

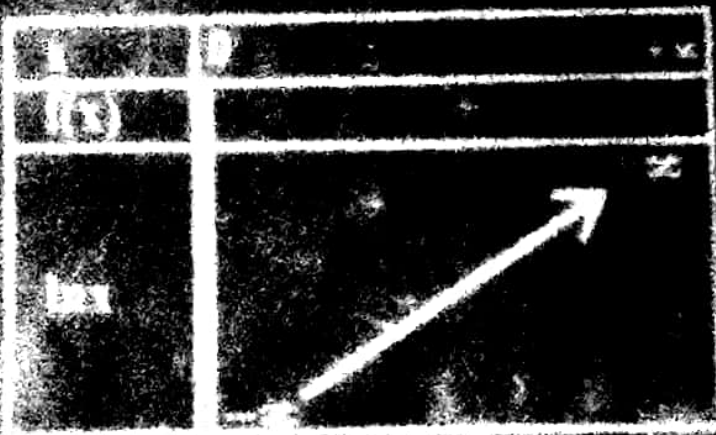
Problèmes corrigés

Prix: 1500 FCFA

LE TOP 20 DES PROBLEMES DE
MATHEMATIQUES DE LA TERMINALE D

Terminale D

Rappels des formules
Énoncés des problèmes
Propositions de corrigés détaillés des problèmes



ROAMBA All
Enseignant de Mathématiques

RAPPELS DES FORMULES POUR LA RESOLUTION DES PROBLEMES

FONCTION DE REFERENCE

1-a) Limites de référence

$$* \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*); \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ -\infty}} \frac{1}{x^n} = 0; \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \left(\text{ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0 \right)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n-1}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n-1}} = -\infty \quad \text{ou} \quad \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^{2n-1}} = -\infty \right)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad \text{ou} \quad \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \right)$$

NB : les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite infinie

- Etude d'une branche infinie

b) Asymptotes

* Asymptote parallèle à (OJ)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ >}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ <}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

Alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote parallèle à (OJ) à la courbe (cf).

* Asymptote parallèle à (OI)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ -\infty}} f(x) = b$$

Alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote parallèle à (OI) à la courbe (cf).

c) Direction asymptotique

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ et}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

On dit que (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de (OI).

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ ou } -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ ou } -\infty \text{ et}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

On dit que (cf) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2-Continuité et dérivabilité d'une fonction

a) continuité

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel. Si f est définie au point a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;

On dit que f est continue en a .

b) Dérivabilité

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel a vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Le nombre réel a est appelé le nombre dérivé de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

3) Equation de la tangente et dérivée

a) La fonction f est dérivable en x_0 alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont l'équation est :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b) Les tableaux récapitulatifs des fonctions dérivées.

*Dérivées de fonctions usuelles

FONCTION	DERIVEE	INTERVALLE
$x \mapsto c (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$x \mapsto ax (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}^+)$	$x \mapsto r x^{r-1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q}^+)$	$x \mapsto \frac{-r}{x^{r+1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \cotan x$	$x \mapsto \frac{-1}{\sin^2 x}$	$]k\pi; (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$

*Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions et a est une constante réelle.

Fonction	$u+v$	$au, (a \in \mathbb{R})$	$u \times v$	$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$	$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$
Dérivée sur K	$u'+v'$	au'	$u' \times v + u \times v'$	$\frac{-v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

*Composition de fonctions

Fonction	$V \circ u$	$u^r, r \in \mathbb{Q}^*$	$\sqrt{u}, u > 0$	$\cos u$	$\sin u$
Dérivée sur K	$(V' \circ u) \times u'$	$r u' \times u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u' \sin u$	$u' \cos u$

4- Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction dérivable strictement monotone sur un intervalle I telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$

* La fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$

* La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et on a :

La fonction f et la bijection réciproque f^{-1} varient dans le même sens.

Les courbes (cf) et (cf^{-1}) sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(y=x)$.

5- Primitives

a) Fonctions élémentaires

a et r sont des constantes.

Fonctions	Primitives	INTERVALLES
$x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q}^+) \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^r} \ (r \in \mathbb{Q}^+) \setminus \{1\}$	$x \mapsto \frac{-1}{r-1} x^{r-1}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+ =] 0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x$	$] \frac{-\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi [, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\cotan x$	$] k\pi ; \pi + k\pi [, k \in \mathbb{Z}$

b) Opérations et compositions

Fonction f	Primitive de f
au'	$au \ (a \in \mathbb{R}^*)$
$u' + v'$	$u + v$
$u^r \times u'$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} \ (r \in \mathbb{Q}^*) \setminus \{-1\}$
u' / \sqrt{u}	$2\sqrt{u}$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{u^r}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}} \ (r \in \mathbb{Q}^*) \setminus \{1\}$

6) FONCTION LOGARITHME

a) Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

b) Relation fondamentale et propriétés

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* ; \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* ; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ; \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \ln a^n = n \ln a, n \in \mathbb{Z}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \forall \tau \in \mathbb{Q}$$

$$\ln a^\tau = \tau \ln a$$

c) Dérivée de \ln ou

$$(\ln ou)' = \frac{u'}{u}$$

d) Conséquence

la fonction \ln est strictement croissante

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

$$\text{Cas particuliers : } a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$$

$$a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$$

e) Primitive

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle I , la fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I , la fonction \ln ou

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

7) Fonctions exponentielles

* Conséquences et propriétés

$$e^0 = 1 \text{ car } \ln 1 = 0$$

$$e^1 = e \text{ car } \ln(e) = 1 \quad \text{Pour tous réels } x \text{ et } y$$

$$\text{On a : } e^{x+y} = e^x e^y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^{(x-y)} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{Q} \quad (e^x)^t = e^{xt}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ ; e^{\ln x} = x$$

* Conséquences

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$\text{En particulier : } \forall x \in \mathbb{R} \quad x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

*** Limites**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{aligned}$$

*** Fonctions dérivées**

$$(e^u)' = u' e^u$$

*** Primitives**

F étant une fonction dérivable sur un intervalle I, une primitive sur I de la fonction

$$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

\Leftrightarrow

$$x \mapsto e^{f(x)}$$

$$x \mapsto f'(x) e^{f(x)}$$

*** Fonctions composées**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 ; \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 ; \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

ENONCES DES PROBLEMES

PROBLEMES CORRIGES TERMINALE D 10 COLLECTION TADJI RENOVA

PROBLEME N°1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3x^2}{|3-x|+2x}$ de représentation graphique (Cf) dans un repère orthogonal $(O; I; J)$ (unité : 1cm pour 1 en abscisse et 1cm pour 5 en ordonnées).

1) Justifier que : $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[$, $f(x) = \frac{3x^2}{x+3}$

$$\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

2) a) Calculer les limites de f à gauche et à droite en -3 . Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3) Etudier la continuité de f en 3.

4) on admet que f n'est pas dérivable en 3.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -\infty; -3[\cup]-3; 3[$ et $[3; +\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5) a) Démontrer que les droites $(D_1) : y = 3x - 9$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont des asymptotes à (Cf) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Préciser la position relative de (Cf) par rapport à (D_1) et (D_2) .

6) Tracer (D_1) , (D_2) et (Cf)

PROBLEME N° 02

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x + \frac{1}{x}) \ln x - 2x$

1) Déterminer la limite de f en 0

2) a) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[; f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$

b) Dédire la limite de f en $+\infty$

3) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[; f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(\ln x - 1)}{x^2}$

4) Etudier le signe de $f'(x)$

5) Dédire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

6) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en

$+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

7) tracer (cf) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

PROBLEME N°3

Partie I

Soit g la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1- Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2-a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1,6 et 1,7.

b) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans \mathbb{R} .

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

1- Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et interpréter graphiquement les résultats.

2-a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4) Faire la représentation graphique de (T) et (C) .

PROBLEME N°4

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x (\ln x)^2 + 2x$ et $f(0) = 0$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique 10cm.

Partie A

- 1- Etudier la continuité de f en 0
- 2- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats
- 3- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
Interpréter graphiquement le résultat de la deuxième limite.
- 4- Démontrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 2$
- 5- Etudier le signe de $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f
- 6- Dresser le tableau de variation de f .
- 7- Soit A le point d'abscisse 1 de (C) . Démontrer que la tangente (T) à (C) au point A est la droite (OA)
- 8- Etudier les positions relatives de (C) et (T) .
- 9- Construire (C) et (T) .

PARTIE B

- 1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
- 2) On note f^{-1} la bijection réciproque de f
 - a) Dresser le tableau de f^{-1}
 - b) Tracer la courbe (τ) de f^{-1} dans le même repère que (C) .

PROBLEME N°5

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{Par } f(x) = x - 2 - 2\frac{\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est appelée (C) . On prendra 2cm pour unité graphique.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$

1- Déterminer le sens de variation de g , préciser ses limites en 0 et $+\infty$ et dresser son tableau de variation.

2- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que cette solution appartient à l'intervalle $]1; 2[$

3- démontrer que $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1- déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2- a) démontrer que la droite $(D) : y = x - 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.

3- a) démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Déduire de la question A-3) les variations de f puis dresser son tableau de variations. On prendra $f(\alpha) = -1,2$.

4- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions. On note γ et β ($\gamma < \beta$)

5- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 - (\ln x)$

1) Démontrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2) Déduire de la question B-5)

les variations de F puis dresser son tableau de variation

PROBLEME N°6

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère ortho normal (O, I, J) , unité graphique : 2cm.

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

1- Etudier le sens de variation de u sur $]0; +\infty[$

2- Calculer $u(1)$ et en déduire que :

* $\forall x \in]0; 1[$, $u(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $u(x) > 0$

Partie B

1- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2- Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$

3- Déduire de la question 2 de la partie A, les variations de f puis dresser son tableau variation.

4- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5- Etudier les positions relatives de (C) et (Δ) .

6- Tracer (C) et (Δ) .

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif. On désigne par $A(\lambda)$, l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimité par (C) , la droite (Δ) et les droites d'équation $x=1$ et $x=\lambda$.

1- On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$A(\lambda) = 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$$

b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

3- Démontrer que $A\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

PROBLEME N°7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x} - x + 4$ et (cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (échelle graphique : 2cm)

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$

- 1- Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2- Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe.
- 3- En déduire le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- 4- Calculer $g(0)$, en déduire que :

$$\forall x \in]-\infty ; 0[; g(x) > 0 ; \forall x \in]0 ; +\infty [; g(x) < 0$$

Partie B

- 1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2- Déterminer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$
- 3- A l'aide de la question 4 de la partie A, étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
- 4- Démontrer que la droite $(\Delta) : y = -x + 4$ est asymptote à (cf) en $+\infty$.
- 5- Étudier la position relative de (cf) par rapport à (Δ) .
- 6- Déterminer une équation de la tangente (T) à (cf) au point d'abscisse 0.
- 7- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} (on notera α la plus grande et β l'autre). Vérifier que $-2 < \beta < -1$ et $3 < \alpha < 4$
- 8- Tracer (T) , (Δ) et (cf) .

PROBLEME N°8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x - 2$. On note (cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (Unité graphique : 2cm en abscisse et 1cm en ordonné)

Partie A'

- 1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2- Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe
- 3- En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 4- Démontrer que (cf) admet une tangente horizontale (T) au point d'abscisse 0 dont on précisera une équation.
- 5- Démontrer que la droite $(\Delta) : y = -x - 2$ est asymptote à (cf) en $-\infty$.
- 6- Etudier la position de (Δ) par rapport à (cf) .
- 7- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} (on notera α la plus grande et β l'autre).
- 8- Traçons (T) , (Δ) et (cf)

Partie B

Soit D le domaine du plan délimité par la droite (Δ) , (cf) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On désigne par A l'aire exprimée en cm^2 de (D) .

- 1- Hachurer le domaine (D)
- 2- Calculer l'aire (A) de (D)

PROBLEME N°9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (c) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (unités graphiques : 2,5 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée).

Partie A

1- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = xe^x + 1$

a) étudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$

2- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + 2 - e^x$

a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} .
note α et β les solutions avec $\beta < \alpha$.

Vérifier que $1,14 < \alpha < 1,15$.

d) Démontrer : $\forall x \in]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\beta; \alpha[$,
 $g(x) > 0$

1- A l'aide de la question A)1), justifier que $Df = \mathbb{R}$

2- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

3- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

4- Déduire de la question 2-d) de la partie A les variations de f puis dresser son tableau de variations.

5- a) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b) Donner un encadrement d'ordre 2 de $f(\alpha)$.

6- Déterminer une équation de la tangente (T) à (c) au point d'abscisse 0.

7- Soit la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (1 - x)e^x - 1$.

a) Déterminer le sens de variation de u et calculer les limites de u en $+\infty$ et $-\infty$

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$

c) En déduire la position de (C) par rapport à (T)

8- Tracer (T) et (C). (On prendra que $-1,85 < \beta < -1,84$ et $-1,19 < f(\beta) < -1,18$)

PROBLEME N°10

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x - e^x - 1$

1) a) calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; 2]$

3) donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de

x .

Partie B

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x - 2e^x - x + 2$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1) a) calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

2) Calculer la limite $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .

4) Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

5) a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (e^x - 1)(x - 2)$.

b) En déduire les points d'intersections de (C) avec l'axe des abscisses

6) En utilisant A-2) démontrer $f(\alpha) = \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$

7) Construire (T) , (D) et (C)

PROBLEME N° 11

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ pour } x < 0 \\ f(x) = x \ln(x+1) \text{ pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, J) (unité : 2cm) et (Δ) la première bissectrice.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.
- 2) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 3) a) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x}$)
- c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.
- 4) Déterminer le ou les points d'intersection de (C) et (Δ) .
- 5) Démontrer que f admet une bijection réciproque sur \mathbb{R}_+ .
- 6) représenter (C) , (Δ) , (D) .

PROBLEME N° 12

Partie A

On donne la fonction p définie sur \mathbb{R} par : $p(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$

1) Résoudre l'équation : $p(x) = 0$

2) Démontrer que :

$$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup] \ln 4 ; +\infty[, p(x) > 0$$

$$\forall x \in]0 ; \ln 4[p(x) < 0$$

Partie B

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Calculer les limites de f en $-\infty$; $+\infty$ et à gauche et à droite en $\ln 2$.

3) On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée

a) Vérifier que $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup] \ln 2 ; +\infty[f'(x) = \frac{p(x)}{(e^x - 2)^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $\ln 2 ; +\infty[$.

6) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup] \ln 2 ; +\infty[$

$$f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

7) Démontrer que la droite $(\Delta) : y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

8) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 2[$

9) Construire (C) .

Partie C

Soit β un réel strictement négatif.

1) Exprimer en fonction de β l'aire $A(\beta)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la droite (C), la droite (Δ) et les droites d'équations

$$x = \beta \text{ et } x = 0$$

2) Calculer $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} A(\beta)$.

