COLLECTION

AVOMATHS

ANNALES

SECONDE C

- Résumés de cours
- Exercices corrigés

C

Les Classiques ivoiriens

Achat : Merc. 03 juin 2015
Librairie de france · plateau

4500 F

Collection AVOMATHS

MATHEMATIQUES

Seconde C

Par

BOUA PHILIPPE *Professeur certifié de mathématiques*

CIV 568

Les Classiques ivoiriens

10 B.P. 1034 Abidjan 10 • Tél : 21 56 50 63 • Fax : 21 36 56 57
info@classiquesivoiriens.com

Diomandé Ousmane

Remerciements

A tous mes collègues du Conseil d'Enseignement de Mathématiques du Lycée Scientifique de Yamoussoukro

Avant – propos

Avomaths Seconde C a été élaboré pour permettre aux élèves de cette série d'avoir un outil de travail leur permettant d'aborder les mathématiques du second cycle avec assurance.

Ce manuel contient de nombreux exercices d'application relatifs aux cours ainsi que des exercices d'approfondissement. Notre but est que l'apprenant puisse assimiler les définitions et les propriétés qui lui sont présentées. Il faut noter que les approches de même que les méthodes de résolution concernent essentiellement la classe de seconde scientifique.

Des notes de cours y sont également mises à la disposition de l'élève.

Les différents exercices sont tous corrigés de façon détaillée. Le but recherché est de présenter des modèles de rédaction.

Il est conseillé de ne pas se porter directement sur le corrigé de l'exercice à faire.

Aux enseignants de la matière nous proposons également ces travaux avec l'espoir de recevoir les critiques et suggestions de leur part.

Nous espérons que ce document comblera vos attentes.

L'auteur

SOMMAIRE

ÉNONCÉS

Ensemble des nombres réels

L'essentiel du cours sur l'ensemble des nombres réels

1. *Calcul dans l'ensemble des nombres réels.*

Soit a un nombre réel non nul. On a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{facteurs}}$.

De plus, si a est positif : $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$. et $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

2. *Ordre dans l'ensemble des nombres réels.*

Soit a et b deux nombres réels. On a : $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.

Si de plus a et b sont positifs, alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ ou $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Si a et b sont strictement positifs, alors : $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

3. *Valeur absolue d'un nombre réel.*

$|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$. On a également : $|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r$ si r est positif.

1

Calculer les nombres réels dans chacun des cas suivants.

1. a) $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ c) $\frac{7}{12} + \frac{5}{6}$ d) $\frac{8}{9} + \frac{1}{15}$

2. a) $\frac{7}{3} - \frac{4}{3}$ b) $-\frac{9}{11} + \frac{5}{8}$ c) $-\frac{3}{14} - \frac{5}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \frac{4}{9} - 5$.

2

Effectuer les nombres réels dans chacun des cas suivants.

1. a) $2 - \frac{7}{3} + \frac{4}{3}$ b) $-\frac{9}{4} + \frac{1}{5} + \frac{7}{2}$ c) $-\frac{7}{2} \times \frac{5}{9}(-\frac{1}{10})$ d) $\frac{10}{3} \times \frac{6}{15} \times \frac{9}{4}$.

1. a) $-\frac{7}{5} \times \frac{5}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{6} \times \frac{4}{5}$ b) $\dfrac{5 + \frac{1}{2}}{\frac{2}{7} + \frac{3}{2}}$ c) $\dfrac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{7}{4}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{2} - 1}{1 - \dfrac{3}{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}}}$.

3

Mettre les nombres réels suivants sous la forme 2^p où p un entier relatif.

1. a) $2^3 \times 2^4$ b) $2^7 \times 2^{-9}$ c) $2^{13} \times 2^{-7}$ d) $2^5 \times 128$.

2. a) $\frac{2^5}{2^3}$ b) $\frac{2^{10}}{2^{-3}}$ c) $\frac{2^{-2}}{64}$ d) $\frac{16384}{2^{11}}$.

4

Mettre les nombres réels suivants sous la forme $2^p \times 3^q$ où p et q sont des entiers relatifs.

1. a) $2^5 \times 81$ b) $(2 \times 3)^4$ c) 2×6^{10} d) 324.

2. a) $9^5 \times 2^3$ b) $(2 \times 3^5)^8$ c) $(2^{-4} \times 9)^3$ d) $(2^2 \times 24)^{-6}$

3. a) $\frac{2^5}{3}$ b) $\frac{2^9}{162}$ c) $\frac{36}{3^{-11}}$ d) $\frac{48 \times 2^5}{2^{-5} \times 3^4}$

5

Mettre les nombres réels suivants sous la forme de puissances de nombres premiers.

1. a) $2^2 \times 2^3 \times 3^7 \times 3 \times 5^4 \times 5^7$ b) $(-2)^6 \times 3^7 \times 5^4 \times 3^{-2} \times 5^3$ c) $-3^{10} \times 3 \times (-7)^3 \times 7^2$

2. a) $3^5 \times 30^2 \times 2^4$ b) $10^5 \times 9^4 \times 15^{-3}$ c) $(-6)^5 \times 12 \times (-45^2)$

3. a) $\frac{2^{10} \times 3^8 \times 5^{-4}}{3 \times 2^5 \times 5^3}$ b) $\frac{4^3 \times 3^{-4} \times 15}{6^{-1} \times 2 \times 5^2}$ c) $\frac{(-28)^7 \times 500}{3^2 \times 2^5 \times (-25)^{-3}}$

6

Mettre les nombres réels suivants sous la forme $a \times 10^k$ où a et k sont des entiers relatifs.

1. a) $0,3 \times 0,25$ b) $0,014 \times 1000000$ c) $18,7 \times 0,07$ d) $0,2 \times 400 \times 0,25$
2. a) $\dfrac{0,03}{0,005}$ b) $\dfrac{0,8 \times 800}{0,02 \times 0,016}$ c) $\dfrac{0,00012 \times 5000}{0,005 \times 20 \times 0,01}$ d) $\dfrac{2,4 \times 0,132}{0,5 \times 1,1 \times 0,012}$

7

Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1. Déterminer le signe de chacun des nombres réels dans chacun des cas suivants :

1. a) $2(x-1)$ b) $-3(x-1)$ c) $(1-x)x$. d) $(x-1)(x+2)$
2. a) $3x-2$ b) $(2x-1)(x-1)$ c) $(3x-2)(-2x+1)$ d) $-5(x-1)(x+4)$.
3. a) $\dfrac{x-1}{x}$ b) $\dfrac{1-x}{1+x}$ c) $\dfrac{x+4}{2x+3}$. d) $\dfrac{-x+3}{-2x-2}$
4. a) $(1-x)^2$ b) $x^2(4+x)$ c) $-3(x-1)^2$ d) $5(x-1)^2$

8

Soit x un nombre réel. Déterminer le signe des nombres réels suivants :

1. a) x^2+1 b) $4x^2+1$ c) $3(x^2+7)$ d) $5(4x^2+9)$
2. a) $-x^2-1$ b) $-3x^2-2$ c) $-(x^2+5)$ d) $-8(3x^2+17)$
3. a) $(x+1)^2+4$ b) $(1-x)^2+9$ c) $-4[(x-6)^2+10]$ d) $-(-x+1)^2-7$

9

Ecrire sans symboles de valeurs absolues chacun des nombres réels suivants :

1. a) $|5|$ b) $|-2|$ c) $|4+\sqrt{3}|$ d) $|-\sqrt{5}-\sqrt{8}|$
2. a) $|\sqrt{6}-\sqrt{2}|$ b) $|4-\sqrt{15}|$ c) $|2\sqrt{2}-3|$ d) $|2\sqrt{3}-\sqrt{11}|$

10

Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle [1;2] Ecrire sans symboles de valeurs absolues chacun des nombres réels suivants.

1. a) $|x-1|$ b) $|x-2|$ c) $|x+2|$ d) $|1-x|$.
2. a) $|4x|$ b) $|2x-2|$ c) $|-x+3|$ d) $|-3x+2|$.
3. a) $|(1-x)(x-2)|$ b) $|(-x+2)x|$ c) $|x^2-4|$ d) $|2-3x^2|$.

11

1. a) Justifier que : $2\sqrt{6}-5<0$.

b) Calculer $(2\sqrt{6}-5)^2$.

2. Déduire de ce qui précède une simplification de $\sqrt{49-20\sqrt{6}}$.

12

Soit un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1;\sqrt{2}]$. On pose : $A=\sqrt{(x\sqrt{2}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-2x)^2}$.

1. Justifier que : $x\sqrt{2}-1 \geq 0$ et $\sqrt{2}-2x \leq 0$
2. Ecrire A plus simplement.
3. Démontrer que $1-\sqrt{2} \leq A \leq -3+2\sqrt{2}$.
4. Déterminer éventuellement x dans chacun des cas suivants : a) $A=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $A=2$ c) $A=-\dfrac{1}{3}$.

13

Démontrer que si x est un nombre réel strictement positif alors $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$

14

Soit z un nombre réel strictement positif. Comparer $\sqrt{z+1}$ et $\sqrt{z}+1$.

15

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs.

1. Comparer : a) x^2+y^2 et $2xy$ b) x^2+y^2 et xy c) $x+y$ et $2\sqrt{xy}$ d) $\frac{1}{x+y}$ et $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.
2. Soit x et y deux nombres réels positifs tels que x strictement inférieur à y.

   Comparer : a) y^2-x^2 et $x-y$ b) $\frac{1}{y-x}$ et $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ c) $\sqrt{y-x}$ et $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

16

Soit s et t deux nombres réels non nuls et de même signe.

1. a) Démontrer que : $s^2+t^2-st=(s-\frac{t}{2})^2+\frac{3t^2}{4}$.

b) Démontrer que : $(s-\frac{t}{2})^2+\frac{3t^2}{4}>0$.

2. Comparer s^2+t^2 et st.

17

Soit m un nombre réel non nul.

1. Démontrer que : $m^2+\frac{2}{m}-3=\frac{(m-1)^2(m+2)}{m}$.
2. Comparer $m^2+\frac{2}{m}$ et 3 lorsque m est positif.

18

Soit x un nombre réel non nul.

1. Démontrer que : $\frac{1}{x}(x-1)^2(x+1)=x^2+\frac{1}{x}-(x+1)$.
2. Pour x réel strictement positif, comparer $x^2+\frac{1}{x}$ et $x+1$.

19

Soit x et y deux nombres réels strictement positif.

1. Démontrer que : $\frac{x+y}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=\frac{-(x+y)(x-y)^2}{2xy(x^2+y^2)}$
2. Comparer $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ et $\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

20

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b>a$.

1. Démontrer que : $\frac{2}{b-a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{-(a^2+b^2)}{(b-a)ab}$.
2. Comparer $\frac{2}{b-a}$ et $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

21

Soit a, b, c et d quatre nombres réels strictement positifs tels que : $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$.

1. Démontrer que : $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$.
2. Application. Justifier que : $\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

22

Soit a et b deux nombres réels.

1. Vérifier que : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2. Justifier que : $a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2$.
3. On suppose que : $a>b$. Comparer a^3 et b^3.
4. Application. Démontrer que : $(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^3<(5\sqrt{6}-7\sqrt{2})^3$.

23

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

1. a) Justifier que : $1 - a\sqrt{a} = (1 - \sqrt{a})(a + \sqrt{a} + 1)$.

b) Justifier que : $1 - a\sqrt{a} < 0$.

2. Démontrer que : $(a + \frac{1}{a}) - (\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}) = \frac{1}{a}(1 - a\sqrt{a})(1 - \sqrt{a})$.

3. Comparer $a + \frac{1}{a}$ et $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$.

24

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que les nombres réels $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sont inverses l'un de l'autre.

2. En déduire la valeur du nombre réel $A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$.

25

1. Pour un entier naturel n donné, comparer en le justifiant les nombres réels dans chacun des cas suivants :

a) 1 et $\frac{n+2}{n+1}$;   b) $\frac{n+1}{n+2}$ et $\frac{n+6}{n+3}$.

2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres réels suivants : 1, $\frac{n+1}{n+2}$ et $\frac{n+6}{n+3}$.

26

Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

1. Démontrer que : $\frac{x^2}{2} < \frac{1}{x+1}$. En déduire que : $\frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2. Démontrer que : $x - 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$.

3. Déduire de ce qui précède que : $x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

27

Soit x et y deux nombres réels non nuls tels que : $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

1. Justifier que : $|xy| < 1$. En déduire que : $1 + xy > 0$.

2. a) Démontrer que : $(1-x)(1-y) > 0$ et $(1+x)(1+y) > 0$.

b) Développer $(1-x)(1-y)$ et $(1+x)(1+y)$.

3. Démontrer que : $|x+y| < 1 + xy$. En déduire que : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

28

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8$.

1. Vérifier que : $1 + a + a^2 = 2$ et $a^3 = -2 + \sqrt{5}$.

2. a) Démontrer que : $b = (1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$

b) En déduire la valeur de b.

29

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

On veut démontrer que $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+4}$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{8}$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x,

$$-x^4 - 8x^2 + 64x - 80 = -(x-2)^2(x^2 + 4x + 20).$$

2. Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} = \frac{-x^4 - 8x^2 + 64x - 80}{64(x^2+4)^2}.$$

3. En déduire que pour tout nombre réel x positif, $\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} \leq 0$.

4. Conclure.

30

Soit l'ensemble $\mathcal{A} = \{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} ; n \in \mathbb{N}^* \}$.

1. Justifier que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à $\mathcal{A}$.
2. a) Justifier que : $(2\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{2}(\sqrt{n}+1))^2 = 2(\sqrt{n}-1)^2$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $2\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}(\sqrt{n}+1)$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est le minimum de $\mathcal{A}$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} < 1$.

31

1. Développer $(x-1)(x-2)$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{(x-1)(x-2)}{x}$.
3. Comparer $x + \frac{2}{x}$ et 3 dans chacun des cas suivants.

a) x appartient à l'intervalle $[1;2]$.

b) x est supérieur à 2.

4. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = n + \frac{2}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que 3 est le minimum de $\mathcal{A}$.

b) Soit a un entier naturel non nul et $M = a + \frac{2}{a}$ un élément de $\mathcal{A}$. Comparer M et $M' = a + 1 + \frac{2}{a+1}$.

$\mathcal{A}$. admet –il un majorant ? *On pourra effectuer un raisonnement par l'absurde.*

L'essentiel du cours sur les fonctions

1) *L'ensemble de définition d'une fonction*

C'est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble de départ qui admettent une image par cette fonction.

La détermination de l'ensemble de définition est basée sur les conditions d'existence de l'expression de la fonction.

