{64} + 1 + \frac{81}{64} + \frac{25}{16} \\
&= 5,9219 \dots \\
s_8 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (2)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} + \frac{25}{64} + \frac{9}{16} + \frac{49}{64} + 1 + \frac{81}{64} \\
&= 4,4375
\end{aligned}$$

Nous constatons que lorsque le nombre d'intervalles partiels passe de 4 à 8, on a : $S_4 > S_8$ et $s_4 < s_8$

En augmentant de plus en plus le nombre d'intervalles de subdivision :

- * l'amplitude de chacun de sous – intervalles tend vers 0 ;
- * les sommes des aires de surface des rectangles supérieurs diminuent ;
- * les sommes des aires de surface des rectangles inférieurs augmentent.

b) De manière générale, considérons une fonction f continue et positive dans un intervalle $[a, b]$.

En prenant n points successifs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de l'intervalle, on obtient une subdivision de ce dernier en $n + 1$ sous – intervalles de même amplitude qu'on

note : $\delta \equiv a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & & & x_n & & x_{n+1} & & b
\end{array}$$

Désignons les amplitudes des intervalles partiels par :

$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ tels que

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_{n+1} = \frac{b-a}{n}$$

On a : $S_n = \Delta x_1 f(x_1) + \dots + \Delta x_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta x_i f(x_i)$

$$s_n = \Delta x_1 f(x_0) + \dots + \Delta x_{n+1} f(x_n) = \sum_{j=0}^n \Delta x_j f(x_j)$$

où $f(x_i)$ est la plus grande valeur du i ème intervalle partiel.

$f(x_j)$ est la plus petite valeur du j ème intervalle partiel

On a : $s_n < s < S_n$

Si la plus grande amplitude Δx_n des intervalles partiels tend vers 0 lors qu'on augmente indéfiniment les points de subdivision alors les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot \Delta x_j$$

existent et ne dépendent pas de la subdivision de l'intervalle.

V.2.2. DEFINITIONS

Soit une fonction continue sur $[a, b]$ et $\delta \equiv a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

On appelle :

- Somme de Darboux supérieure relative à f et δ , la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta x_i f(x_i)$
- Somme de Darboux inférieure relative à f et à δ , la somme $s_n = \sum_{j=0}^n \Delta x_j f(x_j)$
- Intégrale définie de f (ou intégrale au sens de Riemann de f) sur $[a, b]$ le nombre réel noté et défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty} s_n$$

$\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale définie de **a** à **b** de $f(x) dx$ »

a et **b** sont les **bornes** de l'intégrale,

a est la **borne inférieure** et **b** la **borne supérieure**.

Remarques

- L'intégrale définie dépend de l'intégrande et des bornes ;
- L'intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration.

C'est ainsi qu'on a par exemple :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

Exercice résolu

Calcule $\int_0^5 x dx$

Résolution

Divisons l'intervalle $0 \leq x \leq 5$ en n sous – intervalles de même longueur

$\Delta x = \dots$. Prenons pour x_k les bornes supérieures des sous intervalles $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, ..., $x_n = n \Delta x$.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x \\ &= (1 + 2 + \dots + n)(\Delta x)^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{5}{n}\right)^2 \\ &= \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int_0^5 x dx = \lim_{+\infty} S_n = \frac{25}{2}$$

V.2.3. THEOREME (FORMULE) DE NEWTON - LEIBNIZ

Si f est une fonction réelle continue sur $I = [a, b]$ et F une primitive de f sur I alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ainsi, le calcul des intégrales définies est ramené à la recherche des primitives.

Exemple

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

V.2.4. PROPRIETES

Soit f et g deux fonctions continues dans $I = [a, b]$.

$$P_1 : \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$P_2 : \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$P_3 : \int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

$$P_4 : \int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$$

$$P_5 : \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (a < c < b)$$

$$P_6 : \text{Si } \forall x \in [a, b] \text{ et } f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

$$P_7 : \text{Si } \forall x \in [a, b] \text{ et } f(x) \leq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

Remarques

Soit f une fonction définie dans $I = [-a, a]$

$$- \text{ Si } f \text{ est paire alors } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

$$- \text{ Si } f \text{ est impaire alors } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

$$- \text{ Si } f \text{ est périodique, de période } p \text{ alors } \int_a^{a+p} f(x) \, dx = \int_0^p f(x) \, dx \quad (\forall x \in \mathbf{R})$$

Exercices résolus

ER 124.1. Calcule

$$\text{a) } \int_2^2 x^2 \, dx$$

$$\text{c) } \int_0^1 3e^x \, dx$$

$$\text{e) } \int_1^4 (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \, dx$$

$$\text{b) } \int_2^4 (1 - x^2) \, dx$$

$$\text{d) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$\text{f) } \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx$$

Résolution

$$\text{a) } \int_2^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^2 = 0$$

$$\text{b) } \forall x \in [2, 4], 1 - x^2 \leq 0, \text{ nous avons :}$$

$$\int_2^4 (1 - x^2) \, dx = [x]_2^4 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 = -\frac{50}{3} \leq 0$$

$$\text{c) } \int_0^1 3e^x \, dx = 3 \int_0^1 e^x \, dx = 3 [e^x]_0^1 = 3(e - 1)$$

$$\text{d) La fonction sinus étant impaire dans } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_1^4 (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \, dx &= \int_1^4 x^2 \, dx + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 + [2\sqrt{x}]_1^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx \\ \forall x \in [-1, 1], 1 - x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{64}{3} - \frac{1}{3} + 4 - 2 \\
 &= \frac{69}{3} \\
 &= 23
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nous avons : } \int_{-1}^1 (1-x^2) dx &= \int_{-1}^1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx \\
 &= [x]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{4}{3} \geq 0
 \end{aligned}$$

ER 125.2. Compare :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 6x \, dx \quad \text{et} \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 6 \sin 6x \, dx & \quad \text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad \text{et} \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
 \text{b) } \int_{\frac{1}{2}}^2 x^2 \, dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \, dx + \int_1^2 x^2 \, dx & \quad \text{e) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \sin 3x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3x \, dx \\
 \text{c) } \int_0^2 x^2 \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^2 (-x) \, dx
 \end{aligned}$$

Résolution

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 6x \, dx &= 6 \left[-\frac{1}{6} \cos 6x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 6 \sin 6x \, dx = -6 \left[-\frac{1}{6} \cos 6x \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= [\cos 6x]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \quad \quad = [\cos 6x]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= 2 \quad \quad \quad = 2 \\
 \text{b) } \int_{\frac{1}{2}}^2 x^2 \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \, dx + \int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\
 &= \frac{21}{8} \quad \quad \quad \text{(i)} \quad \quad \quad = \frac{21}{8} \quad \quad \quad \text{(ii)}
 \end{aligned}$$

D'où les deux intégrales sont égales.

$$\text{c) Soit } f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

Notons que $\forall x \in [0, 2], g(x) \leq f(x)$. Nous avons :

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^2 -x \, dx = -\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = -2$$

$$\text{Ainsi, } [g(x) \leq f(x)] \Leftrightarrow \left[\int_0^2 -x \, dx \leq \int_0^2 x^2 \, dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx &= [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} - \left[\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \quad \quad \quad = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \\
 &= 2 \quad \quad \quad \text{(i)} \quad \quad \quad = 2 \quad \quad \quad \text{(ii)}
 \end{aligned}$$

$$\text{(i) et (ii) montrent que : } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

e) Nous savons que la fonction $\sin 3x$ est périodique, de période $\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Ainsi, } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \sin 3x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}} \sin 3x \, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

ER 126.3. Calculer : $\int_0^1 |1-2x| dx$

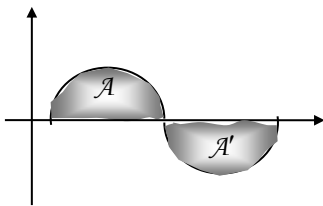
Nous savons que : $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

L'intégrale donnée se décompose en une somme d'intégrales :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = [x - x^2]_0^{\frac{1}{2}} + [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}$$

V.2.5. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE L'INTEGRALE DEFINIE

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$



L'intégrale définie de f sur $[a, b]$ est égale à l'aire A de la surface S délimitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des x et le graphique de f sur $[a, b]$.

Si f est positive sur $[a, b]$, $A = \int_a^b f(x) dx$

Si f est négative sur $[a, b]$, $A' = -\int_a^b f(x) dx$

Exercice résolu

ER 127. Calcule l'aire de la surface limitée par la courbe d'équation $y = \sin x$, l'axe Ox et les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Résolution

Subdivisons l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D'autre part, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\sin x \leq 0$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= -[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \text{ u.s.} \end{aligned}$$

V.2.6. INTERGRALE DEFINIE A BORNE VARIABLE

a) Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$.

Si l'on remplace dans la formule $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ l'une des borne b ou a par la variable x ,

on a : $\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ ou $\int_x^b f(t) dt = [F(t)]_x^b = F(b) - F(x)$

Comme $F(t)$ est la primitive de $f(t)$, $F(x)$ est aussi primitive de $f(t)$.

L'intégrale définie est donc égale à la primitive de $f(t)$ qui vaut 0 si $x = a$ (ou $x = b$).

Ainsi, $\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$ ou $\int_x^b f(t)dt = F(x) + k'$
 (avec $k = -F(a)$ ou $k' = F(b)$), est une fonction dérivable dans $] a , b [$
 et sa dérivée est : $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F'(x) = f(x)$ ou $\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = F'(x) = f(x)$
 b) Si l'on remplace dans la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, les deux bornes par des fonctions de x , par exemple $u(x)$ et $v(x)$ alors on obtient :
 $\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)dx = F[v(x)] - F[u(x)]$, une fonction dérivable dans $] a , b [$ et dont la dérivée est : $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)dx = F'[v(x)] v'(x) - F'[u(x)] u'(x)$

V.2.7. INTEGRALITE DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$
 Il résulte de la propriété P₇ sur la comparaison des fonctions que :

$$\left(\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \right) \Leftrightarrow [m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)]$$

$$\Leftrightarrow \left(m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M. \right) \quad (a \neq b)$$

Le réel $A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé **valeur moyenne de la fonction f sur $I = [a, b]$** .
 $A(b-a) = \int_a^b f(x) dx$ est la formule de la moyenne.

Exercices résolus

ER 128.1. Détermine la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I .

$$\text{a) } f(x) = x^2, \quad I = [0, 2] \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [0, 1]$$

Résolution

$$\text{a) La valeur moyenne est : } A = \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{b) } A = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} [\text{Arc sin } x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

ER 129.2. Calcule la dérivée de la fonction définie par :

$$\text{a) } \int_3^x \ln(t^2 + 3t + 4) dt \quad \text{b) } \int_{x^2}^{x^3} e^t dt$$

Résolution

$$\text{a) Nous avons : } \frac{d}{dx} \int_3^x \ln(t^2 + 3t + 4) dt = \ln(x^2 + 3x + 4)$$

$$\text{b) Posons } u = x^2, \quad v = x^3 \text{ et } f(t) = e^t$$

$$u' = 2x, \quad v' = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} e^t dt = e^{x^3} \cdot 3x^2 - e^{x^2} \cdot 2x$$

$$= 3x^2 e^{x^3} - 2x e^{x^2}$$

ER 130.3. Calcule $\lim_2 \frac{\int_2^x \cos(3t-6)dt}{x^2+x-6}$

Résolution

$$\lim_2 \frac{\int_2^x \cos(3t-6)dt}{x^2+x-6} = \lim_2 \frac{\int_2^2 \cos(3t-6)dt}{0} \text{ prend la forme } \frac{0}{0}$$

En appliquant la règle de l'Hospital, nous avons :

$$\lim_2 \frac{\frac{d}{dx} \int_2^x \cos(3t-6)dt}{\frac{d}{dx}(x^2+x-6)} = \lim_2 \frac{\cos(3x-6)}{2x+1} = \frac{1}{5}$$

V.3. METHODES D'INTEGRATION

Il n'existe pas une méthode générale d'intégration. Puisque certaines fonctions ne peuvent pas être intégrées par les formules d'intégrales immédiates, on recourt à d'autres techniques que l'on expose dans la suite.

V.3.1. INTEGRATION PAR PARTIES

Soit u et v deux fonctions en x dérivables sur une partie I de $\mathbb{R}$.

On sait que : $d(u \cdot v) = u dv + v du$

En intégrant membre à membre cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} (\int duv = \int vdu + \int u dv) &\Leftrightarrow (u \cdot v = \int vdu + \int u dv) \\ &\Leftrightarrow (\int u dv = u \cdot v - \int vdu) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \text{ ou encore } \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad (\forall x \in I)$$

C'est la formule d'intégration par parties pour les intégrales indéfinies.

Si u et v sont dérivables sur $I = [a, b]$ alors la formule d'intégration par parties pour les intégrales définies est :

$$\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du \quad (\forall x \in I)$$

$$\text{ou encore } \int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v dx \quad (\forall x \in I)$$

Remarques

- La formule d'intégration par parties est surtout utilisée pour intégrer :
 - * certains produits des fonctions tels que le produit d'une fonction polynôme en x de degré n par une fonction exponentielle ou une fonction trigonométrique ou encore par une fonction logarithmique
 - * les trois fonctions réciproques $\text{Arc sin } x$, $\text{Arc cos } x$, $\text{Arc tan } x$.
 - * certaines racines carrées.

– Dans la pratique, le succès de la méthode repose sur le choix judicieux de u et de dv . Parfois il faut appliquer plusieurs fois la méthode.

Exercices résolus

ER 131.1. Calcule les intégrales définies et indéfinies suivantes :

a) $\int_{-1}^0 x e^{-2x} dx$ b) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ c) $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$

d) $\int x \operatorname{Arc} \tan x dx$ e) $\int \operatorname{Arc} \sin x dx$ f) $\int \frac{\operatorname{Arc} \cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Résolutions

a) $\int_{-1}^0 x e^{-2x} dx$

Posons $u = x$ et $v' = e^{-2x}$; $u' = 1$ et $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

D'où :

$$\int_{-1}^0 x e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^2$$

b) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

Posons $u = \ln x$ et $dv = x^2 dx$; $du = \frac{1}{x} dx$ et $v = \frac{x^3}{3}$

$$D'où : \int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 = \frac{-7+24 \ln 2}{9}$$

c) $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$

Posons : $u = \sin 3x$ et $dv = e^{2x} dx$; $du = 3 \cos 3x dx$ et $v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$D'où : \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \quad (1)$$

Calculons $\int e^{2x} \cos 3x dx$ en posant : $t = \cos 3x$ et $dy = e^{2x} dx$; $dt = -3 \sin 3x dx$ et $y = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\text{Par suite, } \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \quad (2)$$

(2) dans (1) :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx \end{aligned} \quad (3)$$

(3) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx + \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x \\ \Leftrightarrow \left[\frac{13}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx \right] &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(\sin 3x - \frac{3}{2} \cos 3x \right) \end{aligned}$$

$$D'où : \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{2}{13} e^{2x} \left(\sin 3x - \frac{3}{2} \cos 3x \right) + C$$

d) $\int x \operatorname{Arc} \tan x dx$

Posons : $u = \operatorname{Arc} \tan x$ $\Rightarrow$ $du = \frac{1}{1+x^2} dx$

$$dv = x dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int x \operatorname{Arc tan} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arc tan} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arc tan} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arc tan} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Arc tan} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{Arc tan} x) + C \end{aligned}$$

e) $\int \operatorname{Arc sin} x dx$

Posons : $f = \operatorname{Arc sin} x$ et $dg = dx$ on a : $df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $g = x$

$$\text{D'où : } \int \operatorname{Arc sin} x dx = x \operatorname{Arc sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \operatorname{Arc sin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

f) $\int \frac{\operatorname{Arc cos} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Posons : $f(x) = \operatorname{Arc cos} x$ et $dg(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$df(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad g(x) = -\operatorname{Arc cos} x$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \left(\int \frac{\operatorname{Arc cos} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -(\operatorname{Arc cos} x)^2 - \int \frac{\operatorname{Arc cos} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \\ \Leftrightarrow \left[2 \int \frac{\operatorname{Arc cos} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -(\operatorname{Arc cos} x)^2 \right] \\ \Leftrightarrow \left[\int \frac{\operatorname{Arc cos} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} (\operatorname{Arc cos} x)^2 + C \right] \end{aligned}$$

ER 132. 2. Soit l'intégrale $I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

Utiliser l'intégration par parties pour trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . Calculer I_2 et I_3 .

Résolution

Calculons $I_{n-1} = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} dx$

En posant $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ et $dv = dx$, nous avons : $du = \frac{-2(n-1)x}{(a^2+x^2)^n} dx$ et $v = x$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } I_{n-1} &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \left[\frac{(a^2+x^2) - a^2}{(a^2+x^2)^n} \right] dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} dx - 2(n-1)a^2 \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2 I_n \end{aligned}$$

Nous obtenons aussi : $2(n-1)a^2 I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$

Ou mieux
$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1}$$

relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} qui ramène l'intégrale I_n à une intégrale du même type, dont l'indice n diminue d'une unité.

En répétant ce processus, on parvient enfin à l'intégrale connue.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{a} + C. \quad \text{Calculons :}$$

$$\begin{array}{l|l} * I_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} & * I_3 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} \\ \\ = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot I_1 & = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(a^2+x^2)^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{a^2} \cdot I_2 \\ \\ = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{a} + C & = \frac{1}{8a^2} \frac{(3x^2+5a^2)x}{(a^2+x^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{a} + C \end{array}$$

Exercices

N° 393. Calcule l'intégrale de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x \cos^2 x & \text{d) } f(x) = \frac{x \operatorname{Arc tan} x}{(1+x^2)} & \text{g) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arc sin} x \\ \text{b) } f(x) = e^{4x} \cos 3x & \text{e) } f(x) = x^n \ln x & \text{h) } f(x) = \frac{x e^x}{(1+x)^2} \\ \text{c) } f(x) = \ln x^2 & \text{f) } f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} & \text{i) } f(x) = \frac{x \operatorname{Arc tan} x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

N° 394. 251. Calcule :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx & \text{c) } \int_1^{e^5} \frac{\ln|x|}{x} dx & \text{e) } \int_0^4 (1-|1-x|) \cos \frac{\pi}{2} x \, dx \\ \text{b) } \int_{-1}^0 \ln(1-x) dx & \text{d) } \int_{-\frac{3}{6}}^{\frac{16\pi}{43\pi}} |\sin x| dx & \end{array}$$

N° 395. 252. Vérifie que :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{1}{(a^2-x^2)} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} \\ \text{b) } \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \end{array}$$

V.3.2. INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE⁵

a. *Cas général*

Soit $I \xrightarrow{f} f(I) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (I \subset \mathbb{R})$

$$x \longrightarrow t = f(x) \longrightarrow g(t) = g[f(x)]$$

Si f est dérivable et sa dérivée est continue alors $\int g[f(x)]f'(x)dx = \int g(t)dt$

C'est la formule de changement de variable pour les intégrales indéfinies. Elle est obtenue en utilisant les égalités $t = f(x)$ et $dt = f'(x)dx$

Dans le cas de l'intégration par substitution, le changement de variable implique parfois le changement des bornes.

Ainsi, si f est une fonction continue sur $I = [a, b]$ et g une fonction admettant une dérivée continue sur $J = [c, d]$ telle que $g(c) = a$ et $g(d) = b$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)dt$$

Exemple

Calculons $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos 3x dx$

En posant $3x = t$, on a $3dx = dt$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = 2\pi$$

$$\text{Ainsi,} \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos t dt = -\frac{1}{3}$$

Remarque

Pour utiliser cette formule, on procède de la manière suivante :

- Retrouver la fonction f à substituer (reconnaître une fonction et sa dérivée dans la fonction à intégrer)
- Poser $t = f(x)$ et calculer $dt = f'(x)dx$
- Remplacer ces égalités dans l'intégrale donnée pour obtenir une intégrale immédiate de variable t .
- Calculer l'intégrale obtenue.
- Revenir à la variable x .

Exercice résolu

ER 133. Calcule :

⁵ Aussi appelée méthode par substitution

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \frac{e^x}{e^{x+3}} dx & \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{1+\cos^2 3x} dx & \text{e) } \int \frac{dx}{e^x(1-2e^{-x})^3} & \text{g) } \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx \\ \text{b) } \int_0^1 x e^{x^2} dx & \text{d) } \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx & \text{f) } \int \frac{ae^x-b}{2ae^x-b} dx & \text{h) } \int \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x} dx \end{array}$$

Résolution

a) Posons $t = e^x + 3$; $dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x+3} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |e^x + 3| + C$$

b) Posons $t = x^2$; $dt = 2x dx$

changeons les bornes :

$$(x=0) \Rightarrow (t=0) \text{ et } (x=1) \Rightarrow (t=1)$$

$$\int_0^1 e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} [e^t]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1)$$

d) Posons $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\text{D'où : } \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int \sin t (-dt)$$

$$= - \int \sin t dt$$

$$= \cos t + C$$

$$= \cos \frac{1}{x} + C$$

e) $\int \frac{dx}{e^x(1-2e^{-x})^3} = \int \frac{e^{-x}}{(1-2e^{-x})^3} dx$

Posons: $t = 1 - 2e^{-x}$, $dt = 2e^{-x} dx$

$$\int \frac{dx}{e^x(1-2e^{-x})^3} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{1}{(1-2e^{-x})^2} + C$$

f) Multiplions les deux termes de l'intégrande par $2e^{-x}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int \frac{ae^x-b}{2ae^x-b} dx &= \int \frac{2a-2be^{-x}}{2(2a-be^{-x})} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2a-be^{-x}-be^{-x}}{(2a-be^{-x})} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{be^{-x}}{2a-be^{-x}} \right) dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{ae^x-b}{2ae^x-b} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \frac{be^{-x}}{2a-be^{-x}} dx \quad (i)$$

Calculons $\int \frac{be^{-x}}{2a-be^{-x}} dx$, en posant $t = 2a - be^{-x}$ et $dt = be^{-x} dx$, nous avons:

$$\int \frac{be^{-x}}{2a-be^{-x}} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |2a - be^{-x}| + C$$

En portant cette valeur dans (i) nous obtenons: $\int \frac{ae^x-b}{2ae^x-b} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |2a - be^{-x}| + C$

c) Posons $t = 1 + \cos^2 3x$

$$dt = -3 \sin 6x dx$$

Changeons les bornes :

$$(x=0) \Rightarrow (t=2) \text{ et } (x=1) \Rightarrow (t=1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{1+\cos^2 3x} dx &= -\frac{1}{3} \int_2^1 \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{3} [\ln t]_2^1 = \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

g) Notons que $1 - x^{10} = 1 - (x^5)^2$

Posons $t = x^5$, $dt = 5x^4 dx$ et $1 - x^{10} = 1 - t^2$.

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot x^4 dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \text{Arc sin } t + C$$

$$= \frac{1}{5} \text{Arc sin } x^5 + C$$

h) $\int \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x} dx = \int \frac{1}{1-\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$
(avec $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$)

Posons: $t = 1 - \tan x$, $dt = -\frac{1}{\cos^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x} dx &= -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C \\ &= -\ln |1 - \tan x| + C \end{aligned}$$

Remarque

Les formules des différentielles usuelles peuvent suggérer la variable qui conduit à une intégrale immédiate. Parfois il faut d'abord transformer la fonction.

Exemples

$$\begin{aligned}
 \bullet \int \frac{e^{\text{Arc sin } x}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int e^{\text{Arc sin } x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \bullet \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx &= \int \tan^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \\
 &= \int e^{\text{Arc sin } x} d(\text{Arc sin } x) & &= \int \tan^2 x d(\tan x) \\
 &= (e^{\text{Arc sin } x}) + C & &= \frac{\tan^3 x}{3} + C \\
 \bullet \int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^n x} & \bullet \int \frac{\cos x}{1-\cos 2x} dx &= \int \frac{\cos x dx}{2 \sin^2 x} \\
 &= - \int \cos^{-n} x \cdot d(\cos x) & &= \int \frac{d(\sin x)}{2 \sin^2 x} \\
 &= - \frac{\cos^{-n+1} x}{1-n} + C & &= - \frac{1}{2 \sin x} + C \\
 \bullet \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} d(-\cos x) \\
 &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) d(-\cos x) \\
 &= \int \left(-\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) d(\cos x) \\
 &= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C
 \end{aligned}$$

Exercice

N° 396. 253. Calculer l'intégrale indéfinie de chaque fonction :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \frac{x}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}} & \text{d) } f(x) &= \sin t \cdot \ln(\cos t) & \text{g) } f(x) &= \frac{\sqrt{x+4}}{x-4} \\
 \text{b) } f(x) &= \frac{1}{e^x + e^{-x}} & \text{e) } f(x) &= \frac{\ln x}{x(1-\ln x)} & \text{h) } f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \\
 \text{c) } f(x) &= \frac{x}{(1-3x)^2} & \text{f) } f(x) &= \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} & \text{i) } f(x) &= \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}
 \end{aligned}$$

b. Cas particuliers

b.1 Intégration des fonctions contenant une expression du type :

$$a^2 - b^2 x^2 ; a^2 + b^2 x^2, b^2 x^2 - a^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

On utilise un changement de variable trigonométrique.

POUR	ON POSE	ON OBTIENT
$a^2 - b^2 x^2$	$x = \frac{a}{b} \sin t$	$dx = \frac{a}{b} \cos t dt$ et $a^2 - b^2 x^2 = a^2 \cos^2 t$
$a^2 + b^2 x^2$	$x = \frac{a}{b} \tan t$	$dx = \frac{a}{b} \sec^2 t dt$ et $a^2 + b^2 x^2 = a^2 \sec^2 t$
$b^2 x^2 - a^2$	$x = \frac{a}{b} \sec t$	$dx = \frac{a}{b} \sec t \tan t dt$ et $b^2 x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 t$

En particulier si $b = 1$, on a :

1. POUR	ON POSE	ON OBTIENT
---------	---------	------------

$a^2 - x^2$	$x = a \sin t$	$dx = a \cos t \, dt$	et	$a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t$
$a^2 + x^2$	$x = a \tan t$	$dx = a \sec^2 t \, dt$	et	$a^2 + x^2 = a^2 \sec^2 t$
$x^2 - a^2$	$x = a \sec t$	$dx = a \sec t \tan t \, dt$	et	$x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 t$

Exercice résolu

ER 134. Calcule

a) $\int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{4 - 9x^2} \, dx$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

c) $\int \frac{\sqrt{16x^2-25}}{x} dx$

Résolution

Il est recommandé d'expliciter le domaine de validité de la fonction à intégrer.

Ainsi :

a) Nous devons avoir : $(4 - 9x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right)$

Comme $a = 2$ et $b = 3$, posons $x = \frac{2}{3} \sin t$

$dx = \frac{2}{3} \cos t \, dt$ et $\sqrt{4 - 9x^2} = \sqrt{4 - 9 \cdot \frac{4}{9} \sin^2 t} = 2 \cos t$

Par changement de bornes, nous avons : $(x = 0) \Rightarrow (t = 0)$ et $(x = \frac{2}{3}) \Rightarrow (t = \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{4 - 9x^2} \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot \frac{2}{3} \cos t \, dt = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t + \sin t \cdot \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b) L'intégrale a un sens pour tout réel non nul.

Posons $x = 2 \tan t$, $dx = 2 \sec^2 t \, dt$ et $\sqrt{4 + x^2} = 2 \sec t$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 t \, dt}{2 \tan t \cdot 2 \sec t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= \frac{1}{2} \ln | \operatorname{cosec} x - \cot x | + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x} \right| + C \end{aligned}$$

c) Nous devons avoir $x \in]-\infty, -\frac{5}{4}] \cup [\frac{5}{4}, +\infty[$

Posons $x = \frac{5}{4} \sec t$, $dx = \frac{5}{4} \sec t \tan t \, dt$ et $t = \operatorname{Arc} \sec \frac{4x}{5}$.

$$\text{Ainsi, } \frac{\sqrt{16x^2-25}}{x} = \frac{5 \tan t}{\frac{5}{4} \sec t} = 4 \sin t$$

D'où :

$$\int \frac{\sqrt{16x^2-25}}{x} dx = \int 4 \sin t \cdot \frac{5}{4} \sec t \cdot \tan t dt = 5 \int \tan^2 t dt = 5(\tan t - t) + C$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite, } \left(x = \frac{5}{4} \sec t\right) &\Leftrightarrow \left(x = \frac{5}{4 \cos t}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos t} = \frac{4x}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{16x^2}{25}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \tan t = \frac{\sqrt{16x^2-25}}{5} \text{ et } \int \frac{\sqrt{16x^2-25}}{x} dx = \sqrt{16x^2-25} - 5 \operatorname{Arc} \sec \frac{4x}{5} + C$$

Exercice

N° 397. Intègre chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x\sqrt{4x^2-1} & \text{d) } f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}} & \text{g) } f(x) = \sqrt{x^2+4} \\ \text{b) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} & \text{e) } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} & \text{h) } f(x) = x^2(x^2-16)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} & \text{f) } f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} & \text{i) } f(x) = \frac{(9+4x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x} \end{array}$$

b.2 Intégration des fonctions rationnelles

Soit la fonction $f: x \rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes entiers.

Il s'agit de calculer $\int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

1^{er} cas : Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

a) le dénominateur est décomposable en un produit de facteurs du premier ou du second degré

On transforme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en une somme de fractions simples.

Ainsi, on a les possibilités suivantes :

$$\text{a) } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-k)} = \frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{x-b} + \dots + \frac{\alpha_k}{x-k}$$

$$\text{b) } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\dots(a_nx^2+b_nx+c_n)} \\ &= \frac{\alpha_1x+\beta_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{\alpha_2x+\beta_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \dots + \frac{\alpha_nx+\beta_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)} \end{aligned}$$

$$d) \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{ax^2+bx+c} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{\alpha_n x + \beta_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$e) \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^n(ax^2+bx+c)^k} \\ = \frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{\beta_k x + \gamma_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

L'intégrale de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une somme d'intégrales de différents éléments simples.

Remarque

L'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ est définie par :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exemples

$$\bullet \int \frac{1}{(x-4)^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x-4)^2} + C \quad \bullet \int \frac{1}{4-x} dx = -\ln|4-x| + C$$

Exercices résolus

ER 135. Calcule

$$a) \int \frac{1}{x^2-3x+2} dx \quad b) \int \frac{x^2+1}{x(x+2)^3} dx \quad c) \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx \quad d) \int \frac{2x^2+x+3}{(1+x^2)^2} dx$$

Résolution

$$a) \text{ Nous avons : } \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{D'où : } \int \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C \\ = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

$$b) \text{ Nous savons que : } \frac{x^2+1}{x(x+2)^3} = \frac{1}{8x} - \frac{1}{8} \frac{1}{(x+2)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$\text{Ainsi, } \int \frac{x^2+1}{x(x+2)^3} dx = \int \left(\frac{1}{8x} - \frac{1}{8} \frac{1}{(x+2)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{2} \frac{1}{(x+2)^3} \right) dx \\ = \frac{1}{8} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x+2| - \frac{3}{4} \frac{1}{(x+2)} + \frac{5}{4} \frac{1}{(x+2)^2} + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{1}{4} \frac{3x+1}{(x+2)^2} + C$$

$$c) \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx \\ = \text{Arc tan } x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + C$$

$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2} dx &= \int \left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{3-x}{(1+x^2)^2} \right) dx = \int \frac{2x dx}{1+x^2} + 3 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\
 &= \ln|x^2+1| + 3 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\
 \text{Or : } \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \text{Arc tan } x \text{ et } \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} \\
 \text{D'où : } \int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2} dx &= \ln|x^2+1| + \frac{3}{2} \text{Arc tan } x + \frac{3x+1}{2(x^2+1)} + C
 \end{aligned}$$

b) le dénominateur est de la forme $(ax^2+bx+c)^n$ (avec $\Delta < 0$)

Soit à calculer $\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx$ ($n \in \mathbb{N}$) ($p, q, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$)

Le dénominateur se met sous la forme :

$$(ax^2+bx+c)^n = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]^n \quad \left(\text{avec } k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

$$\text{D'où : } \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{px+q}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]^n} dx \quad (1) : \quad i) i)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2} dx$$

En posant $t = x + \frac{b}{2a}$, $dt = dx$, on obtient la formule suivante:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \text{Arctan} \frac{(ax^2+bx+c)'}{\sqrt{-\Delta}} + C$$

Exercice résolu

ER 136. Calcule $\int \frac{1}{x^2+4x+7} dx$

Résolution

Nous avons : $\Delta = -12$, $x^2+4x+7 = (x+2)^2+3$, $k = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{3})^2} \\
 &= \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} \quad (\text{où } t = x+2; dt = dx) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arc tan} \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

Nous obtenons immédiatement cette réponse en utilisant la formule ci-dessus.

$$ii) \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{px+q}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + k^2} dx$$

En posant $t = x + \frac{b}{2a}$, $dt = dx$, $x = t - \frac{b}{2a}$, on obtient :

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \frac{p}{2a} \ln \left| \frac{ax^2+bx+c}{a} \right| + \frac{2p}{\sqrt{-\Delta}} \left(q - \frac{bp}{2a} \right) \operatorname{Arctan} \frac{(ax^2+bx+c)'}{\sqrt{-\Delta}} + C$$

$$iii) \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{px+q}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]^n} dx$$

Première méthode

Poser $t = x + \frac{b}{2a}$ pour obtenir : $dt = dx$, $x = t - \frac{b}{2a}$ et

$$\begin{aligned} px + q &= p \left(t - \frac{b}{2a} \right) + q = pt + \left(q - \frac{bp}{2a} \right) \\ \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx &= \frac{1}{a^n} \int \frac{pt + \left(q - \frac{bp}{2a} \right)}{(t^2+k^2)^n} dt \\ &= \frac{p}{a^n} \int \frac{tdt}{(t^2+k^2)^n} + h \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} \quad \left(\text{avec } h = \frac{q - \frac{bp}{2a}}{a^n} \right) \end{aligned}$$

Note :

– On calcule la première intégrale en utilisant un changement de variable

$u = t^2 + k^2$ et la deuxième intégrale, on recourt à la formule de récurrence :

$$\int \frac{1}{(t^2+k^2)^n} dt = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{k^2} \frac{t}{(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \frac{1}{k^2} \int \frac{1}{(t^2+k^2)^{n-1}} dt$$

– A la fin, on revient à la variable x .

Deuxième méthode

On peut utiliser le changement de variable : $x + \frac{b}{2a} = k \tan t$ ou encore

$t = \operatorname{Arc tan} \frac{2xa+b}{2ak}$, ce qui conduit à des intégrales de types connus.

Exercice résolu

ER 137. Calcule :

$$a) \int \frac{2x-3}{\frac{1}{2}x^2+2x+4} dx$$

$$b) \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+4)^2} dx$$

Résolution

a) Comme $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = \frac{1}{2}[(x+2)^2 + 4]$, nous avons :

$$\int \frac{2x-3}{\frac{1}{2}x^2+2x+4} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int \frac{2x-3}{(x+2)^2+4} dx$$

$$\text{Posons } t = x + 2, (x = t - 2) \Leftrightarrow (2x = 2t - 4)$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3 = 2t - 7) \quad \text{et} \quad dt = dx$$

$$\text{D'où : } \int \frac{2x-3}{\frac{1}{2}x^2+2x+4} dx = 2 \int \frac{2t-7}{t^2+4} dt$$

$$= 2 \int \frac{2t}{t^2+4} dt - 14 \int \frac{dt}{t^2+4}$$

$$= 2 \ln|t^2 + 4| - \frac{14}{2} \text{Arc tan } \frac{t}{2} + C$$

$$= 2 \ln|x^2 + 4x + 8| - 7 \text{Arc tan } \frac{x+2}{2} + C$$

$$\text{b) Comme } x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 + 3, \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+4)^2} dx = \int \frac{2x+1}{[(x-1)^2+3]^2} dx$$

$$\text{Posons } t = x - 1, dt = dx, x = t + 1 \text{ et } 2x + 1 = 2t + 3$$

$$\text{D'où : } \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+4)^2} dx = \int \frac{2t+3}{(t^2+3)^2} dt = \int \frac{2t}{(t^2+3)^2} dt + 3 \int \frac{1}{(t^2+3)^2} dt$$

Nous avons :

$$* \int \frac{2t}{(t^2+3)^2} dt = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \quad (\text{en posant } u = t^2 + 3)$$

$$= -\frac{1}{t^2+3}$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+4}$$

$$* \int \frac{1}{(t^2+3)^2} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t}{t^2+3} + \frac{1}{6} \int \frac{1}{t^2+3} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t}{t^2+3} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \text{Arc tan } \frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \text{Arc tan } \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\text{En définitive, } \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+4)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arc tan } \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x-3}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arc tan } \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

2^e cas : le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur.

La division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$ permet d'écrire l'égalité $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ où $Q(x)$ est le quotient et $R(x)$ est le reste.

$$\int f(x) dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

La première intégrale renvoie à celle d'un polynôme entier tandis que la deuxième intégrale renvoie au 1^{er} cas.

Exercices résolus

Calcule :

$$a) \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx \quad b) \int \frac{2x-3}{3x-4} dx \quad c) \int \frac{x^3+3x^2+2x+7}{x+3} dx \quad d) \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$$

Résolution

a) La division euclidienne donne : $\frac{x^3+1}{x^2+1} = x - \frac{x-1}{x^2+1}$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx &= \int \left(x - \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \text{Arc tan } x + C \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{2x-3}{3x-4} dx = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3(3x-4)} \right) dx = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \ln|3x-4| + C$$

$$c) \int \frac{x^3+3x^2+2x+7}{x+3} dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x+3| + C$$

$$\begin{aligned} d) \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx &= \int \left(1 + \frac{5x+4}{x^2-2x-8} \right) dx \\ &= x + \int \frac{5x+4}{(x+2)(x-4)} dx \\ &= x + \ln|(x+2)(x-4)| + C \end{aligned}$$

Exercices

N° 398. Calcule l'intégrale de chacune des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{2x-3}{2x-1} & e) f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+3} & i) f(x) = \frac{6x^5-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} \\ b) f(x) = \frac{4x}{4x+3} & f) f(x) = \frac{x^3}{2x^2+4x+3} & j) f(x) = \frac{4x^3-3x+2}{(2x-1)(x+2)} \\ c) f(x) = \frac{x^5+2x+1}{x^2+1} & g) f(x) = \frac{x^5+4x-8}{(x^2-1)(x^2+4)} & k) f(x) = \frac{x^2-a^2}{a^2+x^2} \\ d) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} & h) f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x^2+2x+7} & \end{array}$$

N° 399. Calcule l'intégrale de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{1}{(5x-2)^7} & c) f(x) = \frac{3x-4}{x^2-4x+5} & e) f(x) = \frac{x}{(x^2+x+1)^3} \\ b) f(x) = \frac{1}{(x+e)^5} & d) f(x) = \frac{3-2x}{(5x-3x^2-4)^2} & f) f(x) = \frac{x-1}{[(x-3)^2+4]^3} \end{array}$$

b.3 Intégration des fractions contenant une expression du type :

$$\sqrt[n]{ax+b} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

On pose : $ax + b = z^n$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ pour obtenir :

$$dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{(ax+b)^p} = z^p \quad \text{ou} \quad dx = \frac{nz^{n-1}(ad-bc)}{(a-cz^n)^2} dz \quad \text{et}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p} = z^p$$

Remarques

– La technique qui permet de ramener une intégrale d'une fonction irrationnelle à une intégrale d'une fonction rationnelle est appelée rationalisation.

– Si une fonction contient les expressions

$$\sqrt[m]{(ax+b)^r}, \quad \sqrt[n]{(ax+b)^s}, \dots, \quad \sqrt[q]{(ax+b)^t}$$

ou $\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s}, \dots, \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^t}$

alors on pose : $ax + b = z^k$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} = z^k$ avec k le premier multiple commun de $m, n, \dots, q$.

– Pour l'expression du type $\sqrt[n]{ax}$, on pose $ax = z^n$

Exercices résolus

ER 138. Calcule :

$$\text{a) } \int \sqrt[3]{(2x+1)^5} dx \quad \text{b) } \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad \text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Résolution

a) Posons $(2x+1 = z^3) \Leftrightarrow (z = \sqrt[3]{2x+1})$, nous avons :

$$dx = \frac{3}{2} z^2 dz \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{(2x+1)^5} = z^5.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{(2x+1)^5} dx &= \frac{3}{2} \int z^5 \cdot z^2 dz = \frac{3}{2} \int z^7 dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{z^8}{8} + C \\ &= \frac{3}{16} (2x+1)^2 \sqrt[3]{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) Posons } z = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad z^2 = \frac{1-x}{1+x}; \quad x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{-4z}{(1+z^2)^2} dz$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int z \frac{(-4z) dz}{(1+z^2)^2} = -4 \int \frac{z^2}{(1+z^2)^2} dz \\ &= -4 \int \frac{z^2+1-1}{(1+z^2)^2} dz \\ &= -4 \int \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{(1+z^2)^2} \right) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4(\text{Arc tan } z - \frac{1}{2} \frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{2} \text{Arc tan } z) + C \\
&= \frac{2z}{1+z^2} - 2 \text{Arc tan } z + C \\
&= (1+x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2 \text{Arc tan } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C
\end{aligned}$$

c) Le plus petit commun multiple de 2 et 3 est 6.

Posons $(z^6 = x) \Leftrightarrow (dx = 6z^5 dz)$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\sqrt{x}} &= 6 \int \frac{z^3 dz}{z+1} = \int \left[(z^2 - z + 1) - \frac{1}{z+1} \right] dz \\
&= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6 \ln |z+1| + C \\
&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C
\end{aligned}$$

Exercice

N° 400. Intègre chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} & \text{e) } f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3}\sqrt{x}}{6\sqrt[4]{x}} & \text{i) } f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x-3}}{x-5} \\
\text{b) } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x}} & \text{f) } f(x) = \frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} & \text{j) } f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x} \\
\text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{x-3}\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & \text{g) } f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{k) } f(x) = \sqrt{\frac{x}{2+x}} \\
\text{d) } f(x) = \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} & \text{h) } f(x) = \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}
\end{array}$$

b.4 Intégration des binômes $x^m(a + bx^n)^p$

où m, n, p sont des nombres rationnels et a, b des réels non nuls.

Les considérations portent sur les nombres p et $t = \frac{m+1}{n}$.

1^e cas : p est un entier

Cette possibilité renvoie aux fonctions du type précédent :

$x = z^k$ et k , le premier multiple commun des dénominateurs de m et n .

2^e cas : p est une fraction, soit $p = \frac{r}{s}$, et $\frac{m+1}{n} = t$ est un entier.

On pose $a + bx^n = z^s$

3^e cas : p est une fraction

Soit $p = \frac{r}{s}$ et $\frac{m+1}{n} + p$ est un entier. On pose $ax^{-n} + b = z^s$

Exercice résolu

ER 139. Intégrer chacune des fonctions suivantes

$$a) f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Résolution

$$a) \int x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx$$

Nous avons $p = 2$ un entier ; le ppcm $(3, 2)$ est 6. En posant $z^6 = x$, nous avons :

$$dx = 6z^5 dz \quad \text{et} \quad x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (z^6)^{-\frac{1}{3}} \left[1 + (z^6)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = z^{-2} (1 + z^3)^2$$

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx &= \int z^{-2} (1 + z^3)^2 \cdot 6z^5 dz = 6 \int z^3 (1 + 2z^3 + z^6) dz \\ &= 6 \left(\frac{z^4}{4} + 2 \frac{z^7}{7} + \frac{z^{10}}{10} \right) + C \\ &= 6 \left[\frac{(\sqrt[6]{x})^4}{4} + 2 \frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7} + \frac{1}{10} (\sqrt[6]{x})^{10} \right] + C \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$m = \frac{2}{3} ; \quad n = \frac{1}{3} ; \quad p = \frac{1}{2} ; \quad \frac{m+1}{n} = 1 \quad (\text{entier})$$

Posons $1 + x^{\frac{1}{3}} = z^2$, nous avons : $x = (z^2 - 1)^3$ et $dx = 6z(z^2 - 1)^2 dz$

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \cdot (z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 6z(z^2 - 1)^2 dz \\ &= 6 \int z^2 dz \\ &= 2z^3 + C \\ &= 2 \left(\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^3 + C \end{aligned}$$

Exercice

N° 401. Calculer l'intégrale de chacune des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^3(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$c) f(x) = x^5(1 + x^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$b) f(x) = x^0(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^5}}$$

b.5 Intégration des fonctions contenant l'expression $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

La rationalisation se réalise en utilisant les substitutions d'Euler. Lorsque la variable efficace t est posée, on élève les deux membres de l'égalité au carré, on obtient une expression à partir de laquelle on tire la variable x en fonction de t , on calcule dx , on exécute la substitution et, enfin, on intègre la fonction obtenue.

a) La première substitution d'Euler, applicable lorsque $a > 0$.

$$\text{On pose } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a} \quad (\text{ou } t + x\sqrt{a})$$

pour avoir : $ax^2 + bx + c = (t - x\sqrt{a})^2$

b) La deuxième substitution d'Euler, applicable lorsque $c > 0$

On pose $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$ (ou $tx - \sqrt{c}$)

pour avoir : $ax^2 + bx + c = (tx + \sqrt{c})^2$

c) La troisième substitution d'Euler, applicable lorsque le trinôme admet deux racines réelles distinctes. Soit x_1 et x_2 ses racines.

On pose : $\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}} = t$ ou $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t$

pour obtenir $\frac{a(x-x_1)}{x-x_2} = t^2$ ou $a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2 t^2$

On tire x et on calcule dx .

Exercices résolus

ER 140. Calcule

a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}} dx$

b) $\int \frac{\sqrt{-2x^2+3x+4}}{x^2} dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$

Résolution

a) Ici $a = 1 > 0$; posons : $(\sqrt{x^2 + x + 2} = t - x) \Leftrightarrow [x^2 + x + 2 = (t - x)^2]$

$$\Leftrightarrow (x + 2 = t^2 - 2xt)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{t^2 - 2}{1 + 2t}\right)$$

et $dx = \frac{2(t^2 + t + 2)}{(1 + 2t)^2} dt$

$$* \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{1}{x(t-x)} = \frac{1}{\frac{t^2-2}{1+2t} \left[t - \frac{t^2-2}{1+2t}\right]} = \frac{1}{\frac{(t^2-2)(t^2+t+2)}{(1+2t)^2}}$$

$$= \frac{(1+2t)^2}{(t^2-2)(t^2+t+2)}$$

$$* \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+2}} dx = \int \frac{(1+2t)^2}{(t^2-2)(t^2+t+2)} \cdot \frac{2(t^2+t+2)}{(1+2t)^2} dt = 2 \int \frac{1}{t^2-2} dt$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}} \right| + C$$

b) Comme $c = 4 > 0$, posons $\sqrt{-2x^2 + 3x + 4} = tx + 2$ pour obtenir :

$$* (-2x^2 + 3x + 4 = t^2x^2 + 4tx + 4) \Leftrightarrow \left(x = \frac{3-4t}{t^2+2}\right) \text{ et } dx = \frac{4t^2-6t-8}{(t^2+2)^2}$$

$$* \sqrt{-2x^2 + 3x + 4} = tx + 2 = t \left(\frac{3-4t}{t^2+2}\right) + 2 = \frac{-2t^2+3t+4}{t^2+2}$$

$$* \frac{\sqrt{-2x^2+3x+4}}{x^3} = \frac{\frac{-2x^2+3x+4}{t^2+2}}{\left(\frac{3-4t}{t^2+2}\right)^3} = \frac{(-2t^2+3t+4)(t^2+2)^2}{(3-4t)^3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{-2x^2 + 3x + 4}}{x^3} dx &= \int \frac{(-2t^2 + 3t + 4)(t^2 + 2)^2}{(3 - 4t)^3} \cdot \frac{4t^2 - 6t - 8}{(t^2 + 2)} dt \\ &= \int \frac{(-2t^2 + 3t + 4)(4t^2 - 6t - 8)}{(3 - 4t)^3} dt \\ &= \int \left[\frac{1}{8}t - \frac{3}{32} + \frac{41}{9} \frac{1}{3-4t} + \frac{328}{9} \cdot \frac{1}{(3-4t)^2} - \frac{58343}{288} \cdot \frac{1}{(3-4t)^3} \right] dt \\ &= \frac{t^2}{16} - \frac{3t}{32} - \frac{41}{36} \ln|3 - 4t| + \frac{82}{9} \frac{1}{3-4t} + \frac{58343}{576} \frac{1}{(3-4t)^2} + C \end{aligned}$$

Il reste à remplacer dans la dernière égalité t par $\frac{\sqrt{-2x^2+3x+4}-2}{x}$.

c) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{(x+2)(x+1)}$ et posons $\sqrt{(x+2)(x+1)} = t(x+1)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} * [\sqrt{(x+2)(x+1)} = t(x+1)] &\Leftrightarrow [(x+2)(x+1) = t^2(x+1)^2] \\ &\Leftrightarrow [x+2 = t^2(x+1)] \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{t^2-2}{1-t^2}\right) \quad dx = \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} &= \frac{1}{t(x+1)} = \frac{1}{t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)} = \frac{1}{\frac{-t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{-t} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} &= \int \frac{1-t^2}{-t} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x+1+\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1-\sqrt{x^2+3x+2}} \right| + C \end{aligned}$$

Remarque

Souvent, on recourt aux formules suivantes pour les intégrales contenant les expressions de la forme $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| + C & \text{si } a < 0 \\ \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \text{Arc sin } \frac{t}{k} + C & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{Avec } k = \frac{\sqrt{-4}}{2a} \text{ et } t = x + \frac{b}{2a} \right)$$

$$* \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{p}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \left(q - \frac{pb}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Exemples

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}} = \text{Arc sin } \frac{x+6}{8} + C$$

$$\bullet \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}|$$

Exercice

N° 402. Détermine la primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3} & d) f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ b) f(x) = \frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} & e) f(x) = \frac{1}{x\sqrt{-x^2+x+2}} \\ c) f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} & f) f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}} \end{array}$$

b.6 Intégration de certaines fonctions contenant $\sin x$ ou $\cos x$

L'intégration d'une fonction de ce type peut être ramenée à une intégrale de fonction rationnelle par la substitution, en posant $t = \tan \frac{x}{2}$ (1)

$$\text{L'égalité (1) entraîne : } x = 2 \text{ Arc tan } t \text{ et } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (2)$$

Au préalable, on exprime la fonction à intégrer en fonction de tangente en utilisant les

$$\text{identités classiques : } \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} ; \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (3)$$

$$\text{qui deviennent : } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (3')$$

Remarques

– On peut recourir à cette variable pour toute fonction qui peut-être exprimée en fonction de tangente, en particulier lorsque $\sin x$ et $\cos x$ figurent avec des puissances paires. Dans ce cas, on pose :

$$t = \tan x, \quad x = \text{Arctan } t \text{ et } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (4)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad (5)$$

– Ce changement peut conduire à des fonctions compliquées et paraître ainsi inefficace. La fonction donnée peut suggérer une autre variable ou méthode qui mène rapidement au but.

Exercices résolus

ER 141. Calcule :

a) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

b) $\int \frac{1}{5-3 \sin x} dx$

c) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$

Résolution

a) $\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{1}{5+3 \sin x} dx = \int \frac{1}{5+3 \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{5t^2+6t+5} dt$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 5 \int \frac{1}{25t^2+30t+25} dt = 10 \int \frac{1}{4^2+(5t+3)^2} dt \\ &= \frac{10}{2 \cdot 5} \text{Arc tan} \frac{5t+3}{4} + C = \text{Arc tan} \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 3}{4} + C \end{aligned}$$

c) $\int \frac{dx}{\cos 2x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

Posons $t = \tan x$, nous avons : $x = \text{Arc tan } t$ et $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Or $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

D'où : $\int \frac{dx}{\cos 2x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \right| + C$$

Exercice

N° 403. Calcule chacune des intégrales suivantes :

a) $\int -\frac{1}{1-2 \sin x} dx$

c) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx$

b) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

d) $\int \frac{1}{5+4 \sin x} dx$

f) $\int \frac{1}{3+5 \cos x} dx$

b.7 Intégration des fonctions produits en $\sin mx$ ou $\cos nx$

On utilise les transformations trigonométriques de Simpson sur la transformation de somme et de produit de $\cos x$ ou $\sin x$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin (m-n)x + \sin (m+n)x] \, dx \\ \int \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x] \, dx \\ \int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m-n)x + \cos (m+n)x] \, dx\end{aligned}$$

Exercice résolu

ER 142. Calcule l'intégrale de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin 3x \cos 2x$ b) $f(x) = \sin 5x \sin 8x$ c) $f(x) = \cos 7x \cos 9x$

Résolution

$$\begin{aligned}\text{a) } \int \sin 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin (3-2)x + \sin (3+2)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 5x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C \\ \text{b) } \int \sin 5x \sin 8x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (-3x) - \cos 13x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 13x] \, dx \\ &= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{26} \sin 13x + C \\ \text{c) } \int \cos 7x \cos 9x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (-2)x + \cos 16x] \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 16x + C\end{aligned}$$

Exercices

N° 404. Intègre chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin 7x \cdot \cos 5x$ d) $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$
b) $f(x) = \sin 4x \cdot \sin 2x$ e) $f(x) = (1 + \sin x) \cdot (2 + \cos 2x)$
c) $f(x) = \cos 5x \cdot \cos 3x$ f) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 5x$

N° 405. Calculer

a) $\int_0^\pi \sin 9x \cos 7x \, dx$ b) $\int_0^\pi \sin 15x \sin 3x \, dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cos 11x \, dx$

b.8 Intégration des fonctions puissances $\cos^n x$ et $\sin^n x$.

On utilise les transformations suivantes pour tout naturel n non nul, en posant :

$n = 2p + 1$ (si n est impair) et $n = 2p$ (si n est pair)

On a :

$$* \quad \cos^n x = \begin{cases} \cos^{2p+1} x = \cos^{2p} x \cos x = (1 - \sin^2 x)^p \cos x & \text{si } n \text{ est impair} \\ \cos^{2p} x = (\cos^2 x)^p = \frac{1}{2^p} (1 + \cos 2x)^p & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$* \quad \sin^n x = \begin{cases} \sin^{2p+1} x = \sin^{2p} x \sin x = (1 - \cos^2 x)^p \sin x & \text{si } n \text{ est impair} \\ \sin^{2p} x = (\sin^2 x)^p = \frac{1}{2^p} (1 - \cos 2x)^p & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

1^e cas : n est impair ($p \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned} * \quad \int \cos^n x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^p \cos x \, dx \\ &= \begin{cases} \int (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x) \\ \text{ou} \\ \int (1 - t^2)^p dt \quad \text{avec } t = \sin x \end{cases} \\ * \quad \int \sin^n x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^p \sin x \, dx \\ &= \begin{cases} - \int (1 - \cos^2 x)^p d(\cos x) \\ - \int (1 - t^2)^p dt \quad \text{avec } t = \cos x \end{cases} \end{aligned}$$

En développant le binôme qui apparaît dans chaque intégrale, on obtient une somme algébrique des fonctions de variable $\sin x$, $\cos x$ ou t .

2^e cas : n est pair ($p \in \mathbb{N}^*$)

$$* \quad \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{2^p} \int (1 + \cos 2x)^p dx \quad * \quad \int \sin^n x \, dx = \frac{1}{2^p} \int (1 - \cos 2x)^p dx$$

Exercices résolus

ER 143. Calcule

$$a) \int \cos^3 x \, dx \quad b) \int \sin^5 x \, dx \quad c) \int \cos^4 x \, dx \quad d) \int \sin^6 x \, dx$$

Résolution

$$\begin{array}{l|l} a) \, n = 3 \text{ et } p = 1 & b) \, n = 5 \text{ et } p = 2 \\ \int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx & \int \sin^5 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\ = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) & = - \int (1 - t^2)^2 dt \quad (t = \cos x) \\ = \int d(\sin x) - \int \sin^2 x \, d(\sin x) & = - \int (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C & = - \left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5} \right) + C \\ & = - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C \end{array}$$

c) Nous avons : $(4 = 2p) \Leftrightarrow (p = 2)$.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{2^2} \int (1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

d) Soit : $(6 = 2p) \Leftrightarrow (p = 3)$

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \, dx &= \frac{1}{2^3} \int (1 - \cos 2x)^3 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(x - \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + 3 \frac{\sin 4x}{8} \right) - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x - \frac{3}{2} \sin 2x + 3 \frac{\sin 4x}{8} \right) - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x - \frac{3}{2} \sin 2x + 3 \frac{\sin 4x}{8} \right) - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\
&= \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C
\end{aligned}$$

Exercice

N° 406. Évalue l'intégrale de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin^3 3x$ c) $f(x) = \sin^5 3x$ e) $f(x) = \sin^7 x$ g) $f(x) = \sin^4 2x$
 b) $f(x) = \cos^3 2x$ d) $f(x) = \cos^6 x$ f) $f(x) = \cos^5 x$ h) $f(x) = \cos^4 \frac{1}{2}x$

b.9 Intégration des fonctions produits $\cos^n x \sin^m x$

1^e cas : n et m sont pairs ; soit $n = 2p$ et $m = 2q$

$$\cos^n x \sin^m x = \cos^{2p} x \cdot \sin^{2q} x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 + \cos 2x)^p}{2^p} \cdot \frac{(1 - \cos 2x)^q}{2^q} \\
&= \frac{1}{2^{p+q}} (1 + \cos 2x)^p (1 - \cos 2x)^q
\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int \cos^n x \cdot \sin^m x \, dx = \frac{1}{2^{p+q}} \int (1 + \cos 2x)^p (1 - \cos 2x)^q \, dx$$

2^e cas : un des entiers naturels est impair ; soit $n = 2p + 1$

$$\cos^n x \sin^m x = (\cos^2 x)^p \sin^m x \cos x = (1 - \sin^2 x)^p \sin^m x \cos x$$

$$\text{D'où : } \int \cos^n x \sin^m x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^p \sin^m x \cos x \, dx$$

$$\int (1 - \sin^2 x)^p \sin^m x \, d(\sin x) \quad \text{ou} \quad \int (1 - t^2)^p t^m \, dt \quad (\text{avec } t = \sin x)$$

3^e cas : n et m sont impairs

Ce cas se ramène au précédent en considérant n impair ou m impair.

Exercice résolu

ER 144. Calcule :

1. $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$

2. $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$

3. $\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx$

4. $\int \cos^3 2x \sin^2 2x \, dx$

Résolution

1. $n = 4$ et $m = 2$ sont pairs

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^2 x &= (\cos^2 x)^2 \cdot \sin^2 x \\
&= \frac{(1 + \cos 2x)^2}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int \cos^4 x \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + C \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + C \end{aligned}$$

2. Soit $m = 3$, impair.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= - \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) \\ &= - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

3. Soit $n = 5$, impair

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin^3 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^3 x \cos x \, dx \\ &= \int (\sin^3 x - 2 \sin^5 x + \sin^7 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{3} \sin^6 x + \frac{1}{8} \sin^8 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \cos^3 2x \sin^2 2x \, dx &= \int (1 - \sin^2 2x) \sin^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin^2 2x - \sin^4 2x) d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{\sin^5 2x}{5} \right) + C \end{aligned}$$

Exercice

N° 407. Détermine la primitive de chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$ e) $f(x) = \cos^3 x \sin^6 x$ i) $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$
 b) $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$ f) $f(x) = \cos^4 x \sin^5 x$ j) $f(x) = \cos^4 2x \sin^3 2x$
 c) $f(x) = \cos^3 x \sin^5 x$ g) $f(x) = \cos^6 x \sin^5 x$ k) $f(x) = \sin^{11} x \cdot \cos^3 x$
 d) $f(x) = \cos^7 x \sin^2 x$ h) $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$

b.10 Intégration des fonctions quotients $\frac{\cos^n x}{\sin^m x}$ et $\frac{\sin^n x}{\cos^m x}$

1^{er} cas : n est impair, soit $n = 2p+1$

$$\begin{aligned} * \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^p}{\sin^m x} \cos x \, dx = \begin{cases} \int \frac{(1 - \sin^2 x)^p}{\sin^m x} d(\sin x) \\ \frac{(1 - t^2)^p}{t^m} dt \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \int \frac{(1 - \sin^2 x)^p}{\sin^m x} d(\sin x) \\ \frac{(1 - t^2)^p}{t^m} dt \end{cases} \text{ avec } t = \sin x \\ * \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^p}{\cos^m x} \sin x \, dx = \begin{cases} - \int \frac{(1 - \cos^2 x)^p}{\cos^m x} d(\cos x) \\ - \int \frac{(1 - t^2)^p}{t^m} dt \end{cases} \text{ avec } t = \cos x \end{aligned}$$

2^e cas : n est pair, soit $n = 2p$

$$* \int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^p}{\sin^m x}$$

$$* \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^p}{\cos^m x} dx$$

Exercice résolu

Calcule :

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

3. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$

5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$

2. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

4. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$

Résolution

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx \\ & = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) d(\sin x) \\ & = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} dx \\ & = \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ & = \int \frac{dx}{\cos^4 x} - \tan x \\ & = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos^2 x} - \tan x \\ & = \int \frac{1+\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - \tan x \\ & = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - \tan x \\ & = \tan x + \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - \tan x \\ & = \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x d(\tan x) \\ & = \frac{1}{3} \tan^3 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^3 x} \sin x dx \\ & = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt \quad \text{avec } t = \cos x \\ & = -\int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right) dt \\ & = \frac{1}{2t^2} + 2 \ln|t| - \frac{1}{2} t^2 + C \\ & = \frac{1}{2 \cos^2 x} + 2 \ln|\cos x| - \frac{1}{2} \cos^2 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx \\ & = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x \right) dx \\ & = -\cot x - 2x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ & = -\frac{3}{2} x - \cot x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \int \frac{\sin^4 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 3x)^2}{\cos^2 3x} dx \\ & = \int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - 2 + \cos^2 3x \right) dx \\ & = \frac{1}{3} \tan 3x - 2x + \int \cos^2 3x dx \\ & = \frac{1}{3} \tan 3x - 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) dx \\ & = \frac{1}{3} \tan 3x - 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C \\ & = -\frac{3}{2} x + \frac{1}{3} \tan 3x + \frac{1}{12} \sin 6x + C \end{aligned}$$

Exercice

N° 408. Calcule l'intégrale de chaque fonction.

a) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}$

d) $f(x) = \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}$

g) $f(x) = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^4 x}$

$$\begin{aligned} \text{b)} f(x) &= \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \\ \text{c)} f(x) &= \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} f(x) &= \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \\ \text{f)} f(x) &= \frac{\sin^8 x + \cos^7 x}{\cos^4 x \sin^6 x} \end{aligned}$$

b.11 Intégration de $\tan^n x$ et $\cot^n x$

Les identités classiques : $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ et $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ permettent d'écrire, pour tout naturel n ,

$$\begin{array}{l|l} * \quad \tan^n x = \tan^2 x \cdot \tan^{n-2} x & * \quad \cot^n x = \cot^2 x \cdot \cot^{n-2} x \\ \quad = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan^{n-2} x & \quad = \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cot^{n-2} x \\ \quad = \frac{\tan^{n-2}}{\cos^2 x} - \tan^{n-2} x & \quad = \frac{\cot^{n-2} x}{\sin^2 x} - \cot^{n-2} x \end{array}$$

D'où :

$$* \quad \int \tan^n x \, dx = \int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x} \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$* \quad \int \cot^n x \, dx = \int \frac{\cot^{n-2} x}{\sin^2 x} \, dx - \int \cot^{n-2} x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

Remarque

Les intégrales des fonctions $\tan^n x$ et $\cot^n x$ peuvent être ramenées à celles du paragraphe précédent en écrivant :

$$\tan^n x = \frac{\sin^n x}{\cos^n x} \quad \text{et} \quad \cot^n x = \frac{\cos^n x}{\sin^n x}.$$

Exercice résolu

ER 145. Calcule :

$$\text{a)} \int \tan^5 3x \, dx \quad \text{b)} \int \cot^5 x \, dx \quad \text{c)} \int \cot^4 2x \, dx \quad \text{d)} \int \tan^4 x \, dx$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \tan^5 3x \, dx &= \int \tan^2 3x \cdot \tan^3 3x \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - 1 \right) \tan^3 3x \, dx \\ &= \int \frac{\tan^3 3x}{\cos^2 3x} \, dx - \int \tan^3 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int \tan^3 3x \cdot d(\tan 3x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - 1 \right) \tan 3x \, dx \\ &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \int \frac{\tan 3x}{\cos^2 3x} \, dx + \int \tan 3x \, dx \\ &= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{3} \int \tan 3x \, d(\tan 3x) + \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{6} \tan^2 3x - \frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \cot^5 x \, dx &= \int \cot^2 x \cdot \cot^3 x \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cot^3 x \, dx \\ &= \int \frac{\cot^3 x}{\sin^2 x} dx - \int \cot^3 x \, dx \\ &= - \int \cot^3 x \, d(\cot x) - \int \cot^2 x \cdot \cot x \, dx \\ &= - \frac{\cot^4 x}{4} - \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cot x \, dx \\ &= - \frac{\cot^4 x}{4} - \int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx + \int \cot x \, dx \\ &= - \frac{\cot^4 x}{4} + \int \cot x \, d(\cot x) + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= - \frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \cot^4 2x \, dx &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1 \right) \cot^2 2x \, dx \\ &= \int \frac{\cot^2 2x}{\sin^2 2x} dx - \int \cot^2 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \cot^2 2x \, d(\cot 2x) - \int \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1 \right) dx \\ &= -\frac{1}{6} \cot^3 2x + \frac{1}{2} \cot 2x + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan^2 x \, dx \\ &= \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \, dx &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx \\ &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} dx \\ &= \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 1 \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^4 x} - 2 \tan x + x \\ &= \int \frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x} dx - 2 \tan x + x \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - 2 \tan x + x \\ &= \tan x + \int \tan^2 x \, d(\tan x) - 2 \tan x + x \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C \end{aligned}$$

Exercice

N° 409.

Evalue les primitives suivantes :

$$a) \int \cot^5 3x dx$$

$$b) \int \tan^6 \frac{x}{2} dx$$

$$c) \int \tan^4 \frac{3x}{4} dx$$

V.4. INTEGRALES IMPROPRES SIMPLES

V.4.1. DEFINITION

On appelle intégrale impropre, toute intégrale à bornes infinies.

V.4.2. CALCUL DES INTEGRALES IMPROPRES

$$\begin{array}{l} a) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \\ b) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} c) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \\ = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx \\ + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx \end{array} \right.$$

Remarque

Lorsqu'une intégrale donne une valeur α finie alors on dit qu'elle converge vers α . Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Exercices résolus

ER 146.1. Calcule puis déduis-en la convergence de :

$$a) I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

$$c) L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$e) M = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$b) K = \int_{-\infty}^0 e^{-3x} dx$$

$$d) J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$$

Résolution

$$\begin{aligned} a) \int_2^{+\infty} x^{-3} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b x^{-3} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{8} \right] \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

I converge vers $\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} b) K &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{3x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} e^0 - \frac{1}{3} e^{3a} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

K converge vers $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} d) J &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{4+x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\text{Arc tan } \frac{x}{2} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\text{Arc tan } \frac{b}{2} - \text{Arc tan } 0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Arc tan } \infty \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

J converge vers $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} e) M &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b] = +\infty \end{aligned}$$

M diverge.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } L &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\text{Arc tan } x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\text{Arc tan } x]_0^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\text{Arc tan } a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\text{Arc tan } b) \\
 &= \pi \\
 &\text{L converge vers } \pi.
 \end{aligned}$$

Exercice

N° 410. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 2e^{\sqrt{2x}} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$

c) $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

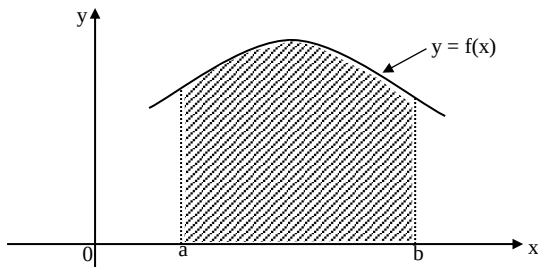
V.5. APPLICATIONS DES INTEGRALES

V.5.1. AIRE DE LA SURFACE D'UNE COURBE : QUADRATURE

c. Aire d'une surface plane en coordonnées cartésiennes

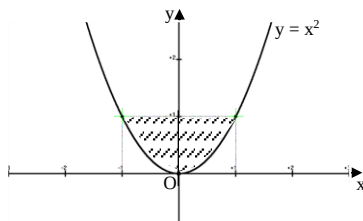
c.1 Aire d'une surface simple

Soit f une fonction continue positive sur $I = [a, b]$. L'aire (ou la quadrature) de la surface limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est définie par : $A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive de f .



Exercices résolus

ER 147.1. Détermine l'aire de la surface limitée par la courbe d'équation $y = x^2$, l'axe Ox et les droites $x = -1$ et $x = 1$.



Résolution

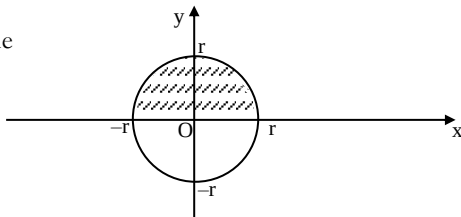
$$A = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

ER 148.2. Trouve l'aire du cercle centré à l'origine et de rayon r

Résolution

Soit $x^2 + y^2 = r^2$, l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r .

$$(x^2 + y^2 = r^2) \Rightarrow (y = \pm \sqrt{r^2 - x^2})$$



Désignons par A' l'aire de la demi-surface du cercle : $A' = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Posons : $x = r \sin \theta$

$$r^2 - x^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \theta$$

$$dx = r \cos \theta d\theta$$

$$= r^2 \cos^2 \theta$$

Changeons les bornes d'intégration en fonction de la nouvelle variable θ .

$$(-r = r \sin \theta) \Leftrightarrow (\sin \theta = -1) \text{ et } (r = r \sin \theta) \Leftrightarrow (\sin \theta = 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\theta = -\frac{\pi}{2} \right) \quad \Leftrightarrow \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Par suite, } A' = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2} r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} r^2 \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4} r^2 \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}$$

L'aire A de la surface de ce cercle est $A = 2A'$ ou $A = \pi r^2$ u.s.

Remarques

- On peut de façon analogue déterminer l'aire de la surface limitée par la courbe $x = f(y)$, l'axe Oy et les droites d'équations $y = c$ et $y = d$.

– Si $\forall x \in [a, b]$ la fonction f ne garde pas le même signe alors on subdivise l'intervalle $I = [a, b]$ en deux sous-intervalles tels que :

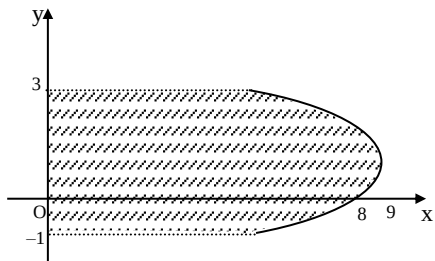
$$\forall x \in [a, c], f(x) > 0 \quad \text{et} \quad A_1 = \int_a^c f(x) dx$$

$$\forall x \in [c, b], f(x) < 0 \quad \text{et} \quad A_2 = -\int_c^b f(x) dx. \quad \text{L'aire totale est} \quad A = A_1 + A_2$$

ER 149.3. Déterminer l'aire de la surface limitée par la parabole d'équations $x = 8 + 2y - y^2$, l'axe Oy et les droites $y = -1$ et $y = 3$.

Résolution

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy \\ &= \left[8y + y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^3 \\ &= \frac{92}{3} \text{ u.s.} \end{aligned}$$



ER 150.4. Déterminer l'aire de la surface

comprise entre la courbe

d'équation $y = \cos x$ et l'axe

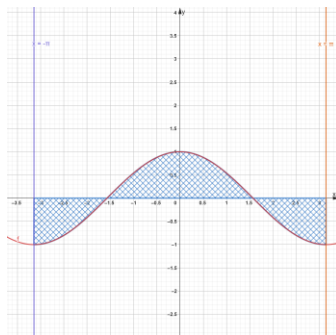
Ox

dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Résolution

$$\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi],$$

$$f(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) > 0.$$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= -[\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= -[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi)]$$

$$= 1$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 \text{ u.s.}$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos x dx$$

$$= -[\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -(\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}))$$

$$= 1$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$$

$$= [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

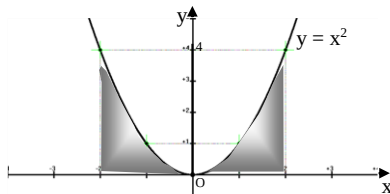
$$= 2$$

ER 151.5. Déterminer l'aire du domaine limitée par la droite d'équation $y = x^2$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Résolution

Nous pouvons calculer l'aire demandée en utilisant soit la variable x soit la variable y .

$$A = \int_{-2}^2 x^2 dx$$



$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{16}{3}$$

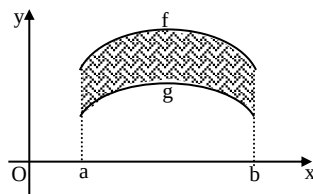
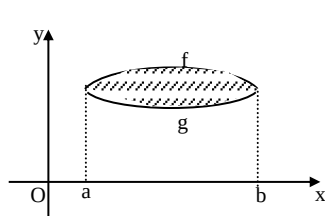
c.2 Aire de la surface comprise entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues et gardant le même signe sur $I = [a, b]$.

Procédé :

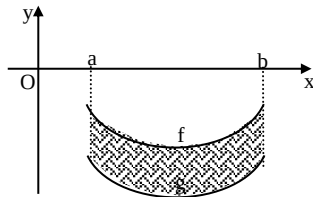
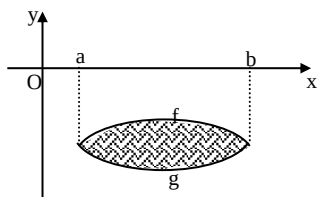
- Déterminer si possible les points d'intersection de deux courbes
 $y = f(x)$ et $y = g(x)$;
- Si les fonctions ne sont pas représentées graphiquement, étudier les signes de $(f - g)(x)$ pour déterminer la courbe supérieure et / ou inférieure ;
- calculer l'aire en se référant à l'un des cas suivants :

a) Les deux fonctions f et g sont positives sur $[a, b]$



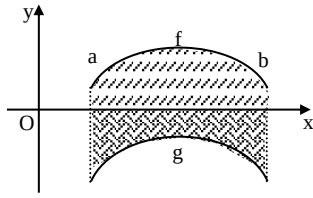
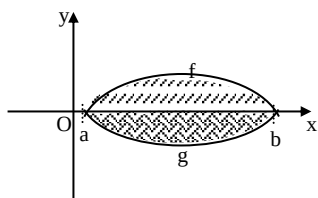
$$A = \int_a^b (f - g)(x) \, dx$$

b) Les deux fonctions f et g sont négatives sur $[a, b]$



$$A = -\int_a^b (f - g)(x) \, dx$$

c) La fonction f est positive et la fonction g est négative sur $[a, b]$



$$A = \int_a^b (f - g)(x) \, dx$$

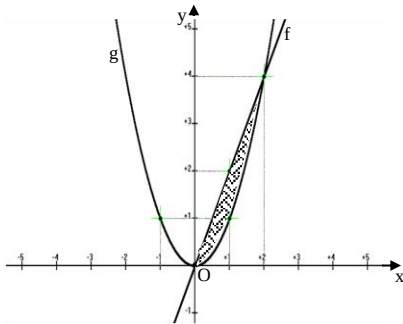
Note :

De la même manière, on peut déduire des situations par rapport à la variable y .

Exercices résolus

ER 152.1. Détermine l'aire comprise entre les courbes $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

Résolution



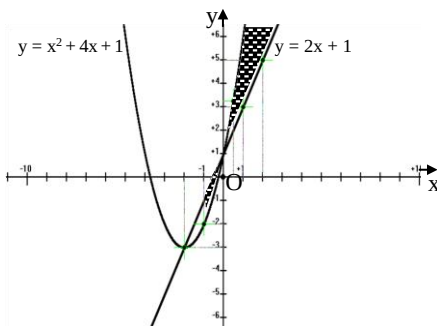
Le graphique montre que dans $[0, 2]$ la droite est la courbe supérieure.

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) \, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ u. s.}$$

ER 153.2. Evalue l'aire du domaine limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 4x + 1$ et $y = 2x + 1$ dans l'intervalle $[-1, 2]$.

Résolution

Posons $f(x) = x^2 + 4x + 1$; $g(x) = 2x + 1$ et étudions les signes de $k(x) = f(x) - g(x)$.



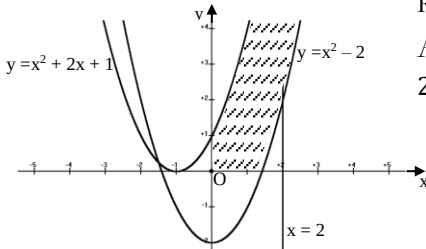
$$k(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
		$f < g$		$f > g$		

$$A = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] \, dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)] \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\
&= \frac{22}{3} \text{ u.s.}
\end{aligned}$$

ER 154.3. Calcule l'aire enfermée entre les courbes $y = x^2 + 2x + 1$; $y = x^2 - 2$; $x = 0$; $y = 0$ et $x = 2$.

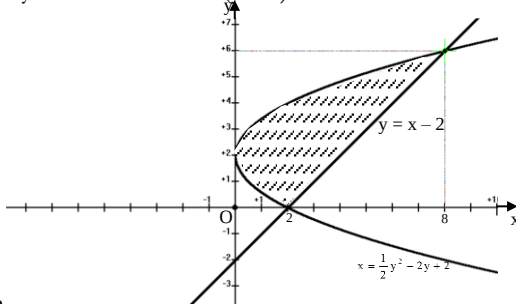


Résolution

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 + 2x + 1) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 [(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2)] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^{\sqrt{2}} + [x^2 + 3x]_{\sqrt{2}}^2 \\ &= 10 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ u.s.} \end{aligned}$$

ER 155.4. Calcule l'aire comprise entre les courbes représentatives des équations

$$y = x - 2 \text{ et } 2x = (y - 2)^2.$$



Résolution

En considérant la variable y , le problème est facile à résoudre.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 \left[(y + 2) - \frac{(y - 2)^2}{2} \right] dy \\ &= 18 \text{ u.s.} \end{aligned}$$

Remarque

Si l'on évalue l'aire de cet exercice en considérant la variable x , on commettra une erreur en considérant les bornes 2 et 8 points d'intersection de deux courbes.

Dans ce cas, une seule partie de l'aire sera donc évaluée.

Afin d'éviter cela, il est conseillé de subdiviser la courbe $(y - 2)^2 = 2x$ en deux branches.

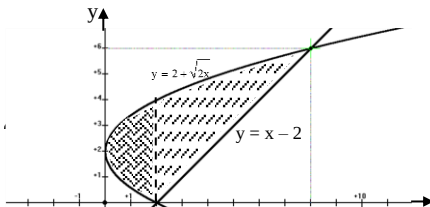
$$\text{En effet, } [(y - 2)^2 = 2x] \Leftrightarrow (|y - 2| = \sqrt{2x})$$

$$\Leftrightarrow (y - 2 = \sqrt{2x} \text{ ou } -y + 2 = \sqrt{2x})$$

$$\Leftrightarrow (y = 2 + \sqrt{2x} \text{ ou } y = 2 - \sqrt{2x}).$$

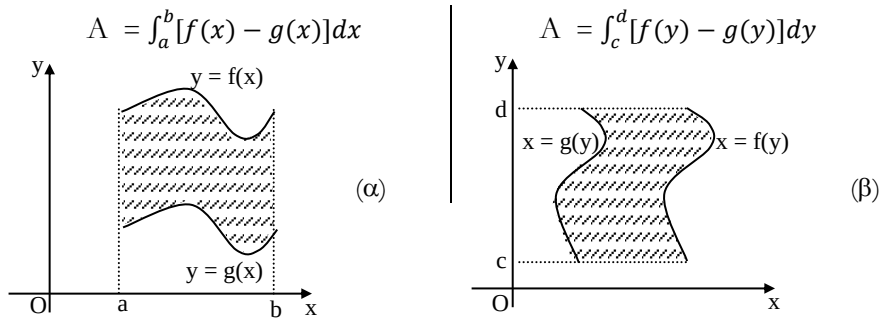
La courbe est subdivisée en $y = 2 + \sqrt{2x}$ (branche supérieure) et $y = 2 - \sqrt{2x}$ (branche inférieure).

Dans ce cas,



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 [2 + \sqrt{2x} - (2 - \sqrt{2x})] dx + \int_2^8 [2 + \sqrt{2x} - (x - 2)] dx \\
 &= \int_0^2 2\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} dx + \int_2^8 (4 - x + \sqrt{2x}) dx \\
 &= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_0^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_2^8 \\
 &= 18 \text{ u.s.}
 \end{aligned}$$

En général, le graphique des courbes représentatives des fonctions considérées facilite le choix de la variable d'intégration.



Il est aisé d'utiliser x pour variable d'intégration dans le graphique (α) et y pour le graphique (β).

Exercices

- N° 411. Détermine l'aire du domaine compris entre les courbes d'équations :
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$ dans l'intervalle $[0, 1]$; $[-1, 2]$; $[-1, 1]$
 - $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$ dans $[0, 1]$
 - $f(x) = x - 4$ et $y^2 = 2x$
 - $f(x) = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ dans $[0, 1]$
- N° 412. Calcule l'aire enfermée entre les courbes d'équations $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^2 - 2$ et les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x = 2$.
- N° 413. Détermine l'aire comprise entre la parabole $y = -x^2 + 4x + 6$ et la corde joignant les points $(1, 9)$ et $(4, 6)$.
- N° 414. Calcule l'aire comprise entre les droites $x = 0$ et $x = 4$ et les courbes $y = x^2$ et $y = x^3$.
- N° 415. Calcule l'aire de la région comprise entre les graphiques de f et g pour x

restreint à l'intervalle indiqué.

- a) $y = 6 - 3x^2$ et $g(x) = 3x$ $[0, 2]$ c) $y = x^3 - 4x + 2$ et $y = 2$ $[-1, 3]$
 b) $y = x^2$ et $y = x^3$ $[-1, 2]$

N° 416. Calcule l'aire de la région comprise entre les graphiques de deux courbes

d'équations suivantes de $x = 0$ à $x = \pi$

- a) $y = \sin 4x$ et $y = 1 + \cos \frac{1}{3}x$ b) $y = 4 + \cos 2x$ et $y = 3\sin \frac{1}{2}x$

N° 417. Détermine l'aire de la surface limitée par les courbes d'équations :

- a) $y = 6x - x^2$ et $y = x^2 - 2x$
 b) l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 4$ et la droite $d \equiv y = 5 - x$ ($x > 0$)
 c) des ellipses d'équations $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ et $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
 d) les courbes d'équations $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ et $\rho = a$.
 e) le cercle d'équation $\rho = 2a \cos \theta$ et la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$

N° 418. Après avoir représenté la courbe d'équation $y = x^2 \ln x$, calcule l'aire de

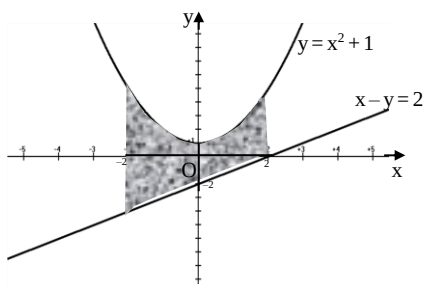
la région comprise entre cette courbe, l'axe Ox et la droite d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

N° 419. Dans un système d'axes rectangulaires, on considère dans l'intervalle $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, les courbes d'équations $y = \tan^2 x$ et $y = 2\cos^2 x$.

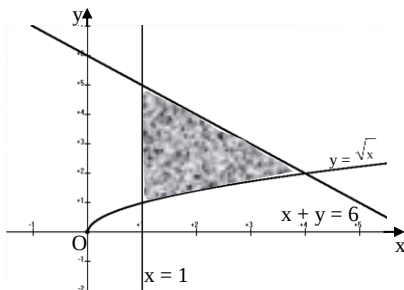
Détermine l'aire de la surface comprise entre les deux courbes.