On donne : $\ln 2 = 0,7$

PROBLEME N° 13

Partie A

Soit h la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$$

- 1) calculer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$
- 2) démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (2-x)e^{-x}$
- 3) étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
- 4) a) Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, 2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α
- b) Démontrer que $-1 < \alpha < 0$
- 5) en déduire que :

$$\forall x \in]-\infty, \alpha[, h(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)

- 1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
- 2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x)$
- 3) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
- 4) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$
- 5) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$.
- 6) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)
- 7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
- 8) Tracer (D) , (T) et (C) (on prendra : $\alpha = -0,6$ et $f(\alpha) = 0,3$)

9) Soit $\beta > 0$

a) Utiliser une intégration par partie pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{\beta} x e^{-x} dx$$

b) Calculer l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan limité par (C), (D) et droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \beta$ (on donne $e = 2,7$).

c) calculer $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$

PROBLEME N° 14

Partie A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

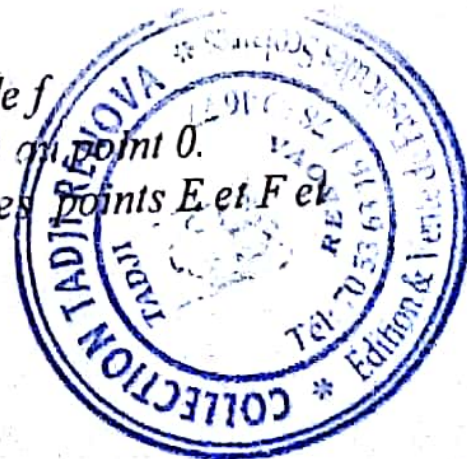
$$g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$$

- 1) a) déterminer l'ensemble de définition Dg de g
b) Déterminer les limites de g aux bornes de Dg .
- 2) a) on suppose que g est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* , calculer $g'(x)$ pour tout élément de \mathbb{R}^* .
b) Dresser le tableau de variation de g .
- 3) a) Calculer $g(-1)$
b) Déterminer $J = g(I)$ où $I =]-\infty, -e^{-\frac{3}{2}}]$
c) Démontrer que la restriction h de g à I est une bijection de I sur J .
- d) En déduire l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$
 $g(x) = 0$.
- 4) en déduire de tout ce qui précède que :
 $\forall x \in]-\infty, -1[g(x) < 0$
 $\forall x \in]-1; 0[\cup] 0; +\infty[g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x(1 + x \ln|x|)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) démontrer que f est continue en 0
- 2) a) déterminer l'ensemble de définition Df de f et préciser ses limites aux bornes de Df
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- c) calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f
- 3) a) Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point 0.
b) Démontrer que (T) coupe (C) en deux autres points E et F et préciser leurs coordonnées.



- c) Etudier la position de (C) par rapport à (I).
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre -1,8 et -1,7.
5) tracer (C) avec précision.

Partie C

1) Soit $\alpha \in]0,1[$, calculer $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln x \, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2-a) calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie limitée par (C), (T) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\alpha$.

b) Calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0 par valeurs supérieures

On donne : $e^{-\frac{3}{2}} = 0,22$; $\ln(1,7) = 0,53$; $\ln(1,8) = 0,58$

PROBLEME N°15

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x$

- 1) préciser les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition D_g de g .
- 2) étudier le sens de variation de g . Dresser son tableau de variation.
- 3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0,65 < \alpha < 0,66$
- 4) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $]0; +\infty[$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$ on désigne par (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O, I, J) (unité : 4cm)

- 1) a) calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0
b) démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) .
c) Étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ)
- 2) a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$
b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) α est le nombre réel défini en A)3).
a) Démontrer que $\ln(\alpha) = -\alpha^3$, en déduire que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$
b) Démontrer que la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante.
c) En déduire que $f(\alpha) < h(0,65)$
Démontrer que $f(\alpha) > f(0,65)$
e) Donner un encadrement de $f(\alpha)$
- 4) Tracer (C) et (D) dans le repère (O, I, J) .
On donne $\ln(0,65) = -0,043$ et $\ln(0,66) = -0,041$

PROBLEME N° 16

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (x - 1)^2 - 1 + \ln |x - 1|$$

- 1) déterminer l'ensemble de définition Dg de g .
- 2) étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3) Calculer $g(0)$ et $g(2)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in Dg$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cdot \frac{\ln|x-1|}{x-1}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (OIJ) . Unité (1,5cm)

- 1) a) déterminer l'ensemble de définition Df de f et calculer les limites de f à gauche et à droite en 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

b) Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

- 2) a) Démontrer que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C)

b) Étudier la position relative de (C) par rapport à (D) .

c) Démontrer que le point $A(1; 1)$ est un centre de symétrie de (C)

4) construire (D) et (C)

PROBLEME 17

Partie A

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g
- b) Etudier la parité de g sur \mathbb{R}
- c) Calculer la limite de g en $+\infty$ en déduire celle en $-\infty$

2) a) Démontrer que

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

b) En déduire le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau.

3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

4) a) Démontrer que :

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 ; \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$$

b) En déduire le signe de g sur \mathbb{R} en utilisant le 1°) b)

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$,

de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)

1) démontrer que f est impaire et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

b) Déterminer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{2\ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

3) a) En déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4) a) f est dérivable sur \mathbb{R} , démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

5) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ puis en déduire l'expression de $f(-\alpha)$

6) Construire (T) et (C) (on prendra $\alpha = 1,198$ et $f(\alpha) = 0,1$)

PROBLEME N° 18

On considère les fonctions f et g définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ et}$$

$g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ de représentations graphiques (cf) et (cg) dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, I, J)

(Unité : 1cm).

1) a) Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g de f et g .

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer la limite de g en $-\infty$. En déduire celle de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

d) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à (cf) en $+\infty$.

2) a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{-1}{f(x)}$

b) En déduire, en utilisant la question 1) b), la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

(Distinguer le cas $x < 0$ et le cas $x > 0$)

c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) a) Démontrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle K à préciser. Soit f^{-1} sa bijection réciproque.

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (cf) et de la tangente (T') à (cg) en 0 . montrer que (T) et (T') sont parallèles.

5) a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -f(-x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) construire (cf) avec ces asymptotes et sa tangente (T) , puis (cf^{-1}) et (cg) dans le même repère.

PROBLEME N° 19

On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = 2x - \sin x$ et on note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1,5cm)

1) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R}

2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$ en déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3) On note (D) et (D') les droites d'équations respectives $y=2x-1$ et $y=2x+1$

Déterminer les abscisses des points communs à (C) et (D) d'une part à (C) et (D') d'autre part. Préciser les tangentes à (C) en ces points.

4) Etudier la parité de f . interpréter graphiquement le résultat.

5) Tracer avec précision la courbe (C) sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$. Tracer également (D) et (D') .

PROBLEME N°20

Le but de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur $] -2 ; +\infty[\setminus \{0\}$ par $f(x) = x \ln \left| \frac{x+2}{x} \right|$ si $x \in] -2 ; +\infty[\setminus \{0\}$ et $f(0) = 0$ et le tracé de sa courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité = 2cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[\setminus \{0\}$ par :

$$g(x) = \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{2}{x+2}$$

1) Calculer les limites de g en 0, en $+\infty$ et à droite en -2

2) a) Calculer $g'(x)$ et justifier que

$$\forall x \in] -2 ; +\infty[\quad g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -2 ; 0[$ et que $-0,44 < \alpha < -0,43$

b) Démontrer que $\forall x \in] -2, \alpha], g(x) < 0$

$$\forall x \in] \alpha, 0[\cup] 0 ; +\infty[, g(x) > 0$$

Partie B

1) a) Démontrer que $\forall x \in] -2 ; +\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x) = 2 \ln |x+2| - x \ln |x|$$

En déduire que f est continue en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer la limite de f à droite en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.

b) Justifier que

$\forall x \in] 0 ; +\infty[, f(x) = x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$ en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $\forall x \in] -2 ; +\infty[\setminus \{0\}$,

$$f'(x) = g(x)$$

b) En déduire en utilisant la question 3) b) de la partie A le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que $f(\infty) = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$

4) a) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe d'abscisse non nulle. Déterminer les coordonnées de A.

b) Ecrire une équation de la tangente de (T) à (C) au point d'abscisse -1.

5) Construire (C) avec ses asymptotes et sa tangente (T).

On donne : $\ln \frac{39}{11} = 1,26$ et $\ln \frac{157}{43} = 1,29$

$$f(\infty) = -0,5$$

PROPOSITIONS DE CORRIGES DES PROBLEMES

PROBLEMES CORRIGES TERMINALE D

34

COLLECTION TADJI RENOVA

Proposition de correction du problème N°1

1) Justifions que $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[$, $f(x) = \frac{3x^2}{x+3}$

$$\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$3-x$	+	○	-
$ 3-x $	$3-x$	○	$x-3$

$$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[, f(x) = \frac{3x^2}{3-x+2x} = \frac{3x^2}{x+3}$$

$$\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = \frac{3x^2}{x-3+2x} = \frac{x^2}{x-1}$$

2)a) Calculons la limite de f à gauche et à droite en -3 .

$$\lim_{x \rightarrow -3}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow -3}^< \frac{3x^2}{x+3} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3}^< 3x^2 = 27 \\ < \\ \lim_{x \rightarrow -3}^< \frac{1}{x+3} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3}^> f(x) = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à (C_f) .

b) Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x+3} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

3) Continuité de f en 3

$$\lim_{x \rightarrow 3}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow 3}^< \frac{3x^2}{x+3} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow 3}^> \frac{x^2}{x-1} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow 3}^> f(x) = f(3), \text{ donc } f \text{ est continue en } 3$$

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty; -3[\cup]-3; 3[$ et $]3; +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[, f'(x) = \left(\frac{3x^2}{x+3} \right)' = \frac{(3x^2)'(x+3) - (x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x(x+3) - 3x^2}{(x+3)^2} = \frac{3x(x+6)}{(x+3)^2}$$

$$\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - (x-1)'x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Donc $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[$

$\frac{1}{(x+3)^2} > 0$ d'où le signe $f'(x)$ est celui de $3x(x+6)$.

$\forall x \in]3; +\infty[$,

$\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-2)$.

Conclusion

$\forall x \in]-\infty; -6[\cup]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -6[$ et sur $]0; +\infty[$.

$\forall x \in]-6; -3[\cup]-3; 0[$, $f'(x) < 0$ donc f est continue et strictement décroissante sur $]-6; -3[$ et sur $]-3; 0[$.

$$f'(-6) = f'(0) = 0$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-6	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\downarrow	$-$	\downarrow	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -36$	$\searrow -\infty$	\parallel	$\nearrow +\infty$
				$+\infty$	$\searrow 0$
					$\nearrow +\infty$

5)a) Démontrons que les droites d'équation $(D_1) : y = 3x - 9$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont des asymptote à (Cf) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - (x + 3)(3x - 9)}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{x + 3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

Donc les droites $(D_1) : y = 3x - 9$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont des asymptote à

(Cf) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Précisons la position relative de (Cf) par rapport à (D_1) et (D_2)

$$\forall x \in]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 3[, f(x) - (3x - 9) = \frac{27}{x+3}$$

or $\forall x \in]-\infty ; 3[, x + 3 < 0$, donc (Cf) est en dessous de (D_1) .

$\forall x \in]-3 ; 3[, x + 3 > 0$, donc (Cf) est au-dessus de (D_1) .

$$\forall x \in]3 ; +\infty[, f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x-1}$$

$\forall x \in]3 ; +\infty[, x - 1 > 0$, donc (Cf) est au-dessus de (D_2) .

Proposition de Correction du problème 2

1- Déterminons la limite de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x + \left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) - 2x = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

2- a) Démontrons que :

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - 2x$$

$$f(x) = x \ln x + \frac{\ln x}{x} - 2x$$

$$f(x) = -2x + x \ln x + \frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{donc } \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$$

b) déduisons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 2) + \frac{\ln x}{x}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 2) = +\infty \end{cases}$$

3) Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{(x^2-1)(\ln x-1)}{x^2}$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = (x)'(\ln x - 2) + (x)(\ln x - 2)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$f'(x) = (\ln x - 1) + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(\ln x-1)}{x^2}$$

4) Etudions le signe de $f'(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[; \frac{1}{x^2} > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de

$$(\ln x - 1)(x^2 - 1)$$

x	0	1	e	$+\infty$
$x^2 - 1$	-	○	+	+
$\ln x - 1$	-	○	-	+
$f'(x)$	+	○	-	+

$\forall x \in]0; 1[; f'(x) > 0; \forall x \in]1; e[; f'(x) < 0$

$\forall x \in]e; +\infty[; f'(x) > 0; f(1) = f(e) = 0$

5) Déduisons le sens de variation.

$\forall x \in]1; e[; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1; e[$

$\forall x \in]0; 1[; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

$\forall x \in]e; +\infty[; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]e; +\infty[$

Tableau de variation

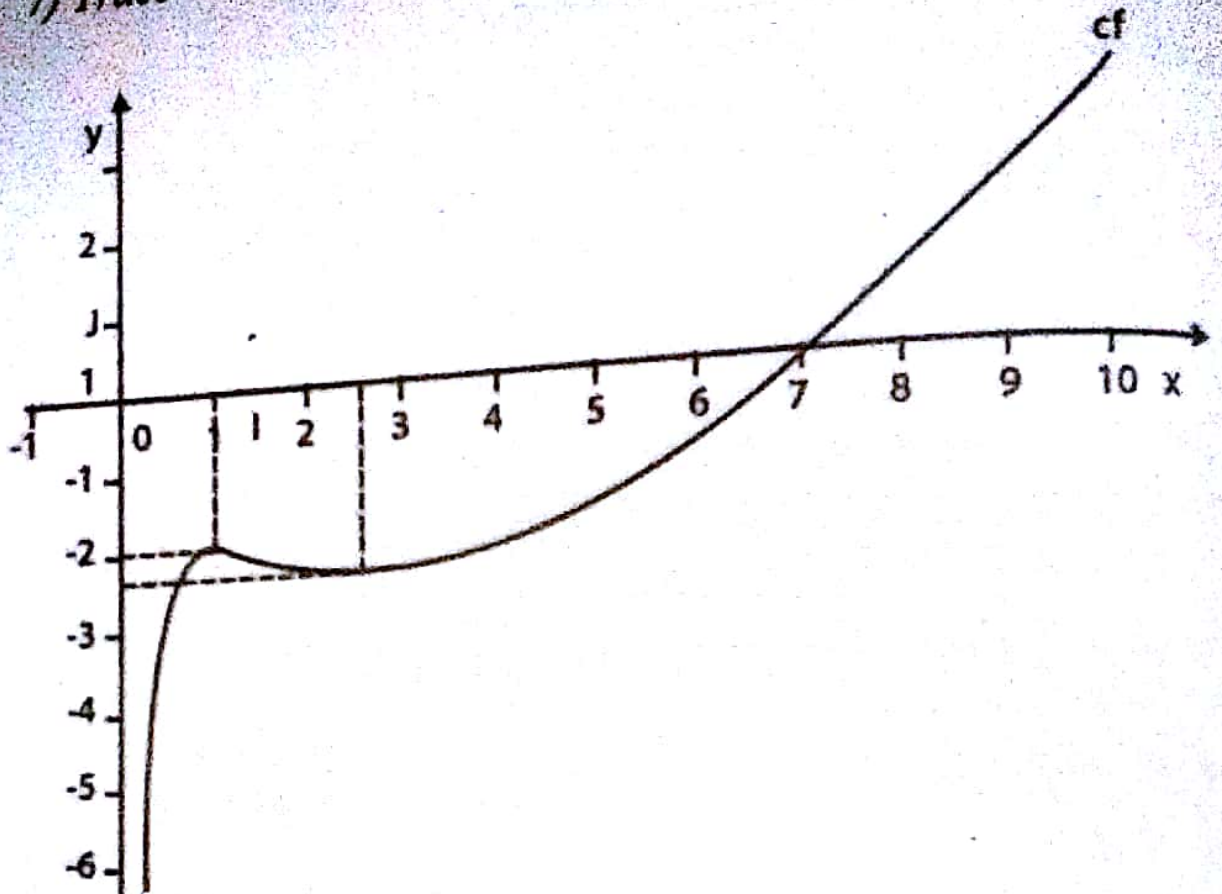
x	0	1	e	$+\infty$
$f(x)$				
$f(x)$	$-\infty$	-2	$\frac{1-e^2}{e}$	$+\infty$

6) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{\ln x}{x^2} - 2 \right) = +\infty$$

Donc (Cf) admet une branche parabolique dans la direction (OJ).