2. *Variation d'une fonction.*

Un nombre réel M est dit maximum d'une fonction sur un ensemble E si :

Il existe un élément a de E tel que : $M = f(a)$ et pour tout nombre réel appartenant à E, on a :

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si pour tout u et v éléments de I on a : $u < v$ implique $f(u) \leq f(v)$.

Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si pour tout u et v éléments de I on a : $u < v$ implique $f(u) \geq f(v)$.

1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$. b) $f(x) = \frac{x}{3x-4}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{-2x+8}$
2. a) $f(x) = \frac{2x}{x+4} + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \frac{1}{-x}$ c) $f(x) = \frac{3}{x-4} + \frac{1-x}{x+7}$.
3. a) $f(x) = \frac{1-2x}{(8x+4)(x-1)}$ b) $f(x) = \frac{1}{x+4x^2}$ c) $f(x) = \frac{x}{4x^2-9}$
4. a) $f(x) = \sqrt{2x}$ b) $f(x) = \sqrt{1+3x}$ c) $f(x) = \sqrt{-2x-4}$
5. a) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{3x+4}$ c) $f(x) = \frac{x}{3x+2} + \sqrt{-1+4x}$
6. a) $f(x) = \sqrt{3+x} \times \sqrt{2+x}$ b) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2x}$ c) $f(x) = \sqrt{2(1-x)} + \sqrt{x+4}$

7. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ b) $f(x) = \frac{x}{2-\sqrt{x}}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{1-3\sqrt{x}}$

8. a) $f(x) = \frac{x}{4-\sqrt{3x}}$ b) $f(x) = \frac{x}{3-\sqrt{x+1}}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{4-\sqrt{2-x}}$

2

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$ b) $f(x) = \frac{x}{|x-2|}$ c) $f(x) = \frac{2x}{|-4x+3|}$

2. a) $f(x) = \frac{2}{|x|-1}$ b) $f(x) = \frac{x}{|x+1|-4}$ c) $f(x) = \frac{2x}{|4-x|-1}$

3. a) $f(x) = \frac{x+1}{|2x|}$ b) $f(x) = \frac{1-x}{|2x|-2}$ c) $f(x) = \frac{x}{|3x+1|-5}$

4. a) $f(x) = \frac{x+1}{4|x|}$ b) $f(x) = \frac{x}{3|x|-2}$ c) $f(x) = \frac{2x}{3|1-x|-6}$

5. a) $f(x) = \frac{x+1}{|x(x-1)|}$ b) $f(x) = \frac{x}{|x^2-3x|}$ c) $f(x) = \frac{2x}{|4x^2-9|}$

6. a) $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|\times|x-2|}$ b) $f(x) = \frac{1}{|x-3|} + \frac{x}{|x+3|}$ c) $f(x) = \frac{2}{|x|-1} - \frac{1}{x-1}$

7. a) $f(x) = \frac{x+1}{|x|+2}$ b) $f(x) = \frac{x}{3|x|+4}$ c) $f(x) = \frac{2x}{|x^2+1|}$

3

Démontrer que les fonctions f et g sont égales sur l'ensemble K indiqué.

1. a) $f(x) = |x|$, $g(x) = x$ et $K = \mathbb{R}_+$ b) $f(x) = (|x|)^2$, $g(x) = x^2$ et $K = \mathbb{R}$.

2. a) $f(x) = (\sqrt{x})^2$, $g(x) = x$ et $K = \mathbb{R}_+$ b) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = -x$ et $K = \mathbb{R}_-$.

4

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas ci-dessous.

1. a) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ et $K = \mathbb{R}^*$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $K = \mathbb{R}_+^*$.

2. a) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x-1}$, $g(x) = x-1$ et $K =]-\infty; 1[$. b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ et $K =]2; +\infty[$.

5

Soit f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = 3x + 7$, $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x+1} - 6$.

Calculer les images par f, g et h de chacun des nombres réels suivants : -1, 2 et $\frac{4}{9}$.

6

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x + \sqrt{5})^2 - 4$.

Calculer les images par f de chacun des nombres réels suivants : $0, -\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$ et 7.

7

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2x}-3}$.

Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(\frac{3}{2})$.

8

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = x^2 - x + 1$ b) $f(x) = x(x+1) - 4$ c) $f(x) = -3x^2 + x + 5$.

2. a) $f(x) = (x+1)(x-2)$ b) $f(x) = 13 - (x+1)^2$ c) $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2 + 1$.

3. a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{8}{x+1} - \frac{4x}{3}$ c) $f(x) = \frac{7-2x}{1+2x}$.

9

Déterminer l'antécédent de chacun des nombres -1 et 6 par la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = 2x + 5$. b) $f(x) = -4x + 9$ c) $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{7}{3}$.

2. a) $f(x) = \frac{5}{2-x}$, $x \neq 2$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$; c) $f(x) = \frac{-x}{5x+4}$, $x \neq -\frac{4}{5}$.

10

Déterminer le (s) antécédent(s) de 0 et 9 par la fonction f dans chacun des cas qui suivent.

1. a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 13 - x^2$ c) $f(x) = (\frac{x}{3})^2 - 4$.

2. a) $f(x) = \sqrt{5+x}$; b) $f(x) = \sqrt{17-2x}$; c) $f(x) = -4 + \sqrt{x-2}$,

3. a) $f(x) = |x+8|$ b) $f(x) = 6|2x-5|$ c) $f(x) = \left|\frac{x}{x+2}\right|$,

11

1. Soit x un nombre réel.

 a) Calculer $(x-1)^2 + x^2$.

 b) Vérifier que : $2x^2 - 2x + 1 = 2[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$.

2. On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (x-1)^2}$.

 a) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

 b) Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(\frac{4}{3})$.

 c) Déterminer les antécédents éventuels par f de : 0 et $\frac{4}{13}$.

12

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{2}(3 - x) + 4$ dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Indiquer ceux d'entre les points qui appartiennent à $(\mathcal{C})$: $A(-4; -10)$, $B(-1;0)$, $C(1;5)$, $E(3;4)$, $D(0;2)$.

13

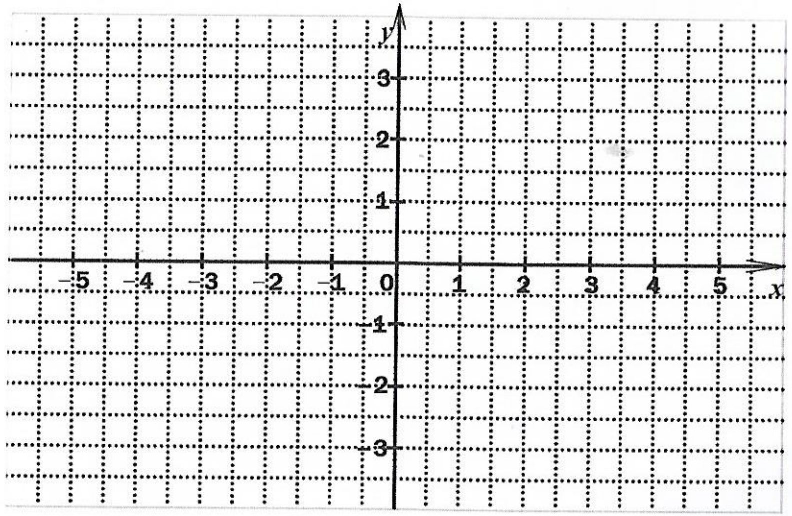
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$. par : $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J).

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$.

2. Remplir le tableau suivant. *On donnera les résultats à 10^{-2} près.*

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	– 0,5	– 0,25	0
f(x)								

3. Placer dans le repère ci –dessous les coordonnées des points obtenus ainsi que leurs symétriques par rapport à O. *On prendra 1 centimètre pour unité graphique.*



14

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, $(3x-5)^2 - 4 = 9x^2 - 30x + 21$.

2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x}{9x^2 - 30x + 21}$.

Démontrer que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{1 ; \frac{7}{3}\}$.

15

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \dfrac{x}{|1+x| + |1-x|}$.

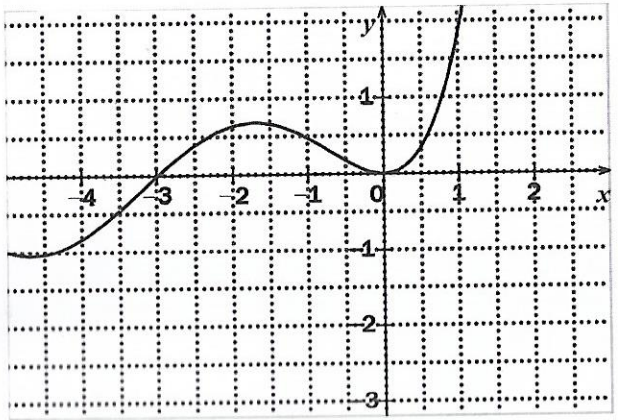
1. Démontrer que pour tout nombre réel, $|1+x| + |1-x| \geq 2$.

2. En déduire l'ensemble de définition de h.

3. Calculer $h(\frac{1}{2})$ et $h(1-\sqrt{2})$.

16

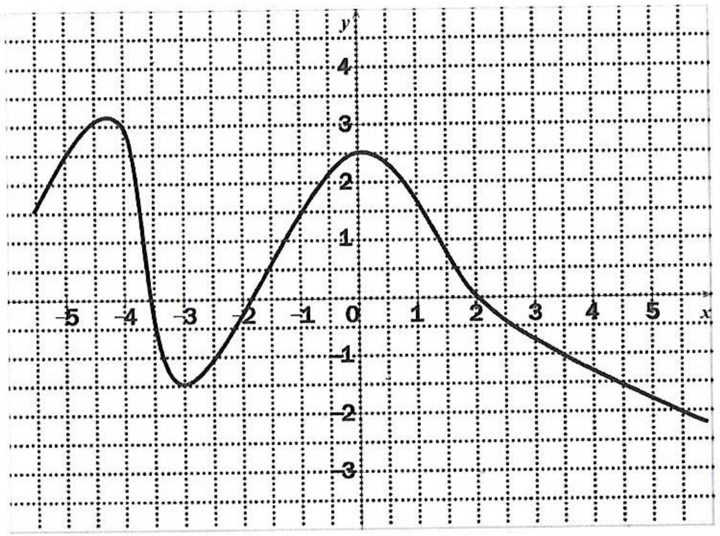
On donne ci –dessous la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère.



Donner les images par f des nombres réels –4,5 ; – 3 ; – 1 ; 0 et 1.

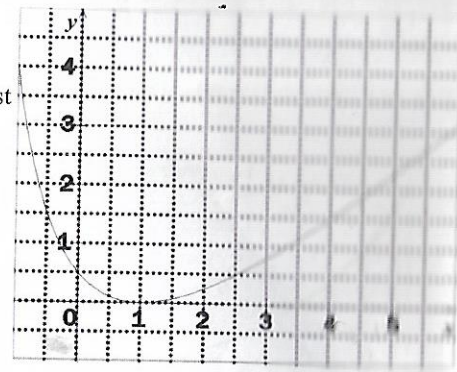
17

Lire à partir du graphique f(– 5,5), f(– 4), f(– 3), f(0), f(1),f(2), f(3,5) et f(5,5) où f est la fonction présentée ci –dessous.



18

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$. Sa courbe est représentée ci –contre.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Lire les images par f de – 1 ; –0,5; 0 ; 2 ; 4 et 5.
3. Calculer f(– 0,5); f(2) et f(5).

19

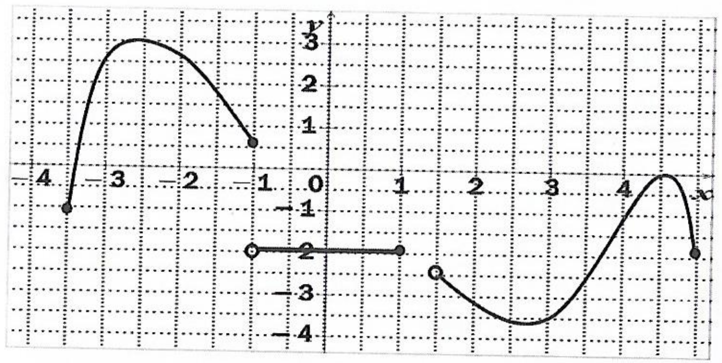
La courbe ($\mathcal{C}$) représentée ci –dessous est celle d'une fonction f à variable réelle.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. a) Retrouver graphiquement $f(-3,5)$, $f(-2,5)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(5)$.

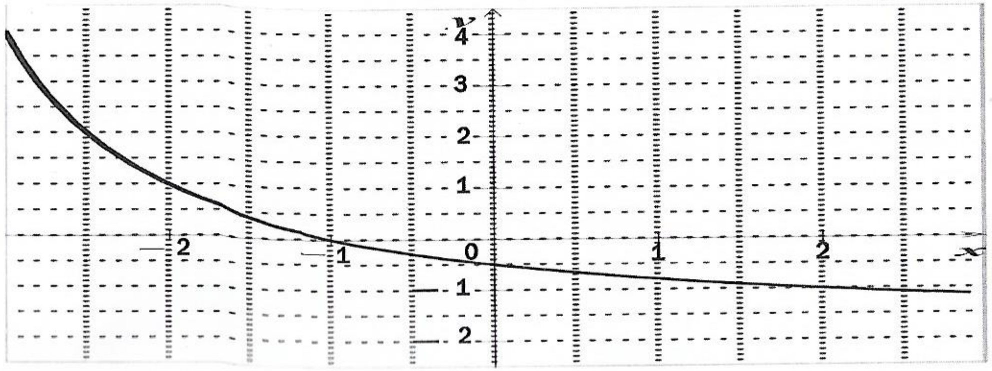
b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(-3)$, $f(-1,5)$ et $f(3)$.

3. Les points M(–3,5;–1), N(–3;–2,5), P(–1;–1), Q(0;–2), R(2;–4) et S(4,5;0) appartiennent- ils à ($\mathcal{C}$) ?



20

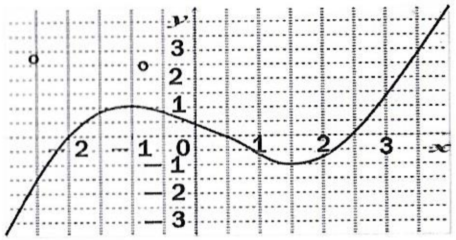
Donner à l'aide de la courbe d'une fonction g représentée ci-dessous les antécédents de -1, 0, 1, 2 et 4.



21

La courbe ci – contre est celle d'une fonction g.

Donner le(s) antécédent(s) par g des nombres réels suivants: $-3{,}5$; -1 ; 0 ; 1 ; 3 et $4{,}5$.



22

Déterminer l'image directe de l'intervalle I dans chacun des cas suivants.