N° 420. Détermine l'aire de la surface hachurée dans chacun des cas suivants :

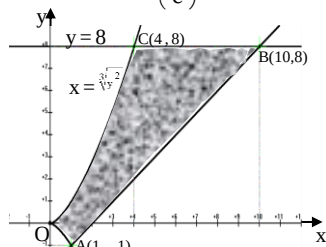
(a)



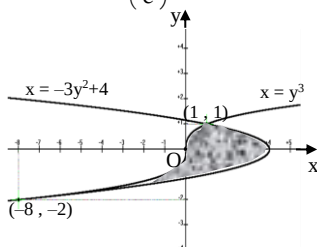
(b)

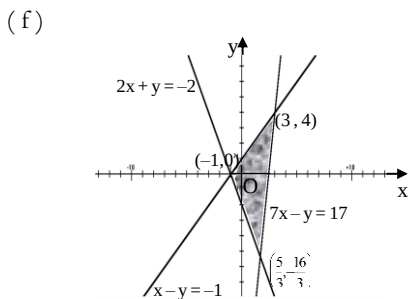
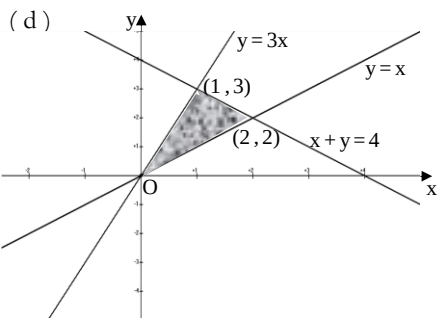


(c)



(e)





d. Aire d'une surface en coordonnées paramétriques

Soit la fonction f d'équations paramétriques :

$$f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

L'aire de la surface limitée par un arc de f est :

$$A = \int_a^b y dx = \int_a^b y(t) x'(t) dt$$

Exercices résolus

ER 156.1. Détermine l'aire de la surface limitée par l'astroïde d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Résolution

$$* x' = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\begin{aligned} * y(t)x'(t) &= -3a^2 \cos^2 t \sin^4 t \\ &= -3a^2 \sin^4 t + 3a^2 \sin^6 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } A &= \int_0^{2\pi} (-3a^2 \sin^4 t + 3a^2 \sin^6 t) dt \\ &= -3a^2 \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 6t \right]_0^{2\pi} + 3a^2 \left[\frac{5}{16}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{64}\sin 4t + \frac{1}{48}\sin^3 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{8} a^2 \text{ u.s.} \end{aligned}$$

ER 157.2. Détermine l'aire de la surface limitée par la cycloïde d'équations

$$\text{paramétriques : } \begin{cases} x = 4t \\ y = t^2 + 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 8$$

Résolution

$$\begin{aligned} \text{Déterminons } x'(t) = 4 \text{ et } A &= 4 \int_0^8 (t^2 + 4) dt = 4 \left[\frac{t^3}{3} + 4t \right]_0^8 \\ &= \frac{2432}{3} \text{ u.s.} \end{aligned}$$

Exercice

N° 421. Détermine l'aire de la surface limitée par chacune des courbes suivantes:

$$\text{a) } \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

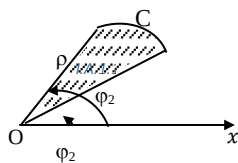
e. Aire d'une surface limitée par une courbe en coordonnées polaires

Soit la courbe C d'équation polaire $\rho = \rho(\omega)$

L'aire de la surface limitée par la courbe d'équation

$\rho = \rho(\omega)$, les rayons $\omega = \theta_1$ et $\omega = \theta_2$ est :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\omega$$



Exercices résolus

ER 158.1. Détermine l'aire de la surface limitée par la courbe d'équation $\rho = 1 + \sin \omega$

lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Résolution

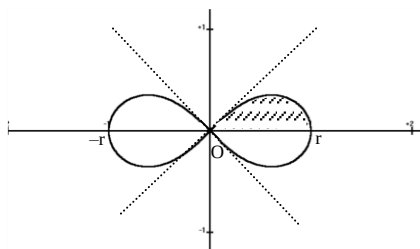
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \omega)^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin \omega + \sin^2 \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega d\omega \\ &= \left[\frac{1}{2} \omega \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\cos \omega]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\omega) d\omega \\ &= \left[\frac{1}{2} \omega \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\cos \omega]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4} \omega \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} [\sin 2\omega]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\pi}{8} + 1 \end{aligned}$$

ER 159.2. Etablis l'aire de la partie limitée par la lemniscate de Bernoulli d'équation

$$\rho = r\sqrt{\cos 2\omega} \text{ lorsque } \omega \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Résolution

Le rayon vecteur décrit le quart de la figure quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. $\rho^2 = r^2 \cos 2\omega$



$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\omega = \left[\frac{r^2}{4} \sin 2\omega \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{r^2}{4}$$

et $A = r^2$.

Exercices

N° 422. Trouver l'aire de la surface limitée par les courbes ci – après et les rayons vecteurs donnés :

a) $\rho = \tan \theta$, $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

N° 423. Trouver l'aire de la surface limitée chacune des courbes suivantes :

a) $\rho^2 = 4 \sin 2\theta$ b) $\rho = \cos 3\theta$ c) $\rho = 2 - \sin \theta$ d) $\rho^2 = a^2(1 - \cos \theta)$

V.5.2. CALCUL DE LA LARGEUR D'UNE COURBE

f. *Longueur d'une courbe en coordonnées cartésiennes*

Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, b]$ et admettant une dérivée f' continue sur $]a, b[$. La longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$ est :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Exercices résolus

ER 160.1. Calcule la longueur de la courbe définie par $y = 1 - \ln \cos x$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Résolution

$$y = 1 - \ln \cos x ; y' = \tan x$$

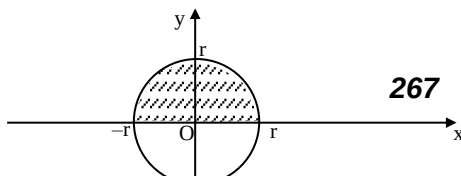
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \\ &= \left[\ln \left| \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \right| = \ln \left| \tan \frac{\pi}{8} \right| \end{aligned}$$

ER 161.2. Détermine la longueur du cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$

Résolution

$$(x^2 + y^2 = r^2) \Leftrightarrow (y = \pm \sqrt{r^2 - x^2})$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= \pi r\end{aligned}$$

$$L = 2\pi r$$

Exercices

N° 424. Trouve la longueur de l'ellipse d'équation $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

N° 425. Calcule la longueur de la courbe d'équation $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ $1 \leq y \leq 2$

N° 426. Détermine la longueur de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^3}$ $0 \leq x \leq 5$

N° 427. Détermine la longueur de la courbe d'équation $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $1 \leq x \leq 2$

g. Longueur d'une courbe en coordonnées paramétriques

Soit la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

où $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions continues et dérivables sur $[\alpha, \beta]$.

La longueur de la courbe est : $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$

Exercices résolus

ER 162.1. Détermine la longueur de la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 4)$$

Résolution

$$\begin{aligned}x'(t) &= e^t \cos t - e^t \sin t & \text{et} & & y'(t) &= e^t \sin t + e^t \cos t \\ &= e^t (\cos t - \sin t) & & & &= e^t (\sin t + \cos t) \\ x'^2 &= e^{2t} (1 - 2 \cos t \sin t) & & & y'^2 &= e^{2t} (1 + 2 \cos t \sin t)\end{aligned}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} (e^4 - 1)$$

ER 163.2. Détermine la longueur d'une arcade de la cycloïde définie par :

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Résolution

$$x' = 2(1 - \cos t) \quad \text{et} \quad y' = 2 \sin t$$

$$\text{Nous avons : } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1 - \cos t)} dt = \int_0^{2\pi} 4 \sin \frac{t}{2} dt = 16$$

Exercice

N° 428. Trouve la longueur de chacune des courbes définie par :

$$\text{a)} \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^3 - t^2 \end{cases} (1 \leq t \leq 3) \quad \text{b)} \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{c)} \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \text{Arc tan } t \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$$

b. *Longueur d'une courbe en coordonnées polaires*

Soit la courbe d'équation $\rho = f(\omega)$ ($\alpha \leq \omega \leq \beta$) telle que $f'(\omega)$ soit continue. La longueur est $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\omega$.

Exercices résolus

ER 164.1. Trouve la longueur de la courbe

$$\text{définie par } \rho = 2 \cos \omega \quad 0$$

$$\leq \omega \leq \pi$$

Résolution

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \omega + 4 \sin^2 \omega} d\omega$$

$$= 2 \int_0^{\pi} d\omega$$

$$= 2[\omega]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi$$

ER 165.2. Détermine la demi-longueur de la

$$\text{cardioïde } \rho = 3(1 + \cos \omega)$$

Résolution

$$\frac{1}{2}L = \int_0^{\pi} \sqrt{9(1 + \cos \omega)^2 + 9 \sin^2 \omega} d\omega$$

$$= 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \omega)} d\omega$$

$$= 6 \int_0^{\pi} \cos \frac{\omega}{2} d\omega = 12$$

Exercices

N° 429. Détermine la longueur de la courbe d'équation $\rho = \frac{2}{3}(1 + \cos \omega)$ $0 \leq \omega \leq 2\pi$

N° 430. Détermine la longueur de la courbe d'équation $\rho = \sec^2 \frac{t}{2}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

N° 431. Evalue la longueur de la cissoïde d'équation $\rho = 2 \tan \theta \sin \theta$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

V.5.3. VOLUME DES CORPS DE REVOLUTION : CUBATURE

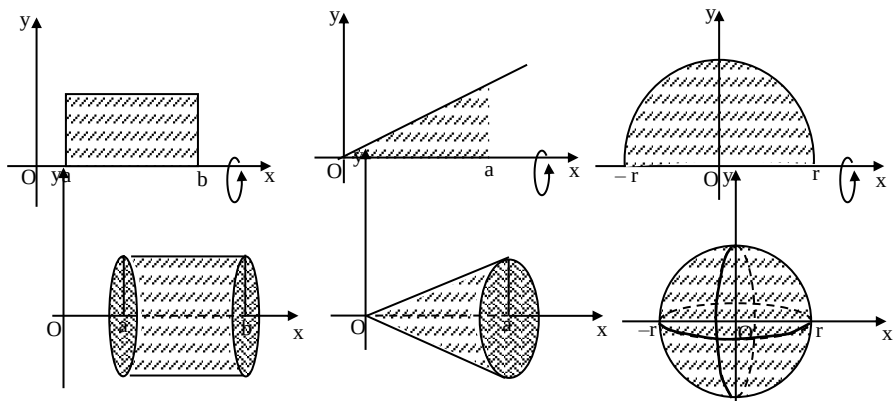
i. *Notion*

Soit d un axe et A une surface plane (ou une région du plan).

En faisant tourner A autour de l'axe d, on obtient un solide S dit de révolution dont on peut déterminer le volume. L'axe autour duquel A tourne est appelé axe de rotation ou de révolution. On dit que S est engendré par la rotation de A autour d'un axe d.

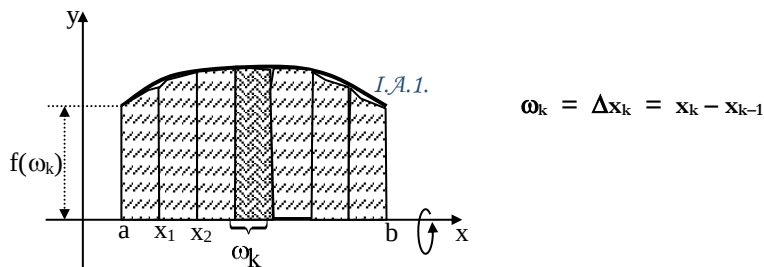
En particulier, si A est un rectangle, le solide engendré par rotation est un cylindre circulaire droit. Si A est demi-cercle dont les extrémités du diamètre sont $(-r, 0)$ et $(r, 0)$ alors S est une sphère. Si A est un triangle rectangle dont un côté de

l'angle droit coïncide avec l'axe d, le solide S engendré est un cône circulaire droit.
Si A est une demi ellipse à l'origine S est une ellipsoïde de révolution,...



En procédant comme pour le calcul de l'aire de la surface limitée par une courbe C, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$, on peut établir le calcul du volume d'un solide de révolution.

En effet, soit la courbe C d'équation $y = f(x)$ définie et continue dans $[a, b]$



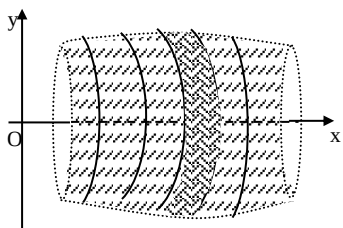
Subdivisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles et construisons sur chacun d'eux un rectangle de largeur (base) ω_k et de longueur (hauteur) $f(\omega_k)$

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n = b.$$

La rotation de chacun de ces rectangles autour de l'axe des x engendre un disque circulaire de rayon de base ω_k et de hauteur Δx_k .

Le volume de chaque disque est :

$$V = \pi [f(\omega_k)]^2 \cdot \omega_k.$$



Lorsque le nombre d'intervalles de subdivision de l'intervalle $[a, b]$ augmentent indéfiniment, Δx_k tend vers 0 et la somme de tous les volumes de différents disques tend vers une limite qui est le volume du solide recherché, aussi appelé *cubature*.

j. *Méthodes pour déterminer le volume engendré par une surface*

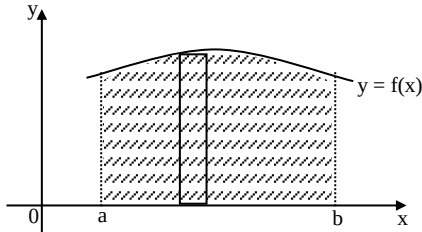
j.1 Méthode du disque

On recourt à cette méthode lorsque l'axe de rotation est à la frontière de la surface plane.

Procédé :

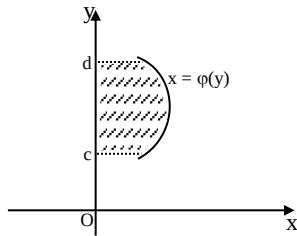
- Esquisser un croquis ressortissant la surface plane, une bande représentative perpendiculaire à l'axe de rotation et le rectangle d'approximation
- Etablir le volume du disque engendré par la rotation du rectangle autour de l'axe
- Faire la somme des volumes correspondant aux n rectangles.

Ainsi :



a) Le volume engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ autour de Ox est donné par :

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$



b) Le volume engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe d'équation $x = g(y)$, l'axe des y et les droites d'équations $y = c$ et $y = d$ autour de Oy est donné par :

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Remarque

Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $x = \alpha$, de la surface limitée par la courbe d'équation $x = g(y)$, l'axe $x = \alpha$ et les droites $y = c$ et $y = d$ est donné :

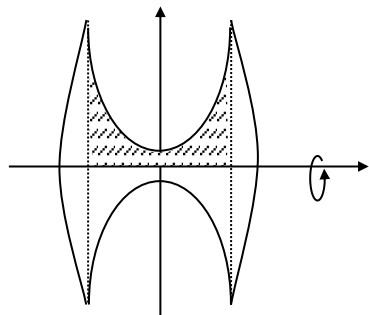
$$V = \pi \int_c^d (\alpha - x)^2 dy \quad \text{ou} \quad V = \pi \int_c^d [\alpha - g(y)]^2 dy$$

Exercices résolus

ER 166.1. Détermine le volume du solide de

révolution engendré par rotation
autour
de l'axe des x de la surface plane
limitée
par la courbe d'équation $y = x^2 + 2$ et les
droites $x = -2$ et $x = 2$.

Résolution

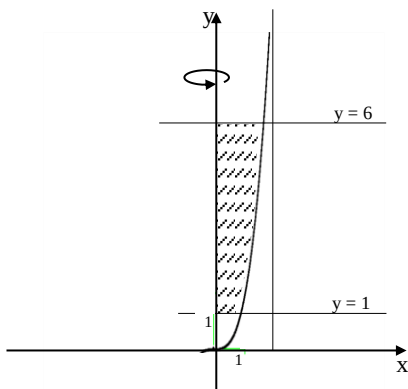


La représentation de la situation donne :

$$V = \int_{-2}^2 \pi(x^2 + 2)^2 dx = \frac{752\pi}{15}$$

ER 167.2. Détermine le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des y de la région du plan comprise entre l'axe des y , la courbe d'équation $y = x^3$ et les droites $y = 1$ et $y = 6$.

Résolution



Comme la région plane tourne autour de Oy , résolvons l'équation $y = x^3$ par rapport à x .

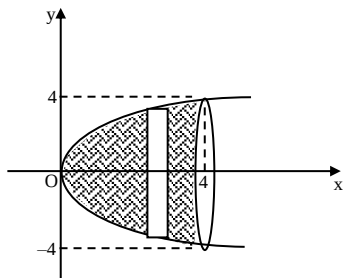
$$\text{En effet, } (y = x^3) \Leftrightarrow (x = \sqrt[3]{y})$$

$$V = \int_1^6 \pi(\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^6 = \frac{3}{5} (6^{\frac{5}{3}} - 1)$$

ER 168.3. Calcule le volume engendré la rotation autour de l'axe $x = 4$, de la surface

limitée par la parabole d'équation $y^2 = 4x$ et la droite $x = 4$.

Résolution



La droite $x = 4$ rencontre la parabole aux points $(4, 4)$ et $(4, -4)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \frac{1}{2}V &= \pi \int_0^4 (4 - x)^2 dy \quad (x = \frac{y^2}{4}) \\ &= \pi \int_0^4 (4 - \frac{y^2}{4})^2 dy \\ &= \frac{512}{15}\pi \quad \text{et } V = \frac{1024}{15}\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

ER 169.4. Calcule le volume de l'ellipsoïde de révolution engendrée par la surface plane

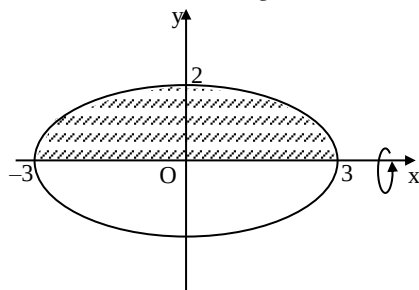
$$\text{limitée par l'ellipse d'équation } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Résolution

L'ellipsoïde est le solide engendré par la demi ellipse d'équation :

$$\begin{aligned} (9y^2 + 4x^2 = 36) &\Leftrightarrow [y^2 = 4(9 - x^2)] \\ &\Leftrightarrow \left(y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\right) \end{aligned}$$

En considérant la demi ellipse située au-dessus de l'axe Ox, nous avons :



$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 \pi \left(\frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^3 \pi \cdot \frac{4}{9} (9 - x^2) dx \\ &= \frac{8\pi}{9} \int_0^3 (9 - x^2) dx \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

En général le volume d'une ellipsoïde engendrée par la rotation autour du grand axe de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vaut $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

j.2 Méthode de la couronne

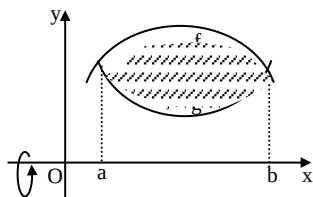
La méthode permet de déterminer le volume engendré par la rotation d'une surface comprise entre deux courbes.

Dans ce cas, l'axe de rotation n'appartient pas à la frontière de la surface plane.

Procédé :

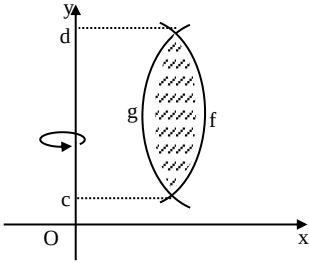
- Esquisser un croquis faisant ressortir la surface plane, une bande représentative perpendiculaire à l'axe de rotation et le rectangle d'approximation.
- Étendre les cotés du rectangle d'approximation jusqu'à la rencontre avec l'axe de rotation
- Faire tourner le rectangle autour de l'axe pour obtenir une couronne
- Calculer le volume engendré par la rotation de chaque courbe autour de l'axe
- par – Faire la différence des volumes obtenus

Ainsi, si $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont deux courbes telles que $f(x) \geq g(x)$.



Le volume d'un solide engendré par la rotation de la surface délimitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ est :

$$V = \int_a^b \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$



Le volume d'un solide engendré par la rotation de la surface délimitée par les courbes $x = f(y)$, $x = g(y)$ et les droites $y = c$ et $y = d$ est :

$$V = \int_c^d \pi \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dy$$

Remarque

Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $y = \beta$ de la surface limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$ est donné

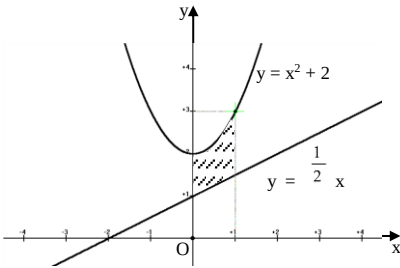
par : $V = \pi \int_a^b [\beta^2 - (\beta - y)]^2 dx$ ou $V = \pi \int_a^b \{ \beta^2 - [(\beta - f(x))]^2 \} dx$

Exercices résolus

ER 170.1. Soit les courbes $C_1 \equiv y = x^2 + 2$ et $C_2 \equiv y = \frac{1}{2}x + 1$.

Détermine le volume engendré par la rotation autour de Ox de la région comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Résolution



C_1 est au-dessus de C_2 et

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \left[(x^2 + 2)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3 \right) dx \\ &= \frac{79\pi}{20} \end{aligned}$$

ER 171.2. Détermine le volume du solide engendré par la rotation autour de Ox de la

région délimitée par les courbes d'équations $y = x^4 - 4x^2$ et $y = 4x^2$

dans

l'intervalle $[0, 2\sqrt{2}]$

Résolution

– Déterminons les points d'intersection de deux courbes par le système

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 & (i) \\ y = 4x^2 & (ii) \end{cases}$$

(ii) dans (i) : $(x^4 - 4x^2 = 4x^2) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2})$

* Si $x = 0, y = 0 : (0, 0)$ * Si $x = 2\sqrt{2}, y = 32 : (2\sqrt{2}, 32)$

* Si $x = -2\sqrt{2}, y = 32 : (-2\sqrt{2}, 32)$

– Etudions les signes de $f(x) - g(x)$ pour déterminer la courbe supérieure:

$$f(x) - g(x) = x^2(x^2 - 8)$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2		+		+	0	+		+	
$x^2 - 8$		+	0	-		-	0	+	
$f(x) - g(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

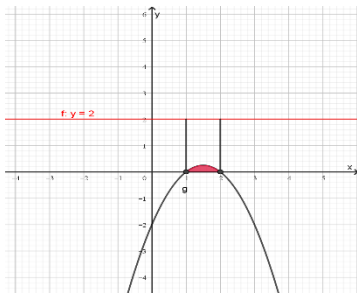
Dans $[0, 2\sqrt{2}]$, $f(x) < g(x)$ et $V = \int_0^{2\sqrt{2}} \pi[(4x^2)^2 - (x^4 - 4x^2)^2] dx$

$$= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} (-x^8 + 8x^6) dx$$

$$= \frac{2^{14}\sqrt{2}\pi}{63} \text{ u.v.}$$

ER 172.3. Détermine le volume engendré par la rotation autour de la droite $y = 2$, de la

surface limitée par la courbe d'équation $y = -x^2 + 3x - 2 = 0$ et par l'axe Ox.



Résolution

La courbe rencontre l'axe Ox aux points d'abscisses 1 et 2.

$$V = \pi \int_1^2 [2^2 - (2 - y)^2] dx$$

$$= \pi \int_1^2 (4y - y^2) dx \quad (y = -x^2 + 3x - 2)$$

$$= \left[\frac{-1}{5} x^5 + \frac{3}{2} x^4 - \frac{17}{3} x^3 + 12x^2 - 12x \right]_1^2$$

$$= \frac{19\pi}{30} \text{ u.v.}$$

j.3 Méthode du tube

Procédé

- Esquisser un croquis ressortissant la surface plane, une bande représentative parallèle à l'axe de rotation et le rectangle d'approximation
- Ecrire le volume du tube cylindrique engendré par la rotation du rectangle autour de l'axe
- Faire la somme des volumes correspondant aux n rectangles en appliquant le théorème fondamental

Ainsi dans la pratique,

- a) Le volume engendré par la rotation de la surface limitée par l'axe des x , la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ autour de Oy est donné par :

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx \quad \text{ou} \quad V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

- b) Le volume engendré par la rotation de la surface limitée par l'axe des y , la courbe d'équation $x = g(y)$ et les droites $y = c$ et $y = d$ autour de Ox est donné par : $V = 2\pi \int_c^d xy dy$ ou $V = 2\pi \int_c^d g(y) \cdot y dy$

Note :

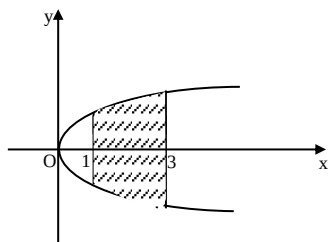
On peut aussi déterminer le volume d'un solide par rotation autour d'un axe parallèle à l'un des axes des coordonnées.

- *) Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $x = \alpha$ de la surface limitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$ est donné par : $V = 2\pi \int_a^b y(\alpha - x) dx$ ou $V = 2\pi \int_a^b (\alpha - x)f(x) dx$
- *) Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $y = \beta$ de la surface limitée par la courbe d'équation $x = g(y)$, l'axe des y et les droites $y = c$ et $y = d$ est donné par : $V = 2\pi \int_c^d x(\beta - y) dy$ ou $V = 2\pi \int_c^d (\beta - y)g(y) dy$
- *) Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $x = \alpha$ de la surface limitée par les courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$ et par les droites $x = a$ et $x = b$ est donné par : $V = 2\pi \int_a^b (f(x) - g(x))(\alpha - x) dx$ ($f(x) \geq g(x)$)

Exercices résolus

- ER 173.1. Soit la surface délimitée par la parabole $y^2 = 4x$, l'axe des x et les droites $x = 1$,
 $x = 3$. Calcule le volume engendré par la rotation de cette surface autour de Oy .

Résolution

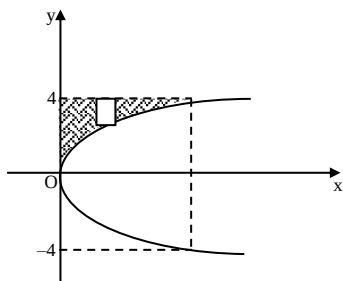


Le volume est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= 2\pi \int_1^3 x \cdot 2\sqrt{x} dx \\ &= 4\pi \int_1^3 x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^3 \\ V &= \frac{16\pi}{5} (9\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

- ER 174.2. Soit la surface délimitée par la parabole $y^2 = 8x$, l'axe des x et les droites $y = 0$
et $y = 4$ autour de Ox .

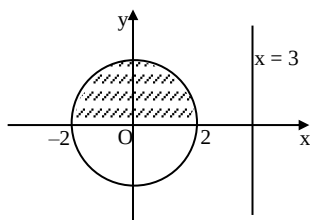
Résolution



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^4 y \cdot \frac{y^2}{8} dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^4 y^3 dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^4 = 16\pi
 \end{aligned}$$

ER 175.3. Calcule le volume engendré par la rotation autour de la droite $x = 3$, du demi-cercle $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Résolution



Nous prenons la partie positive du cercle :

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{4 - x^2} \\
 V &= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} (3 - x) dx \\
 &= 6\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx - 2\pi \int_{-2}^2 x\sqrt{4 - x^2} dx \\
 &= 12\pi^2 \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

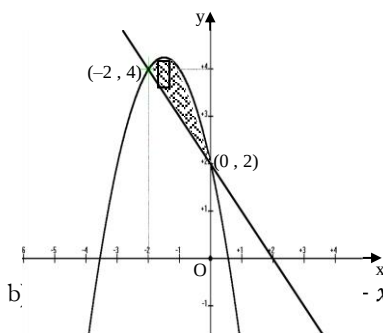
ER 176.4. Soit la surface délimitée par la parabole d'équation $y = -x^2 - 3x + 2$ et la droite

$x + y - 2 = 0$. Détermine le volume engendré par la rotation x de cette surface autour de :

a) l'axe des x

b) la droite $x = 2$

Résolution



La droite $x + y - 2 = 0$ rencontre la courbe aux points $(0, 2)$ et $(-2, 4)$

a) Le volume autour de Ox est :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^0 [(-x^2 - 3x + 2)^2 - (2 - x)^2] dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= \frac{136\pi}{15} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x)] dx &= 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= 8\pi \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

Exercices

N° 432. Calcule le volume du solide engendré par la rotation d'un disque de rayon r tournant autour :

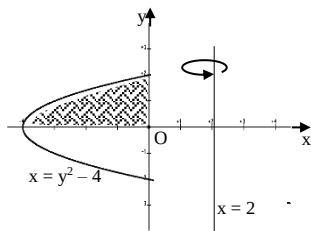
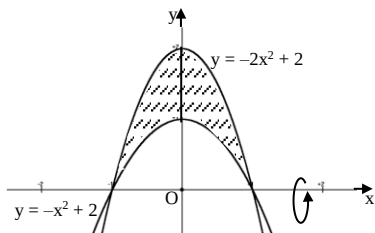
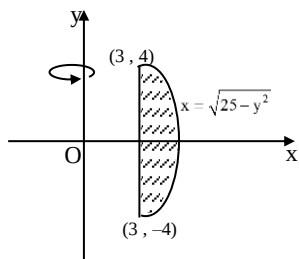
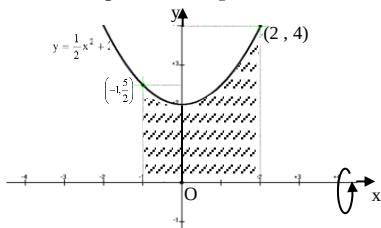
a) d'un axe situé dans le même plan que lui et tangent au disque.

b) d'un axe non sécant avec le disque et situé dans le même plan que celui-ci.

N° 433. On considère la surface limitée par les axes Ox et Oy, la courbe $y = e^x$ et la parallèle à cette courbe au point d'ordonnée 2. Détermine le volume du solide engendré par la rotation de cette surface autour de Ox.

N° 434. Détermine le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la surface limitée par les courbes d'équations $y = 1$, $xy = 1$, $y = 2$ et $x = 0$

N° 435. Etablis le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe indiqué de la région hachurée dans chacun des cas suivants :



N° 436. 294. Trouve le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe indiqué de la région limitée par :

a) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$

axe Ox

b) $y = \sin 2x$, $x = 0$, $x = \pi$ et $y = 0$

axe Ox

c) $y = (x-1)^2 + 1$, $y = -(x-1)^2 + 3$

axe Ox

d) $x + y = 1$, $x - y = -1$ et $x = 2$

axe Oy

e) $y = 2x$, $y = 4x^2$

axe Oy

f) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$

axe Ox

g) $y = 1 + \cos 3x$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$

axe Ox

h) $y^2 = x$ et $2y = x$

axe Oy

i) $y = x^2$, $y = 4$

axe $y = 4$; $x = 3$

j) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

axe $x = 2$; $y = 4$

k) $y = x^2$ et $y^2 = 8x$

axe Oy

$$l) 16y = x^2 \text{ et } y^2 = 2x$$

axe Oy

N° 437. 295. Détermine le volume engendré par la rotation autour de l'axe $y = -5$, de la région limitée par les paraboles d'équation $y = x^2 - 4$ et $y = 8 - 2x^2$.

V.6. EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES SIMPLES

V.6.1. DEFINITION

Soit $y = f(x)$ une fonction dont x est la variable indépendante.

$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ les dérivées successives de y .

On appelle équation différentielle, une relation entre x , y et les dérivées successives de y . Dans ce cas y est la fonction inconnue de l'équation.

V.6.2. EXEMPLES

- $y' + xy = x$
- $y'' - 4y' + 3y = x$
- $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + x = 0$
- $y'' = x + 1$
- $xdy - ydx = 0$
- $y' = \frac{y}{x}$
- $y' = 2xy$
- $y' - x \cdot \cos^2 y = 0$
- $xyy' - \frac{x^2+1}{y+1} = 0$

Remarques

Si la fonction $y = f(x)$ est à une seule variable indépendante alors l'équation différentielle est dite ordinaire

L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Ainsi, $y' + xy = x$ est dite équation d'ordre 1 et $y'' - 4y' + 3y = x$ est une équation d'ordre 2.

V.6.3. AUTRES DEFINITIONS

- On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle ordinaire, toute fonction vérifiant cette équation.
- On appelle solution générale ou intégrale générale d'une équation différentielle, toute fonction $y = f(x)$ dépendant de la variable indépendante x et d'une constante (respectivement de deux constantes) lorsque l'équation est du premier ordre (respectivement du second ordre)

- On appelle solution particulière d'une équation différentielle, toute fonction déduite de la solution générale $y = f(x, C)$ suivant certaines conditions.
- Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer sa solution générale ou particulière selon que les conditions initiales ne sont pas données ou sont données.

V.6.4. QUELQUES TYPES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

k. Equations différentielles du 1^e ordre : Equations à variables séparées

Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbf{R}$.

***) Equation $y' = f(x)$**

Procédé :

- Ecrire l'équation sous la forme $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ou $dy = f(x)dx$
- Intégrer membre à membre l'égalité (1)
 $(\int dy = \int f(x)dx) \Leftrightarrow (y = \int f(x)dx)$

Exercice résolu

ER 177. Résous les équations différentielles suivantes :

$$a) dy = x^2 dx \quad b) y' = 3 \quad c) y' - \cos x = 0 \quad d) y' = \frac{x}{1+x^2}$$

Résolution

$$\begin{aligned} a) (dy = x^2 dx) &\Leftrightarrow (\int dy = \int x^2 dx) \\ &\Leftrightarrow (y = \frac{1}{3}x^3 + C) \\ b) (y' = 3) &\Leftrightarrow (\frac{dy}{dx} = 3) \\ &\Leftrightarrow (dy = 3 dx) \\ &\Leftrightarrow (\int dy = \int 3 dx) \\ &\Leftrightarrow (y = 3x + C) \\ c) (y' - \cos x = 0) &\Leftrightarrow (\frac{dy}{dx} = \cos x) \\ &\Leftrightarrow (dy = \cos x dx) \\ &\Leftrightarrow (y = \sin x + C) \\ d) (y' = \frac{x}{1+x^2}) &\Leftrightarrow (\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2}) \\ &\Leftrightarrow (y = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C) \end{aligned}$$

*****) Equation $y' = f(x)y$**

Procédé :

- Ecrire l'équation sous la forme $\frac{dy}{y} = f(x)dx$
- Intégrer membre à membre l'égalité ci-dessus

Exercices résolus

ER 178.1. Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$$a) xdy - ydx = 0 \quad c) y' + xy = x \quad e) y' = x^2y$$

$$\text{b) } y' = 2xy$$

$$\text{d) } y' - x \cos^2 y = 0$$

Résolution

$$\text{a) } (x dy - y dx = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x dy = y dx) \quad \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y| = \ln|x| + \ln C)$$

$$\Leftrightarrow (|y| = e^{\ln|x| + C})$$

$$\Leftrightarrow (|y| = k \cdot e^{\ln|x|}) \quad (k = e^C)$$

$$\Leftrightarrow (|y| = k|x|)$$

ou

$$(x dy - y dx = 0) \Leftrightarrow (x dy = y dx)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|)$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y| = \ln|x| \cdot |C|)$$

$$\Leftrightarrow (|y| = |xC|) \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{b) } (y' = 2xy) \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx} = 2xy \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{y} = 2x dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \right)$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y| = x^2 + \ln C)$$

$$\Leftrightarrow (y = C \cdot e^{x^2})$$

$$\text{c) } (y' = 2xy) \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx} = x^2 y \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{y} = x^2 dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln|y| = \frac{x^3}{3} + \ln C \quad \text{ou} \quad \ln \left| \frac{y}{C} \right| = \frac{x^3}{3} \right)$$

$$\text{c) } (y' + xy = x)$$

$$\Leftrightarrow (y' = x - xy)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dy}{dx} = (1 - y)x \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{1 - y} = x dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\ln|1 - y| = \frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln \left| \frac{1}{1 - y} \right| = \frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 - y} = e^{\frac{1}{2} x^2 + C} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{ke^{\frac{1}{2} x^2}} = 1 - y \right) \quad (k = e^C)$$

$$\Leftrightarrow \left(y = 1 - \frac{1}{ke^{\frac{1}{2} x^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(y = 1 - ke^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad (k$$

$\in \mathbb{R})$

$$\text{d) } (y' - x \cos^2 y = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx} = x \cos^2 y \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{\cos^2 y} = x dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int x dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan y = \frac{x^2}{2} + C \right)$$

$$\Leftrightarrow \left[y = \text{Arc tan} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \right]$$

- Ecrire l'égalité (2) sous la forme : $dy = [F_1(x) + C_1] dx$ (3)
- Intégrer membre à membre l'égalité (3) et obtenir la solution générale :
 $y = F_2(x) + C_1(x) + C_2$ [$F_2(x)$ est la primitive de $F_1(x)$]

Exercices résolus

ER 180. Résous les équations suivantes dans $\mathbf{R}$:

a) $y'' - 3x = 0$ b) $\frac{d^2y}{dx^2} \cos^2 x = 1$

Résolution

a) $(y'' - 3x = 0) \Leftrightarrow (y'' = 3x)$
 $\Leftrightarrow (dy' = 3x dx)$
 $\Leftrightarrow (\int dy' = \int 3x dx)$
 $\Leftrightarrow (y' = \frac{3}{2}x^2 + C_1)$ (i)

D'autre part,

$(y' = \frac{3}{2}x^2 + C) \Leftrightarrow (\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + C_1)$
 $\Leftrightarrow [dy = (3x^2 + C_1) dx]$
 $\Leftrightarrow [\int dy = \int (3x^2 + C_1) dx]$
 $\Leftrightarrow (y = x^3 + C_1x + C_2)$ (ii)

(ii) est la solution générale de l'équation donnée.

b) $(y'' \cos^2 x = 1) \Leftrightarrow (y'' = \frac{1}{\cos^2 x})$
 $\Leftrightarrow (\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x})$
 $\Leftrightarrow (\int dy' = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx)$
 $\Leftrightarrow (y' = \tan x + C_1)$
 $\Leftrightarrow [\int dy = \int (\tan x + C_1) dx]$
 $\Leftrightarrow (y = -\ln \cos x + C_1x + C_2)$

*) Equation du type $y'' + a y = 0$

Procédé :

i) $a > 0$	ii) $a < 0$ – Poser $a = -t^2$ – Ecrire l'équation sous la forme $y'' - t^2 y = 0$ – La solution générale de l'équation est : $y = C_1 e^{tx} + C_2 e^{-tx}$
– Poser $a = t^2$	
– Ecrire l'équation sous la forme $y'' + t^2 y = 0$	
– La solution générale de l'équation est $y = C_1 \cos tx + C_2 \sin tx$, où C_1, C_2 des constantes réelles	

Exercices résolus

ER 181.1. Résous dans **R** les équations suivantes :

a) $y'' + 3y = 0$

b) $4y'' + y = 0$

c) $y'' - 9y = 0$

Résolution

a) $y'' + 3y = 0$

Remarquons que : $a = 3 > 0$.

Posons $(t^2 = 3) \Leftrightarrow (t = \sqrt{3} \text{ ou } t = -\sqrt{3})$

La solution générale de l'équation est : $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x$

b) $(4y'' + y = 0) \Leftrightarrow (y'' + \frac{1}{4}y = 0)$. Posons : $(t^2 = \frac{1}{4}) \Leftrightarrow (t = \pm \frac{1}{2})$

La solution générale de l'équation est : $y = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$

c) $(y'' - 9y = 0) \Leftrightarrow (y'' - 3^2y = 0)$

Posons $(-t^2 = -9) \Leftrightarrow (t = \pm 3)$

La solution générale de l'équation est : $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

ER 182.2. Soit l'équation $4y'' + y = 0$ où y est une fonction en x deux fois dérivable.

Détermine les constantes C_1 et C_2 de la solution générale sachant que la courbe

représentative de la fonction passe par le point $M(0, 1)$ et admette en ce point

une tangente de coefficient angulaire 2.

Résolution

La solution générale de l'équation $4y'' + y = 0$ est : $y = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$.

D'une part, la courbe de y passe par $M(0, 1)$ c'est-à-dire : $[f(0) = 1] \Leftrightarrow (C_1 = 1)$

D'autre part, la tangente à la courbe en M a pour pente 2, ce qui implique que :

$$[f'(0) = 2] \Leftrightarrow (-\frac{1}{2}C_1 \sin\frac{x}{2} + C_2 \cos\frac{x}{2} = 2)$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}C_2 = 2)$$

$$\Leftrightarrow (C_2 = 4)$$

ER 183.3. La population du village Mbanza Mfumu Nkento dans le territoire de

Masi – manimba a doublé de 1 970 à 2 000. En quelle année cette population va-t-elle tripler ?

Résolution

Soit p la fonction population et t la variable temps.

Notons par $\frac{dp}{dt} = k \cdot p$, la variation de la population en fonction du temps,

$$\left(\int \frac{dp}{p} = \int k dt\right) \Leftrightarrow (\ln |p| = kt + C)$$

$$\Leftrightarrow (p = e^{kt+C})$$

$$\Leftrightarrow (p = e^{kt} \cdot e^C)$$

$$\Leftrightarrow (p = \lambda e^{kt}) \quad (\text{avec } \lambda = e^C, \text{ constante})$$

Pour $t = 0$ (l'an 1970), $p_0 = \lambda$ et $p = p_0 e^{kt}$

Pour $t = 30$, la population de ce village a doublé c'est-à-dire $2p_0 = p_0 e^{30k}$ (i)
 Désignons par z le temps qu'il faut pour que cette population triple, nous avons :
 $3p_0 = p_0 e^{zk}$ (ii)

$$\begin{aligned} \text{D'où le système : } \begin{cases} 2 = e^{30k} \\ 3 = e^{zk} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^z = (e^{30k})^z \\ 3^{30} = (e^{zk})^{30} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (2^z = 3^{30}) \\ &\Leftrightarrow (\ln 2^z = \ln 3^{30}) \\ &\Leftrightarrow (z \ln 2 = 30 \ln 3) \\ &\Leftrightarrow \left(z = \frac{30 \ln 3}{\ln 2} \right) \\ &\approx 47,4 \end{aligned}$$

Donc dans 47 ans et 5 mois et plus exactement entre 2 017 et 2 018.

ER 184.4. Résous l'équation $xyy' - \frac{x^2+1}{y+1} = 0$ et détermine la solution particulière

telle que la courbe intégrale passe par le point $A(1, 2)$.

Résolution

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left(xy \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y+1} \right) &\Leftrightarrow \left[y(y+1)dy = \frac{(x^2+1)dx}{x} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\int y(y+1)dy = \int \frac{x^2+1}{x} dx \right] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln |x| + C \right) \end{aligned}$$

La courbe intégrale passe par $A(1, 2)$ signifie que $f(1) = 2$.

$$\begin{aligned} [f(1) = 2] &\Leftrightarrow \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} = \frac{1^2}{2} + \ln |1| + C \right) \\ &\Leftrightarrow \left(C = \frac{25}{6} \right) \end{aligned}$$

D'où la solution particulière est : $\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln |x| + \frac{25}{6}$

Exercice

N° 438. 296. Trouve l'intégrale générale de chacune des équations données :

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $y' = x^2 + 1$ | d) $y'' + 2y' + 10y = 0$ | g) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$ |
| b) $y' - \cos x = 0$ | e) $y'' + y' = 0$ | |
| c) $e^{2x} y'' = 4(e^{4x} + 1)$ | f) $y'' = -9 \sin 3x$ | |

V.7. APPLICATIONS DES INTEGRALES DANS LES AUTRES DISCIPLINES

Dans ce paragraphe, il est question de faire quelques exercices résolus pour montrer l'applicabilité des différentes règles d'intégration dans d'autres domaines tels que la physique, la biologie, l'économie, l'administration,...

Le lecteur pourra après avoir compris le mécanisme de résolution dans les exercices présentés, résoudre ceux qui sont proposés à la fin du paragraphe.

V.7.1. PHYSIQUE

Les fonctions vitesse et accélération d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré au temps t sont respectivement dérivée de la fonction espace et de la fonction vitesse.

Soit $x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$, la fonction espace.

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \gamma t + v_0, \text{ la fonction vitesse.}$$

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = \gamma, \text{ la fonction accélération.}$$

En intégrant, on obtient :

$$x(t) = \int v(t) dt \quad \text{et} \quad v(t) = \int a(t) dt$$

Exercices résolus

ER 185.1. La vitesse d'un mobile sur une route rectiligne est $v(t) = 3t + 5$ km/h à

l'instant t . Détermine l'espace parcouru par ce mobile au temps $t = 15 \text{ min } 45''$.

Résolution

Soit $x(t)$ l'espace demandé.

$$a) x(t) = \int (3t + 5) dt$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 5t + C \text{ (la famille des fonctions qui satisfont à la condition}$$

$$x'(t) = v(t)$$

b) Posons que la position du mobile au temps $t = 0$ est $x(0) = 0$.

Ce qui implique que $C = 0$.

Ainsi la fonction $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 5t$ représente l'espace parcouru à l'instant t en heures. Si $t = 15 \text{ min } 45 \text{ s} = \frac{21}{80} \text{ heures}$

$$x(t) = \frac{3}{2} \left(\frac{21}{80} \right)^2 + 5 \left(\frac{21}{80} \right) = 1,415 \, 859 \, 375 \text{ km/h.}$$

ER 186.2. Une pierre est lancée verticalement vers le haut d'une hauteur $h(0) = 1,5 \text{ m}$ avec

une vitesse initiale $v(0) = 15,4 \text{ m/s}$. En négligeant la résistance due au vent et ne considérant que l'accélération gravitationnelle constant $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, détermine la hauteur $h(t)$ en mètres de la pierre à l'instant t en secondes.

Résolution

Par hypothèse, l'accélération gravitationnelle est $g = -9,8 \text{ m/s}^2$ (le signe indique que la gravitation agit vers le bas). Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse, nous avons :

$$v'(t) = g(t) = -9,8 \text{ m/s}^2 \quad \text{et} \quad v(t) = \int g(t) \, dt = -9,8t + c$$

De la vitesse initiale (au $t = 0$), nous avons :

$$[v(0) = 15,4] \Leftrightarrow [15,4 = -9,8 \cdot 0 + C] \Leftrightarrow (C = 15,4), \quad v(t) = -9,8t + 15,4$$

La vitesse étant la dérivée de la hauteur, nous avons :

$$h'(t) = v(t) = -9,8t + 15,4 \quad \text{et} \quad h(t) = \int (-9,8t + 15,4) dt = -\frac{9,8}{2}t^2 + 15,4t + C$$

Or $h(0) = 1,5$, ce qui implique que : $C = 1,5$

$$\text{D'où} \quad h(t) = -\frac{9,8}{2}t^2 + 15,4t + 1,5$$

ER 187.3. Trouve l'équation de la courbe qui passe par le point $(0, 2)$ et dont la pente de

la tangente en (x, y) est $m_T = 1 - 4x$.

Résolution

Nous savons que la pente de la tangente à la courbe est la dérivée de la fonction au point d'abscisse x_0 .

$$\begin{aligned} [m_t = f'(x_0)] &\Leftrightarrow [f'(x_0) = 1 - 4x] \\ &\Leftrightarrow [f(x_0) = \int (1 - 4x) dx] \\ &\Leftrightarrow \left[f(x) = -\frac{4x^2}{2} + x + C \right] \\ &\Leftrightarrow [f(x) = -2x^2 + x + C] \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 0, y = 2 \text{ alors } [f(0) = 2] \Leftrightarrow [-2(0)^2 + 0 + C = 2]$$

$$\Leftrightarrow (C = 2)$$

$$\text{D'où } f(x) = -2x^2 + x + 2$$

V.7.2. BIOLOGIE

Exercices résolus

ER 188. Soit $f'(x) = e^x$ la fonction représentant le taux de variation de la population d'une culture bactérienne à l'instant t exprimé en heures.

Calcule la population $f(x)$ au bout de 8 h sachant que la population initiale au temps $t = 0$ est de 10^5 .

Résolution

La fonction $f(x)$ est la primitive de la $f'(x) = e^x$.

$$f(x) = \int e^x dx = e^x + C. \quad \text{Comme } f(0) = 10^5,$$

Nous avons :

$$[f(0) = 10^5] \Leftrightarrow (e^0 + C = 10^5) \Leftrightarrow (C = 10^5 - 1)$$

$$\text{D'où } f(x) = e^x + 10^5 - 1; \quad g(x) = e^x - 1 + 10^5$$

$$\text{Au temps } t = 8 \text{ h ; } f(8) = e^8 - 1 + 10^5$$

ER 189.2. Le taux de variation de la population de parasites vivant par rapport au temps t

exprimé en 2 semaines est $\frac{d}{dt}[N(t)] = 6000t^2 - 75t^4$

Détermine la fonction population du parasite au bout d'un mois sachant que la population initiale était de 3 000.

Résolution

La fonction population est la primitive de la fonction taux de variation de la population du parasite.

Soit $N(t)$ la fonction population du parasite.

$$\begin{aligned} N(t) &= \int N'(t)dt = \int (6000t^2 - 75t^4)dt \\ &= 12000t - 300t^3 + C/2 \text{ semaines} \end{aligned}$$

A l'instant initial, $N(0) = 3000$ et $N(t) = 12000t - 300t^3 + 3000$

Au bout d'un mois la population sera de :

$$N(2) = 12\,000 \cdot 2 - 300 \cdot 2^3 + 3\,000 = 24\,600 \text{ parasites}$$

V.7.3. ADMINISTRATION ET ECONOMIE

Exercices résolus

ER 190.1. a) Soit le nombre d'articles produits journalièrement sur une chaîne de montage.

Suppose que le coût marginal $C'(x) = 4x$ et que le revenu marginal

$R'(x) = 200$ u.m. par article. Calcule la différence de profit lorsque le niveau de production quotidien passe de $x = 30$ à $x = 60$.

b) Suppose que $\frac{dP}{dt} = \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}}$ est le taux de variation du profit quotidien $P(t)$ de d'une petite boulangerie artisanale. Trouve $P(t)$ sachant que le profit initial $P(0) = 10$ u.m.

Résolution

a) $P(x) =$ profit marginal, $P(x) = R(x) - C(x)$ et $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{30}^{60} P'(x) = \int_{30}^{60} [R'(x) - C'(x)]dx \\ &= \int_{30}^{60} (200 - 4x)dx \\ &= [200x - 2x^2]_{30}^{60} = 600 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Le profit augmente de 600 u.m. lorsque la production journalière passe de 30 à 60 articles.

$$b) \left(\frac{dP}{dt} = \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}} \right) \Leftrightarrow \left(dP = \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}} dt \right) \text{ et } P(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}} dt = 3\sqrt{t^2+1} + C \quad (i)$$

$$\text{Or } [P(0) = 10] \Leftrightarrow (3\sqrt{0^2+1} + C = 10)$$

$$\Leftrightarrow (C = 7)$$

(ii)

(ii) dans (i), nous avons : $P(t) = 3\sqrt{t^2 + 1} + 7$

ER 191.2. La maison d'édition Womba Gog vend un livre de Math à 5 u.m. et un livre

d'anglais à 6 u.m.. Au bout de t mois, les ventes du livre de Math croissent au taux $C'(t) = e^t$ livres par mois et celles du livre d'anglais augmentent au taux $N'(t) = \sqrt{t}$ livres par mois. Le revenu total initial tiré de la vente de ces deux ouvrages est de 400 u.m. Calcule le revenu total tiré de ces 2 ouvrages au bout de t mois.

Résolution

La fonction revenu total à l'instant t est $R(t) = 5C(t) + 6N(t)$

avec $C(t)$ et $N(t)$ respectivement les ventes du livre de Math et de celui d'anglais à l'instant t .

Par conséquent $R'(t) = 5C'(t) + 6N'(t) = 5e^t + 6\sqrt{t}$ et

$$R(t) = \int (5e^t + 6\sqrt{t}) dt = 5e^t + 4\sqrt{t^3} + C$$

Or le revenu initial est de 400 u.m.

Ainsi, $(400 = 5e^0 + 4\sqrt{0^3} + C) \Leftrightarrow (400 = 5 + C) \Leftrightarrow (C = 395)$

D'où : $R(t) = 5e^t + 4\sqrt{t^3} + 395$.

Ne pas confondre le revenu total de deux livres à celui de chacun des livres, qu'on pourra aussi calculer.

Exercices

N° 439. Trouve la fonction vitesse et la fonction espace d'un mobile lorsque l'accélération, la vitesse initiale et l'espace initial sont respectivement donnés par :

a) $a(t) = \sqrt{3}t$, $v(0) = 0$ et $x(0) = 4$

b) $a(t) = 1 - t^2$, $v(0) = 0$ et $x(0) = 4$

c) $a(t) = \frac{2}{t^2}$, $v(1) = 0$ et $x(1) = 2$

N° 440. Détermine l'espace au temps t d'un mobile animé de la vitesse $v(t)$.

a) $v(t) = 2e^t - t$

b) $v(t) = \frac{3}{t}$

N° 441. On lance un objet verticalement vers le bas du sommet d'un bâtiment d'une hauteur de 78,4 m à une vitesse de $-29,4$ m/s. Calcule :

a) l'instant auquel l'objet touche le sol.

b) la vitesse de l'objet lorsqu'il touche le sol.

- N° 442. L'espace x en kilomètres entre deux voitures à l'instant t en heures varie selon le taux $\frac{dx}{dt} = 50 \left(\frac{1-e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \right)$. Trouve la distance $x(t)$ entre ces voitures au bout d'une demi-heure sachant que leur distance initiale est nulle.
- N° 443. Suppose que deux trains se dirigent l'un vers l'autre sur des voies parallèles. La distance entre les locomotives varie à la vitesse $v(t) = -4t^{\frac{2}{3}}$ km/h. Suppose que initialement les locomotives sont distinctes de 1 km. Quand se croiseront-elles ?
- N° 444. La volume V d'eau d'un réservoir percé diminue au taux $V'(t) = -\frac{1}{50}t$ litres par minute.
- Calcule le volume d'eau écoulé de l'instant $t = 0$, $t = 15$ min.
 - Suppose que le volume d'eau initial dans le réservoir est de 400 l et calcule l'instant auquel le réservoir sera vide.
- N° 445. Le taux de croissance de la taille en mètres à l'année t de Mademoiselle Kizema est exprimé par la fonction $h'(t) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$. Détermine sa taille cinq ans plus tard si l'on suppose que sa taille initiale est de 1,50 m.
- N° 446. Dans un feu de forêt chez les Balaa dans le territoire de Lubao, district de Kabinda, la fonction $N(t)$ représente le nombre d'arbres qui brûlent à l'instant t (exprimé en heures). En considérant que ce feu se répand au taux de $\frac{dN}{dt} = 5\sqrt{t}$ et que 100 arbres brûlent initialement, calcule le nombre d'arbres qui brûleront à 10h.
- N° 447. En raison de l'inflation, le coût de production $C(t)$ de la boulangerie de Madame Kiteba à l'instant t exprimé en années varie selon le taux $C'(t) = 10\sqrt{t}$. Calcule le coût de production de cette boulangerie dans 4 ans sachant qu'il est maintenant de 100 u.m.
- N° 448. a) Trouve la fonction $C(t)$ des ventes d'un livre Maîtriser les maths 6 durant le mois t sachant que $C'(t) = e^t$ représente le taux de variation des ventes et que le nombre initial des livres vendues est 100.
- b) Suppose que les prix de vente des livres Maîtriser les maths 1 et Maîtriser les maths 2 sont respectivement 30 u.m. et 40 u.m. Trouve le revenu initialement de chaque ouvrage et trouver le revenu total durant le mois t .

N° 449. Trouve l'équation de la courbe qui passe par le point P et dont la pente de la tangente en son point M(x, y) est m.

- a) P(1, 1) ; $m = \sqrt{x}$ c) P(1, 3) ; $m = \frac{-2}{x}$ ($x \neq 0$)
 b) P(0, -1) $m = 3e^x + x$

N° 450. Détermine l'équation de la courbe remplissant les conditions suivantes :

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2$; l'équation de la tangente au point P(-1, 1) est $y = \frac{5+2x}{3}$.

V.8. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 451. Calcule :

a) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Rép.: $3x^{\frac{1}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

b) $\int \frac{1}{(4t+5)^4} dt$

Rép.: $-\frac{1}{12} \frac{1}{(4t+5)^3} + C$

c) $\int (5t-2)^5 dt$

Rép.: $\frac{1}{5} \frac{(5t-2)^6}{6} + C$

d) $\int \sin^2 u (1 + \cot u)^2 du$

Rép.: $u - \frac{1}{2} \cos u + C$

e) $\int (e^x - \sin^2 3x) dx$

Rép.: $e^x - \frac{1}{2}x + \frac{\sin 6x}{12} + C$

f) $\int (3^x + 2^x)^2 dx$

Rép.: $\frac{9^x}{\ln 9} + \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{6^x}{\ln 6} + C$

g) $\int \frac{1}{4x^2-4x+5} dx$

Rép.: $\frac{1}{4} \arctan \frac{2x-1}{2} + C$

h) $\int \frac{1}{-x^2+2x+48} dx$

Rép.: $\frac{1}{14} \ln \left| \frac{8-x}{6+x} \right| + C$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$

Rép.: $\ln \left| \frac{2x-1}{2} + \sqrt{x^2-x+1} \right| + C$

j) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+3}}$

Rép.: $\ln |t+1 + \sqrt{t^2+2t+3}|$

k) $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \tan x}$

Rép.: $\ln |\tan x| + C$

l) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} d(\cos x)$

Rép.: $\ln |\cos x| - \cos x + C$

N° 452. Trouve pour chaque fonction la courbe intégrale qui passe par le point A

a) $f(t) = \frac{(1+\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}$, A(0, $\frac{2}{3}$) Rép.: $f(t) = \frac{2}{3}(1+\sqrt{t})^3 - \frac{2}{3}$

$$\text{b) } f(t) = \frac{1}{9x^2 + 12x + 8} \quad \Delta\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{Rép.: } f(t) = \arctan \frac{3x+2}{2} + \frac{\pi}{12}$$

N° 453. Calcule les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int x \cos x \sin x \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + C$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos x \, dx \quad \text{Rép.: } \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - 1 \right)$$

$$\text{c) } \int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx \quad \text{Rép.: } 2 - \frac{5}{e}$$

$$\text{d) } \int \sin^5 x \cos x \, dx. \quad \text{Rép.: } \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$\text{e) } \int \sqrt{3x^2 + x^4} \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{3} (3 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\text{f) } \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} \, dx. \quad \text{Rép.: } \sqrt{x^2+2x-4} + C$$

$$\text{g) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx. \quad \text{Rép.: } \sin(\ln x) + C$$

N° 454. Détermine a, b et c pour que $(ax^2 + bx + c)\sqrt{5-2x}$ soit une intégrale

$$\text{de } y = x\sqrt{5-2x}. \quad \text{Rép.: } a = \frac{2}{5}, b = -\frac{1}{3} \text{ et } c = \frac{14}{3}$$

N° 455. Calculer :

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4}} \, dx \quad \text{Rép.: } 3\sqrt{5} - 6 - 2 \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \quad \text{Rép.: } -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

$$\text{c) } \int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \quad \text{Rép.: } \pi$$

$$\text{d) } \int \sqrt{1-4x^2} \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{4} (Arc \sin 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}) + C$$

$$\text{e) } \int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} \, dx \quad \text{Rép.: } Arc \sin \frac{x+1}{2} - 2\sqrt{3-2x-x^2} + C$$

$$\text{f) } \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} \quad \text{Rép.: } \frac{1}{8} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{16} Arc \tan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C$$

$$\text{g) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{2} Arc \sin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C$$

$$\text{h) } \int \frac{xdx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

N° 456. Calcule :

$$\text{a) } \int \frac{1-x^2-3x}{x+3} \, dx \quad \text{Rép.: } \ln|x+3| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{(3x-2)^3} \, dx \quad \text{Rép.: } -\frac{1}{6} \frac{1}{(3x-2)^2} + C$$

$$\text{c) } \int \frac{(x-1)^3 + (3-x)^5}{(3-x)^5(1-x)^3} \, dx \quad \text{Rép.: } -\frac{1}{4} \frac{1}{(3-x)^4} + \frac{1}{2(1-x)} + C$$

$$\text{d) } \int \frac{3x-2}{x(x+1)^3} \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \left| \frac{x^2}{(x+1)^2} \right| + C$$

e) $\int \frac{3x+5}{x^3+x^2+x+1} dx$ Rép.: $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \right| + 4 \operatorname{Arc} \tan |1+x^2| + C$
 N° 457. Calcule chacune des intégrales ci-dessous :

a) $\int x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} dx$ Rép. : $3 \operatorname{Arc} \tan \sqrt[3]{x} + C$

b) $\int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$ Rép. : $\frac{3}{7} \left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}} (4\sqrt{x}-3) + C$

c) $\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx$ Rép. : $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan z + C$ avec $z = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}$
 N° 458. Calcule chacune des intégrales suivantes :

a) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}} dx$ Rép. : $x - 4\sqrt{x} + 4 \ln |1+\sqrt{x}| + C$

b) $\int \frac{\sqrt{1+2x}}{x} dx + C$ Rép. : $2\sqrt{1+2x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1} \right| + C$

c) $\int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} dx$ Rép. : $\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$

d) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^4+1} dx$ Rép. : $\frac{4}{3} \left(x^{\frac{3}{4}} - \ln \left| x^{\frac{3}{4}} + 1 \right| \right) + C$

e) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ Rép. : $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2} \right| + C$

f) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx$ Rép. : $-x + \frac{4}{3} (\sqrt{3x+2} - \ln |1+\sqrt{3x+2}|) + C$

N° 459. Calcule :

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} =$ Rép. : $\operatorname{Arc} \sin \frac{2x-1}{5} + C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} =$ Rép. : $\ln |2\sqrt{x^2-x+1} + 2x-1| + C$

N° 460. Calcule :

a) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ Rép.: $\ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{1+\tan \frac{x}{2}} \right| + C$

b) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin x} dx$ Rép.: $2(\sin x - \ln |1+3 \sin x|) + C$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x \cos 8x dx$ Rép. : $-\frac{5}{39}$

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 7x \sin 4x dx$ Rép. : $\frac{4}{33}$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 13x dx$ Rép. : 0

f) $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin x \cos x - 2}$ Rép.: $\frac{1}{3} \left| \ln \tan x - \frac{1}{3} \right| + C$

N° 461. Trouve :

a) $\int \cos^5 x dx$ Rép. : $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C$

b) $\int \cos^6 2x dx$ Rép. : $\frac{5x}{16} + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{3}{128} \sin 8x - \frac{1}{96} \sin^3 4x + C$

c) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ Rép.: $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$

$$d) \int \sin^4 3x \cos^2 3x \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C$$

$$e) \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx \quad \text{Rép.: } \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

$$f) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx \quad \text{Rép.: } -\frac{1}{3}\cot^3 x + C$$

$$g) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx \quad \text{Rép.: } -\frac{\cot^4 x}{4} + C$$

N° 462. Calcule :

$$a) \int_0^{+\infty} x^2 dx \quad \text{Rép.: } +\infty$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4} \quad \text{Rép.: } \frac{\pi}{4}$$

$$b) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{Rép.: } \frac{3\pi}{4}$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \quad \text{Rép.: } \pi$$

N° 463. Détermine l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = x^3$ et l'axe Ox sur l'intervalle $[-3, 2]$. Rép. $\frac{97}{4}$ u.s.

N° 464. Détermine l'aire du domaine limité par la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$, les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x - 5 = 0$. Rép. $\frac{13}{3}$ u.s.

N° 465. Détermine l'aire de la région enfermée par les courbes $y = \frac{1}{x}$; $y = e^{\frac{x}{4}}$ et

les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Rép. $4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{\frac{1}{4}} - \ln 2$ u.s.

N° 466. Calcule l'aire de la région située entre les courbes $y - x = 6$; $y - x^3 = x$ et $2y + x = 0$. Rép. : 22 u.s.

N° 467. Calcule la mesure de l'aire de la surface limitée par les courbes d'équations $y = \sin x$, $y = \cos x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$. Rép. : $2\sqrt{2}$ u.s.

N° 468. Détermine a , b et c sachant que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, coupe l'axe des x aux points $(-1, 0)$ et $(2, 0)$, et que l'aire de la surface qu'elle limite avec l'axe des x soit de $\frac{21}{2}$ u.s.

$$\text{Rép.: } a = -\frac{7}{3}, b = \frac{7}{3} \text{ et } c = \frac{14}{3}$$

N° 469. Détermine l'aire de chacune des figures limitée par la courbe suivante :

$$a) \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (\text{cardioïde}) \quad \text{Rép.: } \frac{3\pi a^2}{2} \text{ u.s.}$$

$$b) \text{ La lemniscate de Bernoulli d'équation } \rho = a\sqrt{\cos 2\phi} \quad \text{Rép. } a^2 \text{ u.s.}$$

$$c) \text{ La courbe d'équation } \rho = a(1 + \cos \phi) \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad \text{Rép. } \frac{3\pi a^2}{2} \text{ u.s.}$$

$$d) \text{ La courbe d'équation } \rho = 2 + \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \text{Rép. } \frac{9\pi}{2} \text{ u.s.}$$

N° 470. Détermine la longueur de :

a) l'équation $y = \frac{x^4+3}{6x}$

Rép. : $\frac{17}{12}$

b) la chaînette $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$

Rép. : $\frac{a}{2}(e^{\frac{h}{a}} - e^{-\frac{h}{a}})$

c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos^3 t \\ y = \frac{1}{2} \sin^3 t \end{cases}$

Rép. : $\frac{3}{4}$

d) $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \cos t \\ y = \frac{4}{3} \sin t \end{cases}$

Rép. : $\frac{8\pi}{3}$

e) la courbe d'équation $\rho = \frac{4}{5} \cos \omega$

Rép. : $\frac{2\pi}{5}$

f) la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \omega)$

Rép. : $8a$

N° 471. Détermine le volume engendré par une surface S donnée, autour de l'axe indiqué

S est limitée par :	Axe	Réponse
a) $y = 2x^2$; Ox, Oy et $x = 5$	Oy	625π u.v.
b) $y = x^2$, et $y = x + 2$	$x = 3$	$\frac{45\pi}{2}$ u.v.
S est limitée par :	Axe	Réponse
c) $y^2 = 8x$ et $x = 2$	$x = 2$	$\frac{256\pi}{15}$ u.v.
d) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$	Oy	$\pi \left(\frac{e-1}{e} \right)$ u.v.
e) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	Ox	Rép : 48π u.v.
f) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	Oy	Rép : 6π u.v.

N° 472. Détermine le volume de engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface limité par la parabole $y^2 = 8x$ et la droite $x = 2$. Rép. 16π

N° 473. Trouve la solution particulière de l'équation assujettie à la condition initiale :

a) $y' - \frac{y}{x^2-1} = 0$; la courbe intégrale passe par A(2, -1). Rép. : $y^2 = \frac{3(x-1)}{x+1}$

b) $\frac{dx}{y} + \frac{4}{x} dy = 0$; la courbe passe au point A(4, 2) Rép. : $x^2 + 4y^2 = 32$

N° 474. Intègre chacune des équations suivantes :

a) $y'' + 12y = 7y'$

Rép. : $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

b) $d\rho + \rho \tan \theta d\theta = 0$

Rép. : $\rho = C \cos \theta$

N° 475. Trouve la bonne Réponse :

$$a) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

1. $2-\sqrt{2}$ 2. $1-\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{2}-1$ 4. $\sqrt{2}-2$ 5. $2\sqrt{2}-1$

$$b) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x dx}{1-x^4} =$$

1. $4 \ln 3$ 2. $3 \ln 4$ 3. $\frac{1}{3} \ln 4$ 4. $\frac{1}{4} \ln 3$ 5. $\ln 4$

$$c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2}} =$$

1. $1-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 2. $\frac{1}{2} \left(1-\frac{1}{2}\right)$ 3. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $1+\frac{\sqrt{2}}{4}$ 5. $\frac{1}{2} \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$d) \int_4^5 \frac{dx}{(x-2)(x-3)} =$$

1. $\ln \frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4} \ln 3$ 3. $\ln \frac{4}{3}$ 4. $\ln 4$ 5. $\ln 12$

$$e) \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x-2)^2} dx =$$

1. $4 \ln \frac{2}{3}$ 2. $\ln \frac{4}{3}$ 3. $1+4 \ln \frac{2}{3}$ 4. $1+3 \ln \frac{4}{3}$ 5. 2

$$f) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3+x} dx = ?$$

1. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 2. $\ln \frac{2}{\sqrt{6}}$ 3. $\ln \frac{\sqrt{6}}{2}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 5. $\ln 2\sqrt{6}$

$$g) \int_{-1}^0 \frac{x}{(x-2)^2} dx = ?$$

1. $-1 + \ln 2$ 2. $1 - \ln 2$ 3. $1 + \ln 2$ 4. $-1 - \ln 2$ 5. $\frac{1}{-1 + \ln 2}$

$$N^{\circ} 476. \quad \int_3^6 \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} =$$

1. $9 \ln 6 - \frac{13}{30} \ln 3 - \frac{3}{5} \ln 2$ 3. $9 \ln 6 + \frac{13}{30} \ln 3 - \frac{3}{5} \ln 2$ 5. $\frac{9}{30} \ln 6 + \frac{13}{30} \ln 3 - \frac{3}{5} \ln 2$
2. $\frac{9}{30} \ln 6 + \frac{1}{30} \ln 3 + \ln 2$ 4. $\frac{9}{30} \ln 6 - \frac{13}{30} \ln 3 + \frac{3}{5} \ln 2$

$$N^{\circ} 477. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx =$$

1. π 2. $\pi + 2$ 3. $2 - \pi$ 4. $\pi - 2$ 5. 2

$$N^{\circ} 478. \quad \int_1^e (\ln x)^2 dx =$$

1. $e - 2$ 2. $e + 2$ 3. $\frac{1}{2}(e - 2)$ 4. $2 - e$ 5. $e - 1$

$$N^{\circ} 479. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx =$$

1. π 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{6}$ 5. $\frac{\pi}{2}$

$$N^{\circ} 480. \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx =$$

1. $2 - \ln 2$ 2. $\ln 2$ 3. $\frac{\pi}{2} - 2$ 4. $2 + \ln 2 + \frac{\pi}{2}$ 5. $\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$

N° 481. On pose : $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2} = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$

$\sqrt{5} \cdot F\left(\frac{1-\sqrt{15}}{3}\right)$ vaut

1. $\frac{2\pi}{3}$ 2. $\frac{5\pi}{6}$ 3. $\frac{-\pi}{3}$ 4. $\frac{3\pi}{4}$ 5. $\frac{-\pi}{4}$

N° 482. On pose : $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = G(x) + C, C \in \mathbb{R}.$ $G\left(\frac{\sqrt{41}-6}{16}\right)$ vaut :

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{3\pi}{2}$ 3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{2}$ 5. $\frac{\pi}{12}$

N° 483. On pose : $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}} = H(x) + C, C \in \mathbb{R}.$ $H\left(\frac{\sqrt{51}-6}{4}\right)$ vaut :

1. $\frac{5\pi}{6}$ 2. $\frac{-\pi}{6}$ 3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{3}$ 5. $\frac{-\pi}{3}$

N° 484. Soit la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{Calcule } \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{5}{6}$ 5. $\frac{3}{2}$

N° 485. A une constante additive C près, $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ égale

1. $\frac{x^2}{2} - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ 4. $x - \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x$
 2. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ 5. $\frac{x^2}{2} + x \sqrt{1-x^2} \arcsin x$
 3. $\frac{x^2}{2} - 2x \sqrt{1-x^2} \arcsin x$

N° 486. On pose : $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$

Dans ces conditions, $F(1) =$

1. $\frac{5\pi-12}{12}$ 2. $\frac{5\pi-3}{4}$ 3. $\frac{5\pi-4}{2}$ 4. $\frac{\pi-2}{2}$ 5. $\frac{5\pi-1}{6}$

N° 487. Si $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = H(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ alors $H\left(\frac{1}{2}\right)$ vaut :

1. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ 2. $\frac{(\pi+4)\sqrt{2}}{4}$ 3. $\frac{(2\pi+1)\sqrt{2}}{4}$ 4. $\frac{(\pi-1)\sqrt{2}}{4}$ 5. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$

N° 488. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx =$

1. 0 2. $+\infty$ 3. 1 4. -1 5. $-\infty$

N° 489. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax} \cos b x dx$ ($a > 0$) converge vers :

1. $\frac{-a}{a^2+b^2}$ 2. $\frac{a}{a^2+b^2}$ 3. $\frac{b}{a^2+b^2}$ 4. $\frac{-b}{a^2+b^2}$ 5. $\frac{a}{a^2-b^2}$

N° 490. L'aire limitée par le cercle d'équation $\rho = 2a \cos \theta$ et le cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$ est :

1. $\frac{a\pi}{2}$ 2. $\frac{a^2\pi}{2}$ 3. $a^2(2 + \frac{\pi}{4})$ 4. $1 + \frac{\pi}{6}$ 5. $\frac{a^3\pi}{2}$

N° 491. On considère le cycloïde d'équations paramétriques $x = 3(t - \sin t)$ et $y = 3(1 - \cos t)$ et (C) sa courbe représentative.

L'aire de la surface comprise entre la courbe C et l'axe Ox ($0 \leq t \leq 2\pi$) vaut :

1. 27π 2. 12π 3. 48π 4. 5π 5. 3π

N° 492. Le volume engendré par la rotation autour de l'axe $y = 3$ de la surface par la courbe d'équation $y^2 = 9 - x$, la droite $x - y - 7 = 0$ et l'axe Ox vaut :

1. 369π 2. $\frac{369\pi}{2}$ 3. $\frac{369\pi}{4}$ 4. $\frac{69\pi}{2}$ 5. $\frac{369\pi}{5}$

N° 493. Le volume engendré par la révolution autour de Ox de la surface limitée par l'arc de l'hyperbole d'équation $xy = 4$ et la droite $x + y = 0$ vaut :

1. $\frac{4\pi a^2}{15}$ 2. $\frac{\pi}{2}(e^3 - 2)$ 3. 9π 4. 12π 5. $\frac{\pi}{8}(e^2 - 1)$

N° 494. La solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ telle que

$y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$ est :

1. $y = 2\cos x - \sin x$ 3. $y = 2\cos x + \sin x$ 5. $y = 2\cos x$
2. $y = \cos x - 2\sin x$ 4. $y = \cos x + 2\sin x$

DEUXIEME PARTIE

PROBABILITES

CHAPITRE VI : NOTIONS DE PROBABILITES

A. OBJECTIFS

1. Définir les vocabulaires de base de la probabilité ;
2. Calculer la probabilité d'un évènement donné ;
3. Calculer la probabilité conditionnelle ;
4. Définir une loi de probabilité ;
5. Définir une loi binomiale ;
6. Définir une variable aléatoire discrète et continue ;
7. Calculer les paramètres de dispersion : espérance mathématique ; variance et écart type.

B. ACTIVITES

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le chiffre obtenu sur la face supérieure.
 - a. Quelles sont les issues possibles ?
 - b. Ecris en extension les événements suivants :
 - A : «le résultat obtenu est pair. »
 - B : «le résultat obtenu est impair»
 - C : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 5»
 - D : « le résultat obtenu est inférieur à 20»
 - E : «le résultat obtenu est 4»
 - F : « le résultat obtenu est 7»
2. Dans une classe de 30 élèves de l'école académie de la foi à Kinshasa, 20 élèves révisent l'algèbre et 15 la géographie. De plus, 8 révisent les deux cours. Pour un élève choisi, on note A l'évènement : « l'élève révisé l'algèbre » et B l'évènement : « l'élève révisé la géographie ». Le professeur Kelly Kitenge choisit un élève au hasard dans la classe et demande à ses élèves :
 - a. De représenter les données de cette classe dans un diagramme de Venn et dans un tableau à double entrée.
 - b. Que représente l'évènement $A \cap B$?
 - c. Que représente l'évènement $A \cup B$?
 - d. La probabilité P d'un événement se calcule comme

la fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, quelle est la probabilité de $A \cap B$?

- e. Quelle est la probabilité que l'élève choisi ne révise ni l'algèbre ni la géographie ?
 - f. Quel est l'événement contraire de A ? Calcule sa probabilité.
3. Dans une famille de six enfants, calcule la probabilité d'avoir à la naissance six filles.
 4. Monsieur Alpha a un porte-monnaie qui contient 4 billets de 10.000 u.m et 6 billets de 5000 u.m. Son fils Grandi tire au hasard et simultanément 3 billets.
 - a. Calcule la probabilité des événements :
 E : « tirer un billet de 10.000 u.m . »
 M : « tirer un billet de 5.000u.m »
 K : « tirer 3 billets de 10.000 u.m »
 - b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billets de 10.000 u.m figurant parmi les 3 billets tirés. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

L'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(x)$ de x se calculent par les formules :

$$E(x) = \sum x_i P(x_i) \quad \text{et} \quad V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2.$$

Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de x .

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

VI.1. PROBABILITES

VI.1.1. VOCABULAIRE DE BASE

a. Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le(s) résultat(s) au(x) quel(s) elle peut donner lieu du fait qu'on ne contrôle pas toutes les causes qui conduisent à ce résultat (issue ou éventualité).

Exemples

- a) En lançant un dé non truqué on s'attend à l'apparition, sur la face supérieure, d'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6
- b) De même en jetant une pièce de monnaie en l'air on s'attend à l'apparition de pile ou face
- c) D'une urne opaque contenant 10 billes vertes, 15 jaunes et 7 rouges, on tire au hasard une bille qui peut être verte, jaune ou rouge.

b. Épreuves

Lancer un dé ou une pièce de monnaie, tirer une bille d'une urne, jeter deux dés, ... sont des opérations appelées **épreuves**. Une épreuve est donc une expérience aléatoire.

c. Événements

Obtenir sur une face 5 ou pile, tirer une bille rouge; obtenir la somme 9 sont des résultats appelés **événements** des épreuves correspondantes.

Un événement est donc un résultat d'une épreuve. On notera les événements par les lettres majuscules A, B, C, ...

d. Cas favorables

Le nombre de cas favorables d'un événement est le nombre de fois de sa réalisation. On le note n .

Exemples

- a) En lançant un dé non truqué le nombre des cas favorables d'obtenir 5 est 1.
- b) Une urne opaque contient 10 billes vertes, 15 jaunes et 7 rouges, on tire au hasard une bille. Le nombre des cas favorables d'obtenir une bille rouge est 7.

e. Cas possibles

Le nombre de cas possibles ou probables d'une épreuve est le nombre de ses événements possibles. On le note N .

Exemples

- a) Le nombre des cas possibles lors du lancement d'un dé est 6.
- b) En lançant simultanément deux dés non truqués, l'un rouge D_r et l'autre blanc D_b , le nombre des cas possibles est 36, repris dans le tableau ci-dessous :

$\begin{smallmatrix} D_r \\ D_b \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

f. L'ensemble fondamental

L'ensemble fondamental est l'ensemble de tous les événements possibles d'une épreuve. Il est aussi appelé *univers* ou *catégorie* d'épreuves. On le note par Ω .

Exemples

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lors du lancement d'un dé.
- $\Omega = \{p, f\}$ (p = pile, f = face) lors du lancement d'une pièce de monnaie.
- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$ lors du lancement de deux dés (à 6 faces) simultanément.

Remarques

- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement qui est un singleton est appelé **événement élémentaire**.
- La probabilité d'un événement A est notée $p(A)$

VI.1.2. LOI DE PROBABILITE

- Soit Ω un univers fini de n éventualités $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Définir une loi de probabilité P sur Ω , revient à associer à chaque éventualité x_i ($i = 1, \dots, n$) un nombre positif P_i tel que la somme des p_i soit égale à 1.

Chaque p_i est appelé *probabilité du résultat x_i* . Il mesure les chances qu'a l'événement x_i de se réaliser.

On le représente par le tableau ci-après :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On a : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$ ou $\sum_{i=1}^n P_i = 1$

Soit Ω un univers fini et A un événement de Ω . La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des résultats ou des éventualités ou des événements élémentaires qui constituent A

Toute probabilité p d'un événement A sur Ω est un *nombre positif* compris entre 0 et 1.

On écrit : $0 \leq p(A) \leq 1$

Exercice résolu

On lance un dé truqué de telle sorte que la probabilité de sortie de « 5 » soit le double de la probabilité de sortie de « 2 ». Les faces « 1 », « 2 », « 3 », « 4 » et « 6 » ont la même probabilité.

- Calcule la probabilité de sortie de chaque numéro
- Calcule la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre impair ».

Résolution

- a. On a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

Et $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_6$ et $p_5 = 2p_2$.

Par suite $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$$p_2 + p_2 + p_2 + p_2 + 2p_2 + p_2 = 1 \Rightarrow 7p_2 = 1$$

C'est-à-dire $P_2 = \frac{1}{7}$ et $P_5 = \frac{2}{7}$

Nous avons donc 1 chance sur 7 pour obtenir les numéros « 1 », « 2 », « 3 », « 4 » et « 6 » et 2 chances sur 7 pour obtenir le numéro « 5 ».

- b. Soit $A = \{1, 3, 5\}$ $p(A) = p_1 + p_3 + p_5$
- $$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

VI.2. CALCUL DES PROBABILITES

VI.2.1. EVENEMENTS EQUIPROBABLES – FORMULE DE LAPLACE

A. La probabilité sur un univers Ω est parfaitement déterminée dès qu'on connaît la probabilité des événements élémentaires. Lorsque des événements élémentaires ont la même chance de réalisation, on dit qu'ils sont **équiprobables** ou **également réalisables**.

- Dans ce cas, la loi de probabilité est dite **équipartie** ; et la probabilité d'un résultat x_i est $P_i = \frac{1}{n}$ où n est le nombre d'éventualités dans Ω .

Exemples et contre-exemple

- Les événements A : « obtenir pile » et B : « obtenir face », lors du lancement d'une pièce de monnaie sont **équiprobables**

$$\text{car } p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

- Les apparitions d'un des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 lors d'un lancement d'un dé constituent des événements **équiprobables**.

$$\text{Car } p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

- Les événements A : « obtenir la somme 3 », B : « obtenir la somme 4 » et C : « obtenir la somme 7 » lors d'un lancement de deux dés, **ne sont pas équiprobables** parce que :

$$p(A) = \frac{2}{36}, \quad p(B) = \frac{3}{36} \quad \text{et} \quad p(C) = \frac{6}{36}$$

B. Soit Ω un univers et A un événement de Ω . Lorsque les résultats de A sont équiprobables, la probabilité de l'événement A est le réel $p(A)$ défini par

$$p(A) = \frac{\text{Nombre des cas favorables à A}}{\text{Nombre des cas également possibles}}$$

$$\text{ou } p(A) = \frac{\text{Nombre des éventualités favorables à A}}{\text{Nombre des cas possibles à } \Omega} \quad \text{ou encore } p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La formule $p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ est appelée **Formule de LAPLACE** ou **formule classique**. La probabilité est souvent exprimée en pourcentage.

Exemples

a) On lance une fois un dé, la probabilité d'obtenir :

* le nombre 3, événement qu'on désigne par $A = \{3\}$, est $p(A) = \frac{1}{6}$ soit 17 %.

* un nombre pair, événement qu'on désigne par $B = \{2, 4, 6\}$ est $p(B) = \frac{3}{6}$ soit 50 %.

b) Dans une urne contenant 10 billes vertes, 15 jaunes et 7 rouges, l'événement

A : « tirer une bille verte » a pour probabilité $p(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ soit 31 %.

c) En lançant deux dés, la probabilité d'obtenir l'événement C : « la somme des nombres présentés par les faces supérieures vaut 9 » est : $p(C) = \frac{4}{36}$ soit 11%

Remarques

– Si $p(A) = 1$, l'événement **A est dit certain** ; il est toujours réalisable.

Exemple

En lançant deux dés, la probabilité pour que la somme de deux nombres obtenus soit inférieure à 13 est 100 %. L'événement est certain.

– Si $p(A) = 0$ alors l'événement A est impossible ou irréalisable ou encore **incertain**.

Exemple

Les deux événements ci-dessous sont impossibles :

A : « apparition de 7 » lors du lancement d'un dé.

B : « la somme des deux chiffres vaut 13 » en jetant deux dés.

– Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$

VI.2.2. PROBABILITES ET OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Soit Ω un univers fini, A et B deux événements de Ω

1. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les événements A et B sont dits **incompatibles**.

Dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

En jetant un dé, la probabilité d'obtenir 5 ou 6 est $\frac{1}{3}$.

En effet, soit A: « apparition de 5 »: $p(A) = \frac{1}{6}$ et B: « apparition de 6 »: $p(B) = \frac{1}{6}$

$A \cup B$: « apparition de 5 ou 6 »: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{3}$ soit 33%

2. L'événement A et B, noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B se réalisent simultanément.

Dans ce cas, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple

Considérons un jeu de 52 cartes où il y a 4 dames, 13 piques et 1 dame de pique.

Soit D: « tirer une dame », $p(D) = \frac{4}{52}$ P : « tirer une pique », $p(P) = \frac{13}{52}$

$D \cap P$: « tirer une dame de pique », $p(D \cap P) = \frac{1}{52}$.

$D \cup P$: « tirer une dame ou une pique »

La probabilité de tirer une dame ou une pique dans un jeu de 52 cartes bien mêlées est :

$$P(D \cup P) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13} \text{ soit } 31\%$$

3. L'événement complémentaire ou contraire de A est noté $\bar{A}$ est l'événement qui se produit lorsque A n'est pas réalisé. Dans ce cas,

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad \text{ou} \quad p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Exemple

L'univers Ω est un ensemble composé de 3 garçons et 5 filles. L'événement G : « appeler un garçon » a pour événement contraire $\bar{G}$: « appeler une fille ».

$$p(G) = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad p(\bar{G}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

4. Si les événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω , alors la somme de leurs probabilités respectives vaut 1.

$$\text{C'est-à-dire : } p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_n) = 1$$

5. Les événements A et B sont dits indépendants si la réalisation ou la non réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre.

$$\text{Dans ce cas,} \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

En général, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements indépendants de Ω alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n).$$

En particulier, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont équiprobables et de probabilité commune p alors :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p^n$$

Exemples

1. On jette deux fois un dé. On examine la probabilité d'obtenir le couple (4,5)

Soit A : « obtenir 4 », $p(A) = \frac{1}{6}$ et B : « obtenir 5 », $p(B) = \frac{1}{6}$.