7) Tracé



Proposition de correction du problème N°3

Partie I

1) Etudions le sens de variation de g .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 1) = 6x(x - 1) \text{ Donc}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[,$$

$g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante.

$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante.

$$g'(0) = g'(1) = 0$$

D'où le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$

2)a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

Sur $]-\infty; 1]$, g admet un maximum strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; 1]$.

Sur $]1; +\infty[$, g est continue et strictement croissante, donc g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-2; +\infty[$. Or $0 \in]-2; +\infty[$, donc l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$.

de plus $g(1,6) \times g(1,7) < 0$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

b) Précisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
 $\forall x \in]-\infty; 1], g(x) < 0$, car g admet un maximum négatif sur $]-\infty; 1[$, g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$

Donc $\forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

$g(\alpha) = 0$

Partie II

1)a) Calculons les limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} 2 \times \frac{1}{x^3+1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{1-x}{x^3+1} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à

2)a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) &= \left(\frac{1-x}{x^3+1} \right)' \\ &= \frac{(1-x)'(x^3+1) - (x^3+1)(1-x)'}{(x^3+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^3+1) - 3x^2(1-x)}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$$

b) Dédisons le sens de variation de f .

D'après la partie 1)2)b).

$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

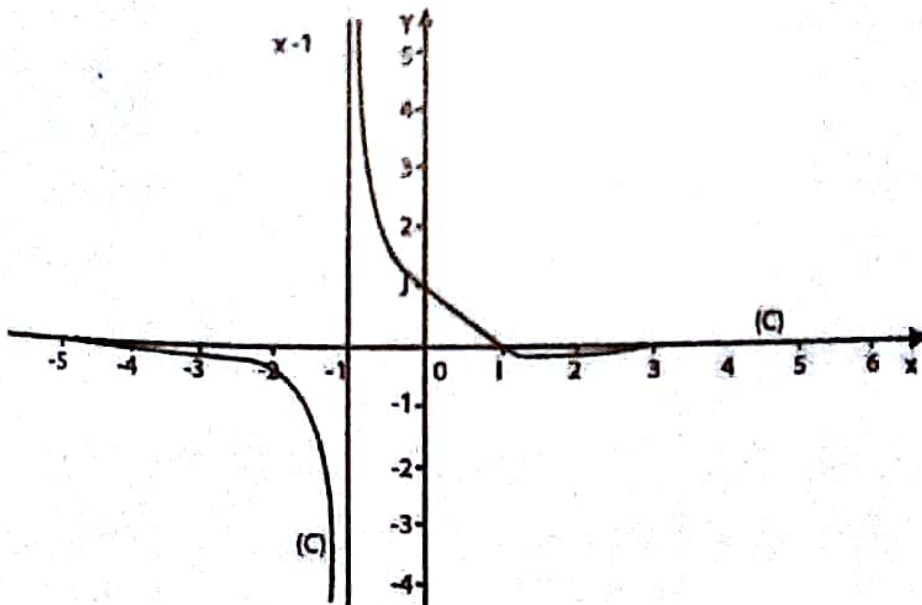
D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow f(\alpha)$	$f(\alpha) \rightarrow 0$	

3) Equation de la tangente (T)

(T) : $y = -x + 1$

4) Tracer la courbe de f .



Proposition de correction du problème N° 4

1- Etudions la continuité de f en 0

$$x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2 = [\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2]^2 \\ = (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0

2- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln x)^2 + 2x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{[(\ln x)^2 + 2]}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{cases}$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons le résultat : la courbe (C) de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3- Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\ln x)^2 + 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 + 2] = +\infty$$

La courbe de (cf) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

4- Déterminons que $\forall x > 0$; $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 2$

$$\forall x \in]0; +\infty[f'(x) = [x(\ln x)^2 + 2x]'$$

$$f'(x) = (x)'(\ln x)^2 + (x)[(\ln x)^2]' + (2x)'$$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2x \ln x}{x} + 2; f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 2$$

5- Étudions le signe de $f'(x)$ puis déterminons le sens de variation de f
 Soit $P(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 2$; Posons $X = \ln x$

Alors l'équation devient $P(x) = X^2 + 2X + 2, \Delta = -4 < 0$ donc

$\forall x \in]0 ; +\infty[f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

6- Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		+

7- Démontrons que la tangente (T) à (C) est la droite (OA)

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T) : y = 2x$$

$0 \in (T)$ et $A(1 ; 2) \in (T)$ donc $(T) = (OA)$.

8- Étudions les positions relatives de (C) et (T)

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= x(\ln x)^2 + 2x - 2x \\ &= x(\ln x)^2 \end{aligned}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[f(x) - 2x > 0$ donc (C) est au-dessus de (T)

9- Construisons (C) et (T) .

Partie B

1- Démontrons que f réalise une bijection.

f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, par conséquent

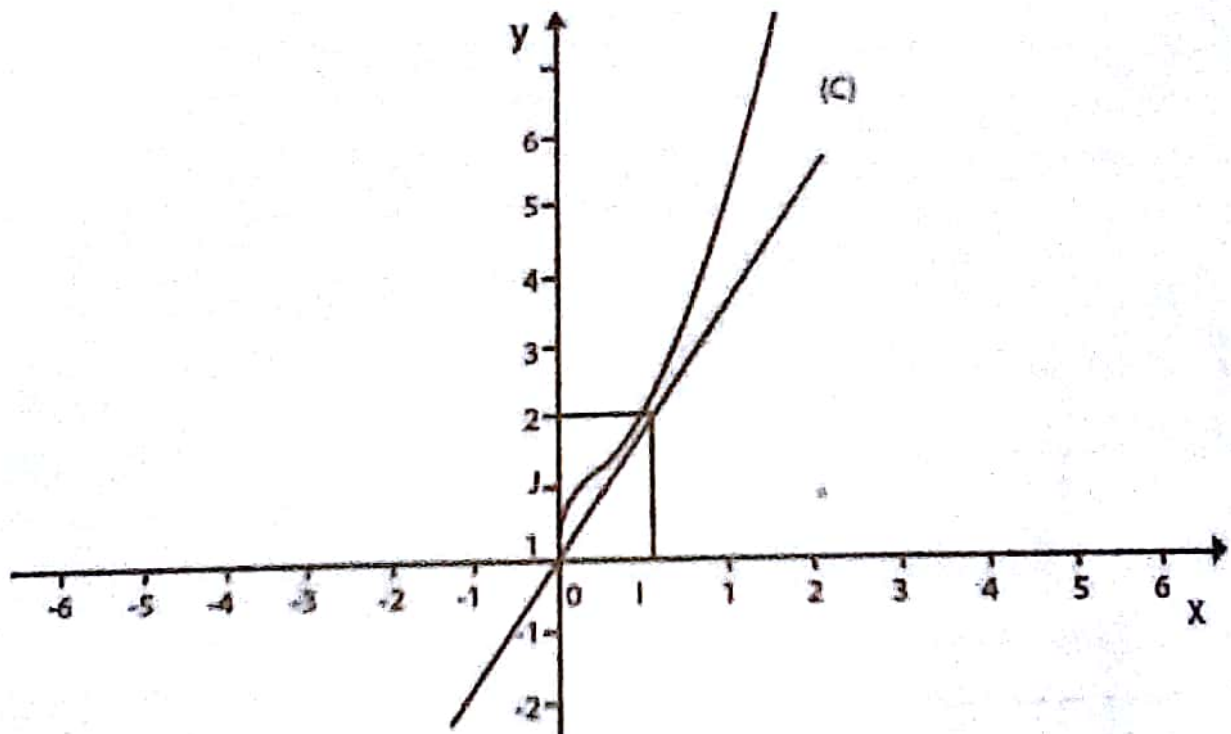
elle réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ vers

$$f(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[\text{ donc } K =]0 ; +\infty[$$

2-a) dressons le tableau de variation de f^1 . f^1 et f ont le même sens de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

b) Traçons la courbe de (τ) de f^1 .



NB : Le tracé de (C^{f^1}) s'obtient en faisant la symétrie de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$

Proposition de correction du problème N° 5

1- Étudions les variations de g et précisons ses limites en 0 et en $+\infty$

Calcul de dérivée.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$g(x) = (x^2 - 2 + 2\ln x)' ; g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2}{x} = \frac{2(x^2 + 1)}{x}$$

Signe de $g'(x)$ et sens de variation de g

$\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante

Sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Calcul de limite en $+\infty$ et 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 + 2\ln x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2 \end{cases}$$

2- Démontrons que $g(x) = 0$

admet une solution unique $\alpha \in]1; 2[$.

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, par conséquent elle

réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers

$g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique

solution α et de plus

$$g(1) = 1^2 - 2 + 2\ln 1 ; g(1) = -1$$

$$g(2) = 2 + 2\ln 2 ; g(1) \times g(2) < 0 \text{ donc } \alpha \in [1 ; 2] ; 1 < \alpha < 2$$

3- Démontrons que $\forall x \in]0 ; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$			

La fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
 $\forall x \in]0 ; \alpha[; x < \alpha$ et $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$
 $\forall x \in]\alpha ; +\infty[; x > \alpha$

Alors $g(x) > g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) > 0$ car $g(\alpha) = 0$

conclusion

Si $x \in]0 ; \alpha[$ alors $g(x) < 0$

si $x \in]\alpha ; +\infty[$ alors $g(x) > 0$

si $x = \alpha$ alors $g(x) = 0$

Partie B

1- Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \frac{2\ln x}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 - \frac{2\ln x}{x} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2 \end{cases}$$

2)a) démontrons que (D) : $y=x-2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$f(x)-(x-2) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x} - x + 2 = \frac{2\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x}$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Donc la droite (D) d'équation : $y = x-2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudions les positions de (C) par rapport à (D). Cela revient à chercher le signe de $f(x) - (x-2)$.

$\forall x \in]0 ; +\infty [\quad \frac{2}{x} > 0$ d'où le signe de $f(x) - (x-2)$ est celui de $-\ln x$. ainsi :

$\forall x \in]0 ; 1 [\quad -\ln x > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)

$\forall x \in]1 ; +\infty [\quad -\ln x < 0$ (C) est en dessous de (D).

$$\text{Pour } x = 1, (C) \cap (D) = \{(1; -1)\}$$

3)a) Démontrons que $\forall x \in]0 ; +\infty [\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f(x) = \left(x - 2 - \frac{2\ln x}{x}\right) \cdot f'(x) = 1 - \left[\frac{(2\ln x)'(x) - (2\ln x)(x)'}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left[\frac{2x}{x} - 2\ln x\right]}{x^2} ; f'(x) = \frac{x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$\text{Or } g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x \text{ donc } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Dédisons les variations de f

$\forall x \in]0; +\infty[$; le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

car $\frac{1}{x^2} > 0$; donc d'après partie A-3)

$\forall x \in]0; \alpha[$ $f'(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = 0$

* f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$

* f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		\ominus	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 - 2 \frac{\ln \alpha}{2}; f(\alpha) = -1,2$$

2) démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

* f est continue et strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et

$$f(]0; \alpha[) =]f(\alpha); +\infty[$$

Or $0 \in]-1,2; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution γ dans $]0; \alpha[$

* f est continue et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$ et $f(]\alpha; +\infty[) =]f(\alpha); +\infty[$ Or $0 \in]-1,2; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution β dans $]\alpha; +\infty[$

5) Dédouons le signe de $f(x)$

x	0	γ	α	β	$+\infty$
$f(x)$	-		-	+	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$		$+\infty$

f est décroissante sur $]0; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$

$\forall x \in]0; \gamma[: x < \gamma, f(x) > f(\gamma)$, or $f(\gamma) = 0$, donc $f(x) > 0$

$\forall x \in]\gamma; \alpha[: x > \gamma, f(x) < f(\gamma)$ or $f(\gamma) = 0$, donc $f(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; \beta[: x < \beta, f(x) < f(\beta)$, or $f(\beta) = 0$, donc $f(x) < 0$

$\forall x \in]\beta; +\infty[: x > \beta$ or $f(\beta) = 0$, donc $f(x) > f(\beta)$, donc $f(x) > 0$

Conclusion

$\forall x \in]0; \gamma[\cup]\beta; +\infty[, f(x) > 0$

$\forall x \in]\gamma; \beta[, f(x) < 0$

si $x = \beta$ ou $x = \gamma$ alors $f(x) = 0$

PARTIE C

1) démontrons que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$
Calculons $F'(x)$

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 - (\ln x)^2 \right]' ; F'(x) = x - 2 - 2\ln x \times \frac{1}{x} ;$$

$$F'(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$$

$F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f .

D'après Partie B-5)

* F est strictement croissante sur $]0 ; \gamma[$ et sur $]\beta ; +\infty[$

* F est strictement décroissante sur $]\gamma ; \beta [$.

Tableau de variation

x	0	γ	α	β	$+\infty$	
$F'(x)$		+	-	-	+	
$F(x)$			$F(\gamma)$	$F(\alpha)$	$F(\beta)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 - (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right] = +\infty$$

Proposition de correction du problème N° 6

Partie A

1-Étudions le sens de variations de u

$\forall x \in]0; +\infty[$, u est dérivable

$$u'(x) = (x^3 - 1 + 2\ln x)'$$

$$u'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}; \quad u'(x) = \frac{3x^3 + 2}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $u'(x) > 0$, donc u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2-Calculons $u(1)$ et déduisons le signe de $u(x)$.

$$u(1) = 0$$

u est continue et strictement croissante et $u(1) = 0$, donc

$\forall x \in]0; 1[$, $u(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $u(x) > 0$.