1. a) $f(x) = 2x + 5$ et $I = [0;1]$; b) $f(x) = -7x + 3$ et $I = [2;10]$; c) $f(x) = \dfrac{x+4}{5}$ et $I = [-1;6]$.

2. a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $I = [-4;-1]$; b) $f(x) = \dfrac{12}{8-x}$ et $I =]2;5]$; c) $f(x) = \dfrac{10}{2x+13} - 1$ et $I = [-3;2[$

23

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants.

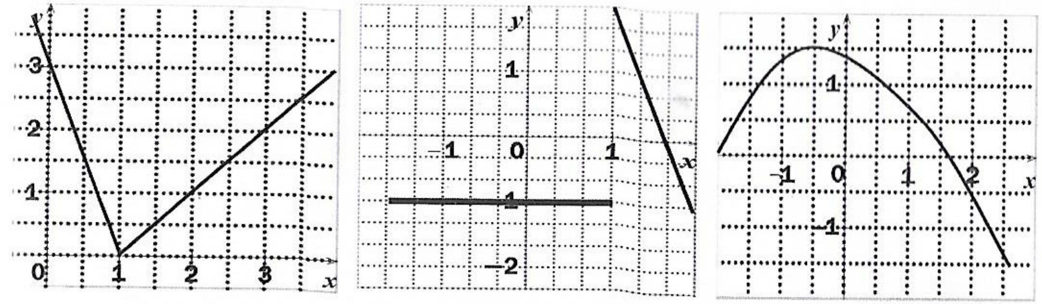
1. a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $I = [0;16]$; b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $I = [-1;6]$; c) $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ et $I = [9;25]$.

2. a) $f(x) = x^2$ et $I =]1;2[$; b) $f(x) = (x-1)^2$ et $I = [3;5]$; c) $f(x) = 7 - (x+5)^2$ et $I = [-9;-5]$.

24

Déterminer les images directes de $[0;2]$ dans chacun des cas de figure ci-dessous.

a) b) c)

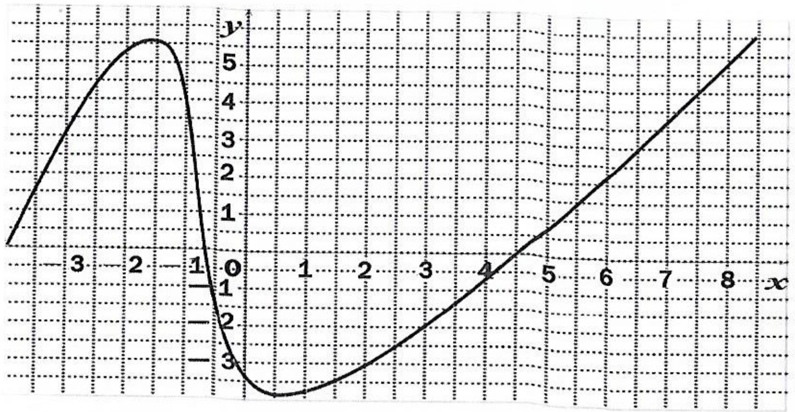


25

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Déterminer les images directes de $[0;2]$ par f de chacun des intervalles suivants :

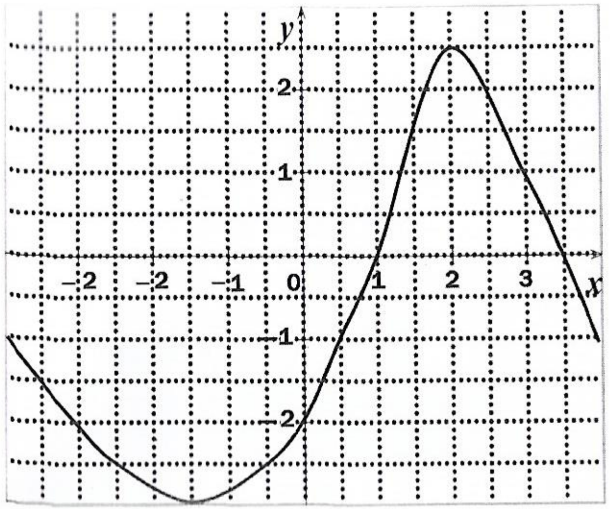
$[-4;-2{,}5]$, $[-2{,}5;-1]$, $[-1;0[$, $[0;4{,}5]$ et $]0{,}5;7{,}5[$.



26

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Déterminer les images réciproques de $[-3;-2]$, $[-2;-1[$, $[0;2{,}5]$, $\{-1\}$ et $\{0\}$.
2. En déduire celle de $[-3;-2] \cup [0;2{,}5]$.



27

Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = x + 9$ et $I = [8;12]$; b) $f(x) = -x + 3$ et $I = [-2;0]$; c) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ et $I = [1;4]$.

2. a) $f(x) = \frac{-3}{x+1}, x \neq -1$ et $I = [2;5]$; b) $f(x) = \frac{8}{5x}, x \neq 0$ et $I =]1;6]$; c) $f(x) = \frac{2}{x-3}, x \neq 3$ et $I =]-2;-1[$.

28

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $I = [1;5]$; b) $f(x) = \sqrt{12x}$ et $I = [2;3]$; c) $f(x) = \sqrt{3(1-2x)}$ et $I = [4;2\sqrt{5}]$.

2. a) $f(x) = x^2$ et $I = [3;4]$; b) $f(x) = \frac{25x^2}{9}$ et $I = [0;6]$; c) $f(x) = (\frac{x+5}{7})^2$ et $I = [-1;18]$.

29

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

1. a) $f(x) = 2x + 8$; $K = \mathbb{R}$ b) $f(x) = -13x + 7$; $K = \mathbb{R}$ c) $f(x) = \frac{5x+11}{8}$; $K = \mathbb{R}$.
2. a) $f(x) = 7x^2$; $K = \mathbb{R}_+$ b) $f(x) = (2x+1)^2$; $K = [-\frac{1}{2};+\infty[$ c) $f(x) = -3(x-7)^2$; $K = [7;+\infty[$.
3. a) $f(x) = \frac{2}{3x}$; $K = \mathbb{R}_-^*$ b) $f(x) = \frac{-2}{x+1} + 5$; $K =]-\infty;-1[$ c) $f(x) = \frac{1}{3(x-2)}$; $K =]2;+\infty[$.
4. a) $f(x) = \sqrt{2x}$; $K = \mathbb{R}_+$ b) $f(x) = 4 - \sqrt{6x+6}$; $K = [-1;+\infty[$ c) $f(x) = \sqrt{-4x+8} + 1$; $K =]-\infty;2]$
5. a) $f(x) = \frac{5}{x^2}$; $K = \mathbb{R}_+^*$ b) $f(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$; $K =]-1;+\infty[$ c) $f(x) = \frac{10}{(4x-12)^2}$; $K =]-\infty;3[$

30

Soit f une fonction définie sur $[-4;6]$. Dresser le tableau de variation de f dans les conditions présentées dans chacun des cas suivants.

a) f strictement croissante $[-4;6]$, $f(-4) = 2$ et $f(6) = 9$.

b) f est strictement croissante sur $[-4;1]$, f est strictement décroissante sur $[1;6]$, $f(-4) = 2$, $f(1) = 3$ et $f(6) = -8$.

c) f est strictement décroissante sur $[-4;0]$, f est strictement croissante sur $[0;3]$, f est strictement décroissante sur $[3;6]$, $f(-4) = 15$, $f(0) = -1$, $f(1) = 4$ et $f(6) = 1$.

31

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Comparer $f(-5)$ et $f(3)$ dans chacun des cas suivants.

a) f strictement croissante $[-5;3]$; b) f est strictement décroissante sur $[-5;3]$.

2. x est un élément de $[0;7]$ et f est strictement croissante sur $[0;7]$. On donne : $f(0) = 1$ et $f(7) = 6$.
Comparer : a) $f(x)$ et 1 b) $f(x)$ et 6.

32

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans chacun des cas suivants.

a) f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 0$.

b) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(-2) = 0$.

33

Ci –dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$	-4		5		13
f(x)	↗	0	↗	16	↘	1

1. En déduire le sens de variation de la f sur $]-\infty;13]$.
2. Soit x un élément de l'intervalle $[-4;5]$. Comparer a) $f(x)$ et 16; b) $f(x)$ et 0;
3. Determiner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

34

A l'aide du tableau de variation de l'exercice précédent,

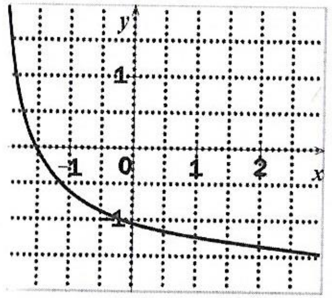
1. Comparer a) $f(-5)$ et $f(1)$ b) $f(6)$ et $f(8)$.
2. Déterminer le maximum de f.

35

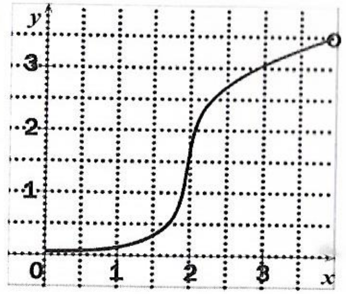
1. Déterminer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction h représentée dans chacun des cas ci –dessous.

2. Préciser les extrémums de h.

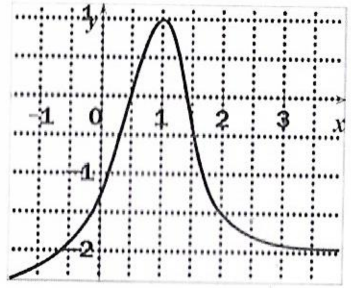
a)



b)



c)



36

Indiquer si possible le maximum ainsi que le minimum de la fonction g en considérant le tableau de variation dans chacun des cas suivants.

a)

x	2		7
g(x)	5	↗	9

b)

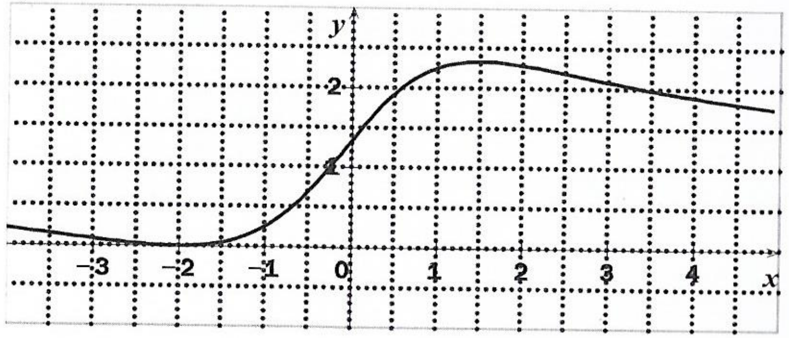
x	−1		6		17
g(x)	14	↘	3	↗	10

c)

x	0		8
g(x)	3	↘	−2

37

Soit k une fonction représentée ci –dessous.



1. Donner l'ensemble de définition de k.
2. Déterminer le sens de variation de k.
3. On donne : $k(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+3}$. Calculer $k(-4)$, $k(\frac{3}{2})$ et $k(5)$.
4. Indiquer les extrémums de k.
5. Dresser le tableau de variation de k.

38

Déterminer le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

1. a) $f(x) = (x+1)^2$ b) $f(x) = (x-4)^2 + 7$ c) $f(x) = 3x^2 + 10$.
2. a) $f(x) = |x-2| + 9$ b) $f(x) = |5-2x| + 13$ c) $f(x) = \dfrac{-21}{|x-2|+15}$.

39

Démontrer que la fonction f admet un maximum sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants.

1. a) $f(x) = -\sqrt{x+3}$ b) $f(x) = 5 - 2\sqrt{14-7x}$ c) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+4}}$.
2. a) $f(x) = \dfrac{10}{x^2+8}$ b) $f(x) = \dfrac{6}{|x-1|+3}$ c) $f(x) = -\sqrt{|x+3|+24}$.

40

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants.

1. a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$; $K =]0;+\infty[$ b) $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$; $K =]-\infty;0[$.
2. a) $f(x) = \sqrt{x-1} + x$; $K = [1;+\infty[$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5} + \sqrt{-2x}$; $K =]-\infty;0[$.
3. a) $f(x) = \sqrt{x-4} - \dfrac{1}{x-4}$; $K =]4;+\infty[$ b) $f(x) = (x-1)^2 - 3x$; $K =]-\infty;1[$.

41

On désigne par f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

1. Soit a et b deux nombres réels. Vérifier que : $f(b) - f(a) = (b-a)(b+a-2)$.
2. En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

42

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{4x-5}$.

1. Soit u et v deux nombres réels différents de $\frac{5}{4}$. Vérifier que : $f(v) - f(u) = \dfrac{-19(v-u)}{(4u-5)(4v-5)}$.
2. En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty;\frac{5}{4}[$ et sur $]\frac{5}{4};+\infty[$.

43

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -4x^2 + 32x - 4$.

1. Justifier que pour tout nombre réel x, $g(x) = -4(x-4)^2 + 60$.
2. En déduire que g est strictement croissante sur $]-\infty;4]$ et strictement décroissante sur $[4;+\infty[$.

44

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Justifier que pour tout nombre réel x élément de $[0;4[$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$.
3. Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0;4[$.

45

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{-2x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Justifier que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(-2x+3)}$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]\frac{3}{2};+\infty[$.

46

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$.

1. a) Vérifier que pour tout nombre réel x, $2x^2-3x-5=(x+1)(2x-5)$.

   b) Factoriser x^2-x-2.

   c) En déduire que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$.
2. Justifier que pour tout nombre réel x différent de -1 et 2, $g(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$.
3. Déterminer un nombre réel a positif et un nombre réel b négatif tels que :

   $g(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.
4. Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.
5. Démontrer que : $g(\frac{1}{3}+\sqrt{3}) < g(3-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Polynômes et fractions rationnelles

L'essentiel du cours sur les polynômes et fraction rationnelle

1. Définition d'un polynôme

Un polynôme est une somme de monômes (expression de la forme ax^n où x est une variable et n un entier naturel).

2. Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme. Un nombre α est appelé racine d'un polynôme si $P(\alpha) = 0$.

3. Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme est l'exposant de la plus puissance de x de la forme devéloppée et ré

Le degré du produit de deux polynôme est la somme des degré de ces polynômes.

4. Factorisation d'un polynôme.

Un polynôme est dite factorisé lorsqu'il s'écrit comme produit de polynômes de degré supérieur ou égaux à 1.

1

Ecrire le polynôme P sous forme développée réduite et rangée suivant les puissances décroissantes de x dans chacun des cas suivants.

1. $P(x) = x(x+2)+3(x-1)$
2. $P(x) = x(2x+5)+7(x-4)$.
3. $P(x) = x(1-x)-5(x+2)$
4. $P(x) = -2x(4-5x)-3(-x+4)$.