$A \cap B$: « obtenir 4 et 5 »,

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{36} \quad \text{soit } 2,7\%$$

2. Dans une entreprise composée de 105 salariés, il y a 30 cadres et 70 salariés mariés dont 20 cadres. On rencontre au hasard un salarié de cette entreprise. Les événements A : « Etre cadre dans l'entreprise » et B : « Etre marié » sont indépendants.

En effet :

$$p(A) = \frac{30}{105} = \frac{2}{7} \quad p(B) = \frac{70}{105} = \frac{2}{3} \quad p(A \cap B) = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}$$

Ce qui montre que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Notes :

- La règle d'addition s'applique lorsqu'un événement peut être réalisé de plusieurs façons différentes et exclusives les uns des autres.
- La règle de multiplication s'applique lorsqu'une expérience aléatoire se décompose en plusieurs étapes et qu'un événement peut être considéré comme la réalisation successive de deux autres.

VI.2.3. PROBABILITE CONDITIONNELLE

Soit Ω un univers, A et B deux événements quelconques de Ω , avec $A \neq \emptyset$
On note par $p(B \setminus A)$, la probabilité pour que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est déjà réalisé. On dit alors que les deux événements sont **dépendants**.

Ainsi, $p(B \setminus A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$. Il s'écrit aussi $p_A(B)$.

Exemple

Milobo a effectué un sondage auprès de 200 personnes.

Les résultats obtenus sont repris dans le tableau ci-dessous :

Réponses à la question posée	Personnes interrogées		Sommes
	Hommes	Femmes	
Oui (O)	52	64	116
Non (N)	36	25	61
Sans réponse (SR)	12	11	23
Totaux	100	100	200

* La probabilité pour que la réponse soit oui si la personne interrogée est une femme est : $p(O \setminus F) = \frac{p(O \cap F)}{p(F)}$

$$= \frac{\frac{64}{200}}{\frac{100}{200}} = \frac{16}{25} \quad \text{soit } 64\%$$

* La probabilité pour qu'un homme ne donne pas de réponse est

$$p(SR \setminus H) = \frac{p(SR \cap H)}{p(H)}$$

* La probabilité pour que la réponse d'une femme soit non

$$\text{vaut : } p(N \setminus F) = \frac{p(N \cap F)}{p(F)}$$

$$= \frac{\frac{25}{200}}{\frac{100}{200}} = \frac{1}{4} \quad \text{soit } 25\%$$

* La probabilité pour qu'une réponse négative soit celle d'un homme est :

$$p(H \setminus N) = \frac{p(H \cap N)}{p(N)}$$

$$= \frac{\frac{12}{200}}{\frac{100}{200}} = \frac{3}{25} \text{ soit } 12\% \quad \left| \quad = \frac{\frac{36}{200}}{\frac{61}{200}} = \frac{36}{61} \text{ soit } 59\%.$$

Remarque

Si A et B sont deux événements indépendants alors $p(B \setminus A) = p(B)$

En effet,

$$p(B \setminus A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(B) \cdot p(A)}{p(A)} = p(B).$$

De manière générale, on établit $p(A \setminus B) = p(A)$

VI.2.4. PROBABILITE COMPOSEE – PROBABILITE TOTALE

a. Probabilité composée

Soit A et B deux événements dépendants de l'univers Ω . On appelle probabilité composée de A et B, notée $P(A \cap B)$, le produit de probabilités de A et de $B \setminus A$.

On a : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$

b. Probabilité totale

Soit Ω un univers, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ des événements constituant une partition de Ω . La probabilité de tout événement A de Ω est définie par

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_k) \\ &= P(A \setminus A_1) \cdot P(A_1) + P(A \setminus A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(A \setminus A_k) \cdot P(A_k) \end{aligned}$$

Exercice résolu

ER 192. Une entreprise est spécialisée dans la vente de ballon de cuir. Elle a trois fournisseurs A_1, A_2 et A_3 qui alimentent respectivement le stock dans les proportions 25%, 40% et 35%. Le service qualité connaît ses fournisseurs : une étude statistique effectuée depuis les dernières livraisons montre que la probabilité pour qu'un ballon ait un défaut sachant qu'il provient du premier fournisseur est de 0,04, du deuxième de 0,03 et du troisième de 0,02

- Détermine la probabilité qu'un ballon pris au hasard dans le stock ait un défaut
- Le ballon a un défaut, quelle la probabilité qu'il provienne du fournisseur A_1 ?

Résolution

On note Ω l'ensemble des ballons du stock

A_i « le ballon provient du fournisseur A_i » et

B « le ballon a un défaut »

$p(A_1) = 0,25$; $p(A_2) = 0,4$ et $p(A_3) = 0,35$. La probabilité que le ballon ait un défaut sachant qu'il provient du premier fournisseur est : $p_{A_1}(B) = 0,25$; de même $p_{A_2}(B) = 0,03$ et $p_{A_3}(B) = 0,04$.

a) On calcule $p(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$p(B) = 0,04.0,25 + 0,03.0,4 + 0,02.0,35 = 0,029$$

D'où : la probabilité qu'un ballon ait un défaut est 0,029

b) On sait que le ballon a un défaut, on calcule la probabilité conditionnelle de A_1 sachant que B est réalisé

$$p_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25.0,04}{0,029} = \frac{10}{29}$$

$$\simeq 0,345$$

La probabilité que le ballon vienne du premier fournisseur, sachant qu'il a un défaut est $\frac{10}{29}$

VI.2.5. VARIABLES ALEATOIRES

a. Variables aléatoires discrètes

1. Définition

Soit Ω un univers. On appelle variable aléatoire discrète $X(v. a. x)$, l'application :

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto X(x)$$

2. Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X , toute fonction permettant de déterminer la probabilité pour qu'un événement x_i prenne, par la $v. a. x$, une valeur réelle donnée x_i .

Si $P_i = P(X(x_i) = x_i)$, la loi de probabilité de $v. a. x$ est donnée par le tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$P_i(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

Dans toute loi de probabilité la somme de probabilité donne toujours 1.

$$\text{on note } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Exemple

On jette un dé bien équilibré et on observe la face supérieure.

Si on obtient 1, 3 ou 5, on perd 1u.m
 2 ou 4, on gagne 2u.m
 6, on gagne 5u.m

. L'expérience aléatoire est le lancement du dé.

. Les événements sont A_1 : "*obtenir 1, 3 et 5*"

A_2 : "*obtenir 2 ou 4*"

A_3 : "*obtenir 6*"

. La probabilité associée à chaque événement est

$$p_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } p_3 = \frac{1}{6}$$

Les valeurs associés aux événements sont ici les gains :

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$ et $x_3 = 5$. D'où :

X	-1	2	5
$p[X = x_i]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de la *v. a. x* la quantité :

$$E(x) = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \dots + p_n.x_n \quad \text{ou} \quad E(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Note :

Un jeu dont l'espérance mathématique est nulle est un jeu équitable.

Propriétés

Si X et Y sont deux *v. a* discrètes quelconques et a un nombre réel quelconque :

- $E(X + a) = E(X) + a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

4. Variance

On appelle variance de la *v. a. x* la quantité

$$V = p_1(x_1 - E(x))^2 + p_2(x_2 - E(x))^2 + \dots + p_n(x_n - E(x))^2$$

$$\text{ou } V = x_1^2.p_1 + x_2^2.p_2 + \dots + x_n^2.p_n - [E(x)]^2$$

$$\text{ou encore } V(x) = \sum_{i=1}^n p_i [x_i - E(x)]^2$$

Propriétés

$$P_1.V(X) \geq 0$$

$$P_2. V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$P_3. \forall a \in \mathbb{R}, V(aX) = a^2 V(X), V(x+a) = V(x)$$

$P_4.$ Si X et Y sont deux *v. a* indépendantes :

$$V(X+Y) = V(x) + V(y)$$

5. Ecart-type

On appelle écart-type de la *v. a. x* la quantité $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

6. Covariance

On appelle covariance de deux *v. a. x* et *y* la quantité :

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x).E(y)$$

Propriétés

$P_1.$ Si x et y sont deux *v. a* indépendantes : $Cov(x, y) = 0$

$P_2.$ Dans le cas général : $Cov(x, y) = V(x) + V(y) + 2Cov(x, y)$

Note

La *v. a. x* peut être représentée par un diagramme en bâtons dont les abscisses seront les différentes valeurs de la variable (x_i) et les ordonnées les probabilités (p_i) correspondantes.

7. Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de la *v. a. X*, toute fonction

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto F(x) = P[X < x_i]$$

La fonction de répartition peut être représentée par une fonction en escalier, c'est la fonction qui aux différentes valeurs de x associe les probabilités cumulées (comme en statistique avec les fréquences cumulées).

Exercices résolus

ER 193. on lance simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à

6. On appelle x la *v. a* « la valeur absolue de la différence des numéros obtenus ».

- Détermine la loi de probabilité de x
- Calcule l'espérance mathématique de x
- Calcule la variance de x
- Calculer l'écart-type de x

Résolution

I^{er} dé : $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

II^{ème} dé : $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

L'univers $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \Rightarrow \#(\Omega) = 36$

D ₁ \ D ₂	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Le tableau de la $v.a.x$ est :

D ₁ \ D ₂	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

a. La loi de probabilité de x est donnée par le tableau ci-après :

x_i	0	1	2	3	4	5
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

b. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \sum_{i=0}^5 P_i x_i$

$$= 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} = \frac{35}{18} = 1,94$$

c. La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{5}{18} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{9} + 5^2 \cdot \frac{1}{18} - (1,94)^2 \\ &= \frac{53}{9} - (1,94)^2 = 5,8 - (1,94)^2 = 2,04 \end{aligned}$$

d. L'écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2,04} = 1,4$

ER 194.2. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent trois boules numérotés respectivement 1,2,3 et 2,3,4. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on effectue le produit X des numéros tirés.

- Détermine la loi de probabilité X et tracer le graphe de sa fonction de répartition.
- Calcule $E(x)$ et $V(x)$.

Résolution

$U_1 = \{1,2,3\}$ et $U_2 = \{2,3,4\}$

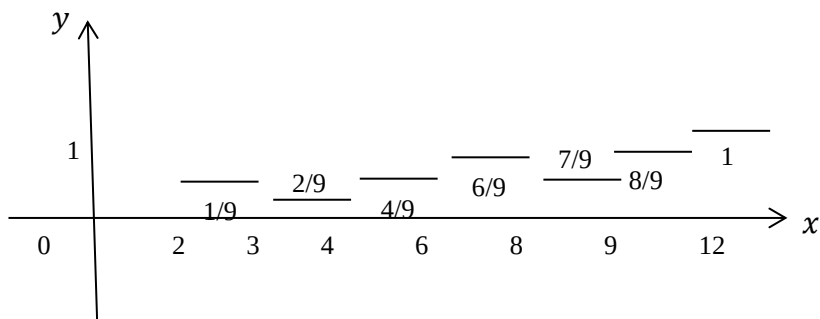
$\Omega = U_1 \times U_2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

$\#(\Omega) = 9$

- La loi de probabilité de x est donnée par le tableau ci-après :

x_i	2	3	4	6	8	9	12
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

- Le graphe de la fonction de répartition de



ER 195.3. Un sac contient 5 boules numérotés de 1 à 5. On tire simultanément deux boules du sac et on considère la variable aléatoire x qui, à chaque tirage de deux boules associe la somme des numéros obtenus.

- Détermine la loi de probabilité de X
- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Résolution

Soit l'univers $\Omega = \{1,2,2,4,5\}$

Les tirages de deux boules possibles sont

$(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)$ et $(4,5)$

$X = \{3,4,5,6,7,8,9\}$

a. La loi de probabilité de x est donnée par le tableau ci-après :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{b. } E(x) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 39 - 36 = 3$$

b. Variables aléatoires continues

1. Densité de probabilité

Soit $I=[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle densité de probabilité, toute fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

(i) f est continue sur I

(2i) f est positive sur I

(3i) f est intégrable sur I et

$$\int_I f(x)dx = 1$$

2. Loi de probabilité

La loi de probabilité de la densité f sur un intervalle $I = [a, b]$ est un réel défini

par la relation : $P([a, b]) = \int_a^b f(x)dx$

La fonction de répartition $F(x)$ des probabilités est donnée par la relation.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

3. Espérance mathématique et variance

Soit f une fonction densité de probabilité définie sur $I = [a, b]$. L'espérance mathématique de la v. a. x est la quantité

$$E(x) = \int_a^b x f(x)dx$$

La variance est la quantité :

$$V(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [E(x)]^2$$

L'écart-type est la quantité : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Exercices résolus

ER 196. Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{8}$ définie sur $I = [0, 4]$

- Démontre que f est une densité de probabilité sur I .
- Détermine la fonction de répartition des probabilités de f sur I
- Calcule les probabilités $P([0, 1])$ et $P(1 \leq x \leq 2)$
- Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Résolution

- $f(x) = \frac{x}{8}$ est trivialement une densité de probabilité sur $[0, 4]$ car :

(a1) f est continue sur $[0, 4]$

(a2) f est positive sur $[0, 4]$ c'est-à-dire $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 4]$

$$(a3) \int_0^4 \frac{x}{8} dx = \left[\frac{x^2}{16} \right]_0^4 = \frac{16}{16} = 1.$$

- La fonction de répartition $F(x)$ est donnée par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{8} dt = \frac{x^2}{16}$
- $P([0, 1]) = \int_0^1 \frac{x}{8} dx = \frac{1}{16}$ soit 6,25%

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \frac{x}{8} dx = \frac{3}{16} \text{ soit } 18,75\%$$

$$d. E(x) = \int_0^4 x \cdot \frac{x}{8} dx = \int_0^4 \frac{x^2}{8} dx = \left[\frac{x^3}{24} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

$$V(x) = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{x}{8} dx - \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \int_0^4 \frac{x^3}{8} dx - \frac{64}{9} = \left[\frac{x^4}{32} \right]_0^4 - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

ER 197. On donne la fonction $f(x) = \frac{2}{x^2}$ définie sur $[2, +\infty[$.

- Montre que f est une densité de probabilité sur $[2, +\infty[$.
- Détermine la fonction de répartition des probabilités de f sur $[2, +\infty[$
- Calcule les probabilités $P(x \geq 5)$ et $P(x \geq 8)$

Résolution

a. (a1) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

(a2) $f(x) \geq 0, \forall x \in [2, +\infty[$.

(a3)
$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_2^m \frac{2}{x^2} dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{x} \right]_2^m$$
$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{m} \right) = 1$$

En vertu de (a1), (a2) et (a3), $f(x)$ est une densité de probabilité sur $[2, +\infty[$.

b. $F(x) = \int_2^x \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_2^x = 1 - \frac{2}{x}$

c. $P(x \geq 5) = \int_5^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$
$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_5^m \frac{2}{x^2} dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{m} \right) = \frac{2}{5} \text{ soit } 40\%$$

$P(x \geq 8) = \int_8^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$
$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_8^m \frac{2}{x^2} dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{m} \right) = \frac{1}{4} \text{ soit } 25\%$$

ER 198. Soit X une variable aléatoire continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcule la valeur de a , puis détermine la fonction de répartition $F(x)$ de x .

Résolution

Déterminons a

Comme $f(x)$ est une densité de probabilité sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= 1 \\ \int_0^1 ax(1-x) dx &= 1 \\ \left[a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^1 &= 1 \\ \frac{1}{6} a &= 1 \\ a &= 6 \\ \Rightarrow f(x) &= \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminons $F(x)$. Trois cas sont possibles.

- Si $x \leq 0 \Rightarrow f(t) = 0$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$

- Si $x \in [0,1] \Rightarrow f(t) = 6t(1-t)$

$$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3$$

- Si $x \geq 1$ $F(x) = 1$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Loi binomiale ou alternatives répétées

1. Définition

On appelle épreuve de Bernoulli, une expérience dont on ne retient que deux résultats contraires : succès ou échec.

2. Exemples

a) Une urne contient des boules rouges, noires et vertes. Vouloir tirer une « boule rouge » est un succès. Tirer une « boule autre que rouge » est un échec.

b) Une maman s'attend à accoucher d'une fille (succès). Accoucher d'un garçon est un échec pour elle.

3. Théorème

Si l'on répète n fois, dans les mêmes conditions de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli, dit schéma de Bernoulli, la probabilité d'avoir k succès est donnée par :

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Où :

. p désigne la probabilité de succès lors d'une épreuve,

. $q = 1 - p$ la probabilité d'échec lors de cette même épreuve.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

. X est la variable aléatoire binomiale

. on note la loi binomiale par $X = B(n, p)$.

Paramètres de position et de dispersion

1. Esperance mathématique : $E(X) = \mu = n.p$

2. Variance : $V(X) = n.p(1-p)$

3. Ecart - type : $\sigma(X) = \sqrt{V} = \sqrt{n.p(1-p)}$

Notes

- La loi binomiale est d'une grande importance en Biologie, notamment dans les lois de Mendel qui sont basées sur le hasard.
- La loi binomiale est la plus utilisée des lois des probabilités relatives aux variables aléatoires discrètes.

Exemples

a) A la naissance, la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{1}{2}$ et celle d'avoir une fille est également $\frac{1}{2}$. Pour un jeune couple qui veut avoir 7 enfants, la probabilité d'avoir 4 garçons et 3 filles est :

$$P_4 = C_7^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 35 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{35}{128} \\ = 0,2734375 \text{ ou } 27\%$$

b) Dans une urne contenant 4 boules rouges, 5 boules noires et 7 boules vertes, la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

En tirant 5 fois, avec remise, la probabilité d'obtenir 3 boules rouges est :

$$P_3 = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ = 0,087 \text{ soit } 8,7\%$$

Exercices résolus

ER 199.1. Une urne contient 15 boules vertes, 5 boules jaunes et 3 boules bleues. Quelle est la probabilité de sortir :

- a) une boule jaune b) une boule bleue c) soit une boule noire soit une boule blanche

Résolution

Soit Ω l'urne contenant toutes les boules ($\#\Omega = 23$).

A : événement tirage d'une boule jaune

B : événement tirage d'une boule bleue

C : événement tirage d'une boule soit noire soit blanche.

$$p(A) = \frac{5}{23} \qquad p(B) = \frac{3}{23} \qquad p(C) = \frac{0}{23} = 0$$

ER 200.2. Calcule la probabilité d'amener une somme égale à 7 en jetant deux dés l'un rouge et l'autre bleu ?

Résolution

* Nombre des cas possibles : $N = 36$

* Nombre des cas favorables : $n = 6$

$$p = \frac{6}{36} = 0,166 \text{ soit } 16,6\%$$

On peut aussi trouver les cas possibles et les cas favorables en dressant le tableau

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Le nombre des cas possibles est $N = 36$ et le nombre des cas favorables ($n = 6$) est donné par les couples (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) et (6, 1)

ER 201.3. On a réalisé une enquête auprès de 10.000 personnes sur la bronchite dans la zone de santé de Kola au Kongo Central. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Personnes atteintes de bronchite	Personnes non atteintes de bronchites	Totaux
Fumeurs	300	3.700	4.000
Non-fumeurs	100	5.900	6000
Totaux	400	9.600	10.000

Calcule la probabilité de l'événement U : "la personne choisie est un non-fumeur atteint de bronchite".

Résolution

$$\#(U) = 100 \quad \text{et} \quad \#(\Omega) = 10000$$

$$P(U) = \frac{100}{10000} = 0,01$$

ER 202.4. Dans une classe de 40 élèves de 4ème année des humanités scientifiques, 20 s'intéresse à la biologie, 12 à l'histoire et 5 aux deux cours à la fois. On choisit au hasard un élève de la classe.

- Calcule la probabilité qu'il s'intéresse à la biologie ou à l'histoire.
- Calcule la probabilité qu'il ne s'intéresse ni à la biologie ni à l'histoire.

Résolution

L'événement A : « l'élève s'intéresse à la biologie »

L'événement B : « l'élève s'intéresse à l'histoire »

L'événement $A \cap B$: « l'élève s'intéresse aux deux cours à la fois »

$$P(A) = \frac{20}{40} = 0,5 \quad , \quad P(B) = \frac{12}{40} = 0,3 \quad \text{et}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{40} = 0,125$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0,5 + 0,3 - 0,125 = 0,675$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,125 = 0,875$$

ER 203.5. Une firme veut engager deux personnes. Il y a 4 candidats féminins et 2 candidats masculins. Chacun d'eux a la même chance d'être retenu.

Quelle est la probabilité d'engager :

- a) 2 hommes
- b) 2 femmes
- c) 2 personnes de même sexe ?
- d) 2 personnes de sexes différents ?

Résolution

Nombre des cas possibles : $C_6^2 = 15$

a) Soit A l'événement : « engager deux hommes », $p(A) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$

b) Soit B l'événement : « engager deux femmes », $p(B) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$

c) Soit $A \cup B$ l'événement : « engager deux personnes de même sexe. »

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{15} + \frac{6}{15} = \frac{7}{15} \approx 0,467 \text{ soit } 46,7 \%$$

d) Soit C l'événement : « engager deux personnes de sexes différents ».

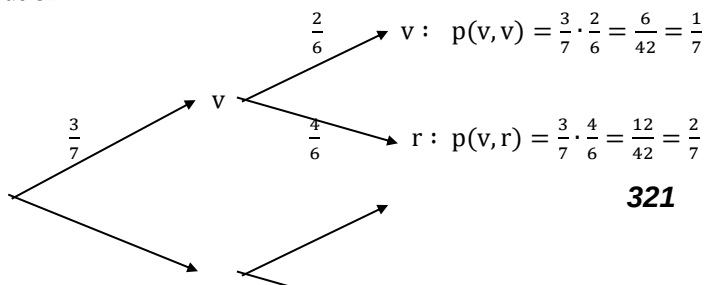
C étant le contraire de $A \cup B$, nous avons :

$$p(C) = 1 - p(A \cup B) = \frac{8}{15}, \text{ soit } 53,3 \%.$$

ER 204.6. Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules vertes toutes indiscernables au toucher et parfaitement identiques, hormis la couleur. On tire successivement sans remettre dans l'urne, deux boules.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?
- b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?

Résolution



$$\begin{array}{lcl} & \frac{3}{6} & v : p(r, v) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & r & \\ & \frac{3}{6} & r : p(r, r) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \end{array}$$

- a) $p(A)$: probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur

$$p(A) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \text{ ou } 43\%$$

- b) $p(B)$: probabilité de tirer deux boules couleurs différentes

$$p(B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \text{ ou } 57\% .$$

ER 205.7. Deux boules sont simultanément tirées dans une urne contenant trois boules blanches, deux boules rouges et une boule verte (tirage sans remise).

- a) Donne l'ensemble fondamental correspondant à cette expérience ?
 b) Détermine la mesure de la probabilité correspondant à l'expérience aléatoire.
 c) Calcule la probabilité associée à chacun des événements suivants :

A : « la première boule est rouge »

B : « les deux boules sont rouges »

C : « les deux boules sont de même couleur »

D : « les deux boules sont de couleurs différentes »

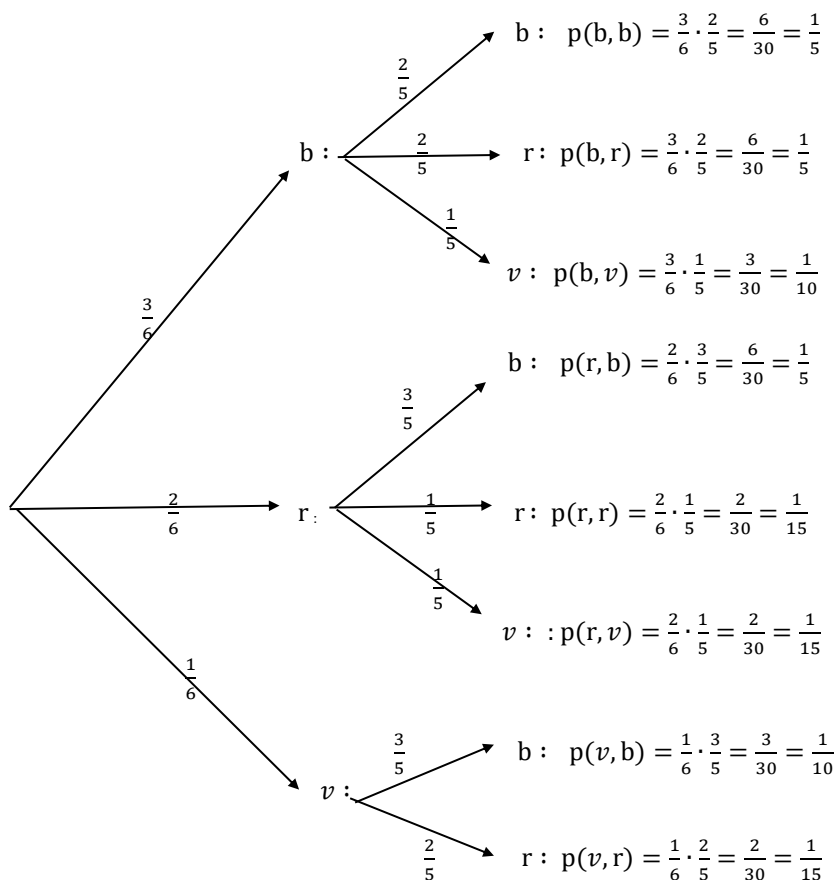
E : « aucune de boules n'est de couleur rouge »

F : « la seconde est rouge »

- d) Deux événements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent survenir en même temps c'est à dire $A \cap B = \emptyset$. Parmi les événements précédents lesquels sont incompatibles ?

Résolution

- a) Représentons cette situation à l'aide d'un arbre



L'ensemble fondamental correspondant à cette expérience est :

$$\{(b, b); (b, r); (b, v); (r, b); (r, r); (r, v); (v, b); (v, r)\}$$

b) $p(b, b) = \frac{1}{5} ; p(b, r) = \frac{1}{5} ; p(b, v) = \frac{1}{10} ; p(r, b) = \frac{1}{5} ;$

$p(r, r) = \frac{1}{15} ; p(r, v) = \frac{1}{15} ; p(v, b) = \frac{1}{10} \text{ et } p(v, r) = \frac{1}{15}.$

c) $p(A) = \frac{1}{3} ; p(B) = \frac{1}{15} ; p(C) = \frac{4}{15} ; p(D) = \frac{11}{15} ; p(E) = \frac{2}{5}$
et $p(F) = \frac{1}{3}.$

d) Les couples d'événements incompatibles sont A et E , B et D ,
 B et E , C et D , et enfin E et F .

ER 206.8. Une colonie des vacances compte 25 enfants et 5 encadreurs.

a) Le car mis à leur disposition pour faire une excursion ne comporte que 12 places. On demande le nombre d'associations possibles de 10 enfants avec 2 encadreurs.

b) On tire au sort pour savoir quels seront les 10 enfants et les 2 encadreurs devant participer à l'excursion, sachant que l'un des encadreurs est père de 2 enfants de la colonie. Quelle est la probabilité pour que le papa et les 2 enfants fassent partie de l'excursion ?

Résolution

a) $C_{25}^{10} \times C_5^2 = 32687600$

b) Les deux enfants et leur papa étant d'office membres de la délégation, il faut choisir 8 enfants parmi les 23 restants et 1 encadreur parmi les 4 restants.

$$p = \frac{C_{23}^8 \times C_4^1}{C_{25}^{10} \times C_5^2} = 0,06$$

ER 207.9. Un jury est composé de 5 membres dont les noms sont tirés au sort parmi ceux d'une liste comportant 10 hommes et 7 femmes. Calcule la probabilité pour que le jury :

a) comprenne 3 hommes et 2 femmes

b) ne comporte aucune femme.

c) comprenne au moins une femme.

Résolution

Soit les événements A : « avoir 3 hommes et 2 femmes », B : « n'avoir aucune femme » et C : « avoir au moins une femme ».

a) $p(A) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_7^2}{C_{17}^5} = \frac{120 \cdot 21}{6188} = \frac{2520}{6188} = \frac{90}{221}$

b) $p(B) = \frac{C_{10}^5}{C_{17}^5} = \frac{252}{6188} = \frac{9}{221}$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(C) &= \frac{C_7^1 \cdot C_{10}^4 + C_7^2 \cdot C_{10}^3 + C_7^3 \cdot C_{10}^2 + C_7^4 \cdot C_{10}^1 + C_7^5 \cdot C_{10}^0}{C_{17}^5} \\ &= \frac{7 \cdot 210 + 21 \cdot 120 + 35 \cdot 45 + 35 \cdot 10 + 21 \cdot 1}{6188} \\ &= \frac{1470 + 2520 + 1575 + 350 + 21}{6188} \\ &= \frac{5936}{6188} \\ &= \frac{212}{221} \end{aligned}$$

ER 208.10. On considère un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Le dé est pipé de telle sorte que $p(k)$ désigne la probabilité d'apparitions de la face portant le numéro k .

$p(1)$; $p(2)$; $p(3)$;; $p(6)$ sont les six premiers termes d'une suite arithmétique de raison r .

a) On lance le dé une fois et on prend comme univers l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1, 6\}$ désigne l'événement : « la face supérieure porte l'un des numéros 1 ou 6 ».

On considère de même les événements $B = \{2, 5\}$ et $C = \{3, 4\}$.

Montre que les trois événements A, B et C sont équiprobables.

b) On donne la raison $r = \frac{1}{30}$ de la suite arithmétique ;

* calcule $p(k)$ pour chacune des valeurs de k ;

* calcule la probabilité de l'événement $D = \{2, 4, 6\}$.

Résolution

$$a) p(2) = p(1) + r$$

$$p(3) = p(1) + 2r$$

$$\vdots$$

$$p(6) = p(1) + 5r$$

$$p(B) = p(2) + p(5)$$

$$= p(1) + r + p(1) + 4r$$

$$= 2p(1) + 5r$$

$$p(A) = p(1) + p(6)$$

$$= p(1) + p(1) + 5r$$

$$= 2p(1) + 5r$$

$$p(C) = p(3) + p(4)$$

$$= p(1) + 2r + p(1)$$

$$+ 3r$$

$$= 2p(1) + 5r$$

D'où : $p(A) = p(B) = p(C)$

b) * Nous savons que :

$$[p(A) + p(B) + p(C) = 1] \Leftrightarrow [2p(1) + 5r + 2p(1) + 5r + 2p(1) + 5r = 1]$$

$$\Leftrightarrow [6p(1) + 15r = 1]$$

$$\Leftrightarrow [6p(1) + \frac{1}{2} = 1] \quad \left(r = \frac{1}{30}\right)$$

$$\Leftrightarrow [6p(1) = \frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow [p(1) = \frac{1}{12}]$$

$$p(2) = p(1) + r = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}; p(3) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}; p(4) = \frac{11}{60}; p(5) = \frac{13}{60}$$

$$\text{et } p(6) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 * \quad p(D) &= p(2) + p(4) + p(6) \\
 &= \frac{7}{60} + \frac{11}{60} + \frac{15}{60} \\
 &= \frac{11}{20} \text{ soit } 55 \%
 \end{aligned}$$

ER 209.11. Trois chevaux A , B et C participent à une course. A possède deux fois plus de chances que B de gagner et B a deux fois plus de chances que C de gagner.

a) Trouve les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, de gagner pour chacun de ces trois chevaux ?

b) Trouve la probabilité pour que B ou C soit vainqueur ?

Résolution

a) Soit $p(C) = \alpha$; nous avons :

$$p(B) = 2\alpha \text{ et } p(A) = 2p(B) = 4\alpha.$$

$$\begin{aligned}
 [p(A \cup B \cup C) = 1] &\Leftrightarrow [p(A) + p(B) + p(C) = 1] \\
 &\Leftrightarrow (7\alpha = 1) \\
 &\Leftrightarrow (\alpha = \frac{1}{7})
 \end{aligned}$$

$$p(A) = \frac{4}{7}; \quad p(B) = \frac{2}{7}; \quad p(C) = \frac{1}{7}$$

$$b) p(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{3}{7} \text{ soit } 42,8 \%$$

ER 210.12. On tire avec remise deux cartes d'un jeu très bien mélangé de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que :

a) la deuxième carte soit un roi si la première est une pique ?

b) la deuxième carte soit une pique si la première est un roi ?

Résolution

A : « la première carte est un pique » C : « la première carte est un roi »

B : « la deuxième carte est un roi » D : « la deuxième carte est une pique »

$$\begin{aligned}
 a) \quad p(B \setminus A) &= \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \\
 &= \frac{\frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52}}{\frac{13}{52}} \\
 &= \frac{1}{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(D \setminus C) &= \frac{p(D \cap C)}{p(C)} \\
 &= \frac{\frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52}}{\frac{4}{52}} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ER 211.13. Un couple d'animaux est composé d'un mâle aux yeux rouges de race pure et d'une femelle aux yeux bleus de race pure. Le caractère rouge étant récessif, quelle est la probabilité d'obtenir un individu aux yeux bleus en seconde génération?

Résolution

Les génotypes des parents sont :

– pour le mâle (m) : rr ; – pour la femelle (f) : BB

A la première génération (F_1), nous avons l'échiquier ci-dessous :

F_1 :

m \ f	R	r
B	Br	Br
B	Br	Br

Tous les individus sont des hybrides aux yeux bleus (Br).

A la deuxième génération (F_2), les génotypes des parents sont Br et Br.

Nous avons l'échiquier ci-dessous :

F_2 :

m \ f	B	r
B	BB	Br
r	Br	rr

La probabilité d'obtenir un individu aux yeux bleus est $p(B) = \frac{3}{4}$ soit 75 %.

ER 212.14. Le résultat d'un sondage chez 50 jeunes est le suivant :

	Fumeurs	Non fumeurs	
Garçons	15	5	
Filles	20	10	

Calcule les probabilités suivantes ;

- le jeune fume ;
- le jeune est un garçon ;
- le jeune est un garçon et il fume ;
- sachant que c'est un garçon, le jeune fume.

Solution

Complétons le tableau avec ses marges F : « le jeune fume » et G : « le jeune est un garçon ».

	F	$\bar{F}$	
G	15	5	20
$\bar{G}$	20	10	30
	35	15	50

$$a) \quad p(F) = \frac{35}{50} = 0,7$$

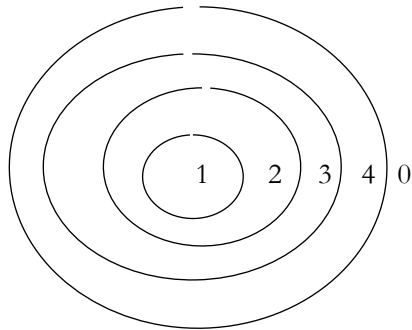
$$b) \quad p(G) = \frac{20}{50} = 0,4$$

$$c) \quad p(G \cap F) = \frac{15}{50} = 0,3$$

$$d) \quad p_G(F) = \frac{15}{20} = 0,75 \quad \text{ou} \quad p_G(F) = \frac{p(G \cap F)}{p(G)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

ER 213.15. Une cible d'un jeu des fléchettes est formée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2, 3 et 4. Les cercles limitant ces zones ont pour rayons respectifs 10cm, 20cm, 30 et 40cm. On note p_i la probabilité d'atteindre la zone numérotée i et p_0 la probabilité de ne pas atteindre la cible (zone 0). On suppose que la probabilité d'atteindre la zone (1, 2, 3 ou 4) est proportionnelle à l'aire de cette zone et que $p_4 = 0,35$.

Pour chacune des zones, détermine la probabilité que la fléchette l'atteigne.



Résolution

Probabilités proportionnelles à une aire

La zone 4 a une aire de $\pi(40^2 - 30^2) = 700\pi \text{ cm}^2$.

On sait que la probabilité est de 0,35. Comme elle est proportionnelle à l'aire, alors si k est le coefficient de proportionnalité :

$$700\pi = 0,35 \cdot k \leftrightarrow k = \frac{700\pi}{0,35} = 2\,000\pi.$$

L'aire de la zone 1 est $10^2\pi = 100\pi$, donc la probabilité est

$$p_1 = \frac{100\pi}{k} = \frac{100\pi}{2000\pi} = 0,05$$

L'aire de la zone 2 est $(20^2 - 10^2)\pi = 300\pi$, donc la probabilité est

$$p_2 = \frac{300\pi}{2000\pi} = 0,15$$

L'aire de la zone 3 est $(30^2 - 20^2) \cdot \pi = 500\pi$, donc la probabilité est

$$p_3 = \frac{500\pi}{2000\pi} = 0,25.$$

Ainsi, la probabilité que la fléchette atteigne la zone 0 est le complément :

$$p_0 = 1 - (0,05 + 0,15 + 0,25 + 0,35) = 0,2$$

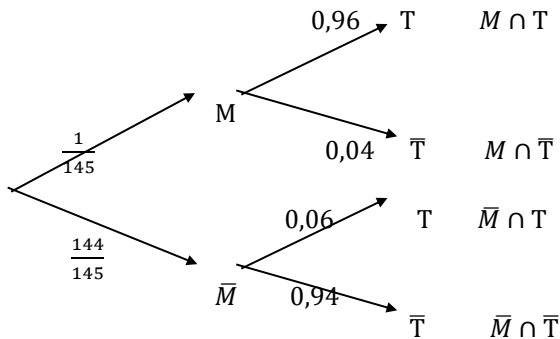
ER 214.16. Une personne choisie au hasard parmi la population de la région passe un test pour dépister une maladie. Dans cette région, on a établi, par sondage, dans les hôpitaux que :

- une personne sur 145 a cette maladie
- si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas ;
- si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.

On notera :

- M l'événement : « la personne est atteinte de cette maladie »
 - T l'événement : « le test de la personne est positif »
1. Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de cette maladie ? Qu'en pensez – vous ?
 2. Le résultat du test est négatif, quelle est la probabilité que la personne, ne soit pas atteinte de cette maladie ? Qu'en pensez – vous ?

Résolution



- 1) On nous demande de calculer $p_T(M)$. Pour cela, nous avons besoin de calculer $p(T)$. Or $p(M \cap T) = \frac{1}{145} \cdot 0,96 = \frac{24}{3\,625}$; $p(\bar{M} \cap T) =$

$$\frac{144}{145} \cdot 0,06 = \frac{216}{3\,625}$$

$$\text{d'où } p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = \frac{24+216}{3\,625} = \frac{240}{3\,625} = \frac{48}{725}$$

$$\text{donc } p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{24}{3\,625} \cdot \frac{725}{48} = 0,1$$

Cela signifie que, quand le test est positif, la personne testée a seulement 1 risque sur 10 d'être effectivement malade. Ce test ne semble donc pas efficace dans ce sens.

- 2) Par contre, si le test est négatif, alors $p_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{(\bar{M} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})}$.

$$\text{Or } p(\bar{M} \cap \bar{T}) = \frac{144}{145} \cdot 0,94 = \frac{3\,384}{3\,625} \text{ et } p(\bar{T}) = 1 - p(T) = 1 - \frac{48}{725} = \frac{677}{725}$$

$$\text{donc } p_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{\frac{3\,384}{3\,625}}{\frac{677}{725}} = \frac{98\,136}{98\,165} = 0,999\,7$$

Si le test est négatif, la personne testée est « pratiquement sûre de ne pas être malade (mais pas tout à fait).

ER 215.17. L'élève Lungheny Ryan de la 4^e des humanités scientifiques a remarqué que dans le quartier où il habite à Kinshasa durant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre et 12,5% au cinéma et au théâtre. Calcule la probabilité pour que durant un mois, un individu :

- aille au cinéma ou au théâtre ;
- n'aille pas au cinéma;
- n'aille ni au cinéma, ni au théâtre ;
- aille au cinéma mais pas au théâtre ;
- sachant qu'il n'est pas allé au théâtre, aille au cinéma ;
- sachant qu'il n'est pas allé au théâtre, n'aille pas au cinéma ;

Résolution

Soit C: « l'événement aller au cinéma » et T : « l'événement aller au théâtre ».

On a:

$$p(C) = 0,4 ; p(T) = 0,25 ; p(C \cap T) = 0,125$$

$$\begin{aligned} \text{a) } p(C \cup T) &= p(C) + p(T) - p(C \cap T) \\ &= 0,4 + 0,25 - 0,125 \\ &= 0,525 \end{aligned}$$

$$\text{b) } p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(\bar{C} \cap \bar{T}) &= 1 - p(C \cup T) \\ p(\overline{C \cup T}) &= 1 - 0,525 = 0,475 \end{aligned}$$

$$\text{d) } C = (C \cap T) \cup (C \cap \bar{T})$$

Or $C \cap T$ et $C \cap \bar{T}$ sont des événements incompatibles donc :

$$p(C) = p(C \cap T) + p(C \cap \bar{T}).$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi donc } p(C \cap \bar{T}) &= p(C) - p(C \cap T) = 0,4 - 0,125 = \\ &= 0,275 \text{ ou encore } p(C \cup T) - p(T) = 0,525 - 0,25 = 0,275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } p(C \setminus \bar{T}) &= \frac{p(C \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0,275}{0,75} = 0,37 \\ \text{f) } p(\bar{C} \setminus \bar{T}) &= \frac{p(\bar{T} \cap \bar{C})}{p(\bar{T})} = \frac{0,475}{0,75} = 0,639 \end{aligned}$$

ER 216.18. Un oiseau doit passer successivement au-dessus de deux chasseurs. Chacun a une chance sur trois de descendre l'oiseau. Quelles sont les chances d'être abattu ?

Résolution

Soit A l'événement « l'oiseau est abattu par le premier chasseur » et B l'événement « l'oiseau est abattu par le deuxième chasseur ».

$$\begin{aligned} p(A) &= p(B) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ p(B) &= p(\bar{A}) \cdot p(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

En effet, l'oiseau pourrait être abattu par le deuxième chasseur si le premier le rate puisque l'oiseau doit passer successivement au-dessus des deux chasseurs. Les chances pour l'oiseau d'être abattu seront :

$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$ ou $p(A \text{ et } B) = 0$, car l'oiseau ne peut être abattu par les deux chasseurs simultanément.

$$\text{Ainsi, } p(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0,55$$

ER 217.19. Au jeu des fléchettes, Vuma est plus habile que Dilu. Sa probabilité d'atteindre la cible est $\frac{1}{2}$, tandis que celle de Dilu est $\frac{1}{3}$. Chacun joue une fois. Quelle est la probabilité qu'ils atteignent tous deux la cible ?

Résolution

A : « Vuma atteint la cible »

D : « Dilu atteint la cible »

L'habileté de l'un n'influençant pas celle de l'autre, les événements A et D sont indépendants.

$$p(A \cap D) = p(A) \cdot p(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (\text{loi produit}).$$

ER 218.20. Une urne contient x boules dont trois blanches, les autres étant rouges.

a) A l'occasion du tirage sans remise de deux boules, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule rouge est égale à $\frac{1}{4}$.

Détermine x .

b) Même question si le tirage de deux boules est effectué avec remise.

Résolution

- a) Le tirage n'étant pas indépendant puisqu'il est fait avec remise.

Ainsi : $p(R \cap B) = p(B).p(B)$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x-3}{x-1}$$

On a : $x^2 - 13x + 36 = 0$

$x = 4$ et $x = 9$

L'urne peut contenir 4 boules (3B et 1R) ou 9 boules (3B et 6R).

- b) Le tirage étant cette fois indépendant et fait avec remise, on a :

$$p(R \cap B) = p(B).p(R)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x-3}{x}$$

On a : $x^2 - 12x + 36 = 0$

$x = 6$

L'urne contient 6 boules (3B et 3R)

ER 219.21. Deux événements E et F sont tels que $p(E) = 0,4$; $p(F) = 0,5$ et $p(E \cup F) = 0,7$.

- Calcule $p(E \cap F)$
- E et F sont-ils incompatibles ?
- Calcule $p_E(F)$.
- E et F sont-ils indépendants ?

Résolution

a) $p(E \cap F) = p(E) + p(F) - p(E \cup F) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2$

- b) L'intersection n'étant pas vide, E et F ne sont pas incompatibles.

c) $p_E(F) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$

- d) E et F sont donc indépendants
car $(E \cap F) = p(E).p(F) = 0,2$.

ER 220.22. Une loi de probabilité est donnée par :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	a

- Calcule a
- Calcule l'espérance mathématique de cette loi
- Calcule l'écart – type de cette loi.

Solution

$$a) \sum_{i=1}^4 p_i = 1, \text{ d'où } a = 1 - (0,2 + 0,4 + 0,1) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$b) E(x) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i = 0,2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 + 0,1 \cdot 3 + 0,3 \cdot 4 = 2,5$$

$$c) V = \sum_{i=1}^4 p_i x_i^2 - [E(x)]^2 = 1,25 \text{ et } \sigma = \sqrt{1,25} = 1,12$$

ER 221.23. Un jeu consiste lancer un dé cubique non pipé. Si on obtient le 1 on gagne 10u.m, si on obtient le 3 ou le 5, on gagne 5u.m, et si on obtient un nombre pair on gagne 2u.m.

- Définis la loi de probabilité associée à ce jeu.
- 1°. calcule l'espérance mathématique et l'écart – type de cette loi.
2°. Pour que ce jeu soit rentable, combien doit – on au moins demander aux personnes pour jouer ?

Résolution

- Le dé est normal donc :

$$p(\text{"obtenir un nombre pair"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(\text{"obtenir le 3 ou le 5"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(\text{"obtenir le 1"}) = \frac{1}{6}$$

Issue x_i (en u.m)	2	5	10	Total
Probabilité p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

On vérifie que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$2) 1^\circ) E(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{3}{3} \approx 4,33$$

Ce nombre représente « le gain moyen » qu'on peut « espérer » en jouant un très grand nombre de fois.

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 10^2 \approx 8,25 \text{ et } \sigma\sqrt{V} \approx 2,87$$

2°) En conséquence, le prix de participation à ce jeu doit être au moins de 4,33u.m.

ER 222.24. Un tireur atteint une cible avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Imagine qu'il ait tiré 6 fois. Calculer la probabilité d'atteindre la cible :

a) exactement deux fois ; b) au plus deux fois ; c) au moins trois fois

Résolution

Soit S : l'événement « atteindre la cible » $p(S) = \frac{1}{3}$

E : l'événement « rater la cible » $p(E) = \frac{2}{3}$.

$$a) p_{k=2} = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0,329$$

$$b) p_{k \leq 2} = p_{k=0} + p_{k=1} + p_{k=2}$$

$$= C_6^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= 0,680$$

$$c) p_{k \geq 3} = 1 - p_{k < 3}$$

$$= 1 - 0,680$$

$$= 0,320$$

ER 223.25. Un couple est tel que l'homme est albinos et la femme hétérozygote pour ce même caractère. Quelle sera la probabilité d'obtenir deux enfants albinos et trois normaux ?

Résolution

Les génotypes des parents sont pour l'homme (m) : aa et pour la femme (f) : Na

Nous avons l'échiquier ci-dessous :

f \ m	a	a
	Na	Na
N	Na	Na
A	aa	aa

$$p(aa) = \frac{1}{2} \text{ soit } 50 \%$$

$$p(Na) = \frac{1}{2} \text{ soit } 50 \%$$

La probabilité p demandée est :

$$p = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Exercices

N° 495. Un sac contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules jaunes. On tire deux boules successivement du sac. On considère les événements :

A : « Les deux boules sont rouges »

B : « L'une au moins des boules est blanche »

C : « La première boule tirée est jaune et la seconde ne l'est pas »

D : « Il n'y a ni blanche, ni rouge »

Défini d'une phrase leurs événements contraires.

N° 496. Compléter le tableau suivant sachant que les objets utilisés pour réaliser les épreuves ne sont pas truqués

Epreuve	# Ω	Événement A	# A	p(A)
1) Jeter une pièce de monnaie et observer la face visible		Le côté visible est pile		
2) Lancer un dé et observer le chiffre sur la face supérieur		La face supérieure donne un nombre pair		
3) Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes et observer la couleur : trèfle, pique, cœur, carreau		La couleur cœur		
4) Tirer une boule d'une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 et lire le numéro		Le numéro de la boule tirée est impair		
5) Jeter 2 dés indiscernables et noter les points des faces supérieures		La somme des points est 8		
6) Tirer simultanément 2 boules dans une urne contenant 4 boules numérotées 1, 2, 3, 4		2 boules de numéros pairs		

N° 497. Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On effectue 20 tirages avec remise de la boule dans l'urne après avoir noté sa couleur.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 7 boules blanches et 13 boules noires ?

b) 13 boules blanches et 7 boules noires ?

c) un nombre de boules blanches compris strictement entre 11 et 15 ?

d) strictement moins de 10 boules blanches ?

e) strictement plus de 10 boules noires ?

N° 498. On prépare 4 colis différents et 4 étiquettes portant les noms de 4 destinataires. On colle au hasard une étiquette sur chaque colis. Quelle est la probabilité pour que 4 colis arrivent directement à leur destinataire ?

- Même question s'il s'agit de 3 colis ; 2 colis ; 1 colis ; 0 colis ?

N° 499. On tire successivement 3 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 rois ? b) 3 trèfles ?

N° 500. On pipe une pièce de monnaie de telle sorte qu'apparaisse deux fois plus des piles que de face.

Calculer la probabilité d'obtenir : a) pile b) face

N° 501. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Calcule les probabilités des événements suivants:

A : « Tirer trois fois de suite pile »

B : « Tirer exactement deux fois faces »

C : « Tirer au plus une fois pile ».

N° 502. Une classe comporte 10 garçons dont la moitié porte des lunettes et 20 filles dont la moitié a également des lunettes. Calcule la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard soit un garçon ou une fille portant des lunettes.

N° 503. Chacun des cas figurant dans le tableau ci-dessus correspond à une expérience aléatoire. A et B désignent deux événements d'un univers Ω

a) Complète le tableau suivant :

	P(A)	P(B)	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(\bar{A})$
1 ^{er} cas	0,2	0,9	0,1		
2 ^{ème} cas		0,4	0,2	0,9	
3 ^{ème} cas			0,05	0,7	0,5
4 ^{ème} cas		0,4		0,6	0,8
5 ^{ème} cas	0,3	0,7		0,8	

b) Existe-t-il un cas où A et B sont incompatibles ? A et B sont-ils contraires ? $A \cup B$ est-il un événement certain ?

- N° 504. Une classe comporte 12 garçons et 4 filles. Si l'on choisit au hasard, trois élèves de la classe, quelle est la probabilité pour que tous soient des garçons ?
- N° 505. On jette deux fois un dé cubique parfaitement équilibré puis on additionne les numéros obtenus. Quelles sont les probabilités d'obtenir chacune de ces sommes 7,8,10,13?
- N° 506. Dans un jeu de 52 cartes bien battues on demande la probabilité de tirer.
- Un as
 - Un trèfle
 - Une carte rouge
 - Une carte de numéro inférieur ou égal à 5
 - Une dame ou un valet
- N° 507. Dans la classe de 4^e année des humanités pédagogiques on suppose que la probabilité pour qu'un élève choisi au hasard aime la psychologie est 0,6. La probabilité qu'il aime la didactique est 0,7 et la probabilité qu'il aime les deux à la fois est 0,5. Quelle est la probabilité pour qu'un élève choisi au hasard :
- aime la psychologie ou la didactique
 - n'aime ni la psychologie ni la didactique
- N° 508. Dans un lycée, la probabilité qu'un élève étudie le latin est de 0,35, celle de celui qui apprend l'espagnol est de 0,72 et celle de celui qui apprend les deux est de 0,14.
On choisit au hasard un élève du lycée .
- Quelle est la probabilité que cet élève étudie le latin et l'espagnol ?
 - Quelle est la probabilité que cet élève n'étudie ni le latin et ni l'espagnol ?
- N° 509. Dans un groupe de 30 personnes, 12 s'intéressent au tennis, 15 à la lecture et 8 ne s'intéressent ni au tennis ni à la lecture.
- Représente la situation à l'aide d'un diagramme de Venn et tableau à double entrée.
 - Calcule la probabilité qu'une personne s'intéresse à au moins une de deux activités
 - Calcule la probabilité qu'une personne s'intéresse aux deux activités.

N° 510. Une boîte de petits fours contient 50 gâteaux, qui sont chocolatés ou meringués ; par ailleurs ils sont soit de forme carrée, soit de forme ronde.

Dans cette boîte, il y a 30% de petits fours chocolatés, et parmi ceux-ci, 10 petits sont carrés, de plus 60% des gâteaux de la boîte sont ronds.

1) Représente cette situation dans le tableau à double entrée suivant :

	Chocolatés	Meringués	Total
Carrés			
Ronds			
Total			

2) A l'occasion d'un goûter, un enfant choisi au hasard un petit four de la boîte. Chaque four a la même probabilité d'être choisi.

a) Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « l'enfant a choisi un petit four carré »

B : « l'enfant a choisi un petit four meringué »

b) Calcule la probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

3) l'enfant a choisi un petit four rond. Chaque petit four a la même probabilité d'être choisi. Quelle est alors la probabilité que ce petit soit chocolaté ?

N° 511. Soit A et B deux événements tels que $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcule: a) $p(A \setminus B)$

b) $p(B \setminus A)$

N° 512. Quelle est la probabilité d'avoir dans une famille trois naissances successives dans l'ordre : garçon, garçon et fille ?

N° 513. Une boîte opaque contient 100 billes identiques dont 75 rouges et 25 jaunes. Quelle est la probabilité de tirer au hasard 2 billes rouges et 1 bille jaune en trois tirages successifs ? Notez qu'il faut remettre la bille dans la boîte après chaque tirage afin de ne pas modifier les probabilités.

N° 514. Une cage contient 12 souris : 5 blanches (2 femelles et 3 mâles); 7 grises (3 femelles et 4 mâles).

a) On tire une souris au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

B : « la souris prise est blanche »

G : « la souris prise est grise »

M : « la souris prise est mâle »

F : « la souris prise est femelle. »

- b) On a attrapé une souris blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit mâle ? Les événements B et M sont-ils indépendants ? Justifier.
- c) On veut une souris blanche et mâle ; si ce n'est pas le cas, on la remet dans la cage et on recommence le tirage. Quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une souris qui ne convient pas ?
- d) Pour quelles valeurs de n cette probabilité est-elle inférieure à 0,2 ?
- e) Sachant que $\log 2 = 0,3$ et $\log 3 = 0,4$, donne la valeur minimale de n .

N° 515. Quelle est la probabilité d'avoir dans une famille trois naissances successives dans l'ordre : garçon, garçon et fille ?

N° 516. Dans la population, 45% des gens sont du groupe A, 10% du groupe B, 2% du groupe AB et 43 % du groupe O. Par ailleurs, 85 % sont du rhésus + et 15 % du rhésus - . :

- a) Sachant que le groupe et le facteur rhésus sont indépendants, détermine la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard d'être A^+
- b) Un certain jour, on a besoin du sang A^+ , quinze donneurs se présentent ; trouve la probabilité que au moins soient A^+ .

N° 517. Trois chasseurs tirent sur un oiseau. Chacun a la probabilité $\frac{1}{3}$ de l'atteindre et ils sont indépendants. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit atteint ?

N° 518. Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible. La

probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$; elle est de $\frac{3}{4}$ pour B. Calcule la probabilité :

- a) que les deux tirs touchent tous deux la cible ;
- b) que la cible soit atteinte par A seulement ;
- c) que la cible soit atteinte par B seulement ?
- d) que tous les deux manquent la cible ;
- e) que la cible soit atteinte par un tireur seulement ;
- f) que la cible soit manquée ;
- g) que la cible soit touchée par un tireur au moins.

N° 519. Une entreprise utilise trois machines différentes pour fabriquer des arbres de transmission de même diamètre et de même longueur. 40% des arbres sont fabriqués par la machine B et 30% par la machine C. Malgré des réglages fréquents, ces machines produisent des arbres défectueux compte tenu des normes de fabrication.

Machines	A	B	C
Pourcentage des arbres défectueux	2%	4%	5%

On a prélevé un arbre au hasard dans la production et l'on a constaté qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par ;

1. la machine A ?
2. la machine B ?

N° 520. Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par α et β . Dans un lot de 10 000 appareils prélevés, on a constaté que :

- 1 000 appareils présentaient le défaut α ;
- 800 appareils présentent le défaut β ;
- 400 appareils présentent à la fois les défauts α et β ;

On pourra noter A « l'appareil présentant le défaut α » et B « l'appareil présentant le défaut β ».

- 1) Un client achète l'un des appareils.
 - a) Quelle est la probabilité qu'il présente le défaut seulement α ?
 - b) Quelle est la probabilité qu'il ne présente aucun défaut?
 - c) Les événements « présente le défaut α » et présente le défaut β » sont – ils indépendants ?
- 2) Un autre client achète un appareil qui présente le défaut α . Calcule la probabilité qu'il présente aussi le défaut β .

N° 521. Dans la ville de Kibombo dans la province du Maniéma, 40% de la population ont des cheveux bruns, 25% ont des yeux marron et 15% ont à la fois des cheveux bruns et des yeux marrons.

On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

- a) Si elle a des cheveux bruns , quelle est la probabilité qu'elle ait aussi des yeux marrons ?
- b) Si elle a des yeux marrons , quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas des cheveux bruns ?
- c) Quelle est la probabilité pour qu'elle n'ait ni des cheveux bruns ni des yeux marrons ?

N° 522. Dans le village de Manzasay dans la province du Kwilu, 25% des garçons et 10% des filles font les mathématiques. Les filles constituent 60% de l'effectif total. Si l'on choisit un élève au hasard et si celui-ci fait les mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une fille ?

N° 523. Il y a dans un tiroir 3 paires de chaussures de couleurs différentes. On tire au hasard deux chaussures.

Détermine la probabilité des événements :

A : « elles appartiennent à la même paire » ;

B : « il y a un pied droit et un pied gauche ».

N° 524. Pour son examen oral, le professeur Sude a préparé 30 questions inscrites chacune sur un morceau de papier. Un candidat interrogé doit tirer en une seule fois trois questions. Les 30 questions comportent 15 études de fonctions, 5 questions relatives aux logarithmes, 4 questions relatives aux exponentielles et 6 questions ayant trait aux statistiques.

a) Quelle est la probabilité pour que le candidat tire trois questions relatives aux fonctions ? Quelle est la probabilité pour que le candidat tire deux questions relatives aux fonctions et une relative aux logarithmes ?

b) Si le candidat ne connaît que 20 questions, quelle est la probabilité pour qu'il tire trois questions connues ?

c) Sachant que le candidat a la moyenne s'il répond exactement à deux questions sur trois, combien de questions doit-il connaître pour que la probabilité d'avoir la moyenne soit au moins 0,6 ?

N° 525. Une urne contient: 5 billets de 500 u.m, 3 billet de 100 u.m et 2 billets de 5 u.m

On tire au hasard simultanément 4 billets de l'urne.

Calculer les probabilités des événements suivants :

a) On a tiré 4 billets dont la valeur totale est 200 u.m

b) Il n'y a aucun billet de 500 u.m parmi les billets tirés

c) On a tiré au moins 1 billet de 500 u.m

d) On a tiré 1 billet de 500 u.m , 1 billet de 100 u.m , 2 billets de 50 u.m.

N° 526. Un événement se réalise avec la probabilité de 0,8.

Quelle est la probabilité d'avoir exactement 5 succès sur 10 essais ?

N° 527. Quelle est la probabilité pour un foyer d'avoir 8 enfants dont 5 garçons et 3 filles ?

N° 528. Anasambi Sandra attend une amie qui arrive par les trains de 17 h , 18h ou 19h avec les probabilités respectives de 0,3; 0,5 et 0,2. L'ami n'est pas au train de 17h. Quelle est la probabilité pour qu'il arrive :

a) au train de 18h ?

b) au train de 19h ?

N° 529. Les êtres humains sont repartis d'après la composition du sang en quatre groupes : O, A, B et AB. Dans une assemblée de 15 donneurs de sang, nous avons : 6 personnes du groupe O, 4 du groupe A, 3 du groupe B et 2 du groupe AB. On tire au hasard 4 personnes de l'ensemble sachant que chacun des donneurs a la même probabilité d'être choisi.

Calcule :

- la probabilité pour que les 4 personnes appartiennent au même groupe sanguin ;
- la probabilité pour que 3 au moins d'entre elles appartiennent au même groupe sanguin
- la probabilité pour que les 4 personnes appartiennent à 4 groupes différents.

N° 530. Pour les fonctions $f(x) = \frac{1}{4}$ et $g(x) = \cos x$.

- Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0,4]$
- Montrer que g est une densité de probabilité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- Déterminer la fonction de répartition de f et g
- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de f et g
- Calculer les probabilités suivantes :
 $P(0 \leq x \leq 1), P(1 \leq x \leq 2)$ et $P(2 \leq x \leq 3)$ pour $f(x)$
 $P\left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ et $P\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$ pour $g(x)$

N° 531. Pour les fonctions réelles ci-après, montrer qu'elles sont des densités de probabilités et calculer les probabilités des intervalles indiqués.

- $f(x) = 1 - |x|$ sur $[-1,1]$ et $P\left(-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\right)$
- $g(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$ et $P(x \geq 2)$
- $h(x) = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$ sur $[-2,2]$ et $P(-1 \leq x \leq 1)$

N° 532. Soit X une v. a. r de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- calculer a puis déterminer la fonction de répartition de x .
- calculer $E(x)$, $V(x)$ et $\sigma(x)$.

N° 533. Déterminer la fonction de répartition de la loi de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

N° 534. Soit X une *v. a. r* dont la fonction de répartition est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Tracer le graphe de $F(x)$ et calculer les probabilités suivantes : $P\left(x = \frac{1}{2}\right)$, $P(x = 1)$ et $P\left(\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}\right)$.

N° 535. Considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{(1-x)^2} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Déterminer la constante réelle k pour que f soit une densité de probabilité.
- Soit X une *v. a. r* de densité f , déterminer sa fonction de répartition.
- Calculer $E(x)$, $V(x)$ et $\sigma(x)$

VI.3. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 536. Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le double de la probabilité de sortie du 2. Les autres numéros ont la même probabilité de sortie. La probabilité de l'événement : « obtenir le numéro 1 » est :

$$1. \frac{1}{7} . \quad 2. \frac{2}{7} . \quad 3. \frac{3}{7} . \quad 4. \frac{4}{7} . \quad 5. \frac{5}{7} . \quad \text{Exétat2023}$$

N° 537. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, 3 bleues numérotées de 6 à 8, 2 vertes numérotées de 9 à 10. On tire 4 boules simultanément de l'urne. Toutes les boules ont la même chance d'être tirées. La probabilité de « tirer 4 boules des numéros impairs » est :

1. $\frac{1}{42}$

2. $\frac{1}{12}$

3. $\frac{1}{10}$

4. $\frac{2}{9}$

5. $\frac{1}{2}$

Exétat2023

N° 538. On tire au hasard d'un jeu de 32 cartes, c'est un cœur. La probabilité qu'il s'agisse d'une dame est :

1. 15,3

2. 13,6

3. 12,5

4. 17,4

5. 25,2

Exétat2022

N° 539. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée quatre fois de suite. La probabilité d'obtenir exactement deux piles est :

1. $\frac{1}{16}$

2. $\frac{1}{4}$

3. $\frac{3}{8}$

4. $\frac{1}{16}$

5. $\frac{1}{16}$

Exétat2023

N° 540. Un sachet contient 2 bonbons à la mangue, 3 à l'orange et 5 au citron. On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les évènements suivants :

A : « le bonbon est à la mangue »

B : « le bonbon est à l'orange »

C : « le bonbon est un citron »

Calcule les probabilités suivantes : P(A), P(B) et P(C)

$$\text{Rép : } P(A) = \frac{1}{5} ; P(B) = \frac{3}{10} \text{ et } P(C) = \frac{1}{2}$$

N° 541. Dans une classe de 65 élèves de 4e année des humanités pédagogiques, 30 élèves s'intéressent à la randonnée, 20 à la lecture et 13 aux deux à la fois. On choisit au hasard un élève de la classe.

a. Calcule la probabilité qu'il s'intéresse à la randonnée ou à la lecture.

Rép : 0,56

b. Calcule la probabilité qu'il s'intéresse la randonnée et à la lecture.

Rép : 0,2

c. Calcule la probabilité qu'il ne s'intéresse ni à la randonnée ni à la lecture. Rép : 0,44

N° 542. Si 0,7 est la probabilité pour que monsieur x soit vivant dans 30 ans et 0,6 la probabilité pour que monsieur y soit vivant dans 30 ans. Quelle est la probabilité pour que les deux messieurs soient vivants dans 30ans ?

Rép : 0,42

N° 543. Dans une urne, il y a 2000 billets qui ne se distinguent que, par la couleur, la numérotation et une forme géométrique.

Couleur : 1000 blancs (B) 700 vert (V) 300 rouges (R)

Numérotation : 800 pairs (P) 900 impairs (I) 300 non numérotés (N)

Forme : 1200 carrés (C) 700 losanges (L) 100 trapèzes (T)

Quelle est la probabilité de tirer au hasard

- a. T, Rép : $P(T) = 0,05$
 b. B et N ? Rép : $P(B \cap N) = 0,075$
 c. R, N et T ? Rép : $P(R \cap N \cap T) = 0,001$
 d. V ou N ? Rép : $P(V \cup N) = 0,44$
 e. R ou P ou C ? Rép : $P(R \cup P \cup C) = 0,88$

N° 544. Soit une urne A_1 contenant deux jetons numérotés 1 et 2. Soit une autre urne A_2 contenant 4 jetons numérotés 1,2,3 et 4. On tire au hasard un jeton de chaque urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Calcule l'espérance mathématique de X. Rép : $E(x) = 4$

N° 545. On a mélangé dans une valise 20 maillots : 4 blancs, 6 jaunes et 10 rouges. Les prix de revient unitaires respectifs étant de 3u.m, 2u.m, 1u.m. On prend deux maillots au hasard et simultanément.

a. Calcule la probabilité d'obtenir :

(i) deux maillots blancs. Rép : 0,031

(2i) un maillot blanc et un maillot jaune Rép : 0,126

(3i) deux maillots de même couleur Rép : 0,347

b. Soit X la variable aléatoire réelle associée au prix de revient des 2 maillots tirés. Calcule l'espérance mathématique de X. Rép : 3,081

N° 546. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
P_i	$\frac{1}{10}$	a	b	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

a. Déterminer les réelles a et b sachant que l'événement $(x = 3)$ est 3 fois plus probables que l'évènement $(x = 2)$. Rép : $a = \frac{1}{10}$ et $b = \frac{3}{10}$

b. Calcule la variance et l'écart-type de x.

Rép : $V(x) = \frac{33}{20}$ et $\sigma(x) = \frac{\sqrt{660}}{20}$

N° 547. Un sac contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard successivement et sans remise, 2 boules du sac.

a. Détermine le nombre de résultats possibles. Rép : 72

- b. Quelle est la probabilité de tirer : (i) 2 boules portant des numéros pairs ? Rép : 0,166
 (2i) 2 boules portant des numéros impairs ? Rép : 0,277
 (3i) 2 boules dont l'une porte un numéro pair et l'autre un numéro impair ? Rép : 0,555
 (4i) 2 boules portant des numéros multiples de 3 ? Rép : 0,083

N° 548. Soit X une v. a. r dont la fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} m(3x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- a. Détermine la valeur de m pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.

Rép : $m = \frac{2}{9}$

- b. Calcule la probabilité pour que la v. a tombe dans l'intervalle $]1,2[$. Rép : (0,333)

N° 549. Soit A et B deux événements tels que

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Calcule les probabilités des événements :

- a. E : « au moins un événement se produit » : Rép : $P(E) = \frac{19}{24}$
 b. F : « un seul événement se produit ». Rép : $P(F) = \frac{2}{3}$

N° 550. Quatre personnes A, B, C, D tirent dans cet ordre une boule dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires. La boule tirée n'est pas remise dans l'urne et la première personne qui tire une boule blanche gagne le jeu. Calcule la probabilité de gain de chaque joueurs. Rép : $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(C) = \frac{1}{5}$ et $P(D) = \frac{1}{10}$

N° 551. Soit X une v. a. r dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Calcule les probabilités suivantes :

$$P\left(x = \frac{1}{2}\right) \text{ Rép : } 0$$

$$P(x = 1) \text{ Rép : } \frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}\right) \text{ Rép : } \frac{5}{8}$$

- N° 552. Soit x une variable aléatoire qui prend les valeurs 0,1,2 et 3 et F sa fonction de répartition.
On sait que $F(0) = 0,21, F(1) = 0,43$ et $F(2) = 0,72$.
L'espérance mathématique de x est :
1. 1,1001. 2.1,2104. 3.1,35. 4.1,64. 5.1,9603.
Exétat2022

- N° 553. Si $\bar{A}$ est l'événement contraire de A , alors on a :
1. $P(\bar{A}) + P(A) = 1$ 3. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 5. $P(A) = -P(\bar{A})$
2. $P(A) = 1 + P(\bar{A})$ 4. $P(A) = P(\bar{A})$

- N° 554. Si A et B sont des événements non incompatibles, alors on a :
1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(A \cup B)$
2. $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) - P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
4. $P(A \cap B) = P(A) - P(B) - P(A \cup B)$
5. $P(A \cap B) = P(A \cup B) + P(A) - P(B)$

- N° 555. On considère l'univers $X = \{1,2,3,4,5\}$ dans l'épreuve de jeter un dé à six faces et les événements : $A = \{1,3,5\}$ et $B = \{3,4,5,6\}$.
La probabilité de B sachant que A s'est réalisé est :

$$1. \frac{2}{3} \qquad 2. \frac{5}{7} \qquad 3. \frac{1}{3} \qquad 4. \frac{6}{5} \qquad 5. \frac{2}{7}$$

- N° 556. Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un questionnaire à choix multiple. A chaque question 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. On désigne X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses. La probabilité d'avoir au moins 3 bonnes réponses est :

1. 0,350	2. 0,169	3. 0,196	4. 0,130	5. 0,140
----------	----------	----------	----------	----------

- N° 557. Un examen de physique rencontre un taux d'échec de 35%. La probabilité que deux étudiants réussissent sur 5 est :
1. 0,026 2. 0,018 3. 0,423 4. 0,066 5. 0,228

N° 558. Un caractère héréditaire a 58% de chances d'être transmis des parents aux enfants. Pour une famille de 5 enfants, la probabilité pour que le caractère se manifeste :

a) chez tous les enfants est :

1) 0,066 2) 0,344 3) 0,013 4) 0,697 5) 0,897

b) chez trois d'entre eux est :

1) 0,066 2) 0,344 3) 0,013 4) 0,697 5) 0,897

c) chez aucun d'entre eux est :

1) 0,066 2) 0,344 3) 0,013 4) 0,697 5) 0,897

d) au plus chez trois d'entre eux est :

1) 0,066 2) 0,344 3) 0,013 4) 0,697 5) 0,897

e) au moins chez deux d'entre eux est :

1) 0,066 2) 0,344 3) 0,013 4) 0,697 5) 0,897

N° 559. Dans une commune, 25% des électeurs sont défavorables à un projet de référendum sur l'avenir de la commune. On interroge 9 personnes au hasard dans le corps électoral de cette commune. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces 9,

a) il y ait unanimité contre le référendum c.à.d 9 personnes contre

1) $3,815 \cdot 10^{-6}$ 2) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 3) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 4) $2,5 \cdot 10^{-1}$
5) $7,5 \cdot 10^{-1}$

b) il y ait unanimité pour le référendum c.à.d personne n'est contre

1) $3,815 \cdot 10^{-6}$ 2) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 3) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 4) $2,5 \cdot 10^{-1}$
5) $7,5 \cdot 10^{-1}$

c) il y ait une majorité pour le référendum (majorité signifie qu'au moins 5 personnes sont pour, c.à.d 4 sont contre).

1) $3,815 \cdot 10^{-6}$ 2) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 3) $9,51 \cdot 10^{-1}$ 4) $2,5 \cdot 10^{-1}$
5) $7,5 \cdot 10^{-1}$

N° 560. Pour une loi binomiale $B(5; 0,58)$.

a) L'espérance mathématique est

1) 1,1036 2) 1,2180 3) 2,9000 4) 0,580 5) 5,000

b) La variance est

1) 1,1036 2) 1,2180 3) 2,9000 4) 0,580 5) 5,000

c) L'écart – type est

1) 1,1036 2) 1,2180 3) 2,9000 4) 0,580 5) 5,000

TROISIEME PARTIE

GEOMETRIE ANALYTIQUE

CHAPITRE VII : COURBES PARAMETREES

A. OBJECTIFS

1. Définir une fonction paramétrique ;
2. Déterminer les éléments d'étude d'une fonction paramétrique : domaine de définition, symétrie, périodicité, asymptotes, dérivées en un point et points remarquables ;
3. Représenter graphiquement une fonction paramétrique

B. ACTIVITES

Un travail des vacances de Noël a été donné aux élèves de la 4^e année des humanités scientifiques pour leurs connaissances acquises au premier trimestre de l'année scolaire. Il s'agit de :

- a) trouver l'équation cartésienne de chaque droite d définie par la représentation paramétrique donnée

$$1^{\circ}) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad 2^{\circ}) \begin{cases} x + 3 - 5t = 0 \\ y - 5 + 3t = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b) montrer que les deux équations du système suivant sont les représentations paramétriques d'un même droite

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{3} \end{cases} \quad 2^{\circ}) \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 3t \\ y = \frac{5}{3} - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- c) d'écrire les équations paramétriques d'une d passant par les points A et B

	a)	b)	c)	d)
A	(4,-3)	(5,-3)	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	(5,-1)
B	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	(5,7)	(-3,5)	(4,3)

- d) Déterminer l'équation cartésienne de donner la nature de chacune d'équations paramétriques suivantes :

$$1^{\circ}) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{1}{1+t} \end{cases}$$

$$2^{\circ}) \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = -2 + 3 \sin t \end{cases}$$

$$3^{\circ}) \begin{cases} x(t) = 2 \cot^2 t \\ y(t) = 2 \cot t \end{cases}$$

$$4^{\circ}) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

VII.1. DEFINITIONS

Soit I une partie non vide de $\mathbf{R}$. On appelle :

- fonction paramétrique, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^2 : t \longrightarrow f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
où x et y sont des fonctions réelles de paramètre t .
- courbe paramétrée, la courbe représentative d'une fonction paramétrique.

Exemples

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x(t) = 3 + 2t \\ y(t) = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) & \bullet \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} & \bullet \begin{cases} x(t) = 1 + 3 \cos t \\ y(t) = -4 + 2 \sin t \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) & \bullet \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \end{aligned}$$

VII.2. ELEMENTS D'ETUDE D'UNE FONCTION PARAMETRIQUE

Soit la fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^2 : t \longrightarrow f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative.

VII.2.1. DOMAINE DE DEFINITION

$\text{Dom } f = D_x \cap D_y$ où D_x et D_y sont les domaines de définition respectifs de $x(t)$ et $y(t)$.

Exemples

$$\bullet f(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2-1} \end{cases} \quad D_x = \mathbf{R} - \{1\}; \quad D_y = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\bullet f(t) = \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = \ln t \end{cases} \quad D_x = \mathbf{R} ; \quad D_y =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad D_f =]0, +\infty[$$

VII.2.2. SYMETRIE

La symétrie permet de limiter le domaine d'étude d'une fonction suivant les variations du paramètre.

- * Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ alors la courbe admet l'axe Ox comme axe de symétrie. On étudie f sur $]0, +\infty[\cap D_f$
- * Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ alors la courbe admet l'axe Oy comme axe de symétrie. L'étude de f se fait sur $]0, +\infty[\cap D_f$
- * Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ alors la courbe admet l'origine des axes comme centre de symétrie. On étudie la fonction sur $I =]0, +\infty[\cap D_f$
- * Si $x(-t) = x(t)$ et $\exists t_0 \in \mathbf{R} : y(-t_0) + y(t_0) = c$, alors la courbe admet la droite d'équation $y = \frac{c}{2}$ ($c \in \mathbf{R}$) comme axe de symétrie. Dans ce cas l'étude de f se fait sur $]x(t_1), +\infty[\cap D_f$ avec $y(t_1) = \frac{c}{2}$.
- * Si $y(-t) = y(t)$ et $\exists t_0 \in \mathbf{R} : x(-t_0) + x(t_0) = c$ alors la courbe admet la droite d'équation $x = \frac{c}{2}$ ($c \in \mathbf{R}$), comme axe de symétrie. L'étude de f se fait sur $]y(t_1), +\infty[\cap D_f$ avec $x(t_1) = \frac{c}{2}$.

Exercice résolu

ER 224. Etudie la symétrie des courbes et préciser éventuellement le domaine d'étude de chacune des fonctions.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x(t) = \frac{-1}{t} \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases} \quad (t \in]0, 2\pi[) & \text{d) } & \begin{cases} x(t) = \tan^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad (t \in]0, 2\pi[) \\ \text{b) } & \begin{cases} x(t) = t^2 + 2 \\ y(t) = t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) & \text{e) } & \begin{cases} x(t) = \frac{t^3 - 1}{t^2 + 3} \\ y(t) = \frac{1}{t^2 + 3} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \\ \text{c) } & \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Résolution

a) La fonction est définie dans $\mathbf{R}^*$.

$$\text{Nous avons : } \begin{aligned} x(-t) &= \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t} = -x(t) \\ y(-t) &= 1 - (-t)^2 = 1 - t^2 = y(t) \end{aligned}$$

La courbe admet $x = 0$ comme axe de symétrie. Son domaine d'étude est :

$$\begin{aligned} \text{d) La fonction est définie dans } & \mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\} \\ & \begin{cases} x(t) = \tan^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}^* \cap [0, +\infty[= \mathbf{R}_+^*$$

b) La fonction est définie dans $\mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) + y(t) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ -t + 3 + t + 3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ c = 6 \end{cases}$$

L'axe de symétrie est donc la droite d'équation $y = 3$

$$y(t_1) = 3 \text{ si } t_1 + 3 = 3, \text{ donc } t_1 = 0$$

Ainsi, $x(t_1) = 2$. L'étude de cette fonction

f peut se faire en se limitant à

$$[2, +\infty[\cap D_f = [2, +\infty[\cap \mathbf{R} = [2, +\infty[$$

c) Le domaine d'étude est $[0, +\infty[$

Nous avons :

$$\begin{aligned} x(-t) &= \frac{2t^2}{1+t^2} & \text{et} & & y(-t) &= \frac{-t^3}{1+t^2} \\ &= x(t) & & & &= -y(t) \end{aligned}$$

L'axe des x est l'axe de symétrie.

$$\begin{aligned} x(-t) &= -\tan^3 t & \text{et} & & y(-t) &= -\sin^3 t \\ &= -x(t) & & & &= -y(t) \end{aligned}$$

La courbe admet $O(0, 0)$ comme centre de symétrie, le domaine d'étude est $[0, +\infty[\cap D_f$.

$[\cap D_f$.

e) Le domaine de définition est $\mathbf{R}$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(-t) = y(t) \\ x(-t) + x(t) = c \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y(-t) = y(t) \\ -t^3 - 1 + t^3 - 1 = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y(-t) = y(t) \\ c = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

L'axe de symétrie est $x = -1$.

$$x(t_1) = -1 ; t - 1 = -1 ; t = 0 \text{ et } y(t_1) = \frac{1}{3}$$

L'étude de la fonction peut-être restreinte

$$\text{sur } \left[\frac{1}{3}, +\infty[\cap \mathbf{R} = \left[\frac{1}{3}, +\infty[$$

VII.2.3. PERIODICITE

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 alors la fonction paramétrique est périodique de période $T = \text{p.p.c.m.}(T_1, T_2)$

Exemple

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases} \quad T_1 = \pi ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad T = 2\pi$$

VII.2.4. ASYMPTOTES

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^2 : t \longrightarrow f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et t_1 une extrémité de $D_f : t_1 \notin D_f$.

La direction asymptotique est déterminée par la relation $\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{y(t)}{x(t)} = m$

1^e cas : $m = 0$ ou $m = \infty$

- * Si $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = b$ ($b \in \mathbf{R}$) alors la courbe admet une A.H. d'équation $y = b$.
- * Si $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = \pm\infty$ alors la courbe admet une A.V. d'équation $x = a$.
- * Si $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = \pm\infty$ alors la courbe a une branche à l'infinie (une branche parabolique).

2^e cas : $m \in \mathbf{R}^*$

- * $\lim_{t \rightarrow t_1} [y(t) - m \cdot x(t)] = b$ avec $b \in \mathbf{R}$, la courbe admet une A.O. d'équation : $y = mx + b$
- * $\lim_{t \rightarrow t_1} [y(t) - m \cdot x(t)] = \infty$, la courbe présente une branche infinie qui est une branche parabolique dans la direction m .

Exercice résolu

ER 225. Détermine les asymptotes de la courbe dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t^2 - 1)} \\ y(t) = \frac{1}{t^2 - 1} \end{cases}$$

Résolution

Déterminons le domaine de f .

$\text{Dom } f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

Recherche les directions asymptotiques pour $t_1 \notin \text{Dom } f$

- * si $t \rightarrow \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$. Pas d'A.O., A.V. et A.H.

- * si $t \rightarrow -1$ alors $m = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$ et $b = \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t(t^2 - 1)} \right]$

$$= \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{t}{t(t - 1)} \right] = \frac{1}{2}$$

A.O. $\equiv y = -x + \frac{1}{2}$ ou $2y + 2x - 1 = 0$

- * si $t \rightarrow 0$ alors $m = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t(t^2 - 1)} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2 - 1} = -1$$

A.H. : $y = -1$.

- * si $t \rightarrow 1$ alors $m = \lim_{t \rightarrow 1} t = 1$ et $b = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{1}{t(t + 1)} \right] = \frac{1}{2}$.

$$\text{A.O : } y = x + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 2y - 2x - 1 = 0.$$

VII.2.5. DERIVEE EN UN POINT

a. Dérivée première

Soit la fonction $f : t \longrightarrow f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

La dérivée première de f est définie par : $f'(t) = \left(\frac{dy}{dx} \right)$ ou $f'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

La dérivée première de f au point $M(x_0, y_0)$ telle que $x_0 = x(t_0)$ et $y_0 = y(t_0)$ est :

$$f'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

L'équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ est : $y - y_0 = m(x - x_0)$ avec $m = f'(t_0)$.

b. Dérivée seconde

La dérivée seconde de f est définie par : $f''(t) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}[f'(t)]}{x'(t)}$

Exercices résolus

ER 226.1. On donne le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Détermine l'équation de la tangente à cette courbe au point $t_0 = 1$

Résolution

$$x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Pour $t_0 = 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$ et $y_0 = \frac{3}{2}$.

$$x'(t_0) = -\frac{3}{4}, \quad y'(t_0) = \frac{3}{4}$$

L'équation de la tangente est : $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ou $y + x - 3 = 0$.

ER 227.2. On donne les équations paramétriques (C) par :

$$\begin{cases} x(t) = 7 + t^2 \\ y(t) = 3 + t^2 - 3t^4 \end{cases} \quad \text{Calcule : } \frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Résolution

Nous avons : $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2t - 12t^3$. D'où $\frac{dy}{dx} = 1 - 6t^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(1-6t^2)}{2t} = -6$$

VII.2.6. POINTS REMARQUABLES

a) Points d'intersections de la courbe (C) avec les axes

Avec Ox : $(y = 0) \Rightarrow (t = t_0)$ et on a le point A $(x(t_0), 0)$

Avec Oy : $(x = 0) \Rightarrow (t = t_1)$ et on a le point B $(0, y(t_1))$

b) Point singulier ou stationnaire

Un point S de (C) est stationnaire si et seulement si :

$\exists t_0 \in D_f: x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ (x' et y' étant de dérivées respectives de $x(t)$ et $y(t)$). Dans ce cas, on a $S(x(t_0), y(t_0))$.

c) Point double

Un point M de (C) est dit double si et seulement si $\exists t_1, t_2 \in D_f, (t_1 \neq t_2)$ tels que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Dans ce cas le point double est $M(x(t_1), y(t_1))$ ou $M(x(t_2), y(t_2))$.

Le point M de la courbe est obtenu par deux valeurs distinctes du paramètre t .

d) Point d'inflexion

Un point M de (C) est dit d'inflexion si et seulement si :

– $f''(t) = 0$ avec $f'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

– $f''(t)$ change de signe pour tout $t = t_0$, la valeur qui annule $f''(t)$ ou encore un point M de (C) est dit point d'inflexion si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} \text{ s'annule et change de signe pour } t = t_0.$$

Dans ce cas le point d'inflexion est $M(x(t_0), y(t_0))$.