Partie B

1-Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

2-Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \left(x - \frac{\ln x}{x^2}\right)'$$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{(\ln x)'(x^2) - (x^2)'(\ln x)}{(x^2)^2} \right]; \quad f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} \right];$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4};$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}. \text{ Or } u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x \text{ donc } f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$$

3-Déduisons les variations de f d'après la partie A-2)

$$\forall x \in]0; 1[; f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) > 0$$

* f est strictement décroissante sur $]0; 1[$

* f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$	
$f'(x)$		-	○	+		
$f(x)$	$+\infty$	↘		1	↗	
						$+\infty$

$$f(1) = 1$$

4-Démontrons que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

5-Etudions les positions relatives de (C) et (Δ)

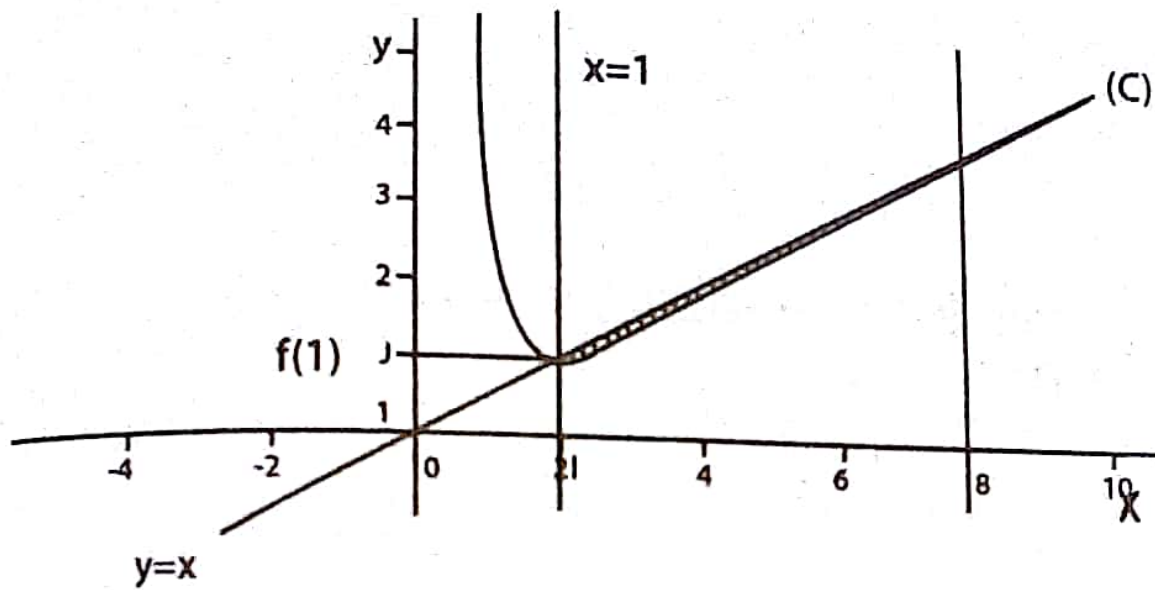
$$f(x) - (x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; \frac{1}{x^2} > 0$ d'où le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln x$.

Ainsi : $\forall x \in]0; 1[; f(x) - x > 0$ donc (C) est au-dessus de (Δ)

$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) - x < 0$, donc (C) est en dessous de (Δ) .

6) tracé de (C) et (Δ).



Partie C

1-a) Démontrons que $A(\lambda) = 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda (x - f(x)) dx ; A(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^\lambda \ln x \times \frac{1}{x^2} dx$$

Posons $u(x) = \ln x ; u'(x) = \frac{1}{x} ;$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} ; v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$A(\lambda) = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} (ua) ; A(\lambda) = -\frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{\ln 1}{1} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda (ua)$$

$$A(\lambda) = \frac{-\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + I(ua) ; A(\lambda) = \left[1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right] \times 4cm^2$$

c) Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

2- Démontrons que $A\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

$$A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{\frac{1}{e}}; \quad A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{\ln e}{\frac{1}{e}} - e$$

$$A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + e - e; \quad A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 \quad \text{donc } A\left(\frac{1}{e}\right) = 1$$

Proposition de correction du problème n°7

Partie A

1- Déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + e^{-x} - xe^{-x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + (1-x)e^{-x} = +\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

2- Calculons $g'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = [-1 + (1-x)e^{-x}]'$$

$$g'(x) = (1-x)'(e^{-x}) + (e^{-x})'(1-x)$$

$$g'(x) = -e^{-x} - e^{-x}(1-x)$$

$$g'(x) = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$g'(x) = e^{-x}[-1 - (1-x)]$$

$$g'(x) = e^{-x}[-2 + x]$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$ le signe de $g'(x)$ dépend de $-2 + x \neq 0$; $x \neq 2$

$$\forall x \in]-\infty; 2[; \quad g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[; \quad g'(x) > 0$$

si $x = 2$ alors $g'(x) = 0$

3- Déduisons le sens de variation de g .

* g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$

* g est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		\circ	
$g(x)$	$+\infty$	$-1-e^{-2}$	-1

$$g(2) = -1 + (1-2)e^{-2}; \quad g(2) = -1 - e^{-2}; \quad g(2) < 0$$

4- Calculons $g(0)$

$$g(0) = -1 + (1-0)e^{-0}$$

$$g(0) = -1 + 1$$

$$g(0) = 0;$$

Déduisons que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[; g(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; g(x) < 0$$

* $\forall x \in]-\infty; 0[; g$ est continue et strictement décroissante et $g(]-\infty; 0[) =]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]-\infty; 0[; g(x) > 0$

* $\forall x \in]0; +\infty[; g$ admet un minimum négatif $g(2) < 0$ et $g(0) = 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) < 0$

PARTIE B

1- Déterminons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - x + 4 = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 4 = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} - 1 + \frac{4}{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2- démontrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$$

$$f'(x) = (xe^{-x} - x + 4)'$$

$$f'(x) = (x)'(e^{-x}) + (x)(e^{-x})' - 1$$

$$f'(x) = -1 + (1-x)e^{-x} \text{ or } g'(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$$

$$\text{donc } f'(x) = g(x)$$

3- D'après question 4°) partie A

* $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	$-\infty$

$$f(0) = 4 ;$$

4- Démontrons que la droite $(\Delta) : y = -x + 4$ est asymptote à (Cf) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - x + 4 + x - 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{cases}$$

Donc la droite $(\Delta) : y = -x + 4$ est une asymptote à (Cf) à $+\infty$.

5- Étudions les positions relatives de (Cf) et (Δ)

$$f(x) - y = xe^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R} e^{-x} > 0$ le signe de $f(x) - y$ dépend de x .

* $\forall x \in]-\infty ; 0[$, (Cf) est en dessous de (Δ)

* $\forall x \in]0 ; +\infty[$, (Cf) est au-dessus de (Δ)

6- Déterminons une équation de la tangente en 0

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

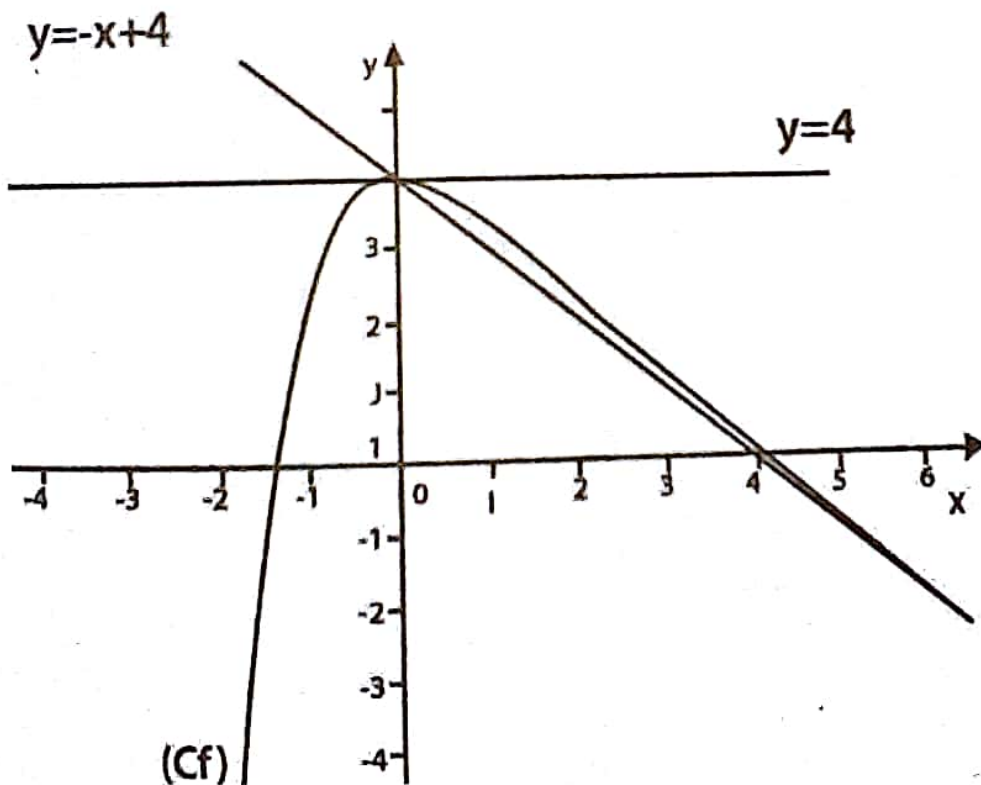
$$f(0) = g(0) = 0 ; f(0) = 4 ; (T) : y = 4$$

7)* f est continue et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ elle réalise donc une bijection de $]-\infty ; 0[$ vers $f(]-\infty ; 0[) =]-\infty ; 4[$ or $0 \in]-\infty ; 4[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution notée β dans $]-\infty ; 0[$

* f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et $g(]0 ; +\infty[) =]-\infty ; 4[$ or $0 \in]-\infty ; 4[$ alors $f(x) = 0$ admet une solution α et dans $]0 ; +\infty[$ de plus

$$f(-2) \times f(-1) < 0 \text{ donc } -2 < \beta < -1 ; f(3) \times f(4) < 0 \text{ donc } 3 < \alpha < 4$$

8-Traçons (T), (Δ) et (cf)



Proposition de correction du Problème n° 8

Partie A

1- Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 2 = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 2 = +\infty \end{cases}$$

2- Calculons $f'(x)$ puis étudions son signe.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (e^x - x - 2)'$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x = \ln 1)$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) > 0$$

3- Dédisons les variations de f

* f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

* f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

4- Déterminons la tangente de (T) au point d'abscisse 0

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) ; f'(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$f(0) = -1 ; (T) : y = -1$$

5- Démontrons que $y = x - 2$ est asymptote

$$f(x) - (x-2) = e^x - x - 2 + x + 2 ; f(x) - (x-2) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-2) = 0$$

Donc la droite d'équation (Δ) : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (cf) en $-\infty$

6- Étudions les positions de (Δ) et de (cf). Cela revient à chercher le signe de e^x . $\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$ donc (cf) est au-dessus de (Δ).

7. * f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et $f(]-\infty ; 0]) =]-1 ; +\infty[$ or $0 \in]-1 ; +\infty[$ donc l'équation

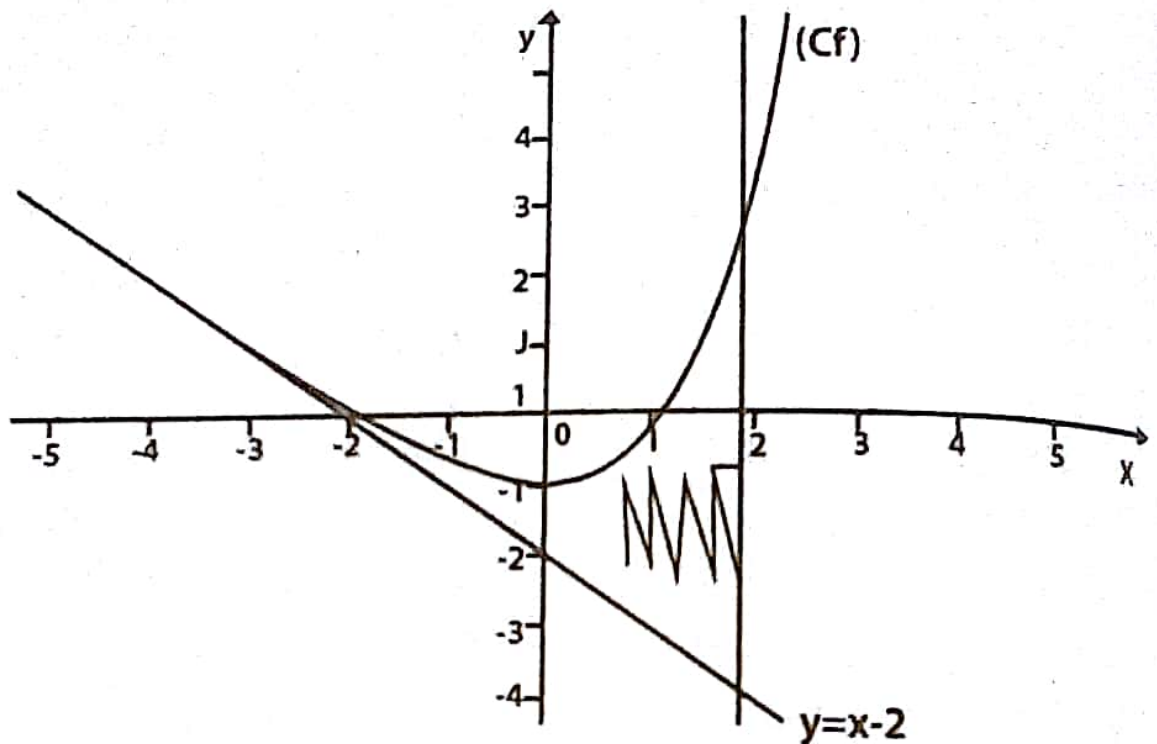
$$f(x) = 0 \text{ admet une solution } \beta \text{ dans }]-\infty ; 0[$$

* f est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $f([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$ or $0 \in [-1 ; +\infty[$ donc l'équation

$$f(x) = 0 \text{ admet une solution } \alpha \text{ dans } [0 ; +\infty[\text{, de plus}$$

$$f(1) \times f(2) < 0 \text{ donc } 1 < \alpha < 2 ; f(2) \times f(-1) < 0 \text{ donc } -2 < \beta < -1$$

8- Traçons (T) ; (D) et (cf)



Partie B

1) (Voir courbe)

2) Calculons l'aire

$$A = \int_0^1 f(x) - (-x - 2) dx \text{ (u.a)}$$

$$A = \int_0^1 e^x dx \text{ (u.a)}$$

$$A = [e^x]_0^1 \text{ (u.a)}$$

$$A = (e - 1) \text{ u.a}$$

$$1 \text{ u.a} = 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm};$$

$$1 \text{ u.a} = 4 \text{ cm}^2 ;$$

$$A = (e - 1) 4 \text{ cm}^2$$

Proposition de correction au problème N°9

Partie A

1) a) Etudions les variations de h .

$\forall x \in \mathbb{R}$; h est dérivable $h'(x) = (xe^x + 1)'$

$$h'(x) = (xe^x + 1)' \\ = (x)'(e^x) + (e^x)'(x) = e^x + xe^x;$$

$$h'(x) = e^x(1+x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ d'où le signe de $h'(x)$ est celui de $1+x$.

$$x+1=0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ainsi $\forall x \in]-\infty; -1[$ $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

$\forall x \in [-1; +\infty[$ h est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

Calcul de limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x + 1 = +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1 \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{array} \right.$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$		○	
$h(x)$	1	$\frac{-1+e}{e}$	$+\infty$

$$h(-1) = -e^{-1} + 1$$

$$h(-1) = \frac{-1}{e} + 1 = \frac{-1+e}{e}$$

b) Déterminons que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$;

$\forall x \in]-\infty; +\infty[$ h admet un minimum en -1 supérieur à 0 et c'est-à-dire $h(-1) > 0$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty; +\infty[$ $h(x) > 0$

2-a) déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \end{cases}$$

a) Etudions le sens de variations de g.

g est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x + 2 - e^x)';$$

$$g'(x) = 1 - e^x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-\infty; 0[$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

Sur $]0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	○	-
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

$$g(0) = 1$$

c) démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} .

* g est continue et strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et

$g(]-\infty; 0[) =]-\infty; 1[$.

Or $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β dans $] -\infty; 0[$

* g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$ or $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α dans $]0; +\infty[$

de plus $f(1,14) \times f(1,15) < 0$ donc $1,14 < \alpha < 1,15$

d) Démontrons :

* $\forall x \in]-\infty; \beta[$ $x < \beta \Leftrightarrow g(x) < g(\beta) \Leftrightarrow g(x) < 0$ car $g(\beta) = 0$ et g est croissante sur $] -\infty; 0[$

* $\forall x \in]\beta; 0[$ $\beta < x < 0 \Leftrightarrow g(\beta) < g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x) \Leftrightarrow g(x) > 0$ car g est croissante sur $] -\infty; 0[$.