2

Reprendre l'exercice précédent dans les cas suivants

1. $P(x) = (x+1)^2+(x-1)^2$
2. $P(x) = 3(x+1)^2-(x-2)^2$
3. $P(x) = (3x+1)^2-(x+4)^2$
4. $P(x) = (x+1)^3+5(x-4)^2$
5. $P(x) = (x+2)^3-(x-4)^3$

3

Donner le degré du polynôme P dans chacun des cas suivants.

1. a) $P(x) = x^2 + 10x - 7$ b) $P(x) = -2x^8 + x^2 + 1$ c) $P(x) = 5x - x^3 + x - 2$.
2. a) $P(x) = (x+1)^2 - (x-2)^2$ b) $P(x) = x^3(1+x) - 2x^4 + x$ c) $P(x) = x(1-x)^2 - x(x^2+4)$
3. a) $P(x) = (3x^2 - x + 1)(x^5 + 4)$ b) $P(x) = (x^6 - x + 2)^3$ c) $P(x) = (x^4 + 9x)^3(-x+5)^6$

4

n est un entier naturel compris entre 3 et 7. Déterminer le degré de chacun des polynômes P, Q, R et S suivants : $P(x) = 5x^2 - 4x^n + 1$, $Q(x) = (x^n + 1)^2 + x^4$, $R(x) = (x^n + x^{12})x^3 - 9x^{15} + x^{11}$,

$S(x) = x^{3n+2} + 6x^{8n} - 4x^{17}$.

5

1. Développer $(x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3)$
2. Pour tout nombre réel x, on pose : $P(x) = \dfrac{x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 6x^2}{x^2+3}$.

Démontrer que P est un polynôme dont on précisera le degré.

6

On pose : $Q(x) = (\sqrt{x^2+1} + x)^3 - (\sqrt{x^2+1} - x)^3$.

1. Vérifier que pour tous nombres réel a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
2. Démontrer que Q est un polynôme de degré 3.

7

Vérifier que 1 est une racine du polynôme P dans chacun des cas suivants.

1. $P(x) = x^2 + 3x - 4$
2. $P(x) = 5x^4 - 3(x+1)^2 + 7$.
3. $P(x) = x^3(1 - \sqrt{2}) + 2x\sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})$
4. $P(x) = (x^2 - 2) - 6(x+1)^2 + (2x+3)^2$.

8

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$.

Reconnaître parmi les nombres $1, -1, 0, \frac{3}{2}$ et -4 ceux qui sont racines du polynôme P.

9

Déterminer dans chacun des cas suivants le nombre réel a pour que α soit racine du polynôme P.

1. $P(x) = ax^2 + 3x - 4$; $\alpha = 1$
2. $P(x) = x^4 - 5x^2 + ax + 2$; $\alpha = -3$.
3. $P(x) = 12x^3 - 4x + a$; $\alpha = \frac{1}{2}$
4. $P(x) = 3x^4 - ax^2 + 6$; $\alpha = \sqrt{2}$.

10

Factoriser le polynôme P dans chacun des cas ci-dessous.

1. a) $P(x) = (x+1)^2 + 3(x+1)$ b) $P(x) = 4(x+3)^2 + x^2 - 9$ c) $P(x) = 2x(x-1) + 1 - x^2$
2. a) $P(x) = (3x-2)^2 - (x+4)^2$ b) $P(x) = 25 - 9x^2$ c) $P(x) = 16(x-1)^2 - x^2$
3. a) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$ c) $P(x) = 4x^2 - 12x + 9$
4. a) $P(x) = 25 - x^2 - x(x+5)$ b) $P(x) = (x+2)(1-x)^2 - x^2 + 1$

11

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants

1. a) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ b) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
c) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
2. a) $P(x) = (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 + 3 \times 2x - 1$ b) $P(x) = 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$
c) $P(x) = 125 + 225x + 135x^2 + 9x^3$.
3. a) $P(x) = x^3 - 1$ b) $P(x) = x^3 + 1$
c) $P(x) = 8 - x^3$ d) $P(x) = 27 - 64x^3$.
4. a) $P(x) = (1 - x^3) + (x - 1)^2 - 2 + 2x^2$ b) $P(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3 + x(x - 1)^2$
c) $P(x) = 512 - (x + 1)^3 + 196 - 4x^3$.

12

Mettre sous forme canonique chacun des polynômes suivants.

1. a) $P(x) = x^2 + 4x + 1$ b) $P(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $P(x) = x^2 + 2x + 5$.
2. a) $P(x) = x^2 + 3x - 1$ b) $P(x) = x^2 - 5x + 8$ c) $P(x) = x^2 - 11x + 30$.
3. a) $P(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ b) $P(x) = x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{7}{4}$ c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{48}$.

13

Reprendre l'exercice précédent pour chacun des cas suivants.

1. a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 8$ b) $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ c) $P(x) = -x^2 + x - 8$
2. a) $P(x) = 6x^2 + 4x + 12$ b) $P(x) = 12x^2 - 18x + 15$ c) $P(x) = -10x^2 + 20x - 5$
3. a) $P(x) = 6(x - 1)^2 - 12$ b) $P(x) = (1 - x)^2 + 15$ c) $P(x) = (4x - 16)^2 + 5$

14

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^4 - x^2 + 4x - 4$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-2)$.

2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (x - 1)(x + 2)Q(x)$

15

Soit le polynôme P du second degré tel que : $P(0) = -2$, $P(1) = 0$ et $P(-1) = 2$.

1. Justifier que P est factorisable.
2. Ecrire P sous sa forme développée et rangée suivant les puissances décroissantes de x.
3. Mettre P sous forme canonique.
4. Factoriser P.
5. Déterminer le signe de P.

16

Déterminer le signe du polynôme P dans chacun des cas suivants.

1. a) $P(x) = 2x$ b) $P(x) = 2x - 4$ c) $P(x) = -3x - 2$ d) $P(x) = 8 - 6x$.
2. a) $P(x) = (x + 1)(x - 2)$ b) $P(x) = x(2x - 1)$ c) $P(x) = -x(2x + 4)$ d) $P(x) = (1 - x)(4 - 2x)$.
3. a) $P(x) = x^2$ b) $P(x) = (x + 1)^2$ c) $P(x) = -x^2$ d) $P(x) = -3(1 - x)^2$.
4. a) $P(x) = x^2(x - 2)$ b) $P(x) = (2 - x)(9x + 3)(4x + 8)$ c) $P(x) = (x + 3)^2(4x + 12)$
5. a) $P(x) = x(x + 1)(x - 2)$ b) $P(x) = (2 - x)(3x - 1)(4x + 3$ c) $P(x) = (1 - 2x)(3 + x)(-4 - 3x)$.

17

Déterminer l'ensemble de définition puis, le signe de la fraction rationnelle F dans chacun des cas suivants.

1. a) $F(x) = \frac{x-3}{x+1}$ b) $F(x) = \frac{3x}{1-x}$ c) $F(x) = \frac{1 + 3x}{x}$ d) $F(x) = \frac{-3}{2x - 4}$
2. a) $F(x) = \frac{-x(x+2)}{3(x-1)}$ b) $F(x) = \frac{9x-12}{(2x-4)(5x+15)}$ c) $F(x) = \frac{(x-5)^2}{3-x}$ d) $F(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$
3. a) $F(x) = \frac{2x(x+5)}{(x-1)(4x+7)}$ b) $F(x) = \frac{(2x-6)(1+3x)}{(-2x+4)(5x+3)}$ c) $F(x) = \frac{(1-x)^2(2x+1)}{-2(x+1)}$ d) $F(x) = \frac{10-4x}{x^2(5x+6)}$

18

Déterminer les nombres réels a et b dans chacun cas suivants.

1. a) $\frac{x+1}{x} = a + \frac{b}{x}$ b) $\frac{x-1}{x} = a + \frac{b}{x}$ c) $\frac{2x}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}$.

2. a) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ b) $\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2}$ c) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$

3. a) $\frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x}$ b) $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$ c) $\frac{4x-1}{2x^2+x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2x+3}$

19

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants et factoriser P.

1. a) $P(x) = x^2 + x - 2$ et $Q(x) = x - 1$ b) $P(x) = 3x^2 - x - 4$ et $Q(x) = x + 1$

 c) $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $Q(x) = x - 3$.

2. a) $P(x) = 2x^2 + 11x - 6$ et $Q(x) = 4x - 2$. b) $P(x) = -3x^2 - 7x + 40$ et $Q(x) = -\frac{3}{2}x + 4$

 c) $P(x) = -4x^2 + 25x - 6$ et $Q(x) = 8x - 2$.

3. a) $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ et $Q(x) = x - 1$ b) $P(x) = 2x^3 - x - 3$ et $Q(x) = x - 1$

 c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 - x - 2$ et $Q(x) = 3x - 2$.

4. a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 4$ et $Q(x) = x + 2$

 b) $P(x) = 12x^3 - 26x^2 + 18x - 4$ et $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ c) $P(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ et $Q(x) = 2x - 1$

20

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = -x^4 - 2x^3 + x + 2$.

1. Calculer P(1) et P(− 2).
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$.
3. Justifier que pour tout nombre réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.
4. Factoriser P.

21

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 4(x-1)^2 - (x+1)^2$

1. a) Développer, réduire et ordonner P suivant les puissances décroissantes de x
 b) Mettre P sous forme canonique.

2. a) Calculer $P(\frac{1}{3})$.
 b) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(x) = (3x - 1)Q(x)$.

3. On désigne par F la fraction rationnelle définie par : $F(x) = \frac{3x^2 - 10x + 3}{-x^2 + 4x - 3}$.
 a) Développer $(1 - x)(x - 3)$.
 b) En déduire l'ensemble de définition de F.
 c) Simplifier F.

4. Déterminer le signe F(x) suivant les valeurs de x.

5. a) Démontrer que $\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ appartient à l'intervalle $]\frac{1}{3} ; 1[$.
 b) En déduire sans calcul le signe $F(\sqrt{3} - \frac{4}{3})$.

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

L'essentiel du cours sur les équations et les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. *Solution d'une équation ou d'une inéquation*

Soit l'équation (E) : $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions. Un nombre α est solution de (E) (ou vérifie (E)) si $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Soit l'inéquation (I) : $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des fonctions. Un nombre α est solution de (I) (ou vérifie (E)) si $f(\alpha) \leq g(\alpha)$.

La résolution d'une équation *ou d'une inéquation* est la mise en œuvre d'une succession d'étapes conduisant à la détermination de toutes les solutions.

Une équation peut se résoudre soit par la méthode d'implications soit par la méthode des équivalences.

Tandis qu'une inéquation se résout uniquement par la méthode des équivalences.

La détermination des contraintes sur l'inconnue est basée sur les conditions d'existences des expressions des fonctions présentées dans les membres de l'égalité ou de l'inégalité.

1

Pour tout nombre réel x, on pose : $A(x) = x^2 - x + 1$ et $B(x) = 2x + 11$.

1. Calculer $A(-2)$, $A(0)$ et $A(5)$ ainsi que $B(-2)$, $B(0)$ et $B(5)$.
2. En déduire lesquels d'entre les nombres -2, 0 et 5 vérifient l'équation $A(x) = B(x)$.

2

Lesquels d'entre les nombres réels 0, 1 et 4 sont solutions de :

a) (E) : $(x+2)(1-x) = 2(x-1)^2$

b) (I) : $(x-2)(2x-3) \leq x^2 + 4$.

3

Vérifier que les nombres réels -3, 1 et 2 sont les solutions de l'équation (F): $x^3 = 7x - 6$.

4

Vérifier que $\frac{1}{2}$ est solution de chacune des équations (E) : $\sqrt{x^2+2} = x + 1$ et (E') : $\frac{x+1}{x} = \frac{3}{2x}$.

5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations dans chacun des cas suivants.

1. a) $(x+2)(x-3) = 0$ b) $(x-6)^2 = 0$ c) $5x(6x-14) = 0$.
2. a) $(x+5) - x(x+5) = 0$ b) $(x-1)^2 - 7(1-x) = 0$ c) $(2x+1)^2 - 9 = 0$.

6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. a) $(x+4)(x-7) \geq 0$ b) $(2-5x)(6x-12) > 0$ c) $(x+10)^2 \leq 0$
2. a) $\frac{x-5}{x} < 0$ b) $\frac{-x+1}{x+3} \leq 0$ c) $\frac{x(x+2)}{4-x} > 0$

7

Reprendre l'exercice 5 dans chacun des cas suivants.

1. a) $x^2 + 4x + 3 = 0$. b) $x^2 + 8x + 17 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$.
2. a) $4x^2 = 10x + 6$ b) $2x(x+4) = 1$ c) $(9x-8)(1-6x) - 5 = 0$.

8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations dans chacun des cas suivants.

1. a) $(3x+2)(x-3) < 4$ b) $(2-5x)(6x-4) \geq 3x - 1$ c) $(2x+1)^2 - 8x > 0$

2\. a) $\dfrac{x^2-5x}{x-1} \geq -3$ b) $\dfrac{x+4}{x-2}-\dfrac{2}{x-1} \leq 0$ c) $\dfrac{x+1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{x^2} > 0$

9

Préciser les contraintes sur l'inconnue x de chacun des équations dans chacun des cas suivants.

1\. a) $\dfrac{x+2}{x} = 5$ b) $\dfrac{2}{x(x-1)} = -3x$ c) $\dfrac{1}{4(x+3)-x(x+3)} = x+2.$

2\. a) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+3} = 7x$ b) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{1}{x(x+1)} = 3$ c) $\dfrac{2}{(x-3)(x+4)} = \dfrac{1}{(11-x)(x-8)}$

10

Reprendre l'exercice précédent dans chacun des cas suivants.

1\. a) $\sqrt{x} = 1$ b) $\sqrt{3x-6}+4 = 0$ c) $\sqrt{4-x} = x+2.$

2\. a) $\dfrac{x}{\sqrt{x+3}} = x-2$ b) $\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6} = \dfrac{x}{2}$ c) $\sqrt{x-1} = \dfrac{x}{x-2}.$

11

Démontrer que les équations (E) et (F) sont équivalentes dans $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

1\. a) (E): $x(x+1) = (x+1)^2$ et (F): $x+1 = 0$ b) (E): $x^2-6x = -9$ et (F): $x = 3$.

2\. a) (E): $(x+1)^2 = (x-1)^2$ et (F): $x = 0$ b) (F): $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ et (F): $(x-1)^2 = 0.$

12

Démontrer que les équations (E) et (E') sont équivalentes dans $]1;+\infty[$ dans chacun des cas suivants.