Exercices résolus

ER 228.1. Détermine le point double et le point singulier de la courbe (C) définie par

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Résolution

– Déterminons le point double, nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2t + t^2 = 2t' + t'^2 \\ 2t - \frac{1}{t^2} = 2t' - \frac{1}{t'^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2t' + t^2 - t'^2 = 0 \\ \frac{2t^3 - 1}{t^2} = \frac{2t'^3 - 1}{t'^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (t - t')(2t + t' + t^2) = 0 \\ 2t^3t'^2 - t'^2 - 2t'^3t^2 + t^2 = 0 \end{cases} & (t - t' = 0 \text{ à rejeter}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ ((t - t')(2t^2t'^2 + t + t')) = 0 \end{cases} & (t - t' = 0 \text{ à rejeter}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ -2 + 2t^2 t'^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ t^2 t'^2 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ tt' = 1 \text{ ou } tt' = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ tt' = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t + t' = -2 \\ tt' = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous avons : $x^2 + 2x + 1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $x = -1$ (à rejeter) ou $x = -1 + \sqrt{2}$ ou $x = -1 - \sqrt{2}$

D'où : $t = -1 + \sqrt{2}$ et $t' = -1 - \sqrt{2}$

Si $t = -1 + \sqrt{2}$, alors $x = 1$ et $y = -5$. Le point double est $(1, -5)$

– Cherchons le point singulier

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 + 2t \\ y'(t) = 2 - \frac{2}{t^3} \end{cases}$$

Nous avons : $(2 + 2t = 2 + \frac{2}{t^3} = 0) \Leftrightarrow (t = -1)$

$\begin{cases} x(-1) = -1 \\ y(-1) = -3 \end{cases}$ Le point singulier est $(-1, -3)$.

ER 229.2. Détermine le point d'inflexion de la courbe dont les équations paramétriques

$$\text{sont : } \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^3 + 1 \end{cases}$$

Résolution

Nous avons : $x'(t) = 2t + 1$ $y'(t) = 3t^2$ et $f'(t) = \frac{3t^2}{2t+1}$

$f''(t) = \frac{6t(t+1)}{(2t+1)^3}$. $[f''(t) = 0] \Leftrightarrow (t = 0 \text{ ou } t = -1)$

Si $t = -1$, $x(-1) = 0$ et $y(-1) = 0$. Si $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$

La courbe admet deux points d'inflexion : $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

VII.3. PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION PARAMETRIQUE

Soit la fonction $f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

1°) Déterminer le domaine de définition et étudier la symétrie ainsi que la périodicité;

2°) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition et en déduire les asymptotes ;

3°) Dresser le tableau des variations

T	Domaine de définition et valeurs remarquables
$x'(t)$	Zéros et signes
$x(t)$	Conclusion (sens des variations)
$y'(t)$	Zéros et signes
$y(t)$	Conclusion (sens des variations)

4°) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes et les points remarquables : points doubles, singuliers, ...

5°) Déterminer les points supplémentaires $M(x(t_0), y(t_0))$ avec $t_0 \in D_f$, un point judicieusement choisi

T	t_0					
$x(t)$	$x(t_0)$					
$y(t)$	$y(t_0)$					

6°) Tracer le graphique.

Exercices résolus

ER 230.1. Etudie chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a) } \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Résolution

a) – * $x(-t) = t^2 = x(t)$ et $y(-t) = -t^3 = -y(t)$

* La courbe (C) admet l'axe Ox comme axe de symétrie ($y = 0$).

* La fonction n'est pas périodique

– Limites aux bornes du domaine et détermination des asymptotes

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{t^2} = \infty$$

(C) admet une branche parabolique dans la direction Oy.

- Tableau de variation : $x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 3t^2$

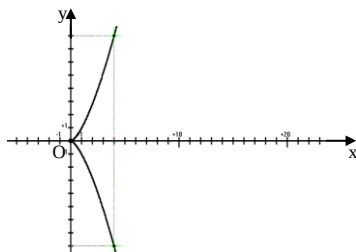
t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x'(t)$		0	
$x(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$y'(t)$	+	0	+
$y(t)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

- Points auxiliaires et graphique

* Points d'intersection de la courbe (C) avec les axes. C'est le point (0, 0)

* Points auxiliaires et graphique

t	-2	-1	0	1	2
x	4	1	0	1	4
y	-8	-1	0	1	8



- b) – Domaine de définition

$$D_x = (\mathbf{R} \setminus \{-1\}) \text{ et } D_y = \mathbf{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow (D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}) \\ =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

- Limites aux bornes du domaine et détermination des asymptotes

$$* \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t}{1+t^3} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{1+t^3} = 0$$

$$* \left(\lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t}{1+t^3} = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{t \rightarrow -1^+} x(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow -1^-} x(t) = +\infty \right)$$

$$* \left(\lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t^2}{1+t^3} = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = -\infty \right)$$

Pas d'asymptotes horizontale et verticale.

* Asymptote oblique

$$\text{La direction asymptotique : } m = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} * \frac{1+t^3}{3t} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t^2}{3t} \\ = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$$

$$b = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} - \frac{3t}{1+t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t^2+3t}{1+t^3} \\ = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t}{t^2-t+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

L'asymptote oblique est $y = -x - 1$.

- Tableau de variations

$$\left[x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \right] \Rightarrow \left[x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \right] \text{ et } \left[y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \right] \Rightarrow \left[y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \right]$$

t	$-\infty$	-1	0	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	+	+	0	-	0
x (t)	0	$\nearrow +\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	-	-	0	+	0
y (t)	0	$\searrow -\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow \sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

– Points auxiliaires et graphique

* Points d'intersection de la courbe (C) avec les axes

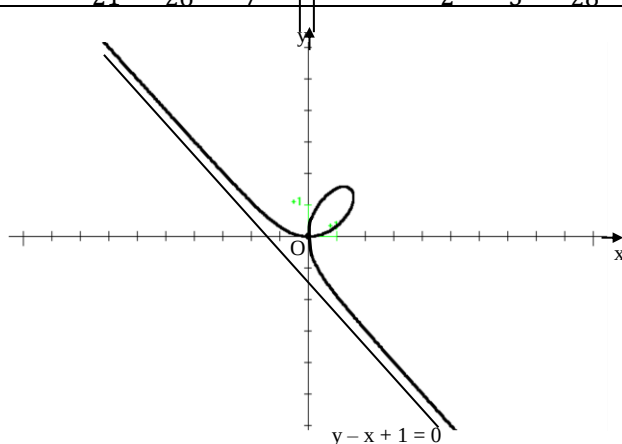
Avec Ox, ($y = 0$) $\Rightarrow$ ($t = 0$)

Avec Oy, ($x = 0$) $\Rightarrow$ ($t = 0$)

Le point d'intersection avec les axes est O (0, 0).

* Points auxiliaires et graphique

t	$-\infty$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
x		...	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{6}{7}$		0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{28}$	...	
y		...	$-\frac{16}{21}$	$-\frac{27}{26}$	$-\frac{12}{7}$		0	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{27}{28}$	...	



ER 231.2. Trouve une paramétrisation des ensembles de points du plan dont on donne

une équation cartésienne

a) $d_1 \equiv 2y - 2x + 3 = 0$

b) $A \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

c) $(C) \equiv y^2 = x$

Résolution

a) $d_1 \equiv 2y - 2x + 3$ est une droite

Soit $\vec{v}(-2, -2)$ un vecteur directeur et $A(0, -\frac{3}{2})$ un point de cette droite

$$\text{Nous avons } d_1 \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2\lambda - \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

b) $A \equiv (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ est un cercle de centre $(2, -1)$ et de rayon 3.

$$\left[\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \right] \Leftrightarrow \left[\left(\frac{x-2}{3} \right)^2 + \left(\frac{y+1}{3} \right)^2 = 1 \right]$$

Sachant que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, posons $\frac{x-2}{3} = \cos \theta$ et $\frac{y+1}{3} = \sin \theta$

D'où : $\begin{cases} x = 3 \cos \theta + 2 \\ y = 3 \sin \theta + 1 \end{cases}$ c'est l'équation paramétrique de A.

$$c) (y^2 = x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$$

ER 232.3. Quelle est l'équation cartésienne de l'ensemble des points A dont une

paramétrisation est :

$$a) \begin{cases} x = 1 + 3 \cos \theta \\ y = -4 + 2 \sin \theta \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x(t) = 2 + 3t \\ y(t) = -1 + t \end{cases}$$

Résolution

$$a) \begin{cases} x = 1 + 3 \cos \theta \\ y = -4 + 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \cos \theta \\ \frac{y+4}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta = \left(\frac{x-1}{3} \right)^2 \\ \sin^2 \theta = \left(\frac{y+4}{2} \right)^2 \end{cases}$$

D'où : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{x-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{y+4}{2} \right)^2 = 1$. Donc $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$.

$$b) \begin{cases} x(t) = 2 + 3t \\ y(t) = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = t \\ y = -1 + \frac{x-2}{3} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } x - 3y - 5 = 0$$

ER 233.4. Transforme la courbe d'équations paramétrique $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{(t^2-1)^2} \end{cases}$

en coordonnées polaires.

Résolution

Nous avons :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^2-1} \\ y = \frac{t^2}{(t^2-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{1+x}{x} & (i) \\ y = t^2 x^2 & (ii) \end{cases}$$

(i) dans (ii) $\Leftrightarrow [y = (1+x)x]$

$\Leftrightarrow (y - x^2 - x = 0) \quad (x = \rho \cos \theta \text{ et } y = \rho \sin \theta)$

$\Leftrightarrow (\rho \sin \theta - \rho \cos \theta - \rho^2 \cos^2 \theta = 0) \quad (\rho \neq 0)$

$\Leftrightarrow (\rho \cos^2 \theta = \sin \theta - \cos \theta) \quad (\cos \theta \neq 0)$

$\Leftrightarrow \left(\rho = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos^2 \theta} \right)$

$\rho = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos^2 \theta}$ est l'équation polaire.

Exercices

N° 561. Etudie la symétrie et restreins le domaine d'étude des courbes suivantes :

a) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < \pi)$ d) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ g) $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = \ln t \end{cases}$
b) $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 2 \\ y(t) = t + 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \frac{1}{\sin t} \end{cases}$
c) $\begin{cases} x(t) = t(t-1) \\ y(t) = t^3 - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3 \\ y(t) = \frac{2}{t^2+1} \end{cases}$

N° 562. Calcule $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

a) $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = 2 \sin t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$

N° 563. Etudie les fonctions suivantes :

a) $\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 2 + 3t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1-t} \\ y(t) = \frac{1+t^2}{t^2} \end{cases}$ g) $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{2t}{t^2+1} \end{cases}$
b) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{t^2} \\ y(t) = \frac{2}{t} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x(t) = 3 + 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t - 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ i) $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$

N° 564. Détermine l'équation cartésienne de chacune des courbes d'équations paramétriques suivantes :

a) $\begin{cases} x(k) = 2k - 4 \\ y(k) = 3k + 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ e) $\begin{cases} x(\theta) = 3 \cos \theta + 2 \\ y(\theta) = 2 \sin \theta - 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
\text{b)} \begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 - 3t \end{cases} & (t \in \mathbf{R}) \quad \text{f)} \begin{cases} x(t) = 4 \cot^2 t \\ y(t) = 4 \cot t \end{cases} & (t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{R}\}) \\
\text{c)} \begin{cases} x(t) = \frac{2}{t} \\ y(t) = 3 - t \end{cases} & (t \in \mathbf{R}) \quad \text{g)} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = 2 \tan t \end{cases} & (t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}) \\
\text{d)} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x(t) = R \sin 2t \\ y(t) = 2R \sin^2 t \end{cases}
\end{array}$$

N° 565. Transforme chacune des courbes d'équations paramétriques suivantes en

coordonnées polaires.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \begin{cases} x(k) = \frac{1}{k(k^2-1)} \\ y(k) = \frac{1}{k^2-1} \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x(k) = k - 1 \\ y(k) = k^2 - 3k \end{cases}
\end{array}$$

N° 566. Détermine les asymptotes à la courbe (C) définie par :

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^2+1}{t-1} \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-1} \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}
\end{array}$$

N° 567. Soit la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = \frac{2t^2+2t+2}{t^2-1} \end{cases}$

Détermine :

- l'équation de la tangente à la courbe au point $t = 2$
- l'équation de la tangente à la courbe issue du point $P(1, 0)$

N° 568. Détermine le point singulier et le point double de chacune des courbes (C) définie par

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \frac{1}{t^2} + t^2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2-1} \end{cases} \\
\text{b)} \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4 - t^5 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases} &
\end{array}$$

N° 569. Soit la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = t(t-1) \\ y(t) = t^3 - 1 \end{cases}$$

- Cherche les maxima et les minima de la fonction
- Détermine la concavité et le point d'inflexion de cette courbe.

VII.4. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 570. Détermine les asymptotes de la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t^2-1)} \\ y(t) = \frac{1}{t^2-4} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \text{Rép. : } x = \frac{1}{6} ; x = -\frac{1}{6} ; y = -\frac{1}{4} \text{ et } y = -\frac{1}{3}$$

N° 571. Détermine le point double de la courbe (C) définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{t-1} \\ y(t) = \frac{2t^2+1}{t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \text{Rép. : } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

N° 572. Soit la courbe d'équation paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = \frac{1}{2t+1} \end{cases} \quad \text{Détermine le coefficient angulaire de la tangente au point d'abscisse nulle et d'ordonnée négative. Rép. : 1}$$

N° 573. Détermine l'équation polaire de la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = \frac{2t^2+2}{2t^2-1} \end{cases} \quad \text{Rép. : } \frac{1}{\rho} = \frac{\sin 2\theta}{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}$$

N° 574. Soit la courbe (C) dont on donne une représentation paramétrique :

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

Détermine :

- Le domaine de définition de f. Rép. : $D_f = \mathbf{R}$
- la symétrie. Rép. : la courbe (C) est symétrique par rapport à Oy
- la dérivée première de f. Rép. : $f'(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$
- la dérivée seconde de f. Rép. : $f''(t) = \frac{-1}{(1 - \cos t)^2}$
- la concavité de f. Rép. : La courbe présente sa concavité vers le bas.
- le point de rebroussement.

Rép. : la courbe présente un point de rebroussement pour $x = 0, 2\pi, 4\pi$, etc.

N° 575. Soit la courbe (C) dont on donne une représentation paramétrique

$$(C) \equiv \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

a) L'assertion fausse est :

- Le domaine de définition de f est $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
- La courbe (C) n'admet aucune symétrie

3. Pour $t = 0$, la courbe (C) passe par l'origine des axes
 4. La fonction f n'est pas périodique
 5. Pour $t = -1$, $y = \frac{1}{2}$ et $x = 0$
- b) La courbe (C) admet :
1. Une seule asymptote d'équation $x = 0$
 2. Une seule asymptote d'équation $y = -\frac{1}{2}$
 3. Une seule asymptote d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$
 4. Trois asymptotes d'équations $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$ et $y = 2x + \frac{3}{2}$
 5. Deux asymptotes d'équations $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}$
- c) La courbe (C) admet deux extrema des coordonnées :
1. $(0, 0)$ et $(\frac{2}{3}, 4)$
 3. $(-1, -\frac{1}{2})$ et $(2, \frac{2}{3})$
 5. $(-1, -\frac{1}{2})$ et $(2, 4)$
 2. $(0, 0)$ et $(-1, -\frac{1}{2})$
 4. $(2, 4)$ et $(0, 0)$
- d) L'assertion fausse est :
1. La courbe (C) est au-dessus de l'A.H. si $t > -1$, alors x est positif
 2. La courbe (C) est en dessous de l'A.H. si $t < -1$, alors x est négatif
 3. La courbe (C) est au-dessus de l'A.O. si $t > 1$, alors x est positif
 4. La courbe (C) est en dessous de l'A.O. si $t < 1$, alors x est négatif
 5. La courbe (C) est horizontale pour $t = 0$, $t = 2$ et $t = -1$

CHAPITRE VIII : COURBES DU SECOND DEGRE

A. OBJECTIFS

1. Donner l'origine du mot conique ;
2. Identifier toute courbe du second degré à une conique et réciproquement ;
3. Classifier les courbes du second degré ;
4. Déterminer la nature d'une conique ;
5. Déterminer l'équation d'une conique en coordonnées polaires.

B. ACTIVITES

1. Les finalistes de la 4^e année des humanités scientifiques rencontrent des difficultés pour classifier et caractériser les courbes du second degré (Coniques) suivantes:

a. $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 3y + 4 = 0$

b. $y^2 - x^2 - 8x + 12y + 10 = 0$

c. $x^2 + 2xy + y^2 - 6y + 9 = 0$.

Ils présentent le problème à leur professeur de mathématique. Celui-ci promet de répondre à la préoccupation de ses élèves lors de la prochaine séquence didactique sur les coniques et leur demande de se documenter afin de discuter l'équation générale du second degré en x et y : $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

2. Asnath Dilu observe le portail de leur parcelle et remarque que la voûte a la forme parabolique.

Elle essaie d'établir un lien entre la parabole qu'elle traçait en 2^e année des humanités scientifiques et celle du portail. Ne s'en sortant pas elle va voir son père ingénieur et celui-ci lui fait savoir que c'est effectivement une parabole d'équation $x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ puis lui demande de déterminer :

- a. l'axe de symétrie
- b. le sommet de la courbe.

3. On donne une courbe d'équation polaire

$$\rho^2 + 4\rho \cos(\omega - 45^\circ) - 5 = 0.$$

- a. Ecris cette équation en coordonnées cartésiennes.
- b. Donne la nature et construis cette courbe.

4. Une courbe Γ du plan est établie par son équation cartésienne

$$\Gamma \equiv y^2 + 8xy - 9x^2 + 2y - 6x - 1 = 0.$$

Si on admet que toute courbe du second degré du plan cartésien a une équation générale de la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

calcule pour Γ les réels suivants :

a. $\partial = B^2 - AC$

b. $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

c. $p = BD - AE$

d. $q = D^2 - AF$

5. En coordonnées cartésiennes homogènes, on donne la fonction

$$f(x, y, z) \equiv 2y^2 + 2xy - 5x^2 + 4yz - 3xz + z^2 = 0$$

Si f'_x, f'_y et f'_z représentent les dérivées partielles de f par rapport à x , à y et à z respectivement,

a. Calcule leurs expressions respectives.

b. Détermine leurs valeurs numériques respectives au point $P(3, -1, 1)$.

6. Une courbe Γ du plan est établie par son équation cartésienne

$$\Gamma \equiv 3y^2 + 2xy - 3x^2 + 4y - 5x + 1 = 0.$$

Si f'_x et f'_y représentent les dérivées partielles de f par rapport à x et à y respectivement,

a. Calcule leurs expressions respectives.

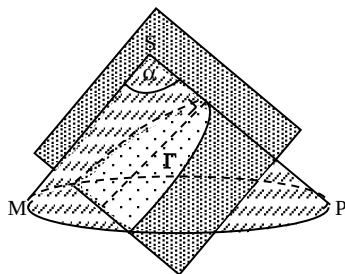
b. Détermine leurs valeurs numériques respectives au point $P(-1, 3)$.

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

VIII.1. INTRODUCTION

Soit un cube de côté a et de volume V_1 . Peut-on construire un cube de côté b et de volume $V_2 = 2V_1$? Ce problème de la duplication du cube a préoccupé les mathématiciens de la Grèce ancienne (Oracle de Délos).

Dans la recherche des solutions, l'astronome et mathématicien grec Ménechme (375 – 325 av



JC) inventa les courbes qui sont l'intersection d'un cône droit de révolution et d'un plan perpendiculaire à une génératrice.

Suivant l'angle au sommet du cône (α), il obtint trois sortes de courbes selon que α est droit, obtus ou aigu. Ils les nomma sections coniques ou simplement coniques.

Plusieurs années après, Apollonius de Perge (262 – 190 av JC) astronome et mathématicien grec surnommé « Grand Géomètre » eût l'idée de considérer un seul cône circulaire droit ou un cône à double nappe. Il détermina suivant la direction du plan de section trois sortes de coniques. Il les baptisa : paraboles, hyperboles et ellipses.

Ainsi une conique est une courbe qui résulte de l'intersection d'un cône et d'un plan.

VIII.2. CLASSIFICATION DES CONIQUES

VIII.2.1. CLASSIFICATION D'APOLLONIUS

La section d'un cône à deux nappes par un plan permet de déterminer la nature de la conique.

Ainsi :

- a) Si le plan ne coupe qu'une nappe de la surface conique et n'est pas perpendiculaire à l'axe, la conique obtenue est une ellipse.

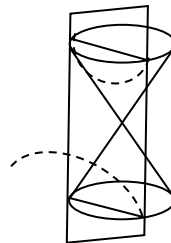
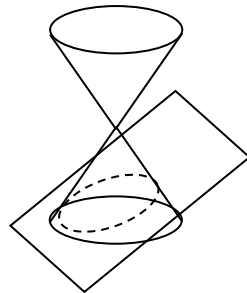
En particulier ,

- si le plan est perpendiculaire à l'axe (parallèle à la base), la conique est un cercle ;
- si le plan passe par le sommet, la conique est réduite en un point.

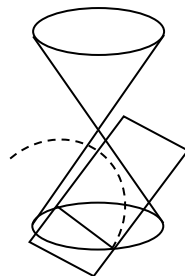
On parle d'ellipse évanouissante.

- b) Si le plan coupe les deux nappes du cône, la courbe est une hyperbole.
- Si en outre le plan passe par le sommet, la section se fait suivant deux droites sécantes.

On parle d'hyperbole dégénérée en deux droites sécantes



- c) Si le plan est parallèle à la génératrice et ne coupe qu'une nappe, la courbe est une parabole. En particulier, lorsque le plan remplit les conditions précédentes et passe par le sommet du cône, la section se fait suivant une droite. On parle de parabole dégénérée en deux droites confondues.



Remarque

Les coniques sont les courbes représentées par l'équation générale du second degré $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$.

A une équation du second degré en x et y correspond donc une conique et réciproquement à une conique correspond une équation du second degré en x et y .

VIII.2.2. CLASSIFICATION DES CONIQUES A PARTIR DE LEUR INTERSECTION AVEC LE DROITE DE L'INFINI

Nature d'une conique

Soit $f(x, y) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ l'équation d'une conique.

En coordonnées homogènes, cette équation s'écrit :

$$f(x, y, z) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dyz + 2Exz + Fz^2 = 0$$

Les points à l'infini sont donnés par le système :

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

L'équation (1) représente deux droites issues de l'origine dont les coefficients angulaires sont racines de l'équation $Am^2 + 2Bm + C = 0$ (3)

$$\text{Ces racines sont : } m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \text{ et } m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Les points à l'infini de ces deux droites sont ceux de la conique.

En posant $\delta = B^2 - AC$, on a :

- Si $\delta > 0$, l'équation (3) admet deux racines réelles distinctes. La conique a deux points réels à l'infini. Elle est une **hyperbole**.

- Si $\delta < 0$, l'équation (3) admet deux racines imaginaires conjuguées. La conique a deux points imaginaires conjugués à l'infini. Elle est une **ellipse**.

En particulier si $B = 0$ et $A = C$, la conique est un cercle.

- Si $\partial = 0$, l'équation (3) admet deux racines réelles égales. La conique a un seul point réel à l'infini. Elle est une **parabole**.

Remarque

$\partial = B^2 - AC$ est appelé binôme caractéristique de l'équation $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$.

b) Discussion de l'équation générale d'une conique

Soit $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ (1) l'équation d'une conique.

Cette équation peut aussi s'écrire : $Ay^2 + 2(Bx + D)y + Cx^2 + 2Ex + F = 0$ (2)

1^e cas : $A \neq 0$: la résolution de (2) donne :

$$y = \frac{-(Bx+D) \pm \sqrt{(B^2-AC)x^2 + 2(BD-AE)x + D^2-AF}}{A} \quad (3)$$

On pose :

$$\partial = B^2 - AC ; p = BD - AE ; q = D^2 - AF ; L = (B^2 - AC)x^2 + 2(BD - AE)x + D^2 - AF$$

ou $L = \partial x^2 + 2px + q$

L est un trinôme du second degré en x de réalisant

$$K = (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF)$$

$$= B^2D^2 - 2BDAE + A^2E^2 - B^2D^2 + B^2AF + ACD^2 - A^2CF$$

$$= -A(ACF + 2BDE - CD^2 - B^2F - AE^2)$$

$$= -A \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$= -A\Delta \quad \text{avec } \Delta \text{ le discriminant de l'équation (1).}$$

Ainsi :

a) $\partial < 0$

* $-A\Delta > 0$, le trinôme L admet 2 racines réelles x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$).

Le signe de L est donné par le tableau :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
L	—	0	+	0	—

Les valeurs de y de la relation (3) sont réelles pour les valeurs de x comprises entre x_1 et x_2 . La conique est dite **Ellipse réelle** (Er).

* $-A\Delta < 0$, L n'admet aucune racine réelle. Le signe de L est donné par le tableau

x	$-\infty$	$+\infty$
L	—	—

Il n'y a aucune valeur de x rendant y réel. La conique est dite ***Ellipse imaginaire*** (Ei).

* $-\Delta = 0$. L admet une racine double. Le signe de L est donné par ce tableau

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
L		0	
		-	-

Il n'y a qu'une seule valeur de x rendant y réel.

La conique dégénère en un point réel (intersection de deux droites imaginaires conjuguées). Elle est dite ***ellipse évanouissante*** (Ee).

b) Si $\partial > 0$

* $-\Delta > 0$, le tableau de signe de L est donné par

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
L		0	0	
		+	-	+

Les valeurs de y sont réelles pour $x < x_1$ ou $x > x_2$.

La conique est une ***hyperbole transverse*** (Ht).

* $-\Delta < 0$, il n'y a aucune valeur de x rendant y réel, l'hyperbole est dite non transverse (Hnt). L admet x_1 et x_2 comme racines.

* $-\Delta = 0$, l'hyperbole est dégénérée en deux droites réelles sécantes.

c) Si $\partial = 0$

$$L = 2px + q \text{ et } -\Delta = p^2$$

Les valeurs de y de la relation (3) sont réelles si L est positif ou nul.

* Si $p > 0$ alors $(2px + q \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -\frac{q}{2p})$; la conique est une parabole proprement dite tournée vers les x positifs (Ppd +).

* Si $p < 0$ alors $(2px + q \leq 0) \Leftrightarrow (x \leq -\frac{q}{2p})$; la conique est une parabole proprement dite tournée vers les x négatifs (Ppd -).

* Si $p = 0$ alors $(0x + q \geq 0) \Leftrightarrow (0x \geq -q)$; le signe de q détermine la nature de la conique.

- Si $q > 0$, la parabole est dégénérée en deux droites parallèles réelles et distinctes (Pdr). Les équations de ces droites sont :

$$y = \frac{Bx+D+\sqrt{q}}{A} \quad \text{et} \quad y = -\frac{Bx+D-\sqrt{q}}{A}$$

- Si $q = 0$, la parabole est dégénérée en deux droites parallèles confondues (Pdc) d'équation $y = -\frac{Bx+D}{A}$

- Si $q < 0$, la parabole est dégénérée en deux droites parallèles imaginaires conjuguées.

2^e cas : $A = 0$; $\partial = B^2$

a) $\partial > 0$

* $\Delta \neq 0$, la conique est une hyperbole proprement dite (Hpd)

* $\Delta = 0$, la conique est une hyperbole dégénérée en deux droites sécantes (Hd)

b) $\partial = 0$

L'équation (1) se réduit à $Cx^2 + 2Ex + 2Dy + F = 0$, son discriminant est $\Delta = -CD^2$

* Si $\Delta \neq 0$, on a une parabole proprement dite (Ppd)

* Si $\Delta = 0$, on a : $C = 0$ ou $D = 0$

Ainsi,

– Si $D = 0$ (1) s'écrit $Cx^2 + 2Ex + F = 0$. Son réalisant est $r = E^2 - CF$.

* si $r > 0$, on a une parabole dégénérée en deux parallèles réelles distinctes (Pdr)

* si $r = 0$, on a deux droites parallèles réelles confondues (Pdc)

* si $r < 0$, on a deux droites parallèles imaginaires conjuguées (Pdi).

– Si $C = 0$ (1) s'écrit : $2Ex + 2Dy + F = 0$ (i)

La conique est dégénérée en deux droites d'équations (i) et $z = 0$.

Tableau récapitulatif de la classification détaillée

1^e cas : $A \neq 0$

∂	–	–	–	+	+	+	0	0	0	0	0
$-A\Delta$	+	0	–	+	0	–	+	+	0	0	0
p							+	–	0	0	0
q									+	0	–
Conclusion	Er	Ee	Ei	Ht	Hd	Hnt	Ppd+	Ppd-	Pdr	Pdc	Pdi

2^e cas : $A = 0$

∂	+	+	0	0	0	0
Δ	+ ou –	0	+ ou –	0	0	0
R				+	0	–
Conclusion	Hpd	Hd	Ppd	Pdr	Pdc	Pdi

Exercices résolus

ER 234.1. Détermine la nature de la conique représentée par chacune des équations

suivantes :

a) $x^2 + 5xy + y^2 - 11x - 21 = 0$

c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 40x + 20y + 99 = 0$

$$b) y^2 + 4xy + 5x^2 + x - 7 = 0$$

$$d) 2xy - x^2 - 4y + 4x + 1 = 0$$

Résolution

$$a) \text{ Le binôme caractéristique vaut } \partial = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

La conique est une hyperbole.

$$\text{Calculons le discriminant } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & -21 \end{vmatrix} = 80$$

$-\Delta\Delta = -80$. Nous avons donc une hyperbole non transverse

$$b) \partial = -1 \text{ et } -\Delta\Delta = \frac{29}{4}$$

Nous avons une ellipse réelle.

$$c) \partial = 0, -\Delta\Delta = 0, p = BD - AE = 0 \text{ et } q = D^2 - AF = 1$$

Nous avons une parabole dégénérée en 2 droites parallèles réelles et distinctes.

$$d) A = 0; \partial = 1 \text{ et } \Delta = -5, \text{ la conique est une hyperbole proprement dite.}$$

ER 235.2. Discute la nature des coniques représentées par l'équation

$$y^2 + 2\lambda xy + 2x^2 + 2\lambda y + x + 1 = 0$$

Résolution

Les coefficients de la conique sont $A = 1, B = \lambda, C = 2, D = \lambda, E = \frac{1}{2}$ et $F = 1$

$$\partial = \lambda^2 - 2,$$

λ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
∂		+	0	-	0	+

$$* -\Delta\Delta = 2\lambda^2 - \frac{7}{4},$$

λ	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{14}}{4}$	$\frac{-\sqrt{14}}{4}$	$+\infty$		
$-\Delta\Delta$		+	0	-	0	+

$$* p = \lambda^2 - \frac{1}{2},$$

λ	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$		
p		+	0	-	0	+

$$* q = \lambda^2 - 1,$$

λ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
q		+	0	-	0	+

$$* r = E^2 - CF = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

Tableau synthétique

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{14}}{4}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{14}}{4}$		1		$\sqrt{2}$	
--	-----------	--	-------------	--	------	--	------------------------	--	-----------------------	--	----------------------	--	-----------------------	--	-----	--	------------	--

∂		+	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$-\Delta\Delta$		+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
P		+	+	+	+	+	+	0	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Q		+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Con.		H t	Ppd+	Er	Er	Ee	Ee	Ei	Ei	Ei	Ei	Ee	Er	Er	Er	Ppd+	Ht

Remarque

Dans l'exercice que nous venons de résoudre q et r n'ont servi à rien mais ils peuvent bien servir dans d'autres exercices.

Exercices

N° 576. Détermine la nature de la conique représentée par chacune des équations suivantes:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $2y^2 - 2xy + x^2 - 2y + x + 1 = 0$ | h) $y^2 - 5x + 2 = 0$ |
| b) $2y^2 - 2xy + x^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ | i) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ |
| c) $y^2 + 3xy + x^2 + x + y - 1 = 0$ | j) $2x^2 - x + 1 = 0$ |
| d) $3y^2 - 2xy + 2x^2 - 4y + 2x - 7 = 0$ | k) $2xy - 6x^2 - 3y + 17x - 16 = 0$ |
| e) $x^2 - 5xy + 4y^2 + 3x - 4 = 0$ | l) $2x^2 - xy - 4 = 0$ |
| f) $y^2 - 10xy + 25x^2 + 4y - 20x + 1 = 0$ | |
| g) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2 = 0$ | |

N° 577. Détermine k pour que l'équation $y^2 - 2kxy + 5x^2 + 2y - 10x = 0$ représente :

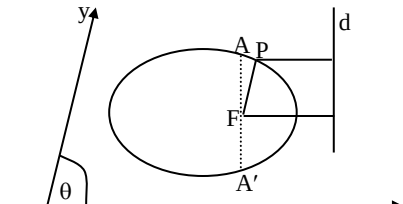
- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| a) une ellipse réelle | c) deux droites réelles sécantes |
| b) une hyperbole non transverse | d) une parabole |

N° 578. Discute la nature des coniques suivantes (k paramètre réel)

- | | |
|--|--|
| a) $3y^2 + kxy + x^2 - 5x + 3 = 0$ | c) $2y^2 - 4xy + x^2 - 2ky + 3x - 2 = 0$ |
| b) $3y^2 - 14xy + ky^2 - 14y + 26x + 15 = 0$ | d) $(k-2)y^2 + 4xy + 3x^2 + 2y + 5x + 1 = 0$ |

VIII.2.3. CLASSIFICATION DES CONIQUES EN FONCTION DE L'EXCENTRICITE

Définitions



Soit F un point fixe et d une droite fixe ne comprenant pas F.

On appelle section conique l'ensemble des points P tels que le rapport des distances au point F et à la droite d est constant.

– Ce rapport toujours positif noté e est appelé **excentricité** de la conique.

$$\text{On a : } e = \frac{|PF|}{|Pd|} \text{ ou } |PF| = e |Pd| \quad (i)$$

- Le point F et la droite d sont appelés respectivement foyer et directrice associée au foyer de la conique.
- Toute corde passant par F est appelée corde focale.
- La droite passant par F et perpendiculaire à la directrice est appelée axe focal. Ce dernier est l'axe de symétrie de la conique.
- La corde focale perpendiculaire à l'axe focal est dite latus rectum.
- La relation (i) est appelée équation focale de la conique.
- L'intersection de l'axe focal et de la conique donne le sommet de la conique.

b) Nature

Soit Γ une conique de foyer F (α, β), de directrice $d \equiv Ay + Bx + C = 0$ associée à F et d'excentricité e. Considérons un point P (x, y) de Γ ,

$$\left(\frac{|PF|}{|Pd|} = e \right) \Leftrightarrow (|PF|^2 = e^2 |Pd|^2)$$

Ainsi : – si $0 < e < 1$, $\partial < 0$ et la conique est une ellipse

– si $e > 1$, $\partial > 0$ et la conique est une hyperbole

– si $e = 1$, $\partial = 0$ et la conique est une parabole.

En particulier si $e = 0$, la conique est un cercle.

Exercices résolus

ER 236.1. Quelle est l'équation de la parabole de foyer (6, 2) et de directrice d

$$x - 2 = 0 ?$$

Résolution

Soit P(x, y) un point de cette parabole. Par définition $|PF| = |Pd|$.

$$\text{Ainsi, } (|PF| = |Pd|) \Leftrightarrow (\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = x-2) \\ \Leftrightarrow (y^2 - 4y - 8x + 36 = 0)$$

ER 237.2. Soit F un point fixe et d une droite fixe.

Détermine la nature de la conique définie par l'ensemble des points du plan tels que :

a) La distance de P à F est le triple de la distance de P à d

b) La distance de P à F est égale à celle de P à d

c) La distance de P à F vaut le quart de la distance de P à d

Résolution

Nous savons que $\frac{|PF|}{|Pd|} = e$. Ainsi,

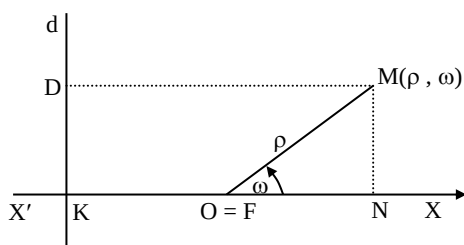
$$a) (|PF| = 3 |Pd|) \Leftrightarrow \left(\frac{|PF|}{|Pd|} = 3 \right) \text{ La conique est une hyperbole}$$

$$b) (|PF| = |Pd|) \Leftrightarrow \left(\frac{|PF|}{|Pd|} = 1 \right) \text{ La conique est une parabole}$$

$$c) \left(|PF| = \frac{1}{4} |Pd| \right) \Leftrightarrow \left(\frac{|PF|}{|Pd|} = \frac{1}{4} \right) \text{ La conique est une Ellipse}$$

VIII.3. CONIQUES EN COORDONNEES POLAIRES

VIII.3.1. RECHERCHE DE L'EQUATION



Soit $X'X$ un axe polaire de pôle O ,
 Γ une conique d'excentricité e ,
 dont un des foyers F est au pôle et de directrice d associée à F .
 d est perpendiculaire à l'axe polaire et l'axe focal coïncide avec l'axe polaire..

En considérant $M(\rho, \omega)$ un point quelconque de Γ , on a :

$$* \left(\frac{|MF|}{|Md|} = e \right) \Leftrightarrow (|MF| = e |Md|) \quad (1)$$

$$* |Md| = |NF| + |FK| \quad (2)$$

Le triangle FNM étant rectangle, on a : $NF = \rho \cos \omega$ et en posant $|FK| = p$, la relation (2) devient : $|Md| = \rho \cos \omega + p$ (3)

$$(3) \text{ dans } (1) : [MF = e (\rho \cos \omega + p)] \Leftrightarrow [\rho = e (\rho \cos \omega + p)] \\ \Leftrightarrow (\rho - e \rho \cos \omega = ep)$$

$$\text{D'où : } \rho = \frac{ep}{1 - e \cos \omega}$$

C'est l'équation polaire de la conique de foyer au pôle, de directrice perpendiculaire à l'axe polaire et situé à p unités à gauche du pôle.

Remarques

- Si la directrice se trouve à p unités à droite du pôle, l'équation de la conique s'écrit : $\rho = \frac{ep}{1 + e \cos \omega}$.
- Si la directrice est parallèle à l'axe polaire et située à p unités au dessus de celui-ci, l'équation polaire de la conique est : $\rho = \frac{ep}{1 + e \sin \omega}$
- Si la directrice est parallèle à l'axe polaire et située à p unités en dessous de celui-ci, l'équation polaire de la conique est : $\rho = \frac{ep}{1 - e \sin \omega}$
- Si l'axe polaire et l'axe focal forment un angle α alors l'équation de la conique de directrice perpendiculaire à l'axe polaire et située à p unités à gauche du pôle est : $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos (\omega - \alpha)}$

Exercices résolus

ER 238.1. Détermine la nature, l'excentricité et la position de la directrice par rapport au foyer, dans chacun des cas suivants :

$$a) \rho = \frac{4}{2-3\cos \omega}$$

$$c) \rho = \frac{4}{2+\cos \omega}$$

$$e) \rho = \frac{6}{2-\sin \omega}$$

$$b) \rho = \frac{2}{1-\cos \omega}$$

$$d) \rho = \frac{2}{2+3\sin \omega}$$

Résolution

a) L'équation de la conique peut aussi s'écrire $\rho = \frac{2}{1-\frac{3}{2}\cos \omega}$

Nous avons une conique d'excentricité $e = \frac{3}{2}$ et telle que

$$(ep = 2) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}p = 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(p = \frac{4}{3}\right)$$

La conique est une hyperbole de directrice perpendiculaire à l'axe polaire et située à $\frac{4}{3}$ d'unités à gauche du pôle.

b) Il s'agit d'une parabole car $e = 1$ de directrice perpendiculaire à l'axe polaire et située 2 unités à gauche du foyer.

$$c) \left(\rho = \frac{4}{2+\cos \omega}\right) \Leftrightarrow \left(\rho = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\cos \omega}\right)$$

Nous avons une ellipse d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et située à 4 unités à droites du foyer.

$$d) \left(\rho = \frac{2}{2+3\sin \omega}\right) \Leftrightarrow \left(\rho = \frac{1}{1+\frac{3}{2}\sin \omega}\right)$$

La conique est une hyperbole d'excentricité $e = \frac{3}{2}$, d'axe parallèle à l'axe polaire et située à $\frac{2}{3}$ unités du foyer au dessus de l'axe polaire.

$$e) \left(\rho = \frac{6}{2-\sin \omega}\right) \Leftrightarrow \left(\rho = \frac{3}{1-\frac{1}{2}\sin \omega}\right)$$

La conique est une ellipse d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ située à 6 unités du foyer en dessous de l'axe polaire.

ER 239.2. Ecris en coordonnées polaires chacune des équations suivantes :

$$a) 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$

$$b) 3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$$

Résolution

a) Nous savons que $x^2 = \rho^2 \cos^2 \omega$ et $y^2 = \rho^2 \sin^2 \omega$

L'équation $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ devient :

$$[\rho^2(9\cos^2 \omega + 16\sin^2 \omega) = 144] \Leftrightarrow \left(\rho^2 = \frac{144}{9\cos^2 \omega + 16\sin^2 \omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\rho^2 = \frac{144}{9+7\sin^2 \omega} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0) &\Leftrightarrow (3\rho^2 \cos^2 \omega + 4\rho^2 \sin^2 \omega + 8\rho \cos \omega - 16 = 0) \\ &\Leftrightarrow (4\rho^2 \cos^2 \omega - \rho^2 \cos^2 \omega + 4\rho^2 \sin^2 \omega + 8\rho \cos \omega - 16 = 0) \\ &\Leftrightarrow [4\rho^2 (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) - \rho^2 \cos^2 \omega + 8\rho \cos \omega - 16 = 0] \\ &\Leftrightarrow (4\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \omega + 8\rho \cos \omega - 16 = 0) \\ &\Leftrightarrow (\rho^2 (4 - \cos^2 \omega) + 8\rho \cos \omega - 16 = 0) \end{aligned}$$

Nous obtenons une équation du second degré en ρ . Son discriminant est : $\Delta' = 64$.
Ainsi ,

$$\begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{matrix} \left\{ \frac{-4 \cos \omega \pm 8}{4 - \cos^2 \omega} \right\} \begin{matrix} 4 \\ 2 + \cos \omega \\ -4 \\ 2 - \cos \omega \end{matrix}$$

La conique donnée est une ellipse. Elle est représentée en coordonnées polaires par deux équations $\rho = \frac{4}{2+\cos \omega}$ et $\rho = \frac{-4}{2-\cos \omega}$ selon que la directrice est à gauche ou à droite du foyer.

Exercices

N° 579. Détermine la nature de chacune des coniques définies par :

$$\text{a) } \rho = \frac{12}{4+3 \cos \omega}$$

$$\text{c) } \rho = \frac{1}{1-2 \sin \omega}$$

$$\text{e) } \rho = \frac{1}{2-2 \cos \omega}$$

$$\text{g) } \rho = \frac{-9}{5+4 \cos \omega}$$

$$\text{b) } \rho = \frac{4}{1-\cos \omega}$$

$$\text{d) } \rho = \frac{9}{4-5 \cos \omega}$$

$$\text{f) } \rho = \frac{3}{2+3 \sin \omega}$$

$$\text{h) } \rho = \frac{-5}{\sin \theta - \cos \theta}$$

N° 580. Trouve l'équation de la conique de directrice perpendiculaire à l'axe polaire, située à droite et à 4 unités du foyer sachant que son excentricité vaut $\frac{1}{2}$.

N° 581. Ecris en coordonnées polaires chacune des équations suivantes :

$$\text{a) } 4x^2 - 5y^2 + 18y - 9 = 0 \quad \text{b) } 9x^2 - 16y^2 + 90x + 81 = 0 \quad \text{c) } 4y^2 - 4x - 1 = 0$$

VIII.3.2. PLAN D'ETUDE D'UNE CONIQUE EN COORDONNEES POLAIRES

1. Déterminer les valeurs de ω pour lesquelles ρ est défini ;
2. Déterminer l'intervalle de variation de ω , ainsi que les symétries pour restreindre le domaine de définition ;
3. Déterminer les valeurs de ω qui annulent ρ ;
4. Dresser le tableau de variation .

ω	Valeurs remarquables de ω
ρ'	Signe de ρ'
ρ	Sens des variations

5. Déterminer les asymptotes, les tangentes et les points remarquables.

Remarques

- * Soit $\rho = f(\omega)$, l'équation de la courbe.
 - Si $f(-\omega) = f(\omega)$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire ;
 - Si $f(\pi + \omega) = f(\omega)$, la courbe est symétrique par rapport au pôle ;
 - Si $f(-\omega) = -f(\omega)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite comprenant le pôle et perpendiculaire à l'axe polaire ;
 - S'il existe un réel λ tel que $f(\lambda) = 0$, la droite comprend le pôle. ;
 - S'il existe un réel λ tel que $f(2\lambda - \omega) = f(\omega)$, la droite d'angle polaire $\omega = \lambda$ est un axe de symétrie de la courbe.
- * Tangente aux points $M(\rho_1, \omega_1)$ de la courbe :

$$y = \frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)} (x - f(\omega_1))$$
 équation en coordonnées cartésiennes
- * Si ω ou ρ tend vers l'infini alors la courbe de $\rho = f(\omega)$ présente une branche infinie.
- * Si $\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} f(\omega) = \infty$ ($\omega \in \mathbf{R}$) alors $y = r$ est une asymptote à la courbe
 d'équation $\rho = f(\omega)$ [$r = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \rho \sin(\omega - \omega_1)$]
- * Pour $\rho = 0$, on a les points $M(0, \omega)$
- * Pour $\omega = 0$, on a les points $M(\rho, 0)$
- * $M(\rho_1, \omega_1)$ est un point stationnaire si $f'(\omega_1) = f(\omega_1) = 0$
- * $M(\rho_1; \omega_1)$ est un point double si $f(\omega_1 + k\pi) = (-1)^k f(\omega_1)$

Exercice résolu

ER 240. Construis la courbe d'équation $\rho = 3 \sin 2\omega$

Résolution

- * La fonction est périodique, de période π (la courbe est symétrique par rapport à l'origine des axes)
- * $\rho(-\omega) = -\rho(\omega)$, la courbe admet Oy comme axe de symétrie. Dans ce cas, nous pouvons considérer comme intervalle d'étude, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- * $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = 3\sin(\pi - 2\omega) = 3\sin 2\omega$

$$= \rho(\omega)$$

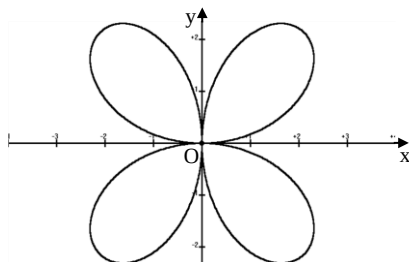
La courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice, ce qui implique la réduction de l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

- * Tableau de variation

ω	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ'	6	+	0

$$\rho = 0 \quad \nearrow \quad 3$$

La courbe obtenue est une rosace à quatre branches.



Exercice

N° 582. Construis les courbes d'équations :

a) $\rho = \frac{3}{2}(1 + 2\cos \omega)$

c) $\rho = 2 + 4 \cos \omega$

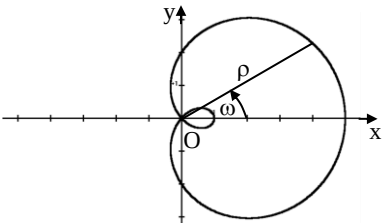
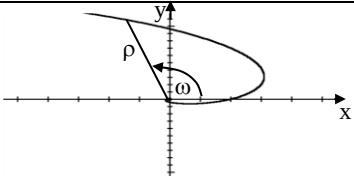
e) $\rho = \frac{a}{\sin \frac{\omega}{2}}$

b) $\rho = \frac{a}{\cos \omega + \cos 3\omega}$

d) $\rho = \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega \cos 2\omega}$

Quelques autres équations polaires et leurs courbes

Nom	Equation	Courbe
La Strophoïde	$\rho = \frac{\sin 2\omega}{\cos \omega}$	
La Spirale d'Archimède	$\rho = a\omega$	
Le trifolium	$\rho = \cos \omega \cdot \cos 2\omega$	
La Rosace à quatre lobes	$\rho = a \cdot \sin 2\omega$ (a>0)	

Le Limaçon	$\rho = a + b \cdot \cos \omega$	
La Spirale logarithmique	$\rho = a \cdot e^{\omega}$	

VIII.4. DERIVEES PARTIELLES

VIII.4.1. DEFINITIONS

Soit $f(x, y, z) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dyz + 2Exz + Fz^2$ la fonction homogène des variables x, y et z associée à l'équation générale d'une conique en coordonnées homogènes. La dérivée partielle de f par rapport à l'une des variables est celle qu'on obtient en considérant les deux autres variables comme constantes.

La dérivée partielle par rapport à x (respectivement à y et z) est notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \quad (\text{respectivement } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z))$$

$$\text{ou } f'_x(x, y, z) \quad (\text{respectivement } f'_y(x, y, z) \text{ et } f'_z(x, y, z))$$

$$\text{ou simplement } f'_x, f'_y \text{ et } f'_z.$$

Ainsi :

$$* \quad f'_x(x, y, z) = 2By + 2Cx + 2Ez \quad ; \quad f'_y(x, y, z) = 2Ay + 2Bx + 2Dz \quad \text{et} \\ f'_z(x, y, z) = 2Dy + 2Ex + 2Fz.$$

* Les dérivées partielles de f en un point $M(x_0, y_0, z_0)$ sont définies par :

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 2By_0 + 2Cx_0 + 2Ez_0 ; f'_y(x_0, y_0, z_0) = 2Ay_0 + 2Bx_0 + 2Dz_0$$

$$\text{et } f'_z(x_0, y_0, z_0) = 2Dy_0 + 2Ex_0 + 2Fz_0$$

Dans la suite, nous noterons f'_{x_0} , f'_{y_0} et f'_{z_0} pour désigner les dérivées partielles de f au point $M(x_0, y_0, z_0)$.

VIII.4.2. IDENTITES REMARQUABLES

Soit la fonction $f(x, y, z) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dyz + 2Exz + Fz^2$.

- a) $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2f(x, y, z)$
- b) $x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 2f(x_0, y_0, z_0)$.
- c) $x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = xf_{x_0} + yf_{y_0} + zf_{z_0}$
- d) $f(x+x_0, y+y_0, z+z_0) = f(x, y, z) + (x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z) + f(x_0, y_0, z_0)$.
- e) $f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + Ay^2 + 2Bxy + Cx^2$

Note :

- La relation (a) est dite identité d'Euler
- Les relations (d) et (e) sont les formules de Taylor respectivement en coordonnées homogènes et en coordonnées non homogènes.

Exercice résolu

Soit la fonction $f(x, y, z) = y^2 + 5xy + 6x^2 - 2yz + 3xz - z^2$

Calcule :

- a) toutes les dérivées partielles
- b) les dérivées partielles au point $M(1, 2, -1)$

Résolution

Nous avons :

- a) $f'_x = -5y + 12x + 3z$; $f'_y = 2y - 5x - 2z$ et $f'_z = -2y + 3x - 2z$
- b) $f'_x(1, 2, -1) = -5 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 3(-1) = -1$; $f'_y(1, 2, -1) = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 1$
et $f'_z(1, 2, -1) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2(-1) = 1$

Exercice

N° 583. Vérifie les identités remarquables des dérivées partielles données ci-haut.

VIII.5. INVARIANTS DE L'EQUATION GENERALE D'UNE CONIQUE

Soit $f(x, y) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ (1)

l'équation générale des coniques, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$, $\partial = B^2 - AC$ et $\eta = A + C -$

$2B \cos \theta$

des expressions déduites de (1)

Par translation d'axes qui applique $O(0, 0)$ sur $M(x_0, y_0)$ et d'après la formule de Taylor, on a :

$$[f(x, y) = 0] \Leftrightarrow [f(x' + x_0, y' + y_0) = 0] \\ \Leftrightarrow [Ay'^2 + 2Bx'y + Cx'^2 + x'f'_{x_0} + y'f'_{y_0} + f(x_0, y_0) = 0] \quad (2)$$

En désignant par ∂' , η' et Δ' respectivement les expressions homologues de ∂ , η et Δ relativement de l'équation (2), on a :

$$* \partial' = B^2 - AC = \partial \quad * \eta' = A + C - 2B\cos\theta = \eta$$

$$* \Delta' = \begin{vmatrix} A & B & \frac{1}{2}f'_{y_0} \\ B & C & \frac{1}{2}f'_{x_0} \\ \frac{1}{2}f'_{y_0} & \frac{1}{2}f'_{x_0} & \frac{1}{2}f(x_0, y_0) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A & B & B & Ay_0 + Bx_0 + D \\ B & C & C & By_0 + Cx_0 + E \\ Ay_0 + Bx_0 + D & By_0 + Cx_0 + E & \frac{1}{2}f(x_0, y_0) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad (\text{avec } x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0) \\ = \Delta$$

Ainsi, Δ , ∂ et η ne changent pas. C'est pour cette raison que ces expressions (∂ , η et Δ) sont appelées **invariants** de l'équation (1).

De même par rotation d'axes, on établit que si θ est l'angle du système (Ox, Oy) et θ' celui du système (Ox', Oy') .

$$\frac{\partial}{\sin^2 \theta} = \frac{\partial'}{\sin^2 \theta'}, \quad \frac{\eta}{\sin^2 \theta} = \frac{\eta'}{\sin^2 \theta'}, \quad \text{et} \quad \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} = \frac{\Delta'}{\sin^2 \theta'}$$

Ce qui prouve une fois de plus que ∂ , η et Δ sont les invariants de (1).

Exercice résolu

ER 241. On donne la conique d'équation $\Gamma \equiv 3y^2 + 4xy - 2x^2 + 6y + 4x - 1 = 0$.

- Calcule ∂ , Δ et η
- Trouve l'équation de l'image Γ' de cette conique par une translation de vecteur $\vec{u}(1, -1)$.
- Calcule ∂' , Δ' et η'
- Compare ∂ et ∂' , Δ et Δ' , η et η'

Résolution

$$a) \partial = B^2 - AC = 10$$

$$| c) \partial' = 10,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

$$\eta = 1$$

b) $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$

$$3(y'+1)^2 + 4(x'-1)(y'+1) - 2(x'-1) + 6(y'+1) + 4(x'-1) - 1 = 0$$

$$3y'^2 - 2x'^2 + 4x'y' + 8y' + 12x' - 2 = 0$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 40$$

$$\eta' = 1$$

d) Nous constatons que :

$$\partial = \partial' ;$$

$$\Delta = \Delta' \text{ et }$$

$$\eta = \eta'$$

VIII.6. EXERCICES D'AUTO – EVALUATION

N° 584. Quelle est la nature de chacune des coniques d'équations suivantes :

- a) $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 4x + 2 = 0$ Rép. : Ellipse évanouissante Er
- b) $y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 5x - 1 = 0$ Rép. : Parabole Ppd+
- c) $9y^2 - 12xy - x^2 + 6y - 6x - 4 = 0$ Rép. : Hyperbole dégénérée Hd
- d) $4x^2 - x + 1 = 0$ Rép. : Pdi
- e) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{1}{1+t} \end{cases}$ Rép. : Hyperbole

N° 585. Pour quelle valeur de k la conique d'équation

$$ky^2 - 2xy + kx^2 + 2y - 2(k+1)x + 2 = 0 \text{ représente - elle :}$$

- a) une hyperbole transverse Rép. $-1 < k < 0$ ou $0 < k < 1$
- b) une ellipse réelle Rép. $k < -1$ ou $k > 1$
- c) une parabole proprement dite tournée vers y négatifs Rép. $k = -1$

N° 586. Détermine l'équation cartésienne et la nature de chacune des courbes

représentées par les équations polaires suivantes :

a) $\rho = \frac{8}{1-2\cos\theta}$ Rép.: $y^2 - 3x^2 - 32x - 64 = 0$, Hyperbole

b) $\rho = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$

Rép. : $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y - 32 = 0$, Ellipse

c) $\rho = \frac{15}{3-2\cos\theta}$ Rép. : $9y^2 + 5x^2 - 60x - 225 = 0$, Hyperbole

N° 587. L'équation $3y^2 - 2xy + 2x^2 - 4y + 2x - 7 = 0$ représente :

1. une ellipse imaginaire
2. une hyperbole transverse
3. une ellipse réelle
4. une hyperbole non transverse
5. une ellipse évanouissante.

N° 588. L'équation $\lambda y^2 + 2xy + x^2 + \lambda y + 4x - 1 = 0$ représente une hyperbole non transverse pour :

1. $\lambda \leq -2 - 2\sqrt{2}$
2. $-2 - 2\sqrt{2} < \lambda < 0$
3. $0 < \lambda < -2 + 2\sqrt{2}$
4. $\lambda < -2 - 2\sqrt{2}$
5. $0 < \lambda < 1$

N° 589. La courbe d'équation $\rho = \frac{6}{1-\cos\theta}$ est

1. un cercle
2. une ellipse
3. une parabole
4. une droite
5. une branche d'hyperbole

N° 590. Soit l'équation d'une conique $\rho = \frac{-4}{1-\cos\theta}$ (1)

Les exercices A et B s'y rapportent.

A. L'affirmation vraie est :

1. $e = 1$ et $\partial = 1$
2. $e > 1$ et $\partial > 0$
3. $0 < e < 1$ et $\partial > 0$
4. $e = 1$ et $\partial = 0$
5. $e = 0$ et $\partial = 0$

B. L'équation cartésienne correspondant à (1) est :

1. $y^2 + 4x - 11 = 0$
2. $y^2 + 8x - 16 = 0$
3. $x^2 + 8y - 16 = 0$
4. $x^2 + xy - y^2 + y = 0$
5. $y^2 - 8x + 16 = 0$

CHAPITRE IX : LIEUX GEOMETRIQUES

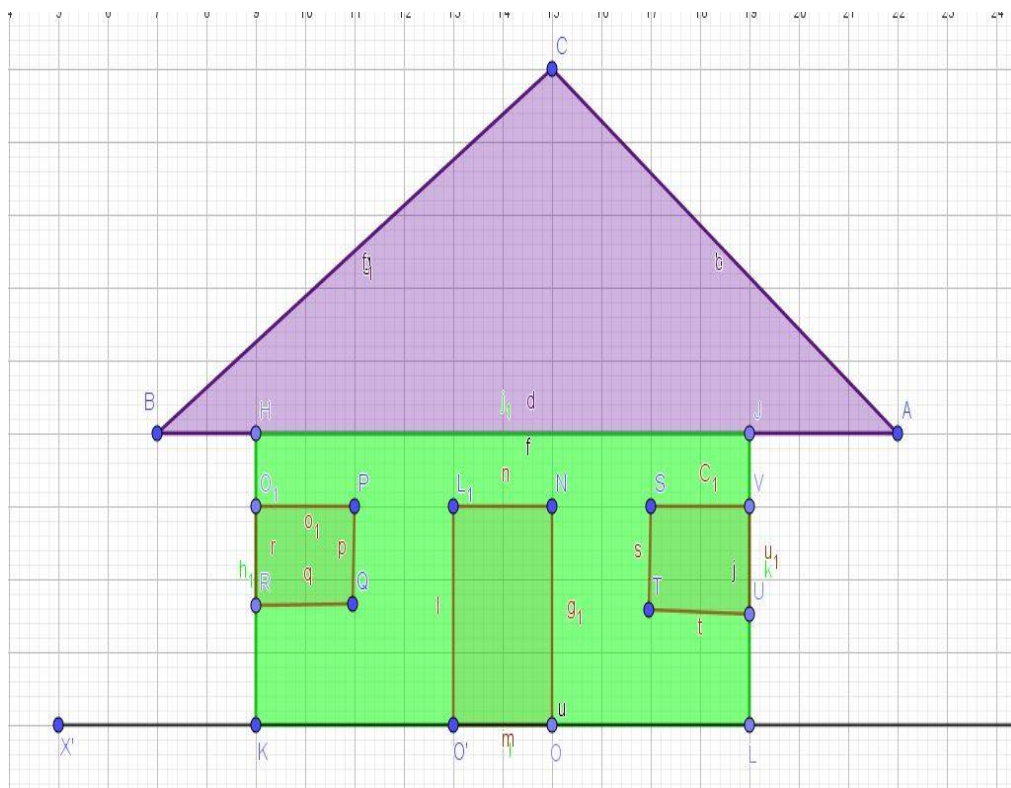
A. OBJECTIFS

1. Définir un lieu géométrique et en exhiber quelques exemples;
2. Présenter les méthodes permettant de déterminer l'équation d'un lieu ;
3. Déterminer la nature d'un lieu géométrique.

B. ACTIVITES

1. Monsieur Balekelay achète auprès d'un chef coutumier à Mbudi dans la ville-province de Kinshasa, un terrain triangulaire dont deux des cotés sont perpendiculaires. Il fait alors appel à un géomètre topographe pour l'aider à delimiter ce terrain et ce dernier lui fait savoir que dans un repère orthonormé, les points du plan qui délimitent ce terrain sont $A(-4, -3)$, $B(2, 5)$ et $C(10, -1)$.
 - a. Représente ce terrain, puis calcule son aire.
 - b. N'étant pas satisfait de la forme géométrique de ce terrain il sollicite au chef coutumier une autre partie de manière que ce terrain ait la forme d'un carré.

Si le vendeur accède à la demande de monsieur Balekelay, trouve les coordonnées du quatrième sommet D.
2. Le schéma ci-dessous est la représentation sur papier calque du bureau du quartier Mfumu Mvula dans la commune de Limete à Kinshasa. On y fixe quelques points stratégiques que l'on croit décrire dans un plan rapporté à un système des coordonnées polaires $x'Ox$. A l'aide des instruments géométriques appropriés, trouve les coordonnées polaires des points stratégiques de cette maison, à savoir: A, B, C, K, L, P.



3. Parmi les jeux qu'organisent les enfants pendant les vacances, un jeu consiste à ce qu'un groupe d'enfants se déplacent de telle sorte que la distance de chaque membre M du groupe au point $A(2; 3)$ soit toujours égale à la moitié de la distance au point $B(2; -3)$. Trouve l'équation normalisée du lieu géométrique du point M ?
4. Voici les instructions rencontrées par un maçon dans un plan de construction élaboré par un ingénieur, maître des travaux. Par un point $A(3; 5)$ on fait passer une droite variable qui tourne autour de A . Par le point $B(-1; -4)$, on mène la perpendiculaire à la droite variable. Détermine le lieu géométrique du point M , intersection de ces deux droites.
5. Laryda, élève en 3e Année des humanités scientifiques s'amuse à fabriquer une enveloppe partant des points $A(3, 3)$, $B(13, 3)$, $D(13, -1)$ et $E(3, -1)$ du plan cartésien xOy .
Il prolonge de part et d'autre de la médiane des cotés AE et BD du quadrilatère $ABDE$ d'une longueur x , jusqu'aux points F et C (F à gauche).

- a. Détermine x pour que l'aire du polygone ABCDEF soit égale à 60 unités de surface.
- b. Déduis les coordonnées des points C et F .
6. A l'occasion de l'ouverture des jeux de la journée de l'enseignement, les élèves de la 4^e des humanités scientifiques ont exhibé une chorégraphie sous forme d'une courbe telle que la somme des distances de chaque élève à deux points fixes $F(3,0)$ et $F'(-3,0)$ soit égale à 10. Aide les élèves à déterminer l'équation et la forme de la courbe.
7. Dans un repère orthonormé xOy , on donne le point $P(2 ; -2)$. Par P on trace une sécante variable qui rencontre Ox en A et Oy en B. On joint A à C milieu de OP et, par D où AC rencontre Oy , on trace la parallèle à OP qui rencontre AB en M. Détermine le lieu géométrique du point M.

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

IX.1. DEFINITION

Un lieu géométrique est un ensemble des points du plan jouissant d'une ou de plusieurs propriétés communes données.

Conséquences

- C_1 : Tout point de l'ensemble doit posséder la propriété géométrique qui définit le lieu.
- C_2 : Tout point possédant cette propriété doit appartenir au lieu.

Exemples

- L'ensemble des points situés à égale distance d'un point fixe est un cercle.
- L'ensemble des points équidistants des côtés d'un angle est la bissectrice de cet angle
- L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment de droite est la médiatrice de ce segment de droite.
- L'ensemble des points ayant une même puissance par rapport à deux cercles est l'axe radical de deux cercles.

Exercice

N° 591. Trouve d'autres exemples des lieux géométriques en spécifiant la (ou les) propriété(s) géométrique (s) que possèdent leurs points.

IX.2. DETERMINATION D'UN LIEU

La détermination d'un lieu géométrique se fait soit par la méthode de traduction (ou méthode directe) soit par la méthode des génératrices (ou méthode indirecte).

IX.2.1. METHODE DE TRADUCTION

Elle consiste à traduire algébriquement la propriété géométrique donnée en une relation qui lie les coordonnées d'un point quelconque du lieu.

Procédé

- Choisir les axes de coordonnées (si ceux-ci ne sont pas donnés) de façon qu'ils ne soient pas variables. Ils sont :
 - * quelconques : si le problème ne comporte que les notions de point, droites, appartenance, parallélisme de droites ;
 - * rectangulaires orthonormés si le problème comporte des notions de distance, d'angles, de perpendicularité des droites.
- Choisir un point quelconque $P(\alpha, \beta)$ du lieu
- Traduire la propriété géométrique donnée en une relation $f(\alpha, \beta) = 0$
- Substituer α et β par les coordonnées courantes x et y et obtenir $f(x, y) = 0$ qui est l'équation du lieu géométrique recherché.
- Examiner l'équation trouvée pour déterminer la nature du lieu obtenu (droite, cercle, parabole, ellipse, hyperbole...)

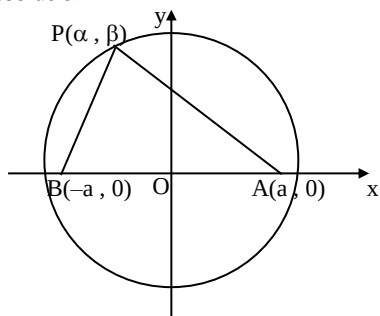
Remarques

- Lorsqu'aucune confusion n'existe, on peut attribuer directement au point P du lieu les coordonnées x et y .
- Lorsqu'on donne deux points, on choisira un des axes passant par ces points et le deuxième est soit la médiatrice du segment qu'ils déterminent soit la perpendiculaire en un de ces points.
- Si l'on donne un triangle, on choisira le premier axe sur un côté et le deuxième sur la hauteur relative à ce côté ou sur sa médiatrice.

Exercices résolus

ER 242.1. On donne deux points fixes A et B. Déterminer l'équation du lieu géométrique d'un point P tel que la distance de P à A soit le double de celle de P à B.

Résolution



– Choix des axes de coordonnées :

Comme les points A et B sont fixes, faisons passer l'axe Ox par A et B et prenons Oy comme médiatrice du segment [AB].

Soit A(a, 0), B(-a, 0) et P(α, β) un point du lieu.

- Traduction de la propriété donnée :

$$\begin{aligned} (|PA| = 2|PB|) &\Leftrightarrow (\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - 0)^2} = 2\sqrt{(\alpha + a)^2 + (\beta - 0)^2}) \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + \beta^2 = 4\alpha^2 + 8a\alpha + 4a^2 + 4\beta^2) \\ &\Leftrightarrow (-3\alpha^2 - 3\beta^2 - 10a\alpha - 3a^2 = 0) \end{aligned} \quad (i)$$

En remplaçant α et β respectivement par x et y, l'équation (i) devient :

$$-3x^2 - 3y^2 - 10ax - 3a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + \frac{10}{3}ax + a^2 = 0 \quad (ii)$$

Les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux et il y a absence du terme en xy ; le lieu est donc un cercle de centre $(-\frac{5a}{3}, 0)$ et de rayon $R = \frac{4a}{3}$.

ER 243.2. Détermine le lieu géométrique des points équidistants de deux points fixes

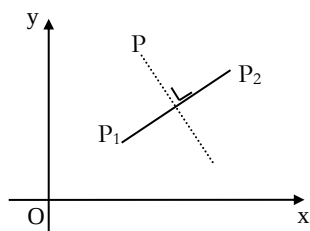
$P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$

Résolution

Choisissons les axes rectangulaires orthonormés.

Soit P(x, y) un point du lieu.

$$\begin{aligned} (|PP_1| = |PP_2|) &\Leftrightarrow (\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}) \\ &\Leftrightarrow [2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2] \\ &\Leftrightarrow [2(y_1 - y_2)y + 2(x_1 - x_2)x - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 = 0] \end{aligned}$$



L'équation obtenue est celle d'une droite.

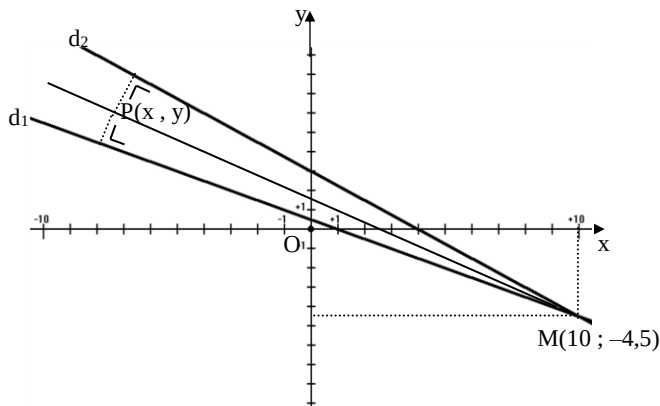
Elle représente la médiatrice du segment $[P_1P_2]$ et son coefficient angulaire est : $-\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$

ER 244.3. Un point $P(x, y)$ est situé à la même distance des droites $d_1 \equiv 4y + 3x - 12 = 0$ et $d_2 \equiv 2y + x - 1 = 0$. Ecris l'équation du lieu de P .

Résolution

Choisissons les axes rectangulaires orthonormés et représentons les droites d_1 et d_2 .

Soit $P(x, y)$ un point du lieu.



$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } (|Pd_1| &= |Pd_2|) \Leftrightarrow \left(\frac{4y+3x-12}{\sqrt{16+9}} = \frac{2y+x-1}{\sqrt{4+1}} \right) \\ &\Leftrightarrow (4\sqrt{5}y + 3\sqrt{5}x - 12\sqrt{5} = 10y + 5x - 5) \\ &\Leftrightarrow (4\sqrt{5}-10)y + (3-5)x + 5 - 12\sqrt{5} = 0 \end{aligned}$$

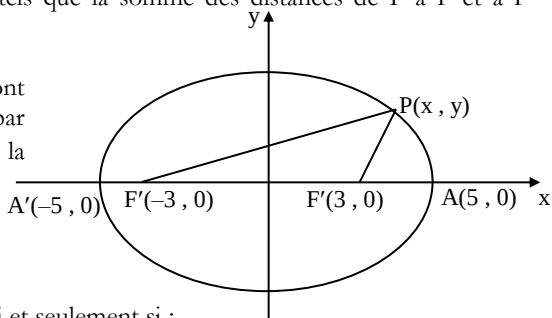
L'équation obtenue est celle d'une droite. Elle représente la bissectrice intérieure de l'angle formé par les droites d_1 et d_2 .

ER 245.4. On donne deux points fixes $F(3,0)$ et $F'(-3,0)$.

Détermine le lieu des points P tels que la somme des distances de P à F et à F' soit égale à 10.

Résolution

Les axes de coordonnées sont choisis tels que Ox passe par $F(3, 0)$ et $F'(-3, 0)$ et Oy est la médiatrice du segment $[F'F]$.



Le point $P(x, y)$ appartient au lieu si et seulement si :

$$(|PF'| + |PF| = 10) \Leftrightarrow [\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10] \quad (i)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}] \quad (ii)$$

La résolution de l'équation irrationnelle (ii) donne :

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{iii})$$

C'est l'équation de l'ellipse centrée à l'origine.

ER 246.5. On donne deux points fixes. Détermine le lieu géométrique des projections

orthogonales de B sur la droite contenant A.

Résolution

Soit A(a, 0) et B(0, 0)

P(x, y) appartient au lieu si et seulement si

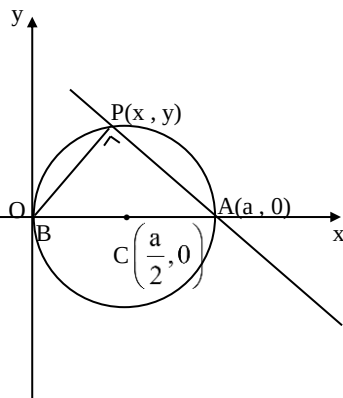
$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\text{Or } \overrightarrow{BP} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{AP} = (x-a)\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\text{Ainsi, } (\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0) \Leftrightarrow [x(x-a) + y^2 = 0]$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 + y^2 - ax = 0)]$$

Le lieu est un cercle de centre $(\frac{a}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{a}{2}$.



ER 247.6. Trouve l'équation du lieu des points P(x, y) tels que leur distance à A(2, 3)

soit égal à leurs distances à la droite d'équation $x + 2 = 0$.

Résolution

Choisissons un repère orthonormé.

P(x, y) appartient au lieu si et seulement si :

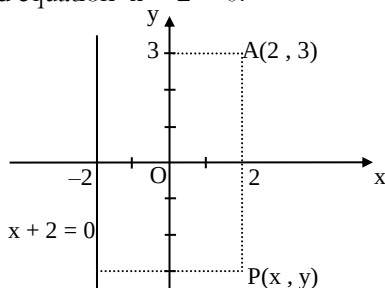
$$|Pd| = |PA|$$

$\Leftrightarrow$

$$|x+2| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow [(x+2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow (8x + 6y - 9 - y^2 = 0)$$



$$\Delta = B^2 - AC = 0 \quad \text{et} \quad -A\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

L'équation obtenue est celle d'une parabole proprement dite tournée vers les x positifs.

ER 248.7. On donne les points A(2, 0) et B(-2, 0).

a) Détermine le point C situé sur l'axe Oy tel que le triangle ABC soit équilatéral.

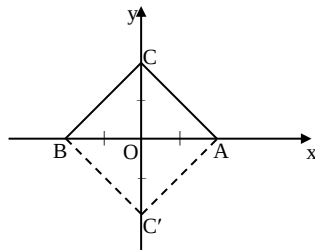
- b) Trouve le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets du triangle vaut 21.

Résolution

Choisissons des axes rectangulaires.

Soit $C(0, y)$ le troisième sommet du triangle ABC.

- a) Le triangle ABC étant équilatéral,
 $|AB| = |AC| = |BC|$.



$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (|AB| = |AC|) &\Leftrightarrow \left[\sqrt{(-2-2)^2 + 0} = \sqrt{(-2)^2 + y^2} \right] \\ &\Leftrightarrow (16 = 4 + y^2) \\ &\Leftrightarrow (y = 2\sqrt{3} \text{ ou } y = -2\sqrt{3}). \text{ D'où : } C(0, 2\sqrt{3}) \text{ ou } C'(0, -2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

- b) $P(x, y)$ appartient au lieu si et seulement si :

$$(|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 21) \quad \text{avec } C(0, 2\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow [(2-x)^2 + y^2 + x^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 21]$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y - 1 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4\frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{1}{3} = 0)$$

L'équation représente un cercle de centre $C(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

De même, avec $C'(0, -2\sqrt{3})$ nous trouvons : $x^2 + y^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}y - \frac{1}{3} = 0$

Le lieu est un cercle de centre $C(0, \frac{-2\sqrt{3}}{3})$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

ER 249.8. On donne les points $A(2, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 1)$ et $D(0, 5)$.

Sachant que l'aire d'un triangle vaut le demi-produit d'un côté, par la hauteur correspondante à ce côté, détermine les lieux géométriques des points M tels que l'aire du triangle MAB soit égale au double de l'aire du triangle MCD.

Résolution

Choisissons un repère orthonormé. Désignons par A_{MAB} l'aire du triangle MAB et A_{MCD} l'aire du triangle MCD.

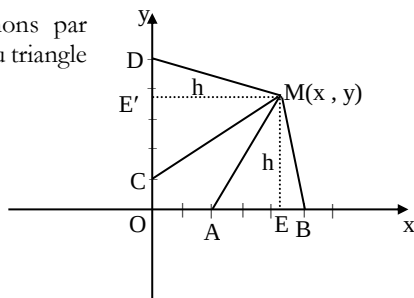
*) Dans le triangle MAB :

base : $|AB| = 3$ et hauteur : $|ME| = |y|$

*) Dans le triangle MCD :

base : $|CD| = 4$ et hauteur : $|ME'| = |x|$

$M(x, y)$ appartient au lieu si et seulement si :



$$\begin{aligned}
 (A_{MAB} = 2A_{MCD}) &\Leftrightarrow \left(\frac{|AB| \cdot |ME|}{2} = 2 \cdot \frac{|CD| \cdot |ME'|}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{3|y|}{2} = 2 \cdot \frac{4|x|}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow (3y = 8x \text{ ou } 3y = -8x)
 \end{aligned}$$

Le lieu est formé de deux droites d'équations respectives $3y - 8x = 0$ et $3y + 8x = 0$

ER 250.9. Détermine le lieu des points tels que la somme des puissances de ces points par

rapport à deux cercles donnés fixes soit nulle.

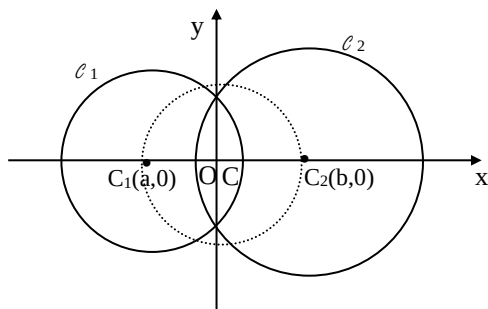
Résolution

Choisissons des axes orthonormés.

les cercles C_1 et C_2 ont respectivement pour équation : $x^2 + y^2 - 2ax + \gamma = 0$ et

$$x^2 + y^2 - 2bx + \gamma = 0.$$

Soit $P(\alpha, \beta)$ un point quelconque du lieu ; Les puissances de P par rapport à C_1 et C_2 sont respectivement $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha + \gamma$ et $\alpha^2 + \beta^2 - 2b\alpha + \gamma$.



La somme de ces puissances étant nulle, nous avons :

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2(a+b)\alpha + 2\gamma = 0$$

L'équation du lieu est : $x^2 + y^2 - (a+b)x + \gamma = 0$. Elle représente un cercle de centre $C\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, milieu du segment $[C_1C_2]$ et admettant avec chacun des cercles donnés, l'axe des y pour axe radical.

ER 251. La partie utile du lieu est formée des parties des cercles intérieures à l'un des cercles et extérieures par rapport à l'autre : les puissances sont ainsi de signe contraire.

10. Soit le rectangle ABCD. Déterminer le lieu des points M tels que le faisceau

(A, B, C, D) ait un rapport anharmonique λ donné.

Résolution

$$(MD) \equiv \alpha y + (b - \beta)x - ab = 0 : D'\left(\frac{ab}{b - \beta}, 0\right)$$

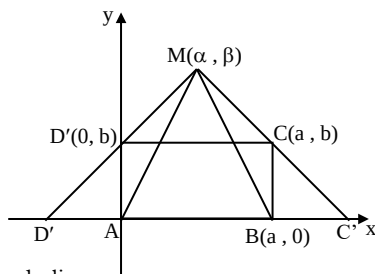
$$(MC) \equiv y - b = \frac{\beta - b}{\alpha - a}(x - a) : C'\left(\frac{-ab + a\beta}{\beta - b}, 0\right)$$

$M(A, B, C, D)$ est un rapport anharmonique signifie que : $(A, B', C', D) = \lambda$.

Ainsi,

$$\frac{\frac{a - \frac{a\beta - ab}{\beta - b}}{\beta - b}}{\frac{ab}{b - \beta} - \frac{a\beta - ab}{\beta - b}} : \frac{a}{b - \beta} = \lambda$$

(i)



En développant la relation (i), on obtient l'équation du lieu.:

$\lambda a^2 y^2 - \lambda a^2 b y + a b^2 x = 0$. C'est une conique circonscrite au rectangle.

Si $\lambda > 0$, la conique est une hyperbole

Si $\lambda < 0$, la conique est une ellipse

Si $\lambda = \frac{b^2}{a^2}$, la conique est une hyperbole équilatère

Si $\lambda = -\frac{b^2}{a^2}$, la conique est un cercle.

Exercices

N° 592. Un point $P(x, y)$ est situé 3 fois plus loin du point $A(2,3)$ que du point $B(-3,5)$. Trouve l'équation du lieu de P .

N° 593. Soit $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ deux segments de droites.

Quel est le lieu des points P pour lesquels les aires des triangles PA_1B_1 et PA_2B_2 ont une somme constante k^2 ?

N° 594. Détermine le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de ces points aux quatre côtés d'un carré soit constante.

N° 595. Ecris l'équation du lieu des points dont le carré de la distance à $A(-2, -5)$ est égal à 3 fois la distance à la droite $88x + 15y - 34 = 0$.

N° 596. Un point $M(x, y)$ se déplace de telle sorte que la différence de ses distances aux points $A(1, 4)$ et $B(-1, -4)$ soit égale à 6. Détermine l'équation du lieu des points M .

N° 597. Détermine l'équation du lieu des points dont la somme des carrés des distances aux deux droites perpendiculaires $2x + 3y - 6 = 0$ et $3x - 2y + 8 = 0$ est égale à 10.

N° 598. On considère un cercle de centre O et un carré $ABCD$ circonscrit à ce cercle. Trouve le lieu du point M tel que l'angle AMG soit égal à l'angle des tangentes menées de M au cercle O .

N° 599. Démontre que la somme des carrés des distances d'un point quelconque M du plan à deux sommets opposés d'un rectangle $ABCD$ est égale à la somme des carrés des distances de ce point aux deux autres.

N° 600. Trouve le lieu géométrique du point de l'intersection de diagonales d'un rectangle inscrit dans un triangle donné, un des côtés du rectangle étant inclus dans un des côtés du triangle.

N° 601. Dans un repère orthonormé de plan d'axes x et y et d'origine O , on donne un point quelconque M et ses projections orthogonales A sur x et B sur y .

Détermine le lieu du point M sachant que :

a) $d(O, A) + d(O, B) = 1$ c) le coefficient angulaire de AB est 2.

$$b) d(O, B) - d(O, A) = 2$$

N° 602. Etant donnés deux points P1 et P2, détermine le lieu des points dont le rapport des distances à ces deux points à une valeur donnée $\frac{p}{q}$.

N° 603. Etant donnés les points A(-2, 3) et B(3, 1).
Trouve l'équation du lieu de P(x, y) sachant que la pente de PA est égale à l'opposé de l'inverse de celle de PB.

IX.2.2. METHODE DES GENERATRICES

Soit $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ deux courbes dont les coefficients (pas nécessairement tous) dépendent du paramètre λ . Supposer que ces courbes possèdent pour toute valeur de λ , un point commun P(x, y).

Lorsque λ varie, P se déplace et décrit une courbe qui est le lieu du point P. Le lieu du point P est dans ce cas l'ensemble des points d'intersection de deux familles des courbes $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$.

L'équation cartésienne du lieu s'obtient donc par l'élimination du paramètre λ entre les équations $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ qui forment un système d'équations paramétriques.

Les deux courbes d'équations $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ sont appelées génératrices du lieu de P ; ce qui explique l'appellation de « méthode de génératrice ».

Le paramètre λ peut représenter un angle variable, l'abscisse ou l'ordonnée d'un point variable, le coefficient angulaire d'une droite variable, ...

Procédé de résolution

1. Choisir les axes (ou le repère) si ceux-ci ne sont pas donnés.
2. Choisir le (ou les) paramètre (s).
 - Si l'élément mobile est une droite passant par un point fixe, on pourra prendre comme paramètre λ , son coefficient angulaire ;
 - Si l'élément mobile est une droite passant de direction donnée, on pourra prendre comme paramètre λ , son ordonnée (ou son abscisse) à l'origine ;
 - Si l'élément mobile est un point variable d'une courbe ($\mathcal{C}$) $\equiv f(x, y) = 0$, on pourra prendre comme paramètres les coordonnées α et β de ce point ; on exprime la relation $f(\alpha, \beta) = 0$

- Si l'élément mobile est un cercle variable, on pourra prendre comme paramètre λ , l'un des coefficients des termes de son équation, ou son rayon, ou l'abscisse (l'ordonnée) de son centre
- Si l'élément mobile est un angle, on recourt aux formules trigonométriques

3. Déterminer les équations des génératrices

4. Éliminer le(s) paramètre(s) entre les équations des génératrices, l'équation obtenue (sans λ) est l'équation du lieu.

5. Donner la nature du lieu

6. Déterminer si possible suivant les conditions du problème les parties parasites, les parties singulières et les parties proprement dites du lieu.

Quelques définitions

- Une partie parasite est formée des points vérifiant l'équation du lieu mais qui ne conviennent pas aux données du problème.
- Une partie singulière est l'ensemble des points obtenus de la coïncidence, en tout ou en partie de deux génératrices pour une même valeur du paramètre λ .
- Le lieu proprement dit est l'ensemble des points obtenus par élimination du paramètre λ entre les équations des génératrices suivant les conditions de l'énoncé du problème.

En d'autres termes, le lieu proprement dit est la partie du lieu obtenue après avoir éliminé la partie parasite et à laquelle on adjoint la partie singulière.

Comment éliminer le paramètre λ ?

- Si l'une des équations $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ est du premier degré en λ , on en tire une expression de λ que l'on remplace dans l'autre.
- Si les deux équations $f(x, y, \lambda) = 0$ et $g(x, y, \lambda) = 0$ sont du second degré en λ , on utilise la condition d'existence d'une racine commune à deux équations du second degré. Ainsi par exemple si les génératrices

forment un système du genre : $\begin{cases} a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ a'\lambda^2 + b'\lambda + c' = 0 \end{cases}$ la condition de

compatibilité est : $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$.