* $\forall x \in]0; \alpha[$ $0 < x < \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x) \Leftrightarrow g(x) > 0$ car g est décroissante sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $\alpha < x \Leftrightarrow g(\alpha) > g(x) \Leftrightarrow 0 > g(x) \Leftrightarrow g(x) < 0$ car g est décroissante sur $]0; +\infty[$

Conclusion

$\forall x \in]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[$ $g(x) < 0$

$\forall x \in]\beta; \alpha[$ $g(x) > 0$

Partie B

1- D'après partie A) -1

$\forall x \in \mathbb{R}$ $xe^x + 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $xe^x + 1 \neq 0$ et

$Df = \mathbb{R}$

2- Déterminons les limites en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = -1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à (cf) en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{e^x} = +\infty \end{cases}$$

La droite d'équation $y=0$ (l'axe (Ox)) est asymptote horizontale à (c_f) à $+\infty$

$$3- \text{ Démontrons que } f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'(xe^x + 1) - (e^x - 1)(xe^x)'}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1)e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xe^x + 2e^x - e^{2x}}{(xe^x + 1)^2}; f(x) = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2}$$

$$\text{Or } g(x) = x + 2 - e^x \text{ donc } f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

4- Dédudons les variations de f d'après partie A question 2-d)

$$\forall x \in \mathbb{R} \frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0 \text{ d'où le signe de } f'(x) \text{ est celui de } g(x) \text{ ainsi}$$

$$\forall x \in]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[$$

$f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \beta[$ et sur $]\alpha; +\infty[$

f est strictement croissante sur $]\beta; \alpha[$.

5- a) calculons $f(\alpha)$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha \Leftrightarrow e^\alpha = -\alpha - 2 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}; f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}; f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$$

b) encadrement de $f(\alpha)$

$$1,14 < \alpha < 1,15 ; 2,14 < \alpha + 1 < 2,15 ; \frac{1}{2,14} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,15} ; 0,46 < \frac{1}{\alpha + 1} < 0,4$$

6- Equation de la tangente en 0

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 1(x-0) ; y = x$$

6- a) Déterminons le sens de variation de u

u est dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = (e^x - xe^x - 1)'$$

$$u'(x) = e^x - e^x - xe^x ; u'(x) = -xe^x$$

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur

$]-\infty ; 0[$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	\circ	$-$
$u(x)$	-1	0	$-\infty$

$$u(0) = 0$$

Calcul de limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - xe^x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - x - \frac{1}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x - \frac{1}{e^x} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - xe^x - 1 = -1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

b) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$

*u est continue et strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et $u(]-\infty ; 0]) =]-1 ; 0]$ donc $\forall x \in]-\infty ; 0], u(x) \leq 0$
 u est continue et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et $u([0 ; +\infty[) =]-\infty ; 0]$

Donc $\forall x \in [0 ; +\infty[, u(x) \leq 0$

Conclusion

$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$

c) Déduisons la position de (C) par rapport à (T)

$$\frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^{x+1}} = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^{x+1}}$$

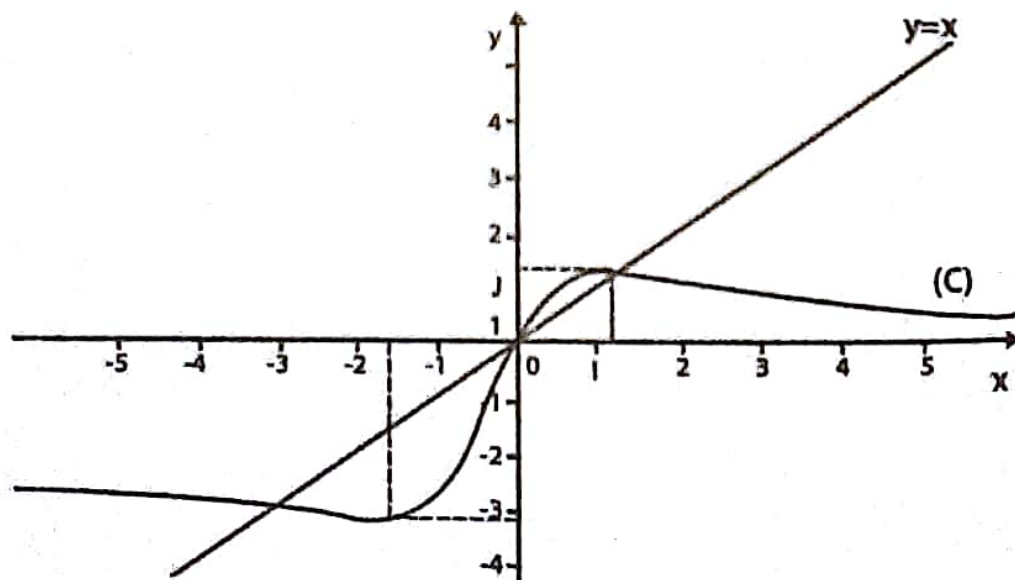
$$\frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x = \frac{(x+1)u(x)}{h(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{h(x)} > 0$ d'où le signe de $\frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x$ est celui $(x+1)u(x)$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty ; -1[\frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x > 0$ donc (C) est au-dessus de (T)

$\forall x \in]-1 ; +\infty[\frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x < 0$ donc (C) est en dessous de (T).

7- traçons (T) et (C)



Proposition de correction du problème N°10

Partie A

1-a) Calcul de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(x - 1 - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x - e^x - 1 = -1$$

a) Etudions le sens de variation de g

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + x e^x - e^x$$

$$g'(x) = x e^x$$

(1) Ainsi $\forall x < 0, g'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^*

2) $\forall x > 0, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

$$g'(0) = 0$$

Tableau de variation de

g				
x	$-\infty$		0	$+\infty$
g'(x)		-	0	+
g(x)	-1			$+\infty$

2-Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α
 g est continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$, donc g est une
 bijection de $[1 ; 2]$ vers $[f(1) ; f(2)] = [-1 ; e^2 - 1]$
 or $0 \in [-1, e^2 - 1]$ car $e^2 - 1 > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique
 solution $\alpha \in [1 ; 2]$

3-donnons le signe de $g(x)$

D'après le tableau de variation de g , $g]-\infty ; 0] = [-2 ; -1[$, donc $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $g(x) < 0$

g est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et

$$g(\alpha) = 0$$

Donc $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$

Ainsi $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$

Partie B

1-a) Calcul de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(x - 2 - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x - 2e^x - 1 = xe^x - e^x - 1$$

$$\text{or } g(x) = xe^x - e^x - 1$$

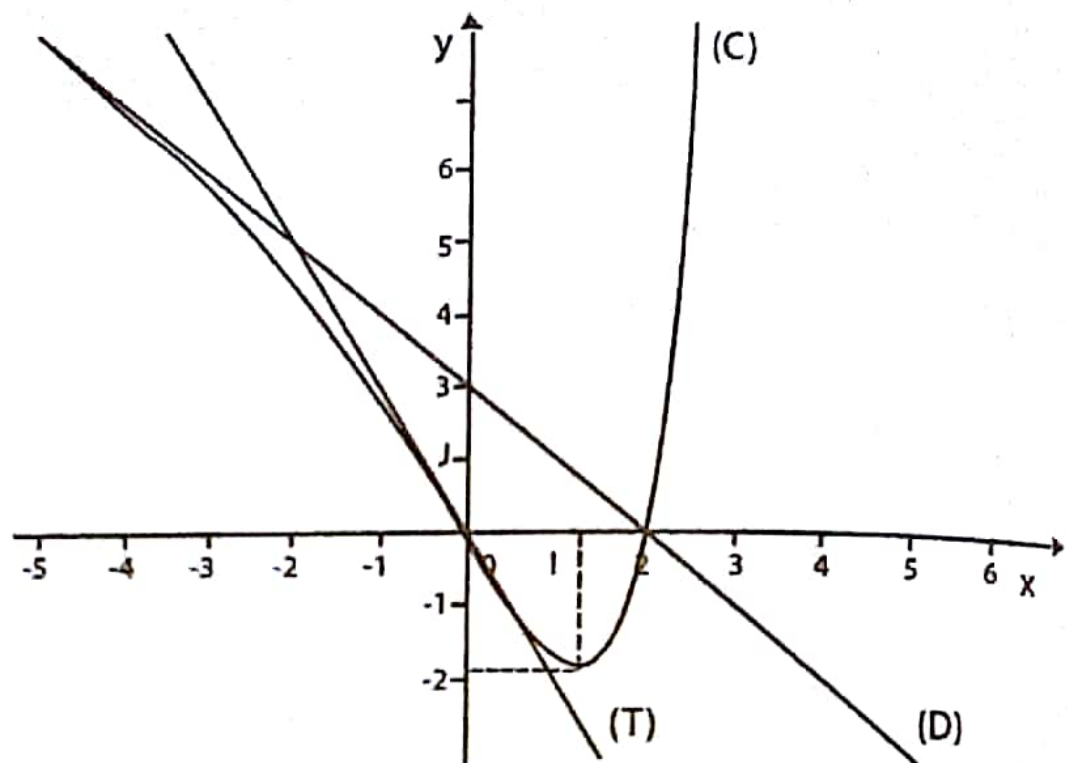
Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Donc d'après A) 3°)

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$.

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$
d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

7) Tracé de (T), (C), et (D)



Proposition de correction du problème N° 11

1) * étudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^X}{X} = 0 \text{ avec } (X = \frac{1}{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0,$$

donc f est continue en 0.

* Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

2) a) Déterminons les limites de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{e^X}{X} = -\infty$$

avec $(X = \frac{1}{x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = +\infty$$

b) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}} \text{ pour } x < 0 ; f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} x e^{\frac{1}{x}} ; f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

Pour $x < 0$, $f'(x) > 0$ car $e^{\frac{1}{x}} > 0$ et $\frac{x-1}{x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

$f(x) = x \ln(x+1)$ pour $x \geq 0$; $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} > 0$ Donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$+$
$f(x)$	$-\infty$	\circ	$+\infty$

3)a) Calculons la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et interprétons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = +\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \text{ car } \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right.$$

c) démontrons que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

Donc la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

4) Déterminons les points d'intersection de (C) et (Δ).

$$M(x; y) \in (C) \cap (\Delta) \Leftrightarrow y=x \text{ et } y=f(x)$$

$$\text{Sur }]-\infty; 0[f(x) = x \Leftrightarrow x e^{\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ car } e^{\frac{1}{x}} - 1 \neq 0$$

$$\text{Sur } [0; +\infty[f(x) = x \Leftrightarrow x \ln(x+1) = x \Leftrightarrow$$

$$x(\ln(x+1) - 1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=e-1$$

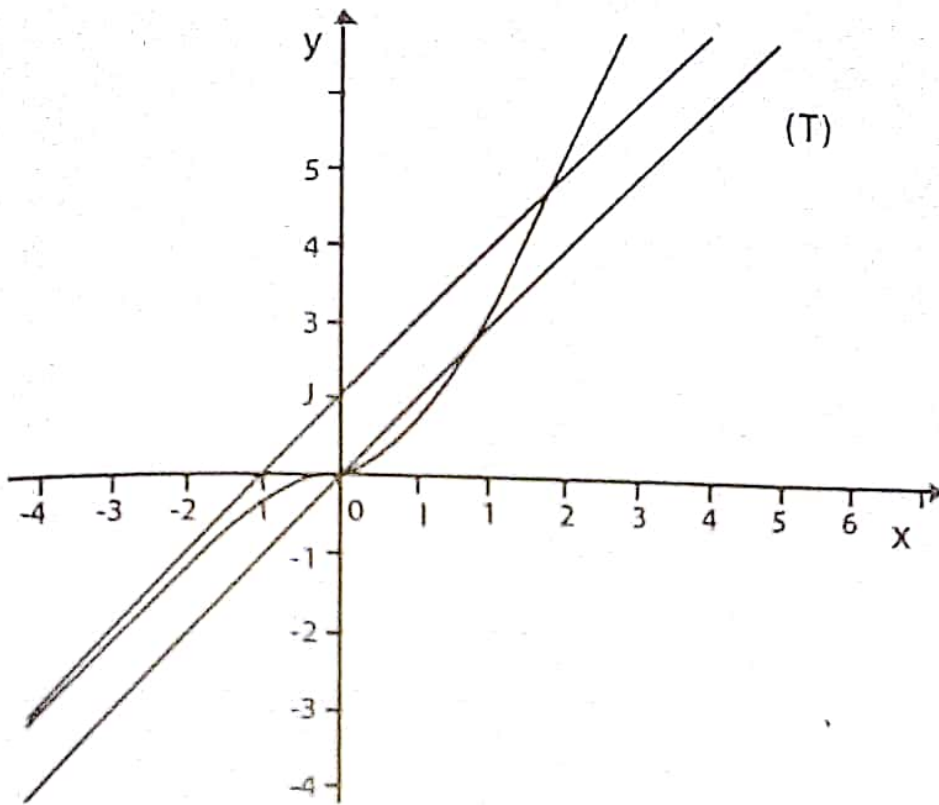
Donc les points d'intersection de $(C) \cap (\Delta)$ sont O (0; 0) et B(e-1; e-1)

5) Démontrons que f admet une bijection réciproque.

f est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers

$]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection réciproque. Soit f^{-1} sa bijection réciproque.

1) Représentation graphique



Proposition de correction du problème N° 12

Partie A

1) Résolvons l'équation

Posons $X = e^x$

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 4 \Leftrightarrow \Delta = 9$$

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$; donc $e^x = 1$ ou $e^x = 4$

Ainsi $x = 0$ ou $x = \ln 4$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{0; \ln 4\}$

2) Déterminons le signe de $P(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	\ominus	$-$	\oplus

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[\cup] \ln 4; +\infty[; P(x) > 0$

$\forall x \in]0; \ln 4[; P(x) < 0$

Partie B

1) Déterminons Df ;

$$x \in Df \Leftrightarrow e^x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq \ln 2$$

$$\text{Donc } Df = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\} =]-\infty ; \ln 2[\cup] \ln 2 ; +\infty[$$

2) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 2} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 2} = -\frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^-} \frac{1}{e^x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 2)^+} \frac{1}{e^x - 2} = +\infty$$

3) a) Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2}$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x - 2)^2}; f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x - 2)^2}$$

b) Etudions le signe de $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}, (e^x - 2)^2 > 0$; donc le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 \ln 2, +\infty[$

$\forall x \in]0 ; 2 \ln 2[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; 2 \ln 2[$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2 \ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	m	$+\infty$

$$m = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

4) Démontrons que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$

$$\forall x \in] \ln 2; +\infty[, f(x) - (x-1) = \frac{1}{e^x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 2} = 0$$

Donc $(\Delta) : y = x-1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5) Etudions la position relative de (C) et (D).

$$\forall x \in] \ln 2; +\infty[: f(x) - (x-1) = \frac{1}{e^x - 2}$$

$\forall x \in] \ln 2; +\infty[, e^x - 2 > 0$ donc $\forall x \in] \ln 2; +\infty[$
 $f(x) - (x-1) > 0$ donc (C) est au-dessus de (Δ) sur $] \ln 2; +\infty[$.