1\. a) (E): $\dfrac{x}{x+1} = 4$ et (E'): $3x = -4$ b) (E): $\dfrac{4}{x-1} = 2x$ et (F): $x^2 = x+2.$

2\. a) (E): $\dfrac{2x-1}{x} = x$ et (E'): $x = 1$ b) (E): $\dfrac{x+1}{x-1} = x+2$ et (E'): $\dfrac{2}{1-x} = x-1.$

13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ par implications les équations dans chacun des cas suivants.

1\. a) $\dfrac{20}{x} = 5x$ b) $\dfrac{2}{x-1} = 3$ c) $\dfrac{x}{x-3} = x-4.$

2\. a) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x}$ b) $\sqrt{4-x} = x-2$ c) $\sqrt{\dfrac{x}{2}+3} = \dfrac{x}{4}.$

14

1\. Vérifier que pout tout nombre réel x, $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2.$

2\. Résoudre par implication l'équation (E) : $\sqrt{x+3} = \dfrac{2}{x}.$

15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1\. a) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{x}{4}-\dfrac{1-x}{3}$ (E) b) $4x^2+(x-1)x+(x-5)(x+1) = 2(1-3x)$ (F)

2\. a) $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{(x-1)}{x+1}$ (G) b) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{(x+1)(x+2)+x-1}{x^2} = 0$ (H).

16

Résoudre par équivalence dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x+1}{x^2-4}.$

17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations dans chacun des cas suivants.

1\. a) $|3x-5| = x$ b) $|x+7| = 5x+2$ c) $|2-x| = 4x+1.$

2\. a) $|3x|+|x+2| = 8$ b) $|x+3|-|2x-1| = x$ (E) c) $|4-x|+6x|x-1| = 4$ (E').

18

Résoudre par équivalences dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

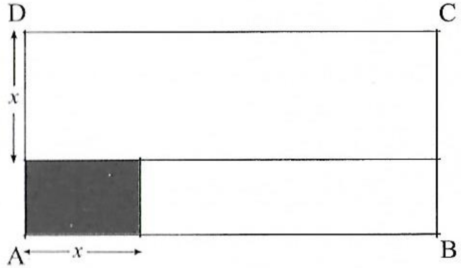
a) $|3x-5| = x$ b) $|x-3| = x^2+1$ c) $|1-x| = (x+2)(x+3)$ (E).

19

Résoudre par implication dans $\mathbb{R}$ l'équation (F) : $\left|\frac{x+2}{x}\right| = 3x$.

20

L'unité est le centimètre.



ABCD est un rectangle tel que : AB = 8 et AD = 4.

x est un nombre réel strictement positif.

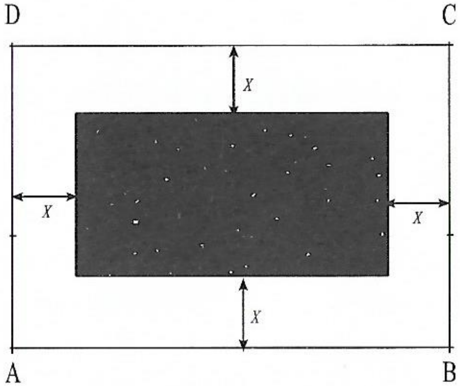
1. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie noircie.

2. Déterminer x dans chacun des cas suivants.

a) $\mathcal{A} = 4$ b) $\mathcal{A} = 3$ c) $\mathcal{A} \geq 2$.

3. a) Justifier que : $\mathcal{A} = 4-(x-2)^2$ b) En déduire la valeur maximale de $\mathcal{A}$.

21



L'unité est le centimètre.

Le rectangle ABCD a pour dimensions :

AB = 10 et AD = 6

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie noircie.

1. Déterminer les valeurs possibles de x.

2. Démontrer que : $\mathcal{A}(x) = 4x^2 - 32x + 60$.

3. a) Mettre $\mathcal{A}(x)$ sous forme canonique.

b) Déterminer x dans chacun des cas suivants : $\mathcal{A}(x) = 12$, $\mathcal{A}(x) = 32$ et $\mathcal{A}(x) = 16$.

Etudes de fonctions

L'essentiel du cours sur les études de fonctions

1. Fonction affines par intervalles.

Une fonction affine par intervalles est une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalle et sur chacun de ces intervalles cette fonction coïncide avec une fonction affine.

2. Sens de variations de fonctions élémentaires.

La fonction inverse $(x \mapsto \frac{1}{x})$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Par contre, la fonction cube $(x \mapsto x^3)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1

Soit f la fonction affine définie par : $f(x) = 5x + 2$.

Calculer les images par f de chacun des nombres – 1, 0 et 6.

2

Le plan est munit d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité 1 cm.

On considère les fonctions affines f et g définies respectivement par : $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -4x + 3$.

Représenter graphiquement f et g.

3

Représenter graphiquement la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = -4x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4

Déterminer la fonction affine f dans chacun des cas suivants.

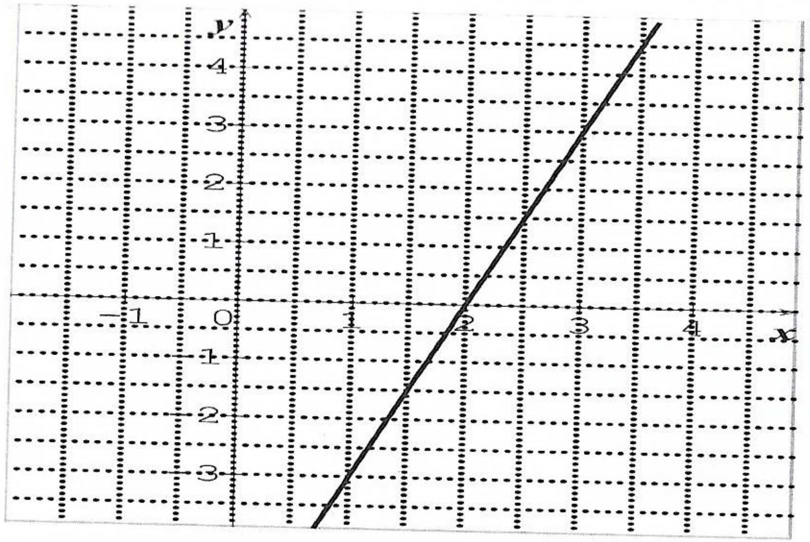
a) $f(1) = -2$ et $f(5) = 0$ b) $f(0) = 0$ et $f(6) = 18$ c) $f(3) = f(5) = -9$

5

Ci-dessous se trouve la courbe représentative (C) d'une fonction affine f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

1. Résoudre graphiquement a) $f(x) = -3$ b) $f(x) \le 0$ c) $f(x) > \frac{9}{2}$.

2. Retrouver la formule explicite de f.



6

Calculer les images des nombres -2, 6 et 8 par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ f(x) = 5x + 9 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ f(x) = 2x - 4 & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} \text{pour } -8 \le x < 2, & f(x) = -3x + 5 \\ \text{pour } 2 \le x \le 3, & f(x) = x + 1 \\ \text{pour } 3 < x \le 11, & f(x) = 2x - 7 \end{cases}$

Déterminer les antécédents éventuels de 0 et 4 par f.

8

Dire si f est une fonction affine par intervalles dans chacun des cas suivants.

a) $\begin{cases} f(x) = 2x + 3 & \text{si } x \le -2 \\ f(x) = 5x + 9 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ f(x) = 2x - 7 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ f(x) = 7\sqrt{x} + 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = -x + 1 & \text{si } x \in [-6; -3 \\ f(x) = 5x + 9 & \text{si } x \in]-3; 0[\\ f(x) = 2x - 7 & \text{si } x \in [0; +\infty[. \end{cases}$

9

1. On désigne par f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } -5 \le x < 1 \\ f(x) = (x+1)^2 - x^2 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ f(x) = 9 & \text{si } 4 \le x \le 10 \end{cases}$

Démontrer que f est une fonction affine par intervalles.

2. Reprendre la question 1) pour chacune des fonctions g, h, k et j suivantes.

$\begin{cases} g(x) = |x + 1| & \text{si } x \le -1 \\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$; $\begin{cases} h(x) = (1-x)x + (x-1)(x+4) & \text{si } x \le 0 \\ h(x) = \sqrt{(2x+6)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$;

$k(x) = \max(3x + 2; x + 4)$; $j(x) = 2\min(-3x + 9; 2x + 5) + 13$.

On rappelle que : $\min(f(x), g(x)) = f(x)$ si $f(x) \le g(x)$; $\max(f(x), g(x)) = f(x)$ si $f(x) \ge g(x)$.

10

Représenter graphiquement les fonctions f, g, h, k et j de l'exercice 9).

11

Démontrer que la fonction m définie par : $m(x) = x - E(x)$ lorsque x est élément de $[-2; 3[$ est une fonction affine par intervalles.

On rappelle que : pour tout nombre réel x, $E(x) = n$ si $x \in [n; n+1[$ où n est un entier relatif.

12

Reprendre l'exercice 11) pour chacune des fonctions p et q telles que :

$p(x) = (4 - x)E(x); x \in [-1; 2[$ et $q(x) = xE(x+1) - 3; x \in [2; 4,5]$.

13

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in [-5; 1[, & f(x) = |x+3| - x \\ \forall x \in [1; 7[, & f(x) = -x + 4. \end{cases}$

1. Démontrer que f est une fonction affine par intervalles.

2. Calculer les images par f de -5, 1 et $\frac{8}{3}$.

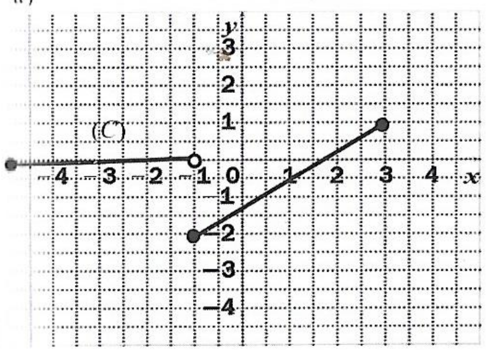
14

Démontrer que la fonction f définie par : $f(x) = 6|x+1| - |4x+8|$ est une fonction affine par intervalles.

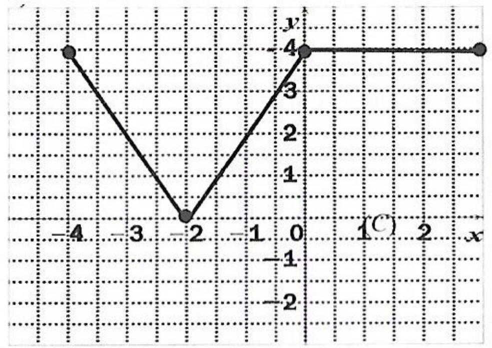
15

Dans chacun des cas ci– dessous se trouve la courbe représentative (C) d'une fonction affine par intervalles

a)



b)



Déterminer dans chaque cas l'expression de f(x) suivant les valeurs de x.

16

Dans chacun des cas ci –dessous le tableau de variation est celui d'une fonction affine par intervalles f.

a)

x	-8		-2		7
f(x)	6	↘	3	↗	12

b)

x	1		4		5		9
f (x)	-4	↗	2	↘	0	↗	6

Expliciter dans chacun des cas, f(x) suivant les valeurs de x.

17

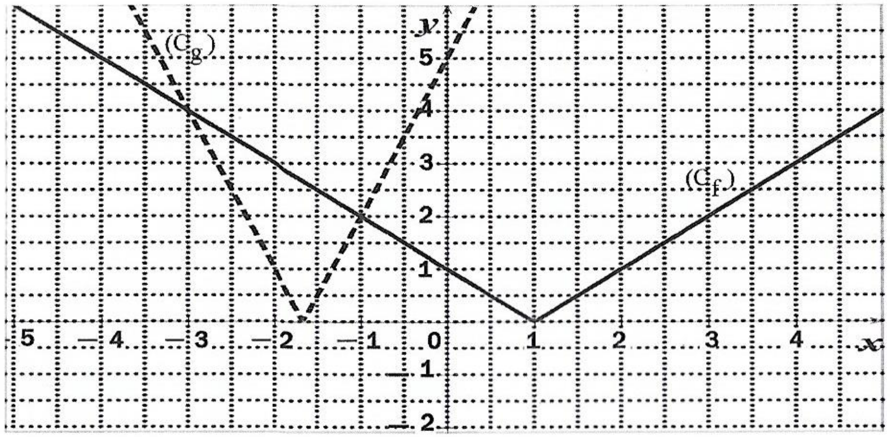
On considère la fonction affine f définie par : $\begin{cases} f(x) = -x+5 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 4. \end{cases}$

1. Donner le sens de variation de f.

2. Dresser le tableau de variation de f.

18

Ci- dessous sont représentées graphiquement les courbes des fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-1|$ et $g(x) = |3x+5|$.



1. Résoudre graphiquement les équations suivantes dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = g(x)$ b) $f(x) = 3x + 5$ c) $g(x) = 1 - x$.

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes dans chacun des cas suivants

a) $f(x) \leq g(x)$ b) $f(x) > 3x + 5$ c) $g(x) < 1 - x$.

19

On considère les fonctions f et g définies sur $[-3; 5]$ par : $f(x) = |3x - 4|$ et $g(x) = |x - 2|$.

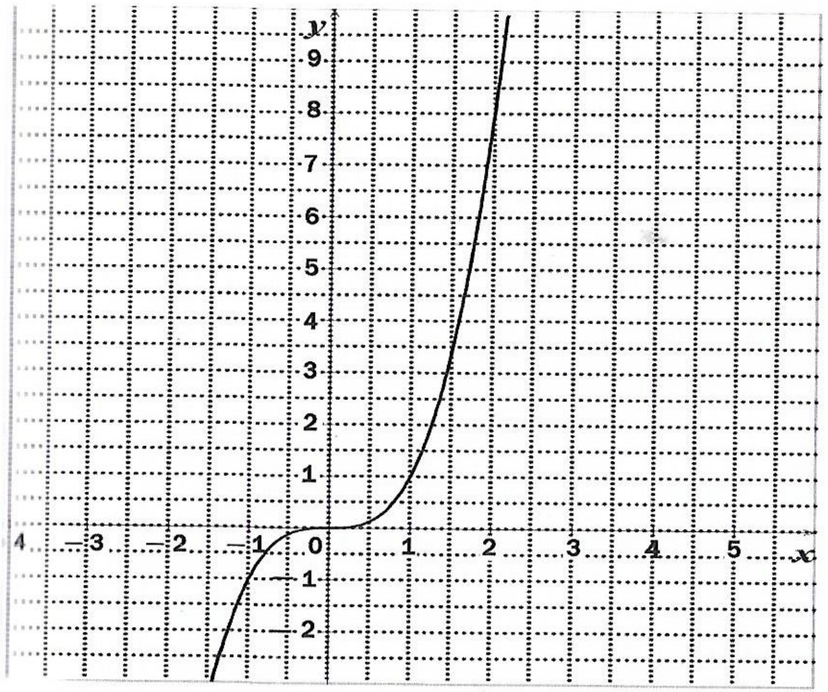
1. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un repère orthonormé (O, I, J).