Elle donne l'équation du lieu.

- Si le paramètre λ intervient sous forme des fonctions trigonométriques, on utilise souvent l'une des relations trigonométriques suivantes :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha ; \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} ; \dots$$

- d) Si l'une des équations des génératrices peut se factoriser, on examine chaque partie séparément.

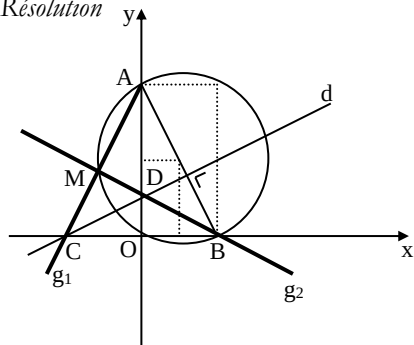
Remarques

- Lorsque l'une des génératrices ne dépend pas du paramètre, elle constitue l'équation du lieu.
- La méthode des génératrices est envisagée lorsqu'on définit les points du lieu au moyen d'intersection des courbes. souvent le terme « variable » apparaissant dans l'énoncé du problème permet de penser à la méthode des génératrices.
- Les points qui constituent la partie parasite d'un lieu doivent être éliminés géométriquement ou analytiquement.

Exercices résolus

1. On donne le triangle OAB tel que A(0, 4) et B(2, 0). Une droite variable et perpendiculaire à AB rencontre Ox en C et Oy en D. Détermine l'équation du lieu géométrique du point de rencontre de AC et BD.

Résolution



- Choisissons les axes de coordonnées rectangulaires de telle sorte :
Ox passe par O(0, 0) et B(2, 0) et Oy passe par O(0, 0) et A(0, 4).
- Soit d la droite variable, perpendiculaire à la droite AB. Son équation est :
 $y = mx + \lambda$ (m pente de la droite AB et λ le paramètre)

- Le coefficient angulaire de la droite AB est $m = -2$ et celui de d est $\frac{1}{2}$.

L'équation de d est : $y = \frac{1}{2}x + \lambda$. Comme d coupe Ox et Oy respectivement en C et D, nous avons : $[C(-2\lambda, 0)] \Rightarrow [D(0, \lambda)]$

- Les génératrices sont les droites AC et BD. Elles ont pour équations :

$$g_1 = AC \equiv y = \frac{2}{\lambda}x + 4 \quad (\text{i}) \quad \text{et} \quad g_2 = BD \equiv y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda \quad (\text{ii})$$

$$\text{De (i) : } \lambda = \frac{2x}{y-4} \quad (y \neq 4) \quad \text{De (ii) : } \lambda = \frac{2y}{2-x} \quad (x \neq 2)$$

$$\text{Par suite: } \left(\frac{2x}{y-4} = \frac{2y}{2-x} \right) \Leftrightarrow (y^2 + x^2 - 4y - 2x = 0)$$

- Le lieu est un cercle de centre (1, 2) et de rayon $R = \sqrt{5}$ circonscrit au triangle OAB.

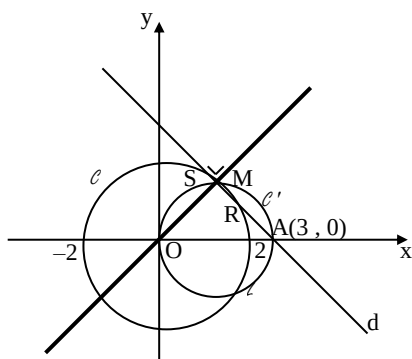
- $(2, 4)$ est un point du lieu. Mais ses coordonnées ne donnent pas des valeurs réelles au paramètre λ . Il est alors un point singulier.

ER 252.2. La droite d passant par $A(3, 0)$ rencontre le cercle C centré à l'origine et de

rayon 2 en deux points R et S .

Détermine l'équation du lieu géométrique du point M , milieu du segment $[RS]$.

Résolution



Choisissons le système d'axes rectangulaires où Ox passe par $A(3, 0)$ et $O(0, 0)$; Oy passe par $(0, 0)$ et est perpendiculaire à Ox .

– La droite variable passant par $A(3, 0)$ a pour équation :

$$y = \lambda(x - 3) \quad (\lambda \text{ paramètre})$$

– Le point M étant le point d'intersection de la droite variable passant par A et de la perpendiculaire à cette droite passant par O ; les génératrices sont les droites :

$$AM \equiv y = \lambda(x - 3) \quad (i)$$

$$OM \equiv y = -\frac{1}{\lambda}x \quad (ii)$$

En multipliant membre à membre les égalités (i) et (ii), nous obtenons l'équation :

$y^2 + x^2 - 3x = 0$. Elle est celle d'un cercle C' centré en $(\frac{3}{2}, 0)$ et de rayon $R = \frac{3}{2}$.

La partie du cercle C' située à l'extérieur du cercle C est une partie parasite du lieu.

ER 253.3. On donne un triangle ABC rectangle en C avec $A(0, 6)$, $B(7, 0)$ et $C(0, 0)$.

On prend sur le côté BC et sur son prolongement deux points variables Q et R

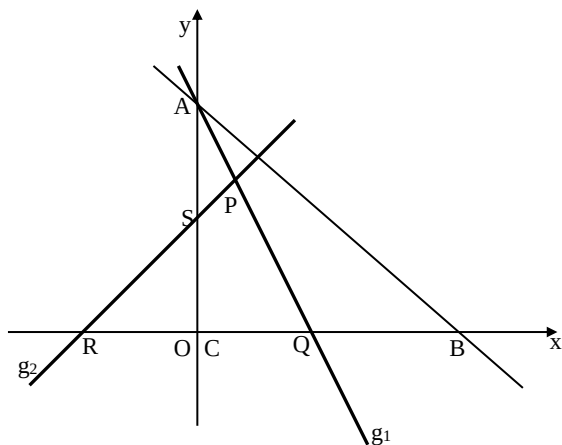
tels que C est le milieu du segment $[QR]$. On joint Q (situé sur le côté BC) à

A et on joint R à S (milieu de segment $[AC]$). Les deux droites variables QA et

RS se rencontrent en P . Déterminer le lieu géométrique du point P .

Résolution

Considérons un système d'axes rectangulaires.



S milieu de AC : $S(0, 3)$. Q et R sont deux points variables sur Ox .

$Q(\lambda, 0)$ et $R(-\lambda, 0)$

Les équations des génératrices QA et RS sont respectivement :

$$y - 6 = \frac{-6}{\lambda}(x - 0) \quad (i) \quad \text{et}$$

$$y - 3 = \frac{-3}{-\lambda}(x - 0) \quad (ii)$$

$$\text{De (i) : } \lambda = \frac{-6x}{y-6} \quad (y \neq 6)$$

$$\text{De (ii) : } \lambda = \frac{3x}{y-3} \quad (y \neq 3)$$

Nous avons : $\left(\frac{-6x}{y-6} = \frac{3x}{y-3}\right) \Leftrightarrow [x(y-4) = 0]$

– $x(y-4) = 0$ représente deux droites $x = 0$ et $y - 4 = 0$

– $x = 0$ est la solution singulière.

En effet, pour $\lambda = 0$, les deux génératrices coïncident et ont pour équation $x = 0$.

Dans ce cas, $Q \equiv R \equiv C$

– $y - 4 = 0$ est la solution générale.

Remarques

– Si dans l'énoncé du problème, on pose que les points variables Q et R doivent être distincts alors la solution $x = 0$ obtenue si $Q \equiv R$ devient une solution parasite.

– Le point $K(0, 4)$ qui appartient à $y = 4$ (solution générale) serait aussi une partie parasite parce qu'obtenue par la condition $Q \equiv R \equiv C$.

ER 254.4. On donne un point fixe $A(0, a)$. Sur l'axe des x se déplacent deux points M et N

de telle façon que l'abscisse du premier soit constamment l'inverse de l'abscisse

du deuxième. Par M, on trace une perpendiculaire à AM et par N une à AN.

Trouve l'équation du lieu (partie singulière exclue) de l'intersection des perpendiculaires en M et N .

Résolution

Première méthode

Considérons le système d'axes orthonormés et λ le paramètre. M et N étant sur Ox, nous avons : $M\left(\frac{1}{\lambda}, 0\right)$ et $N(\lambda, 0)$.

Soit d_1 la droite AM, son coefficient angulaire est $-a\lambda$ et d_2 la droite AN de coefficient angulaire $-\frac{a}{\lambda}$.

Les génératrices g_1 et g_2 sont telles que :

$$g_1 \text{ passe par M et est perpendiculaire à } d_1 : g_1 \equiv y = \frac{1}{a\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (i)$$

$$g_2 \text{ passe par N et est perpendiculaire à } d_2 : g_2 \equiv y = \frac{\lambda}{a} (x - \lambda) \quad (ii)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où le système : } \begin{cases} y = \frac{1}{a\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \\ y = \frac{\lambda}{a} (x - \lambda) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ay = \frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \\ ay = \lambda(x - \lambda) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda(x - \lambda)\right] \\ &\Leftrightarrow (-\lambda^4 + \lambda^3x - \lambda x + 1 = 0) \\ &\Leftrightarrow [(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \lambda x + 1) = 0] \\ &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1 = 0 \text{ ou } \lambda^2 - \lambda x + 1 = 0) \end{aligned}$$

Par suite, $(\lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1)$

$$* \lambda^2 - \lambda x + 1 = 0 \text{ avec } \Delta = x^2 - 4$$

$$\lambda_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

Pour $\lambda = 1$, $(ay = x - 1) \Leftrightarrow [y = \frac{1}{a}(x - 1)]$

$\lambda = -1$, $(ay = -(x + 1)) \Leftrightarrow [y = -\frac{1}{a}(x + 1)]$

$$\lambda = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad ay = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \left(x - \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \left(\frac{2x - x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$$

$$ay = 1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{a} \quad (\text{droite parallèle à Ox})$$

$$\lambda = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad ay = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \left(x - \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$$

$$ay = 1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{a} \quad (\text{droite parallèle à Ox})$$

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, les deux génératrices coïncident.

Ainsi, la partie du lieu d'équations $y = \frac{1}{a}(x - 1)$ et $y = -\frac{1}{a}(x + 1)$ est dite singulière.

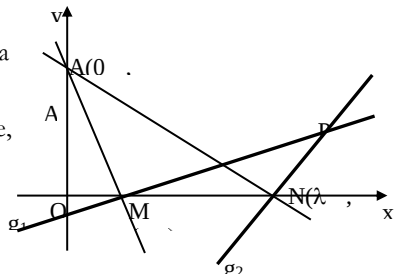
Dans ce cas le lieu géométrique demandée est une droite parallèle à Ox d'équation $y = \frac{1}{a}$.

Deuxième méthode :

Déterminons l'équation du lieu en utilisant la condition de compatibilité :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Pour ce,}$$

exprimons les génératrices sous forme



d'équations du second degré : $g_1 \equiv a\lambda^2 y - \lambda x + 1 = 0$ et $g_2 \equiv \lambda^2 - \lambda x + ay = 0$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{vmatrix} ay & 1 \\ 1 & ay \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} ay & -x \\ 1 & -x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & ay \end{vmatrix} = 0 \right) &\Leftrightarrow [(a^2 y^2 - 1)^2 - (-axy + x)(-axy + x) = 0] \\ &\Leftrightarrow [(a^2 y^2 - 1)^2 - (x - axy)^2 = 0] \\ &\Leftrightarrow [(ay - 1)^2 (ay + 1)^2 - x^2 (1 - ay)^2 = 0] \\ &\Leftrightarrow [(1 - ay)^2 [(ay + 1)^2 - x^2] = 0] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1 - ay = 0 \text{ ou } ay + 1 - x = 0 \text{ ou } ay + 1 + x = 0)$$

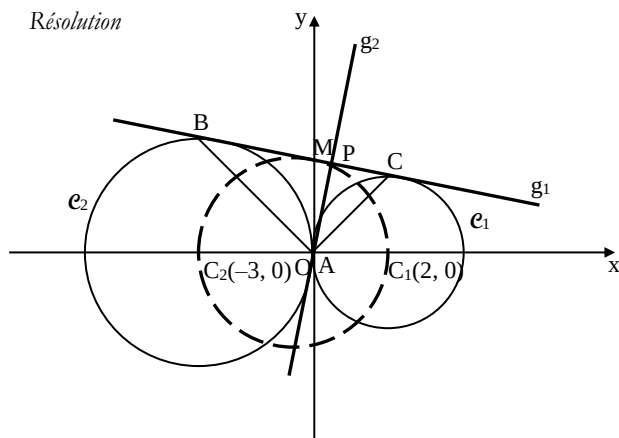
$$\text{D'où : } y = \frac{1}{a} \text{ ou } y = \frac{1}{a}(x - 1) \text{ ou } y = -\frac{1}{a}(x + 1)$$

ER 255.5. On donne deux cercles tangents en $A(0, 0)$ et de centre respectifs $(2, 0)$ et $(-3, 0)$.

On trace par le point de contact deux cordes perpendiculaires AB et AC , une dans chaque cercle. Déterminer :

- a) le lieu du milieu de BC ; b) le lieu de la projection orthogonale de A sur BC .

Résolution



- a) Soit les cercles C_1 et C_2 tangents en A et d'équations respectives :
- $$C_1 \equiv y^2 + x^2 + 6x = 0 \quad \text{et}$$
- $$C_2 \equiv y^2 + x^2 - 4x = 0$$
- $$AB \equiv y = mx \quad \text{et}$$
- $$AC \equiv y = -\frac{1}{m}x$$
- (m le paramètre)
Les points B et C sont respectivement point d'intersection de AB avec C_1 et AC avec C_2 .

Pour ce, résolvons successivement le système

$$\begin{cases} y^2 + x^2 + 6x = 0 \\ y = mx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y^2 + x^2 - 4x = 0 \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases}$$

$$B\left(\frac{-6}{1+m^2}, \frac{-6m}{1+m^2}\right) \quad \text{et} \quad C\left(\frac{4m^2}{1+m^2}, \frac{-4m}{1+m^2}\right)$$

Le point M milieu du segment [BC] a pour coordonnées :

$$x = \frac{-3+2m^2}{1+m^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-5m}{1+m^2} \quad \text{qui constituent aussi les génératrices du point M}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \left(x = \frac{-3+2m^2}{1+m^2}\right) &\Leftrightarrow (x + m^2x = -3 + 2m^2) \\ &\Leftrightarrow [(x-2)m^2 = -3-x] \\ &\Leftrightarrow \left(m^2 = \frac{-3-x}{x-2}\right) \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \left(y = \frac{-5m}{1+m^2}\right) &\Leftrightarrow (y + m^2y = -5m) \\ &\Leftrightarrow \left(m = \frac{y+m^2y}{-5}\right) \\ &\Leftrightarrow \left[m = \frac{y+\left(\frac{-3-x}{x-2}\right)y}{-5}\right] \\ &\Leftrightarrow \left(m = \frac{y}{x-2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(m^2 = \frac{y^2}{(x-2)^2}\right) \end{aligned} \quad (ii)$$

$$\text{De (i) et (ii), nous obtenons : } \left[\frac{y^2}{(x-2)^2} = \frac{-3-x}{x-2}\right] \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + x - 6 = 0)$$

Le lieu est un cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{5}{2}$

b) La droite BC est la première génératrice. Son équation est :

$$g_1 \equiv -mx - (-3 - 2m^2)y + 12m = 0 \quad (iii)$$

La droite g_2 passant par A et perpendiculaire à g_1 est la deuxième génératrice.
Son équation est : $g_2 \equiv -my + (-3 - 2m^2)x = 0$ (iv)

Éliminons le paramètre m entre les équations (iii) et (iv) par la technique des conditions de racine commune.

Le lieu a pour équation : $-x^2 - y^2 + 12x = 0$ ou $y^2 + x^2 - 12x = 0$. C'est un cercle de centre $(6, 0)$ et de rayon 6 et tangent en A aux deux cercles C_1 et C_2 .

ER 256.6. On donne un cercle C de centre $(0, 0)$ et de diamètre AB avec $A(-3, 0)$ et

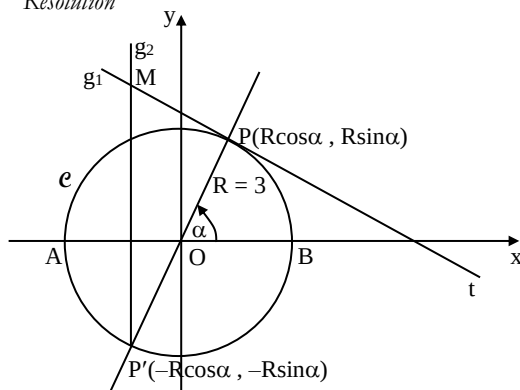
$B(3, 0)$. Un point P se déplace sur C ainsi que son symétrique P' par rapport au

centre du cercle. On trace une tangente t en P au cercle puis une perpendiculaire

p par P' à AB. Quel est le lieu du point de rencontre de la tangente t et de la

perpendiculaire p ?

Résolution



Première méthode

La droite (t) , première génératrice g_1 a pour équation normale,

$$g_1 \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0 \quad (i)$$

(α paramètre) et la deuxième génératrice g_2 a pour équation,

$$g_2 \equiv x = -R \cos \alpha \quad (ii)$$

De (ii), nous avons :

$$\cos \alpha = -\frac{x}{R} \quad (iii)$$

En portant (iii) dans (i), nous obtenons : $\sin \alpha = \frac{R^2 + x^2}{Ry}$ (iv)

En utilisant la relation $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, nous obtenons :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(R^2 + x^2)^2}{R^2 y^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 y^2 + x^4 + 18x^2 - 9y^2 + 81 = 0$$

L'équation du lieu est : $x^2 y^2 + x^4 + 18x^2 - 9y^2 + 81 = 0$ ou $y = \frac{x^2 + 9}{\sqrt{9 - x^2}}$

ou $y = \frac{x^2 + 9}{-\sqrt{9 - x^2}}$.

Deuxième méthode :

Le cercle C a pour équation : $x^2 + y^2 = 9$. Considérons un point $P(\lambda, \mu)$ du lieu.

$$(P \in C) \Rightarrow (\lambda^2 + \mu^2 = 9)$$

$$\Rightarrow (\mu = \pm \sqrt{9 - \lambda^2})$$

Le point P a pour coordonnées λ et $\pm\sqrt{9-\lambda^2}$ et celles de son symétrique P' sont λ et $-\sqrt{9-\lambda^2}$.

La génératrice g_2 perpendiculaire à $t \equiv g_1$ a pour équation : $x = -\lambda$.

La génératrice g_1 passe par P et est perpendiculaire à OP. Son équation est :

$$y - \sqrt{9-\lambda^2} = \frac{-\lambda}{\sqrt{9-\lambda^2}}(x - \lambda).$$

En éliminant le paramètre λ entre les deux équations des génératrices, nous obtenons : $x^4 + 18x^2 + 81 - 9y^2 + x^2y^2 = 0$. C'est l'équation du lieu.

Exercices

N° 604. Par le point P(2, -2), on trace une sécante variable qui rencontre Ox en A et Oy en B. On joint A à C, milieu de OP et par le point D où AC rencontre Oy, on mène une parallèle à OP qui rencontre AB en M. Trouve le lieu des points M.

N° 605. On donne deux points A(2, 0) et B(-2, 0).
Sur l'axe des y se déplacent deux points C et D tels que $\overline{OD} = \frac{3}{4}\overline{OC}$.
Ecris l'équation du lieu du point d'intersection de AC et BD.

N° 606. On considère la droite d d'équation $y = 2x$ et une droite d' variable de coefficient angulaire -3. La droite d' coupe Ox en A et d en B.
En A, on élève la perpendiculaire à Ox et en B la perpendiculaire à d.
Détermine le lieu des droites de rencontre de ces perpendiculaires.

N° 607. Dans un repère orthonormé du plan, on considère le point fixe A(a, 0) et la droite d d'équation $x - 2y = 0$. Un cercle variable C passe par O et A et coupe la droite d en M et l'axe Oy en N. On désigne par t l'ordonnée variable du centre du cercle C.

- Calcule en fonction de t les coordonnées des points M et N, puis celles du milieu I du segment [MN].
- Détermine le lieu du point I lorsque I varie.

N° 608. On donne le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.
Sur ce cercle, on considère le point A d'abscisse 6. Une droite passant par A rencontre le cercle donné en un deuxième point B. Le lieu des points M milieu de segment [AB] est un cercle dont le centre a pour coordonnées (a, b).
Calcule $a^2 - b^2$.

N° 609. On donne deux points A et B et un cercle C variable passant par ces points. On trace en A la tangente à C et en B une parallèle à cette tangente.
a) Trouve le lieu du deuxième point de rencontre de cette parallèle avec le cercle.
b) Trouve parmi les cercles passant par A et B un cercle tangent à ce lieu.

- N° 610. Deux points A et B glissent sur une droite d fixe en gardant une distance invariable $AB = 1$. Soit C un point fixe extérieur à d. la perpendiculaire élevée en C sur la droite CB rencontre le cercle de centre A et de rayon AC en M. Trouve le lieu de M.
- N° 611. On donne la parabole $P \equiv y = (x + 1)^2$. Détermine le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.
- N° 612. Soit un point C parcourant le cercle fixe C passant par les points fixes A et B. Détermine le lieu géométrique :
 a) des centres de gravité des triangles ABC
 b) des orthocentres des triangles ABC
 c) des centres des cercles inscrits aux triangles ABC.
- N° 613. On considère deux droites sécantes d et d', une direction δ , un point A de d et un point B de d'. Une droite s de direction δ coupe d en A' et d' en B ; les droites AB' et A'B se coupent en P. Détermine le lieu géométrique de P lorsque s parcourt le faisceau des droites de direction δ .
- N° 614. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
 a) Trace le graphique de f.
 b) Détermine le lieu géométrique des milieux des segments découpés par le graphique de f et l'axe Ox sur les droites parallèles à Oy.
- N° 615. Soit un triangle ABC et une parallèle d à la base BC, coupant AB en D et AC en E. cette parallèle d se déplace entre la base et le sommet. Détermine le lieu des points M de l'intersection de [BE] et [DC]. (Choisir un repère quelconque).
 Etudie le lieu dans le cas où la droite d n'est pas limitée entre la base et le sommet et que l'on considère les droites AB, BC et AC.
- N° 616. Soit deux cercles C_1 et C_2 :
 C_1 est tel que les coordonnées de son centre A sont (2 , 2) et son rayon R_1 est variable.
 C_2 est tel que les coordonnées de son centre B sont (-6 , 2) et son rayon R_2 est variable. $R_1 + R_2 = 10$.
 a) Détermine le lieu des points d'intersection de ces deux cercles
 b) Etablis l'équation de la tangente en un point M de ce lieu, d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.
 c) Montre que cette tangente forme respectivement avec les segments [AB] et [BM] deux angles de même amplitude.

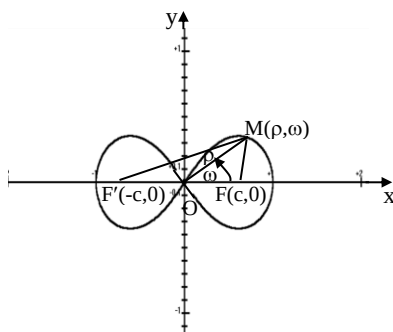
N° 617. On donne le cercle C de centre (0, 0) et de rayon 4. D'un point M variable sur C et d'abscisse positive, on trace MP perpendiculaire à Oy (P ∈ Oy). Sur le segment OM, on porte le point I tel que |OI| = |PM|. Quelle est l'équation du lieu du point I ?

IX.2.3. LIEUX GEOMETRIQUES EN COORDONNEES POLAIRES

ER 257.1. Détermine le lieu des points dont le produit des distances à deux points donnés F et F' est égal au carré de la demi - distance de ces points

Résolution

Choisissons O le pôle, OF l'axe polaire.



Soit $M(\rho, \omega)$ un point du lieu :

$$\begin{aligned} |PF| \cdot |PF'| &= c^2 \\ \sqrt{\rho^2 + c^2 + 2\rho c \cos \omega} \cdot \sqrt{\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \omega} &= c^2 \\ \sqrt{(\rho^2 + c^2 + 2\rho c \cos \omega)(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \omega)} &= c^2 \\ (\rho^2 + c^2)^2 - 4\rho^2 c^2 \cos^2 \omega &= c^4 \\ \rho^2(\rho^2 + 2c^2 - 4c^2 \cos^2 \omega) &= 0 \\ \rho^2 &= -2c^2 + 4c^2 \cos^2 \omega \\ \rho^2 &= -2c^2(1 - 2\cos^2 \omega) \\ \rho^2 &= 2c^2 \cos 2\omega. \end{aligned}$$

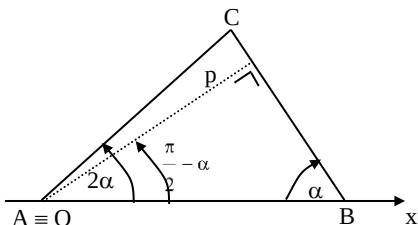
L'équation ainsi obtenue est celle d'une courbe appelée Lemniscate de Bernoulli.

ER 258.2. Trouve le lieu du sommet C d'un triangle dont la base AB est fixe et dont

l'angle A vaut deux fois l'angle B.

Résolution

Choisissons le sommet A comme pôle et $AB \equiv Ox$ pour axe polaire.



Soit α la mesure de l'angle B ; 2α est la mesure de l'angle A.

Désignons par g_1 et g_2 les génératrices du point C :

$g_1 \equiv AC : \omega = 2\alpha$; $p = AB \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha$

$g_2 \equiv BC : \rho = \frac{l \sin \alpha}{\cos \left[\omega - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}$

ou $\rho = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)}$

Éliminons le paramètre α entre les deux génératrices, nous avons :

De $g_1 \equiv AC$; $\alpha = \frac{\omega}{2}$

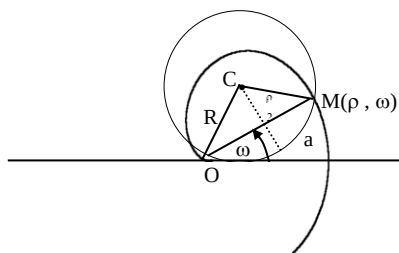
Cette valeur de α dans g_2 , nous donne $\rho = \frac{l \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\sin(\omega + \frac{\omega}{2})}$ ou $\rho = \frac{1}{1 + 2 \cos \omega}$.

ER 259.3. On donne un cercle C variable tangent en O à l'axe Ox fixe. Sur le cercle, on

porte l'arc $\widehat{OM} = a$ (a une constante). Le lieu géométrique du point M est la

courbe appelée « Cochléoïde »

Résolution



En considérant le triangle OCM , nous avons : $\frac{\rho}{2} = R \cdot \sin \omega$ et comme :

$$(\widehat{OM} = a = 2\omega R) \Leftrightarrow \left(R = \frac{a}{2\omega}\right),$$

l'équation du lieu est $\rho = \frac{2a \cdot \sin \omega}{2\omega} = \frac{a \cdot \sin \omega}{\omega}$

ER 260.4. On donne en coordonnées polaires les points $A(1, 0)$ et $B(1, \pi)$.

Détermine le lieu des points $P(\rho, \omega)$ dont le produit des distances à A et à

B

vaut 1.

Résolution

Soit $P(\rho, \omega)$ un point du lieu

$$(|PA| \cdot |PB| = 1) \Leftrightarrow (\sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega} \cdot \sqrt{\rho^2 + 1 + 2\rho \cos \omega} = 1)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega)(\rho^2 + 1 + 2\rho \cos \omega)} = 1]$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\rho^4 + 2\rho^2 - 4\rho^2 \cos^2 \omega} = 0)$$

$$\Leftrightarrow [\rho^2(\rho^2 + 2 - 4 \cos^2 \omega) = 0]$$

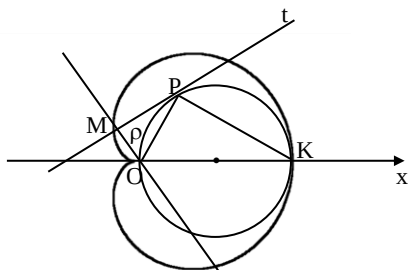
$$\Leftrightarrow (\rho^2 = 4 \cos^2 \omega - 2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\rho^2 = 4 \left(\frac{1 + \cos 2\omega}{2}\right) - 2\right]$$

$$\Leftrightarrow (\rho^2 = 2 \cos 2\omega)$$

ER 261.5. On considère un cercle et un point O sur ce cercle. Le lieu géométrique des

projections M de O sur les tangentes au cercle est une courbe appelée « cardioïde. »



Choisissons O comme pôle et le diamètre OK (de longueur $2a$) de cercle passant par O comme axe polaire. Les triangles rectangles OMR et OKP sont semblables puisque les angles P et K de chacun de ces triangles sont égaux (angles inscrit et tangentiel interceptant le même arc).

Si nous désignons par α la mesure commune des angles P et K, nous avons :

$$|OM| = |OP| \cdot \sin \alpha \quad \text{et} \quad |OP| = |OK| \cdot \sin \alpha.$$

Ce qui nous conduit à :

$$|OM| = |OK| \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\rho = 2a \cdot \sin^2 \alpha \quad \text{or} \quad \text{si } \theta = 180^\circ - 2\alpha, \rho = a(1 + \cos \theta).$$

ER 262.6. Soit un cercle de diamètre [OB]. Par B, on trace la tangente t au cercle et par O,

une sécante variable qui coupe le cercle en un second point P et la tangente au

point K. Le lieu géométrique des points M tels que $|OM| = |PK|$ est une

courbe appelée « Cissoïde » de Dioclès.

Résolution

Considérons O pôle et la demi-droite [OB] comme axe polaire.

Désignons par a la longueur du diamètre [OB].

$$|OM| = \rho.$$

Du triangle rectangle BPK, nous avons :

$$|PK| = |KB| \cdot \sin \omega \quad (i)$$

et du triangle rectangle OBK, nous avons :

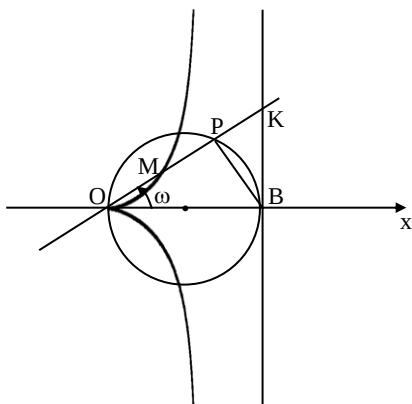
$$|KB| = |OB| \cdot \tan \omega \quad (ii)$$

De (i) et (ii) :

$$(|PK| = |OB| \cdot \sin \omega \cdot \tan \omega)$$

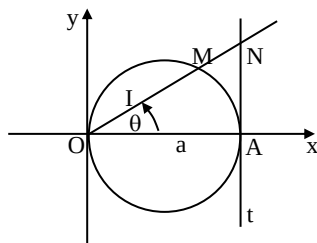
$$\Leftrightarrow (|OM| = a \cdot \sin \omega \cdot \frac{\sin \omega}{\cos \omega})$$

$$\Leftrightarrow \left(\rho = a \cdot \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega} \right)$$



IX.3. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

- N° 618. Un point $P(x, y)$ se déplace de telle sorte que le produit des pentes des deux droites reliant P aux deux points $(-2, 1)$ et $(6, 5)$ est égal à -4 . Détermine l'équation du lieu. Rép. : $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$
- N° 619. Un point $P(x, y)$ se déplace de telle sorte que la somme des distances de ce dernier aux axes de coordonnées est égale au carré de sa distance à l'origine. Trouve l'équation du lieu. Rép. : $x^2 + y^2 - x - y = 0$.
- N° 620. Un segment de droite de longueur 12 unités se déplace de sorte que ses extrémités décrivent les axes de coordonnées. Trouve l'équation du lieu de son milieu. Rép. : $x^2 + y^2 = 36$
- N° 621. Un point variable se déplace de telle sorte que les produits de ses distances aux droites $3x - 4y + 1 = 0$ et $3x + 4y - 7 = 0$ soit égale à $\frac{144}{25}$. Détermine l'équation du lieu.
Rép.: $x^2 - 80y^2 + 160y - 90x - 720 = 0$
- N° 622. On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$. Du point $(1, 2)$, on trace une sécante variable au cercle. Détermine le centre du cercle, lieu du pied de la perpendiculaire à la sécante menée du centre du cercle donné. Rép. : $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$
- N° 623. On donne le cercle de diamètre OA et la tangente t en A . On porte sur une sécante variable OMN la distance $OI = MN$. Détermine le lieu des points $I(\rho, \theta)$. Rép. : $\rho = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$



N° 625. On donne le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Sur ce cercle, on considère le point A, d'abscisse 6. Une droite passant par A rencontre le cercle donné en un deuxième point B. Le lieu géométrique du point M, milieu du segment [AB] est un cercle. Détermine le rayon de ce lieu. Rép. : 2.

N° 626. On considère un cercle de centre O' de rayon 2 et un carré circonscrit ABCD. Trouve le lieu du point M tel que l'angle AMC soit égal à l'angle des tangentes menées de M au cercle. (Deux possibilités).

Rép. : $x^2 + y^2 - 8 = 0$ et $xy = -2$

N° 627. Détermine le lieu des centres des cercles de puissance 9 donnée par rapport à un point fixe P(0, 5) et orthogonaux au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$. Rép. : $y = 2$ (parallèle à Ox).

N° 628. On donne deux points A(-3, 0) et B(3, 0) et un cercle (C) variable passant par ces points. on trace en A la tangente à (C) et en B une parallèle à cette tangente. Trouve

a) le lieu du deuxième point de rencontre de cette parallèle avec le cercle.

b) parmi les cercles passant par A et B un cercle tangent à celui-ci.

Rép. : a) $x^2 + y^2 + 6x - 27 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

N° 629. Trouve le lieu du centre du cercle inscrit dans un secteur circulaire OAB, le rayon OA étant fixe et OB tournant autour du centre. Rép. : $\rho = \frac{R}{1 + \sin \omega}$

N° 630. On donne un cercle centré à l'origine et de rayon 4 et un point A(2, 0).

Détermine le lieu du point de rencontre de AM (M étant un point variable sur le cercle) et de la perpendiculaire menée par O à OM

Rép. : $\rho = \frac{8 \cos \omega}{4 + 2 \sin \omega}$

N° 631. Soit la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 1$. Détermine le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes. Rép. : $y = 2x^2 + 2x$.

N° 632. Trouve la nature du lieu géométrique des bissectrices de l'angle formé par les droites d'équations $2\lambda y - x + 2 = 0$ et $y - 2\lambda x + 2 = 0$ dans un système d'axes d'angle $\theta = 30^\circ$. Déterminer la nature de ce lieu.

Rép. : $x^2 - y^2 - 2y - 2x = 0$ représente deux droites perpendiculaires

- N° 633. Le lieu des points dont le rapport des distances r à un point fixe et r' à une droite fixe $r/r' = 2$ est :
1. une ellipse 3. un cercle 5. une droite
 2. une parabole 4. une hyperbole
- N° 634. On donne le cercle de centre O et de rayon 2 et le point $A(4 ; 0)$. Le lieu du point P telle que la distance PA soit égale à la longueur d'une tangente au cercle issue de P et limitée au point de contact, a pour équation :
1. $2x - 5 = 0$ 3. $2x - 3 = 0$ 5. $2x + 3 = 0$
 2. $2x + 5 = 0$ 4. $x - 3 = 0$
- N° 635. On donne le point $I(3 ; 0)$ et on considère le cercle C de centre I et de rayon 7. Le lieu des milieux des cordes issues de l'origine O des axes et interceptées par C , a pour équation :
1. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 3. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ 5. $x^2 + y^2 + 3x = 0$
 2. $x^2 + y^2 - 3/2 x = 0$ 4. $x^2 + y^2 + 6x = 0$
- N° 636. Soient les points $A(3 ; 0)$ et $B(0 ; 2)$. On choisit sur Ox un point quelconque P et sur Oy , un point Q tel que $\overline{AP} = 2 \overline{BQ}$. Lorsque P décrit l'axe Ox , le lieu du milieu de $\overline{PQ}$ est la droite d'équation :
1. $2y - 4x + 1 = 0$ 3. $3x + 2y - 6 = 0$ 5. $2x - 4y + 1 = 0$
 2. $y - x = 0$ 4. $2y - x - 2 = 0$
- N° 637. Une droite variable, parallèle à la droite d'équation $4y - 3x - 5 = 0$, rencontre les axes de coordonnées aux points A et B . Le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle OAB , où O est l'origine des axes de coordonnées passe par le point de coordonnées :
1. $(6 ; -8)$ 2. $(6 ; -4)$ 3. $(6 ; -9/2)$ 4. $(9/2 ; 6)$ 5. $(6 ; 9/2)$
- N° 638. Par le point $P(3 ; -1)$ passe une droite variable qui rencontre Ox en A et Oy (y négatif) en B . On trace OP , par C , le milieu de OP , on trace BC ; BC rencontre Ox en D . Par D on trace la perpendiculaire à OP qui rencontre AB en M . Le lieu de M est :
1. $x^2 + y^2 - 17xy - 3x + 30y = 0$ 4. $X^2 - y^2 - 14y - 36 = 0$
 2. $6y^2 - 17xy + 3x^2 + 30y = 0$ 5. $X + y^2 + 2xy - 36 = 0$
 3. $x^2 + y^2 - 10y - 36 = 0$
- N° 639. On considère les points $P(1 ; 2)$ et $Q(3 ; -2)$. On les relie au point M situé sur l'axe Ox . De l'origine O , on trace la perpendiculaire à PM . Le lieu du point d'intersection de cette perpendiculaire avec QM est :
1. $3x^2 + y^2 + 2xy - x = 0$ 4. $x^2 + xy - y^2 - x - 2y = 0$

$$2. x^2 + 3y^2 + xy - 3x + 2y = 0$$

$$5. x^2 + y^2 + 3xy - 2y - y = 0$$

$$3. x^2 + y^2 - 2xy + 3y = 0$$

N° 640.

La conique

d'équation $(\lambda y + x - 1)(2\lambda y - 5x) + 1 = 0$ rencontre la polaire de l'origine par rapport à la conique au point P. L'équation du lieu de P égale :

$$1. 7x - 1 = 0$$

$$2. x - 7 = 0$$

$$3. x + 7 = 0$$

$$4. 7x + 1 = 0$$

$$5. 5x + 1 = 0$$

N° 641.

Le lieu des points (x, y) se déplaçant de telle sorte que la somme des carrés des distances aux points $(-2, 3)$ et $(0, -5)$ est égale 42, représente :

1. une équation globale de deux droites parallèles

2. une ellipse de centre $(-1, -1)$ et de petit axe 2

3. un cercle de centre $(-1, -1)$ et de rayon 2

4. un cercle imaginaire

5. un cercle réduit en un point

N° 642.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne deux points

fixes P(1,2) et Q(3,-2), on les relie au point M variable sur l'axe des abscisses. De l'origine des axes des coordonnées, on trace la

perpendiculaire (p) à la droite passant par les points P et M. On note (C) le lieu géométrique du point d'intersection de cette perpendiculaire à la droite passant par les points Q et M. L'équation de (C) est :

$$1. 3y^2 + x^2 + 4xy - 6y - 3x = 0$$

$$4. y^2 - x^2 - xy + 2y + x = 0$$

$$2. y^2 + x^2 - xy - 2y - x = 0$$

$$5. 3y^2 + x^2 - 2y - 6x = 0$$

$$3. y^2 + 3x^2 - xy - 6y - 3x = 0$$

N° 643.

Le lieu des points dont la différence des distances à A(0,5) et B(0,-5) vaut 6 est une l'hyperbole d'équation :

$$1. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$2. \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$3. \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$4. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$5. \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

N° 644.

Un point P(x, y) se déplace de telle sorte que sa distance au point Q(2, 3) est toujours égale à sa distance à l'axe Oy. L'équation du lieu est :

$$1. y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$$

$$2. y^2 - 8y - 4x + 13 = 0$$

$$3. y^2 - 4y - 8x + 13 = 0$$

$$4. y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$$

$$5. y^2 + x^2 - 4y - 6x + 12 = 0$$

CHAPITRE X : ELEMENTS D'ETUDE D'UNE CONIQUE

A. OBJECTIFS

1. Définir les différents éléments d'étude : centre, tangente et normale, podaire, cercle de Monge, polaire et pôle,... d'une conique ;
2. Etablir selon le cas les équations ou les coordonnées de chacun des éléments définis ;
3. Dégager les propriétés des tangentes, normales, pôle et polaire, asymptote, axes, sommets et diamètres ;
4. Effectuer la réduction de l'équation générale d'une conique
5. Ecrire les équations des coniques satisfaisant aux conditions relatives aux différents éléments étudiés ;
6. Etablir à travers les propriétés les liens existant entre les différents éléments géométriques d'une conique.
7. Déterminer par la méthode analytique ou la méthode synthétique l'équation d'une conique à partir de certaines conditions données.

B. ACTIVITES

1. Etablis l'équation de la tangente (t) et de la perpendiculaire à la courbe $y = \ln x$ au point d'abscisse $x_0 = e$
2. Trouve la valeur à attribuer à la variable a pour que la droite d'équation $12y - 5x + 6 = 0$ soit tangente à la parabole $y^2 - 5x + a = 0$.
3. L'enseignante Modestine Bakamba donne une interrogation de récupération de géométrie analytique où elle demande aux élèves de déterminer le lieu du point P tel que les polaires au cercle $y^2 + x^2 - 4x = 0$ et à la parabole $y^2 = 6x$ soient concourantes avec la droite d'équation $y + x + 3 = 0$
4. Le professeur Yaba de la 4^{ème} année des humanités scientifiques veut évaluer les connaissances de ses élèves en géométrie, pour cela il leur donne la courbe d'équation $y^2 - 2(a + 2)x + 5ay + 9 = 0$ et leur demande :
 - a) Les points communs de ces droites ;
 - b) Le lieu du pôle de la droite passant par ces points communs par rapport aux mêmes courbes.
5. Soit f la fonction forme implicite $-x^2 - xy + 4x + y = 0$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé :
 - a) Ecris f sous forme explicite ;

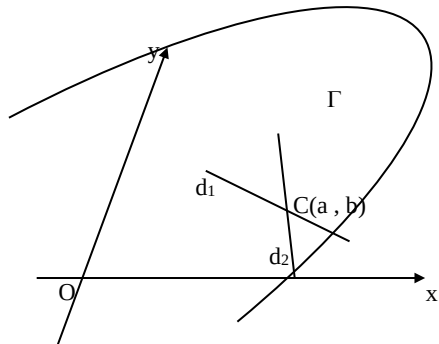
- b) Montre que la droite $x = 1$ et la droite $y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbe C_f
- c) Etudie la position relative de C_f et la droite d'équation $y = -x + 3$
6. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{2x^2+2}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c des réels. On note (C) sa courbe représentative. Détermine a, b et c pour que (C) admette les asymptotes d'équations $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$ et $y = \frac{2}{3}$
7. En vue de préparer la séquence didactique de la prochaine leçon de mathématique, l'enseignant Samwel donne à ses élèves un travail de recherche. Il leur demande de trouver l'équation de l'hyperbole passant par l'origine des axes et dont les asymptotes sont $y = 2x + 3$ et $3y - x + 1 = 0$
8. Au musée national, le visiteur Ndju Serge admire une œuvre d'art d'artiste congolais, il veut la reproduction de cette œuvre dans sa parcelle.
La pause de cette œuvre nécessite les calculs des foyers et des directrices de la conique définie par l'équation : $2x^2 - 12xy + 6x - 36y - 63 = 0$. Détermine pour lui les foyers et les directrices de cette conique.
9. Etablis l'équation de la tangente (t) et de la perpendiculaire à la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = \frac{2t^2+2t+3}{t^2-1} \end{cases}$ au point $t = 2$.

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

X.1. CENTRE D'UNE CONIQUE

X.1.1. DEFINITION

Le centre d'une conique Γ est un point du plan qui divise en deux parties égales toute corde de Γ le comprenant.



X.1.2. RECHERCHE

Soit Γ la conique d'équation $f(x, y) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$. Pour déterminer le centre $C(a, b)$, on effectue une translation d'axes telle que le centre devienne la nouvelle origine des axes.

Ainsi, l'équation $f(x, y) = 0$ de Γ rapportée au centre $C(a, b)$ est :

$$f(x + a, y + b) \equiv A(y+b)^2 + 2B(x+a)(y+b) + C(x+a)^2 + 2D(y+b) + 2E(x+a) + F = 0$$

$$\text{ou } f(x + a, y + b) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + yf'_b + xf'_a + f(a, b) = 0.$$

La translation ainsi effectuée fait disparaître des termes du premier degré et modifie le terme indépendant F en $f(a, b)$.

Ce qui implique : $f'_a \equiv Ab + Ba + D = 0$ et $f'_b \equiv Bb + Ca + E = 0$.

Ces égalités montrent que les coordonnées a et b du centre C vérifient les équations $f'_x \equiv Ay + Bx + D = 0$ et $f'_y \equiv By + Cx + E = 0$

$$\text{D'où le centre est solution du système : } \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} By + Cx + E = 0 \\ Ay + Bx + D = 0 \end{cases}$$

On résout le système en calculant le déterminant principal

$$\sigma = \begin{vmatrix} B & C \\ A & B \end{vmatrix} = B^2 - AC.$$

– Si $\sigma \neq 0$, le système est de Cramer et admet une solution unique. C'est le centre de la conique. La conique est dite centrée ; elle est soit une ellipse soit une hyperbole. Les coordonnées du centre sont donc :

$$x = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \quad \text{et} \quad y = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}$$

– Si $\sigma = 0$, le système est soit impossible soit indéterminé.

* il est impossible si les deux droites du centre sont parallèles distinctes. Dans ce cas la conique est une parabole proprement dite. Elle n'a pas de centre ou on dit que son centre est rejeté à l'infini

* il est indéterminé si les deux droites du centre sont confondues. Dans ce cas la conique est une parabole dégénérée en deux droites parallèles. Elle admet une infinité des centres situés sur la parallèle médiane de deux droites parallèles.

Remarques

– Les droites d'équation $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$ sont appelées droites du centre.

– Pour que le centre $C(a, b)$ soit confondu avec l'origine $(0, 0)$ des axes, il faut et il suffit que le système : $\begin{cases} By + Cx = -E \\ Ay + Bx = -D \end{cases}$ soit homogène c'est-à-dire $D=E=0$

X.1.2. LIEU DES CENTRES D'UNE CONIQUE

Soit la conique Γ d'équations paramétriques $f(x, y, \lambda) = 0$.

Le lieu géométrique des centres de ces coniques est l'ensemble des points obtenus en éliminant le paramètre λ entre les équations des droites du centre.

Exercices résolus

ER 263.1. Détermine le centre de chacune des coniques d'équation :

a) $3y^2 + 2xy + x^2 + 3y + 4x - 1 = 0$ c) $9y^2 + 12xy + 4x^2 - 6y - 4x - 9 = 0$

b) $y^2 - 4xy + 2x^2 + 6y - 4x + 2 = 0$

Résolution

a) Nous avons $\partial = -2 < 0$, la conique est une ellipse.

Le centre est solution du système :
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2x + 4 = 0 \\ 6y + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

D'où le centre $C\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$

b) Nous avons $\partial = 2 > 0$, la conique est une hyperbole.

Son centre a pour coordonnées : $x = 2$ et $y = 1$.

c) Nous avons $\partial = 0$; $p = D^2 - AF = 90$ et la conique est une parabole dégénérée en deux droites parallèles : $d_1 \equiv 3y + 2x - (1 + \sqrt{10}) = 0$ et $d_2 \equiv 3y + 2x + (1 + \sqrt{10}) = 0$

Les droites du centre $f'_x = 3y + 2x - 1 = 0$, $f'_y = 3y + 2x - 1 = 0$ sont confondues. La parabole admet une infinité des centres situés sur la droite $3y + 2x - 1 = 0$, parallèle médiane aux droites d_1 et d_2 .

ER 264.2. Soit la famille des courbes d'équations $x^2 - \lambda xy - y^2 - x + y - 6 = 0$.

Détermine le lieu géométrique des centres de cette famille des courbes.

Résolution

Soit le système
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda y - 1 = 0(i) \\ -\lambda x - 2y + 1 = 0(ii) \end{cases}$$

De (i), tirons : $\lambda = \frac{2x-1}{y}$ (iii)

En portant (iii) dans (ii), nous avons :

$$\left[-\left(\frac{2x-1}{y}\right)x - 2y + 1 = 0 \right] \Leftrightarrow (2y^2 + 2x^2 - y - x = 0)$$

Le lieu est un cercle de centre $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Pour quelle valeur de k le centre de la conique d'équation

$y^2 - 3kxy + 2k^2x^2 + 4y - 7kx - 4 = 0$ est-il situé sur la droite $d \equiv 3y - 10x + 5 = 0$?

Résolution

Le centre de la conique est situé à la fois sur la droite d et sur les droites du centre : $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$. Il est ainsi solution du système :

$$\begin{cases} 2y - 3kx + 4 = 0 \\ 3ky - 4k^2x + 7k = 0 \\ 3y - 10x + 5 = 0 \end{cases}$$

D'où : $\begin{vmatrix} 2 & 3k & 4 \\ 3k & 4k^2 & 7k \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (avec $\begin{vmatrix} 2 & 3k \\ 3k & 4k^2 \end{vmatrix} \neq 0$) donne $k = 2$. $k = 0$ est rejetée.

Exercices

N° 645. Détermine le centre de chacune des coniques suivantes :

a) $2x^2 - 2xy + 4y^2 + 6x + 10y + 1 = 0$ b) $2x^2 + 5xy + y^2 + 3x - 5y + 7 = 0$

N° 646. Détermine les réels a et b pour que la conique Γ ait son centre au point P

a) $\Gamma \equiv y^2 - (a + 3)xy + 3ax^2 + (b + 3)y - (ab + 9)x + 3b - 5 = 0$; $P(-1, -1)$

b) $\Gamma \equiv x^2 + (a + 1)xy - y^2 + 2bx - (b + 3)y + a - b = 0$; $P(0, -1)$

c) $\Gamma \equiv y^2 - (3b + 4)xy + ax^2 - x + (a + b)y + 3 = 0$; $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

N° 647. Soit la conique $\Gamma \equiv y^2 - 3\lambda xy + 2\lambda x^2 + 4y - 7\lambda x - 4 = 0$.

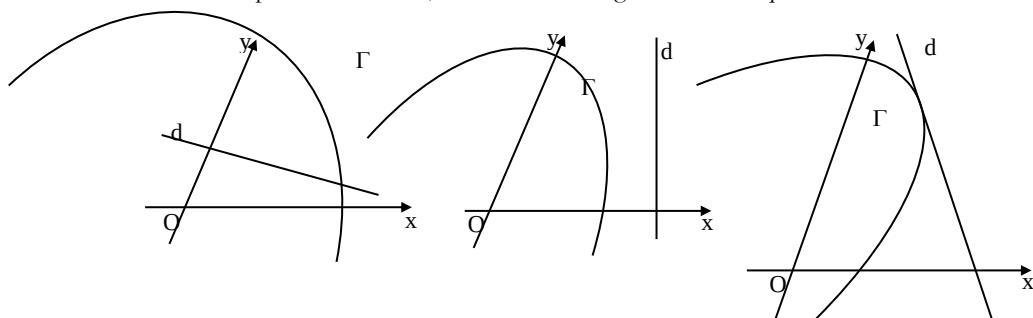
Détermine la valeur de λ pour que le centre de la conique soit situé sur la droite d'équation $y - x + 1 = 0$.

N° 648. Soit famille des coniques Γ d'équation $3y^2 - kxy + x^2 - 5x + 3 = 0$.
0. ($k \in \mathbf{R}$) Détermine le lieu des centres et sa nature.

N° 649. Soit le triangle formé par les droites $a \equiv 2y - 3x = 0$, $b \equiv 2y + 3x$ et $c \equiv 9x + 2y - 24 = 0$. Détermine le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

X.2. TANGENTES ET NORMALES

La théorie sur l'intersection d'une droite et d'une courbe nous permet de distinguer trois cas : la droite peut être sécante, extérieure ou tangente à la conique.



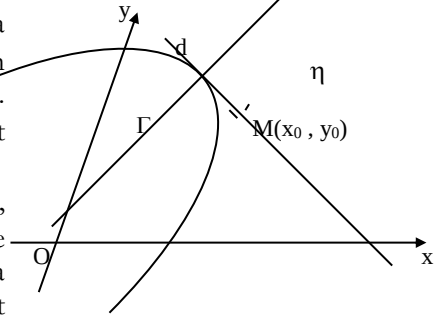
Cette dernière position de la droite à une conique fait l'objet d'étude dans ce paragraphe.

X.2.1. DEFINITIONS

Soit une conique d'équation $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ et d une droite donnée.

- a) La droite d est une tangente à la conique Γ si elle rencontre celle-ci en deux points réels identiques. Ce point de rencontre de d et Γ est appelé point de contact.

- b) On appelle normale à la conique Γ , toute droite η passant par le point de contact et perpendiculaire à la tangente en ce point. Dans ce cas le point est aussi appelé *pied de la normale* ou *point d'incidence*.



X.2.2. RECHERCHE DES EQUATIONS

c. Tangente et normale en un point $M(x_0, y_0)$ de Γ

Soit la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$

- L'équation de la tangente à Γ au point M est de la forme: $y - y_0 = m(x - x_0)$

où m s'obtient à partir du système :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0(i) \\ y - y_0 = m(x - x_0)(ii) \end{cases}$$

En effet, en portant l'égalité (ii) dans (i), on obtient une équation aux abscisses ou aux ordonnées dont le discriminant Δ dépend de m . La valeur de m trouvée en posant la condition de tangence $\Delta = 0$ est le coefficient angulaire de la tangente.

- L'équation de la normale à Γ au point M est de la forme $y - y_0 = m'(x - x_0)$

où m' est tiré de la relation de perpendicularité : $1 + mm' + (m + m') \cos \theta = 0$.

Remarques

- Si l'équation de la conique et les coordonnées du point sont données en coordonnées cartésiennes ordinaires alors :

- * l'équation de la tangente à Γ au point M est :

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0) \quad \text{avec} \quad m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$$

- * l'équation de la normale à Γ au point M est :

$$y - y_0 = \frac{f'_{y_0} - f'_{x_0} \cos \theta}{f'_{x_0} - f'_{y_0} \cos \theta}(x - x_0) \quad \text{avec} \quad m' = \frac{f'_{y_0} - f'_{x_0} \cos \theta}{f'_{x_0} - f'_{y_0} \cos \theta}$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad y - y_0 = \frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}}(x - x_0) \quad .$$

- Si l'équation de la conique et les coordonnées du point sont données en coordonnées homogènes alors l'équation de la tangente en $M(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0 \quad \text{ou} \quad x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 0$$

Exercices résolus

ER 265.1. Détermine l'équation de la tangente et de la normale à la conique d'équation

$$y^2 - 6xy + 9x^2 + 3x = 0 \text{ au point } \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \text{ dans un système d'axes rectangulaires.}$$

Résolution

Nous pouvons vérifier que le point donné appartient à la conique.

L'équation de la tangente est de la forme : $y = m(x + \frac{1}{3})$.

Formons le système
$$\begin{cases} y^2 - 6xy + 9x^2 + 3x = 0 & (i) \\ y = m(x + \frac{1}{3}) & (ii) \end{cases}$$

En portant (ii) dans (i), nous avons l'équation aux abscisses :

$$[m^2(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - 6m(x + \frac{1}{3})x + 9x^2 + 3x = 0]$$

$$\Leftrightarrow [(m-3)^2x^2 + (\frac{2}{3}m^2 - 2m + 3)x + \frac{1}{9}m^2 = 0] \quad \text{avec : } \Delta = 4m^2 - 12m + 9$$

$$\text{Par suite, } (\Delta = 0) \Leftrightarrow (m = \frac{3}{2})$$

$$\text{– La tangente est d'équation : } y = \frac{3}{2}(x + \frac{1}{3}) \text{ ou } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2};$$

le coefficient angulaire de la normale est $-\frac{2}{3}$.

$$\text{– La normale a pour équation : } y = -\frac{2}{3}(x + \frac{1}{3}) \text{ ou } y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

ER 266.2. Quelle est l'équation de la tangente à la conique Γ d'équation

$$x^2 - 4xy - y^2 - x + y - 6 = 0 \text{ au point } M(-1, 1) ? \text{ En déduis-en l'équation de la normale lorsque : } \quad \text{a) } \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{b) } \theta = \frac{\pi}{2}$$

Résolution

$M \in \Gamma$ car ses coordonnées vérifient l'équation de Γ .

$$\text{L'équation de la tangente } t \text{ à } \Gamma \text{ en } M \text{ est : } y - 1 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x + 1) \quad (i)$$

$$f'_x = 2x - 4y - 1 \quad \text{et} \quad f'_{x_0} = -7$$

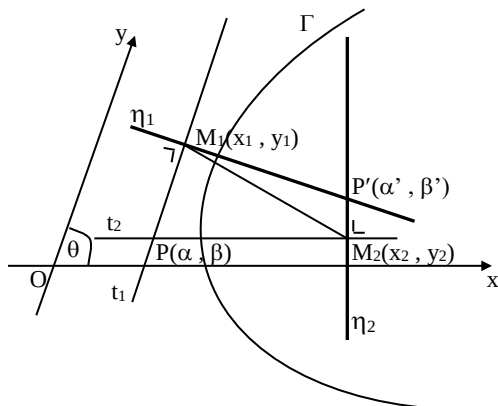
$$f'_y = -4x - 2y + 1 \quad \text{et} \quad f'_{y_0} = 3$$

$$t \equiv y = \frac{7}{3}x + \frac{10}{3} \text{ ou } t \equiv 3y - 7x - 10 = 0. \text{ La normale } \eta \text{ à } \Gamma \text{ en } M \text{ est :}$$

- a) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $y - 1 = \frac{3 - (-7) \cos \frac{\pi}{3}}{-7 - (3) \cos \frac{\pi}{3}} (x + 1)$ ou $y = -\frac{13}{17}x + \frac{4}{17}$
 b) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $y - 1 = -\frac{3}{7} (x + 1)$ ou $y = -\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}$

d. Tangentes et normales issues d'un point extérieur

Soit la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ et $P(\alpha, \beta)$ un point du plan de Γ .



En observant le graphique ci-contre, on note que : t_1 et t_2 sont les tangentes issues de P ; η_1 et η_2 sont les normales issues de P' .

M_1 et M_2 sont les points de contact des tangentes t_1 et t_2 à la conique Γ . La corde joignant M_1 et M_2 est appelée corde de contact ou corde des pieds des normales.

i. Tangentes issues du point $P(\alpha, \beta)$

Les équations des tangentes issues de P à Γ sont de la forme : $y - \beta = m(x - \alpha)$

on s'obtient par le système : $\begin{cases} f(x, y) = 0(i) \\ y - \beta = m(x - \alpha)(ii) \end{cases}$

En effet, en portant (ii) dans (i), on obtient une équation aux abscisses (ou aux ordonnées selon le cas) dont le discriminant Δ dépend de m .

Les valeurs de m trouvées, en posant la condition de tangence $\Delta = 0$, sont les coefficients angulaires des tangentes t_1 et t_2 .

Remarques

- La résolution des équations aux abscisses (ou aux ordonnées) est longue et laborieuse. Mais elle présente un avantage majeur, celui de trouver directement les équations des tangentes.
- L'équation globale ou quadratique des tangentes issues d'un point P extérieur à la conique Γ est :

*) en coordonnées homogènes : $(x f'_x + y f'_y + z f'_z)^2 - 4f(\alpha, \beta, \gamma) \cdot f(x, y, z) = 0$

*) en coordonnées cartésiennes : $(x f'_x + y f'_y)^2 - 4f(\alpha, \beta) \cdot f(x, y) = 0$.

- L'équation de la corde de contact est : $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$

Elle peut être déterminée aussi comme l'équation d'une droite passant par deux points de contact M_1 et M_2

ii. Normales issues du point $P'(\alpha', \beta')$

Soit $M_1(x_1, y_1)$ un point de Γ , on a : $f(x_1, y_1) = 0$ (1)

La normale à Γ au point M_1 est $\frac{y-y_1}{f'_{y_1}-f'_{x_1}\cos\theta} = \frac{x-x_1}{f'_{x_1}-f'_{y_1}\cos\theta}$.

Comme cette normale passe par le point $P'(\alpha', \beta')$, on a :

$$\frac{\beta'-y_1}{f'_{y_1}-f'_{x_1}\cos\theta} = \frac{\alpha'-x_1}{f'_{x_1}-f'_{y_1}\cos\theta} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que les coordonnées de M_1 vérifient les équations $f(x, y) = 0$ et $\frac{y-\beta'}{f'_y-f'_x\cos\theta} = \frac{x-\alpha'}{f'_x-f'_y\cos\theta}$. Cette dernière relation est celle d'une conique appelée

Hyperbole équilatère d'Apollonius.

Ainsi pour déterminer les normales issues d'un point $P'(\alpha', \beta')$ à la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$, on cherche les pieds de ces normales à partir du système :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{y-\beta'}{f'_y-f'_x\cos\theta} = \frac{x-\alpha'}{f'_x-f'_y\cos\theta} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{y-\beta'}{f'_y} = \frac{x-\alpha'}{f'_x} \end{cases} \quad (\text{si } \theta = \frac{\pi}{2})$$

Les équations des normales issues de $P'(\alpha', \beta')$ sont donc les équations des droites passant par les pieds des normales et le point $P'(\alpha', \beta')$.

Exercices résolus

ER 267.1. Détermine les équations des tangentes à la parabole d'équation $y^2 = 2x$, issues du point $P(-1, \frac{1}{2})$.

Résolution

Nous pouvons vérifier que P n'appartient pas à la parabole.

Les équations des tangentes issues de P sont de la forme :

$$y - \frac{1}{2} = m(x + 1) \quad \text{ou} \quad y = m(x + 1) + \frac{1}{2}.$$

Formons le système : $\begin{cases} y^2 - 2x = 0(i) \\ y = m(x + 1) + \frac{1}{2}(ii) \end{cases}$

En portant l'égalité (ii) dans (i), nous avons :

$$[m^2x^2 + (2m^2 + m - 2)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0] \quad \text{Avec } \Delta = -8m^2 - 4m + 4. \text{ La}$$

condition de la tangence étant $\Delta = 0$, nous avons : $(\Delta = 0) \Leftrightarrow (m = -1 \text{ ou } m = \frac{1}{2})$

Les équations des tangentes sont donc : $t_1 \equiv y = -x - \frac{1}{2}$ et $t_2 \equiv y = \frac{1}{2}x + 1$

ER 268.2. Déterminer les points de contact et les équations des tangentes issues du point

$P(2, -1)$ à l'hyperbole d'équation $4x^2 + 2xy + 2x + 2 = 0$

Résolution

Les points de contact étant à l'intersection de la corde de contact et de l'hyperbole donnée, nous les obtenons à partir du système :

$$\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 2xz + 2z^2 = 0 \\ 2f'_x - f'_y + f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 2xy + 2xz + 2z^2 = 0 \\ 2(8x + 2y + 2) + (-1)(2x) + 1(2x + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = -4x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$$

Les points de contact sont $T_1(-1, 2)$ et $T_2(\frac{1}{2}, -4)$.

Ainsi les tangentes sont les droites passant respectivement par les points P et T_1 , et, les points P et T_2 . Leurs équations sont donc : $y + x - 1 = 0$ et $y - 2x + 5 = 0$

ER 269.3. Détermine les équations des normales issues du point P(0, -1) à la conique

d'équation $xy + x + 2 = 0$

Résolution

$$f'_x = y + 1; f'_y = x; \left(H.A \equiv \frac{y+1}{x} = \frac{x}{y+1} \right) \Leftrightarrow (H.A \equiv y^2 - x^2 + 2y + 1 = 0)$$

Formons et résolvons le système :

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 2y + 1 = 0 & (i) \\ xy + x + 2 = 0 & (ii) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y = \frac{-x-2}{x} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(2) dans (1), nous avons l'équation aux abscisses :

$$(x^4 = 4) \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2})$$

Les pieds des normales sont : $N_1(\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$ et $N_2(-\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

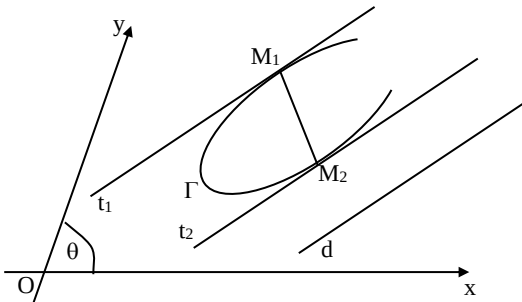
Les normales sont des droites passant respectivement par P et N_1 , P et N_2 ;

leurs équations sont : $y + x + 1 = 0$ et $y + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$.

e. Tangentes et normales parallèles à une direction donnée m

i. Tangentes parallèles à une direction m

Soit la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ et d la droite de direction m.



La tangente parallèle à la direction m a pour équation $y = mx + p$ où m s'obtient par le système :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \dots (i) \\ y = mx + p \dots (ii) \end{cases}$$

En effet, en portant l'égalité (ii) dans (i), on obtient une équation aux abscisses dont le discriminant Δ dépend de p. La valeur de p trouvée, en posant la condition de tangence Δ

$= 0$, permet d'écrire l'équation de la tangente.

Remarques

- Les tangentes parallèles à une direction m sont aussi définies comme tangentes issues du point à l'infini $(1, m, 0)$. Dans ce cas, leur équation globale est :

$$(f'_x + mf'_y)^2 - 4(Am^2 + 2Bm + C) \cdot f(x, y, z) = 0.$$

- La corde de contact des tangentes parallèles à la direction m a pour équation $f'_x + mf'_y = 0$.

Exercices résolus

ER 270.1. Détermine l'équation de la tangente à la conique d'équation

$$2x^2 - y^2 - 2xy + x + y + 1 = 0 \text{ et parallèle à la droite } d \equiv 2y - x + 1 = 0.$$

Résolution

Le coefficient angulaire de d est $m = \frac{1}{2}$ et la tangente t parallèle à d a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + p$ (i)

Formons et résolvons le système :
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2xy + x + y + 1 = 0(ii) \\ y = \frac{1}{2}x + p(iii) \end{cases}$$

(iii) dans (ii) donne : $\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{3}{2} - 3p\right)x - p^2 + p + 1 = 0$ et $\Delta = 12p^2 - 12p - \frac{3}{4}$.
 t étant tangente à la conique, $\Delta = 0$.

Ainsi, $(\Delta = 0) \Leftrightarrow (p_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{4} \text{ et } p_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{4})$.

En portant les valeurs de p_1 et p_2 dans (i), nous avons les équations des tangentes :

$$t_1 \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{2+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad t_2 \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{2-\sqrt{5}}{4}$$

ER 271.2. Détermine les points de contact et les équations des tangentes à la conique

$$2xy + 4x^2 + 2x + 2 = 0, \text{ parallèles à la droite } y + x = 0$$

Résolution

Les points de contact sont les points d'intersection de la corde de contact et de la conique.

La corde de contact est : $f'_x + mf'_y = 0$

$$f'_x = 8x + 2y + 2 ; f'_y = 2x \text{ et } m = -1$$

$$(f'_x + mf'_y = 0) \Leftrightarrow (3x + y + 1 = 0)$$

D'où le système :
$$\begin{cases} 2xy + 4x^2 + 2x + 2 = 0(i) \\ y = -3x - 1(ii) \end{cases}$$

(ii) dans (i) donne : $x = 1$ et $x = -1$ (iii)

Si $x = 1, y = -4$ et si $x = -1, y = 2$. Les points de contact sont :

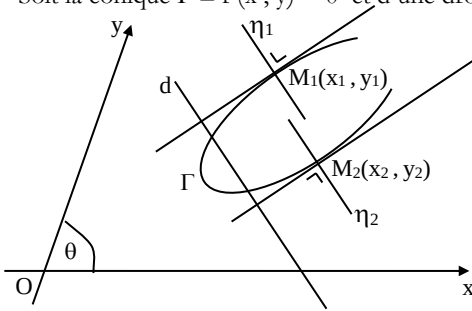
$T_1(1, -4)$ et $T_2(-1, 2)$.

Les tangentes passent par T_1 et T_2 et ont pour coefficient angulaire -1 .

Leurs équations sont : $y + x + 3 = 0$ et $y + x - 1 = 0$.

ii. Normales parallèles à une direction m

Soit la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ et d une droite de direction m .



Soit $M_1(x_1, y_1)$ un pied de la normale,

$$\text{on a : } f(x_1, y_1) = 0 \quad (1)$$

Le coefficient angulaire de la normale

$$\text{en } M_1 \text{ est : } m = \frac{f'_{y_1} - f'_{x_1} \cos \theta}{f'_{x_1} - f'_{y_1} \cos \theta} \quad (2).$$

Les relations (1) et (2) montrent que les coordonnées de M_1 vérifient

$$\text{les équations } f(x, y) = 0 \text{ et } m(f'_x - f'_y \cos \theta) - (f'_y - f'_x \cos \theta) = 0.$$

Cette dernière équation est celle d'une droite dite **corde des pieds des normales**.

Ainsi, pour déterminer les normales parallèles à la direction m à la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$, on résout le système :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ m(f'_x - f'_y \cos \theta) - (f'_y - f'_x \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ mf'_x - f'_y = 0 \quad (\text{si } \theta = \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Les équations des normales parallèles à la direction m sont les équations des droites passant par les pieds des normales de coefficient m .

Exercice résolu

ER 272. On donne l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Détermine la normale η à l'ellipse, parallèle à la droite $d \equiv \frac{1}{4}x + y + 1 = 0$. *Résolution*

La corde des pieds des normales est : $mf'_x - f'_y = 0$

$$f'_x = \frac{1}{2}x, \quad f'_y = 2y \quad \text{et} \quad m = -\frac{1}{4}$$

$(mf'_x - f'_y = 0) \Leftrightarrow (-x - 16y = 0)$. Les pieds des normales sont solution du

$$\text{système : } \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ -x - 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 (i) \\ x = -16y (ii) \end{cases}$$

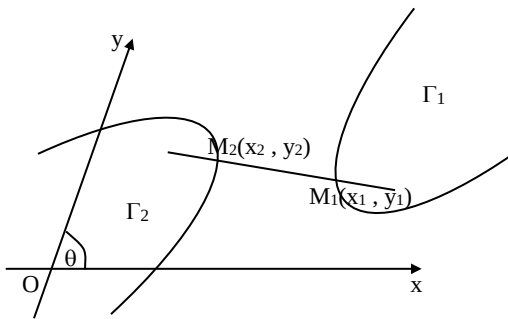
$$(ii) \text{ dans } (i), \text{ donne : } (65y^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow \left(y = \frac{\sqrt{65}}{65} \text{ ou } y = \frac{-\sqrt{65}}{65} \right)$$

Ainsi, si $y = \frac{\sqrt{65}}{65}$, $x = \frac{-16\sqrt{65}}{65}$ et si $y = \frac{-\sqrt{65}}{65}$, $x = \frac{16\sqrt{65}}{65}$.

Les normales de direction $m = -\frac{1}{4}$ ont donc pour équations :

$$\eta_1 \equiv y - \frac{\sqrt{65}}{65} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{16\sqrt{65}}{65}\right) \quad \text{et} \quad \eta_2 \equiv y + \frac{\sqrt{65}}{65} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{16\sqrt{65}}{65}\right)$$

f. Tangentes communes à deux coniques



Soit $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ deux équations de deux coniques respectives Γ_1 et Γ_2 et $d \equiv y = ax + b$ la droite tangente commune à Γ_1 et Γ_2 .

Procédé :

- Exprimer que $y = ax + b$ est à la fois tangente à $\Gamma_1 \equiv f(x, y) = 0$ et $\Gamma_2 \equiv g(x, y) = 0$;
- former les équations aux abscisses (ou aux ordonnées) dans chacun de deux cas et calculer leurs discriminants respectifs Δ_1 et Δ_2 ;
- poser la condition de tangence pour chacun de deux cas : $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 = 0$;
- éliminer les paramètres a et b dans les équations $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 = 0$;
- écrire l'équation de la tangente commune.

Exercice résolu

ER 273. Détermine la tangente commune aux coniques d'équations :

$$y^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Résolution

Soit $t \equiv y = ax + b$ la tangente commune aux deux coniques. Nous avons le système :

$$\begin{cases} a^2 + ab - 1 = 0 \\ a^2 - b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1-a^2}{a} \text{ (i)} \\ a^2 - b^2 + 1 = 0 \text{ (ii)} \end{cases}$$

En portant (i) dans (ii), nous obtenons : $\left(a^2 = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(a = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Si $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et si $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Les tangentes communes sont : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

g. Lieux des points de contact – lieux des pieds des normales

i. Le lieu des points de contact des tangentes

- issues d'un point $P(\alpha, \beta)$ s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations du système :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 & (\text{conique}) \\ \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0 & (\text{corde de contact des tangentes issues d'un point}) \end{cases}$$

- parallèles à une direction m s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations du système :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 & (\text{conique}) \\ f'_x + m f'_y = 0 & (\text{corde de contact des tangentes parallèles à une direction } m) \end{cases}$$

ii. Le lieu des pieds des normales

- issues d'un point $P'(\alpha', \beta')$ s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations du système :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 & (\text{conique}) \\ \frac{y - \beta'}{f'_y - f'_x \cos \theta} = \frac{x - \alpha'}{f'_x - f'_y \cos \theta} & (\text{hyperbole d'Apollonius}) \end{cases}$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{y - \beta'}{f'_y} = \frac{x - \alpha'}{f'_x} \end{cases}$$

- parallèles à une direction m s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations du système :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 & (\text{conique}) \\ m(f'_x - f'_y \cos \theta) - (f'_y - f'_x \cos \theta) = 0 & (\text{corde des pieds}) \end{cases}$$

$$\text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ m f'_x - f'_y = 0 \end{cases}$$

Exercices résolus

ER 274.1. Détermine le lieu des points de contact des tangentes issues du point $(0, 0)$ à la

conique $\lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda y + 2x + 1 = 0$.

Résolution

L'équation homogène de la conique est :

$$\lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda yz + 2xz + z^2 = 0 \text{ et } P(0, 0, 1).$$

Comme $\alpha = \beta = 0$, l'équation de la corde de contact $d \equiv \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$ se réduit à $d \equiv \gamma f'_z = 0$ avec $f'_z = 2\lambda y + 2x + 2z$.

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda y + 2x + 1 = 0 & (i) \\ 2\lambda y + 2x + 2 = 0 & (ii) \end{cases} \quad (z = 1)$$

$$\text{De (ii), } \lambda = \frac{-x-1}{y} \quad (iii)$$

En portant (iii) dans (i), nous avons :

$$(x^2 + xy + y + 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow (x + 1 = 0 \text{ ou } x + 1 + y = 0)$$

La conique est dégénérée en deux droites dont l'une est parallèle à Oy et l'autre parallèle à la deuxième bissectrice des axes..

ER 275.2. Trouve le lieu des pieds des normales parallèles à la droite $2x + 2y - 1 = 0$, à la conique d'équation $y^2 - 4x + \lambda xy + \lambda = 0$.

Résolution

Soit $\Gamma \equiv y^2 - 4x + \lambda xy + \lambda = 0$ la conique et $d \equiv y = -x + \frac{1}{2}$ la droite de coefficient angulaire $m = -1$. La corde des pieds des normales parallèles à d est :

$$\begin{aligned} (mf'_x - f'_y = 0) &\Leftrightarrow [-1(-4 + \lambda y) - (2y + \lambda x) = 0] \\ &\Leftrightarrow (-\lambda y - 2y - \lambda x + 4 = 0) \end{aligned}$$

Le lieu est obtenu en éliminant λ dans les équations du système

$$\begin{cases} y^2 - 4x + \lambda xy + \lambda = 0 & (i) \\ \lambda y - 2y - \lambda x - 4 = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$\text{De (ii), } \lambda = \frac{4-2y}{y+x} \quad (iii)$$

En portant (iii) dans (i), nous avons :

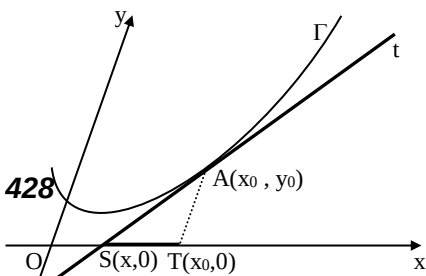
$$\left(y^2 - 4x + \frac{4-2y}{y+x}xy + \frac{4-2y}{y+x} = 0\right) \Leftrightarrow (y^3 - y^2x - 4x^2 - 2y + 4 = 0)$$

C'est l'équation du lieu demandé.

b. Sous-tangente et sous-normale

i. Sous-tangente

Soit la conique Γ d'équation $f(x, y) = 0$, $A(x_0, y_0)$ un point de Γ et t la tangente à Γ au point A.



La sous - tangente est la mesure algébrique $\overline{ST}$, projection du segment $[AS]$ sur l'axe Ox parallèlement à Oy.

$$\overline{ST} = x - x_0$$

L'équation de la tangente t en A est :

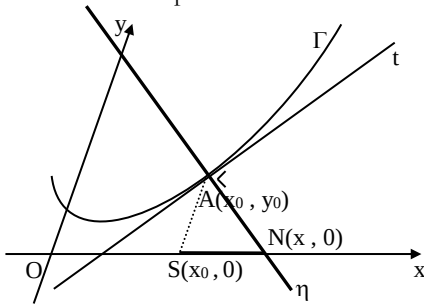
$$-y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0)$$

A l'intersection de t avec Ox , $y = 0$ et $\left[-y_0 = \frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0)\right] \Rightarrow \left(\frac{y_0 f'_{y_0}}{f'_{x_0}} = x - x_0\right)$

et la sous-normale est donnée par : $\overline{ST} = \frac{y_0 f'_{y_0}}{f'_{x_0}}$

ii. Sous-normale

Soit la conique Γ d'équation $f(x, y) = 0$, $A(x_0, y_0)$ un point de Γ et η la normale à Γ au point A .



$\overline{AN}$ est la longueur de la normale.

La sous-normale est la mesure algébrique $\overline{SN}$, projection du segment $[AN]$ sur l'axe Ox parallèlement à Oy .

$$\overline{SN} = x - x_0.$$

L'équation de la normale η en A est :

$$y - y_0 = \frac{f'_{y_0} - f'_{x_0} \cos \theta}{f'_{x_0} - f'_{y_0} \cos \theta} (x - x_0)$$

A l'intersection avec Ox , $y = 0$ et $-y_0 = \frac{f'_{y_0} - f'_{x_0} \cos \theta}{f'_{x_0} - f'_{y_0} \cos \theta} (x - x_0)$.

$$\text{D'où : } \overline{SN} = -\frac{y_0(f'_{x_0} - f'_{y_0} \cos \theta)}{f'_{y_0} - f'_{x_0} \cos \theta}. \quad \text{Si } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{SN} = -\frac{y_0 f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$$

i. Cercle de Monge^(*)

Le cercle de Monge est le lieu géométrique des points d'où l'on voit la conique sous un angle droit. En d'autres termes le cercle de Monge est le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la conique. Ce lieu est un cercle sauf dans le cas de la parabole où le cercle se réduit à une droite.

Exemple

Le cercle de Monge pour un cercle C_1 de centre (a, b) et de rayon R est un cercle de même centre que C et de rayon $\sqrt{2}R$.

Exercice résolu

^(*) Aussi appelé cercle orthoptique

ER 276. Détermine le lieu d'où l'on peut mener deux tangentes
perpendiculaires au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 36 = 0$.

Résolution

Première démarche

L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$.

Le système $\begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0(i) \\ y = mx + p(ii) \end{cases}$

(ii) dans (i) donne l'équation aux abscisses: $(1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2 - 36 = 0$.

Son discriminant est $\Delta' = -p^2 + 36 + 36m^2$. La condition de tangence $\Delta' = 0$

donne : $p = 6\sqrt{m^2 + 1}$ ou $p = -6\sqrt{m^2 + 1}$

Les tangentes sont : $y = mx + 6\sqrt{m^2 + 1}$ et $y = mx - 6\sqrt{m^2 + 1}$. (iii)

Les équations des tangentes perpendiculaires à celles de (iii) sont :

$y = -\frac{1}{m}x + \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m}$ et $y = \frac{1}{m}x - \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m}$ (iv)

D'où le système : $\begin{cases} (y - mx)^2 = 36(m^2 + 1) & (iii') \\ (my + x)^2 = 36(m^2 + 1) & (iv') \end{cases}$

En additionnant membre à membre (iii') et (iv'), nous avons :

$(1 + m^2)y^2 + (1 + m^2)x^2 = 72(m^2 + 1)$. (v)

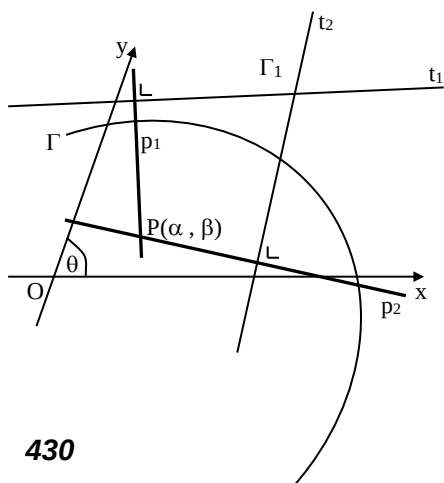
Divisons (v) par $(m^2 + 1)$, nous obtenons : $y^2 + x^2 = 72$, l'équation du lieu.

Deuxième démarche

Le lieu demandé est le cercle de Monge du cercle donné. Son centre est $C(0,0)$ et de rayon $R = 6\sqrt{2}$.

Son équation est : $x^2 + y^2 = 72$

Podaire d'un point par rapport à une conique



Soit Γ une conique d'équation $f(x, y) = 0$ et $P(\alpha, \beta)$ un point du plan de Γ .

Le podaire d'un point P par rapport à une conique Γ est le lieu géométrique de la projection orthogonale de P sur toutes les tangentes à la conique Γ .

La podaire est un lieu qui se détermine par la méthode des génératrices.

Ainsi, les génératrices sont : la tangente t à la conique Γ et la perpendiculaire p à t , issue de P .

Procédé :

- Choisir un point de contact $T(x_1, y_1)$;
- Exprimer que T est un point de Γ : $f(x_1, y_1) = 0$; (i)
- Ecrire l'équation de la tangente à Γ en T : $y - y_1 = \frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}(x - x_1)$ (ii)
- Déterminer l'équation de la perpendiculaire à t issue de P :
 $y - \beta = \frac{f'_{x_1} \cos \theta - f'_{y_1}}{f'_{y_1} \cos \theta - f'_{x_1}}(x - \alpha)$ ou $y - \beta = \frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x - \alpha)$ (si $\theta = \frac{\pi}{2}$) (iii)
- Eliminer x_1 et y_1 des relations (i) , (ii) et (iii).

Exercice résolu

Déterminer l'équation de la podaire du sommet de la parabole $P \equiv y^2 = 4x$.

Résolution

Soit $P(x_1, y_1)$ un point de la parabole : $y_1^2 - 4x_1 = 0$ (i)

L'équation de la tangente à P en P est : $t \equiv yy_1 = 2(x + x_1)$ (ii)

La perpendiculaire à t issue du sommet $S(0, 0)$ est $p \equiv 2y + xy_1 = 0$ (iii)

Pour déterminer le lieu demandé, éliminons x_1 et y_1 des équations (i), (ii) et (iii) :

De (iii), $y_1 = \frac{-2y}{x}$ (iv)

(iv) dans (ii) : $\left(-\frac{2y^2}{x} = 2x + 2x_1\right) \Leftrightarrow \left(x_1 = \frac{-y^2 - x^2}{x}\right)$ (v)

(iv) et (v) dans (i) nous obtenons:

$$\left[\left(\frac{-2y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{-y^2 - x^2}{x}\right) = 0\right] \Leftrightarrow (y^2 + xy^2 + x^3 = 0)$$

Déterminons l'équation polaire pour tenter de nous fixer sur la nature du lieu trouvé. Nous savons que : $\rho^2 = x^2 + y^2$; $x = \rho \cos \omega$ et $y = \rho \sin \omega$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (y^2 + xy^2 + x^3 = 0) &\Leftrightarrow (\rho^2 \sin^2 \omega + \rho \cos \omega \cdot \rho^2 \sin^2 \omega + \rho^3 \cos^3 \omega = 0) \\ &\Leftrightarrow (\sin^2 \omega + \rho \cos \omega \sin^2 \omega + \rho \cos^2 \omega \cos \omega = 0) \\ &\Leftrightarrow [\sin^2 \omega + \rho \cos \omega (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0] \\ &\Leftrightarrow (\sin^2 \omega + \rho \cos \omega = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(\rho = -\frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega}\right). \text{ Le lieu est la } \textit{cissoïde} \text{ de } \textit{Dioclès}. \end{aligned}$$

Exercices

N° 650. Détermine les tangentes et les normales à Γ passant par le point P .