6) Démontrons :

$$\forall x \in] -\infty; \ln 2 [\cup] \ln 2; +\infty [$$

$$x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)} = x - 1 - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

$$= x - 1 + \frac{(-e^x) + 2 + e^x}{2(e^x - 2)} = x - 1 + \frac{1}{(e^x - 2)} = f(x)$$

7) Démontrons que (Δ) est asymptote à (C) en $-\infty$

$$\forall x \in]-\infty ; \ln 2 [f(x) - (x - \frac{3}{2}) = \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - \frac{3}{2}) = 0$$

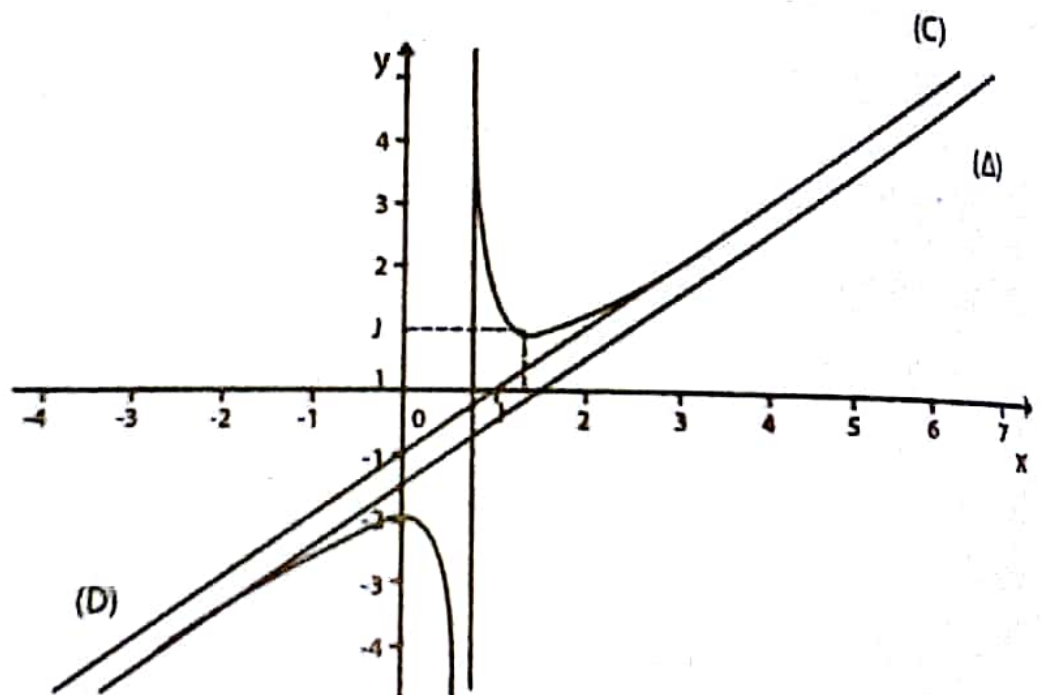
donc $(\Delta): y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$

8) Etudions la position relative de (C) et (Δ) .

$$\forall x \in]-\infty ; \ln 2 [, e^x > 0 \text{ et } e^x - 2 < 0 \text{ donc } f(x) - (x - \frac{3}{2}) < 0$$

donc (C) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty ; \ln 2 [$

8) Traçons la courbe (C) .



Partie C

1) Exprimons en fonction de β

$$\text{Soit } \beta < 0 ; \forall x \in]-\infty ; \ln 2 [, f(x) - (x - \frac{3}{2}) < 0$$

$$\text{Donc } A(\beta) = \int_{\beta}^0 -[f(x) - (x - \frac{3}{2})] dx \times a$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\beta}^0 \frac{e^x}{e^x - 2} dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= -\frac{1}{2} [\ln |e^x - 2|]_{\beta}^0 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{donc } A(\beta) = 2 \ln(2 - e^{\beta}) \text{ cm}^2$$

2) Calculons la limite
 $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} A(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} 2 \ln 2 \text{ cm}^2$

Proposition de correction du problème N° 13

1) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - e^{-x}) = 3$$

car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty$$

2) Démontrons

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$$

3) Etudions le sens de variation de h

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est $2-x$.

$\forall x > 2, h'(x) < 0$, donc h est strictement décroissante sur

$]2; +\infty[$

$\forall x < 2, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et

$$h'(2) = 0$$

D'où le tableau de variation de h

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	-
$h(x)$	$-\infty$	M	3

$$M = h(2) = 3 + e^{-2}$$

4) a) Démontrons

h est continue et strictement croissant donc h est une bijection de $]-\infty, 2[$ vers $]-\infty, 3+e^{-2}[$

or $0 \in]-\infty, 3+e^{-2}[$ car $3+e^{-2} > 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 2[$.

b) Démontrons que $-1 < \alpha < 0$

$$h(-1) = 3 - 2e = 3 - 2 \times 2,7 = -2,4 < 0 \text{ et } h(0) = 2 > 0$$

$$h(-1) \times h(0) < 0 \text{ donc } -1 < \alpha < 0$$

5) Déduisons le signe de $h(x)$.

$$h([2; +\infty[) =]3; 3+e^{-2}] \text{ donc } \forall x \geq 2, h(x) > 0$$

Sur $]-\infty, \alpha[$, h est strictement croissante et $h(\alpha) = 0$ donc $\forall x < \alpha, h(x) < 0$

$$h([\alpha; 2[) = [0; 3+e^{-2}) \text{ donc } \forall x \in [\alpha; 2[, h(x) > 0$$

Conclusion

$$\forall x > \alpha, h(x) > 0$$

$$\forall x < \alpha, h(x) < 0$$

Partie B

1) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(3 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) = +\infty$$

2) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x)$

$$f(x) = 3 - e^x + x e^{-x}; f'(x) = 3 + (x-1) e^{-x} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} f'(x) = h(x)$$

3) Etudions le sens de variation de f

D'après A) 5°) $\forall x > \alpha; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur

$]\alpha; +\infty[; f'(\alpha) = 0$ et $\forall x < \alpha; f'(x) < 0$

et f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		○	
$f(x)$	$+\infty$	M	$+\infty$

$m = f(\alpha)$

4) Démontrons que (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$$

donc la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5) Etudions la position relative de (C) et (Δ)

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) - (3x + 1) = -xe^{-x}$, $-xe^{-x} < 0$ donc (C) est en dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

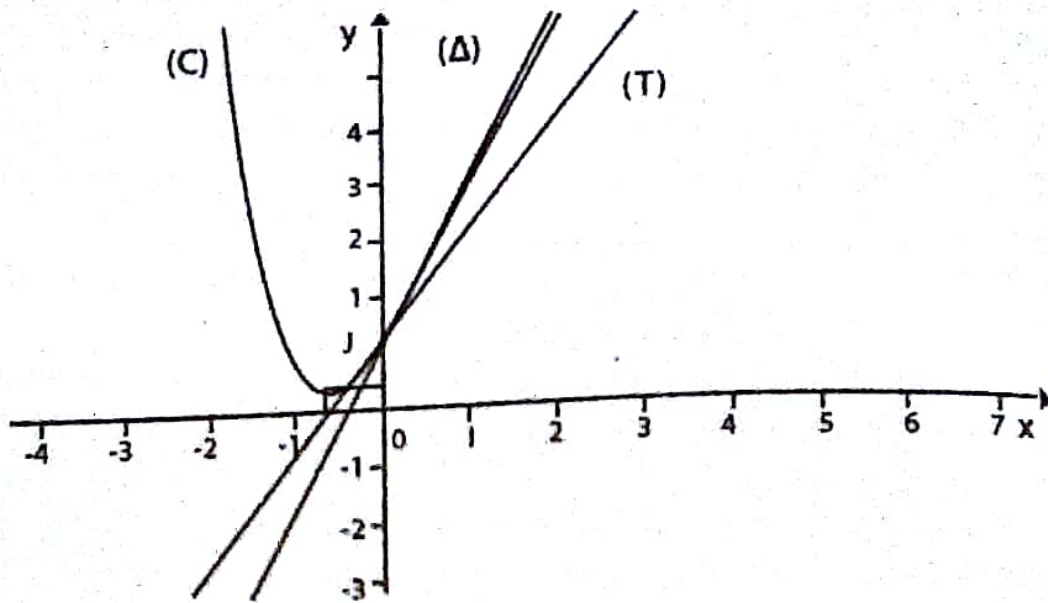
6) Recherchons une branche parabolique en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} - e^{-x} = -\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

7) Déterminons une équation de (T) .

$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$; $(T) : y = 2x + 1$



Avec $\alpha = -0,6$ et $f(\alpha) = 0,3$

9) $\beta > 0$

a) Calculons $\int_0^\beta x e^{-x} dx$

Soit $L = \int_0^\beta x e^{-x} dx$; posons $u(x) = x$; $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$; $v(x) = -e^{-x}$

Donc $L = [-x e^{-x}]_0^\beta + \int_0^\beta e^{-x} dx$

$L = -\beta e^{-\beta} + [-e^{-x}]_0^\beta = -\beta e^{-\beta} - e^{-\beta} + 1$

b) Calculons $A(\beta)$.

$A(\beta) = \int_0^\beta |f(x) - (3x + 1)| dx$ u.a. $= \int_0^\beta [(3x + 1) - f(x)] dx$ u.a.

$A(\beta) = \int_0^\beta x e^{-x} dx$ u.a.

$A(\beta) = (-\beta e^{-\beta} - e^{-\beta} + 1)$ u.a.

c) Calcul de limite

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta) = 1 \times u.a. = 4 \text{ cm}^2$$

Proposition de correction du problème N°14

Partie A

1) a) Déterminons Dg de g

$x \in Dg \Leftrightarrow x \neq 0$, donc $Dg = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

b) Déterminons les limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2(x \ln x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - 2(-x \ln(-x)) + x = 1$
car $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln x = 0$

2) a) Calculons $g'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^* g'(x) = 2 \ln|x| + 1 + 2$

$$g'(x) = 2 \ln|x| + 3$$

b) Dressons le tableau de variation de g

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 \ln|x| < -3; \Leftrightarrow \ln|x| < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow |x| < e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\frac{3}{2}} < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{et } g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -e^{-\frac{3}{2}}[\cup]e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[$$

g est strictement décroissante sur $] -e^{-\frac{3}{2}}; 0[$ et sur $]0; e^{-\frac{3}{2}}[$

g est strictement croissante sur $] -\infty; -e^{-\frac{3}{2}}[$ et sur $]e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[$

d'où le tableau de variation.

x	$-\infty$	$-e^{\frac{-3}{2}}$	0	$e^{\frac{-3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	+		-	-	+
$g(x)$					

$$M = g(-e^{\frac{-3}{2}}) = 1 + 2e^{\frac{-3}{2}} \text{ et } m = 1 - 2e^{\frac{-3}{2}}$$

3) a) Calculons $g(-1)$

$$g(-1) = 0$$

b) Déterminons J

$I =]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}[$ et $g(I) =]-\infty; 1 + 2e^{\frac{-3}{2}}] = J$ car g est strictement croissante sur I .

c) Démontrons

g est continue et strictement croissante sur I , donc sa restriction h à I l'est aussi, donc h est une bijection de I sur

$$J = g(I)$$

d) Déduisons les solutions de $g(x) = 0$.

g est une bijection de I sur J et $g(-1) = 0$ donc -1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}[$

D'après le tableau de variation, sur $]0; +\infty[$ g admet un minimum atteint en $e^{\frac{-3}{2}}$ qui est $1 - 2e^{\frac{-3}{2}}$. On a $1 - 2e^{\frac{-3}{2}} \simeq 0,553$ donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$, ainsi l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$.

Sur $]-e^{\frac{-3}{2}}; 0[$, g est continue et strictement décroissante et

$g(]-e^{\frac{-3}{2}}; 0]) =]1; 1 + 2e^{\frac{-3}{2}}[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-e^{\frac{-3}{2}}; 0[$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur \mathbb{R} est $\{-1\}$

4) Dédudions le signe de $g(x)$.

Sur $]-\infty; -e^{-\frac{3}{2}}[$, g est strictement croissante et $g(-1) = 0$ donc

$\forall x \in]-\infty; -1[$, $g(x) < 0$; $\forall x \in]-1; -e^{-\frac{3}{2}}[$, $g(x) > 0$ et

$g(-e^{-\frac{3}{2}}; 0[) =]1; 1+2e^{-\frac{3}{2}}[$

Donc $\forall x \in]-e^{-\frac{3}{2}}; 0[$, $g(x) > 0$; sur $]0; +\infty[$ g admet un minimum supérieur à 0 donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty; -1[$, $g(x) < 0$;

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1) Démontrons que f est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x \ln|x| + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x \ln x + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x(x \ln|x| + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x(-x \ln(-x) + 1) = 0$$

$$\text{car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln x = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0

2) a) Déterminons Df et les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$x \in Df \Leftrightarrow x \neq 0$ or $f(0) = 0$ donc $Df = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln|x| = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| + 1 = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

Proposition de correction du problème N°15

Partie A

1) Précisons les limites

L'ensemble de définition $Df =]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \ln x = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \ln x = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

2) Etudions le sens de variation de g

$$\forall x \in]0 ; +\infty[. g'(x) = (x^2 + \ln x)' = g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0 \text{ donc } g \text{ est strictement croissante sur}$$

$]0 ; +\infty[$

d'où le tableau de variation de g

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	$-\infty$	\circ	$+\infty$

3) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une solution.

* Sur $]0 ; +\infty[$, g est continue et strictement croissante, donc g est une bijection de $]0 ; +\infty[$ vers \mathbb{R} . Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$

De plus $g(0,65) \times g(0,66) < 0$ donc $0,65 < \alpha < 0,66$.

4) Précisons le signe de $g(x)$

*Sur $]0; +\infty[$, g est continue et strictement croissante et $g(\alpha) = 0$

donc $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$;

Partie B

1) a) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x^2 + 1 + \ln x) \frac{1}{x} = -\infty$$

c) Démontrons que la droite (Δ) est asymptote en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

c) Etudions les positions de (C) et (Δ) .

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (-x + 1) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{-1}$$

$\forall x \in]0; e^{-1}[$, $f(x) < -x + 1$, donc sur $]0; e^{-1}[$ (C) est en dessous de (Δ)

$\forall x \in]e^{-1}; +\infty[$, $f(x) > -x + 1$, donc sur $]e^{-1}; +\infty[$ (C) est au-dessus de (Δ) .

$$(C) \cap (\Delta) = \{(e^{-1}; 1 - e^{-1})\}$$

2) a) Démontrons

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (1 - x + \frac{1 + \ln x}{x});$$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1 + \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 - \ln x}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$$

d) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$ ainsi d'après la partie 4-A).