Unité graphique : 1cm.

2. Résoudre graphiquement : a) $f(x) = g(x)$ b) $g(x) = 4$ c) $f(x) \leq g(x)$.

20

(C) est la courbe présentative de la fonction cube sur l'intervalle $[-2; 2]$.



Résoudre graphiquement les équations et inéquations dans chacun des cas suivants.

a) $x^3 + x - 2 = 0$ b) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Indication : On représentera avec soin dans le graphique les droites d'équations $y = -x+2$ et $y = 3x+2$.

21

1. Donner le sens de variation de la fonction f définie par : $f(x) = x^3$.

2. On désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+2)^3 - 10$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction h.

b) Dresser le tableau de variation de h sur l'intervalle $[-1; 2]$.

22

On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Donner le sens de variation de la fonction h.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction k définie par : $k(x) = \frac{1}{4x-6} + 12$.

23

On désigne par f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. a) Vérifier que pour tout nombre réel u et v, $f(v) - f(u) = (v-u)(v^2 + uv + u^2 - 3)$.

On rappelle que : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$, $]-1; 1]$ et $[1; +\infty[$.

2. a) Vérifier que pour tous nombres réels x, $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$.

b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

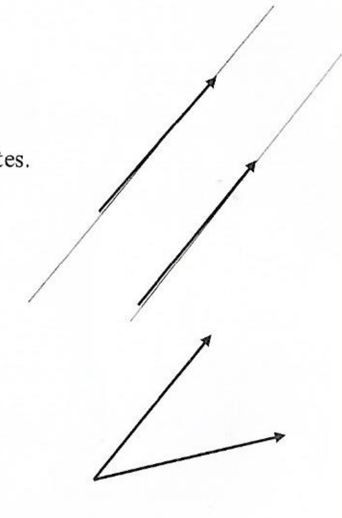
c) Déduire de la question 1b) le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]2; +\infty[$.

3. a) Déterminer le signe de la fonction f sur $]-1; 2[$.

b) En déduire le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]-1; 1]$ et $[1; 2[$.

Vecteurs et points du plan

L'essentiel du cours sur les vecteurs du plan.



1. Vecteurs colinéaires.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans chacune des situations suivantes.

Si l'un d'entre eux est nul

S'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Si leur déterminant dans une base est nul.

2. Base de l'ensemble des vecteurs.

Un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

3. Repère du plan.

(O, I, J) est un repère du plan si le couple $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base.

4. Coordonnées d'un point

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le point M a pour couple de coordonnées (x,y) si $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

5. Norme d'un vecteur.

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme de $\vec{u}$ est $||\vec{u}|| = AB$

Si $\vec{u}(a,b)$ dans une base orthonormée alors $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2}$.

1

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ dans chacun des cas suivants

1. a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ c) $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

2. a) $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ b) $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{BM}$ c) $3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

3. a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AM}$ c) $\frac{5}{2}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.

2

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan.

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ de $\overrightarrow{BC}$ dans chacun des cas suivants.

1. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$.

2. a) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{CA}$.

3. a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{AM} = \frac{11}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC})$ c) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

3

A, B et C sont trois points du plan.

Déterminer le point G dans chacun des cas suivants.

1. a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. a) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{AC}$ c) $-3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

4

Soit ABC un triangle et M le point du plan tel que : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{CM}$.

1. Démontrer que : $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$
2. Construire le point M.

5

Soit A, B, et C trois points non alignés du plan. Démontrer que les points A, I et J sont alignés.

1. a) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2. a) $\overrightarrow{JI} = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{BA} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AC}$.

6

Soit ABCD un parallélogramme.

On désigne par M et N les points du plan tels que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

1. Construire les points M et N.
2. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.

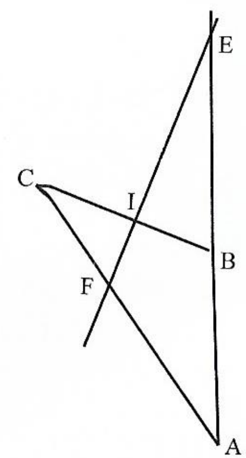
7

Soit EFG un triangle et les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$, $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{NE}$ et $\overrightarrow{FP} = 3\overrightarrow{GP}$.

1. Construire les points M, N et P.
2. Démontrer les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{FE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$. et $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{5}{6}\overrightarrow{EG}$.
3. En déduire que les points M, N et P sont alignés.

8



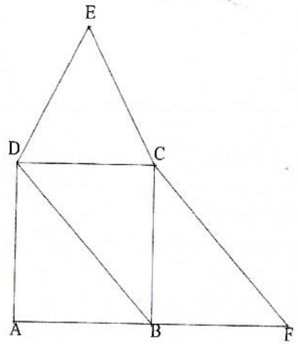
Soit ABC un triangle. On note I le milieu de [BC], E le symétrique de A

par rapport à B et F le point tel que : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Démontrer que : $\overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{FI}$.
2. En déduire la position relative des points I, E et F.
3. La droite (AI) coupe le segment [CE] au point K.

Exprimer $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{CE}$

9

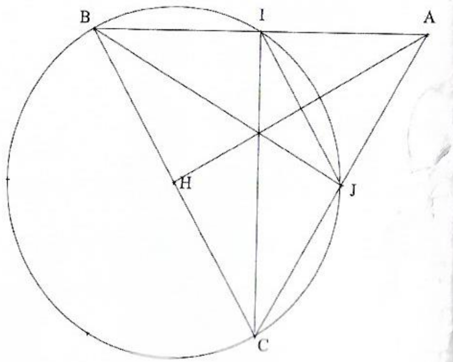


ABD est un triangle rectangle isocèle en A de coté 1;
C est le symétrique de A par rapport à (BD) ;
DEC est équilatéral; DBFC est un parallélogramme.
Parmi les vecteurs suivants, reconnaître ceux qui sont unitaires : $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CF}$, et $\overrightarrow{BF}$.

10

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a.
On note H le pied de la hauteur issue de A.

1. Exprimer AH en fonction de a.
2. Déterminer a pour que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur unitaire.
3. On suppose que a est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Le cercle de centre H passant par le point B recoupe les segments [AB] et [AC] respectivement en I et J. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont unitaires.



11

Soit ABCD un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

12

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ de chacun des cas suivants dans chacune d[e]s bases $(\vec{i}+\vec{j}, \vec{j})$ et $(2\vec{j}, \vec{j}-\vec{i})$.

a) $\vec{u} = \vec{i}$

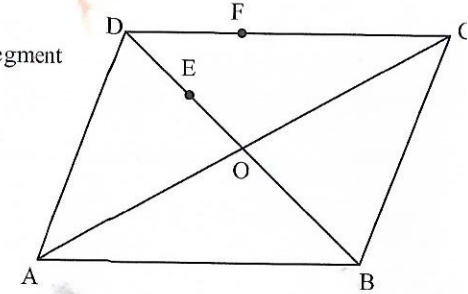
b) $\vec{u} = \vec{j}$

c) $\vec{u} = 5\vec{i} + 8\vec{j}$

d) $\vec{u} = -4\vec{i} + 10\vec{j}$.

13

Soit ABCD un parallélogramme de centre O, E le milieu du segment [DO] et F tel que $3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}$.



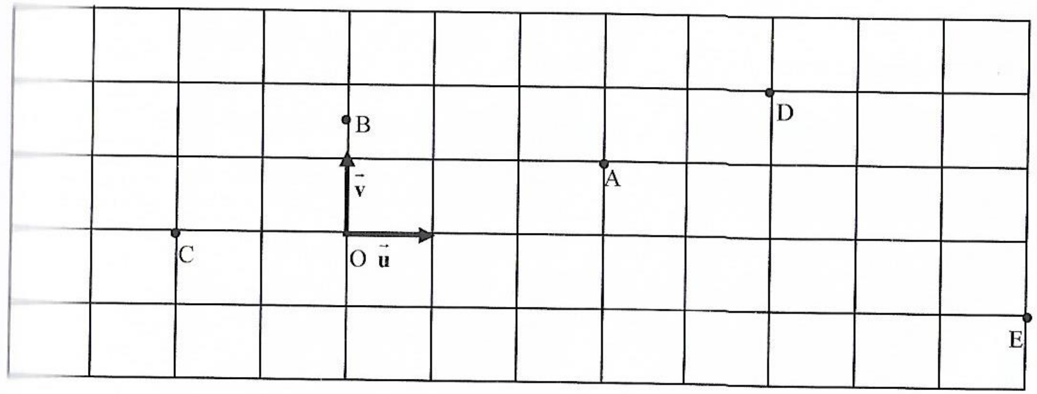
1. Justifier que le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base.
2. a) Déterminer les coordonnées des points A, E et F dans le repère (A, B, D).
   b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
3. Démontrer que les points A, E et F sont alignés.
4. La droite (AE) coupe la droite (BC) en K.

a) Démontrer que : $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire les coordonnées du point K dans le repère (A, B, D).

14

En considérant la figure ci-dessous, donner les coordonnées de chacun des points O, A, B, C, D et E dans chacun des repères $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $(O, \vec{v}, \vec{u})$ et $(A, \vec{u}, \vec{v})$.



15

Soit ABC un triangle quelconque.

1. a) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Justifier que : $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

2. Soit S et T les milieux respectifs des segments [BC] et [MN].

Démontrer que : $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

3. Déduire de la question précédente que les points A, S et T sont alignés.

16

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan. Calculer le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans chacun des cas suivants.

1. a) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}25\\-10\end{pmatrix}$.

2. a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{8}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\ \frac{3}{34}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\ \frac{2}{17}\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{6}{11}\\ 0\end{pmatrix}$.

17

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du pla

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

18

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du pla

Si oui, déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u} = i + j$ et $\vec{v} = i - j$ b) $\vec{u} = i + 2j$ et $\vec{v} = 2i + 3j$ c) $\vec{u} = \frac{2}{3}i - 2j$ et $\vec{v} = -i+3j$.

19

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Discuter suivant les valeurs du nombre réel x la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants. a) $\vec{u}(x, 4)$ et $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{u}(2, x^2 - 1)$ et $\vec{v}(0, 4)$ c) $\vec{u}(2, \frac{1}{x+3})$ et $\vec{v}(x, 6)$.

20

Soit A, B et C trois points non alignés et ; μ un nombre réel.

On pose : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \mu\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$.

1. a) Justifier le couple $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base.

 b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

2. Vérifier que le déterminant du couple $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est $3\mu - \mu^2$.
3. Déterminer μ pour que :

a) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ soient non colinéaires.

b) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ soient colinéaires.

4. On suppose que soit égal à 2.

a) Justifier que le couple $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$ est une base.

b) Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$.

5. Soit I le milieu du segment [AB]. Démontrer que les points I, M et N sont alignés.

6. Construire les points M et N pour $\mu = 2$, AB = 4 cm, AC = 3 cm et mes$\widehat{BAC} = 60°$.

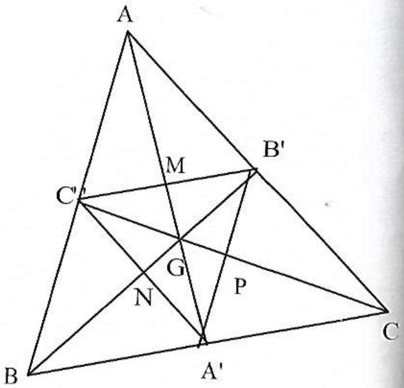
21

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des

segments [BC], [AC] et [AB]. On désigne par M, N et P les milieux respectifs des segments [AA'], [BB'] et [CC']. et ; par

G le centre de gravité du triangle ABC.

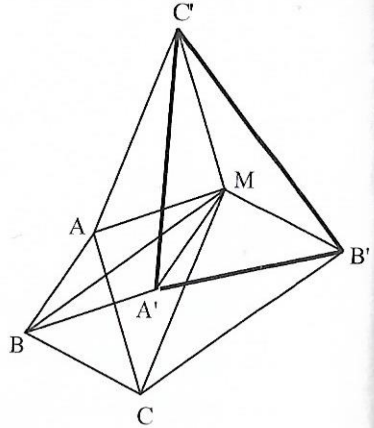
1. a) Démontrer que : $\overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C}$



22

Soit ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB), (AC) et (BC). On note A', B' et C' les points tels que les quadrilatères MABA', MBCB' et MCAC' soient des parallélogrammes.

Démontrer que M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.



23

Soit ABC un triangle de centre de gravité G. Soit I, J et K les centres de gravité respectifs des triangles AGC, ABG et BCG. *On veut démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.*

Démontrer que :

$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}.$

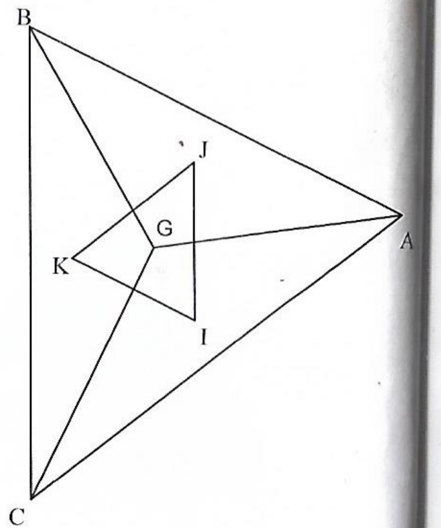
1. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}.$

En déduire que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GI}.$

2. En s'inspirant de la question 2), démontrer que :

$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}).$

3. Conclure.



24

On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J).
Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$

2. a) $\vec{u}(\frac{1}{5}, 0)$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$

3. a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

4. a) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

25

L'unité de construction est le centimètre. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Placer A, B, C et D dans le repère.
2. Calculer AB, BC, CD et DA.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

26

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) On considère les points $A(2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$ et $C(-1, -\sqrt{3})$.

1. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2.
2. Justifier que les points B et C appartiennent à $(\mathcal{C})$.
3. a) Construire les points A, B et C.
   b) Calculer AB, AC et BC.
   c) En déduire la nature du triangle ABC.

27

On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On donne les points $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$ et $D(3,$

1. Placer les points B, C et D.
2. Calculer les distances BC, BD et DC.
3. Placer le point $A(0,2)$.
4. a) Déterminer la nature du triangle ABD.

b) Démontrer que le point A est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

28

A et B sont deux points du plan. On désigne par I le milieu du segment [AB]

1. Justifier que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
2. Déterminer puis construire chacun des ensembles de points M suivants.