P	Γ
a) (1, 1)	$x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 9 = 0$
b) (2, 2)	$x^2 + 5xy + 3x^2 - 2x - 4y + 3 = 0$
c) (-1, 1)	$x^2 - 7xy + y^2 + x + y + 2 = 0$
d) (1, 0)	$x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$
e) (3, -1)	$x^2 + xy + y^2 - x - 5y + 3 = 0$

- N° 651. Détermine la valeur de a pour que la droite d soit tangente à la conique Γ .
- $d \equiv y = a$, $\Gamma \equiv x^2 - 4y + 16$
 - $d \equiv 2x + y = -4$, $\Gamma \equiv xy = a$
 - $d \equiv x = a$, $\Gamma \equiv 4xy + y^2 + 16 = 0$
 - $d \equiv ax + 2 - 4a$, $\Gamma \equiv x^2 + 4y^2 - 8x = 0$
 - $d \equiv y = 3x + a$, $\Gamma \equiv 2xy + 5y + 2x + 4 = 0$
 - $d \equiv 4x - 3y = a$, $\Gamma \equiv x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 6y = 0$
- N° 652. Ecris les équations des tangentes menées du point P à la conique Γ .
- $P(7, -1)$ et $\Gamma \equiv x^2 + y^2 = 25$
 - $P(-8, 8)$ et $\Gamma \equiv x^2 + y^2 = 25$
 - $P(-1, 2)$ et $\Gamma \equiv 2x + y^2 = 8$
 - $P(0, 0)$ et $\Gamma \equiv x^2 - 3y + 2x + 19 = 0$
 - $P(2, -1)$ et $\Gamma \equiv 4x^2 + 2xy + 2x + 2 = 0$
- N° 653. Détermine les normales issues de l'origine à la conique $xy - x^2 + 1 = 0$
- N° 654. Détermine les points de contact des tangentes issues du point $M(-1, \frac{1}{2})$ à la parabole d'équation $y^2 = 2x$
- N° 655. Détermine λ pour que les pieds des normales issues de l'origine à la conique d'équation $4x^2 + 2\lambda xy + 2y^2 - x + 2 = 0$ appartiennent à la droite $d \equiv y + x + 1 = 0$.
- N° 656. Détermine les tangentes à la conique Γ de coefficient de direction m .
- $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 5y + 3 = 0$; $m = -\frac{2}{3}$
 - $2x^2 - 4xy + 4y^2 - x - 6y + 4 = 0$; $m = \frac{1}{2}$
 - $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 1 = 0$; $m = 1$
 - $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + y - 1 = 0$; $m = 0$
- N° 657. Détermine la tangente parallèle à Oy à la conique $\Gamma \equiv 2x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 2y - 2 = 0$
- N° 658. Soit la conique d'équation $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$
- Détermine l'équation de la tangente t à la conique, parallèle à l'axe Ox .
 - Donne les coordonnées du point de tangence
- N° 659. Détermine les normales parallèles à la droite d'équation $2x - y + 5 = 0$ à la conique $\Gamma \equiv x^2 - 2xy + y + 1 = 0$.
- N° 660. On mène les tangentes à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, parallèles à la droite $10x - 3y + 9 = 0$. Calcule les distances entre les deux tangentes

N° 661. Ecris l'équation des tangentes communes aux coniques:

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 = 49 \text{ et } \Gamma \equiv x^2 + y^2 - 20y + 99 = 0$$

N° 662. Trouve le lieu des points de tangence des tangentes issues de l'origine aux coniques suivantes.

$$\text{a) } y^2 + 2\lambda xy + \lambda x^2 + 2y + 2\lambda x + 1 = 0 \quad \text{c) } \lambda^2 y^2 + x^2 - 4\lambda y + 8x + 2 = 0$$

$$\text{b) } y^2 - 2\lambda xy + \lambda^2 x^2 - 4y + 2\lambda x + 1 = 0 \quad \text{d) } y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2y - 2\lambda x + 2 = 0$$

N° 663. Trouve les lieux des points de contact des tangentes parallèles à la direction d , à la conique Γ .

$$\text{a) } \Gamma \equiv xy - \lambda = 0 \quad d \equiv 3y - x + 1 = 0$$

$$\text{b) } \Gamma \equiv y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2y - 2\lambda x + 2 = 0 \quad d \equiv Oy$$

$$\text{c) } \Gamma \equiv \lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda y + 2x + 1 = 0 \quad d \equiv Ox$$

$$\text{d) } \Gamma \equiv \lambda^2 y^2 - 2\lambda^2 xy + x^2 - \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad d \equiv y - x + 1 = 0$$

N° 664. Trouve le lieu des pieds des normales issues du point de rencontre des

droites $y = 3$ et $x + y - 1 = 0$, à la conique Γ d'équation :

$$\text{a) } y^2 + 2\lambda xy + \lambda x^2 + 2y + 2\lambda x + 1 = 0 \quad \text{b) } \lambda^2 y^2 + x^2 - 4\lambda y + 8x + 2 = 0$$

N° 665. On donne un triangle ABC rectangle en B. On demande de :

a) déterminer l'équation générale des coniques circonscrites au triangle et pour lesquelles la hauteur BH correspondante à l'hypoténuse est normale en B ;

b) le lieu des points d'intersection des normales tracées à ces coniques en A et C

c) le lieu des pieds des normales parallèles à AB et BC.

N° 666. Détermine la sous-tangente et la sous-normale à la conique Γ au point P.

$$\text{a) } \Gamma \equiv x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 9 = 0 ; \quad P(-1, 1)$$

$$\text{b) } \Gamma \equiv x^2 + 5xy + 3y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 ; \quad P(2, 2)$$

$$\text{c) } \Gamma \equiv x^2 + xy + y^2 - x - 5y + 3 = 0 ; \quad P(3, -1)$$

N° 667. Calcule l'angle que la conique $\Gamma \equiv xy + 4y - 2x = 0$ fait à l'origine avec la conique $\Gamma \equiv x^2 + 4xy + x + 3y = 0$

N° 668. Calcule l'angle que la droite $y = -3x + 8$ fait avec la tangente à la conique

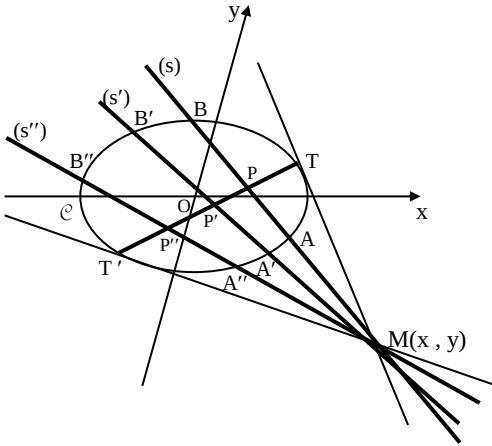
$$\Gamma \equiv xy + 6x - 4y - 19 = 0 \text{ au point A } (3, -1).$$

N° 669. Trouve les angles sous lesquels se coupent les coniques suivantes :

$$\text{a) } \Gamma \equiv 2y^2 - 9x = 0 \text{ et } \Gamma \equiv x^2 - 4x - 3y + 1 = 0 \quad \text{b) } \Gamma \equiv x^2 + y^2 = 45 \text{ et } \Gamma \equiv y^2 = 12x$$

X.3. POLAIRES ET POLES

X.3.1. NOTIONS



Soit C une ellipse et M un point extérieur à C . Par le point M , faisons passer la sécante s qui coupe l'ellipse C en deux points A et B . Un point P pris sur la sécante s de telle sorte que (M, A, P, B) forme un quaterne harmonique est appelé **conjugué harmonique** de M par rapport aux points de rencontre A et B . Il en est de même pour un point $P', P'', P''', \dots$ pris respectivement sur une sécante $s', s'', s''', \dots$

Les points $P, P', P'', \dots$ sont tous alignés et leur ensemble est une droite appelée **polaire**.

En outre, si on mène de M , deux tangentes à l'ellipse C , on peut constater que la corde de contact comprend les points $P, P', P'', P''', \dots$. Dans ce cas, la polaire coïncide avec la corde de contact. Le point M est le pôle de la polaire TT' .

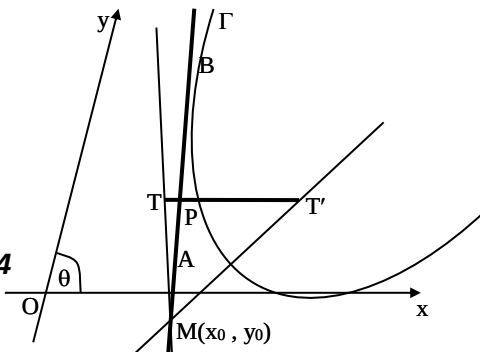
Si M appartient à C , alors les tangentes issues de M se confondent et les points de contact se réduisent en un seul point. La polaire est dans ce cas la tangente à C en ce point.

Remarque

Ces différentes notions développées pour une ellipse restent valables pour toute autre conique.

X.3.2. POLAIRE D'UN POINT

Définition



Soit Γ une conique et M un point du plan de Γ . On appelle polaire du point M par rapport Γ , le lieu géométrique du conjugué harmonique de M , par

rapport aux points de rencontre avec la conique, d'une sécante quelconque passant par M.

Equation

Soit la conique Γ d'équation $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point du plan.

La polaire étant la corde de contact des tangentes issues de M ($M \notin \Gamma$) ou la tangente à Γ en M ($M \in \Gamma$), son équation est : $x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0$

Exercice résolu

Détermine l'équation de la polaire du point $M(1, 2)$ par rapport à la conique Γ .

a) $\Gamma \equiv x^2 + y^2 + 2xy - 4 = 0$

b) $\Gamma \equiv 3y^2 - 4xy - 5y + 7x - 1 = 0$

Résolution

a) Nous pouvons vérifier que $M \notin \Gamma$. Dans ce cas, la polaire est la corde de contact des tangentes issues de M , son équation est :

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0 \text{ et }$$

$$M(1, 2, 1). \quad f'_x = 2x + 2y ; \quad f'_y = 2y + 2x \quad \text{et} \quad f'_z = -8z.$$

$$\text{Ainsi, nous avons : } 3y + 3x - 4 = 0$$

b) Nous pouvons vérifier que le point M appartient à Γ . Dans ce cas, la polaire

$$\text{est la tangente en } M. \text{ Son équation est : } y - 2 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - 1).$$

$$\text{Or } f'_x = -4y + 7 \text{ et } f'_{x_0} = -1 ; \quad f'_y = 6y - 4x - 5 \text{ et } f'_{y_0} = 3$$

$$\text{D'où l'équation : } y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

X.3.3. PÔLE D'UNE DROITE

Définition

Le pôle d'une droite est le point de rencontre des polaires de tous ses points.

Recherche

Soit la droite $d \equiv Ay + Bx + C = 0$ et la conique $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$.

Procédé 1

- Prendre deux points arbitraires de la droite d . Il est conseillé de les prendre de façon à simplifier le plus possible les calculs ;

- déterminer les équations des polaires de ces deux points par rapport à la conique Γ ;
- former et résoudre le système des équations des polaires obtenues ;
- le pôle de d est la solution du dit système.

Procédé 2

- Considérer un point arbitraire $M(\alpha, \beta, \gamma)$ et écrire sa polaire :

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma = 0 ;$$

- identifier l'équation de la droite d à celle de la polaire du point M :

$$\frac{f'_\alpha}{B} = \frac{f'_\beta}{A} = \frac{f'_\gamma}{C} ;$$

- résoudre le système formé de deux équations déduites des rapports de proportionnalité ci-dessus.

Exercice résolu

Détermine le pôle de la droite d par rapport à la conique Γ dans les cas suivants :

a) $d \equiv x + y - 1 = 0$ et $\Gamma \equiv x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$

b) $d \equiv y + 14x - 8 = 0$ et $\Gamma \equiv 4x^2 - y^2 - 16 = 0$

Résolution

- a) Appliquons le premier procédé :

– Considérons deux points sur d : $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$;

– déterminons les polaires p_1 et p_2 des points A et B par rapport à la conique.

Comme A et B n'appartiennent pas à la conique, la polaire de chacun d'eux est la corde de contact des tangentes issues respectivement de A et de B :

$$p_1 \equiv 2y + x - 8 = 0 \quad \text{et} \quad p_2 \equiv 2x + y - 8 = 0$$

Ainsi le système $\begin{cases} 2y + x - 8 = 0 \\ y + 2x - 8 = 0 \end{cases}$ donne comme pôle le point $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

- b) Appliquons le deuxième procédé en considérant $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un point de d .

La polaire de M a pour équation :

$$\begin{aligned} (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0) &\Leftrightarrow [\alpha(8x) + \beta(-2y) + \gamma(-32z) = 0] \\ &\Leftrightarrow (4\alpha x - \beta y - 16\gamma = 0) \quad (z = 1) \end{aligned}$$

En identifiant l'équation de la droite à celle de la polaire, nous avons :

$$(4\alpha = 14) \Rightarrow \left(\alpha = \frac{7}{2}\right) ; \quad (-\beta = 1) \Rightarrow (\beta = -1) \quad \text{et} \quad (-16\gamma = -8) \Rightarrow \left(\gamma = \frac{1}{2}\right)$$

D'où le pôle est le point $M\left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ ou $M(7, -2, 1)$

En coordonnées cartésiennes $M(7, -2)$.

Lieux des pôles

Soit la droite $d \equiv Ay + Bx + C = 0$ et la conique $\Gamma \equiv f(x, y, \lambda) = 0$.

Le lieu de pôles de la droite d par rapport à la conique Γ s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les polaires génératrices du lieu de deux points quelconques de la droite

d ou en éliminant le paramètre λ entre les deux équations tirées de la relation $\frac{f'_\alpha}{B} = \frac{f'_\beta}{A} = \frac{f'_\gamma}{C}$.

Exercice résolu

Quel est le lieu de pôles de la droite $d \equiv 2y - x + 1 = 0$ par rapport à la conique $\Gamma \equiv x^2 - y^2 - \lambda xy + \lambda = 0$.

Résolution

– Considérons deux points A et B sur d et déterminons leurs polaires par rapport à la conique $\Gamma \equiv x^2 - y^2 - \lambda xy + \lambda z^2 = 0$:

$$A\left(0, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } B(1, 0); \quad f'_x = 2x - \lambda y, \quad f'_y = -2y - \lambda x \quad \text{et} \quad f'_z = 2\lambda z$$

Les polaires p_1 et p_2 de A $\left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$ et B $(1, 0, 1)$ ont respectivement pour équation : $p_1 \equiv y + \frac{1}{2}\lambda x + 2\lambda z = 0$ et $p_2 \equiv 2x - \lambda y + 2\lambda z = 0$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} y + \frac{1}{2}\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ -\lambda y + 2x + 2\lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-y}{\frac{1}{2}x+2} & (i) \\ \lambda = \frac{-2x}{2-y} & (ii) \end{cases}$$

En identifiant (i) à (ii), le lieu a pour équation : $x^2 + y^2 - 2y + 4x = 0$.

C'est un cercle de centre C $(-2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

Nous pouvons aussi procéder de la manière suivante :

Soit P (α, β, γ) le pôle de la droite $d \equiv 2y - x + 1 = 0$ (i)

La polaire de P est : $\alpha(2x - \lambda y) + \beta(-2y - \lambda x) + \gamma(2\lambda z) = 0$ (ii)

En identifiant (ii) à (i), nous avons : $\frac{2x-\lambda y}{-1} = \frac{-2y-\lambda x}{2} = \frac{2\lambda z}{1}$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \frac{2x-\lambda y}{-1} = \frac{-2y-\lambda x}{2} \\ \frac{-2y-\lambda x}{2} = \frac{2\lambda z}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-\lambda y}{-1} = \frac{-2y-\lambda x}{2} \\ \frac{-2y-\lambda x}{2} = 2\lambda \end{cases}$$

En éliminant λ entre les deux équations du système, nous obtenons : $x^2 + y^2 - 2y + 4x = 0$

Note :

Un point M d'une conique est dit double si toute sécante passant par ce point rencontre la conique en deux points confondus avec M.

Une conique Γ admet un point double si $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$ c'est – à – dire la conique est

dégénérée en deux droites ($\Delta = 0$).

Exercice résolu

Détermine si possible le point double de la conique d'équation

$$-x^2 - xy + 2y^2 + x + 5y + 2 = 0$$

Résolution

L'équation de la conique en coordonnées homogènes est :

$$-x^2 - xy + 2y^2 + xz + 5yz + 2z^2 = 0.$$

$$f'_x = -2x - y + z; \quad f'_y = -x + 4y + 5z \quad \text{et} \quad f'_z = x + 5y + 4z$$

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x + 4y + 5z = 0 \\ x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Le point double est } M(1, -1)$$

Exercices

N° 670. Détermine l'équation de la polaire de pôle

a) $(0, 0)$ à la conique d'équation $\Gamma \equiv y^2 + x^2 - 6x - 2y + 8 = 0$

b) $(8, 4)$ à la conique d'équation $\Gamma \equiv x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

c) $(-2, 3)$ à la conique d'équation $\Gamma \equiv y^2 - xy - x^2 - x - y - 1 = 0$

d) $(1, 0)$ à la conique $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 - xy - 5x + y + 1 = 0$

e) $(1, 2)$ à la conique $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 - xy - 5x + y + 1 = 0$

N° 671. Trouve le lieu des points de rencontre avec chacune des coniques suivantes, des polaires de l'origine par rapport à ces coniques et interpréter ces lieux :

a) $y^2 - 4xy + 3x^2 + 4\lambda y - \lambda x - 1 = 0$

c) $y^2 + 2\lambda xy - 4x^2 + 2\lambda x + 5y + 7 = 0$

b) $(2\lambda y + 5x)(\lambda y + x - 1) + 1 = 0$

N° 672. Trouve le pôle de droites :

a) $3x - 2y - 18 = 0$ par rapport à la conique d'équation $x^2 + y^2 = 36$

b) $x - y + 1 = 0$ par rapport à la conique $x^2 + xy - y^2 + y + x + 1 = 0$

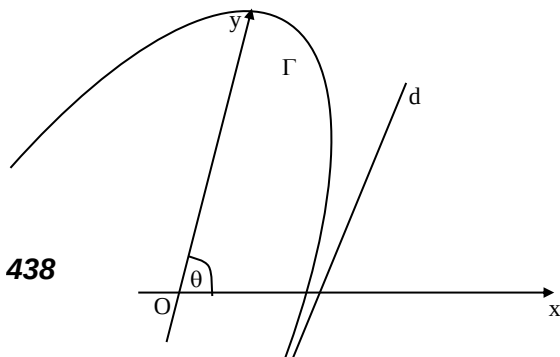
N° 673. Trouve le lieu du pôle de la droite

a) $2y - 3x + 1 = 0$ par rapport à $\lambda y^2 + 2xy + x^2 + \lambda y + 4x - 1 = 0$

b) $x - y + 2 = 0$ par rapport à $3y^2 + 2\lambda xy + \lambda x^2 + 4y + 2\lambda x - 1 = 0$

X.4. ASYMPTOTES

X.4.1. DEFINITION



Une asymptote à une courbe est une droite qui rencontre la courbe à l'infini

X.4.2. EQUATION

Soit Γ une conique d'équation $f(x, y, z) = 0$ et $M(1, m, 0)$ le point à l'infini de Γ .

Etant donné que l'asymptote est la tangente au point à l'infini, son équation est :

$$1 \cdot f'_x + m \cdot f'_y + 0 \cdot f'_z = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}'\mathbf{x} + m \cdot \mathbf{f}'\mathbf{y} = 0$$

avec m le coefficient angulaire ou racine de l'équation aux directions

asymptotiques : $Am^2 + 2Bm + C = 0$ (1)

Soit $\delta = B^2 - AC$ le discriminant de l'équation (1).

a) Si $\delta > 0$, l'équation (1) admet deux racines réelles distinctes m_1 et m_2 .

La conique est une hyperbole. Elle a deux asymptotes réelles.

En particulier,

Si $A = 0$ et $B \neq 0$ alors l'une des directions vaut l'infini et l'autre égale $-\frac{C}{2B}$ et

les équations des asymptotes sont : $Bx + D = 0$ et $f'_x - \frac{C}{2B} \cdot f'_y = 0$

Dans ce cas, l'asymptote est la tangente au point à l'infini.

b) Si $\delta < 0$, l'équation (1) a deux racines imaginaires ; la conique est une ellipse. Elle admet deux asymptotes imaginaires.

c) Si $\delta = 0$, l'équation (1) admet une racine double ; la conique est une parabole.

En particulier,

– Si la parabole est proprement dite alors elle n'admet pas d'asymptote.

– Si la parabole est dégénérée alors elle admet une infinité d'asymptotes qui sont toutes parallèles aux deux droites de dégénérescence.

X.4.3. CAS PARTICULIERS

Une conique Γ d'équation $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ admet :

a) Une asymptote parallèle à Ox lorsque $C = 0$; son équation est $By + E = 0$

b) Une asymptote confondue avec Ox lorsque $C = E = 0$

c) Une asymptote parallèle à Oy lorsque $A = 0$

d) Une asymptote confondue avec Oy lorsque $A = D = 0$

e) Deux asymptotes perpendiculaires lorsque :

$$A + C - 2B \cos \theta = 0 \quad \text{et} \quad A + C = 0, \quad \text{si} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Dans ce cas, la conique est une hyperbole équilatère.

Remarque

La méthode de Cauchy vue en 5^e année permet de déterminer les asymptotes d'une conique à condition d'explicitier par rapport à y l'équation de celle-ci. Comme il n'est pas toujours aisé d'explicitier l'équation par rapport à y, la méthode de Cauchy devient limitée.

Exercices résolus

1. Détermine les équations des asymptotes de la courbe Γ d'équation

$$y^2 - 5xy + 6x^2 - 2y + 3x - 1 = 0.$$

Résolution

$\partial = \frac{1}{4}$, la conique est une hyperbole : l'équation aux directions asymptotiques est :

$$(m^2 - 5m + 6 = 0) \Leftrightarrow (m_1 = 2 \text{ ou } m_2 = 3)$$

$$\text{Calculons : } f'_x = -5y + 12x + 3 \quad \text{et} \quad f'_y = 2y - 5x - 2$$

Les équations des asymptotes de la courbe sont respectivement :

$$(f'_x + 2f'_y = 0) \Leftrightarrow (y = 2x - 1) \quad \text{et} \quad (f'_x + 3f'_y = 0) \Leftrightarrow (y = 3x + 3)$$

2. Déterminer α et β pour que la conique d'équations paramétriques

$$\alpha y^2 + (2\beta - \alpha)xy - (1 - \alpha)x^2 + 2\beta y - (2\alpha^2 - \beta)x + \alpha = 0 \quad \text{admette une asymptote confondue avec Ox.}$$

Résolution

La conique admet une asymptote confondue avec Ox si $C = E = 0$.

$$\text{Il va s'en dire que : } -(1 - \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{2\alpha^2 - \beta}{2} = 0. \quad \text{D'où } \alpha = 1 \text{ et } \beta = -2$$

3. Ecrire les équations des asymptotes à la conique d'équation $2xy + x^2 - 2x + 1 = 0$

Résolution

Par la méthode de Cauchy vue en 5^e.

$$\text{L'équation de la conique peut s'écrire : } y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x} \quad \text{et} \quad D_f = \mathbf{R}^*$$

$$* \text{ la courbe admet une asymptote verticale car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x} = \infty.$$

$$\text{Son équation est : } x = 0$$

$$* \text{ Asymptote oblique: } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x} + \frac{1}{2}x = 1$$

$$\text{Asymptote oblique : } 2y + x - 2 = 0.$$

Cette méthode marche lorsqu'on peut explicitier l'équation donnée.

Par la méthode analytique

$$A = 0 \quad ; \quad B = 1 \quad ; \quad C = 1 \quad ; \quad f'_x = 2y + 2x - 2 \quad ; \quad f'_y = 2x.$$

$$\text{Relation aux directions asymptotiques : } (2m_2 + 1 = 0) \Leftrightarrow (m_2 = -\frac{1}{2}) \text{ et } m_1 = \infty$$

$$(as_1) : x = 0 \quad \text{et} \quad (as_2) : 2y + x - 2 = 0$$

Exercices

N° 674. Détermine les équations des asymptotes aux coniques suivantes :

$$a) 2y^2 - 5xy - 3x^2 - y + 10x - 13 = 0 \quad f) -3x^2 - 2xy + y^2 + y + 3 = 0$$

b) $x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 1 = 0$

c) $2xy - 6x^2 - 3y + 17x - 16 = 0$

d) $2x^2 - xy - 4 = 0$

e) $x^2 + 3xy + 12y^2 + x + y + 1 = 0$

g) $x^2 - xy + x - y - 1 = 0$

h) $xy - 2y^2 + x - 2y + 2 = 0$

i) $xy - 5x + 6y - 1 = 0$

N° 675. Calcule l'angle formé par les deux asymptotes de l'hyperbole :
 $y^2 - 7xy + 10x^2 + 4y - x - 2 = 0$

N° 676. Détermine les conditions pour que la conique

$$P \equiv Cx^2 + 2Bxy + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{ ait :}$$

- la droite $d \equiv x = 3$ comme asymptote
- la droite $d \equiv y = 4$ comme asymptote
- une asymptote parallèle à la droite $d \equiv y = 0$
- la droite $d \equiv y = x$ comme asymptote
- une asymptote parallèle à la droite $d \equiv y + x = 0$
- la droite $d \equiv y + x = 0$ comme asymptote
- des asymptotes de directions -1 et 1
- les bissectrices des axes comme asymptotes

N° 677. Soit l'équation $a^2(x^2 + 2y) + a(y^2 + 2x) + 2xy = 0$.

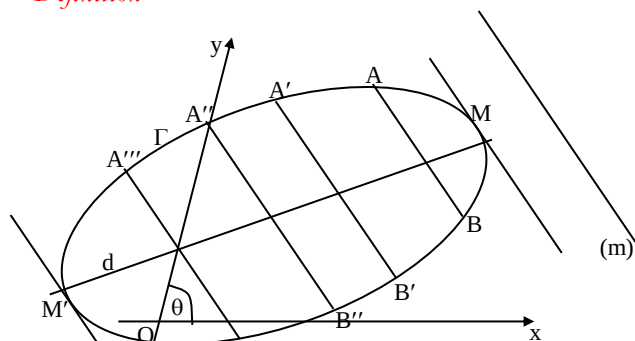
- Détermine les valeurs de α pour que l'équation représente une hyperbole équilatère : 1) $\theta = 90^\circ$; 2) $\theta = 60^\circ$
- Que représente-t-elle pour $a = 0$ et $a = 1$ si : 1) $\theta = 90^\circ$; 2) $\theta = 60^\circ$

N° 678. Trouve la conique admettant les directions asymptotiques de la conique $T \equiv 9x^2 - 4y^2 + 3x - 1 = 0$, dont l'une des asymptotes passe par l'origine et l'autre par le point $P(-1, 2)$. La courbe elle-même passe par le point symétrique de P par rapport à l'origine.

X.5. DIAMÈTRE

X.5.1. DIAMÈTRE CONJUGUE A UN SYSTEME DES CORDES PARALLELES

Définition



Soit une conique et un système de ses cordes parallèles de direction m . On appelle diamètre conjugué à la direction

m , le lieu des milieux de ces cordes parallèle à la direction m .

Equation

Soit $[AB]$, $[A'B']$, $[A''B'']$, $[A'''B''']$, ... les cordes de direction m et d le diamètre conjugué à cette direction.

Les tangentes aux extrémités M et M' du diamètre d sont parallèles aux cordes. Ainsi, le diamètre est considéré comme étant la corde de contact des tangentes parallèles aux cordes. Son équation est donc :

$$f'_x + m f'_y = 0$$

Remarque

Dans une conique centrée, tout diamètre passe par le centre et réciproquement.

X.5.2. DIAMETRES CONJUGUES

Définition

Soit d_1 et d_2 deux diamètres de directions respectives m_1 et m_2 . On dit que d_1 et d_2 sont des diamètres conjugués si l'un est parallèle aux cordes conjuguées de l'autre et réciproquement. Dans ce cas, m_1 et m_2 sont appelées directions conjuguées.

Relation aux directions conjuguées

Soit la conique d'équation $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

et le diamètre d_1 d'équation $f'_x + m_1 f'_y = 0$.

$$(f'_x + m_1 f'_y = 0) \Leftrightarrow [By + Cx + E + m_1(Ay + Bx + D) = 0]$$

$$\Leftrightarrow \left[y = -\frac{Bm_1 + C}{Am_1 + B}x - \frac{Dm_1 + E}{Am_1 + B} \right]$$

C'est l'équation du diamètre d_1 . Son coefficient angulaire est : $m_2 = -\frac{Bm_1 + C}{Am_1 + B}$

$$\text{Par suite, } \left(m_2 = -\frac{Bm_1 + C}{Am_1 + B} \right) \Leftrightarrow (Am_1 m_2 + Bm_2 = -Bm_1 - C)$$

$$\Leftrightarrow (Am_1 m_2 + B(m_1 + m_2) + C = 0)$$

Cette égalité est appelée « *relation aux directions conjuguées* »

Exercices résolus

1. Détermine l'équation du diamètre de l'hyperbole $xy = 16$ coupant en leur milieu les cordes parallèles à la droite $d \equiv 2y + 3x + 2 = 0$

Résolution

$$\text{Soit } (2y + 3x + 2 = 0) \Leftrightarrow \left(y = -\frac{3}{2}x - 1\right)$$

Il s'agit d'écrire l'équation du diamètre conjugué aux cordes de direction $m = -\frac{3}{2}$. Comme $f'_x = y$ et $f'_y = x$, l'équation demandée est : $y - \frac{3}{2}x = 0$ ou $2y - 3x = 0$.

2. On donne la conique $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$.

Trouve les équations des diamètres conjugués qui forment entre eux un angle de 45° .

Résolution

En exploitant la relation aux directions conjuguées et celle de l'angle de deux directions nous avons :

$$* [-3m_1m_2 + 0(m_1 + m_2) + 2 = 0] \Leftrightarrow (m_1m_2 = \frac{2}{3}) \quad (i)$$

$$* (\tan V = 1) \Leftrightarrow \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = 1\right) \Leftrightarrow (1 + m_1m_2 = m_2 - m_1) \quad (ii)$$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} m_1m_2 = \frac{2}{3} \\ m_2 - m_1 = 1 + m_1m_2 \end{cases} \quad (i) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1m_2 = \frac{2}{3} \\ m_2 - m_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \quad (ii)$$

Comme $f'_x = 4x$ et $f'_y = -6y$, les équations de diamètres conjugués sont :

$$f'_x - \frac{1}{3}f'_y = 0 \text{ et } f'_x - 2f'_y = 0 \quad \text{ou} \quad f'_x + \frac{1}{3}f'_y = 0 \text{ et } f'_x + 2f'_y = 0$$

$$\text{Donc } 2x + y = 0 \text{ et } x + 3y = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - y = 0 \text{ et } x - 3y = 0.$$

Exercices

N° 679. Trouve l'équation du diamètre des coniques suivantes :

- a) $9y^2 + 4x^2 = 30$, passant par $(3, 2)$ c) $xy = 8$, passant par $(-2, 3)$
 b) $y^2 = 4x$, passant par $(2, 1)$ d) $-y^2 + xy - 2x - 4 = 0$, passant par $(5, 2)$

N° 680. Détermine l'équation du diamètre des coniques suivantes qui coupent les

cordes de pente donnée m en deux parties égales..

- a) $-4y^2 + x^2 = 16$ et $m = 2$ d) $x^2 - xy - 8 = 0$ et $m = 1$
 b) $y^2 = 4x$ et $m = -\frac{1}{2}$ e) $2y^2 + xy - 2y - 4x + 6 = 0$ et $m = \frac{2}{3}$
 c) $xy = 6$ et $m = 3$

N° 681. Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite $x - 2y - 2 = 0$ est-elle un diamètre de la conique d'équation $x^2 - 2xy + (a - 2)y^2 - (a + 1)x + 2y - 2 = 0$?

N° 682. Donne l'équation du diamètre qui passe par le point $(3, -2)$ et celle de son diamètre conjugué, de la conique $\Gamma \equiv 3y^2 - 6xy + 2x^2 - y + 5x - 4 = 0$.

N° 683. Donne l'équation du diamètre qui est parallèle à la droite $y - 4x + 1 = 0$
dans la conique $3y^2 + x^2 - y + 7 = 0$.

X.6. AXES DE SYMETRIE ET SOMMETS

X.6.1. DEFINITIONS

- On appelle axe de symétrie d'une conique, le diamètre perpendiculaire à sa direction conjuguée.
- On appelle sommets d'une conique, ses points d'intersection avec les axes de symétrie.

X.6.2. EQUATION DES AXES DE SYMETRIE

L'axe de symétrie étant un diamètre conjugué aux cordes parallèles de direction m , son équation est : $f'_x + m f'_y = 0$

Son coefficient angulaire est : $m' = -\frac{Bm+C}{Am+B}$

Comme un axe de symétrie est perpendiculaire à sa direction conjuguée, m et m' doivent aussi vérifier la relation de perpendicularité :

$$[1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0] \Leftrightarrow [(B - A \cos \theta)m^2 - (A - C)m - (B - C \cos \theta) = 0]$$

C'est l'équation aux *directions principales*.

On appelle direction principale, toute direction des cordes conjuguées à un axe de symétrie.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a : $Bm^2 - (A - C)m - B = 0$

Dans la pratique, l'équation d'un axe de symétrie est : $f'_x + m f'_y = 0$

avec m solution de l'équation aux directions principales.

En particulier, lorsque la conique est une parabole, tous les diamètres sont parallèles à la direction $m = -\frac{B}{A} = -\frac{C}{B}$ (α).

Le coefficient angulaire de l'axe de symétrie est $m' = -\frac{1+m \cos \theta}{m+\cos \theta}$

$$\begin{aligned} \text{En tenant compte de } (\alpha), \quad m' &= -\frac{1-\frac{B}{A}\cos\theta}{-\frac{B}{A}+\cos\theta} \quad \text{ou} \quad m' = \frac{1-\frac{C}{B}\cos\theta}{-\frac{C}{B}+\cos\theta} \\ &= \frac{A-B\cos\theta}{B-A\cos\theta} \quad \quad \quad = \frac{B-C\cos\theta}{C-B\cos\theta} \end{aligned}$$

L'équation de l'axe de symétrie est donc

$$(B - A \cos \theta)f'_x + (A - B \cos \theta)f'_y = 0 \quad \text{ou} \quad (C - B \cos \theta)f'_x + (B - C \cos \theta)f'_y = 0$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a respectivement : $\mathbf{B} \mathbf{f}'_x + \mathbf{A} \mathbf{f}'_y = 0$ ou $\mathbf{C} \mathbf{f}'_x + \mathbf{B} \mathbf{f}'_y = 0$

Remarques

- La parabole proprement dite admet un seul axe de symétrie.
- Si la parabole est dégénérée en deux droites parallèles alors il y a une infinité d'axes de symétrie qui sont les perpendiculaires aux parallèles.
- Les coniques centrées admettent deux axes réels ; lorsque $B = 0$, une des directions principales vaut l'infini.

Sommets

Soit la conique d'équation $f(x, y) = 0$ et d'axes de symétrie d'équation $f'_x + m f'_y = 0$. Les sommets de la conique sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x + m f'_y = 0 \end{cases}$$

Remarques

- L'ellipse a quatre sommets réels.
- L'hyperbole a deux sommets réels et deux sommets imaginaires.
- La parabole a un seul sommet réel.

X.6.3. LIEUX DES SOMMETS

Soit la conique d'équation paramétrique $f(x, y, \lambda) = 0$.

Les lieux des sommets s'obtiennent en éliminant le paramètre λ entre les équations du système :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f'_x + m f'_y = 0 \end{cases} \text{ avec } m \text{ solution de la relation aux directions principales.}$$

Exercices résolus

1. Détermine l'axe de symétrie et le sommet de la conique d'équation $2y^2 - 4xy + 2x^2 - 3y + 5x + 4 = 0$.

Résolution

* $\partial = 0$, la conique est une parabole * $f'_x = -4y + 4x + 5$; $f'_y = 4y - 4x - 3$

L'équation de l'axe de symétrie est : $(f'_x + \frac{A}{B} f'_y = 0) \Leftrightarrow (x - y + 1 = 0)$

Le sommet de la parabole est solution du système

$$\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 2x^2 - 3y + 5x + 4 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{-3}{2} \text{ et } y = -\frac{1}{2} \right)$$

D'où le sommet est le point $S\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Détermine le point de rencontre des axes de symétrie de la conique d'équation $5y^2 - 4xy + 2x^2 + 5y - x - 4 = 0$.

Résolution

* $\delta = -6 < 0$, la conique est une ellipse.

$$\begin{aligned} * [Bm^2 - (A - C)m - B = 0] &\Leftrightarrow [-2m^2 - (5 - 2)m + 2 = 0] \\ &\Leftrightarrow (m_1 = -2 \text{ ou } m_2 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$* f'_x = -4y + 4x - 1 ; f'_y = 10y - 4x + 5$$

D'où les équations des axes de symétrie :

$$(f'_x - 2f'_y = 0) \Leftrightarrow (-24y + 12x - 11 = 0)$$

$$(f'_x + \frac{1}{2}f'_y = 0) \Leftrightarrow (y + 2x + \frac{3}{2} = 0)$$

Le point d'intersection I des axes de symétrie est la solution du système :

$$\begin{cases} 24y - 12x + 11 = 0 \\ 2y + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{-5}{2}, \frac{-2}{3}\right). \text{ Ainsi, } I\left(-\frac{5}{12}, -\frac{2}{3}\right).$$

3. Détermine le lieu des sommets de la famille des coniques d'équation

$$\Gamma \equiv xy - x - \lambda y = 0 \quad (1)$$

Résolution

– La conique est une hyperbole car $\delta = \frac{1}{4} > 0$

– Déterminons les axes de symétrie de la conique :

$$* f'_x = y - 1 ; f'_y = x - \lambda$$

* Les directions principales sont : -1 et 1

$$* \text{ Les axes de symétrie sont : } y + x - \lambda - 1 = 0 \text{ et } y - x - 1 + \lambda = 0 \quad (2)$$

– Les lieux des sommets s'obtiennent en résolvant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} xy - x - \lambda y = 0 \\ y - 1 + x - \lambda = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} xy - x - \lambda y = 0 \\ y - x - 1 + \lambda = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Tirons λ dans (2) et remplaçons cette valeur dans (1), nous obtenons :

$$y^2 + x - y = 0, \text{ une parabole}$$

En procédant de la même façon qu'au premier système, nous obtenons :

$$y^2 - y - x = 0, \text{ une parabole}$$

Exercices

- N° 684. Détermine l'angle des axes des coordonnées pour que l'équation $y - 2x = 0$ soit un axe de symétrie de la conique $\Gamma \equiv 4x^2 - 4xy - 2y^2 + 5 = 0$.

- N° 685. Détermine l'axe de symétrie et les sommets de la conique d'équation

$$a) 2y^2 - 4xy + 2x^2 - 3y + 5x + 3 = 0 \quad b) 2x^2 + 4xy - y^2 - 2y + 2x - 1 = 0$$

- N° 686. Détermine le lieu des sommets des coniques suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lambda x^2 + x - y - 1 = 0 & \text{c) } x^2 - 2y^2 + \lambda x + 1 = 0 & \text{e) } xy - y^2 + \lambda y - 1 = 0 \\ \text{b) } \lambda xy - 2x + 1 = 0 & \text{d) } xy - \lambda x + y - 2 = 0 & \text{f) } y^2 + 2\lambda xy + x^2 - 4 = 0 \end{array}$$

X.7. REDUCTION DE L'EQUATION GENERALE DES CONIQUES

$$\text{Soit } Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \quad (1)$$

l'équation générale d'une conique.

La réduction de cette équation peut se faire de deux manières différentes :

- Par les transformations des systèmes d'axes (translation et rotation)
- Par utilisations des invariants de cette équation

X.7.1. CAS DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

Réduire l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole, c'est lui trouver une forme ne contenant que les termes en y^2 , x^2 et le terme indépendant.

L'équation réduite est de la forme : $\mathbf{My^2 + Nx^2 + F' = 0}$.

Dans ce cas, on dit que la conique est rapportée à ses axes de symétrie, c'est-à-dire son centre est l'origine des axes et ses axes de symétrie se confondent aux axes de coordonnées.

Procédé :

- Effectuer une translation d'axes au centre (a , b) de la conique pour faire disparaître les termes en x et y.
- Effectuer une rotation d'angle α défini par $\tan 2\alpha = \frac{2B}{C-A}$ pour faire disparaître le terme en xy.

X.7.2. CAS DE LA PARABOLE

Réduire l'équation d'une parabole, c'est lui trouver une forme d'équation ne contenant que les termes en y^2 et en x. L'équation réduite est de la forme :

$$\mathbf{My^2 \pm 2Sx = 0}.$$

Dans ce cas, on dit que la conique est rapportée à sa tangente au sommet, confondu avec l'origine des axes ; l'axe de symétrie est Ox.

Procédé :

- Effectuer une rotation d'angle α défini par $\tan \alpha = \frac{-B}{A}$ ($B \neq 0$).
- Effectuer une translation d'axes au sommet (a,b)

Il reste donc à déterminer les coefficients M, N et F ' pour la conique centrée ; M et S pour la parabole.

X.7.3. REDUCTION D'UNE CONIQUE CENTREE

* Les invariants de l'équation générale des coniques permettent d'établir que :

– le binôme caractéristique de l'équation (1) a la même valeur que celui de l'équation (2) : $(B^2 - AC = -MN)$ (i)

– la relation $\eta = A + C$ de (1) a la même valeur que la relation $\eta' = M + N$ de (2) $(A + C = M + N)$ (ii)

D'où : M et N sont solutions de l'équation $K^2 - (A + C)K + AC - B^2 = 0$

Le signe de M - N est toujours l'opposé de celui de B.

Si B = 0, on prend A = M et C = N.

* De l'égalité entre le discriminant de (2) et celui de (1)

$$\text{on a : } \left(\begin{vmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{vmatrix} = \Delta \right) \Leftrightarrow (MNF' = \Delta)$$

$$\Leftrightarrow \left(F' = \frac{\Delta}{MN} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(F' = -\frac{\Delta}{\partial} \right)$$

On a ainsi obtenu les coefficients M, N et F' de (2).

Réduction de la parabole

Les invariants de l'équation générale permettent d'établir que $\eta = M$, $\Delta = -MS^2$

Ainsi, $M = A + C$ et $S = \sqrt{\frac{-\Delta}{\eta}}$ ou $S = \frac{BD-AE}{B} \sqrt{\frac{C}{A+C}}$ et l'équation réduite est de la

forme : $\mathbf{My^2 + 2(D \cos \alpha + E \sin \alpha)x = 0}$

Exercice résolu

Détermine l'équation réduite de chacune des coniques suivantes :

a) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 3y + 4 = 0$ c) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 5y + 3 = 0$

b) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

Résolution

a) $\partial = -3$, la conique est une ellipse, son équation réduite est de la forme

$My^2 + Nx^2 + F' = 0$. M et N sont solutions de l'équation : $K^2 - (2 + 2)K + 3 = 0$

$(K^2 - 4K + 3 = 0) \Leftrightarrow (K = 3 \text{ ou } K = 1)$. Prenons $M = 3$; $N = 1$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2} \text{ et } F' = -\frac{\Delta}{\partial} = -\frac{13}{6}.$$

D'où l'équation réduite $3y^2 + x^2 - \frac{13}{6} = 0$ ou $18y^2 + 6x^2 - 13 = 0$

b) $\partial = 3$. La conique est une hyperbole. Son équation réduite est de la forme

$$My^2 + Nx^2 + F' = 0.$$

M et N sont solutions de l'équation : $(K^2 - 2K - 3 = 0) \Leftrightarrow (K = 3 \text{ ou } K = -1)$

Comme B > 0. Nous avons M - N < 0. Prenons $M = -1$; $N = 3$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ et } F' = \frac{1}{3}.$$

L'équation réduite est $-y^2 + 3x^2 + \frac{1}{3} = 0$ ou $9x^2 - 3y^2 + 1 = 0$

c) $\partial = 0$, la conique est une parabole, son équation réduite est de la forme

$$My^2 + 2Sx = 0 \text{ avec } M = 2 \text{ et } S = \frac{\frac{5}{2}-2}{1} \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{L'équation réduite est : } 2y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 0 \text{ ou } 4y^2 - \sqrt{2}x = 0$$

Nous pouvons aussi procéder en calculant :

$$(\tan \alpha = -\frac{B}{A}) \Leftrightarrow (\tan \alpha = -1) \text{ et } \alpha = 135^\circ. \text{ D'où l'équation } 4y^2 - \sqrt{2}x = 0.$$

Exercices

N° 687. Détermine l'équation réduite de chacune des coniques suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 9 = 0$ | f) $y^2 - xy - x^2 - y - x - 1 = 0$ |
| b) $5y^2 + 5xy - x^2 - x - 11y + 11 = 0$ | g) $y^2 + 2xy + x^2 - 6y + 9 = 0$ |
| c) $3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ | h) $y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 7x - 1 = 0$ |
| d) $3y^2 - 2xy + 2x^2 - 4y + 2x - 7 = 0$ | i) $y^2 - 10xy + 25x^2 + 4y - 20x + 1 = 0$ |
| e) $3y^2 - 4xy - 5y - 7x + 1 = 0$ | j) $y^2 + 3xy - 2x^2 + y - x = 0$ |

N° 688. Réduis par rotation et translation l'équation de la conique

$$\Gamma \equiv 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0.$$

X.8. ELEMENTS FOCALUX

La définition d'une conique, permet de distinguer les éléments focaux suivants : le foyer, la directrice et l'excentricité.

Dans ce paragraphe, il s'agit de déterminer chacun de ces éléments en partant de l'équation de la conique, Pour ce, on dispose de deux méthodes : la méthode de Plücker et la méthode de l'équation réduite.

X.8.1. METHODE DE PLÜCKER

Définition

On appelle foyer d'une conique (selon Plücker) un point du plan de la conique tel que les droites isotropes^(**) issues de ce point soient tangentes à la conique, la corde de contact étant la directrice correspondante.

Recherche des éléments focaux

Les foyers sont les points d'intersection de deux coniques appelés conique de Plücker. Ils sont solutions du système d'équation :

(**) Les droites isotropes ont pour coefficient angulaire $-\cos \theta \pm i \sin \theta$.

$$\begin{cases} f_x'^2 - 2f_x'f_y' \cos \theta + f_y'^2 \cos 2\theta - 4f(x,y)(A \cos 2\theta - 2B \cos \theta + C) = 0 \\ 2f_x'f_y' \sin \theta - f_y'^2 \sin 2\theta + 4f(x,y)(A \sin 2\theta - 2B \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} f_x'f_y' - 4Bf(x,y) = 0 \\ f_x'^2 + 4(A-C)f(x,y) - f_y'^2 = 0 \end{cases} \quad \left(\text{si } \theta = \frac{\pi}{2} \right)$$

La résolution de ces deux systèmes donne en général quatre points (foyers) réels ou imaginaires.

Dans le cas de la parabole, les deux coniques de Plücker sont des droites et leur intersection est un point. Voilà pourquoi la parabole (proprement dite) admet un seul foyer.

Remarque

– Les foyers sont :

- * des points situés sur un axe de symétrie appelé axe focal ;
- * symétriques par rapport au centre pour l'hyperbole et l'ellipse.

Ainsi, les foyers se définissent aussi comme points d'intersection d'une des coniques de Plücker et l'axe focal. A chaque foyer correspond une directrice.

- Pour déterminer l'excentricité de la conique, on considère un point P de celle – ci et on utilise la définition $\frac{|PF|}{|Pd|} = e$ où F et d désignent respectivement le foyer et la directrice associée à F.

X.8.2. METHODE DE L'EQUATION REDUITE

- Réduire l'équation de la conique donnée (translation suivie d'une rotation, rotation suivie d'une translation dans le cas de la parabole).
- Déterminer les éléments focaux dans le nouveau système d'axes.
- Retrouver les éléments focaux dans l'ancien système d'axes par une rotation de sens contraire et une translation de vecteur opposé.

Note :

Une calculatrice programmable peut aider (suivant n'importe quelle méthode) à déterminer les éléments focaux. Question d'établir un programme en y introduisant les éléments ou donnés nécessaires à une telle recherche.

X.8.3. LIEUX DE FOYERS

Le lieu de foyers est obtenu en éliminant les paramètres entre les équations des génératrices qui sont les hyperboles de Plücker ou encore une hyperbole de Plücker et un axe de symétrie.

Exercices résolus

1. Trouve les foyers et les directrices de la conique d'équation

$$\Gamma \equiv 5x^2 - 12xy + 6x - 36y - 63 = 0.$$

Résolution

$f'_x = 10x - 12y + 6 = 0$ et $f'_y = -12x - 36$. Les directions principales sont : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$
 Les axes de symétrie sont : $2x + 3y + 12 = 0$ (1) et $3x - 2y + 5 = 0$ (2)

La conique de Plücker est donnée par l'une des relations : $f'_x \cdot f'_y - 4B f(x, y) = 0$
 Nous obtenons l'équation : $xy + 3y + 2x + 12 = 0$ (3).

Les foyers sont solutions du système d'équations (1) et (3) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 12 = 0 & (1) \\ xy + 3y + 2x + 12 = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{Les foyers sont } F(-6, 0) \text{ et } F'(0, -4)$$

L'équation homogène de la conique est : $5x^2 - 12xy + 6xz - 36yz - 63z^2 = 0$

$$f'_x = 10x - 12y - 6z, \quad f'_y = -12x - 36z \quad \text{et} \quad f'_z = 6x - 36y - 126z$$

Les directrices associées à $F(-6, 0, 1)$ et $F'(0, -4, 1)$ sont respectivement :
 $2y - 3x - 9 = 0$ et $3x - 2y + 1 = 0$

2. Cherche le lieu des foyers de la conique $\Gamma \equiv y^2 + \lambda x^2 - 2y + 2x - 1 = 0$.

Résolution

Les deux génératrices sont les deux hyperboles de Plücker :

$$* \quad f'_x \cdot f'_y - 4B f(x, y) = 0 \quad \text{avec } B = 0.$$

$$f'_x = 2\lambda x + 2 \quad \text{et} \quad f'_y = 2y - 2. \quad \text{Donc } (2\lambda x + 2)(2y - 2) = 0.$$

Le premier lieu est : $y - 1 = 0$

$$* \quad (f'_x)^2 + 4(A - C)f(x, y) - (f'_y)^2 = 0 \quad ; \quad A - C = 1 - \lambda.$$

$$(2\lambda x + 2)^2 + 4(1 - \lambda)(y^2 + \lambda x^2 - 2y + 2x - 1) - 4(y - 1)^2 = 0$$

$$\text{Nous avons } \lambda = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 - 2y - x - 1 = 0.$$

Exercices

N° 689. Détermine les axes, les sommets, les foyers et les directrices de chacune des coniques suivantes.

- | | |
|--|---|
| a) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ | g) $10x^2 + 8xy - 5y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ |
| b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ | h) $-2x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ |
| c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0$ | i) $-4x^2 - 6xy + 4y^2 - x - y + 2 = 0$ |
| d) $5y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 2x = 0$ | j) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + x - 2y - 2 = 0$ |
| e) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ | k) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ |

N° 690. Cherche le lieu des foyers des coniques.

- a) $y^2 - 2xy + x^2 + 4\lambda y + 4\lambda x = 0$ c) $\lambda y^2 + 5y - 4\lambda x = 0$
 b) $y^2 + \lambda x^2 - 4\lambda y + 2x = 0$

X.8.4. PROPRIETES EN RAPPORT AVEC LES ELEMENTS D'ETUDE D'UNE CONIQUE

Centre d'une conique

P_1 : La polaire du centre d'une conique est la droite de l'infini.

P_2 : Le centre d'une conique est le pôle de la droite de l'infini.

P_3 : Les asymptotes d'une conique passent par le centre de celle-ci.

Pôle et polaire

P_1 : Si la polaire d'un point A passe par le point B alors celle de B passe aussi par A.

P_2 : Le pôle d'une droite est le point d'intersection des polaires de tous les points de cette droite.

P_3 : Une polaire d'un point comprenant son pôle est une tangente.

P_4 : La polaire d'un point est la corde de contact des tangentes issues de ce point.

P_5 : Deux points sont conjugués par rapport à une conique lorsque la polaire de l'un passe par l'autre.

P_6 : Deux droites sont conjuguées par rapport à une conique lorsque le pôle de l'une se trouve sur l'autre.

P_7 : Un triangle est conjugué par rapport à une conique lorsque chaque sommet est le pôle du côté opposé.

Diamètres

P_1 : Le centre d'une conique est le point d'intersection de tout diamètre de cette conique.

P_2 : Tous les diamètres d'une parabole sont parallèles.

P_3 : Le diamètre conjugué aux cordes de direction m est la polaire du point à l'infini dans la direction m.

P_4 : Une conique est rapportée à deux directions conjuguées si et seulement si le coefficient B de l'équation générale de la conique est nul.

P_5 : Les axes de symétrie d'une hyperbole sont bissectrices des angles des asymptotes.

P_6 : Dans les coniques centrées, tout diamètre passe par le centre et réciproquement.

P_7 : Dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles.

Axes et sommets

- P_1 : Dans les hyperboles, les axes de symétrie sont les bissectrices des angles des asymptotes.
- P_2 : Les hyperboles d'Apollonius ont des directions asymptotiques parallèles aux directions principales.

Eléments focaux

- P_1 : La polaire du foyer est la directrice correspondante.
- P_2 : Le rapport des distances d'un point quelconque d'une conique à un foyer et à sa directrice est constante.

Asymptotes

Deux hyperboles dont les équations ne diffèrent que par une constante ont les mêmes asymptotes.

X.9. RECHERCHE DES EQUATIONS DE CONIQUES

X.9.1. METHODE ANALYTIQUE

Procédé

- Poser Γ la conique d'équation générale

$$f(x, y) \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \quad (1)$$
- Exprimer analytiquement les conditions imposées
- Former un système de 6 équations à 6 inconnues A, B, C, D, E et F.
- Résoudre le système
- Porter les valeurs des inconnues dans l'équation (1).

Remarques

- Si un des coefficients est non nul, par exemple A, on divise les 2 membres de (1) par A et on obtient l'équation

$$y^2 + 2\frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + 2\frac{D}{A}y + 2\frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0 \quad (2)$$

En posant $2\frac{B}{A} = \alpha$, $\frac{C}{A} = \beta$, $2\frac{D}{A} = \gamma$, $2\frac{E}{A} = \mu$ et $\frac{F}{A} = k$, l'équation (2) devient

$$y^2 + \alpha xy + \beta x^2 + \gamma y + \mu x + k = 0.$$

Ainsi l'équation porte cinq inconnues α , β , γ , μ et k à déterminer et cinq conditions suffisent pour les déterminer.

Voici quelques expressions analytiques de certaines conditions parmi les plus usuelles :

- la conique passe par un point M (x_1 , y_1) : $f(x_1, y_1) = 0$

- la conique passe par l'origine des axes : $F = 0$
- les axes de symétrie de la conique sont parallèles aux axes de coordonnées : $B=0$
- la conique est une parabole : $B^2 = AC$
- la conique est un cercle : $A = C$ et $B = A \cos \theta$
Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $A = C$ et $B = 0$.
- la conique est une hyperbole équilatère : $A + C - 2B \cos \theta = 0$.
Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $A + C = 0$
- la conique est dégénérée : $\Delta = 0$
- la conique est tangente à une droite $y = mx + p$: on porte la valeur de y (ou de x) dans l'équation générale (1) et on pose la condition de tangence.
- la conique est centrée à l'origine : $D = E = 0$

Exercice résolu

Déterminer l'équation et la nature de la conique :

- passant par les points $K(1, 0)$, $L(-1, 0)$, $M(0, 3)$, $N(1, 1)$ et $P(2, 0)$
- passant par les points $K(0, 1)$, $L(1, -1)$, $M(2, 2)$ et $N(4, 0)$ et dont les axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées.

Résolution

- Soit $\Gamma \equiv Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ (1)

L'équation de cette conique. Supposons $A \neq 0$, l'équation (1) s'écrit :

$$\left(y^2 + 2\frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + 2\frac{D}{A}y + 2\frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0\right) \Leftrightarrow (y^2 + \alpha xy + \beta x^2 + \gamma y + \mu x + k = 0)$$

$$*) K \in \Gamma : \beta + \mu + k = 0$$

$$*) L \in \Gamma : \beta - \mu + k = 0$$

$$*) M \in \Gamma : 9 + 3\gamma + k = 0$$

$$*) N \in \Gamma : 1 + \alpha + \beta + \gamma + \mu + k = 0$$

$$*) P \in \Gamma : 4\beta + 2\mu + k = 0$$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \beta + \mu + k = 0 \\ \beta - \mu + k = 0 \\ 3\gamma + k = -9 \\ \alpha + \beta + \gamma + \mu + k = -1 \\ 4\beta + 2\mu + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3 \\ \mu = 0 \\ k = 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de la conique est : $y^2 + 2xy - 3y = 0$.

Comme $\partial = 1$ et $\Delta = 0$, la conique est une hyperbole dégénérée en deux droites réelles sécantes $y = 0$ et $y + 2x - 3 = 0$.

- Soit $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ (1), l'équation de la conique.

Comme les axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées nous avons :

$B = 0$ et l'équation (1) devient : $Ay^2 + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ (2)

Supposons $A \neq 0$ et divisons les deux membres de l'équation (2) par A :

$$* \left(y^2 + \frac{C}{A}x^2 + 2\frac{D}{A}y + 2\frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0 \right) \Leftrightarrow (y^2 + \alpha x^2 + \beta y + \gamma x + k = 0) \quad (3)$$

$$*) K \in \Gamma : 1 + \beta + k = 0$$

$$*) L \in \Gamma : 1 + \alpha - \beta + \gamma + k = 0$$

$$*) M \in \Gamma : 4 + 4\alpha + 2\beta + 2\gamma + k = 0$$

$$*) N \in \Gamma : 16\alpha + 4\gamma + k = 0$$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \beta + k = -1 \\ \alpha - \beta + \gamma + k = -1 \\ 4\alpha + 2\beta + 2\gamma + k = -4 \\ 16\alpha + 4\gamma + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{23} \\ \beta = -\frac{19}{23} \\ \gamma = -\frac{51}{23} \\ k = -\frac{4}{23} \end{cases}$$

L'équation de Γ est : $23y^2 + 13x^2 - 19y - 51x - 4 = 0$

X.9.2. METHODE SYNTHETIQUE (*)

1. Définition

Soit Γ_1 et Γ_2 , deux coniques d'équations respectives $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$ telles que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$

On appelle faisceau des coniques engendré par Γ_1 et Γ_2 une famille des coniques passant par l'intersection de Γ_1 et Γ_2 .

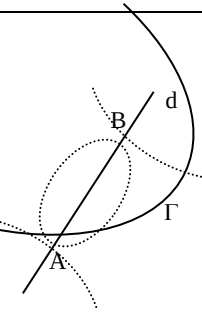
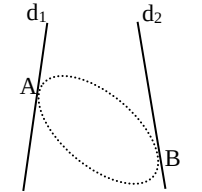
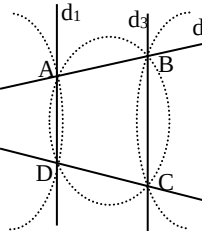
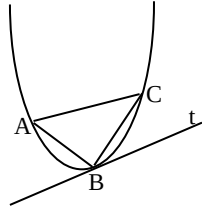
Son équation est : $\mathbf{f_1(x, y) + k f_2(x, y) = 0}$ ($k \in \mathbf{R}$)

Cette méthode s'appuie sur l'intersection de deux coniques.

En voici quelques illustrations :

Données	Représentation graphique	Equations	Compléments
1. * $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ une conique * d_1 et d_2 deux droites données		L'équation des coniques passant par l'intersection de Γ, d_1 et d_2 est : $\mathbf{f(x, y) + k d_1 d_2 = 0}$	$k \in \mathbf{R}$ $d_1 \equiv Ay+Bx+C=0$ $d_2 \equiv A'y+B'x+C'=0$

* Aussi appelée méthode des équations réduites ou de faisceaux.

2. * $\Gamma \equiv f(x, y) = 0$ une conique * A et B deux points de contact		L'équation des coniques bitangentes à Γ est : $f(x, y) + kd^2 = 0$	$k \in \mathbf{R}$; $d \equiv AB$: corde de contact
3. * d_1 et d_2 deux droites données * A et B deux points respectifs sur d_1 et d_2.		* L'équation des coniques tangentes à d_1 et d_2 respectivement en A et B est : $d_1 \cdot d_2 + kd^2 = 0$ $d \equiv AB$: corde de contact * Si d_1 et d_2 sont des asymptotes, l'équation des coniques est : $d_1 \cdot d_2 + k = 0$.	$d_1 \equiv Ay + Bx + C = 0$ $d_2 \equiv A'y + B'x + C' = 0$ $d \equiv AB$: corde de contact $k \in \mathbf{R}$
4. d_1, d_2, d_3 et d_4		L'équation des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD est : $d_1 \cdot d_2 + kd_3 d_4 = 0$	$k \in \mathbf{R}$
5. * A, B et C trois points non alignés. * t une droite passant par un des sommets par exemple B.		* L'équation des coniques circonscrites au triangle ABC est tangente à t est : $d_1 \cdot d_2 + k \cdot d_3 \cdot t = 0$ * L'équation des coniques circonscrites au triangle ABC est : $d_1 \cdot d_2 + k \cdot d_2 \cdot d_3 + r d_3 d_1 = 0$ ou $\frac{1}{d_3} + \frac{k}{d_1} + \frac{r}{d_2} = 0$	$k \in \mathbf{R}$ $d_1 \equiv AB$; $d_2 \equiv BC$ $d_3 \equiv AC$ (après avoir divisé l'équation par $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$)

Exercices résolus

- On donne les coniques $\Gamma_1 \equiv 3x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ et $\Gamma_2 \equiv 4y^2 + 3xy + 2 = 0$ ainsi que le point $A(2, 3)$. Trouve l'équation de la conique passant par le point commun à Γ_1 et Γ_2 ainsi que par le point A.

Résolution

L'équation de la conique est :

$$(\Gamma_1 + k\Gamma_2 = 0) \Leftrightarrow [(3x^2 + 4y^2 - 1) + k(4y^2 + 3xy + 2) = 0]$$

$$(A \in \Gamma) \Rightarrow [(12 + 36 - 1) + k(36 + 18 + 2) = 0]$$

$$\Rightarrow \left(k = -\frac{47}{56}\right)$$

$$\Gamma \equiv 3x^2 + 4y^2 - 1 - \frac{47}{56}(4y^2 + 3xy + 2) = 0 \text{ ou } \Gamma \equiv 168x^2 + 36y^2 - 141xy - 150 = 0$$

2. Trouve l'équation de la conique passant par l'intersection de la conique

$$\Gamma \equiv 3y^2 + 2xy + 5x^2 - 3x + 4y + 1 = 0 \text{ avec les droites } d_1 \equiv 2x + 3y - 6 = 0 \text{ et}$$

$$d_2 \equiv x + y - 1 = 0 \text{ ainsi que par l'origine des axes.}$$

Résolution

L'équation globale de d_1 et d_2 est $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 2x - 3y = 0$.

La conique demandée est :

$$\Gamma \equiv 3y^2 + 2xy + 5x^2 - 3x + 4y + 1 + k(2x^2 + 5xy + 3y^2 - 2x - 3y + 6) = 0$$

$$(O(0, 0) \in \Gamma) \Rightarrow \left(k = -\frac{1}{6}\right). \text{ D'où : } \Gamma \equiv 15y^2 + 28x^2 + 7xy - 10x + 33y = 0$$

3. Ecris l'équation des coniques bitangentes à la conique $3x^2 + y^2 - 1 = 0$ suivant la corde de contact représentée par la 1^e bissectrice des axes et ne contenant pas de terme en y^2 .

Résolution

L'équation de la conique est : $\Gamma \equiv (3x^2 + y^2 - 1) + k(y - x)^2 = 0$

$$[3x^2 + y^2 - 1 + k(y^2 - 2xy + x^2) = 0] \Leftrightarrow [(3 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - 2kxy - 1 = 0]$$

L'équation de la conique est dépourvue de terme en y^2 si $k = -1$.

$$\text{D'où : } \Gamma \equiv 2x^2 + 2xy - 1 = 0$$

4. Trouve l'équation de la conique passant par le point $A(1, -2)$ et admettant pour asymptotes $d_1 \equiv 2x + 3y - 1 = 0$ et $d_2 \equiv 5y + 4x + 3 = 0$

Résolution

L'équation de la conique d'asymptotes d_1 et d_2 est :

$$\Gamma \equiv (2x + 3y - 1)(5y + 4x + 3) + k = 0.$$

$$(A \in \Gamma) \Rightarrow [(2 - 6 - 1)(-10 + 4 + 3) + k = 0]$$

$$\Rightarrow (k = -15)$$

$$\text{D'où : } \Gamma \equiv 8x^2 + 15y^2 + 22xy + 2x + 4y - 18 = 0$$

5. Ecris l'équation de la conique Γ tangente à la courbe $\Gamma_1 \equiv xy = 16$ au point $A(-4, -4)$ qui recoupe celle-ci aux points $B(2, 8)$ et $C(-8, -2)$ et qui passe par l'origine.

Résolution

Soit d la droite passant par B et C et t la tangente à Γ_1 en A .

Nous avons : $d \equiv y - x - 6 = 0$ et $t \equiv y + x + 8 = 0$.

L'équation de Γ est celle formée par la conique Γ_1 et l'équation globale de d et t .
 Ainsi, $\Gamma \equiv (\Gamma_1 + k \cdot t = 0) \Leftrightarrow [xy - 16 + k(y^2 - x^2 + 2y - 14x - 48) = 0]$
 $(O \in \Gamma) \Rightarrow \left(k = -\frac{1}{3}\right)$. D'où : $\Gamma \equiv y^2 - 3xy - x^2 + 2y - 14x = 0$

Exercices

- N° 691. Trouve l'équation des coniques passant par l'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 9$ et des droites d'équations $3x + 2y - 1 = 0$ et $3x + 2y + 5 = 0$.
- N° 692. On donne les points $A(2, 3)$, $B(2, 0)$ et $C(6, 3)$.
- Montre que le triangle ABC est rectangle en A.
 - Ecris l'équation des coniques circonscrites au triangle ABC de telle sorte que les tangentes en B et C se coupent sur la hauteur correspondant à l'hypoténuse
 - Trouve l'équation de la conique circonscrite à ABC et dont le centre est le centre de gravité du triangle.
- N° 693. Ecris l'équation du cercle coupant la conique $x^2 + 3xy + 5y^2 - 1 = 0$ en deux points $A(1, 1)$ et $B(-1, 2)$.
- N° 694. Trouve l'équation de la conique passant par $(-6, 4)$, $(-8, 1)$, $(2, -4)$ et $(8, -3)$ d'axes parallèles aux axes de coordonnées.
- N° 695. Ecris l'équation de la conique passant par les points $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, -1)$, $(-3, 2)$ et $(-2, -1)$.

X.10. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

- N° 696. Détermine k pour que la conique d'équation $2x^2 - 2xy + ky^2 + 6x + 10y + 1 = 0$ ait pour centre C. Rép. : $k = 4$
- N° 697. Détermine le lieu du centre des familles des coniques données par l'équation $y^2 - 2\lambda xy + x^2 - 2y + 2\lambda x + 2 = 0$. Rép.: $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$.
- N° 698. Détermine le centre de la conique d'équation polaire $\rho = \frac{15}{3 - 2 \cos \omega}$.
 Rép. : $(6, 0^\circ)$

N° 699. La droite $x + y - 1 = 0$ est normale à la parabole $y^2 = 2px$. Calcule p .

Rép. : $p = \frac{2}{3}$

N° 700. Détermine l'équation de la tangente et l'équation de la normale à la parabole $\Gamma \equiv y^2 = 2x$ en son point d'abscisse 2 et d'ordonnée positive.

Rép : $t \equiv x - 2y + 2 = 0$ et $n \equiv 2x + y - 6 = 0$

N° 701. Trouve l'équation de la normale à la conique d'équation

$x^2 + xy - 2y^2 + 4x - y + 3 = 0$ au point $M(-5, 1)$. Rép : $2x - y + 11 = 0$

N° 702. On donne la conique $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 - xy - 5x + y + 1 = 0$.

Détermine les tangentes à issues du pt S (1, 2). Rép. : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ et $x = 1$

N° 703. Trouve les équations des tangentes à la conique $4y^2 - x^2 + 4y - x + 2 = 0$

parallèles à $4y + 3x + 8 = 0$. Rép.: $4y + 3x + 6 = 0$ et $4y + 3x + 1 = 0$

N° 704. Ecris les équations des tangentes communes aux coniques d'équations :

$y^2 = 5x$ et $9x^2 + 9y^2 = 16$. Rép : $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{3}$ et $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{3} = 0$

N° 705. Trouve le lieu des pieds des normales parallèles à la deuxième bissectrice à la conique $\Gamma \equiv xy - 1 + \lambda(xy + y + x) = 1$.

Rép : $x + y = 0$; $y - x + 1 = 0$ et $y - x - 1 = 0$

N° 706. Détermine les lieux des points des normales issues de l'origine à la conique $\Gamma \equiv x^2 + y^2 + \lambda(xy + y + x) = 1$. Rép. : $x^2 + y^2 - 1 = 0$

N° 707. Cherche les normales issues de l'origine aux coniques

a) $y^2 - 2x + 4y = 0$ Rép. : $y^2 + 6y + 10 = 0$

b) $xy - x^2 + 1 = 0$ Rép. : $y = (1 - \sqrt{2})x$

N° 708. Cherche les normales parallèles à la première bissectrice du système d'axes aux coniques.

a) $3xy + 2x - 5 = 0$ Rép. : $y = x - \frac{2}{3}$

b) $y^2 - 2x = 0$ Rép. : $y = x - \frac{3}{2}$

N° 709. Détermine la sous-tangente et la sous-normale à la conique $8x^2 + y^2 = 16$ au point d'abscisse 1 et d'ordonnée négative. Rép.: $\overline{ST} = 1$ et $\overline{SN} = -8$

N° 710. Trouve les sous-tangentes à la conique $\Gamma \equiv 2y^2 - 3xy + 2x - 2 = 0$ aux points T_1 et T_2 d'abscisse 3. Rép : $\overline{ST_1} = -\frac{14}{5}$ et $\overline{ST_2} = -7$;

N° 711. Détermine la sous-tangente et la sous-normale de la courbe

$$\Gamma \equiv 2y^2 - 3xy + 2x = -2 \text{ au point } P(3, \frac{1}{2}). \text{ Rép. : } \overline{ST} = -7 \text{ et } \overline{SN} = \frac{1}{28}$$

N° 712. Trouve l'angle formé par les coniques $xy = 8$ et $x^2 + y^2 - 20 = 0$.

$$\text{Rép. : } \text{Arc tan} \frac{3}{4} \text{ ou } \text{Arc tan} \left(-\frac{3}{4} \right)$$

N° 713. Les paraboles $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2a^2py$ se coupent sous un angle α tel que

$$\tan \alpha = \frac{1}{4}. \text{ Calcule } a : \quad \text{Rép. : } 3 + 2\sqrt{2} \text{ ou } -3 - 2\sqrt{2}$$

N° 714. On donne la conique d'équation $x^2 + 4y + 4 = 0$. On demande le lieu des points d'où on peut lui mener deux tangentes perpendiculaires.

$$\text{Rép. : } y = -\frac{1}{2}$$

N° 715. On donne l'ellipse d'équation $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Détermine la coordonnée du pôle de la droite $3x - 4y - 12 = 0$ par rapport à cette conique. Rép. : $(4, -3)$

N° 716. Soit le pôle $P(8, 4)$ et le cercle $x^2 + y^2 = 16$; Détermine de la polaire au pôle par rapport au cercle. Rép. : $2x + y - 4 = 0$

N° 717. Quel est le lieu du pôle de la droite $3y - x + 2 = 0$ par rapport à une conique d'équation $y^2 + 2xy + kx^2 + 3y + kx - 2 = 0$.

$$\text{Rép. : } 10x^2 + 2xy - 43x + 5y - 8 = 0$$

N° 718. Détermine le cercle de Monge du cercle d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + \sin 2t \\ y = 2 + \cos 2t \end{cases} \quad (t \text{ paramètre}) \quad \text{Rép. : } x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

N° 719. Trouve le lieu géométrique de la podaire du foyer de la parabole

$$2x^2 - y - 3x - 6 = 0. \quad \text{Rép. : } 8y + 57 = 0$$

N° 720. Détermine l'équation de l'hyperbole passant par le point $(1, 1)$ dont les asymptotes sont Ox et la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

$$\text{Rép. : } xy + y^2 + y - 3 = 0$$

N° 721. On donne l'hyperbole d'équation $x^2 + 3xy + 2y^2 + x - 9 = 0$.

Les asymptotes ont pour équations $x + y + a = 0$ et $x + 2y + b = 0$.

Détermine les valeurs de a et b . Rép. : $a = -1$ et $b = 2$

N° 722. Une hyperbole équilatère admet deux asymptotes, l'une d'équations

$x + 3y - 1 = 0$ et l'autre asymptote passe par le point $P(1, 1)$.

Détermine l'équation de cette dernière. Rép. : $-3x + y + 2 = 0$

N° 723. Détermine l'équation de la conique admettant les asymptotes
 $y - x - 3 = 0$ et $y + x - 1 = 0$ et qui est tangente à Oy.
 Rép. : $y^2 - x^2 - 4y - 2x + 4 = 0$

N° 724. Les équations de deux diamètres conjugués à l'ellipses $4y^2 + x^2 - 1 = 0$
 de manière que l'un d'eux forme avec l'axe Ox un angle de 45° sont de
 la forme : $a_1x + b_1y = 0$ et $a_2x + b_2y = 0$ avec $b_1 < 0$.
 Calcule : $a_1(3b_1 + b_2) \cdot a_2$. Rép : 1

N° 725. On donne la conique d'équation $\Gamma \equiv 5x^2 + 17y^2 + 14xy + 10x + 14y + 5 = 0$.
 Trouve l'équation du diamètre conjugué à la direction de la droite $y = x$.
 Rép : $x + 2y + 1 = 0$.

N° 726. Détermine a, b, et c pour que $y = x$ et $y + 3x = 0$ soient des diamètres
 conjugués dans les coniques d'équation :
 $y^2 - (c + 1)xy - 2cx^2 - (3 - b)y + (ab + 3)x + 10 = 0$. Rép : $a = -1$; $b = 3$ et $c = -2$

N° 727. Réduis les coniques suivantes :
 a) $\Gamma \equiv x^2 + 4xy - 2y^2 - 12x - 12y + 24 = 0$ Rép. : $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
 b) $\Gamma \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y = 0$ Rép. : $x^2 + 3y^2 - 8 = 0$
 c) $\Gamma \equiv x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ Rép. : $y^2 = \sqrt{2}x$

N° 728. a) Détermine l'axe de symétrie de la parabole
 $\Gamma \equiv x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$. Rép. : $x - y + 2 = 0$
 b) Trouve les axes et les sommets de la conique d'équation $4xy + 4y - 1 = 0$
 Rép. : $y + x + 1 = 0$, $y - x - 1 = 0$ et $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $S'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

N° 729. Détermine les axes de symétrie de chacune des coniques suivantes :
 a) $\Gamma \equiv y^2 + xy + x^2 - 5x - 4y + 2 = 0$. Rép. : $y + x - 3 = 0$ et $x - y - 1 = 0$
 b) $\Gamma \equiv x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$. Rép. : $x - y + 2 = 0$

N° 730. Trouve le lieu des sommets de la conique $\Gamma \equiv 4\lambda xy + 4y + 2x - 3 = 0$.
 Rép. : $4y^2 + 2x^2 - 3y - 3x = 0$ et $4y^2 - 2x^2 - 3y + 3x = 0$

N° 731. Détermine le lieu des foyers des coniques d'équation :
 a) $y^2 - 2xy + 6x^2 + 4\lambda y + 4\lambda x - 5 = 0$. Rép. : $x - y = 0$.
 b) $\lambda y^2 + 6y - 8\lambda x = 0$. Rép. : $y^2 + 3x - 16 = 0$.

N° 732. Détermine le foyer et la directrice de la conique d'équation
 $5x^2 + 9y^2 - 80x + 5y = -221$. Rép. : $F(4, -3)$ et $x = -1$

N° 733. Déterminer l'équation de l'hyperbole passant par le point $(1, 1)$ dont les

asymptotes sont Ox et la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

Rép. : $xy + y^2 + y - 3 = 0$.

N° 734. Détermine la nature de la conique :

a) passant par $(1, 6)$, $(-3, -2)$, $(-5, 0)$, $(3, 4)$ et $(0, 10)$.

Rép. : Hyperbole

b) passant par $(1, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, -2)$, $(-2, -1)$ et $(3, -3)$.

Rép. : Ellipse

N° 735. Trouve l'équation de la conique admettant comme asymptotes les droites d'équations $y = 2x + 3$ et $3y - x + 1 = 0$ et

a) qui passe par l'origine des axes. Rép. : $3y^2 - 7xy + 2x^2 - 8y + x = 0$.

b) qui est tangente à Oy . Rép. : $9y^2 - 21xy + 6x^2 - 24y + 3x + 16 = 0$

N° 736. Trouve l'équation de la conique passant par les points $A(1, 0)$, $B(0, 3)$,

$C(2, 0)$ et $D(0, -2)$ et admettant une asymptote à l'origine.

Rép. : $3y^2 - 26xy - 9x^2 - 3y + 27x - 18 = 0$ avec $xy = 0$ la solution singulière

N° 737. On donne $(b + c - a)y^2 + (b + c - 2a)xy + (c - a)x^2 + cx = 0$ avec $b = 2(a - c)$

a) Quelle forme ont ces courbes. Rép.: hyperboles équilatères

b) Quels sont leurs points communs quand a , b , c varient ? déduis-en la nature des coniques représentées par cette équation.

Rép. : $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ et $C(-1, 1)$. Coniques circonscrites à ABC

N° 738. On donne la famille des coniques d'équation $x^2 + y^2 + k(x + y) = 1$ où k est un paramètre réel. Le lieu du centre de ces conique est :

1. la seconde bissectrice des axes des coordonnées
2. deux droites perpendiculaires
3. un cercle passant par l'origine des axes
4. la première bissectrice des axes des coordonnées

5. une hyperbole équilatère non dégénérée

N° 739. La tangente à la conique $3xy - y + x + 1 = 0$ au point $M(0, 1)$ est parallèle à :

1. l'axe des x 3. la droite $y = 4x$ 5. la droite $y = -x$
2. l'axe des y 4. la droite $y = -4x$

N° 740. La tangente à la courbe d'équation $y = -4x^2 - 4x + 3$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ passe par le point :

1. $(1, -1)$ 2. $(0, 4)$ 3. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 4. $(0, 2)$ 5. $(1, 4)$

N° 741. On donne la conque d'équation : $5x^2 - 12xy + 6x - 36y - 63 = 0$.
La normale à la conique au point d'abscisse nulle a pour équation :

1. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 3. $y - 1 = \frac{3}{4}x$ 5. $y + \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}x$
2. $y - 3 = \frac{3}{2}x$ 4. $y + \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}x$

N° 742. La droite $x + y + 1 = 0$ est tangente à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ si et seulement si $p = ?$:

1. 0 2. -2 3. 2 4. $-\frac{2}{3}$ 5. $\frac{2}{3}$

N° 743. Le lieu des pieds de contact des tangentes issues du point $P(2, 5)$, à la famille des coniques $\Gamma \equiv x^2 - xy + \lambda$ est :

1. $x^2 - xy - 3x - y = 0$ 4. $2x^2 - 2xy + 2y + 2 = 0$
2. $2x^2 - 2xy + 9x - 2y = 0$ 5. $x^2 - xy = 0$
3. $12x^2 - 12xy - 7x + 6y = 0$

N° 744. L'équation du lieu des pieds des normales menées du point $(1, 1)$ à la famille des coniques $\Gamma \equiv 2x^2 - 3xy + y^2 + kx - 3y + 5$ est :

1. $y^3 - 3x^3 - 4y^2 + 2x^2 - 2xy + 8y + 3x - 5 = 0$
2. $y^3 + 2x^3 + y^2 + 3x^2 - xy + 3y + 2x - 5 = 0$
3. $y^3 + 4x^3 + 5y^2 + 7x^2 + 4xy + 3y - 2x - 5 = 0$
4. $y^3 + 5x^3 - 3y^2 + 4x^2 - xy + 3y + 2x - 5 = 0$
5. $y^3 - 3x^3 + 2y^2 - 7x^2 - 3xy + 4y - 5x - 5 = 0$

N° 745. Soit $\Gamma \equiv y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2y - 2\lambda x + 2$

Le lieu des points de contact des tangentes issues de l'origine à la famille des coniques Γ est composé de :

1. deux droites parallèles 3. une parabole 5. une ellipse
2. un cercle 4. une hyperbole

N° 746. Le lieu des points de rencontre de la polaire de l'origine par rapport à la conique $\lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda y + 2 = 0$ représente :

1. une ellipse
2. une droite
3. une hyperbole
4. une parabole
5. un point

N° 747. On donne la famille des coniques $y^2 + \lambda xy + x^2 + y - x - 1 = 0$. Le lieu du pôle de la droite $y - 2x + 1 = 0$ à cette conique a pour équation :

1. $3y^2 - 2xy - x^2 - y + 3x = 0$
2. $y^2 - xy + 3y + 5x = 0$
3. $3y^2 + xy - 5x^2 + 4y = 0$
4. $y^2 + x^2 + 5y + 3x = 0$
5. $y^2 - x^2 + 3y + 3x = 0$

N° 748. Soit $P(a, b)$ le pôle de la droite d'équation $4x - 5y - 7 = 0$ par rapport à la conique d'équation $3x^2 - 2xy - 3x + 1 = 0$ le nombre $\frac{a}{b^2} =$

1. $\frac{25}{2}$
2. $\frac{25}{4}$
3. -25
4. $\frac{4}{5}$
5. $\frac{200}{41}$

N° 749. Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la conique $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$ est un cercle centré à l'origine et de rayon :

1. $9\sqrt{2}$
2. 3
3. 18
4. $3\sqrt{2}$
5. 4

N° 750. La conique qui admet les asymptotes $y - x + 3 = 0$ et $y + x - 1 = 0$ et qui est tangente à Ox est :

1. $y^2 - x^2 - 4y - 4x - 4 = 0$
2. $y^2 - x^2 - 2y - 2x - 1 = 0$
3. $y^2 - x^2 - 3y - 2x - 1 = 0$
4. $y^2 - x^2 + 2y + 4x - 4 = 0$
5. $y^2 - x^2 - 4x - 6x - 9 = 0$

N° 751. Le lieu d'où on voit une hyperbole équilatère sous un angle droit est constitué par :

1. deux droites sécantes
2. une droite
3. un cercle
4. un point
5. une hyperbole équilatère

N° 752. En axes cartésiens d'angle θ . L'équation $x^2 - 2xy + x + y + 1 = 0$ représente une hyperbole équilatère si θ vaut :

1. $\frac{\pi}{2}$
2. $\frac{\pi}{3}$
3. $\frac{3\pi}{4}$
4. $\frac{2\pi}{3}$
5. $\frac{\pi}{4}$

N° 753. On donne l'équation $x^2 + 4xy + \lambda y^2 - 12x - 12y + 24 = 0$

a) L'équation ci-dessus représente une hyperbole transverse pour :

1. $0 < \lambda < 1$
2. $0 < \lambda < 4$
3. $\lambda < 0$ ou $1 < \lambda < 4$
4. $\lambda > 0$
5. $\lambda < 4$

b) Pour $\lambda = -2$, l'équation réduite de la conique est :

1. $2y^2 - 3x^2 - 6 = 0$
2. $3y^2 + 2x^2 - 6 = 0$
3. $2y^2 + 3x^2 - 6 = 0$

$$2. -3y^2 - 2x^2 - 6 = 0 \quad 4. 3y^2 - 2x^2 + 6 = 0$$

N° 754. L'équation $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ peut être réduite à $Ly^2 +$

$$Ux = 0, \text{ alors } 3L - \sqrt{2}U = ?$$

1. 8 2. 2 3. -10 4. -8 5. 10

N° 755. La droite $\lambda y + x - 1 = 0$ est un diamètre de la conique d'équation

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0 \text{ si } \lambda =$$

1. 4 2. -
8 3. -
4 4. 5 5. -2

N° 756. Pour la parabole $y^2 = 4x$, l'équation du diamètre conjugué aux cordes parallèles à $y = 2x + 2$ est :

1. $y = 0$ 2. $y = 2$ 3. $y = 1$ 4. $y = 4$ 5. $y = -\frac{x}{2} + 2$

N° 757. Dans l'ellipse d'équation $20x^2 + 21y^2 = 420$, on considère le diamètre d, d'équation $7y - 4x = 0$. Le diamètre conjugué à d passe par le point des coordonnées.

1. (6, -10) 2. (6, -8) 3. (6, 4) 4. (5, 4) 5. (3, 8)

N° 758. On donne la conique d'équation $\Gamma \equiv y^2 - 2xy - 3x^2 + 4y - 2x = 0$.