* $\forall x \in]0; \alpha[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$

* $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$ et $f'(\alpha) = 0$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		\oplus	$-$
$f(x)$		$f(\alpha)$	
	$-\infty$		$-\infty$

3)a) Calculons $f(\alpha)$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -\alpha^2$$

$$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha}; f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha}; f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

b) Démontrons : $h'(x) = -2 - \frac{1}{x^2}$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

c) Déduisons :

On sait que $0,65 < \alpha$, donc $h(\alpha) < h(0,65)$. Car h est strictement décroissante, or $h(\alpha) = f(\alpha)$, donc $f(\alpha) < h(0,65)$.

d) Démontrons

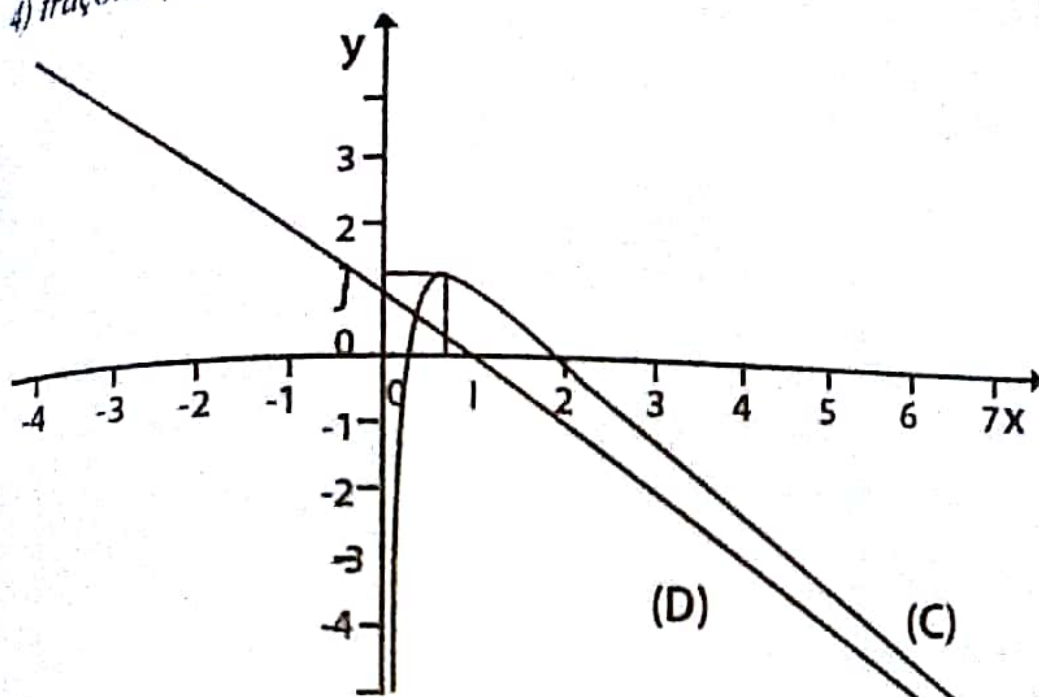
$0,65 < \alpha$, donc $f(0,65) < f(\alpha)$ car f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$

e) Donnons un encadrement de $f(\alpha)$

On a $f(0,65) < f(\alpha)$ et $f(\alpha) < h(0,65)$ donc

$$f(0,65) < f(\alpha) < h(0,65) \Leftrightarrow 0,68 < f(\alpha) < 1,23$$

4) traçons (C) et (D).



Proposition de correction du problème N° 16

Partie A

1) Déterminons Dg

$$x \in Dg \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ donc } Dg = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2) Etudions le sens de variation de g et calcul de limite

$$\forall x \in Dg, g'(x) = [(x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|]'$$

$$g'(x) = 2(x-1) + \frac{1}{(x-1)}; g'(x) = \frac{2(x-1)^2 + 1}{x-1}$$

$\forall x \in Dg, 2(x-1)^2 + 1 > 0$, donc le signe $g'(x)$ est celui de $x-1$.

$\forall x \in]-\infty; 1[, g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3) Déduisons le signe de $g(x)$

On a $g(0) = 0$ et $g(2) = 0$

*Sur $]-\infty; 1[$, g est continue et strictement décroissante et $g(0) = 0$,

donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$

*Sur $]1; +\infty[$, g est continue et strictement croissante et

$g(2) = 0$ donc $\forall x \in]1; 2[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[$, $g(x) > 0$

Conclusion

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[$, $g(x) < 0$

Partie B

1) a) Calculons les limites

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln|x-1| = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln|x-1| = -\infty \end{cases}$$

Donc (cf) admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

b) Exprimons $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

$$\forall x \in]-\infty; 1[, |x-1| = 1-x, \text{ et } f(x) = x - \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, |x-1| = x-1, \text{ et } f(x) = x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

c) Calculons les limites de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0 \text{ car} \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ (} X = x-1 \text{)} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0 \text{ car} \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ (} X = 1-x \text{)} \end{cases}$$

2) a) Calculons $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} f(x) = \left[x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} \right],$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x-1}(x-1) - \ln|x-1|}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln|x-1|}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|}{(x-1)^2}$$

or $g(x) = (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|$ donc $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

b) Déterminons le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, (x-1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$.

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante, sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2[$

$$f'(0) = f'(2) = 0$$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	\circ	-	\circ	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 0 \searrow	$+\infty$	\searrow 2 \nearrow	$+\infty$

3) a) Justifions que (D) est asymptote à (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ ou } -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty \text{ ou } -\infty} \frac{\ln|x-1|}{x-1} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (c).

b) Etudions la position relative de (C) et (D)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) - x = \frac{\ln|x-1|}{x-1}$$

$$\ln|x-1| < 0 \Leftrightarrow |x-1| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$\ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1 > 1 \text{ ou } x-1 < -1$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ ou } x < 0$$

D'où le tableau de signe de $\ln \frac{|x-1|}{x-1}$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$\ln x-1 $	+	○	-	-	○	+	
$x-1$	-	○	○	+	+	+	
$f(x)-x$	-	○	+		-	○	+

Donc $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; 2[$, $f(x) - x < 0$, donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]1 ; 2[$

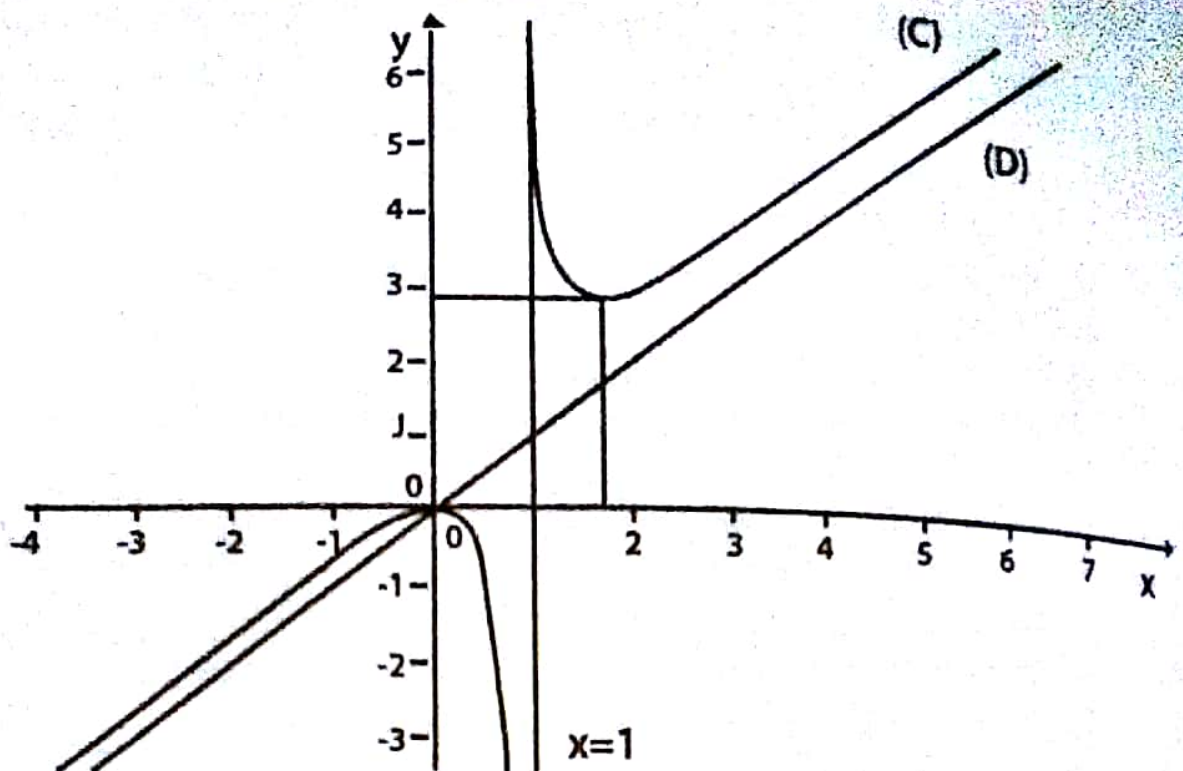
$\forall x \in]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, $f(x) - x > 0$, donc (C) est au-dessus de (D) sur $]0 ; 1[$ et sur $]2 ; +\infty[$.

c) Démontrons que A est centre de symétrie de (C).

Soit le point A(1 ; 1)

$\forall x \neq 0, f(1+x) + f(1-x) = 1$ donc A est un centre de symétrie de (C)

ou $\forall x \neq 1, f(2-x) + f(x) = 2$



Proposition de correction du problème N° 17

Partie A

1) a) Déterminons Dg

$$x \in Dg \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 0 \text{ or } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0, \text{ donc } Dg = \mathbb{R}$$

b) Etudions la parité de g . $\forall x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = g(x)$ donc g est paire.

c) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(-x) = -\infty$$

car g est paire

2) a) Démontrons que $\forall x \in]0 ; +\infty[g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[g$ est dérivable,

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{4x - 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

b) Etudions le sens de variation de g

$\forall x \in]0 ; +\infty[\frac{2x(1+x)}{(x^2+1)^2} > 0$ donc $g'(x)$ est celui de $1-x$ or $\forall x \in]0 ; 1[g'(x)$

> 0 , donc g est strictement croissante sur

$]0 ; 1[$

$\forall x \in]1 ; +\infty[g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante

sur $]1 ; +\infty[$

g	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	0	M	$-\infty$

Avec $M = 1 - \ln 2$

3) Justifions que $g(x) = 0$ admet une solution unique α

sur $]1 ; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, donc g est une

bijection de $]1 ; +\infty[$ vers $] -\infty ; 1 - \ln 2]$

or $0 \in] -\infty ; 1 - \ln 2]$ car $1 - \ln 2 > 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une

unique solution α dans $]1 ; +\infty[$.

4) a) Sur $]0; \alpha[$, g admet un maximum $1 - \ln 2$ qui est strictement positif et $g(0) = g(\alpha) = 0$.

Donc $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) > 0$

Sur $] \alpha; +\infty[$, g est strictement décroissante. Donc $\forall x > \alpha$, $g(x) < g(\alpha)$ c'est-à-dire, $g(x) < 0$.

Ainsi $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in] \alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$; $g(0) = g(\alpha) = 0$

b) les intervalles

$] -\infty; -\alpha[$ et $] \alpha; +\infty[$ (respectivement $] -\alpha; 0]$ et $] 0; \alpha[$)

Sont symétriques par rapport à 0 et g est paire donc d'après 4° a)

$\forall x \in] -\infty; -\alpha[\cup] \alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in] -\alpha; 0[\cup] 0; \alpha[$, $g(x) > 0$

$g(x) = g(-x) = g(0) = 0$

Partie B

1) Démontrons que f est impaire

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{\ln[(-x)^2 + 1]}{-x} = -f(x)$. Donc f est impaire, donc

(cf) est symétrique par rapport à 0

(Origine du repère).

2) a) Démontrons que f est dérivable en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X + 1)}{X} = 1$$

avec $(X = x^2)$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

b) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}^* f(x) = \frac{2 \ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$

$$f(x) = \frac{\ln[x^2(1 + \frac{1}{x^2})]}{x} = \frac{2 \ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ car } \ln x^2 = \ln|x|^2$$

3)a) Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln|x|}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (cf)

b) Déterminons une équation de (T).

$$(T): y = x.$$

4)a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}^* \cdot f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{x} \right]'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}x - \ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Sens de variation de f

le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, donc d'après A)b)

$\forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[$, $f'(x) < 0$, Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -\alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$.

$\forall x \in]-\alpha; 0[\cup]0; \alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\alpha; 0[$ et sur $]0; \alpha[$.

$$f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	-
$f(x)$	0			$f(\alpha)$	0

Diagram description: The table shows the variation of the function $f(x)$. The first row lists the values of x : $-\infty$, $-\alpha$, 0 , α , and $+\infty$. The second row shows the sign of the derivative $f'(x)$: it is negative for $x < -\alpha$, zero at $x = -\alpha$, positive for $x > \alpha$, and negative for $x > \alpha$. The third row shows the values of $f(x)$: it is 0 at $-\infty$, $f(\alpha)$ at α , and 0 at $+\infty$. Arrows indicate the function's behavior: it decreases from 0 at $-\infty$ to $f(\alpha)$ at $-\alpha$, increases from $f(\alpha)$ at $-\alpha$ to $f(\alpha)$ at α , and then decreases from $f(\alpha)$ at α to 0 at $+\infty$.

$$f(-\alpha) = -f(\alpha)$$

5) Calculons $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2 + 1)}{\alpha}$$

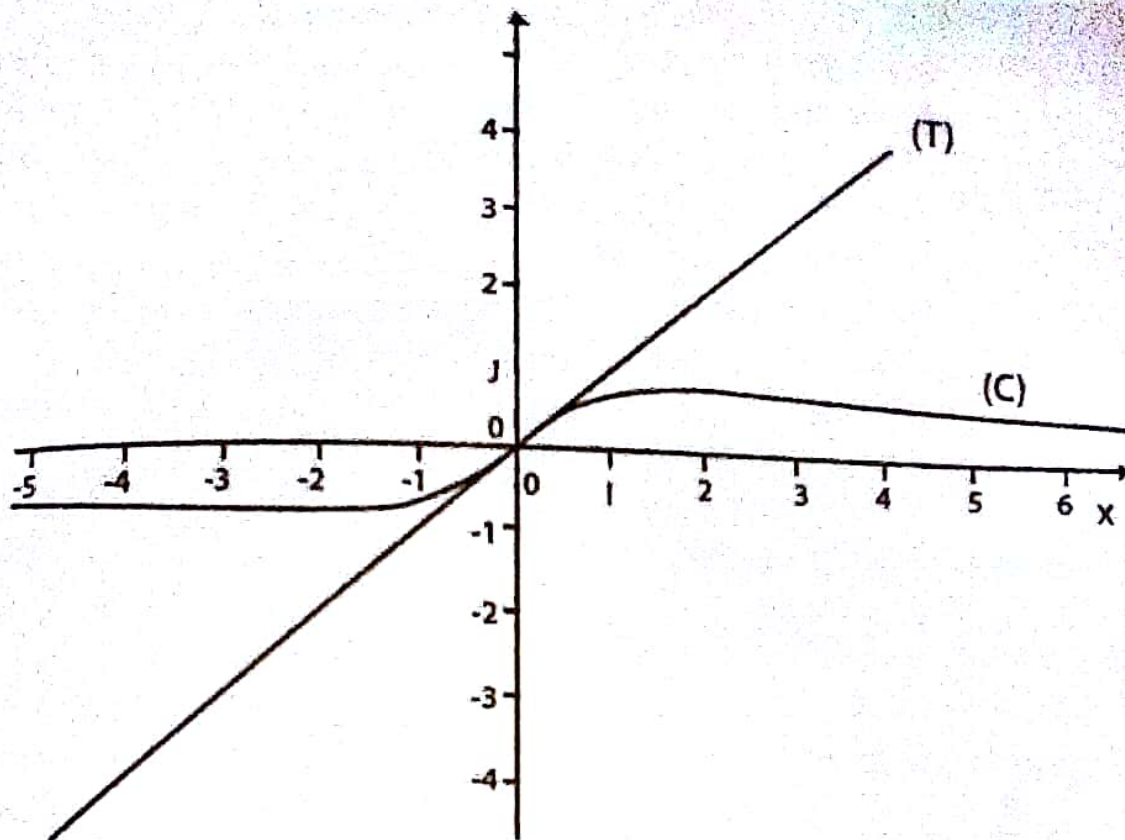
$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \ln(\alpha^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2 + 1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \text{ et } f(-\alpha) = -f(\alpha) \text{ car } f \text{ est impaire.}$$