$(\mathcal{C})$: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{AB}\|$ $\quad$ $(\mathcal{D})$: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MB}\|$ $\quad$ $(\mathcal{C}')$: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$

29

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et on note G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Justifier que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
2. Déterminer puis construire chacun des ensembles de points M suivants.

$(\mathcal{C})$: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AB$ $\quad$ $(\mathcal{D})$: $2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=3\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$

$(\mathcal{D}')$: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}\|$.

30

L'unité de construction est le centimètre.

Soit A et B deux points du plan tels que : AB = 4.

1. a) Déterminer le point G tel que : $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

b) Construire G

2. Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M tels que : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=5$

a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ est le cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Construire $(\mathcal{C})$.

31

Soit ABC un triangle rectangle en C.

1. a) Déterminer le point G tel que : $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

b) Construire G.

2. Soit M un point du plan. Justifier que :

a) $3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.

b) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

3. Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M tels que : $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

Déterminer $(\mathcal{C})$ puis construire $(\mathcal{C})$.

32

L'unité est le centimètre.

On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J).

Soit les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCI est un parallélogramme.
3. Soit H le point tel que : $\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HI}=\vec{0}$.

a) Déterminer H puis construire H.

b) Calculer les coordonnées de H.

33

On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Soit $(O,\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. On pose : $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$.

1. Démontrer que le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Retrouver les résultats suivants : $\vec{i}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$ et $\vec{j}=\frac{1}{6}\vec{u}-\frac{1}{6}\vec{v}$.
3. Soit M un point de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$ et de coordonnées $(x';y')$ dans le repère $(O,\vec{u};\vec{v})$.

a) Démontrer que : $x'=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y$ et $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y$.

b) En déduire les coordonnées du point $A(-3,9)$ dans le repère $(O,\vec{u};\vec{v})$.

34

On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit A et B les points tels que : $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

On pose : $\vec{u}(1;0)$ et $\vec{v}(2;1)$.

1. Démontrer que le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Déterminer les coordonnées de chacun des points O, A et B dans le repère $(A,\vec{u};\vec{v})$.

35

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Retrouver ceux qui d'entre les vecteurs ci –dessous sont unitaires.

$\vec{s} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$; $\quad \vec{t} = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j}$. $\quad \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$; $\quad \vec{v} = -\frac{12}{13}\vec{i} - \frac{5}{13}\vec{j}$; $\quad \vec{w} = \frac{7}{11}\vec{i} - \frac{9}{11}\vec{j}$.

36

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Démontrer que les vecteurs le vecteur est unitaire dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u}(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ $\quad$ b) $\vec{u}(\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2})$ $\quad$ c) $\vec{u}(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}};\frac{\sqrt{5}+1}{4})$.

37

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Déterminer la composante x du vecteur unitaire $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u}(-\frac{4}{5};x); x \geq 0$ $\quad$ b) $\vec{u}(\frac{2}{3};x); x \leq 0$ $\quad$ c) $\vec{u}(x;-\frac{\sqrt{7}}{4}); x \geq 0$.

38

Soit ABC un triangle.

1. On désigne par F et K les points tel que : $3\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{CK}$ et $2(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{KA}$.
   a) Démontrer que : $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{AC}$.
   b) Construire les points F et K.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FK} = \vec{0}$.
3. On désigne par I le milieu du segment [BC]. Démontrer que I appartient à la droite (AF).
4. On note A' le point d'intersection des droites (BK) et (AF).
   a) Démontrer que A' est le milieu du segment [BK].
   b) Justifier que le quadrilatère AA'KC est un parallélogramme.
5. Déduire des questions 2) et 4b) que : $\overrightarrow{FA'} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

Angles orientés et trigonométrie

L'essentiel du cours sur les angles orientés et sur la trigono métrie

1. *Mesure principale d'un angle orienté.*

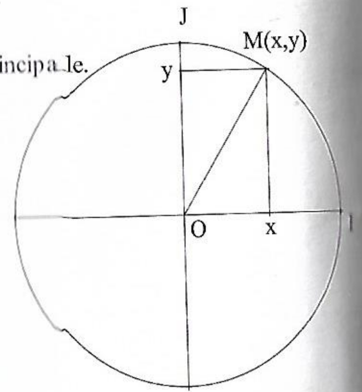
2. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\text{Mes}\widehat{(\vec{u};\vec{v})} = 0$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\text{Mes}\widehat{(\vec{u};\vec{v})} = \pi$.

Dans les cas contraires, $\text{Mes}\widehat{(\vec{u};\vec{v})} = \text{mes}\widehat{MON}$ ou $\text{Mes}\widehat{(\vec{u};\vec{v})} = -\text{mes}\widehat{MON}$.

Deux angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.



2. *Cosinus et sinus d'un angle orienté.*

$\cos\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})} = x$ et $\sin\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})} = y$.

3. $-1 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Angles orientés

1

Compléter le tableau ci –dessous.

Mesure en degré x	0	30	45	90	120	150	180
Mesure en radian y							

2

Compléter le tableau ci –dessous.

Mesure en radian	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$
Mesure en degré						

3

Compléter le tableau ci –dessous.

Mesure en radian	$\frac{3\pi}{8}$				1		3,4
Mesure en degré		35	1	18		$\frac{7}{\pi}$	

On prendra : $\pi \simeq 3{,}1415926535$.

4

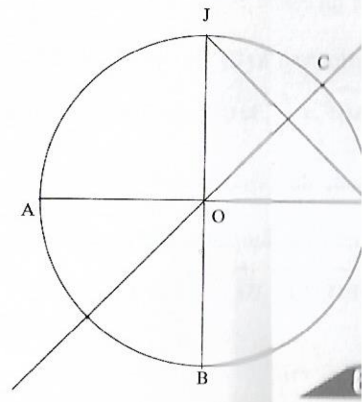
On munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

On désigne par (C) le cercle de centre O passant par I.

Les points A, B et C appartiennent au cercle (C) et la droite (OC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.

Donner la mesure en radian de chacun des angles suivants.

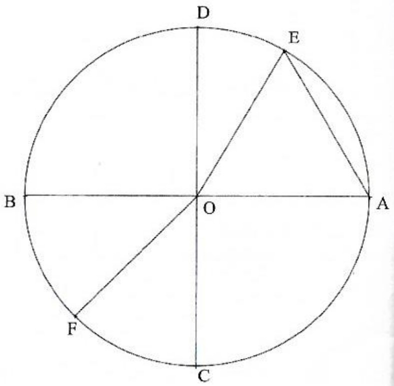
$\widehat{IOA}$, $\widehat{IOC}$, $\widehat{JOA}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$.



5

(C) est un cercle de centre O et de rayon 1. Les points A, B, C, D, E et F appartiennent à (C) tels que : le triangle AOD est rectangle en O, le triangle OAE est équilatéral, les arcs $\overset{\frown}{BF}$ et $\overset{\frown}{CF}$ sont de même longueur. Donner la mesure en radian de chacun des angles suivants :

$\widehat{AOD}$, $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOD}$, $\widehat{AOF}$, $\widehat{COF}$ et $\widehat{EOB}$.



6

Soit A et B deux points appartenant à un cercle (C) de centre O et de rayon 2. On donne : $\text{mes}\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$.

Calculer la longueur en radian de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

7

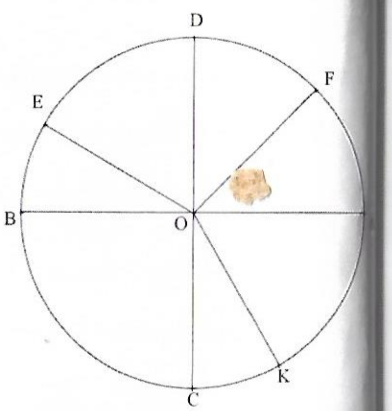
L'unité est le centimètre. Soit E et F deux points appartenant à un cercle de centre O tels que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EF}$ soit égale à $\frac{3\pi}{7}$ et la mesure de l'angle $\widehat{EOF}$ est $\frac{\pi}{6}$. Calculer le rayon de ce cercle.

8

(C) est un cercle de rayon 4. Les points A, B, C, D, E, F et K appartiennent à (C) ; le triangle AOD est rectangle en O $\text{mes}\widehat{AOF} = \frac{\pi}{4}$, le triangle EOD est équilatéral, les arcs $\overset{\frown}{EB}$ et $\overset{\frown}{CK}$ sont de même longueur.

Déterminer la longueur de chacun des arcs suivants :

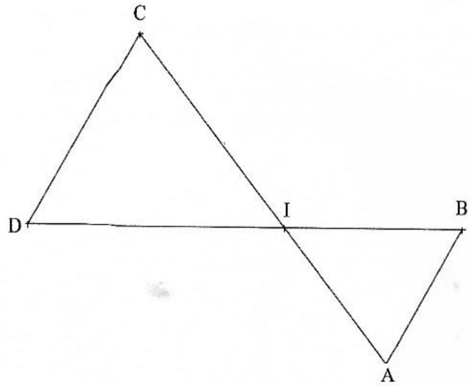
$\overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{ED}$, $\overset{\frown}{EB}$, $\overset{\frown}{CK}$, $\overset{\frown}{FK}$ et $\overset{\frown}{BF}$.



9

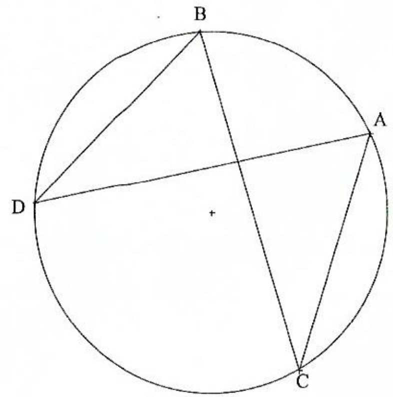
Soit ABCD un quadrilatère tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et ; les droites (AC) et (BD) se coupent en un point I. Démontrer que :

1. Les angles orientés $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})$ et $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})$ sont égaux.
2. Les angles orientés $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont égaux.



10

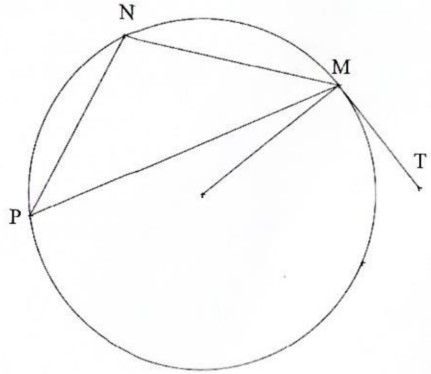
ABCD est un quadrilatère croisé inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$). Justifier que les angles orientés sont $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$ sont égaux.



11

Le triangle MNP est inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) et [MT) est une demi-tangente en M à ($\mathcal{C}$).

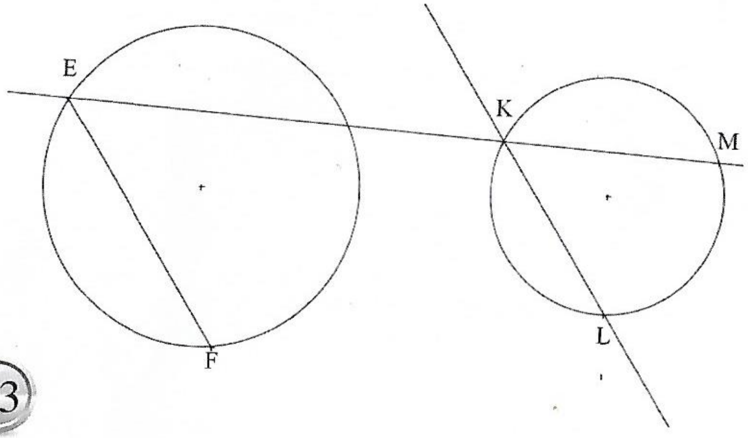
Justifier que les angles orientés $(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NM})$ et $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MT})$ sont égaux.



12

Les droites (EF) et (KL) sont parallèles. Le triangle MLK est isocèle en L.

Démontrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{ML},\overrightarrow{MK}})$ ont la même mesure.



13

ABCD un carré tels que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants.

$(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$.

14

ABCD un carré de centre O tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants.

$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DO}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{CA}})$.

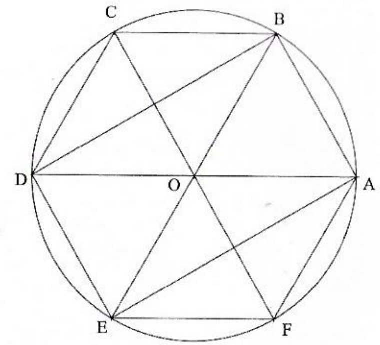
15

Soit ABC un triangle tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{9}$.

Retrouver chacun des résultats suivants.

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{8\pi}{9}$, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{9}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}}) = -\frac{8\pi}{9}$.

16



ABCDEF est un hexagone régulier.

1. Déterminer la mesure de chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FE}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FA}})$

2. Les droites (BC) et (AF) se coupent en G.
Démontrer que le triangle CFG est équilatéral de sens direct.

17

Construire le triangle PQR pour : QP = 4, PR = 5 et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}}) = \frac{\pi}{6}$.

18

Construire le triangle PQR tel que : RQ = 7, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}}) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}}) = -\frac{\pi}{6}$.

19

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. Construire l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) (Γ) : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{3}$ b) (Γ') : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) = -\frac{\pi}{3}$ c) (Ψ) : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) = \frac{2\pi}{3}$.

20

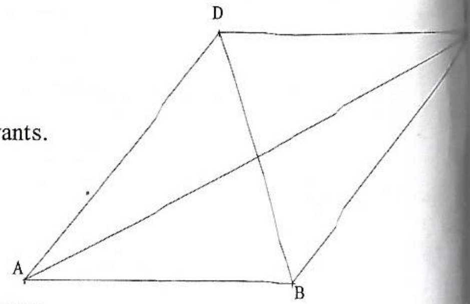
Soit E et F deux points du plan et α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;\pi[$.

a) Déterminer et construire le lieu des points M du plan tels que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})} = \alpha$.

b) Déterminer et construire le lieu des points M du plan tels que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})} = \alpha - \pi$.

21

ABCD est un losange tel que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = \frac{\pi}{4}$.



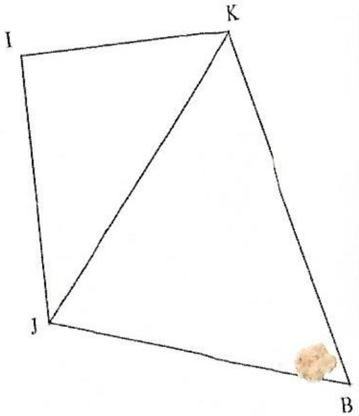
Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants.