La direction du diamètre conjugué à la direction $m = -3$ est

1. 0 2. $\frac{5}{7}$ 3. -1 4. $-\frac{8}{5}$ 5. $\frac{3}{4}$

N° 759. Soit la conique $5x^2 - 12xy + 6x - 36y - 36 = 0$. Les coordonnées des foyers sont :

1. $(0, \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}, 0)$ 3. (0, 2) et (-2, 0) 5. (0, -4) et (-6, 0)
2. (1, 3) et (1, -5) 4. (-7, 0) et (9, 0)

N° 760. Les points à l'infini sur l'hyperbole $x^2 - y^2 - 1 = 0$ ont pour coordonnées :

1. $(\pm 1, 1, 1)$ 2. (1, 1, $+\infty$) 3. (1, $\pm 1, 0$) 4. $(\pm 1, 0, 1)$ 5. $(\pm 1, 1, 0)$

N° 761. Une conique passe par les points (1, 6), (-3, -2), (-5, 0), (3, 4) et (0, 10). Son équation est donnée par :

1. $x - 2xy + y - 8 = 0$ 3. $xy - 3x + y - 14 = 0$ 5. $x - 3xy + y - 11 = 0$
2. $xy + x - y + 12 = 0$ 4. $xy - 2x + y - 10 = 0$

CHAPITRE XI : ETUDE DES CONIQUES PARTICULIERES

A. OBJECTIFS

1. Définir et établir les équations de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole d'axes parallèles aux axes des coordonnées ;
2. Enumérer les différentes caractéristiques de ces coniques ;
3. Dédire les éléments d'étude ;
4. Etablir les équations paramétriques de chacune de coniques ;
5. Construire les coniques.

B. ACTIVITES

1. Le professeur Ntumba Badibanga de l'institut Monseigneur Bokeleale de Kinshasa possède une concession privée, parfaitement rectangulaire délimitée par les points $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ et $C(0,4)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Il souhaite y inscrire une surface elliptique qui lui servira d'élevage des porcs. Il charge ses élèves :
 - a) de l'aider à trouver l'équation de cette ellipse et de déterminer ses foyers ;
 - b) de calculer l'aire de la surface elliptique ainsi créée ;
 - c) de déduire ce qui resterait de la surface initiale de la concession.
2. L'ingénieur Toty Ngho conçoit un réservoir cylindrique dont les bases sont les ellipses d'équations respectives $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$ et $9x^2 + 4y^2 - 180x - 8y + 868 = 0$. Afin de connaître la capacité de ce réservoir, il propose aux élèves de la quatrième année des humanités scientifiques de :
 - a) donner le schéma de ce réservoir.
 - b) calculer la quantité maximale de carburant que contiendrait ce réservoir.
3. Monsieur Damien Talabot, conducteur des travaux dans un chantier, doit matérialiser un schéma conçu par l'architecte chef du chantier. Il demande à monsieur Damien de :
 - a) tracer dans un repère orthonormé la courbe $\Gamma \equiv 3x^2 + 5y^2 - 480 = 0$ et la droite $d \equiv y - 3x + 24 = 0$ et de noter par P le point d'intersection de la courbe et de la droite, d'ordonnée positive,
 - b) former l'équation de la tangente en P à Γ , ainsi que celle de la normale en P.

c) noter par T et N, les points d'intersection de la tangente et de la normale avec l'axe Ox .

d) dire la nature du triangle TNP, puis de calculer sa surface.

4. Profitant de ce qui précède, monsieur Mabaya, enseignant de mathématique au lycée Motema Mpiko demande à ses élèves de quatrième humanité scientifiques de calculer les abscisses des foyers F et F' de l'ellipse d'équation

$x^2 + 3y^2 - 27 = 0$. Le cercle de diamètre F'F rencontre l'ellipse en quatre points dont il faut connaître les coordonnées. Il leur demande de montrer que ces quatre points et les deux foyers font partie des douze sommets d'un polynôme régulier.

5. L'enseignant Batodisa du C.S. Aurore de Kinshasa propose à ses élèves de quatrième année scientifique l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ dont l'un des foyers est en F (3, 0). Il ajoute la droite de pente -2 passant par F qui rencontre l'ellipse en deux points B et C ainsi que les tangentes à l'ellipse en B et C qui se rencontrent en D. Il leur demande de calculer l'aire du triangle BCD.

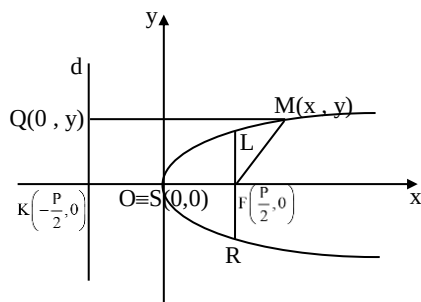
C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

XI.1. PARABOLE

XI.1.1. DEFINITION

Une parabole est le lieu géométrique des points du plan situés à égale distance d'un point fixe et d'une droite fixe. Le point fixe est le foyer de la parabole et la droite en est la directrice.

XI.1.2. EQUATION



Soit P une parabole, F son foyer et d sa directrice.

Choisissons les axes de coordonnées de telle manière que :

- l'axe des x passe par F, perpendiculaire à la directrice d et K le pied de l'axe sur cette perpendiculaire.
- l'axe des y est la médiatrice du segment [KF].

Appelons p la distance $|KF|$

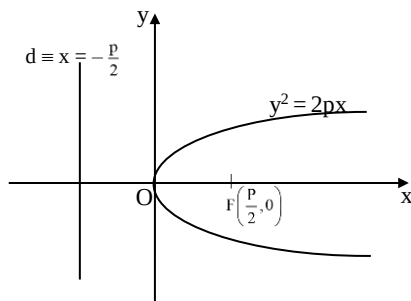
Il en résulte que la coordonnée du foyer est $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et l'équation de la directrice est $x = -\frac{p}{2}$.

Si $M(x, y)$ est un point de la parabole, par définition, on a :

$$\begin{aligned} (|MF| = |Md|) &\Leftrightarrow \left[\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \right] \\ &\Leftrightarrow (y^2 = 2px). \text{ C'est l'équation réduite de la parabole.} \end{aligned}$$

XI.1.3. CARACTERISTIQUES

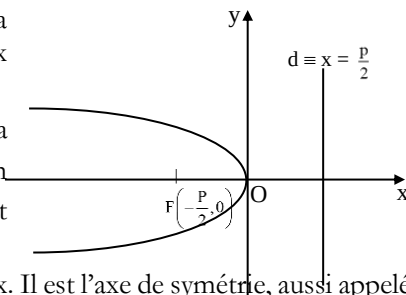
- a) La parabole d'équation $y^2 = 2px$ a pour sommet, $O(0, 0)$, l'origine des axes.
 b) – Si l'abscisse de chacun de ses points est supérieure à l'abscisse de son sommet, la parabole a sa concavité tournée vers les x positifs. Elle se met à droite de l'axe Oy . Son équation est : $y^2 = 2px$.



- Dans ce cas, son foyer est $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, la directrice associée à F a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ et la tangente à son sommet est l'axe Oy .

- c) – Si l'abscisse de chacun de ses points est inférieure à l'abscisse de son sommet, la parabole a sa concavité tournée vers les x négatifs. Son équation est : $y^2 = -2px$.

- Dans ce cas, son foyer est $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, la directrice associée à F a pour équation $x = \frac{p}{2}$ et la tangente à son sommet est l'axe Oy .



d) Ox est l'axe focal de la parabole $y^2 = -2px$. Il est l'axe de symétrie, aussi appelé axe principal.

e) La longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe (latus rectum) vaut

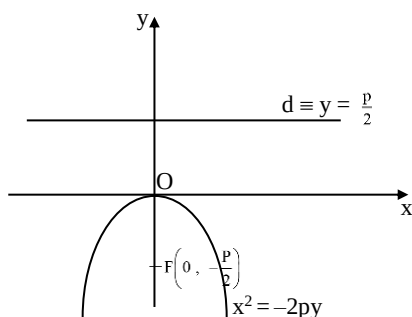
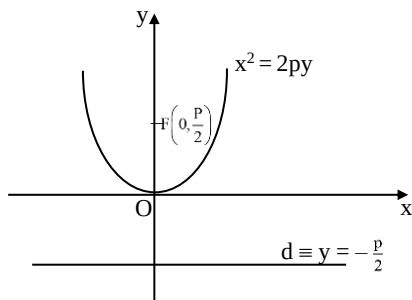
$$\mathbf{LR = 2p.}$$

f) L'excentricité est $e = 1$.

g) Le segment joignant un point de la parabole au foyer est appelé rayon focal.

XI.1.4. AUTRES FORMES DE L'EQUATION D'UNE PARABOLE

- a) Si l'axe focal est Oy et le sommet (0, 0) alors l'équation de la parabole est : $x^2 = 2py$ ou $x^2 = -2py$.



– le foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

– la directrice a pour équation $y = -\frac{p}{2}$

– la tangente au sommet est l'axe Ox

– le foyer $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$

– la directrice a pour équation $y = \frac{p}{2}$

– la tangente au sommet est l'axe Ox .

- b) Si le sommet est $S(\alpha, \beta)$ et l'axe focal parallèle à Ox alors :

– l'équation de la parabole est :

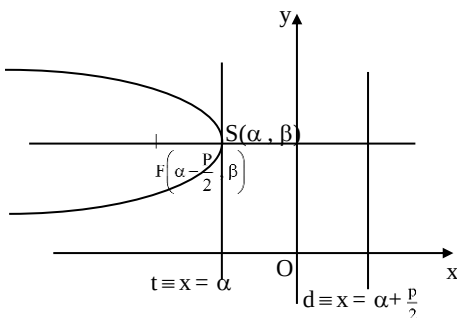
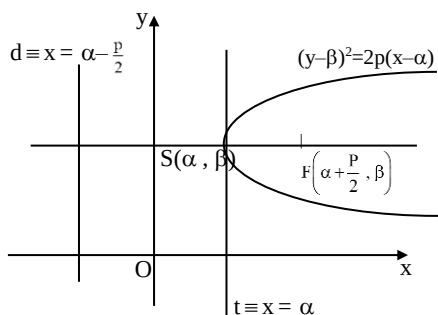
$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha) \quad (i)$$

(i) et (ii) peuvent s'écrire :

$$y^2 + Ay + Bx + F = 0$$

– l'équation de la parabole est :

$$(y-\beta)^2 = -2p(x-\alpha) \quad (ii)$$



– Le foyer est $F\left(\alpha + \frac{p}{2}, \beta\right)$

– La directrice est d'équation $x = \alpha - \frac{p}{2}$

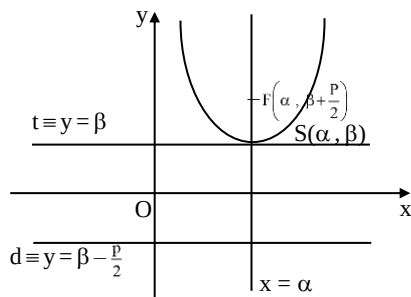
– Le foyer est $F\left(\alpha - \frac{p}{2}, \beta\right)$

– La directrice est d'équation $x = \alpha + \frac{p}{2}$

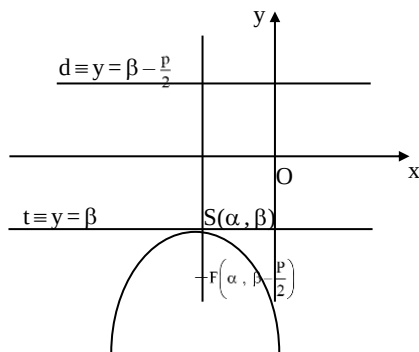
- La tangente au sommet est la droite d'équation $x = \alpha$.
- La tangente au sommet est la droite d'équation $x = \alpha$.

c) Si le sommet est $S(\alpha, \beta)$ et l'axe focal parallèle à Oy alors :

- l'équation de la parabole est : $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ (i)
- l'équation de la parabole est : $(x-\alpha)^2 = -2p(y-\beta)$ (ii)
- (i) et (ii) peuvent s'écrire : $x^2 + Dy + Ex + F = 0$



- Le foyer est $F(\alpha, \beta + \frac{p}{2})$
- La directrice est d'équation $y = \beta - \frac{p}{2}$
- La tangente au sommet est la droite d'équation $y = \beta$.
- Le foyer est $F(\alpha, \beta - \frac{p}{2})$
- La directrice est d'équation $y = \beta + \frac{p}{2}$
- La tangente au sommet est la droite d'équation $y = \beta$



Remarque

La podaire du foyer est la tangente au sommet de la parabole.

XI.1.5. ELEMENTS D'ETUDE DE LA PARABOLE $y^2 = 2px$

L'étude des éléments d'une conique développée au chapitre XIII permet de tirer les résultats suivants :

a) Equation de la tangente au point $M(x_1, y_1)$ de la parabole

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1) \quad (1)$$

b) Equation de la tangente parallèle à la direction m . $y = mx + \frac{p}{m}$ (2)

c) Equation des tangentes issues d'un point $M(x_1, y_1)$ extérieur à la parabole

On résout le système : $\begin{cases} yy_1 = p(x + x_1) \\ y^2 = 2px \end{cases}$ (3)

Ce système donne les points $P(x_2, y_2)$ comme solution et la tangente est donnée par la droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .

Remarques

- On peut aussi utiliser la méthode générale de l'équation aux abscisses (ou aux ordonnées).
- La relation $yy_1 = p(x + x_1)$ représente dans ce cas la corde de contact des tangentes issues de M.

a. Equation de la normale au point $M(x_1, y_1)$ de la parabole $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$

b. *Sous-tangente au point $M(x_1, y_1)$ de la parabole*

$\overline{ST} = 2x_1$: la sous-tangente vaut le double de l'abscisse du point de contact.

c. *Sous-normale au point $M(x_1, y_1)$ de la parabole*

$\overline{SN} = p$: La sous-normale est constante et vaut le paramètre de la parabole.

d. Equation de la droite orthoptique $x = -\frac{p}{2}$, c'est la directrice de la parabole.

e. Podaire du foyer $x = 0$: c'est la tangente au sommet

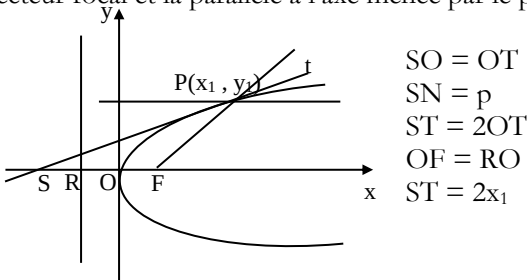
f. Diamètre conjugué au système des cordes parallèles à la direction m $y = \frac{p}{m}$

Remarque

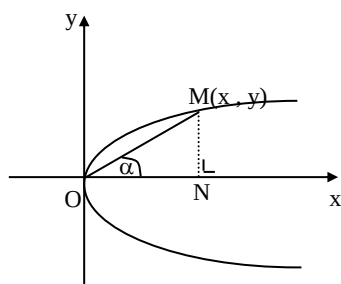
En raisonnant de la même manière, on peut déterminer les éléments d'étude des autres formes de parabole.

XI.1.6. PROPRIETATE

La tangente en un point de la parabole est la bissectrice de l'angle formé par le rayon-vecteur focal et la parallèle à l'axe menée par le point de contact.



XI.1.7. EQUATIONS PARAMETRIQUES DE LA PARABOLE $y^2 = 2px$



Le repère étant orthonormé, considérons la parabole $y^2 = 2px$.

Soit $M(x, y)$ un point différent de l'origine de cette parabole.

La coordonnée de M peut s'écrire $\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$

Soit α la mesure de l'angle déterminé par la direction positive de Ox et $\overrightarrow{OM}$

Du triangle rectangle OMN , on tire : $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ et $\tan \alpha = \frac{2p}{y}$

Par suite, $x = \frac{y}{\tan \alpha}$ et $y = \frac{2p}{\tan \alpha}$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x = \frac{2p}{\tan^2 \alpha} \\ y = \frac{2p}{\tan \alpha} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2p \cot^2 \alpha \\ y = 2p \cot \alpha \end{cases}$$

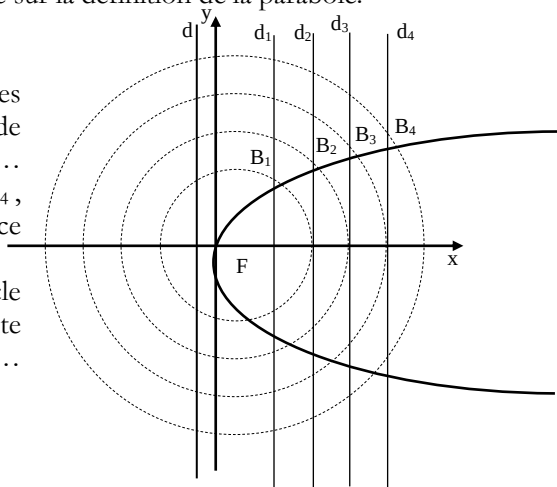
En posant $\cot \alpha = t$, on obtient : $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$

XI.1.8. CONSTRUCTION

Le procédé exposé ci-dessous est basé sur la définition de la parabole.

Procédé :

- Placer le foyer F et la directrice d ;
- Tracer un certain nombre des cercles concentriques en F et de rayons respectifs $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$
- Tracer les parallèles $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ à d respectivement à la distance $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$ de d ;
- Les intersections de chaque cercle avec la parallèle correspondante sont les points $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ de la parabole.



Exercices résolus

1. Trouve l'équation de la parabole P de foyer $F(0, -1)$ et de directrice associée $d_F \equiv y = 1$.

Résolution

Soit $M(x, y)$ un point de la parabole, par définition

$$P \equiv |MF| = |Md|$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} [\sqrt{(0-x)^2 + (-1-y)^2} = |y-1|] &\Leftrightarrow (x^2 + 1 + 2y + y^2 = y^2 - 2y + 1) \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4y = 0) \end{aligned}$$

L'équation de la parabole est : $x^2 + 4y = 0$

2. On donne la parabole d'équation $y^2 - 11x = 0$

Détermine :

- la coordonnée de sommet
- l'équation de l'axe de symétrie
- la coordonnée du foyer
- l'équation cartésienne de la directrice
- la longueur de latus rectum ou la longueur de la corde focale

Résolution

a) Le sommet de la parabole $y^2 - 11x = 0$ est $S(0, 0)$.

b) L'axe de symétrie est $y = 0$

c) Par définition, nous avons : $(2p = 11) \Leftrightarrow (p = \frac{11}{2})$

Le foyer est $F(\frac{11}{4}, 0)$

d) L'équation cartésienne de la directrice est : $x = -\frac{11}{4}$

e) La longueur de la corde focale est : $2p = 11$

3. Trouve l'équation de la parabole de sommet $(3, 2)$ et de foyer $(5, 2)$.

Résolution

L'ordonnée du foyer et du sommet étant la même, l'équation de cette parabole est de la forme : $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$. Nous avons : $(y - 2)^2 = 2p(x - 3)$

Le foyer a la forme $F(\alpha + \frac{p}{2}, \beta)$. Par identification,

$$\begin{aligned} F(5, 2) \text{ et } F(\alpha + \frac{p}{2}, \beta), \text{ nous obtenons : } (\alpha + \frac{p}{2} = 5) &\Leftrightarrow (3 + \frac{p}{2} = 5) \\ &\Leftrightarrow (p = 4) \end{aligned}$$

L'équation de la parabole est : $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$ ou $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

4. a) Trouve l'équation de la parabole P de sommet $S(3, -2)$ et de directrice

$$d \equiv y = \frac{-5}{2}.$$

b) Détermine le foyer de cette parabole.

Résolution

a) Nous constatons que la parabole a la concavité tournée vers les y positifs et son équation est : $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$. Nous avons : $(x - 3)^2 = 2p(y + 2)$

La distance entre la directrice et le sommet est : $\frac{p}{2}$

$$(\frac{p}{2} = \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (p = 1)$$

Nous obtenons : $(x - 3)^2 = 2(y + 2)$ ou $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$
comme équation de la parabole.

b) $\left[F\left(\alpha, \beta + \frac{p}{2}\right) \right] \Leftrightarrow \left[F\left(3, -\frac{3}{2}\right) \right]$

5. On donne la parabole d'équation : $y^2 + 8y + 10x + 46 = 0$

Détermine :

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) la coordonnée du sommet | d) l'équation cartésienne de la directrice |
| b) l'équation de l'axe de symétrie | e) la longueur de la corde focale
perpendiculaire à l'axe. |
| c) la coordonnée du foyer | |

Résolution

a) Nous avons : $(y^2 + 8y = -10x - 46) \Leftrightarrow (y^2 + 8y + 16 = -10x - 46 + 16)$
 $\Leftrightarrow [(y + 4)^2 = -10(x + 3)]$

La coordonnée du sommet est : $S(-3, -4)$.

b) L'équation de l'axe de symétrie est : $y = -4$

c) La coordonnée du foyer est donnée par $F\left(-\frac{p}{2} + \alpha, \beta\right)$

Nous savons que : $(2 | p | = 10) \Leftrightarrow (p = 5)$

Nous obtenons : $-\frac{p}{2} + \alpha = -\frac{5}{2} - 3$
 $= -\frac{11}{2}$

La coordonnée du foyer est : $F\left(-\frac{11}{2}, -1\right)$

d) L'équation cartésienne de la directrice est donnée par $d_f \equiv y = \alpha + \frac{p}{2}$

Nous avons $d_f \equiv y = -\frac{1}{2}$

e) La longueur de la corde focale est : $2p = 10$

6. Trouve l'équation de la parabole P d'axe parallèle à l'axe Ox passant par les points $(-2, 1)$, $(1, -2)$ et $(-1, 3)$.

Résolution

L'équation est de la forme : $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Les points $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$ et $C(-1, 3)$ appartiennent à la courbe signifie que

nous avons le système :
$$\begin{cases} 1 - 2D + E + F = 0 \\ 4 + D - 2E + F = 0 \\ 9 - D + 3E + F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{10}{3} \\ E = -\frac{7}{3} \\ F = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

L'équation de la parabole est : $3y^2 - 10x - 7y - 16 = 0$.

Exercices

N° 762. On demande une équation cartésienne de chacune des paraboles dont le sommet est le point $O(0, 0)$. Pour chacune d'elles, on donne en plus :

- a) le foyer : $F(0, -1)$
- b) le foyer : $F(4, 0)$
- c) la directrice d'équation $x - 3 = 0$
- d) la directrice d'équation $y + 5 = 0$
- e) le foyer $F(2, 0)$ et l'équation de la directrice $x = -2$
- f) le foyer $F(-4, 0)$ et l'équation de la directrice $x = 4$
- g) le foyer $F(0, -1)$ et l'équation de la directrice $y = 1$
- h) le foyer $F(0, 3)$ et l'équation de la directrice $y = -3$
- i) l'axe focal est Ox, l'abscisse du foyer est positive, le paramètre 3
- j) l'axe focal est Oy, l'ordonnée du foyer est négative, le paramètre 5
- k) l'axe focal est Oy et un point $P(3, -4)$ de la parabole.

- N° 763. a) Détermine l'équation de la parabole dont le sommet est l'origine du repère et l'axe de symétrie est Ox si de plus elle comprend le point $A(4, 3)$.
- b) Détermine l'équation de la parabole dont le sommet est l'origine du repère et l'axe de symétrie est Oy si de plus elle comprend le point $B(-1, 5)$

- N° 764. Etablis une équation cartésienne du lieu des points du plan équidistants

- a) du point $P(-2, 0)$ et de la droite d'équation $y = 3$
- b) du point $P(0, 4)$ et de la droite d'équation $y + 2 = 0$

- N° 765. Trouve l'équation de la parabole connaissant les éléments suivants :

- a) le foyer $F(1, 5)$ et le sommet $S(1, 3)$
- b) le foyer $F(2, -4)$ et le sommet $S(6, -4)$

- N° 766. Détermine les coordonnées du sommet et du foyer, le latus rectum et l'équation de la directrice de chacune des paraboles suivantes :

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $y^2 = 4x + 5$ | e) $4y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$ | i) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ |
| b) $y^2 = 2 - x$ | f) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ | j) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$ |
| c) $x^2 = 4(y + 1)$ | g) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$ | |
| d) $(y + 1)^2 = 10(x - 1)$ | h) $y^2 + 16y + 4x + 9 = 0$ | |

- N° 767. Détermine une équation cartésienne de la parabole P
- a) d'axe horizontal et qui comprend les points suivants : $A(-2, 3)$; $B(2, 7)$ et $C(-1, 1)$
 - b) d'axe vertical et qui comprend les points suivants : $A(1, 3)$; $B(-2, \frac{3}{2})$ et $C(3, 9)$

- N° 768. Soit $P_1 \equiv y^2 = 5x$ et $P_2 \equiv x^2 = 2y$. Pour chacune de ces coniques

- a) détermine les coordonnées du sommet, la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe focal, une équation cartésienne de l'axe, la coordonnée du foyer et une équation cartésienne de la directrice.
b) effectue une construction point par point de chacune de ces coniques.

N° 769. Trouve la distance du foyer de la parabole $y^2 = -6x$ à la droite d'équation $5x + 15y - 23 = 0$.

N° 770. Pour quel point de la parabole $y^2 = 18x$, l'ordonnée est-elle égale à trois fois l'abscisse ?

N° 771. Trouve l'équation de chacune des paraboles qui sont déterminées de la manière suivante :

- a) le sommet est sur la droite $3x - 2y - 19 = 0$, le foyer sur la droite $x + 4y = 0$, le sommet sur la droite $3x - 2y - 19 = 0$ et la directrice est la droite $x = 2$.
b) le latus rectum est 6 ; la directrice est la droite $y + 3 = 0$ et le foyer est sur la droite $2x - y + 1 = 0$.

N° 772. Construis les paraboles suivantes :

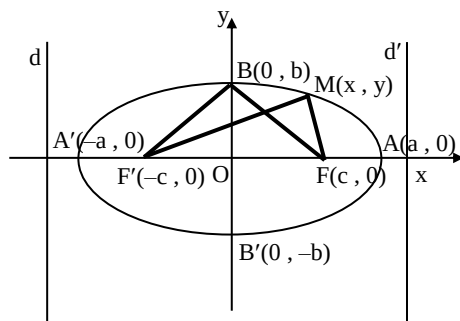
- a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = -6y$ c) $3y^2 + 10x = 0$ d) $2x^2 + 15y = 0$

XI.2. ELLIPSE

XI.2.1. DEFINITION

L'ellipse est le lieu des points du plan π dont la somme de distances à deux points fixes appelés foyers est constante.

XI.2.2. EQUATION



Soit E une ellipse, F et F' ses foyers. Choisissons les axes des coordonnées de telle manière que :

- l'axe des x passe par F et F'.
- l'axe des y soit la médiatrice du segment $[F'F]$.

Appelons $2c$ la distance des foyers : $|FF'| = 2c$

Il en résulte que les coordonnées des F' et F sont respectivement $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.
Soit $M(x, y)$ est un point de l'ellipse.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} (|MF| + |MF'| = 2a) &\Leftrightarrow (\sqrt{(-c-x)^2 + (c-y)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = 2a) \quad (a > 0) \\ &\Leftrightarrow (-x^2 - c^2 + a^2x^2 = a^4 - a^2c^2) \\ &\Leftrightarrow [(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)] \end{aligned}$$

On obtient la relation : $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ (1)

Dans le triangle $F'FM$, on a :

$$(|F'F| < |F'F'| + |MF|) \Rightarrow (2c < 2a) \Rightarrow (a^2 > c^2) \Rightarrow (a^2 - c^2 > 0)$$

En posant $b^2 = a^2 - c^2$, l'équation (1) devient :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ou } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2).$$

C'est l'équation réduite de l'ellipse.

XI.2.3. CARACTERISTIQUES

- a) L'origine des axes $O(0, 0)$ est le centre de cette ellipse
- b) Ox et Oy sont les axes de symétrie
- c) Ox est l'axe focal
- d) L'ellipse rencontre Ox en deux points A' et A symétriques par rapport à l'origine. Leurs coordonnées respectives sont $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

Le segment de droite $[A'A]$ est le grand axe. Sa longueur vaut $2a$.

- e) L'ellipse rencontre l'axe Oy en deux points B' et B symétriques par rapport à l'origine. Leurs coordonnées respectives sont $(0, -b)$ et $(0, b)$.

Le segment de droite $[B'B]$ est le petit axe. Sa longueur vaut $2b$

- f) Les points A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse

g) L'excentricité $e = \frac{|FM|}{|dM|} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ avec $0 < e < 1$

- h) L'ellipse ayant deux foyers, elle a deux directrices d'équations $x + \frac{a}{e} = 0$ et $x - \frac{a}{e} = 0$ qui peuvent encore s'écrire : $x = -\frac{a^2}{c}$ et $x = \frac{a^2}{c}$

Elles sont les polaires des deux foyers.

- i) Le rayon focal est le segment de droite joignant un point de l'ellipse au foyer.
- j) Le latus rectum vaut : $\frac{2b^2}{a}$ et la distance $|FF'| = 2c$ est appelée distance focale.

XI.2.4. AUTRES FORMES DE L'EQUATION DE L'ELLIPSE

a) Si le centre est $(0, 0)$ et l'axe focal est Oy alors :

– son équation est : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a < b$)

– les foyers sont $F'(0, -c)$ et $F(0, c)$

– les directrices associés à F' et F ont pour équations $y + \frac{a}{e} = 0$ et $y - \frac{a}{e} = 0$

b) Si l'ellipse a pour centre (α, β) et axe focal parallèle à l'axe Ox, alors :

– son équation est : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

– les foyers sont : $F'(\alpha - c, \beta)$ et $F(\alpha + c, \beta)$

– les directrices associées à F' et F ont pour équations respectives :

$$x = \alpha - \frac{a}{e} \text{ et } x = \alpha + \frac{a}{e}$$

c) Si l'ellipse a pour centre (α, β) et l'axe focal parallèle à l'axe Oy, alors :

– son équation est $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$

– les foyers sont $F'(\alpha, \beta - c)$ et $F(\alpha, \beta + c)$

– les directrices associées à F' et F ont pour équations respectives :

$$y = \beta - \frac{a}{e} \text{ et } y = \beta + \frac{a}{e}$$

d) Si $a = b$, alors l'équation de l'ellipse devient celle du cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

XI.2.5. ELEMENTS D'ETUDE DE L'ELLIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Equation de la tangente au point $M(x_1, y_1)$ de l'ellipse

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \quad \text{ou} \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

b) Equation de la normale au point $M(x_1, y_1)$ de l'ellipse

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

c) Equation de la tangente parallèle à la direction m

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

d) Equations des tangentes issues d'un $M(x_1, y_1)$ extérieur à l'ellipse.

On procède comme pour la parabole.

e) Cercle orthoptique ou cercle de Monge $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

f) Podaire du foyer $x^2 + y^2 = a^2$

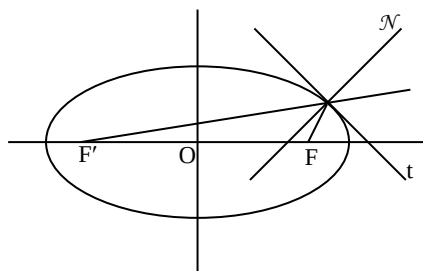
g) Diamètre conjugué à un système de cordes de direction m .

$$y = \frac{-b^2}{a^2 m} x. \text{ Son coefficient angulaire est. } m' = \frac{-b}{a^2 m}$$

$$\text{Ainsi, la relation aux directions conjuguées est } mm' = \frac{-b^2}{a^2}$$

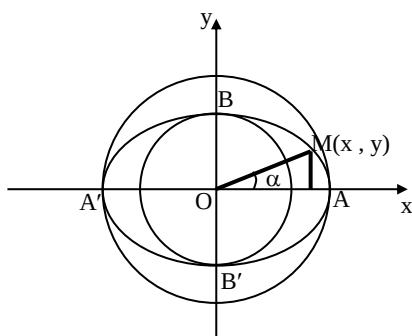
b) Aire de la surface limitée par une ellipse $S = \pi ab$

XI.2.6. PROPRIETE



La tangente et la normale en un point d'une ellipse sont respectivement les bissectrices extérieure et intérieure des angles formés par les droites (rayons focaux) qui joignent ce point aux foyers.

XI.2.7. EQUATION PARAMETRIQUE DE L'ELLIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



On sait que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Par identification,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

En posant $\frac{x}{a} = \cos \alpha$ et $\frac{y}{b} = \sin \alpha$,

on obtient le système $\begin{cases} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{cases}$ qui représente les équations paramétriques de l'ellipse..

* Le cercle de centre O et de rayon a est appelé le **cercle principal**

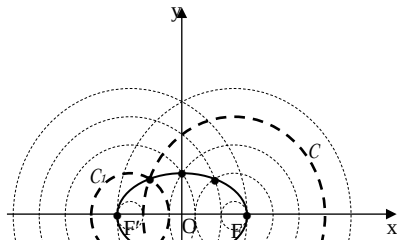
* le cercle de centre O et de rayon b est appelé **cercle secondaire**

XI.2.8. CONSTRUCTION

Il existe plusieurs méthodes pour construire une ellipse. Nous vous proposons celle dite des cercles concentriques.

Procédé

- Placer les foyers F' et F sur la droite



- Tracer un certain nombre de cercles concentriques $C, C', C'' \dots$ de centre F et de rayons $R, R', R'' \dots$
- Tracer d'autres cercles $C_1, C_1', C_1'' \dots$ de centre F' et de rayons $2a - R, 2a - R', 2a - R'' \dots$
- Les intersections des cercles C et C_1, C' et C_1', C'' et $C_1'' \dots$ sont les points de l'ellipse.

Remarque

On peut faire l'étude graphique de la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Il suffit d'expliciter la fonction sous forme $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Ces deux graphiques peuvent être réalisés en utilisant la symétrie par rapport à l'axe Ox .

Exercices résolus

1. On donne l'ellipse d'équation $x^2 + 2y^2 = 36$.

Trouver son centre, ses demi-axes, ses sommets, ses foyers, son excentricité, les équations de ses directrices et la longueur du latus rectum.

Résolution

L'équation $x^2 + 2y^2 = 36$ s'écrit aussi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- C'est l'équation de l'ellipse centrée à l'origine $O(0, 0)$ et d'axe focal Ox .
- Le demi-grand axe vaut $a = 6$ et le demi-petit axe vaut $b = 3\sqrt{2}$
- Les sommets sont : $(-6, 0), (6, 0), (0, -3\sqrt{2})$ et $(0, 3\sqrt{2})$
- Nous savons que : $(c^2 = a^2 - b^2) \Leftrightarrow (c = \sqrt{a^2 - b^2}) \Leftrightarrow (c = 3\sqrt{2})$
Les foyers sont : $F'(-3\sqrt{2}, 0)$ et $F(3\sqrt{2}, 0)$
- L'excentricité est : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Les équations des directrices sont données par $x = -6\sqrt{2}$ et $x = 6\sqrt{2}$
- La longueur du latus rectum est $LR = \frac{2b^2}{a} = 6$

2. Trouve l'équation de l'ellipse E rapporté à ses axes de symétrie, ayant pour excentricité $\frac{1}{2}$ et pour directrice les droites d'équations $x = \pm 8$

Résolution

Nous avons : $\left(e = \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{c}{a} = \frac{1}{2}\right)$
 $\left(x = \frac{a}{e}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{e} = 8\right)$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{a^2}{c} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Nous obtenons : } b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{3} \text{ et } E \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

3. Trouve l'équation de l'ellipse de centre (4, -1), de foyer (1, -1) et passant par le point (8, 0).

Résolution

$$- \text{ L'équation de l'ellipse } E \text{ est de la forme : } \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{i})$$

- Comme elle passe par le point (8, 0), l'équation (i) s'écrit :

$$\frac{(8-4)^2}{a^2} + \frac{(0+1)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (\text{ii})$$

- Le foyer (1, -1) étant à gauche du centre, nous avons : $(a - c = 1) \Leftrightarrow (c = 3)$

$$- (c^2 = a^2 - b^2) \Leftrightarrow (b^2 = a^2 - 9) \quad (\text{iii})$$

$$\text{En portant (iii) dans (ii), nous avons : } \left(\frac{16}{a^2} + \frac{1}{a^2 - 9} = 1 \right) \Leftrightarrow (a^4 - 26a^2 + 144 = 0) \\ \Leftrightarrow (a^2 = 18 \text{ et } a^2 = 8)$$

$$\text{Pour } a^2 = 18 ; b^2 = 9$$

$$\text{Pour } a^2 = 8 ; b^2 = -1 \text{ (à rejeter)}$$

$$- \text{ L'équation de l'ellipse est : } \frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0.$$

4. On donne l'équation de l'ellipse $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

Trouve les coordonnées du centre, la longueur du demi grand axe, du demi petit axe, les foyers, la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe et le diamètre conjugué à la deuxième bissectrice des axes.

Résolution

Nous avons :

$$(9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0)$$

$$\Leftrightarrow [(9x^2 - 36x) + (16y^2 + 96y) = -36]$$

$$\Leftrightarrow [9(x^2 - 4x) + 16(y^2 + 6y) = -36]$$

$$\Leftrightarrow [9(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 6y + 9) = -36 + 36 + 144]$$

$$\Leftrightarrow [9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{9(x-2)^2}{144} + \frac{16(y+3)^2}{144} = 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \right]$$

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

Le centre a pour coordonnées (2, -3), la longueur du demi grand axe est 4, demi petit axe est 3. Le foyer $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$ et le latus rectum vaut $\frac{9}{2}$.

Exercices

N° 773. . Ecris l'équation de chacune des ellipses suivantes centrées à l'origine des

axes de coordonnées et dont :

- a) la longueur du grand axe sur Ox est 10 et la distance focale est 6 ;
- b) la longueur du grand axe sur Oy est 10 et la distance focale est 8 ;
- c) la longueur du grand axe sur Oy est 32 et qui passe par (1, 2) ;
- d) la longueur du grand axe sur Ox est 16 et l'excentricité vaut $\frac{1}{4}$
- e) la longueur du petit axe sur Ox est 8 et la distance focale est 6 ;
- f) la longueur du petit axe sur Oy est 6 et la distance focale est 8 ;
- g) la longueur du petit axe est 12 et celle du grand axe sur Ox est 18 ;
- h) la longueur du petit axe sur Oy est 10 et l'excentricité vaut $\frac{1}{5}$
- i) la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe Ox est 5 et les sommets sont $(\pm 10, 0)$
- j) les foyers $(\pm 4, 0)$ et les sommets $(\pm 5, 0)$
- k) les foyers $(0, \pm 5)$ et les sommet S(0, ± 17)
- l) les foyers $(0, \pm 6)$ et la longueur du demi grand axe vaut 8
- m) les foyers $(\pm 5, 0)$ et l'excentricité vaut $\frac{5}{8}$
- n) de foyer (4, -3) de directrice $x = -1$ et d'excentricité $\frac{2}{3}$

N° 774. Pour chacune des ellipses suivantes trouve la longueur du demi grand axe, la longueur du demi petit axe, les coordonnées des foyers, sommets l'excentricité, le latus rectum, les équations des directrices et construire chaque ellipse.

- | | |
|--|--|
| a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ | j) $225x^2 + 289y^2 = 65025$ |
| b) $x^2 + y^2 - 9 = 0$ | k) $\frac{(x+2)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ |
| c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ | l) $x^2 + 4(y+2)^2 = 8$ |
| d) $2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ | l) $9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0$ |
| e) $16x^2 + 25y^2 = 100$ | m) $9x^2 + 4y^2 - 6x - 12y - 26 = 0$ |
| f) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ | n) $4x^2 + 9y^2 + 12x - 6y - 26 = 0$ |
| g) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ | o) $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 81 = 0$ |
| h) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ | p) $3x^2 + 4y^2 - 28x - 16y + 48 = 0$ |

804. Construis les ellipses suivantes :

- a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ b) $2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$ d) $25x^2 + 9y^2 = 225$

XI.3. HYPERBOLE

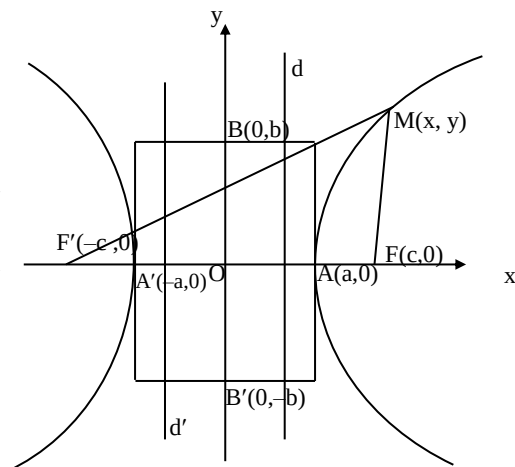
XI.3.1. DEFINITION

L'hyperbole est le lieu des points du plan dont la différence en valeur absolue des distances à deux points fixes foyers est constante. Les points fixes sont appelés foyers.

XI.3.2. EQUATION

Soit H une hyperbole, F et F' ses foyers. Choisissons les axes des coordonnées de telle manière que :

- l'axe des x passe par F' et F.
- l'axe des y soit la médiatrice du segment [F'F].



Posons $|F'F| = 2c$, la distance des foyers.

Il en résulte que les coordonnées des foyers F' et F sont respectivement $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.

Soit $M(x, y)$ un point de l'hyperbole. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
 (|MF' - MF| = 2a) &\Leftrightarrow (MF' - MF = \pm 2a) \quad (a > 0) \\
 &\Leftrightarrow [\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a] \\
 &\Leftrightarrow [(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Dans le triangle } MFF', (a < c) &\Leftrightarrow (a^2 < c^2) \\
 &\Leftrightarrow (c^2 - a^2 > 0)
 \end{aligned}$$

En posant : $c^2 - a^2 = b^2$, l'équation (1) s'écrit : $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2)
C'est l'équation réduite de l'hyperbole.

XI.3.3. CARACTERISTIQUES

- a) L'origine $O(0, 0)$ des axes est le centre de cette hyperbole.
- b) L'hyperbole rencontre Ox en deux points $A'(-a, 0)$ et $A(a, 0)$. symétriques par rapport à O .
- c) L'axe focal est l'axe des x , l'axe transverse ou principal $[A'A]$ porté par Ox est de longueur $2a$ et l'axe non transverse $[BB']$ est de longueur $2b$.
L'axe des y est l'axe conjugué ou non transverse ou encore axe imaginaire.
- d) L'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ($e > 1$)
- e) Les points A et A' sont les sommets de l'hyperbole
- f) L'hyperbole ayant deux foyers, elle a deux directrices d'équations $x = -\frac{a}{e}$ et $x = \frac{a}{e}$, qui peuvent encore s'écrire $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.
- g) Le latus rectum vaut : $\frac{2b^2}{a}$
- h) La distance $|FF'| = 2c$ est appelée distance focale.
- i) Les asymptotes sont les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

XI.3.4. AUTRES FORMES DE L'EQUATION DE L'HYPERBOLE

- a) Si l'hyperbole est centrée $(0, 0)$ et son axe focal est Oy alors :
 - son équation est : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (avec $b^2 = c^2 - a^2$)
 - les foyers sont $F'(0, -c)$ et $F(0, c)$;
 - les directrices ont pour équations : $y = \frac{a}{e}$ et $y = -\frac{a}{e}$, qui peuvent encore s'écrire : $y = \frac{a^2}{c}$ et $y = -\frac{a^2}{c}$
 - les asymptotes ont pour équations $y = \frac{a}{b}x$ et $y = -\frac{a}{b}x$
- b) Si l'hyperbole est centrée en (α, β) et son axe focal parallèle à l'axe des x alors :
 - son équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
 - les foyers sont $F'(\alpha - c, \beta)$ et $F(\alpha + c, \beta)$
 - les directrices ont pour équations : $x = \alpha - \frac{a^2}{c}$ et $x = \alpha + \frac{a^2}{c}$;
 - les asymptotes ont pour équations : $y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha)$ et $y - \beta = -\frac{b}{a}(x - \alpha)$
- c) Si l'hyperbole est centrée en (α, β) et son axe focal parallèle à l'axe des y alors :
 - son équation est $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$
 - les foyers sont $F'(\alpha, \beta - c)$ et $F(\alpha, \beta + c)$

- les directrices ont pour équations : $y = \beta - \frac{a^2}{c}$ et $y = \beta + \frac{a^2}{c}$
 - les asymptotes ont pour équations : $y - \beta = \frac{a}{b}(x - \alpha)$ et $y - \beta = -\frac{a}{b}(x - \alpha)$
- d) Hyperbole équilatère est : $x^2 - y^2 = a^2$

Son excentricité $e = \sqrt{2}$ et les asymptotes sont perpendiculaires $y = x$ et $y = -x$

e) Hyperboles conjuguées

On appelle hyperboles conjuguées, deux hyperboles ayant les mêmes axes de symétrie en grandeur et en position, mais de telle sorte que l'axe transverse de l'une soit l'axe non transverse de l'autre et réciproquement ; elles ont pour

équations respectives : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

XI.3.5. ELEMENTS D'ETUDE DE L'HYPERBOLE $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Equation de la tangente au point M (x_1, y_1) de l'hyperbole :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

b) Equation de la normale au point M(x_1, y_1) de l'hyperbole $y - y_1 =$

$$-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

c) Equation de la tangente parallèle à la direction m : $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$

d) Equation des tangentes issues d'un point M(x_1, y_1) extérieur à l'hyperbole.

On procède comme pour la parabole.

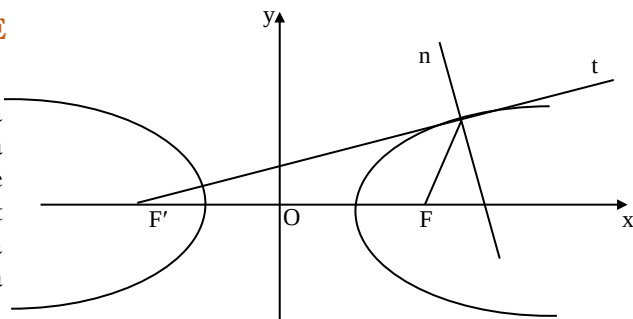
e) Cercle orthoptique ou cercle de Monge : $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

f) Podaire du foyer : $x^2 + y^2 = a^2$

g) Diamètre conjugué à un système des cordes de direction m : $y = \frac{b^2}{a^2 m} x$

XI.3.6. PROPRIETE

Dans une hyperbole, la tangente est la bissectrice de l'angle de rayon - vecteur joignant ce point aux foyers. La normale en est la bissectrice extérieure.



XI.3.7. EQUATIONS PARAMETRIQUES DE L'HYPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On sait que $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$. En posant $\frac{x}{a} = \sec \alpha$ et $\frac{y}{b} = \tan \alpha$,

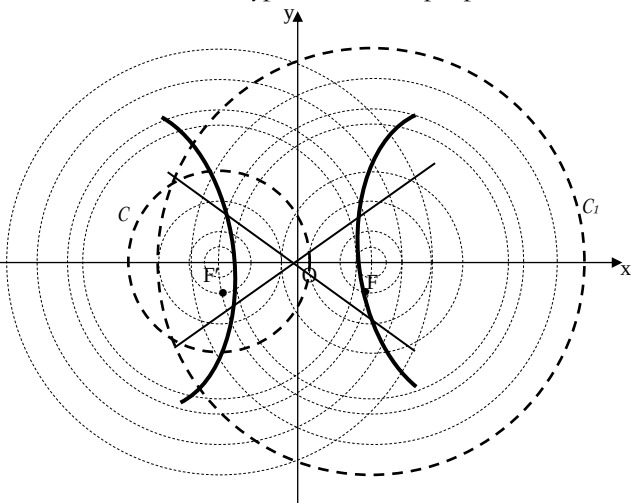
En identifiant $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$, on obtient $\begin{cases} x = a \sec \alpha \\ y = b \tan \alpha \end{cases}$

Ce sont les équations paramétriques de l'hyperbole.

XI.3.8. CONSTRUCTION

De différentes méthodes de construction d'une hyperbole, nous proposons celle des cercles concentriques :

- Placer les foyers F' et F sur une droite ;
- Tracer un certain nombre de cercles concentriques $C, C', C'', C''' \dots$ de centre F et de rayons $R, R', R'', R''' \dots$
- Tracer ensuite d'autres cercles $C_1, C_1', C_1'', C_1''' \dots$ de centre F' et de rayons $2a+R, 2a+R', 2a+R'' \dots$
- Les intersections des cercles C et $C_1; C'$ et $C_1'; C''$ et $C_1'' \dots$ sont les points de l'hyperbole.



Remarque

Pour construire chacune des courbes étudiées, on peut procéder par l'étude de chacune des fonctions : $y = \pm \sqrt{2px}$; $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

Exercices résolus

1. On donne l'hyperbole d'équation $4y^2 - 2x^2 - 8 = 0$.

Détermine les coordonnées des sommets et des foyers, le latus rectum, l'excentricité, les équations des directrices et les équations des asymptotes.

Résolution

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 - (4y^2 - 2x^2 - 8 = 0) &\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1\right) \\
 - (a^2 = 2) &\Rightarrow (a = \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad (b^2 = 4) \Rightarrow (b = 2) \\
 (c^2 = a^2 + b^2) &\Rightarrow (c = \sqrt{6})
 \end{aligned}$$

Les coordonnées des sommets sont $(0, -\sqrt{2})$ et $(0, \sqrt{2})$ et des foyers : $(0, -\sqrt{6})$ et $(0, \sqrt{6})$, l'excentricité $e = \sqrt{3}$.

Le latus rectum vaut $4\sqrt{2}$, les équations des directrices sont : $y = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et $y = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Les équations des asymptotes sont : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

2. Trouve l'équation de l'hyperbole d'axes parallèles aux axes de coordonnées et centré à l'origine, sachant que la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe est de 18 et que la distance des foyers (distance focale) vaut 12.

Résolution

La longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe vaut $\frac{2b^2}{a} = 18$ et $2c = 12$

Nous obtenons : $b^2 = 9a$; $c = 6$ et $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - a^2$

$$\begin{aligned}
 \text{Nous avons le système } \begin{cases} b^2 = 9a \\ b^2 = 36 - a^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9a \\ a^2 + 9a - 36 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9a \\ a = 3 \text{ ou } a = -12 \text{ (à rejeter)} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 27 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les équations cherchées sont : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ et $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$.

3. Trouve l'équation de l'hyperbole de foyers $(0, \frac{13}{2})$ et dont la longueur de l'axe conjugué est égale à 12.

Résolution

Nous avons : $c = \frac{13}{2}$, $b = 6$ et $(a^2 = c^2 - b^2) \Leftrightarrow (a^2 = \frac{25}{4})$

L'équation de l'hyperbole est : $\frac{y^2}{\frac{25}{4}} - \frac{x^2}{36} = 1$ ou $144y^2 - 25x^2 - 900 = 0$

4. a) Trouve l'équation de l'hyperbole ayant pour centre l'origine, pour un des sommets $(6, 0)$ et pour équation une des ses asymptotes $4x - 3y = 0$.
b) En déduis l'équation de l'hyperbole conjuguée.

Résolution

a) L'asymptote donnée a pour équation $y = \frac{4}{3}x$

Par identification à la forme générale d'asymptote $y = \pm \frac{b}{a}x$, nous avons $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$.

Comme le sommet a pour coordonnée $(6, 0)$, nous avons : $a = 6$ et $b = 8$.

L'équation demandée est : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

b) L'hyperbole conjuguée a pour équation $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$.

5. On donne l'hyperbole d'équation $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

Trouve :

- les coordonnées du centre, des sommets et des foyers ainsi que l'excentricité
- les équations des directrices
- les équations des asymptotes
- la podaire du foyer
- le latus rectum
- le cercle orthoptique

Résolution

Nous avons ($9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$) $\Leftrightarrow \left[\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \right]$

- Les coordonnées du centre (1, -2) ; des sommets (-3, -2) et (5, -2) ; des foyers (-4, -2) et (6, -2) et $e = \frac{5}{4}$.
- Les directrices sont : $x = -\frac{11}{5}$ et $x = \frac{21}{5}$.
- Les équations des asymptotes sont : $4y - 3x + 11 = 0$ et $4y + 3x + 5 = 0$.
- La podaire du foyer est $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.
- le latus rectum vaut $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$
- le cercle orthoptique est : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 7$

Exercices

N° 775. Ecris l'équation de chacune des hyperboles suivantes centrées à l'origine des axes et ayant les caractéristiques suivantes :

- un sommet S(3, 0) et un foyer F(5, 0)
- un sommet S(0, -5) et un foyer F(0, 13)
- des foyers F(0, ± 3) et dont la longueur de l'axe conjugué est égale à 5.
- l'excentricité $e = 2$, et l'un de ses foyers est le point F(12, 0)
- l'axe conjugué est de longueur 24 et les foyers (0, ± 13)

N° 776. Pour chacune des hyperboles suivantes, trouve la longueur de l'axe transverse et l'axe non transverse, les coordonnées des foyers, des sommets, l'excentricité, le latus rectum, les équations des directrices ainsi que les asymptotes

- | | |
|--|---|
| a) $144y^2 - 25x^2 = 3600$ | g) $4x^2 - y^2 - 4x + 3y - 26 = 0$ |
| b) $5y^2 - 4x^2 = 80$ | h) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ |
| c) $49x^2 - 36y^2 = 1764$ | i) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 18y - 89 = 0$ |
| d) $9x^2 - y^2 + 9 = 0$ | j) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$ |
| e) $2x^2 + 3y^2 + 4 = 0$ | k) $9x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$ |
| f) $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$ | l) $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 89 = 0$ |

N° 777. Trouve les équations des hyperboles conjuguées des hyperboles suivantes :

$$a) 9x^2 - 25y^2 = 100 \quad b) 4x^2 - y^2 = 36 \quad c) 16x^2 - y^2 + 64 = 0 \quad c) 8x^2 - 16y^2 + 25 = 0$$

N° 778. Trouve les points d'intersection des hyperboles d'équations :
 $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$ et $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$.

N° 779. Ecris l'équation de l'hyperbole ayant pour centre l'origine, pour axe transverse l'axe Oy, pour excentricité $2\sqrt{3}$, pour longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe transverse 18.

N° 780. Montre que la différence de distances du point $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ de l'hyperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ aux foyers est égale à la longueur de l'axe transverse. Les droites ainsi définies sont appelées rayons focaux du point considéré.

N° 781. Ecris l'équation de l'hyperbole passant par le point (4, 6) ayant pour asymptotes $y = \pm\sqrt{3}x$

N° 782. Construis les hyperboles suivantes :

$$a) x^2 - y^2 = 9 \quad b) 5y^2 - 4x^2 = 80 \quad c) 4x^2 - 9y^2 = 36 \quad d) \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

XI.4. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 783. Trouve l'équation de la parabole ayant l'origine pour sommet, l'axe Oy pour axe de symétrie et passant par le point (6, -3). Rép. : $x^2 = -12y$

N° 784. Ecris l'équation de la parabole ayant pour foyer le point (6, -2) et pour directrice $x - 2 = 0$. Rép. : $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$

N° 785. Ecris l'équation de la parabole ayant pour sommet le point (2, 3) d'axe parallèle à l'axe Oy et passant par le point (4, 5).
 Rép. : $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

N° 786. On donne la parabole P d'équation $y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$.

N° 787. Trouve les coordonnées du sommet, les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice. Rép. : $S(-2, -4)$; $F\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$,
 $df \equiv x - \frac{7}{2} = 0$

N° 788. Trouve l'équation de la parabole dont la corde focale perpendiculaire à l'axe est le segment défini par (3, 5) et (3, -3).
 Rép.: $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ et $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$

N° 789. Trouve l'équation de la parabole de sommet situé sur la droite $7x + 3y - 4 = 0$ et passant par les points (3, -5) et $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, l'axe étant horizontal.

$$\text{Rép. : } (y + 1)^2 = 8(x + 1) \text{ et } \left(y + \frac{97}{17}\right)^2 = \frac{-504}{17}\left(x - \frac{359}{119}\right)$$

N° 790. Trouve l'équation de la parabole de sommet $(-2, 3)$ et de foyer $(1, 3)$.

$$\text{Rép. : } y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$$

N° 791. Trouve l'équation de la parabole d'axe parallèle à l'axe Ox, passant par les points $(3, 3)$, $(6, 5)$ et $(6, -3)$. Rép. : $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$

N° 792. Trouve l'équation de la parabole dont le sommet est situé sur la droite $2y - 3x = 0$, d'axe parallèle à l'axe Ox, passant par les points $(3, 5)$ et $(6, -1)$.

$$\text{Rép. : } y^2 - 6y - 4x + 17 = 0 \text{ et } 11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0.$$

N° 793. Trouve les coordonnées des extrémités du latus rectum de la parabole

$$2x^2 + 4x - 6y - 1 = 0. \text{ Rép. : } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

N° 794. Trouve l'équation de l'ellipse passant par $(-6, 4)$, $(-8, 1)$, $(2, -4)$ et $(8, -3)$ d'axes parallèles aux axes de coordonnées.

$$\text{Rép. : } x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0 \text{ ou } \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

N° 795. Trouve les équations des rayons focaux menés par le point $(2, 3)$ de l'ellipse $3x^2 + 4y^2 = 48$. Rép. : $x - 2 = 0$ et $3x - 4y + 6 = 0$

N° 796. L'orbite de la terre est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers. Si le demi grand axe de l'ellipse a 150 000 000 km de long et que l'excentricité vaut environ $\frac{1}{62}$, trouve la grande et la plus petite distance de la terre au soleil.

Rép. : La plus grande distance vaut $a + c = 17\,419\,355$ Km.

La plus petite distance est $a - c = 12\,580\,645$ Km

N° 797. Trouve l'équation de l'hyperbole ayant pour centre l'origine, pour axe transverse l'axe Oy et passant par les points $(4, 6)$ et $(1, -3)$.

$$\text{Rép. : } 5y^2 - 9x^2 = 36$$

N° 798. Trouve les coordonnées des sommets et des foyers, les équations des directions, les équations des asymptotes, la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe focal, l'excentricité de l'hyperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$.

$$\text{Rép. : } S(\pm 4, 0), F(\pm 5, 0), x = \pm \frac{16}{5}. \text{ L.R. } \frac{9}{2}, e = \frac{5}{4}$$

- N° 799. Trouve l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine, ayant pour axe transverse Ox, dont l'excentricité vaut $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ et la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe focal est 6. Rép. : $3x^2 - 4y^2 - 48 = 0$
- N° 800. Trouve l'équation de l'hyperbole de centre $(-4, 1)$, de sommet $(2, 1)$ et dont la longueur du demi - axe conjugué est égale à 4.
 Rép. $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
- N° 801. L'équation de la parabole de foyer $F(0, 6)$ et dont la directrice est l'axe Ox est :
 1. $x^2 - 12y = 0$ 3. $y^2 = -12x$ 5. $y^2 - 12x + 36 = 0$
 2. $y^2 - 12x = 0$ 4. $x^2 - 12y + 36 = 0$
- N° 802. L'équation de la parabole de foyer $(-2, -1)$ et ayant pour corde focale perpendiculaire à l'axe défini par le segment $(-2, 2)$ et $(-2, -4)$ est :
 1. $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$ 4. $x^2 + 2x + 6y + 4 = 0$
 2. $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$ 5. $y^2 + 6x - 6x - 20 = 0$ et $y^2 + 6y + 6x + 4 = 0$
 3. $x^2 + 2x - 6y - 20 = 0$
- N° 803. L'équation de la parabole d'axe vertical et passant par les points $(4, 5)$, $(-2, 11)$ et $(-4, 21)$ est :
 1. $y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ 3. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ 5. $x^2 - 2x - 4y + 10 = 0$
 2. $y^2 - 4y - 2x + 10 = 0$ 4. $y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$
- N° 804. Le rayon focal du point M d'ordonnée 4 de la parabole $y^2 + 4y - 9x - 5 = 0$ est égal à :
 1. 10 2. 8 3. $\frac{25}{2}$ 4. 6 5. $\frac{25}{4}$
- N° 805. On donne l'ellipse d'équation $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$
 a) Le centre de l'ellipse est :
 1. $(2, -1)$ 2. $(1, -2)$ 3. $(2, 1)$ 4. $(-2, 1)$ 5. $(-1, 2)$
 b) Les axes mesurent :
 1. 4 et $2\sqrt{3}$ 2. 10 et 8 3. 5 et 4 4. 3 et $4\sqrt{3}$ 5. 6 et 8
 c) La distance focale est :
 1. 4 2. 8 3. 10 4. 6 5. $4\sqrt{3}$
 d) Les équations des directrices sont :
 1. $2x - 10 = 0$ et $2x + 5 = 0$ 4. $x - 7 = 0$ et $x + 5 = 0$
 2. $5x - 7 = 0$ et $5x + 19 = 0$ 5. $5x - 6 = 0$ et $5x + 12 = 0$
 3. $3x - 22 = 0$ et $3x + 28 = 0$
 e) L'aire de l'ellipse vaut :
 1. 20π 2. 400π 3. 2π 4. 6π 5. 12π

N° 806. La conique $5x^2 + 80y^2 = 400$ a pour excentricité :

1. $\sqrt{5}$ 2. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 5. $4\sqrt{5}$

N° 807. On donne l'ellipse d'équation $x^2 + 2y^2 = 36$

a) les demi-axes sont :

1. $a = 3$ et $b = 2\sqrt{3}$ 3. $a = 4$ et $b = \sqrt{2}$ 5. $a = 1$ et $b = 2\sqrt{2}$
 2. $a = -2$ et $b = 3\sqrt{3}$ 4. $a = 6$ et $b = 3\sqrt{2}$

b) les coordonnées des foyers sont :

1. $F(\sqrt{2}, 0)$ et $F'(-\sqrt{2}, 0)$ 4. $F(\sqrt{3}, 0)$ et $F'(-\sqrt{3}, 0)$
 2. $F(3\sqrt{2}, 0)$ et $F'(-3\sqrt{2}, 0)$ 5. $F(3\sqrt{3}, 0)$ et $F'(-3\sqrt{3}, 0)$
 3. $F(2\sqrt{2}, 0)$ et $F'(-2\sqrt{2}, 0)$

c) L'excentricité est :

1. $\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $2\sqrt{3}$

d) La longueur du latus rectum vaut :

1. 6 2. 5 3. 4 4. 3 5. 2

N° 808. L'un des foyers de l'ellipse $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ admet pour coordonnées.

1. $(0, 1)$ 2. $(1, -4)$ 3. $(0, -1)$ 4. $(1, 4)$ 5. $(-4, 1)$

N° 809. L'équation de l'ellipse de centre $(-1, -1)$ de sommet $(5, -1)$ et d'excentricité $e = \frac{2}{3}$ est :

1. $\frac{(x+1)^2}{20} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$ 3. $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$ 5. $\frac{(x+1)^2}{20} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
 2. $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$ 4. $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

N° 810. On donne pour une ellipse de centre $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$, de foyer $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2} + \sqrt{5})$ et admettant un sommet $(\frac{1}{3}, \frac{9}{2})$.

Sachant que son équation s'écrit : $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + Ex + F = 0$.

Calcule $CD - AF$

1. 104 2. 212 3. 221 4. -26 5. 50

N° 811. L'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie, passant par le point $P(-2\sqrt{2}, 1)$ et admettant la droite $x - 2y = 0$ comme asymptote a pour équation :

$$1. x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$3. \frac{x^2}{4} - y^2 - 1 = 0$$

$$5. \frac{x^2}{4} - y^2 + 1 = 0$$

$$2. x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$4. \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

N° 812. On donne l'hyperbole d'équation $4y^2 - 2x^2 - 8 = 0$

a) Les équations des asymptotes sont :

$$1. y + 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad y + 3x + 2 = 0$$

$$4. -x + \sqrt{2}y = 0 \quad \text{et} \quad -x - \sqrt{2} = 0$$

$$2. 2y - x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - x = 0$$

$$5. y + x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2y - x + 3 = 0$$

$$3. 3y - x = 0 \quad \text{et} \quad y - 2x + 1 = 0$$

b) Les coordonnées des sommets réels sont :

$$1. (-1, 0) \quad \text{et} \quad (-1, \frac{3}{5})$$

$$3. (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$5. (2, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{et} \quad (2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$2. (-1, 3\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad (1, -3\sqrt{2})$$

$$4. (0, \frac{3\sqrt{2}}{5}) \quad \text{et} \quad (0, -\frac{3\sqrt{2}}{5})$$

N° 813. Soit $S = \{(0, a_1); (0, a_2); (c_1, 0); (c_2, 0)\}$ les coordonnées à l'origine des asymptotes de l'hyperbole d'équation : $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. L'expression $T = a_1 - 3a_2 + c_1 - \frac{5}{2}c_2$ ($a_1 < a_2; c_1 < c_2$)

vaut :

$$1. \frac{-25}{3}$$

$$2. \frac{19}{3}$$

$$3. \frac{-35}{3}$$

$$4. \frac{-1}{3}$$

$$5. -13$$

CHAPITRE XII : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

A. OBJECTIFS

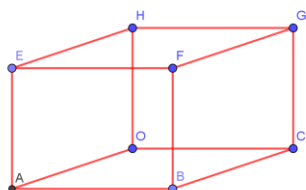
1. Représenter un point, une droite, un plan dans l'espace ;
2. Déterminer la distance de deux points, d'un point à un plan, de deux plans parallèles, d'un point à une droite ;
3. Etablir les différentes équations d'un plan, d'une droite ;
4. Déterminer les conditions de parallélisme et de perpendicularité d'un de deux plans, d'une droite et d'un plan.

B. ACTIVITES

1. Depuis les trois premières des humanités scientifiques, l'élève sait que trois points non alignés déterminent un plan bien qu'il ne sache pas établir son expression analytique. Dans la présente classe, il doit parvenir à établir l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$. Ainsi l'enseignant Osobo de mathématique en quatrième année des humanités au lycée Kabambare demande à ses élèves d'écrire l'équation du plan dans l'espace qui passe par $A(2,1,3)$; $B(-1,-2,4)$ et $C(4,2,1)$.
2. Il demande à ses élèves de décrire le lien des points qui vérifient chacune des conditions suivantes et de le visualiser et représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Equations	Description du lien
$y = 8$	Plan parallèle à XOZ et distant de 8 unités à la droite de XOZ
$x = y$	
$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$	
$z = 0$	
$x + y = 5$	
$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$	
$x = -2$	

3. Monsieur Lotutala, enseignant de géométrie en quatrième année des humanités scientifiques du collège Kubama de Kisantu propose à ses élèves un cube ci-dessous et leur demande de :



a) Compléter

LIEUX	EQUATIONS
Plan	
Droite HF	
Droite BF	
Plan HFB	
Plan AEG	
	$z + 2y = 2$
	$y = 2$ $z = 0$
	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
	$x^2 + y^2 = 4.$

b) Calculer la distance du point $P(7,3,4)$ au plan $6x - 3y + 2z - 13 = 0$

4. A l'issue d'une séquence didactique sur la distance entre les plans de l'espace, monsieur Mafwikisa, enseignant de géométrie en quatrième année des humanités scientifiques au collège Kubama donne à ses élèves le travail à faire en groupe :

a) calculer la distance entre les plans parallèles d'équations respectives

$$3x + 2y - 2z + 12 = 0 \text{ et } 3x + 2y - 6z - 1 = 0$$

b) Et dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de déterminer les équations :

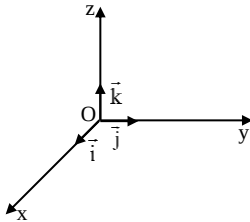
a) des axes Ox , Oy et Oz

b) des plans Oxy , Oxz et Oyz

C. COURS ET EXERCICES D'APPLICATION

XII.1. REPERE DANS L'ESPACE ET COORDONNEES D'UN POINT

XII.1.1. REPERE DANS L'ESPACE



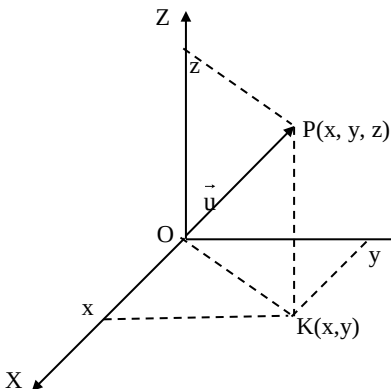
Dans l'espace on appelle repère, tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- O est un point de l'espace appelé origine du repère ;
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un triplet des vecteurs non nuls et non coplanaires d'origine O .

- xOy , xOz et yOz sont les plans de coordonnées.
- Ox , Oy et Oz sont les axes de coordonnées respectivement des abscisses, des ordonnées et des cotes.
- Le repère est orthonormal (les axes sont deux à deux perpendiculaires et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$)

XII.1.2. COORDONNEES D'UN POINT

a. *Coordonnées cartésiennes*

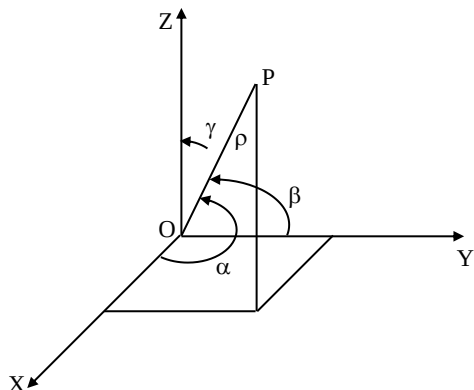


Pour représenter le point $P(x, y, z)$ dans l'espace, on procède comme suit :

- Représenter le point $K(x, y)$ dans le plan xOy ;
- Mener à partir de K , une parallèle à Oz ;
- Porter sur cette parallèle, la mesure z .

Le triplet (x, y, z) représente aussi les composantes du vecteur $\vec{OP}$ qui s'écrit :
 $\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

b. Coordonnées polaires



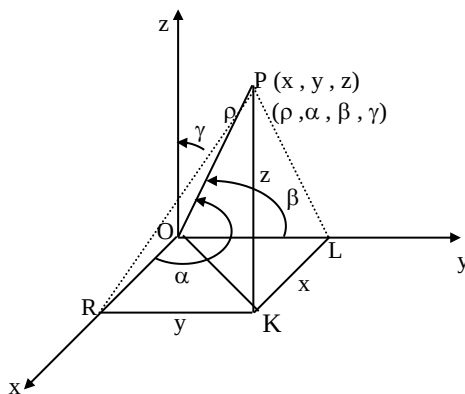
Soit XOY, XOZ et YOZ trois plans de l'espace et P un point de l'espace tel que $\widehat{XOP} = \alpha$, $\widehat{YOP} = \beta$ et $\widehat{POZ} = \gamma$

Le point P est représenté en coordonnées polaires par :

- sa distance à l'origine ($|OP| = \rho$)
- ses angles directeurs α , β et γ formés respectivement par chacun des axes des coordonnées et $\vec{OP}$.

On écrit : $P(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$

c. Relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires



Le triangle OKP étant rectangle en K, le théorème de Pythagore donne :

$$|OP|^2 = |OK|^2 + |KP|^2 \quad (1)$$

Or le triangle OKL est rectangle en L,

$$\text{on a : } |OK|^2 = |OL|^2 + |KL|^2 \quad (2)$$

En portant (2) dans (1), on a :

$$|OP|^2 = |OL|^2 + |KL|^2 + |KP|^2.$$

Ce qui donne la relation

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (i)$$

D'autre part, en considérant le triangle ORP, on a :

$$(|OR| = |OP| \cos \alpha) \Leftrightarrow (x = \rho \cos \alpha) \quad (ii)$$

En raisonnant de la même manière, on établit que :

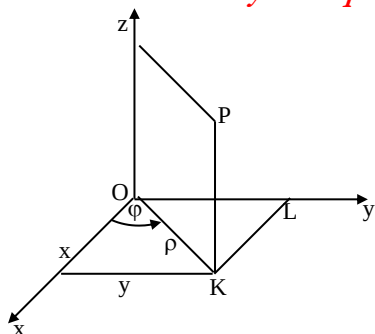
$$y = \rho \cos \beta \quad (iii) \quad \text{et} \quad z = \rho \cos \gamma \quad (iv)$$

Les relations (i), (ii), (iii) et (iv) permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux polaires et réciproquement.

Exercice

875. Vérifier que les angles directeurs α , β et γ sont tels que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

d. Coordonnées cylindriques



Soit XOY, XOZ et YOZ trois plans de l'espace, P un point tel que sa projection orthogonale dans le plan xOy est K.

Le point P est représenté en coordonnées cylindriques par :

- la distance de sa projection K à l'origine ($|OK| = \rho$);
- l'angle polaire formé par l'axe Ox et le rayon vecteur ρ ;
- la cote z.

On note : $P(\rho, \phi, z)$.

En considérant le triangle OQK, on a :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi[$$

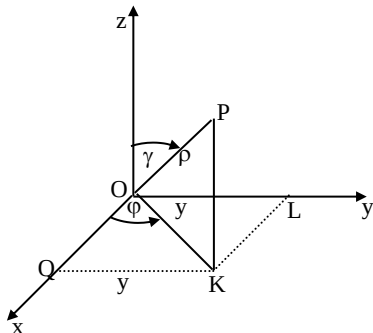
Ce sont les coordonnées cylindriques de P.

Remarque

Pour passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées, on utilise les relations :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad z = z.$$

e. Coordonnées sphériques



Soit XOY, XOZ et YOZ trois plans de l'espace, P un point tel que sa projection orthogonale dans le plan xOy est K.

Un point P est déterminé en coordonnées sphériques par :

- le rayon sphérique ρ ;
- l'angle polaire ou longitude ϕ avec $\phi \in [0, 2\pi[$;
- l'angle directeur ou colatitude γ .

Ainsi, ρ , ϕ et γ sont liés par les relations :
$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cdot \sin \gamma \\ y = \rho \sin \phi \cdot \sin \gamma \\ z = \rho \cos \gamma \end{cases} \text{ avec}$$
$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \phi = \text{Arc tan} \frac{y}{x} \text{ et } \gamma = \text{Arc cos} \frac{z}{\pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

XII.1.3. COMPOSANTES D'UN VECTEUR

Soit $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ deux points de l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Le vecteur $\vec{AB}$ a pour composantes $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ou $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$.

b) Propriétés

- Deux vecteurs non nuls $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires si leurs composantes correspondantes sont proportionnelles c'est-à-dire qu'il existe un réel α tel que : $\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{AC}$
- Trois vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AM}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$.

Remarques

- Les calculs vectoriels effectués dans le plan, se conservent dans l'espace.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ est :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

- Un vecteur normal au plan est un vecteur directeur d'une droite d perpendiculaire à π .
- Un vecteur orthogonal à un plan est orthogonal à tout vecteur du plan.
- Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite AB passant par le milieu du segment $[AB]$.

XII.1.4. COORDONNEES D'UN POINT DIVISANT UN SEGMENT DE DROITE DANS UN RAPPORT DONNE

Soit $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ les extrémités du segment AB et $M(x, y, z)$ un point qui divise $[AB]$ dans le rapport k ($k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$).

Nous avons : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$. Les coordonnées du point M sont :

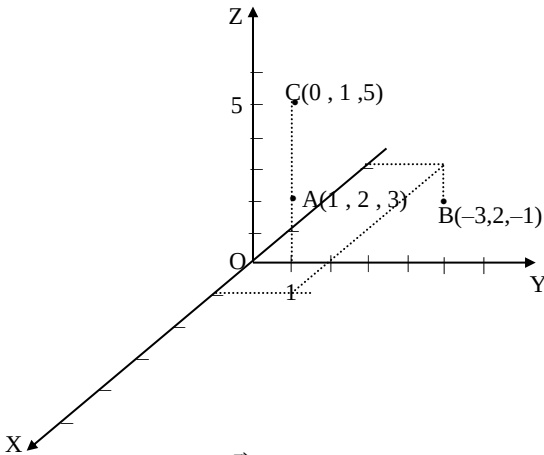
$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} \text{ et } z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}.$$

En particulier, si $k = -1$ alors M est le milieu du segment $[AB]$ et ses coordonnées sont : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ et $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Exercices résolus

1. Représente dans l'espace les points $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 2, -1)$ et $C(0, 1, 5)$.

Résolution



2. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$, on donne les points $A(2, 3, 1)$ et $B(0, 4, 5)$.

- a) Calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- b) Détermine la coordonnée du point milieu M du segment $[AB]$.
- c) Cherche l'abscisse et l'ordonnée du point P du plan, de cote 1 tel que P est un point de la droite AB .

Résolution

a) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$[\overrightarrow{AB} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB} (-2, 1, 4)]$$

b) La coordonnée du point milieu M de $[AB]$ est :

$$\left[M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \right] \Leftrightarrow \left[M \left(1, \frac{7}{2}, 3 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } [P(x, y, z) \in AB] &\Leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB}) \\
 &\Leftrightarrow [(x-2, y-3, z-1) = r(-2, 1, 4)] \\
 &\Leftrightarrow [x-2 = -2r, y-3 = r, z-1 = 4r] \\
 &\Leftrightarrow [x-2 = -2r, y-3 = r, r=0] \quad \text{car la cote } z = 1 \\
 &\Leftrightarrow [x=2, y=3, z=1].
 \end{aligned}$$

Le point P est : (2, 3, 1).

Exercices

- N° 814. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal de l'espace, place les points suivants : K(4, 6, 1), L(2, 2, 3), M(-3, 2, 4), N(-4, -3, -2), T(0, 4, -4) et S(3, 0, -2)
- N° 815. a) Détermine y et z pour que les points A(2, -3, 1), B(5, 1, 1) et C(-1, y, z) soient alignés
 b) Détermine x et z pour que les points A(-1, 0, 3), B(3, -2, 6) et C(x, 2, z) soient alignés.
- N° 816. Un segment de droite limité par les points A(-1, 8, 7) et B(9, -7, 2) est divisé par les points C, D, E, F en cinq parties égales. Calcule les coordonnées de ces points.
- N° 817. Dans le système $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trouve les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques du point dont les coordonnées cartésiennes sont (1, -2, 2).
- N° 818. Trouve les coordonnées cartésiennes du point dont les coordonnées cylindriques sont (6, 12°, -2)
- N° 819. Trouve les coordonnées cartésiennes du point dont les coordonnées sphériques sont (4, -45°, 30°).

XII.2. DISTANCE ET ORTHOGONALITE

Soit A(x₁, y₁, z₁) et B(x₂, y₂, z₂) deux points de l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$.

a) La distance des points A et B est :

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $xx' + yy' + zz' = 0$.

c) la norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On dit que $\vec{u}$ est unitaire ou normé si sa norme est 1 et le vecteur $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire.

Exercices résolus

1. Calcule la distance entre les points A $(-4, -2, 3)$ et B $(3, 3, 1)$.

Résolution

La distance de A à B est : $\delta = \sqrt{(3 + 4)^2 + (3 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{78}$

2. On définit la sphère comme le lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe A (a, b, c) . Etablir l'équation générale de la sphère.

Résolution

Soit P (x, y, z) un point de la sphère et R la distance de P à A.

Nous avons : $(|PA| = R) \Leftrightarrow [\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R]$

L'équation de la sphère est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

3. Trouve l'équation du plan médiateur du segment défini par les points A $(2, 3, 1)$ et B $(-3, 4, 5)$

Résolution

Soit P (x, y, z) un point du plan médiateur ; nous avons ;

$$\begin{aligned} (|PA| = |PB|) &\Leftrightarrow [\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2} = \\ &\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2}] \\ &\Leftrightarrow (5x + y + 4z - 18 = 0). \end{aligned}$$

L'équation cherchée est : $-5x + y + 4z - 18 = 0$.

Exercices

- N° 820. On donne les points A $(5, 1, 5)$, B $(4, 3, 2)$ et C $(-3, -2, 1)$.

Calcule les distances AB, AC et BC et en déduire la nature du triangle ABC.

- N° 821. Mêmes questions pour le triangle STV avec S $(4, 2, 6)$, T $(10, -2, 4)$ et V $(-2, 0, 2)$.

- N° 822. Ecris l'équation de la sphère de centre $(-2, 3, 4)$ et de rayon 5.

- N° 823. Détermine le lieu des points équidistants des points A $(1, -2, 3)$ et B $(2, 3, 1)$.

- N° 824. Ecris l'équation du plan médiateur du segment défini par les points T $(-2, 3, 2)$ et S $(6, 5, -6)$.

- N° 825. Trouve les coordonnées du centre et la longueur du rayon de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 7 = 0.$$

- N° 826. Trouve sur l'axe des ordonnées un point équidistant des points A $(1, -3, 7)$ et B $(5, 7, -5)$.

XII.3. LE PLAN

XII.3.1. EQUATION VECTORIELLE

Soit un plan π , A un point de π , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de π linéairement indépendants.

Le plan est l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \text{Où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels.} \quad (1)$$

$$\pi = \{ P \in E : \overrightarrow{AP} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

La relation (1) est l'équation vectorielle du plan π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par A.

XII.3.2. EQUATIONS PARAMETRIQUES

Soit l'équation vectorielle du plan : $\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

avec $A(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ et $P(x, y, z)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &\Leftrightarrow [(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)] \\ &\Leftrightarrow [(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)] \end{aligned}$$

L'égalité de deux triplets des réels donne :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 & (i) \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 & (ii) \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 & (iii) \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) représente les équations paramétriques d'un plan.

XII.3.3. EQUATION CARTESIENNE

En éliminant les paramètres α et β entre les équations paramétriques ci-dessus, on obtient :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

L'égalité (3) est l'équation cartésienne du plan des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par le point A..

En développant le déterminant de l'égalité (3), on obtient une nouvelle forme de l'équation cartésienne du plan : $\mathbf{Ax} + \mathbf{By} + \mathbf{Cz} + \mathbf{D} = 0$ (4)

où A, B et C sont des réels non tous nuls.

En particulier, si $D = 0$ alors le plan d'équation $Ax + By + Cz = 0$ passe par l'origine des axes.

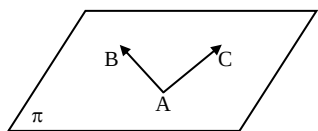
Remarques

- L'équation (4) étant du premier degré en x, y et z, le plan est parfois défini comme une surface algébrique du premier degré.
- Tout plan passant par un point $P(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

XII.3.4. EQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

Soit $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$ et $C(x_3, y_3, z_3)$ trois points non alignés de l'espace.



Le plan déterminé par les points A, B et C est l'ensemble des points P tels que :

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Après transformation cette équation se met sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

XII.3.5. EQUATION D'UN PLAN EN FONCTION D'UN VECTEUR NORMAL

Soit un plan π de l'espace, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de π et $\vec{n}(A, B, C)$ un vecteur normal de π .

$$\begin{aligned} \forall M(x, y, z) \in \pi, (\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}) &\Leftrightarrow (\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow [A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0] \\ &\Leftrightarrow [Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0] \\ &\Leftrightarrow (Ax + By + Cz + D = 0) \\ &\quad \text{avec } -D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \end{aligned}$$

L'équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n}$ est : $Ax + By + Cz + D = 0$ avec $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Si $D = 0$ alors l'équation ci-dessus s'écrit $Ax + By + Cz = 0$ et le plan passe par l'origine.

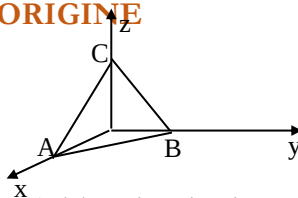
XII.3.6. EQUATION D'UN PLAN DEFINI PAR SES COORDONNEES A L'ORIGINE

Soit le plan π coupant les axes

Ox , Oy et Oz aux points

A(a , 0 , 0); B(0 , b , 0) et

C(0 , 0 , c)



Soit $Ax + By + Cz + D = 0$ ($D \neq 0$), l'équation du plan π ne passant pas par l'origine des axes.

Si π passe par les points A, B et C, on a :

$$(Aa + D = 0) \Leftrightarrow (A = -\frac{D}{a}) ; (Bb + D = 0) \Leftrightarrow (B = -\frac{D}{b}) ;$$

$$(Cc + D = 0) \Leftrightarrow (C = -\frac{D}{c})$$

L'équation considérée s'écrit : $-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$.

En divisant les membres de cette dernière égalité par $-D$, on a l'équation du plan en fonction de ses coordonnées à l'origine :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

XII.3.7. PLANS PARTICULIERS

a) plans des coordonnées

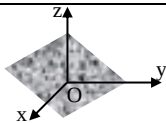
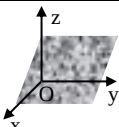
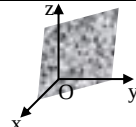
xOy a pour équation $z = 0$	xOz a pour équation $y = 0$	yOz a pour équation $x = 0$

b) Plans parallèles aux plans des coordonnées

Parallèle à xOy a pour équation $z = \gamma$ ($\gamma \in \mathbf{R}$)	Parallèle à xOz a pour équation $y = \beta$ ($\beta \in \mathbf{R}$)	Parallèle à yOz a pour équation $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)

c) Plans perpendiculaires aux plans des coordonnées

Soit π un plan d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$.

Si $A = 0$, $By + Cz + D = 0$ est l'équation d'un plan perpendiculaire à yOz ou parallèle à l'axe Ox .	Si $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ est l'équation d'un plan perpendiculaire à xOz ou parallèle à l'axe Oy .	Si $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ est l'équation d'un plan perpendiculaire à xOy ou parallèle à l'axe Oz .
		