4) Traçons (T) et (C)



Proposition de correction du problème N° 18

1) a) Ensemble de définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0, \text{ donc } Df = Dg = \mathbb{R}$$

b) calcul de limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

c) Calcul de limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{g(x)} = 0$$

Donc la droite $y = 0$ est asymptote horizontale à (cf) en $-\infty$.

d) Démontrons que (D) est asymptote à (Cf) en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote à (cf) en $+\infty$

2)a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{-1}{f(x)}$

$$g(x) \times f(x) = (x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x^2 - x^2 - 1$$

$$g(x) \times f(x) = -1$$

$$D'où g(x) = \frac{-1}{f(x)}$$

b) Calculons la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{f(x)} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Interprétons le résultat :

La droite d'équation : $y=0$ est asymptote à Cg en $+\infty$

3)a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})'$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

b) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

* $\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$

* $\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) \times g(x) = -1$ donc $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires

Or $\forall x \in]-\infty ; 0[; x < 0$ et $-\sqrt{x^2 + 1} < 0$ donc $g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$.
 Donc $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) > 0$. Conclusion $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

c) Dédoublons le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

4)a) Démontrons que f est une bijection

f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , donc f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $]0 ; +\infty[$

b) Equation de (T) et (T') : $(T) : y = x + 1$ et $(T)' : y = x - 1$

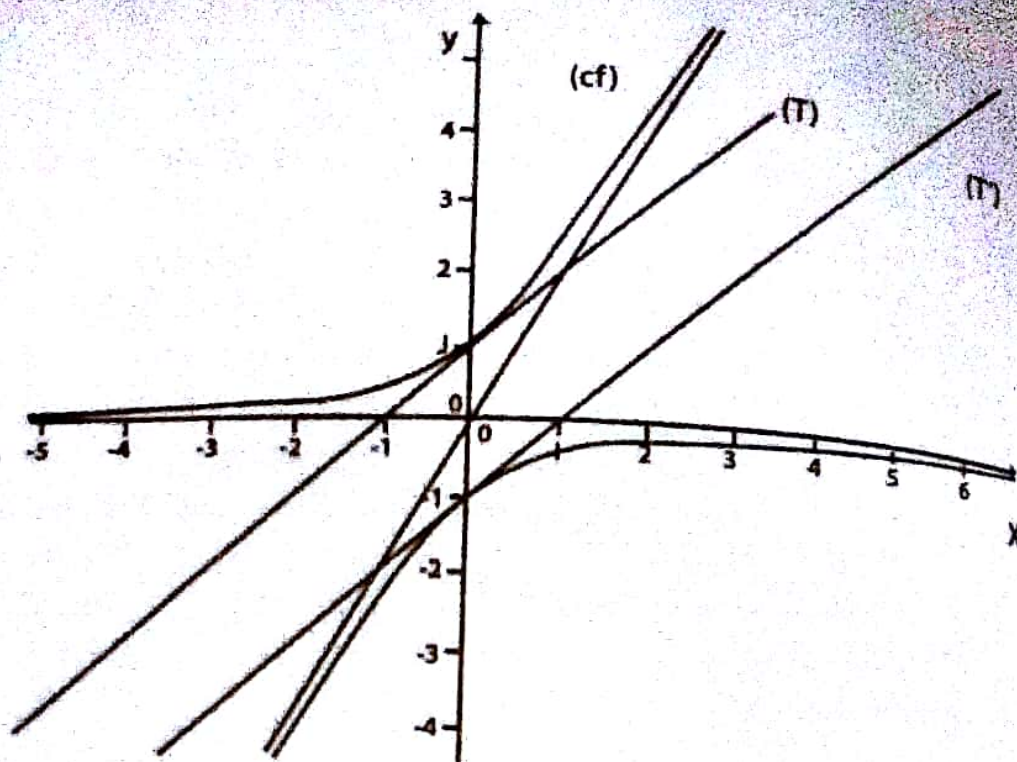
(T) et (T') ont le même coefficient directeur 1 donc (T) et (T') sont parallèles.

5)a) Démontrons.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$g(x) = -(-x + \sqrt{x^2 + 1}) ; g(x) = -f(-x)$ donc (cf) et (cg) sont symétriques par rapport à O .

e) Traçons (Cf) et (Cg)



N.B : La courbe (Cf^{-1}) s'obtient en faisant la symétrie de (Cf) par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Proposition de correction du problème N° 19

1) Calculons la dérivée de $f \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x - \sin x)'$
 $f'(x) = 2 - \cos x = 1 + (1 - \cos x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \cos x \geq 0$ (car $-1 \leq \cos x \leq 1$) donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2) Démontrons

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

d'après le théorème des gendarmes, de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3) Déterminons les points communs

$$M(x : y) \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow 2x - \sin x = 2x + 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(T') : y = f' \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \left(x + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \right) + f \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$= 2 \left(x + \frac{\pi}{2} - 2k\pi \right) + 2 \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + 1$$

$$(T') = (D') : y = 2x + 1 \text{ de même}$$

$$(T) = (D) : y = 2x - 1$$

4) Etudions la parité de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$$

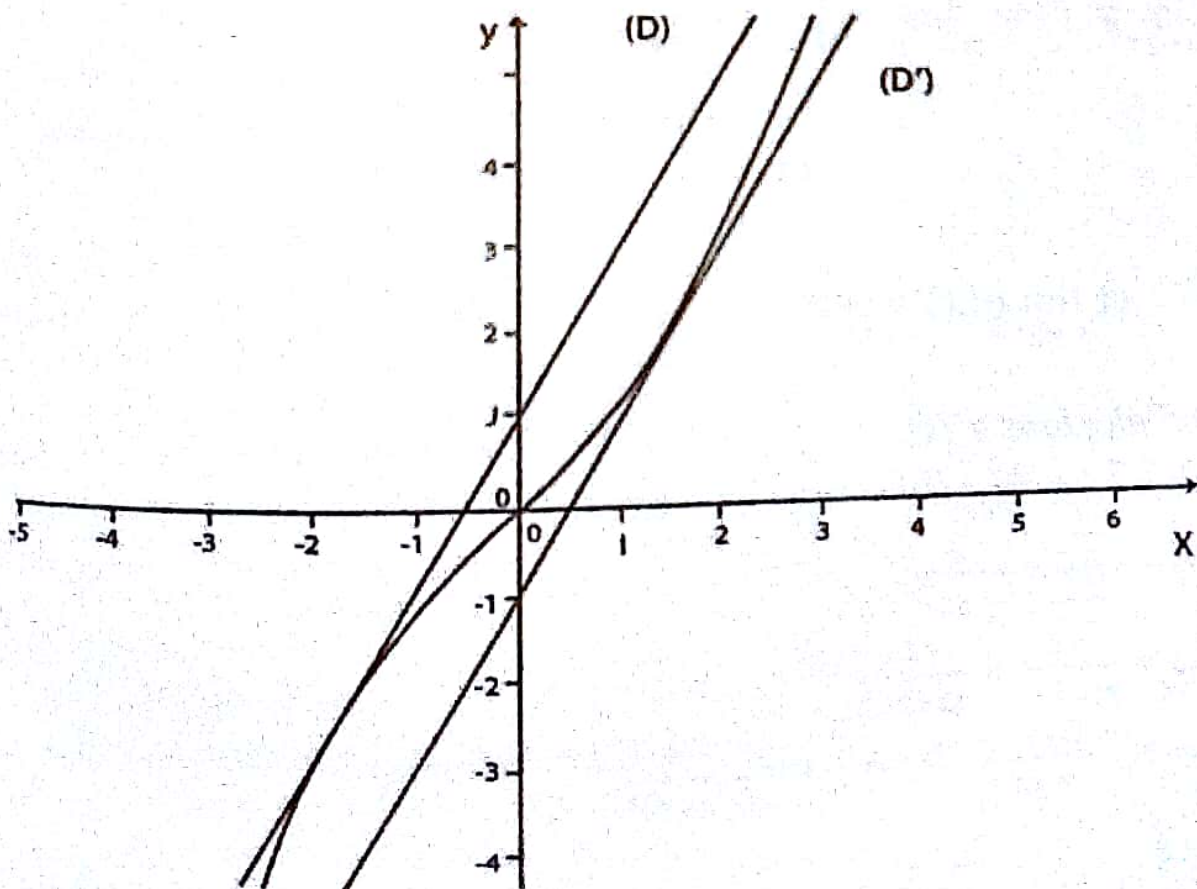
$$f(-x) = -2x - \sin(-x)$$

$$f(-x) = -2x - (-\sin(x))$$

$$f(-x) = -(2x - \sin x)$$

$f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire donc (C) admet le point O comme centre de symétrie.

5) Traçons (C) , (D) et (D') .



Proposition de correction du problème N°20

Partie A

1) Calculons les limites

$$DE =]-2, +\infty[\setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{2}{x+2} = -\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x+2}{x} \right| = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{2}{x+2} = 0 \text{ car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x+2}{x} \right| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{2}{x+2} = -\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} \left| \frac{x+2}{x} \right| = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{x+2} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

2)a) Calculons $g'(x)$

$$\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} + \frac{2}{(x+2)^2};$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2(x+2)+2x}{x(x+2)^2}; g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

b) Etudions le sens de variation de g

$\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\}, (x+2)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $\frac{-4}{x}$

$\forall x \in]-2; 0[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $] -2; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

D'où le tableau de variation de g

	2	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0

3)a) Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α .

Sur $] -2; 0[, g$ est continue et strictement croissante, donc g réalise une bijection de $] -2; 0[$ sur $g(]-2; 0[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in] -2; 0[$ mais $g(-0,44) \times g(-0,43) < 0$

Donc $0,44 < \alpha < 0,43$.

b) Déterminons le signe de g

D'après le tableau de variation $g(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$, sur $] -2; 0[$ g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$ donc $\forall x \in] -2; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Ainsi $\forall x \in] -2, \alpha[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; 0[\cup]0, +\infty[, g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$.

Partie B

1) a) Démontrons

$$DE =]-2; +\infty[\setminus \{0\}$$

$$\forall x \in DE, f(x) = x(\ln|x+2| - \ln|x|) \\ = x\ln|x+2| - x\ln|x|, \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0} x\ln|x+2| = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x\ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x\ln(-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\ln x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0

b) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x+2| - \ln|x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x+2| = \ln 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty \end{cases}$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

2) a) Calculons la limite

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x\ln|x+2| = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -2\ln 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$

b) Calculons la limite et interprétons les résultats.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = 2\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = +\infty$$

$$\text{avec } (X = \frac{2}{x})$$

Donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

3) a) Calculons $f'(x)$

$$\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\}$$

$$f(x) = \ln|x+2| - \ln|x| + x\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + \frac{x}{x+2} - 1$$

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2} = g(x)$$

b) Dédudons le sens de variation de f

D'après ce qui précède, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$, donc d'après A) 3) b) on a: $\forall x \in]-2; \alpha[f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-2; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha, 0[\cup]0, +\infty[f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

D'après tout ce qui précède, on a le tableau de variation de f

x	-2	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$ $	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	2	

c) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$

$$f(\alpha) = \alpha \ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right|$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right| - \frac{2}{\alpha+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{\alpha+2}{\alpha}\right| = \frac{2}{\alpha+2} \text{ donc } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$$

4) a) Déterminons les coordonnées de A

$$A(x, y) \in (C) \cap (OI) \Leftrightarrow y = f(x) \text{ et } y = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| = 0$$

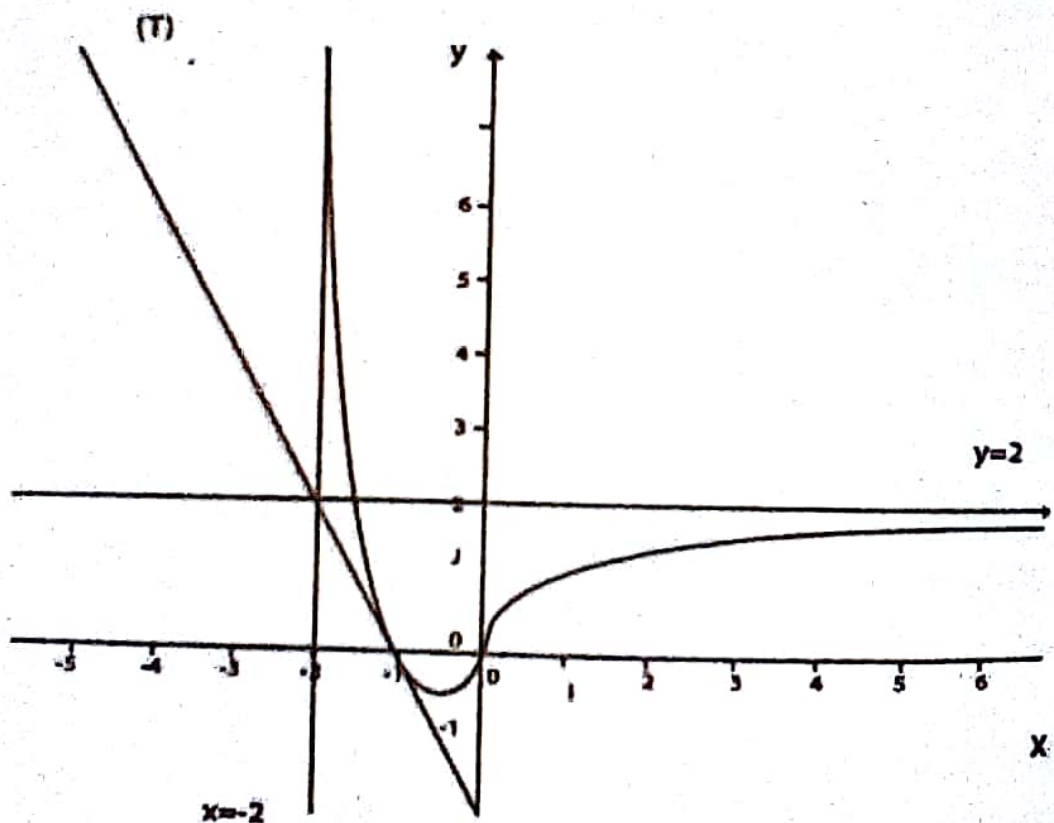
$$\ln \left| \frac{x+2}{x} \right| = 0 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 1 \text{ ou } \frac{x+2}{x} = -1 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ (impossible ou } x = -1 \text{ donc } A(-1; 0))$$

b) Déterminons une équation de (T)

$$(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) ; (T) : y = -2x - 2$$

5) Construisons (C) et (T)



Imprimé par l'Imprimerie des Editions Tadjji Renoua
Sise à Gounghin, Ouagadougou (Burkina Faso)
Tel : 78-59-46-77 | 70-53-63-16
Dépôt légal : 16-169 du 15-09-2016

TADJI



Agence Commercial de la
CARRIAGE PUMP RENOVA

à Casablanca

Tel: 70 50 40 77 / 70 50 63 16

RENOVA