Remarques :

- Dans l'équation d'un plan, si une seule variable x , y ou z n'intervient pas alors le plan est parallèle à l'axe du repère correspondant ;
- Si deux variables n'interviennent pas alors le plan est parallèle au plan de base correspondant.

XII.3.8. CONDITIONS DE PARALLELISME DE DEUX PLANS

Soit π_1 et π_2 deux plans d'équations respectives $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

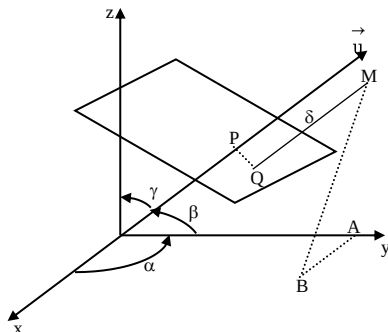
- a) π_1 et π_2 sont parallèles distincts, si et seulement si : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- b) π_1 et π_2 sont confondus si et seulement si : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

XII.3.9. EQUATION NORMALE D'UN PLAN

a) Soit l'espace E muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, π un plan d'angles directeurs α, β, γ ne passant pas par l'origine et p la distance de l'origine à π .

L'équation normale d'un plan dans l'espace s'écrit :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (1)$$



Si, en particulier, le plan passe par l'origine, l'égalité (1) devient :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

b) Normalisation de l'équation d'un plan

Soit le plan π d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ (3)

Son équation normale a la forme (1).

Comme pour la droite dans le plan, les équations (1) et (3) représentent un même

plan lorsque : $\frac{A}{\cos \alpha} = \frac{B}{\cos \beta} = \frac{C}{\cos \gamma} = \frac{D}{-p}$.

D'où :

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En portant ces égalités dans (3), on obtient, l'équation normalisée du plan :

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (4) \quad \text{où } \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ est le facteur de}$$

normalisation dont on choisit le signe de telle sorte que le terme indépendant soit négatif.

XII.3.10. DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

Soit π un plan et $M(x_1, y_1, z_1)$ un point n'appartenant pas à π .

a) Si l'équation du plan est sous la forme normale : $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$
alors la distance de M à π est : $\delta = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|$

b) Si l'équation du plan est $Ax + By + Cz + D = 0$ alors la distance de M à π
est : $\delta = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.

XII.3.11. ANGLE DE DEUX PLANS

Soit $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ deux plans sécants de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 (A_1, B_1, C_1)$ et $\vec{n}_2 (A_2, B_2, C_2)$ et formant un angle V .

$$\begin{aligned} (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = ||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2|| \cos V) &\Leftrightarrow \left(\cos V = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\cos V = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \end{aligned}$$

Si $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ alors $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ et on dit les deux plans sont perpendiculaires.

XII.3.12. DISTANCE DE DEUX PLANS PARALLELES

Soit $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ deux plans parallèles. La distance de π_1 à π_2 est : $\delta = \left| \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.

Remarque

Cette distance peut être trouvée en cherchant la distance d'un point d'un des plans à l'autre.

XII.3.13. FAISCEAU DES PLANS

Soit $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ deux plans sécants suivant la droite d'équation $Ay + Bx + C = 0$.

Tout plan π passant par l'intersection de π_1 et π_2 a pour équation : $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$

Exercices résolus

1. Ecrire l'équation du plan passant par le point $K(1, -4, 2)$ et perpendiculaire à chacun des plans $\pi \equiv 2x + 5y - z - 12 = 0$ et $\pi' \equiv 4x - 7y + 3z + 8 = 0$.

Résolution

L'équation du plan passant par $(1, -4, 2)$ est : $[A(x-1) + B(y+4) + C(z-2) = 0] \Leftrightarrow (Ax + By + Cz - A + 4B - 2C = 0)$

Pour que ce plan soit perpendiculaire à π il faut que $2A + 5B - C = 0$ (i)

De même pour qu'il soit perpendiculaire à π' il faut que $4A - 7B + 3C = 0$ (ii)

$$\begin{aligned} \text{(i) et (ii)} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 5B - C = 0 \\ 4A - 7B + 3C = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{C-5B}{2} \\ 2C - 10B - 7B + 3C = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{C-5B}{2} \\ C = \frac{17}{5}B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{4}{5}B \\ C = \frac{17}{5}B \end{cases} \end{aligned}$$

D'où l'équation du plan :

$$\begin{aligned} \left[-\frac{4}{5}B(x-1) + B(y+4) + \frac{17}{5}B(z-2) = 0\right] &\Leftrightarrow [-4B(x-1) + 5B(y+4) + 17B(z-2) = 0] \\ &\Leftrightarrow (4x - 5y - 17z + 10 = 0) \end{aligned}$$

2. Trouve l'équation du plan passant par les points $M(2, -1, 6)$, $N(1, -2, 4)$ et perpendiculaire au plan $x - 2y - 2z + 9 = 0$.

Résolution

Soit $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan π demandé

$$(M \in \pi) \Rightarrow (2A - B + 6C + D = 0) \quad (i)$$

$$(N \in \pi) \Rightarrow (A - 2B + 4C + D = 0) \quad (ii)$$

Pour que π soit perpendiculaire à $x - 2y - 2z + 9 = 0$, il faut que

$$A - 2B - 2C = 0 \quad (iv)$$

$$\text{De (i), (ii) et (iii)} : \begin{cases} 2A - B + 6C + D = 0 \\ A - 2B + 4C + D = 0 \\ A - 2B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3}C \\ B = -\frac{4}{3}C \\ D = -6C \end{cases}$$

L'équation de π est alors :

$$\left(-\frac{2}{3}Cx - \frac{4}{3}Cy + Cz - 6C = 0\right) \Leftrightarrow (-2Cx - 4Cy + 3Cz - 18C = 0) \\ \Leftrightarrow (2x + 4y - 3z + 18 = 0)$$

3. Ecris l'équation du plan passant par les points $I(2, 1, 3)$, $J(-1, -2, 4)$ et $K(4, 2, 1)$.

Résolution

Soit $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$(I \in \pi) \Rightarrow (2A + B + 3C + D = 0) \quad (i)$$

$$(J \in \pi) \Rightarrow (-A - B + 4C + D = 0) \quad (ii)$$

$$(K \in \pi) \Rightarrow (4A + 2B + C + D = 0) \quad (iii)$$

La résolution du système (i), (ii) et (iii) nous permet d'exprimer A , C et D en fonction de

$$B : A = -\frac{5}{4}B ; C = -\frac{3}{4}B \text{ et } D = \frac{15}{4}B.$$

L'équation de π est alors $5x - 4y + 3z - 15 = 0$

4. Normalise le plan $2x - 2y + z - 12 = 0$

Résolution

$$(2x - 2y + z - 12 = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{2x - 2y + z - 12}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 0\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2x - 2y + z - 12}{3} = 0\right)$$

5. Trouve l'angle aigu des plans $\pi \equiv 2x - y + z = 7$ et $\pi' \equiv x + y + 2z - 11 = 0$

Résolution

$$\text{L'angle aigu des plans } \pi \text{ et } \pi' \text{ est donné par : } \cos V = \left| \frac{2 \cdot 1 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 1} \sqrt{1 + 1 + 4}} \right| = \frac{1}{2}$$

D'où : $\theta = 60^\circ$

6. Trouve sur l'axe Ox un point équidistant des plans : $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ et $2x + 2y - z - 1 = 0$

Résolution

Soit $M(x, 0, 0)$ le point cherché.

$$\left(\left| \frac{12x_0+1}{\sqrt{144+256+225}} \right| = \left| \frac{2x_0-1}{\sqrt{4+4+1}} \right| \right) \Leftrightarrow \left(\frac{12x_0+1}{25} = \pm \frac{2x_0-1}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (36x_0 + 3 = 50x_0 - 25 \text{ et } 36x_0 + 3 = -50 + 25)$$

Pour $x_0 = 2$, nous avons le point $(2, 0, 0)$.

Pour $x_0 = \frac{11}{43}$, nous avons le point $(\frac{11}{43}, 0, 0)$.

7. Détermine l'équation du plan passant par l'intersection des plans

$$\pi \equiv x + 3y - z + 4 = 0, \quad \pi' \equiv 2x + y - 3z + 9 = 0 \quad \text{et par le point } (1, -1, 1).$$

Résolution

L'équation du plan passant par π et π' est : $x + 3y - z + 4 + k(2x + y - 3z + 9) = 0$

Comme il passe par $(1, -1, 1)$, nous avons :

$$[1 - 3 - 1 + 4 + k(2 - 3 + 9) = 0] \Leftrightarrow (k = -\frac{1}{7})$$

D'où l'équation du plan :

$$[x + 3y - z + 4 - \frac{1}{7}(2x + y - 3z + 9) = 0] \Leftrightarrow (5x + 20y - 4z + 19 = 0)$$

Exercices

N° 827. Trouve l'équation du plan passant par $(1, 3, 2)$ et $(3, 4, -1)$ et perpendiculaire au plan $3x + 4y + 2z - 1 = 0$

N° 828. Calcule la distance du point $(7, 3, 4)$ au plan $6x - 3y + 2z - 13 = 0$

N° 829. Trouve l'angle aigu des plans $3x - y + z - 1 = 0$ et $2x + y + z + 1 = 0$

N° 830. Détermine la distance entre les plans parallèles d'équations $3x + 2y - 6z + 12 = 0$ et $3x + 2y - 6z - 1 = 0$

N° 831. Dans un repère de l'espace, représente les plans $\pi_1 \equiv 3x + 2y = 30$; $\pi_2 \equiv x + 4y = 8$; $\pi_3 \equiv 2y + 3z = 12$

N° 832. Trouve sur l'axe Oz un point équidistant du point $M(1, -2, 0)$ et du plan d'équation $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

XII.4. LA DROITE

XII.4.1. EQUATION VECTORIELLE

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et contenant un point A.

La droite d est l'ensemble des points de l'espace tels que :

$$\vec{AP} = \alpha \vec{u} \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (1)$$

$$d = \{ P \in E : \vec{AP} = \alpha \vec{u}, \alpha \in \mathbf{R} \}$$

L'égalité (1) est l'équation vectorielle de d de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et passant par A.

XII.4.2. EQUATIONS PARAMETRIQUES

Soit la droite d d'équation vectorielle $\vec{AP} = \alpha \vec{u}$.

En posant $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $P(x, y, z)$, on a :

$$\begin{aligned} (\vec{AP} = \alpha \vec{u}) &\Leftrightarrow [(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)] \\ &\Leftrightarrow (x - x_0 = \alpha u_1, y - y_0 = \alpha u_2, z - z_0 = \alpha u_3) \\ &\Leftrightarrow (x = x_0 + \alpha u_1, y = y_0 + \alpha u_2, z = z_0 + \alpha u_3) \end{aligned}$$

En écrivant ces trois dernières expressions sous forme d'un système cartésien,

$$\text{on obtient : } \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 \end{cases} \quad (2)$$

Les égalités (2) sont les *équations paramétriques* de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et comprenant le point A.

XII.4.3. EQUATION CARTESIENNE

$$\text{Du système (2), on obtient : } \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (3)$$

Ce sont les *équations cartésiennes de la droite* d de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

Remarque

Partant du système (2), on peut établir un système d'équations cartésiennes de deux plans sécants dont l'intersection est la droite.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

XII.4.4. EQUATION DE LA DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS

Soit la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ et passant par les points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de d , on a :

$$(A \in d) \Rightarrow \left(\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \right) \quad (4)$$

Les coordonnées du point B doivent vérifier la relation (4).

$$\text{Ainsi, on a : } \frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c} \quad (5)$$

En divisant membre à membre les équations (4) et (5), on obtient :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (6)$$

ou $\vec{AB}$ ($x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$) est le vecteur directeur de d.

XII.4.5. ANGLE DE DEUX DROITES

Soit d_1 et d_2 deux droites sécantes, $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3), $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3) leurs vecteurs respectifs et V l'angle formé par d_1 et d_2 .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne :

$$\cos V = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$.

En général,

– deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire d'un vecteur directeur $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3) de d_1 et d'un vecteur directeur $\vec{q}$ (q_1, q_2, q_3) de d_2 est nul.

$$(d_1 \perp d_2) \Leftrightarrow (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0)$$

– deux droites d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement les coordonnées homologues de leurs vecteurs directeurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont proportionnelles.

$$(d_1 // d_2) \Leftrightarrow \left(\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} \right)$$

XII.4.6. ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3), π un plan de normale $\vec{n}$ (A, B, C) percé par d , α l'angle formé par d et π , et θ l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Il est évident que α est le complémentaire de

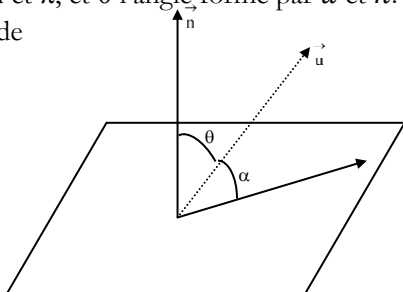
$$\theta; \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Le produit scalaire de $\vec{n}$ et $\vec{u}$ donne :

$$\cos \theta = \frac{Au_1 + Bu_2 + Cu_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \quad \text{et}$$

$$\sin \alpha = \frac{Au_1 + Bu_2 + Cu_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

En général,



- une droite d est parallèle à un plan π si et seulement si le produit scalaire d'un vecteur directeur $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3) de d et d'un vecteur normal $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) de π est nul.
 $(d // \pi) \Leftrightarrow (p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = 0)$
- une droite d est perpendiculaire à un plan π si et seulement si les coordonnées homologues d'un vecteur directeur $\vec{p}$ de d et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de π sont proportionnelles.

$$(d \perp \pi) \Leftrightarrow \left(\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_3}{n_3} \right)$$

Remarque

Pour trouver les coordonnées du point de percée de la droite dans le plan, on remplace dans l'équation du plan, x , y et z par leurs valeurs des équations paramétriques de la droite pour obtenir la valeur du paramètre.

XII.4.7. DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Soit à calculer la distance δ d'un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ à la droite d d'équation

$$\frac{x-\alpha}{u_1} = \frac{y-\beta}{u_2} = \frac{z-\gamma}{u_3}.$$

Procédé :

- Chercher le plan d'équation $u_1(x - \alpha) + u_2(y - \beta) + u_3(z - \gamma) = 0$ passant par P et perpendiculaire à d .
- Ecrire les équations paramétriques de d .
- Déterminer l'intersection du plan obtenu avec la droite d , ce qui donne le point P' appelé point de percé. (pour cela tirer la valeur du paramètre, remplacer x , y et z par leurs expressions dans l'équation du plan et introduire la valeur de t trouvée dans les équations paramétriques du plan).
- Calculer la distance de P à P' qui constitue la distance du point P à la droite d .

Autre méthode

Soit $P(\alpha, \beta, \gamma)$ un point et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de norme 1.

La distance du point P à la droite d est : $\delta = \sqrt{PA^2 - (\vec{PA} \cdot \vec{u})^2}$

où A est un point quelconque de d

Exercices résolus

1. Ecris l'équation de la droite d passant par $M(1, -1, 6)$ et de coefficients directeurs $2, -1, 1$.

Résolution

Les équations paramétriques de la droite d sont :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

L'équation cartésienne est : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{1}$

2. Trouve l'équation de la droite passant par (2, -2, 4) et d'angles directeurs 135° , 60° et 120° .

Résolution

L'équation cartésienne est :

$$\left(\frac{x-2}{\cos 135^\circ} = \frac{y+2}{\cos 60^\circ} = \frac{z-4}{\cos 120^\circ} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{-\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1} \right)$$

Le vecteur directeur $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ peut aussi s'écrire $(-\sqrt{2}, 1, -1)$.

3. On donne les points A(2, -1, 3) et B(6, 7, 4). On demande :

- a) Les coefficients directeurs de la droite AB c) L'équation cartésienne de AB
b) Les équations paramétriques de AB

Résolution

a) Les coefficients directeurs de AB sont $(6-2, 7+1, 4-3) = (4, 8, 1)$

b) Un système d'équations paramétriques de AB est :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 8t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{en considérant le point A.}$$

c) L'équation cartésienne de AB est $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-3}{1}$

4. Ecris l'équation de la droite passant par K(1, 3, 5) et perpendiculaire au plan $\pi \equiv 2x + 3y - 4z - 5 = 0$

Résolution

La droite perpendiculaire au plan π a pour coefficients directeurs 2, 3, -4.

L'équation cartésienne de d passant par K et perpendiculaire à π est : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-4}$.

5. Trouve l'intersection de la droite d $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ (1) et du plan $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$ (2)

Résolution

Déterminons les équations paramétriques de d.

$$\text{Nous avons } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases} \quad (3)$$

(3) dans (2) donne : $2(1 + \lambda) + 3(-1 - 2\lambda) + 6\lambda - 1 = 0$ et nous obtenons $\lambda = 1$

L'intersection de (1) et (2) est :
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$$

Le point I cherché est : (2, -3, 6).

6. Calcule la distance δ du point P(1, -1, -2) à la droite $d \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$

Résolution

Cherchons l'équation du plan passant par P et perpendiculaire à la droite d.

$[3(x-1) + 2(y+1) - 2(z+2) = 0] \Leftrightarrow (3x + 2y - 2z - 5 = 0)$ est l'équation du plan (1)

Déterminons l'intersection de ce plan avec $d \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases}$

En remplaçant x, y, z dans (1) nous avons :

$3(-3 + 3\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - 2(8 - 2\lambda) - 5 = 0 \quad \lambda = 2$

Le point d'intersection P' est :
$$\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$|PP'| = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = 7.$

7. Trouve l'intersection des droites :

$d_1 \equiv \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = k + 5 \\ y = -4k - 1 \\ z = k - 4 \end{cases}$

Résolution

$(d_1 \cap d_2) : \begin{cases} 2t - 3 = k + 5 \\ 3t - 2 = -4k - 1 \\ -4t + 6 = k - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2t - 8 \\ 3t - 2 = -4(2t - 8) - 1 \\ -4t + 6 = k - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2t - 8 \\ t = 3 \\ -4t + 6 = k - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ k = -2 \end{cases}$$

En remplaçant t et k par leurs valeurs respectivement dans d_1 et d_2 , nous obtenons le point d'intersection I(3, 7, -6)

8. Détermine les coordonnées des points d'intersection du plan

$3x + 4y + 6z - 12 = 0$ avec les axes des coordonnées.

Résolution

Nous avons : $(3x + 4y + 6z - 12 = 0) \Leftrightarrow (3x + 4y + 6z = 12)$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1\right)$

Les points d'intersection du plan avec les axes des coordonnées Ox , Oy et Oz sont respectivement : $A(4, 0, 0)$; $B(0, 3, 0)$ et $C(0, 0, 2)$.

9. Soit le droite d d'équations $d \equiv \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Ecris d sous la forme paramétrique.

Résolution

Déterminons l'intersection de d avec deux plans auxiliaires :

– Dans le plan yOz , $x = 0$; nous avons : $\begin{cases} -3y + 2z - 5 = 0 \\ -y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(0, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}\right)$

– Dans le plan xOz , $y = 0$ et nous avons : $\begin{cases} 5x + 2z - 5 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{7}{9}, 0, \frac{5}{9}\right)$

La droite d s'écrit : $\left(\frac{x-0}{\frac{7}{9}-0} = \frac{y+\frac{7}{5}}{0+\frac{7}{5}} = \frac{z-\frac{2}{5}}{\frac{5}{9}-\frac{2}{5}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{7}{9}} = \frac{y+\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{z-\frac{2}{5}}{\frac{7}{45}}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9x}{7} = \frac{5y+7}{7} = \frac{45z-18}{7}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{9} + \frac{7}{9}t \\ y = \frac{7}{9}t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{7}{45}t \end{cases}$$

Exercices

N° 833. Détermine λ pour que la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

soit parallèle à la droite passant par $A(2, 1, 1)$ et $B(3, 3, -1)$.

N° 834. Détermine k pour que les droites $d \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{k}$ et

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{k} = \frac{z-1}{4}$$

soient perpendiculaires.

N° 835. Détermine l'équation du lieu des points $P(x, y, z)$ tels que PA soit perpendiculaire à PB sachant que $A(3, 2, 0)$ et $B(2, 1, -5)$.

N° 836. Ecris l'équation du plan passant par $(1, 2, 3)$ et perpendiculaire à la droite de coefficients directeurs $2, 3, -5$.

N° 837. Ecris l'équation du plan perpendiculaire au segment de droite défini par

$$A(-2, 2, -3) \text{ et } B(6, 4, 5) \text{ en son milieu.}$$

N° 838. Ecris l'équation du plan perpendiculaire au segment de droite défini par $A(0, 0, 4)$ et $B(1, 3, 2)$ en son milieu.

N° 839. Ecris l'équation du plan passant par la droite commune aux plans $x + y + z - 1 = 0$ et $2x + 3y - 4z + 1 = 0$ ainsi que par le point $(-2, 1, 3)$

- N° 840. Détermine la distance entre les plans parallèles $3x + 2y - 6z + 12 = 0$ et $3x + 2y - 6z - 1 = 0$.
- N° 841. Ecris l'équation de la droite passant par $(1, -1, 1)$ et perpendiculaire à $2x + 3y - 4z + 2 = 0$.
- N° 842. Ecris les équations paramétriques de la droite passant par $(2, -3, 4)$ et $(1, 3, 5)$ et en déduire l'équation cartésienne.
- N° 843. Trouve l'équation de la droite passant $(1, 0, -1)$ et parallèle au plan $2x + y - z - 1 = 0$.
- N° 844. Ecris l'équation de la droite passant par $(-2, 4, 3)$ et parallèle à la droite d'angles directeurs $30^\circ, 45^\circ$ et 60° .
- N° 845. Trouve l'intersection de la droite $d \equiv \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ et du plan $\pi \equiv x + 2y - 2z + 6 = 0$.
- N° 846. Trouve dans le faisceau de plans $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ un plan :
 a) qui passe par le point $M(1, -2, 3)$ c) qui est parallèle à l'axe Oy
 b) qui est parallèle à l'axe de Ox
- N° 847. Montre que les droites suivantes sont parallèles.
 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ et $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$
- N° 848. Montre que les droites suivantes sont perpendiculaires.
 a) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ et $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 8z + 3 = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$
- N° 849. On donne par ses équations, la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$
 a) Calcule les coordonnées du point de rencontre de cette droite avec le point ZOY
 b) Ecris l'équation de la droite parallèle à d et passant par le point $A(0, 1, -1)$.

XII.5. EXERCICES D'AUTOEVALUATION

N° 850. Trouve sur l'axe des abscisses un point distant 12 du point A(3, 4, 8).

Rép. : $x = 11$ et $x = -5$.

N° 851. Calcule la distance du point P (2, 1, 3)

a) à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ b) au plan $\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases}$

Rép. : $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Rép. : $\sqrt{2}$

N° 852. Trouve l'équation du plan passant par les points A(1, 3, 2) et B(0, 0, 4)

et perpendiculaire au plan $\pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$. Rép. : $7x - 3y - z + 4 = 0$.

N° 853. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace, on considère le tétraèdre OABC avec

A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) et C(0, 0, 1). Calcule :

a) la coordonnée du centre de gravité G du triangle OAC. Rép. : $G\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

b) la coordonnée du centre de gravité D du tétraèdre. Rép. : $D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

N° 854. L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points A(1, 1, 1), B(-2, 0, 1), C(1, 2, 3) et D(-2, 1, 3).

a) Calcule les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, -1), (B, 4), (C, 2) et (D, -2). Rép. : $G\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$

b) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$? Rép. : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

c) Qu'en conclut-on pour les points A, B, C et D ?

Rép. : Les points A, B, C et D sont coplanaires et forment le parallélogramme ABCD.

N° 855. Calcule la distance entre le plan $\pi \equiv 4x + 3y + 12z + 76$ et le point P(21, -5, 2).

1. 13

2. 14

3. $\frac{1}{13}$

4. $\frac{1}{14}$

5. $\frac{12}{13}$

N° 856. Calcule la distance δ du point P(1, -1, -2) à la droite $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} =$

$\frac{z-8}{-2}$

1. 49

2. 7

3. 2

4. 2

5. 4

N° 857. Dans l'espace E est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

A(1, -2, 3), B(-2, -1, 3), C(1, 4, -5) et D(2, -3, 0).

a) Le centre de gravité G du tétraèdre ABCD est :

$$1. \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$3. \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$5. (2, -2, -2)$$

$$2. \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

$$4. \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

b) Soit K le centre de gravité du triangle BCD et soit L le barycentre des points pondérés (G, 3) et (A, 1). l'égalité vraie est :

$$1. G = \frac{1}{2}L \quad 2. G = L \quad 3. \frac{1}{2}G = L \quad 4. G = -L \quad 5. \frac{8}{3}G = L$$

N° 858. Soit le plan π défini par trois points non alignés A(3,1,5) ; B(-4,2,-3) et C(-5,1,2).

L'équation de π est:

$$1. 43y - 3x + 8z - 74 = 0 \quad 2. 4x + 3y - 5z - 10 = 0 \quad 3. 9x + 19y - 4z - 25 = 0$$

$$4. 2x + 5y - 6z - 4 = 0 \quad 5. 12x - 3y + 16z - 58 = 0$$

ANNEXE : QUELQUES QUESTIONS POSEES AUX EPREUVES DE L'EXAMEN D'ETAT ET AUX CONCOURS D'ADMISSION

- N° 859. $[\sqrt[3]{2}(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)]^9 =$
 1. $8i$ 2. $-8i$ 3. $8 + 8i$ 4. $2 + i$ 5. -1 (Exetat 1989)
- N° 860. Les solutions de l'équation $2iz^2 - (2 + 9i) = 0$ sont :
 1. $\frac{1}{2}$ et $4 - i$ 2. $-\frac{1}{2}$ et $4 + i$ 3. $\frac{1}{2}$ et $4 + i$ 4. $-\frac{1}{2}$ et $4 - i$ 5. $\frac{1}{2} - i$ et $4 - i$
 (Exetat 1987)
- N° 861. Soit l'équation complexe $Z^3 + 4(-1 + i)Z^2 + (2 - 9i)Z + 1 + 5i = 0$ où
 Z_1, Z_2 et Z_3 sont les solutions. La somme des carrés des racines Z_1, Z_2 et Z_3
 vaut :
 1. $-14 - 4i$ 2. $-32 + 14i$ 3. $-32i$ 4. $-4 - 14i$ 5. $32i$ (Exetat 2016)
- N° 862. Soient Z_0, Z_1 et Z_2 les racines cubiques du nombre complexe 1.
 L'expression $Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2$ correspond à
 1. -2 2. $-1 - i$ 3. $-1 + i$ 4. $\frac{-1}{2}$ 5. 0 (Exetat 2016)
- N° 863. Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation complexe $z^2 + (5 - i)z + 8 - i = 0$
 $|z_1|^2 + |z_2|^2$ est égale à :
 1. 5 2. 10 3. 18 4. 144 5. 169 (Exetat 2017)
- N° 864. Si le nombre complexe $(\bar{z})^{-1} = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}$ alors le nombre complexe Z^2
 est :
 1. $\frac{1}{4}$ 2. $2i$ 3. 4 4. $-8i$ 5. $-2i$ (Exetat 2017)
- N° 865. On donne, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, un nombre z
 de module $\rho = 6$ et d'argument $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (modulo 2π). Les composantes du
 complexe z sont notées a et a' . L'expression $10 + aa'$ vaut :
 1. -8 2. -17 3. -27 4. -38 5. -48 (Exetat 2017)
- N° 866. On désigne respectivement par x et y l'opposé et l'inverse de $2 - 3i$
 alors la quantité $x.y$ est égale :
 1. $-2 + 3i$ 2. 1 3. -1 4. $\frac{2+3i}{13}$ 5. $1 + 12i$ (Exetat 2017)
- N° 867. On donne l'équation complexe $z^2 + zi + 1 + 3i = 0$. Si z_1 représente
 la racine dont la partie imaginaire est négative et z_2 la racine dont la partie
 imaginaire est positive alors le produit $z_1.z_2$ vaut :

1. $-2 + 4i$ 2. 0 3. -1 4. $3 + 4i$ 5. $-4i$ (BC- 2018)

N° 868. Dans l'ensemble C des nombres, l'équation $Z^3 - 6Z^2 + 2(6+i)Z - 8 - 4i^{53} = 0$ admet Z_1, Z_2, Z_3 pour racines dont l'une d'elles est réelle et $I_m(Z_1) < I_m(Z_2) < I_m(Z_3)$.

a. P_1, P_2, P_3 points images respectifs de Z_1, Z_2 et Z_3 forment le triangle . $P_1P_2P_3$.

La médiatrice de P_1P_2 a pour équation :

1. $y - x + 2 = 0$ 3. $y + x + 2 = 0$ 5. $y + x + 3 = 0$
2. $y + x - 3 = 0$ 4. $y - x - 3 = 0$

b. Le nombre $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3}$ est :

1. $-\frac{4}{3} - \frac{3}{5}i$ 2. $-i$ 3. $\frac{4}{3} + \frac{3}{5}i$ 4. i 5. $\frac{4}{3} - \frac{3}{5}i$

c. Le module Z_1 vaut :

1. 1 2. $\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{5}$ 4. 3 5. $\sqrt{10}$ (Exetat 2018)

N° 869. Les solutions de l'équation : $Z^2 - |1 + 2i\sqrt{2}|Z + |1 + i\sqrt{3}| = 0$

sont :

1. 1 et 2 2. 1 et 3 3. 1 et 4 4. 2 et 4 5. 3 et 4 (Exetat 2019)

N° 870. L'équation $iz^3 + (-1 + 2i)z^2 - (4 + i)z + 3(-1 + 2i) = 0$ admet 3 racines dont :

- Une est imaginaire pure Z_1 , de point image A ;
- Une est réelle $Z_2 = -3$, de point image B ;
- Une troisième Z_3 de point image C.

L'expression $Z_1Z_2Z_3$ vaut :

1. $2 + i$ 2. $-6 - 3i$ 3. $-8 - 4i$ 4. $-2 - i$ 5. $6 + 3i$

N° 871. Soit Z un nombre complexe de forme algébrique $Z = 1 - i\sqrt{3}$. La forme exponentielle de Z vaut : (Exetat 2021)

1. $Z = 2.e^{\frac{\pi}{3}i}$ 2. $Z = 2.e^{\frac{2\pi}{3}i}$ 3. $Z = 2.e^{\pi i}$ 4. $Z = 2.e^{\frac{4\pi}{3}i}$ 5. $Z = 2.e^{\frac{5\pi}{3}i}$

N° 872. Soit dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $iZ^3 + (2i - 1)Z^2 - (4+i)Z + 3(2i - 1) = 0$ admet trois racines z_0, z_1 et z_2 et telle que $z_0 = -3$ est réelle z_1 est imaginaire pur et dont les points images sont notés P_0, P_1 et P_2 . Les items a) et b) s'y rapportent.

a) La somme des racines imaginaires vaut :

1. $2 - i$ 2. $1 + i$ 3. $2 + i$ 4. $1 - i$ 5. 1 (Exetat 2022)

b) La distance en (cm) de P_0 à P_2 vaut :

1. $\sqrt{10}$ 2. $2\sqrt{5}$ 3. $4\sqrt{3}$ 4. $5\sqrt{2}$ 5. $4\sqrt{5}$ (Exetat 2022)

N° 873. Résous l'équation $\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^2 \\ 1 & i & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et représente l'ensemble des solutions dans le plan complexe.

(U.L.B 1994)

N° 874. Soit le réel a tel que $0 < a < 1$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} a^{\frac{1}{x}} =$

1. $+\infty$ 2. $-\infty$ 3. a 4. 1 5. 0

N° 875. L'inéquation $\ln(2-x) > 1/2 \ln x$ est vérifiée si et seulement si :

1. $1 < x < 2$ 2. $x > 4$ ou $0 < x < 1$ 3. $x < 1$ 4. $x < 4$ ou $x < 1$ 5. $0 < x < 1$

N° 876. Dans $\mathbf{R}$, on donne l'équation $a^{2x-2} - a^{x-1} - 2 = 0$. Pour $a = 8$. La solution de cette équation est :

1. 2 2. $\frac{4}{3}$ 3. 0 5. $\frac{3}{2}$ 5. $\frac{1}{2}$ (Exetat 1986)

N° 877. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$ 1. e^2 2. $+\infty$ 3. 1 4. E^2 5. 0
(Exetat 1986)

N° 878. Détermine les coordonnées du point de la courbe $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ où la

tangente a pour coefficient angulaire $-\frac{4}{3}$

1. $(\ln 1/5 ; 1/5)$ 3. $(\ln 1/3 ; 4/3)$ 5. $(1/3 ; 4/3)$
2. $(\ln 3/2 ; 13/12)$ 4. $(1/3 ; 5/3)$ (Exetat 1987)

N° 879. Déterminer la racine de l'équation logarithmique $\log_2 \{ \log_3(\log_4 x) \} = 0$
1. 1 2. 4 3. 4^9 4. 4^6 5. 64 (Exetat 1987)

N° 880. Soit $P = \frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3}$. Calculer $3^{\frac{P}{2}}$:

1. $\sqrt{2}$ 2. 3^6 3. $\sqrt{6}$ 4. 3 5. $1/2$ (Exetat 1987)

N° 881. Si $a > 0$. On considère la fonction exponentielle f définie par $f(x) = a^x$. La proposition fautive est :

1. Si $x > 0$ et $0 < a < b$ alors $a^x < b^x$
2. Quel que soit $a > 0$, la fonction est continue dans $\mathbf{R}$
3. Si $0 < a < 1$, la fonction f est décroissante dans $\mathbf{R}$

N° 882. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1} = 1.$ 0 2. E 3. 1 4. ∞ 5. 2

(Exetat 1988)

N° 883. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\operatorname{tg} x} =$

1. $\frac{a}{b}$ 2. ∞ 3. $a - b$ 4. 0 5. $+\infty$ (Exetat 1988)

N° 884. Si $a = \lim_{x \rightarrow 2} [1 + 3(x-2)]^{\frac{1}{2x-4}}$. Détermine $\ln a$

1. $-3/2$ 2. $-2/3$ 3. -1 4. $2/3$ 5. $3/2$ (Exetat 1989)

N° 885. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation logarithmique

$$\log_5(2x+15) + 2\log_{2x+15} 5 = 3 \text{ est de la forme } \{a, b\}. \text{ Calcule } a + b$$

1. 1 2. 2 3. 0 4. -2 5. -1 (Exetat 1989)

N° 886. Résous dans $\mathbb{R}$, $\ln(x-3) + \ln(x-5) \leq \ln 3$. L'ensemble des solutions est :

1. $[2, 6]$ 2. $]5, 6[$ 3. $]3, 6[$ 4. $] -\infty, 2[\cup [6, +\infty[$ 5. $]5, 6[$ (Exetat 1989)

N° 887. Soit a et b deux réels strictement positifs ($a \neq b$), vérifiant :

$$\ln \frac{2a+b}{3} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b). \text{ Le rapport } \frac{a}{b} \text{ vaut :}$$

1. 9 2. 4 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{9}{4}$ 5. $\frac{4}{9}$ (Exetat 1989)

N° 888. Soit la fonction $f(x) = e^{2x} + 3e^x - 2$. La limite pour $x \rightarrow -\infty$ vaut :

1. $+\infty$ 2. $-\infty$ 3. 0 4. 2 5. -2 (Exetat 1989)

N° 889. L'équation $1 +$

$$\log_x 2 \cdot \log_x (2x+1) = \log_x (x-4) \cdot \log_{(x-4)} (x-3) - \frac{1}{\log_{x+4} x}$$

1. n'a pas de solution 4. a trois solutions $x=0$; $x=1/3$ et $x=\sqrt{2}$
 2. a une solution $x=1$ 5. a une solution $x=1/5$
 3. a deux solutions $x=\frac{1}{2}$ et $x=3$

N° 890. La limite, quand x tend vers 1 de la fonction $y = \frac{(x-1) \tan(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$

vaut :

1. $\frac{2\pi}{3}$ 2. 0 3. $\frac{3\pi}{2}$ 4. $\frac{8}{\pi^2}$ 5. 1 (M. – 1994)

N° 891. Dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} \log_x e + \log_y e = 3/4 \\ \ln(xy) = 6 \end{cases}$ a pour solution les couples :

1. $(e^2; e^4)$ et $(e^4; e^2)$ 3. $(e^3; e)$ et $(e; e^3)$ 5. $(e^3; e^2)$ et $(e^2; e^3)$
 2. $(0; e/3)$ et $(e/3; 0)$ 4. $(1/2; e^3)$ et $(e^3; 1/2)$ (Exetat 1994)

N° 892. Les solutions de l'inéquation $\log_4 x > \log_{16} (3x^2 - 8)$ sont les nombres x tels que :

1. $x = 0$ ou $x > -2$ 3. $0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 2$
 2. $\frac{2\sqrt{6}}{3} < x < 2$ 4. $x \geq 3$ (Exetat 1994)

N° 893. On donne les fonctions de la variable réelle x :

$$f: x \rightarrow \begin{cases} x^2 \ln \frac{x}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g: x \rightarrow \frac{x^2}{2} \quad \text{si } x \geq 0.$$

On désigne par F et G les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

a) Étudie la fonction f (racines, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, extremums, variation, point d'inflexion F).

b) Détermine les points communs à F et à G .

c) Trace F et G .

d) Une droite d'équation $x = p$, $p \in]0, 2\sqrt{e}[$, coupe F en A et G en B .

Détermine la valeur de p pour laquelle $[AB]$ a une longueur maximale et calcule cette longueur maximale.

e) Calcule l'aire du domaine plan compris entre F et G . (BAC, 1995).

N° 894. Le quatrième terme non nul du développement de MacLaurin de la fonction $\ln(1 + 2x)$ est :

1. $2x^4$ 2. $-2x^4$ 3. $-4x^4$ 4. $4x^4$ 5. Autre réponse

N° 895. Le développement de $f(x) = \ln(1 + 2x)$ par la formule de MacLaurin est de la forme $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$. L'expression $a - b - c + d$ vaut :

1. $-\frac{20}{3}$ 2. $-\frac{8}{3}$ 3. $\frac{8}{3}$ 4. $\frac{20}{3}$ 5. $\frac{32}{3}$ (BC-2018)

N° 896. Avec la formule de développement en série de Mac-Laurin, le terme

général $\frac{x^k \cdot (\ln a)^k}{k!}$ permet de développer la fonction. L'expression $f(x)$

=

1. a^x 2. $\cos x$ 3. e^{-x} 4. $\ln x$ 5. $\sin x$ (Exetat 2018)

N° 897. A et B sont les coefficients non nuls de deux premiers termes du développement de la fonction f définie par $f(x) = x \cdot \arctg x$, par la formule de Mac-Laurin. Le nombre $\frac{B}{A}$ vaut :

1. -3 2. $-\frac{4}{3}$ 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{4}{3}$ (Exetat 2018)

N° 898. Le coefficient du terme en x^4 du développement en série de Mac-Laurin de la fonction $f(x) = e^{-2x}$ est :

1. 2 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. -2 5. $-\frac{4}{3}$ (Exetat 2019)

N° 899. Soit la fonction $f(x) = xe^{-x}$. En appliquant le développement de MacLaurin,

a. Le terme général de ce développement est :

1. $\frac{x^n}{(n-1)!}$ 2. $\frac{x^n}{(n+1)!}$ 3. $(-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{(n-1)!}$
4. $\frac{x^n}{n!}$ 5. $(-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$ (Exetat 2019)

b. La somme des coefficients de quatre premiers termes non nuls dans ce développement vaut :

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{5}{3}$ 4. $\frac{8}{3}$ 5. 0 (Exetat 2019)

N° 900. Détermine a et b de façon que $F(x) = (ax + b)e^x$ soit une primitive de $f(x) = (3x + 2)e^x$

1. $a = 1$ et $b = -1$ 3. $a = 3$ et $b = -1$ 5. $a = 0$ et $b = -1$
2. $a = 2$ et $b = -4$ 4. $a = -1$ et $b = 2$ (Exetat 1996)

N° 901. Soit $y = (\lg x)^{\sin x}$. La différentielle de y est :

1. $dy = \left(\frac{\ln x}{\cos x} + \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln x \cos x}{x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$
2. $dy = \left(\frac{\ln x}{\cos x} - \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln x \cos x}{x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$
3. $dy = \left(\frac{\ln x}{\sec x} + \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln x \cos x}{x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$
4. $dy = \left(\frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} + \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln x \cos x}{x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$
5. $dy = \left(\frac{\ln x}{\cot x} + \ln x \operatorname{tg} x + \frac{\ln x \cos x}{x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$ (M. 1997)

N° 902. Soit la fonction $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$. Sa différentielle est dy ; dy est égale à

1. $dy = \frac{-6x-5y}{5x+4y} dx$
2. $dy = \frac{6x}{5x+4y} dx$
3. $dy = \frac{-6x}{5x-4y} dx$
4. $dy = \frac{6x+5y}{5x+4y}$
5. $\frac{6x-5y}{5x+4y}$ (Exetat 2014)

N° 903. On considère la fonction donnée sous forme implicite $x^2 + 2xy - y^2 = 9$. La différentielle dy de cette fonction au point des coordonnées $(2, 1)$ avec $dx = 1$, est égale à :

1. 1
 2. 3
 3. 6
 4. -3
 5. -6
- (Exetat 2014)

N° 904. Si $\ln y = \frac{x}{y}$, alors $dy =$

1. $\frac{y}{x+y} dx$
2. $y dx$
3. $\frac{x+y}{x} dx$
4. $e^{x/y} dx$
5. $\frac{y}{x} dx$ (Exetat 1980)

N° 905. La fonction $y = e^x (x^2 - 2)$, dx et dy désignant respectivement la différentielle de x et de y . Le rapport $\frac{dy}{dx}$ vaut :

1. $e^x (1 - x^2)$
2. $-e^x (x^2 + 2x - 1)$
3. $e^x (x^2 + 2x - 1)$
4. $e^x (x^2 - 1)$
5. $-e^x (1 - 2x - 2x^2)$ (Exetat 2015)

N° 906. La fonction f définie par : $f(x) = \ln(\ln 2x)$ admet une différentielle notée dy égale à :

1. $\frac{dx}{x \ln x}$
2. $\frac{dx}{x \ln \frac{x}{2}}$
3. $\frac{2dx}{x \ln 2x}$
4. $\frac{2dx}{x \ln x}$
5. $\frac{dx}{x \ln 2x}$ (Exetat 2022)

N° 907. Soit la fonction $y = \cos(x \cos x)$, avec dy et dx désignant la différentielle 1^{ère} respectivement de y et de x . Le rapport $\frac{dy}{dx}$ est

1. $\frac{\cos x}{x} + \sin x \ln x$ 2. $x^{\cos x} \left[\sin x \ln x - \frac{\cos x}{x} \right]$

3. $x^{\cos x} \left(\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$ 4. $x^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right]$

5. $x^{\sin x} \left[\cos x \ln x - \frac{\cos x}{x} \right]$ (Exetat 2016)

N° 908. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+3e^x} =$

1. $\ln 9/7$ 2. $\ln 8/3$ 3. $\ln 4/3$ 4. $\ln 8/7$ 5. $\ln 8/5$ (Exetat 1983)

N° 909. On donne l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Sur la courbe représentative C ,

on considère des points A et B d'abscisses respectives $2/3$ et 2 , l'aire du secteur hyperbolique limité par OA, OB et C vaut :

1. $\ln \frac{1}{3}$ 2. $2 \ln 3$ 3. $2 \ln \frac{1}{3}$ 4. $\ln \frac{3}{2}$ 5. $\ln 3$ (Exetat 1983)

N° 910. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x} =$

1. $\sin x - \cos x + c$ 3. $\sin x + \operatorname{cosec} x + c$ 5. $-\sin x - \operatorname{cosec} x + c$
2. $-\sin x - \cos x + c$ 4. $\sin x - \operatorname{cosec} x + c$

(Exetat 1979)

N° 911. $\int_0^{\sqrt[3]{e}} \frac{x^2 dx}{x^3 + e} =$

1. $1/3$ 2. $\ln \sqrt[3]{2}$ 3. $1/3(\ln 2 + 1)$ 4. $\ln 2$ 5. $-\infty$

N° 912. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt$

1. $4e^3 + 2$ 2. $e^2 + 1$ 3. $2(4e^2 + 1)$ 4. $e + 2$ 5. $2(e^2 + 1)$ (Exetat 79)

N° 913. L'aire comprise entre la courbe $y = x \ln x$, l'axe Ox et la droite $x = e$ vaut :

1. $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$ 2. $\frac{e^2}{2}$ 3. $\frac{e^2}{4}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$ (Exetat 1980)

N° 914. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

N° 915. $\int_{-2}^0 |x^2 - 1| dx$ vaut
 1. -2 2. 1 3. 2 4. 3 5. 4 (Exetat 2015)

N° 916. L'intégrale $\int_2^3 \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$ vaut
 1. $3 \ln 3$ 2. $\ln 3$ 3. $\frac{7}{2} + \ln 2$ 4. $\ln \frac{3}{7}$ 5. $-\ln 3$ (Exetat 2016)

N° 917. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec dx désignant la différentielle 1^{ère} de x . L'intégrale de -1 à 1 de $f(x)$ vaut :
 1. $-\frac{5}{6}$ 2. $-\frac{3}{4}$ 3. $-\frac{1}{6}$ 4. $\frac{1}{6}$ 5. $\frac{5}{6}$ (Exetat 2016)

N° 918. La fonction trigonométrique $f(x) = \tan^6 x \sec^4 x$, avec dx la différentielle 1^{ère} de x . L'intégrale définie de la fonction $f(x) dx$ sur l'intervalle de $[0, \frac{\pi}{4}]$ vaut :
 1. $\frac{16}{63}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 3. $\frac{63}{16}$ 4. $\frac{90\sqrt{3}}{7}$ 5. $\frac{63}{2}$ (Exetat 2016)

N° 919. Le volume engendré par la rotation de l'axe Ox de la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$; l'axe des x et les droites $y = 0$ et $x = 2$ vaut :
 1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. Π 4. 16π 5. 18π (Exetat 2017)

N° 920. On donne, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{2}$. L'aire A déterminée par le graphe de $f(x)$ et l'axe Ox tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, en unités d'aire, vaut : (Exetat 2017)
 1. $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$ 2. $\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}$ 3. $\Pi + \sqrt{2}$ 4. $\Pi + 2\sqrt{2}$ 5. $\Pi + 3\sqrt{2}$

N° 921. V est le volume engendré par la rotation autour de l'axe oy , de l'aire limitée par la courbe (C) d'équation $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ et l'axe des ordonnées. En unités de volume, V vaut :
 1. $\frac{4}{3}\pi$ 2. $\frac{8}{3}\pi$ 3. $\frac{16}{3}\pi$ 4. 4π 5. 12π (Exetat 2018)

N° 922. Soit une fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}$ et dx la différentielle de x . L'intégrale de $f(x)dx$ vaut :
 1. $\frac{1}{5} \arcsin 5x + c$ 2. $\frac{1}{4} \arcsin 4x + c$ 3. $\frac{2}{3} \arcsin \frac{5}{3}x + c$

4. $\frac{1}{5} \arcsin \frac{5}{3} x + c$ 5. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{2} x + c$ (Exetat 2019)

N° 923. Partant de $y^2 - x^2 = 4$, l'expression de dy en fonction de x , y et dx est :

1. $\frac{x}{y} dx$ 2. $-2x dx$ 3. $\frac{y}{x} dx$ 4. $2x dx$ 5. $\frac{x}{y} dx$ (Exetat 2019)

N° 924. V est le volume engendré par une partie du graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x}, \text{ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite}$$

$x - 4 = 0$. En unité de volume, V vaut :

1. 36π 2. 32π 3. 16π 4. 8π 5. 2π (Exetat 2019).

N° 925. A est l'aire de la partie du plan comprise entre le graphique de la courbe $y = x^2 + 3$, les droites $y = x + 1$, $x = 1$ et $x = -1$.

En unité d'aire, A vaut :

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{8}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$ 4. 8 5. 14 (Exetat 2019)

N° 926. On donne la fonction f définie par $f(x) = x.e^{1-x}$ et (C) sa courbe représentative. A est l'aire de la surface comprise entre la courbe, les droites $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses. A vaut :

1. $\frac{1}{2e} u.s$ 2. $\frac{1}{e} u.s$ 3. $(e - 2) u.s$ 4. $e. u.s$ 5. $2e u.s$ (Exetat 2020)

N° 927. On donne la cycloïde d'équations $x = 6(t - \sin t)$ et $y = 6(1 - \cos t)$, l'axe des abscisses avec $0 \leq t \leq 2\pi$ et (C) sa courbe représentative. L'aire limitée par (C) et l'axe des abscisses vaut :

1. 48π 2. 50π 3. 72π 4. 75π 5. 108π (Exetat 2021)

N° 928. On donne le point $P(4,5)$ dans le système d'axes orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

En faisant tourner la droite (d) passant par le point P et l'origine des axes autour de l'axe des ordonnées, on obtient le volume V .

Le volume V vaut :

1. $\frac{100\pi^2}{3}$ 2. $\frac{80\pi^2}{3}$ 3. $\frac{100\pi}{3}$ 4. 30π 5. $\frac{80\pi}{3}$ (Exetat 2021)

N° 929. L'intégrale de la fonction f définie par $f(x) = \sin 4x \cos 3x$ est égale à :

1. $\frac{-1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + c$ 4. $\frac{-1}{12} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$
2. $\frac{-1}{12} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$ 5. $\cos 7x + \cos 6x + \cos 2x + \cos x + c$

$$3. \frac{-1}{14} \cos 7x - \frac{1}{2} \cos x + c \quad (\text{Exetat 2021})$$

N° 930. L'aire A de la surface déterminée par l'arcade du cycloïde d'équations paramétriques $x = 4(t - \sin t)$ et $y = 4(1 - \cos t)$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$. L'aire A vaut :

$$1. 84\pi \quad 2. 64\pi \quad 3. 48\pi \quad 4. \frac{16\pi}{3} \quad 5. \frac{3\pi}{16} \quad (\text{Exetat 2022})$$

N° 931. On donne la fonction f définie par : $f(x) = \cos x(\sin x + \sin^3 x)$ et l'on note A, l'aire de la surface comprise entre f et les droites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ et les axes, A vaut :

$$1. \frac{1}{2} \quad 2. \frac{3}{4} \quad 3. \frac{5}{6} \quad 4. \frac{6}{5} \quad 5. \frac{4}{3} \quad (\text{Exetat 2022})$$

N° 932. On donne une courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{1}{1+t} \end{cases}$$

Cette courbe représente :

1. une droite
2. une parabole
3. une ellipse
4. un cercle
5. une hyperbole

(Exetat 1999)

N° 933. On considère la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \frac{1}{2t+1} \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de la tangente au point d'abscisse nulle et d'ordonnée négative est égale à

$$1. -\frac{1}{3} \quad 2. -1 \quad 3. \frac{1}{3} \quad 4. 1 \quad 5. -\frac{1}{9} \quad (\text{Exetat 2000})$$

N° 934. Une courbe (C) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

(avec t élément de $[0 ; 2\pi]$) représente :

1. le segment [AB], où A(-1 ; 1) et B(1 ; 0)
2. un cercle de centre $\Omega(5 ; 3)$ et de rayon 2
3. le segment [AB] avec A(2 ; -1) et B(4 ; 0)
4. une portion de la parabole
5. le cercle de centre 0 et de rayon 1

(Exetat 2003)

N° 935. Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique dans un

$$\text{repère ortho normal } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est : } \begin{cases} x(t) = \cos t - 1 \\ y(t) = 2 \sin t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

L'équation cartésienne de la courbe (C) est :

1. $4(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$
 2. $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
 3. $4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
 4. $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 4$
 5. $4(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4$
- (Exetat 2007)

N° 936. Le lieu des points de rencontre de la polaire de l'origine par rapport à la conique $\lambda y^2 + 2\lambda xy + x^2 + 2\lambda y + 2 = 0$ représente :

1. une ellipse
 2. une droite
 3. une hyperbole
 4. une parabole
 5. un cercle
- (Exetat 2001)

N° 937. On donne le cercle de centre 0 et de rayon 2 et le point A(4 ; 0). Le lieu du point P telle que la distance PA soit égale à la longueur d'une tangente au cercle issue de P et limitée au point de contact, a pour équation :

1. $2x - 5 = 0$
 2. $2x + 5 = 0$
 3. $2x - 3 = 0$
 4. $x - 3 = 0$
 5. $2x + 3 = 0$
- (Exetat 1980)

N° 938. On donne le point I(3 ; 0) et on considère le cercle C de centre I et de

rayon 7. Le lieu des milieux des cordes issues de l'origine 0 des axes et interceptées par C, a pour équation :

1. $x^2 + y^2 - 6x = 0$
 2. $x^2 + y^2 - 3/2 x = 0$
 3. $x^2 + y^2 - 3x = 0$
 4. $x^2 + y^2 + 6x = 0$
 5. $x^2 + y^2 + 3x = 0$
- (Exetat 1983)

N° 939. La conique d'équation $(\lambda y + x - 1)(2\lambda y - 5x) + 1 = 0$ rencontre la polaire de l'origine par rapport à la conique au point P. L'équation du lieu de P égale :

1. $7x - 1 = 0$
 2. $x - 7 = 0$
 3. $x + 7 = 0$
 4. $7x + 1 = 0$
 5. $5x + 1 = 0$
- (Exetat. 2000)

N° 940. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne deux points fixes

P(1,2) et Q(3,-2), on les relie au point M variable sur l'axe des abscisses. De l'origine des axes des coordonnées, on trace la perpendiculaire (p) à la droite passant par les points P et M. On note (C) le lieu géométrique du point d'intersection de cette perpendiculaire à la droite passant par les points Q et M.

L'équation de (C) est :

1. $3y^2 + x^2 + 4xy - 6y - 3x = 0$
 2. $y^2 + x^2 - xy - 2y - x = 0$
 3. $y^2 + 3x^2 - xy - 6y - 3x = 0$
 4. $y^2 - x^2 - xy + 2y + x = 0$
 5. $3y^2 + x^2 - 2y - 6x = 0$
- (Exetat 2022)

N° 941. Un point P(x, y) se déplace de telle sorte que sa distance au point Q(2, 3) est toujours égale à sa distance à l'axe 0y. L'équation du lieu est :

1. $y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$
2. $y^2 - 8y - 4x + 13 = 0$
3. $y^2 - 4y - 8x + 13 = 0$
4. $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

$$5. y^2 + x^2 - 4y - 6x + 12 = 0 \quad (\text{Exetat 2015})$$

N° 942. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y , on donne les points fixes $A(5,0)$, $B(5,5)$ et $C(0,5)$. Une droite mobile, passant par O , coupe la droite AB en E et la droite AC en F . Les droites BF et CE se coupent en P .

- Etablis une équation cartésienne du lieu géométrique du point P .
- Quelle est la nature de ce lieu ? Détermine la position de son centre de symétrie, s'il existe.
- Construis et représente ce lieu en prenant comme unité de mesure le centimètre.

(ULB, Juillet 2000)

N° 943. L'équation $x^2 - 2xy + x + y + 1 = 0$ représente une hyperbole équilatère si l'angle θ des axes vaut :

$$1. \frac{7\pi}{6} \quad 2. \frac{\pi}{6} \quad 3. \frac{7\pi}{3} \quad 4. \frac{\pi}{3} \quad 5. \frac{2\pi}{3} \quad (\text{Exetat 2005})$$

N° 944. On suppose que les racines de $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) sont complexes. Quel est le lieu géométrique des points représentatifs des racines dans le plan complexe lorsque p varie, q restant constant ?

(FPM)

N° 945. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère une circonférence de rayon R qui coupe au moins un des axes de coordonnées. Soient A et B les intersections d'un axe de coordonnées avec cette circonférence. Détermine le lieu des centres des circonférences telles que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$. Analyse ce lieu et dessine les différents éléments et le lieu, avec $R = 4 \text{ cm}$.

(UCL, 1998)

N° 946. On donne une conique d'équation $(x - 2) \cdot (y - 3) = 12$.

On demande:

- d'en préciser la nature
- d'en donner la coordonnée du centre ;
- de donner l'équation de son (ses) axe(s) de symétrie.

On coupe cette conique par la droite d d'équation $3y = 2x + 11$.

On demande:

- de calculer les coordonnées des points d'intersection (A et B) de d avec la conique;
- d'écrire l'équation du lieu des points d'où l'on voit le segment AB sous un angle droit.

(FPM, 1998)

N° 947. La polaire du pôle $P(1,2)$ à la conique $y^2 - xy + 4x^2 - 5y + x + 1 = 0$ est une droite (d). L'équation de (d) est :

$$1. 2y + 7x - 7 = 0 \quad 2. 5y - 16x + 1 = 0 \quad 3. 2y - 7x + 7 = 0 \\ 4. 5y - 7x = 0 \quad 5. 5y + 16x + 1 = 0 \quad (\text{Exetat 2022})$$

N° 948. La courbe d'équation $\alpha = \frac{4}{1 - \cos \theta}$ a son foyer au pôle.

a) Cette courbe est :

- | | | |
|------------------|-----------------|--------------|
| 1. une ellipse | 3. Une droite | 5. un cercle |
| 2. Une hyperbole | 4. Une parabole | |

b) Son excentricité est :

1. $1/2$ 2. 1 3. 2 4. $2/3$ 5. $1/3$ (Exetat 99)

N° 949. En tout point d'une certaine courbe, la pente de la tangente égale six fois l'abscisse. L'équation de la courbe qui passe par le point $P(1; 1)$ est :

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $y = 4x^2 - 3$ | 3. $y = 3x^2 + 2$ | 5. $y = 4x^2 + 3$ |
| 2. $y = 3x^2 - 2$ | 4. $y = 4x^2 - 1$ | (Exetat 1999) |

N° 950. Trouve l'équation de l'hyperbole dont l'axe transverse est Oy et centré à l'origine, sachant que la longueur de la corde perpendiculaire à l'axe transverse est 10 et que la distance focale vaut 12.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ | 3. $x^2 - 3y^2 + 12 = 0$ | 5. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ |
| 2. $4x^2 - 3y + 48 = 0$ | 4. $4x^2 - 5y^2 + 80 = 0$ | (Exetat 2000) |

N° 951. La conique d'équation $\alpha y^2 + (2\beta - \alpha)xy - (1 - \alpha)x^2 + 2\beta y - (2\alpha - \beta)x + \alpha\beta = 0$ admet une asymptote confondue avec l'axe Oy si $(\alpha; \beta)$ égale :

1. $(2; 0)$ 2. $(1; 1)$ 3. $(0; 0)$ 4. $(-2; 1)$ 5. $(0; -1)$ ((Exetat 2000))

N° 952. En axes cartésiens d'angle $\theta = 60^\circ$, l'équation de la normale au point $(1; 2)$ de la parabole $y^2 - 4x = 0$ égale :

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x - y + 1 = 0$ | 3. $4y - x - 3 = 0$ | 5. $4y - x + 3 = 0$ |
| 2. $x + y - 3 = 0$ | 4. $x + y + 1 = 0$ | (Exetat 2000) |

N° 953. Les équations de deux diamètres conjugués à l'ellipse $4y^2 + x^2 - 1 = 0$; de manière que l'un d'eux forme avec l'axe Ox un angle de 45° , sont de la forme $a_1x + b_1y = 0$ et $a_2x + b_2y = 0$ avec $b_1 < 0$. Les réels $a_1(3b_1 + b_2)a_2$ vaut :

1. 0 2. 1 3. -1 4. 11 5. 19 (Exetat 2000)

N° 954. L'équation de la parabole de foyer $(1, 4)$ et de directrice $x = -4$ est :

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $y^2 - 6y - 10x + 4 = 0$ | 3. $y^2 - 8y - 10x + 1 = 0$ | 5. $y^2 - 6y - 14x + 16 = 0$ |
| 2. $y^2 - 4y - 10x + 9 = 0$ | 4. $y^2 - y + 5x + 5 = 0$ | (Exetat 2004) |

N° 955. L'équation globale des asymptotes de la courbe définie par les équations

$$x = \frac{t}{1-t} \text{ et } y = \frac{1+t}{t+2} \text{ est :}$$

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|------------------|
| 1. $xy + 2y + 2x + 4 = 0$ | 3. $9xy + 6y - 6x - 4 = 0$ | 5. $xy + 3y = 0$ |
| 2. $xy - 2x = 0$ | 4. $xy - 2y = 0$ | (Exetat 2001) |

N° 956. La longueur de la sous-normale au point (a, a) à la courbe $x^2 = ay$ pour $a = 1$ vaut :

1. 8 2. 4 3. 10 4. 2 5. 4 (Exetat 2001)

N° 957. Le pôle de la droite $x - 3y - 1 = 0$ par rapport à la parabole $y^2 = 6x$ est :

1. $(-1; 0)$ 2. $(-1/2; -2)$ 3. $(2; -2)$ 4. $(2; 3)$ 5. $(-1/2; 3)$ (M.-90)
 N° 958. L'équation cartésienne $3x^2 + 4y^2 - 8y - 15 = 0$ représente une conique dont l'équation polaire est :

$$\begin{array}{lll} 1. \rho = \frac{8}{3 - 5\cos \theta} & 3. \rho = \frac{4}{2 - \cos \theta} & 5. \rho = \frac{4}{1 + 2\cos \theta} \\ 2. \rho = \frac{4}{1 - 2\cos \theta} & 4. \rho = \frac{18}{5 + 4\cos \theta} & \end{array} \quad (\text{Exetat 2001})$$

N° 959. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\vec{u}(6, -1, 4)$ et $\vec{v}(-3, a, b)$ avec a et b deux réels. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque le couple (a, b) vaut : (Exetat 2015)

$$1. (+2, 1) \quad 2. \left(\frac{1}{2}, -2\right) \quad 3. \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \quad 4. (-2, -1) \quad 5. (-1, 1)$$

N° 960. Dans le plan P de dimension 3 du repère orthogonal, un vecteur $\vec{u}$ et un point A ont pour coordonnées respectivement $\vec{u}(-1, 2, 1)$ et $A(3, 4, -1)$. Une équation du plan P orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et passant par le point A est :

$$\begin{array}{lll} 1. 2x - y + 3z - 6 = 0 & 2. 2x - y + 3z - 1 = 0 & 5. 5x - y + 3z + 6 = 0 \\ 3. 2x - y + 3z + 1 = 0 & 4. 2x - y + 3z + 2 = 0 & \end{array} \quad (\text{Exetat 2015})$$

N° 961. Une droite d et deux plans π et π' ont pour équation respectivement $d \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$, $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$ et $\pi' \equiv 2x + 3y - 4z - 5 = 0$. Le point A est l'intersection de d et π . L'équation de la droite d' passant par A et perpendiculaire à π' est :

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-6}{4} & 2. \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+6}{-4} & 5. \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-4} \\ 3. \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{3} = \frac{z+6}{-4} & 4. \frac{x+\frac{3}{2}}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{4} & \end{array} \quad (\text{Exetat 2015})$$

N° 962. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x, y et z , on donne les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $D(d,d,d)$.

- Détermine l'équation cartésienne de chacune des faces du tétraèdre $ABCD$
- Détermine les équations cartésiennes de la droite AD
- Détermine l'angle que font les droites BD et AC
- Calcule d pour que le volume du tétraèdre soit égal à 1. (ULB 1996)

N° 963. L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$. On donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ qui avec O constituent quatre sommets d'un cube. On appelle DE l'arête du cube, parallèle au côté Oz , la plus éloigné de OC . Et on nomme M le point milieu de DE (N.B. D est dans le plan $Z = 0$).

- Détermine une équation cartésienne du plan perpendiculaire à CM en C .
- Calcule les coordonnées du point de percée S de DE dans ce plan.
- Calcule le volume de la pyramide de sommet S et de base $OADB$.
- Calcule l'angle entre CS et CA .
- Détermine les équations cartésiennes de droite CM .
- Calcule la distance qui sépare CM de l'origine O .
- Calcule l'angle entre AM et MC .

(U.L.B Juillet 1999)

N° 964. On donne dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le plan α , la droite d et le point $A \equiv x + y + z - 3 = 0$, $d = \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ et $P(3,3,3)$. On demande:

- les équations de la droite d' parallèle à d et qui passe par le point;
- les coordonnées du point d'intersection A de d' et α ;
- les équations de la perpendiculaire à α passant par P et les coordonnées du pied Q de cette perpendiculaire;
- calculer l'aire du triangle équilatéral ABC du plan α et dont Q est le centre de gravité;
- de calculer le volume de la pyramide dont le triangle ABC est la base et P est le sommet.

(ERM, 1996)

N° 965. Le lieu d'intersection des droites variables $-2\lambda x + y + 1 = 0$ et $x + 2y + \lambda = 0$ est :

- $x^2 + 5y^2 - 2y + 5 = 0$
- $2y^2 + 2x^2 - y + 2x = 0$
- $-3x^2 + 5y - 15x + 5 = 0$
- $2y^2 + 3x^2 - 2y + 15x = 0$
- $-4xy - 2x^2 - y + 1 = 0$

(Exetat 2019).

N° 966. On donne la famille de coniques $x^2 + \lambda xy + y^2 - 4\lambda y + 1 = 0$ où λ est un paramètre réel. Le lieu des centres des coniques est :

- $x^2 - y^2 + 4y = 0$
- $x^2 + y^2 + 4x = 0$
- $x^2 + y^2 - 4y = 0$
- $x^2 - y^2 - 4x = 0$
- $x^2 - y^2 + 4x = 0$

(Exetat 2019)

N° 967. Un point $M(x,y)$ se déplace dans le plan de telle sorte que le carré de sa distance au point $A(2,0)$ soit toujours égal au double du carré de sa distance au point $B(0,4)$. Le lieu du point M a pour équation :

- $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 28 = 0$
- $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$
- $x - 2y + 3 = 0$
- $x^2 + y^2 - 4x + 16y + 28 = 0$
- $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 8 = 0$

(Exetat 2019)

N° 968. On donne la famille des coniques $\lambda xy - 2x + y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Le lieu des pieds des parallèles à la droite $3y - 3x - 2 = 0$ a pour équation :

- $2y^2 + x^2 + 3 = 0$
- $y^2 + 2x^2 - 1 = 0$

$$2. 2y^2 + x^2 - 3 = 0 \quad 5. y^2 + x^2 - 3 = 0$$

$$3. y^2 + 2x^2 + 3 = 0 \quad (\text{Exetat 2020})$$

- N° 969. Le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite passant par les points A(3,1) et B(-3,-2) à la famille des coniques $y^2 + xy + x^2 + \lambda y - x = 0$ est : une conique (C). L'équation de (C) est :
1. $3y^2 - 4xy + x^2 - 2y + x = 0$
 2. $y^2 - 3xy - 2x^2 - y + x = 0$
 3. $3y^2 + 4xy - x^2 - 2y + x = 0$
 4. $2y^2 - 2xy - 3x^2 + 2y - x = 0$
 5. $2y^2 + 2xy - 3x^2 - 2y + x = 0$
- (Exetat 2022)

- N° 970. Un mathématicien veut aider son ami à réussir au concours d'embauche dans une entreprise de la place. Il recourt aux avoirs essentiels contenus dans le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3iZ + Z' = 8 + i \\ 2Z - iZ' = 1 - i \end{cases}$$

1. $(-9i; 19 + 4i)$
 2. $(-7i; -13 + i)$
 3. $(-9i - 1; 4i)$
 4. $(8i; 13 - i)$
 5. $(-9i; -19 + i)$
- (Exetat 2022)

- N° 971. Un statisticien veut interpréter la courbe de la fonction $y = \ln(x^2 - x + 1)$ représentant des filles qui se marient avant la fin des études universitaires. La dérivée première de y au point d'abscisse -2 est :

1. $-\frac{5}{7}$
 2. $\frac{3}{7}$
 3. 0
 4. 1
 5. $\frac{7}{3}$
- (Exetat 2022)

- N° 972. Le gouvernement de la République Démocratique du Congo encourage les chercheurs scientifiques de promouvoir la culture de plusieurs variétés de produit de première nécessité dont le manioc. Pendant ce processus, le calcul de l'acidité/la basicité est indispensable. D'où le contrôle fréquent de pH du manioc par le calcul du logarithme comme dans l'équation $\log(x - 25) + \log(x - 5) = 2$ dont la solution est ici notée B. L'expression $1 + B$ vaut :

1. 26
 2. 27
 3. 28
 4. 29
 5. 30
- (Exetat 2022)

- N° 973. Le mathématicien MacLaurin a appliqué le développement en Série de Taylor au voisinage de zéro, notamment aux fonctions dites élémentaires e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$; $(1+x)^m$... Toutes ces fonctions aident à la résolution plus facile d'autres fonctions plus complexes.

Un candidat géomètre retrouve dans son mémoire le développement selon MacLaurin de $f(x) = e^x$.

La somme de trois premiers termes de $f(x)$, pour $x = 2$, vaut

1. 3
 2. 4
 3. 5
 4. 8
 5. 10
- (Exetat 2022)

- N° 974. Un biologiste est confronté au calcul sans outils (calculatrice...) de l'intégrale

$$I = \int_1^2 (x + 1)e^x dx.$$

Après plusieurs tentatives de résolution sans succès, il se souvient qu'une telle intégrale est plus facile à calculer en utilisant la méthode d'intégration par parties. L'intégrale I, en unités d'aire, est égale:

1. $4e^3 - 2e$
2. $4e^2 - 2e$
3. $2e^2 + 2e$
4. $e^2 + 2e$
5. $e^2 - 2e$

N° 975. Lors de la communication avec son équipe de football, un entraîneur dispose ses joueurs sous forme d'un cercle représenté par l'équation $x^2 + y^2 + x + 3y - 4 = 0$. Le point intérieur au cercle est :

1. $(-1, -1)$ 2. $(1, 1)$ 3. $(0, 1)$ 4. $(2, 1)$ 5. $(0, 2)$ (Exetat 2022)

N° 976. A l'ouverture d'un championnat de Basketball, les spectateurs ont présenté une chorégraphie sous-forme d'un lieu des points M tels que le carré de la distance de chacun de ce point au point $P(1,0)$ est dans un rapport égal à 3 avec la distance de ce point à la droite d'équation $x + 2 = 0$. Le lieu géométrique du point M est déterminé par l'équation :

1. $x^2 + y^2 - 5x - 2 = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 2x + 6 = 0$ 3. $x^2 + y^2 - 3x - 5 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 5x - 5 = 0$ 5. $x^2 + y^2 + x + 6 = 0$ (Exetat 2022)

N° 977. Un technicien consulte un moteur de recherche Internet sur les courbes du second degré. Il remarque que la polaire du point $K(1, -2)$ par rapport à la conique d'équation $3y^2 - 2xy + 2x^2 - 4y + 2x - 7 = 0$ fait partie des éléments d'étude d'une conique. L'équation de la polaire est :

1. $5y + 7x - 2 = 0$ 2. $7x - 5y - 2 = 0$ 3. $9y - 5x + 2 = 0$
4. $x - 2y - 7 = 0$ 5. $5x - 3y - 2 = 0$ (Exetat 2022)

N° 978. Les dimensions d'une table devant contenir un équipement de laboratoire sont définies par l'équation de la conique $9x^2 + 4y^2 - 36x + 40y + 100 = 0$. L'expression réduite de la courbe est :

1. $9y^2 - x^2 + 4 = 0$ 2. $4y^2 + 9x^2 - 36 = 0$ 3. $2y^2 + 3x = 0$
4. $y^2 - 8x^2 + 2 = 0$ 5. $4y^2 + x^2 - 25 = 0$ (Exetat 2022)

N° 979. Un commissariat de la police construit un parterre circulaire ayant au centre un mât pour hisser le drapeau national.

Ce cercle dessiné sur un papier présente des éléments suivants :

le centre $(-1,0)$ et un point sur le cercle $A(3,5)$. L'équation du cercle est :

1. $x^2 + y^2 + 2x - 42 = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 2x - 40 = 0$ 3. $x^2 + y^2 + 2x - 30 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x - 28 = 0$ 5. $x^2 + y^2 + 2x + 15 = 0$ (Exetat 2022)

N° 980. Lors d'une révision, la dame mécanicienne Buya Luko a démonté un moteur. Elle constate qu'une pièce triangulaire est cassée et elle doit la reproduire. Elle dessine la pièce cassée dans un repère orthonormé. Les trois sommets A, B et C de la pièce ont des coordonnées respectives $(1,0,2)$, $(1,1,4)$ et $(-1,1,1)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$, sur le dessin, sont :

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Exetat 2022)

N° 981. Pour les travaux de réfection d'un rond-point, le maître d'ouvrage Jonathan Kahungu dessine sur un papier calque un cercle trigonométrique dans lequel il détermine les angles sous-forme :

$Z_1 = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ et $Z_2 = 4(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$.

Il calcule $A = \frac{Z_1}{Z_2}$. La forme algébrique de A est :

1. -4 2. -8 3. $-\frac{1}{2}i$ 4. $2i$ 5. $\frac{1}{2}i$ (Exetat 2023)

N° 982. Afin de départager les lauréats au concours organisé par le gouverneur de la ville, il a été demandé aux lauréats de calculer sous-forme de $a + bi$ le nombre $Z = \frac{1+i}{2-i} - \frac{2-i}{1+i}$. L'expression $\frac{a}{b}$ vaut :

1. -10 2. -7 3. $-\frac{12}{5}$ 4. $-\frac{1}{7}$ 5. $\frac{9}{5}$ (Exetat 2023)

N° 983. Dans ses calculs sur les ondes électromagnétiques, un ingénieur utilise deux nombres complexes : $Z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$.

Il calcule $W = (Z_2)^2$. L'écriture exponentielle de W est :

1. $e^{-\frac{\pi}{12}i}$ 2. $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 3. $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$ 4. $e^{\frac{\pi}{12}i}$ 5. $e^{\frac{5\pi}{12}i}$ (Exetat 2023)

N° 984. En vue de construire un marché, le topographe fixe un point de jonction entre deux avenues. Pour fixer avec exactitude l'emplacement du point où sera érigé le marché, il utilise un plan π muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $A(-1, \sqrt{3})$ un point du plan en coordonnées cartésiennes. Après transformation des coordonnées, le point A en coordonnées polaires est :

1. $(1, 30^\circ)$ 2. $(1, 60^\circ)$ 3. $(2, 120^\circ)$ 4. $(1, 90^\circ)$ 5. $(\sqrt{2}, 45^\circ)$ (Exetat 2023)

N° 985. Avant d'acheter des matériaux de carrelage d'une surface, un architecte a calculé l'aire A délimitée par la courbe de la fonction trigonométrique définie par $w(t) = \cos^2 t$ dans l'intervalle $[0, \pi]$. L'aire A, en unité graphique d'aire, vaut :

1. 2π 2. $\frac{\pi+2}{8}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{2}$ 5. $\frac{\pi}{4}$ (Exetat 2023)

N° 986. Dans la recherche des intégrales définies le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx$ donne :

1. $\log 5$ 2. $\log \sqrt{3}$ 3. $\log \frac{2}{\sqrt{2}}$ 4. $\log 2$ 5. 0 (Exetat 2023)

N° 987. Soit le plan π défini par trois points non alignés $A(3, 1, 5)$; $B(-4, 2, -3)$ et $C(-5, 1, 2)$. L'équation de π est :

1. $43y - 3x + 8z - 74 = 0$ 2. $4x + 3y - 5z - 10 = 0$ 3. $9x + 19y - 4z - 25 = 0$
4. $2x + 5y - 6z - 4 = 0$ 5. $12x - 3y + 16z - 58 = 0$ (Exetat 2023)

N° 988. Les choix émis par 100 personnes prises au hasard, sur leur moyen de transport préféré, sont repris dans le tableau ci-dessous.

	Bus	Bateau	Avion
Féminin	20	8	19
Masculin	13	21	19

La probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce groupe prenne un bus est

1. 17% 2. 31% 3. 50% 4. 60% 5. 75%

(Exétat 2023)

- N° 989. Dans une zone de santé X, 25% de la population sont atteints de la maladie M_A . Parmi ceux atteints de la maladie M_A , 15% ont aussi la maladie M_B . Parmi ceux non atteints de la maladie M_A , 3% ont la maladie M_B . Le gestionnaire de la zone de santé procède par l'arbre de choix pour calculer les différentes probabilités à présenter au comité de gestion. La probabilité de l'événement « l'individu est atteint de M_A et non de M_B » est :
1. 0,02 2. 0,03 3. 0,18 4. 0,42 5. 0,72 (Exetat 2023)

BIBLIOGRAPHIE

1. ADAM A. & Cie : *Espace Math 66* ; De Boeck ; Wesmael, Bruxelles 2000.
2. BADETTY L. & Cie, *Maîtriser les Maths 4*, Editions Loyola, Kinshasa 2001.
3. BADETTY L. & Cie : *Maîtriser les Maths 5*, Editions Loyola, Kinshasa 2001
4. BOUTRIAU P. & Cie : *Savoir et savoir-faire en mathématiques 6A* ;
H. Dessain, liège, Belgique 1990.
5. CREM : *Mathématique 6^e algèbre / analyse ; eca* ; Kinshasa 1986.
6. CREM : *Mathématique 6^e géométrie ; eca* ; Kinshasa 1987.
7. Dr CONSTANTINIS et Th. GERMAIN, *Algèbre : Textes conformes au programme des examens fédéraux de maturité*, Ed. AVDEP, Lausanne 1978
8. EVELYNE & JP. ROUDNEFF : *Les mathématiques Tome II – Géométrie* ; abc du bac ; Edition Nathan 1991
9. EPST : *Cahiers d'items - Examens d'Etat* ; Inédit Kinshasa.
10. FRANK & Cie : *Calcul différentiel et intégral* ; 2^e éd ; Mc GRAW–HILL 1990
11. FANT H. : *Maths terminale S* ; édition Vuibert, Paris 2002.
12. H. DELFELD et Cie, *ACTIMATH 6*, Ed. VAN IN Louvain-la-neuve 2004
13. KABAKABA T. & Cie, *Cours et exercices d'application de géométrie analytique plane* ; CRP, Kinshasa 2004.
14. KAYEMBE & Cie : *Maîtriser les maths 2* ; Editions Loyola ; Kinshasa 1996.
15. KAYEMBE & Cie : *Maîtriser les maths 3* ; Editions Loyola ; Kinshasa 1996.
16. KINDLE J. H. : *Géométrie analytique : cours et problèmes*, Mc GRAW – Hill, Paris 1979.
17. KONGUESTROF L. : *Calcul différentiel et Intégral* ; Mc GRAM Hill ; Montréal 1979.
18. LORENT S. & LORENT R. : *Algèbre 2B* ; 3^e édition, A. De Boeck, Bruxelles 1963
19. LUPSIN G. & GRAAS R. : *Géométrie Analytique plane*, 12^e édition, La procure Bruxelles 1971.
20. MURRAY R. SPIEGEL ; série Shaum : *Théorie et applications de l'analyse* ; McGraw-Hill, Paris 1992
21. PISKOUNOV N. : *Calcul différentiel et Intégral* ; Tome II ; 3^e édition révisée et complétée, MIR Moscou 1969.

22. POLIDOROFF – VERLOOY : *Eléments de géométrie analytique* ; AD. Wesmael– Chorlier (S.A), Namur 1971.
23. QUINET J. : *Cours élémentaire de mathématiques supérieures* ; Tome 6, Dunod ; Paris 1966
24. R.CORTINA et Cie, *Exomath : Exercices progressifs avec réponses, des classes de secondes aux classes terminales*, Ed. VUIBERT 1979
25. RICHARD G. BROWN et Cie : *Advanced Mathematics*, Houghton Mifflin company Boston 1987
26. STEPHANE ARGOUIN et NICOLE LEMIRE, *Maths Terminale Es*, Ellipses Edition Paris 2004
27. SWOKOWSKI et COLE, *Algèbre et trigonométrie avec géométrie analytique* ; Ed. DE BOECK Université 1998
28. VATIRI & Cie : *Mathématique 6^e* ; Tome II , C.A.P. ; Bukavu 1981.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	III
INTRODUCTION.....	V
QUELQUES SYMBOLES ET ABREVIATIONS UTILISES	VI
CHAPITRE I : L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES.....	1
I.1. DEFINITIONS	2
I.2. OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$	4
I.3. PROPRIETES DES NOMBRES COMPLEXES CONJUGUES	5
I.4. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE	12
I.5. RACINES n^{IEMES} D'UN NOMBRE COMPLEXE	34
I.6. EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$	41
I.7. APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES	57
I.8. TRANSFORMATIONS DANS $\mathbb{C}$	70
I.9. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	86
CHAPITRE II : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES	98
II.1. FONCTIONS EXPONENTIELLES	100
II.2. FONCTIONS LOGARITHMIQUES	105
II.3. LIEN ENTRE $y = \log a x$ ET $y = ax$	108
II.4. FORMULE DE CHANGEMENT DE BASES	109
II.5. EQUATIONS ET INEQUATIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES.....	114
II.6. DERIVEES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES	124
II.7. LIMITES DES FONCTIONS LOGARITHMIQUES	128
II.8. ETUDE DE QUELQUES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES.....	134
II.9. FONCTIONS HYPERBOLIQUES	145
II.10. APPLICATIONS DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES .	151
II.11. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	157
CHAPITRE III : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR ET DE MACLAURIN	165
III.1. INTRODUCTION	166
III.2. FORMULE DE TAYLOR ET DE MACLAURIN	166
III.3. DEVELOPPEMENT DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES	170
III.4. DEVELOPPEMENTS LIMITES	182
III.5. EXERCICES D'AUTO - EVALUATION.....	190
CHAPITRE IV : DIFFERENTIELLES	196

IV.1. DEFINITION	196
IV.2. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA DIFFERENTIELLE	197
IV.3. OPERATIONS SUR LES DIFFERENTIELLES	198
IV.4. DIFFERENTIELLES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES	198
IV.5. APPLICATION DES DIFFERENTIELLES	200
IV.6. DIFFERENTIELLES SUCCESSIVES	203
IV.7. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	205
CHAPITRE V : INTEGRALES.....	208
V.1. INTEGRALE INDEFINIE	210
V.2. INTEGRALES DEFINIES	219
V.3. METHODES D'INTEGRATION	227
V.4. INTEGRALES IMPROPRES SIMPLES.....	255
V.5. APPLICATIONS DES INTEGRALES	256
V.6. EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES SIMPLES	279
V.7. APPLICATIONS DES INTEGRALES DANS LES AUTRES DISCIPLINES	285
V.8. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	291
CHAPITRE VI : NOTIONS DE PROBABILITES	300
VI.1. PROBABILITES	301
VI.2. CALCUL DES PROBABILITES	304
VI.3. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	343
CHAPITRE VII : COURBES PARAMETREES.....	350
VII.1. DEFINITIONS	351
VII.2. ELEMENTS D'ETUDE D'UNE FONCTION PARAMETRIQUE	351
VII.3. PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION PARAMETRIQUE	357
VII.4. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	364
CHAPITRE VIII : COURBES DU SECOND DEGRE	366
VIII.1. INTRODUCTION	367
VIII.2. CLASSIFICATION DES CONIQUES.....	368
VIII.3. CONIQUES EN COORDONNEES POLAIRES.....	376
VIII.4. DERIVEES PARTIELLES	381
VIII.5. INVARIANTS DE L'EQUATION GENERALE D'UNE CONIQUE.....	382
VIII.6. EXERCICES D'AUTO – EVALUATION	384
CHAPITRE IX : LIEUX GEOMETRIQUES.....	386
IX.1. DEFINITION	388
IX.2. DETERMINATION D'UN LIEU	389
IX.3. EXERCICES D'AUTOEVALUATION	410

CHAPITRE X : ELEMENTS D'ETUDE D'UNE CONIQUE	414
X.1. CENTRE D'UNE CONIQUE	415
X.2. TANGENTES ET NORMALES	418
X.3. POLAIRES ET POLES	434
X.4. ASYMPTOTES	438
X.5. DIAMETRE	441
X.6. AXES DE SYMETRIE ET SOMMETS	444
X.7. REDUCTION DE L'EQUATION GENERALE DES CONIQUES	447
X.8. ELEMENTS FOCALUX	449
X.9. RECHERCHE DES EQUATIONS DE CONIQUES	453
X.10. EXERCICES D' AUTOEVALUATION	458
CHAPITRE XI : ETUDE DES CONIQUES PARTICULIERES.....	467
XI.1. LA PARABOLE	468
XI.2. ELLIPSE	477
XI.3. HYPERBOLE	484
XI.4. EXERCICES D' AUTOEVALUATION	490
CHAPITRE XII : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE	495
XII.1. REPERE DANS L'ESPACE ET COORDONNEES D'UN POINT	497
XII.2. DISTANCE ET ORTHOGONALITE.....	502
XII.3. LE PLAN	504
XII.4. LA DROITE	511
XII.5. EXERCICES D' AUTOEVALUATION	519
ANNEXE : QUELQUES QUESTIONS POSEES AUX EPREUVES DE L'EXAMEN D'ETAT ET AUX CONCOURS D'ADMISSION	521
BIBLIOGRAPHIE	541
TABLE DES MATIERES	543