1. a) $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC})}$.

b) $\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})}$.

2. Construire le point F tel que : $AF = \frac{2}{3}AC$ et $Mes\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})} = \frac{\pi}{8}$.

22



1. IJK est un triangle rectangle isocèle en I et KJB est un triangle équilatéral. Démontrer que $-\frac{\pi}{12}$ est la mesure principale de $\widehat{(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JB})}$.
2. En déduire la mesure principale de chacun des angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{IK})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{BJ})}$.

23

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, I, J et K les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB].

1. Démontrer que le quadrilatère JKIC est un parallélogramme et que le triangle IBK est équilatéral.
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{KI})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{JK})}$, $\widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IK})}$. $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AI})}$

24

Soit ABC un triangle.

1. Démontrer que ABC est isocèle en A si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$.
2. Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.

25

1. Soit PQR un triangle de sens direct.

Démontrer que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + Mes\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + Mes\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = \pi$.

2. Déterminer $Mes\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + Mes\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + Mes\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})}$ lorsque le triangle PQR est indirect.

26

On donne EFG un triangle isocèle en E tel que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})} = \frac{5\pi}{6}$.

On désigne par (Δ) la droite passant par G et perpendiculaire à (EF)

d'axe (Δ). On pose : $E' = S(E)$ et $F' = S(F)$.

Démontrer que la mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{E'F'},\overrightarrow{E'G})}$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

27

Soit ABC un triangle tel que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})} = \frac{\pi}{3}$ et $Mes\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = -\frac{\pi}{4}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la mesure principale de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.
3. On note I le milieu de [BC] et E l'image de A par la symétrie s_I de centre I.

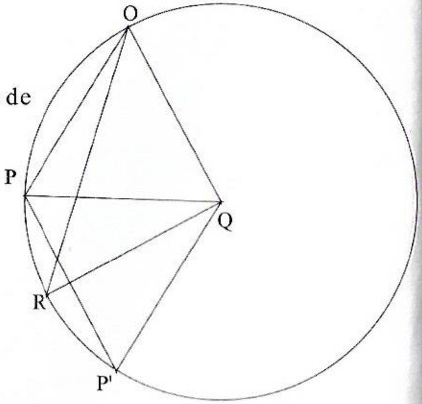
Démontrer que : $Mes\widehat{(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA})} = -\frac{5\pi}{12}$.

4. On désigne par K l'image du point B par la translation T de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

a) Déterminer les images respectives des points C et E par la translation T.

b) Déterminer la mesure principale des angles $\widehat{(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK})}$.

28



OPQ est un triangle équilatéral de sens direct et $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre Q passant par P.

1. Construire le point R de $(\mathcal{C})$ tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OR}}) = \frac{\pi}{12}$.
2. Démontrer que le triangle ORQ est rectangle isocèle en Q et de sens direct.
3. Soit P' l'image de P par la symétrie orthogonale S d'axe (RQ). Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ}})$ puis celle de $(\widehat{\overrightarrow{P'R},\overrightarrow{P'Q}})$

29

OMN est un triangle isocèle en O tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) = \frac{7\pi}{12}$; et OPM un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par (Γ) le cercle de centre O passant par P.

1. Faire une figure.
2. Justifier que les points M et N appartiennent à (Γ).
3. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}})$.
4. Soit I un point de (Γ) n'appartenant pas à l'arc $\overset{\frown}{NP}$.

On désigne par S_I la symétrie de centre I. On pose : $F = S_I(M)$, $G = S_I(N)$ et $E = S_I(P)$.

Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}})$.

Trigonométrie

1

Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : $A(0)$, $A'(\pi)$, $B(\frac{\pi}{2})$ et $B'(-\frac{\pi}{2})$.

2

Reprendre l'exercice précédent dans les cas suivants :

a) $C(\frac{\pi}{4})$, $D(\frac{\pi}{3})$, $E(\frac{\pi}{6})$ et $F(\frac{2\pi}{3})$ b) $P(-\frac{\pi}{4})$, $Q(-\frac{\pi}{3})$, $U(-\frac{\pi}{6})$ et $V(-\frac{2\pi}{3})$.

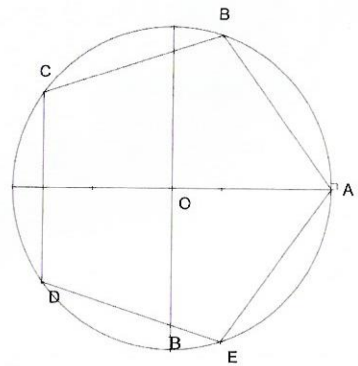
3

Construire sur le cercle trigonométrique les points suivants : $M(\frac{\pi}{8})$, $P(\frac{5\pi}{12})$ et $Q(-\frac{5\pi}{12})$.

4

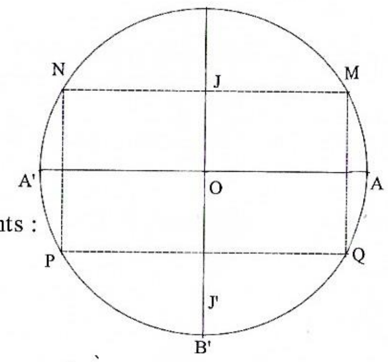
ABCDE est un pentagone régulier.

Déterminer les nombres réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ dont les images sur le cercle trigonométrique sont les points A, B, C, D et E.



5

Les points I, I', J et J' sont les milieux respectifs des segments [OA], [OA'], [OB] et [OB']. Le quadrilatère MNPQ est un rectangle tel que les droites (MN) et (AA') soient parallèles.

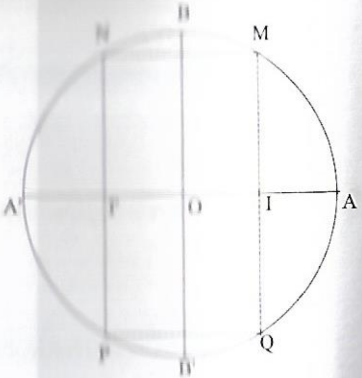


1. Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}})$.
2. En déduire le sinus de chacun des nombres réels $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

6

Reprendre l'exercice précédent en considérant la figure ci- contre.

On donnera plutôt le cosinus dans la question 2).



7

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). Soit α un nombre réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ tel que les nombres réels suivants soient des mesures principales : $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

On désigne par M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : $A(-\alpha)$, $B(\pi-\alpha)$, $C(\pi+\alpha)$, $D(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ et $E(\frac{\pi}{2}+\alpha)$.

2. Déduire –en en fonction de $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$, le cosinus et le sinus de chacun des nombres réels $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

8

On pose : $A=\cos(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)$

$B=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$, $\quad C=\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

Simplifier les nombres réels A, B et C.

9

Calculer $\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}$

10

On donne : $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$.

Déterminer les valeurs exactes des nombres réels suivants : $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$ $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

11

α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

1. Donner le signe de $\cos\alpha$ dans chacun des cas suivants,

a) $\alpha\in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$ b) $\alpha\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ c) $\alpha\in]\frac{\pi}{2};\pi]$.

2. Donner le signe de $\sin\alpha$ dans chacun des cas suivants,

b) $\alpha\in]-\pi;0[$ b) $\alpha\in]0;\pi[$.

3. En déduire le signe du cosinus et du sinus de chacun des nombres réels suivants :

$\frac{\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$, $-\frac{\pi}{7}$ et $-\frac{5\pi}{7}$.

12

1. Remplir le tableau de signe dans chacun des cas suivants.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sinx					
cosx					

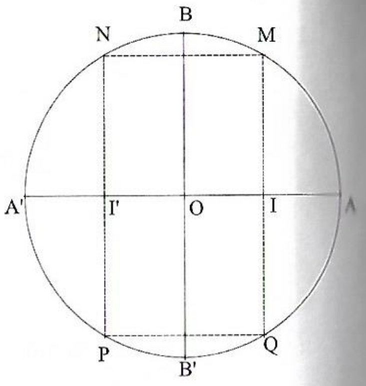
2. On considère les fonctions f, g et h définies de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\sin x\cos x$, $g(x)=\tan x$ et $h(x)=\sqrt{\cos x}$.

a) Déterminer les ensembles de définitions de f, g et h.

b) Déduire de la question 1) le signe de f et g.

6



Reprendre l'exercice précédent en considérant la figure ci- contre.

On donnera plutôt le cosinus dans la question 2).

7

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). Soit α un nombre réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ tel que les nombres réels suivants soient des mesures principales : $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

On désigne par M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : $A(-\alpha)$, $B(\pi-\alpha)$, $C(\pi+\alpha)$, $D(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ et $E(\frac{\pi}{2}+\alpha)$.
2. Déduire –en en fonction de $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$, le cosinus et le sinus de chacun des nombres réels $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

8

On pose : $A=\cos(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)$

$B=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$, $\quad C=\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

Simplifier les nombres réels A, B et C.

9

Calculer $\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}$

10

On donne : $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$.

Déterminer les valeurs exactes des nombres réels suivants : $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$ $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

11

α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

1. Donner le signe de $\cos\alpha$ dans chacun des cas suivants,
   a) $\alpha\in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$ b) $\alpha\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ c) $\alpha\in]\frac{\pi}{2};\pi]$.
2. Donner le signe de $\sin\alpha$ dans chacun des cas suivants,
   a) $\alpha\in]-\pi;0[$ b) $\alpha\in]0;\pi[$.
3. En déduire le signe du cosinus et du sinus de chacun des nombres réels suivants : $\frac{\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$, $-\frac{\pi}{7}$ et $-\frac{5\pi}{7}$.

12

1. Remplir le tableau de signe dans chacun des cas suivants.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	π
sinx					
cosx					

2. On considère les fonctions f, g et h définies de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\sin x\cos x$, $g(x)=\tan x$ et $h(x)=\sqrt{\cos x}$.

a) Déterminer les ensembles de définitions de f, g et h.

b) Déduire de la question 1) le signe de f et g.

13

On donne : $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Déterminer $\cos x$.

14

On donne : $\cos x = \frac{5}{13}$ et $x \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}]$. Déterminer $\sin x$ et $\tan x$.

15

Calculer la tangente de chacun des nombres réels suivants : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

16

1. On donne : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$.
2. Déduire de la question précédente la valeur de $\tan\frac{\pi}{12}$.

17

Déterminer $\cos\frac{4\pi}{5}$ sachant que : $\sin\frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$.

18

1. Vérifier que : $(1-\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ et préciser le signe de $1-\sqrt{5}$.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{10}$ sachant que : $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

19

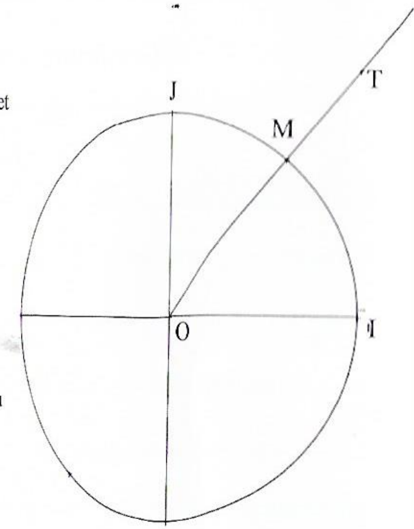
On donne : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

20

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) et on note (C) le cercle de centre O passant par I. Soit α un nombre réel élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

M son image sur (C). On appelle T le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente en I.

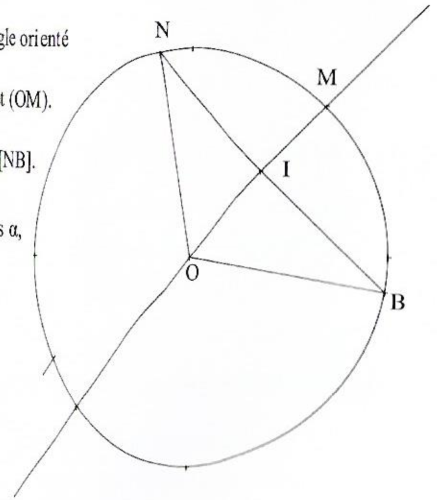
Calculer l'aire du triangle OIT ainsi que celle de la région du plan délimitée par les segments [OI], [OM] et l'arc $\overset{\frown}{IM}$.



21

Les points B, N et M appartiennent au cercle trigonométrique de centre O de sorte que (OM) soit la bissectrice de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON})$. On note α la mesure principale l'angle orienté $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN})$. I est le point l'intersection des droites (NB) et (OM).

1. a) Démontrer que (OM) est la médiatrice du segment [NB].
b) Justifier que I est le milieu du segment [NB].
2. Justifier que : $\cos 2\alpha = OI$, $\sin 2\alpha = IN$, $IN = MB\cos\alpha$, $IM = MB\sin\alpha$ et $MB = 2\sin\alpha$.
3. Déduire de ce qui précède que :
a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ et que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.
4. Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{8}$.



Symétries et translations

L'essentiel du cours sur les symétries et les translations

1. *Image d'un point du plan.*

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

M' est l'image de M par la symétrie de centre O si O est le milieu du segment [MM'].

2. Les symétries et les translations transforment :

Une droite en une droite, un segment en un segment de même mesure, un cercle en un cercle de même rayon, deux droites parallèles en deux droites parallèles et deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

1

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle et M un point lui appartenant et ; A et B deux points n'appartenant pas à $(\mathcal{C})$.

On note I le milieu du segment [AB].

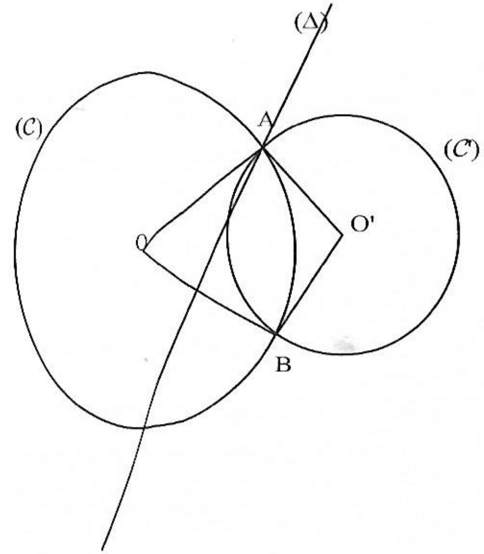
1. Construire le point N tel que le quadrilatère MANB soit un parallélogramme.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C}')$ décrit par N lorsque M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$.

2

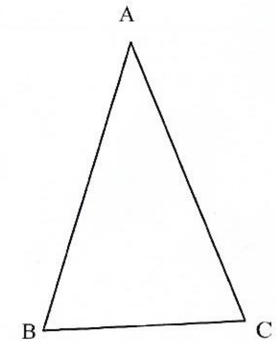
Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O' sécants en deux points A et B. et soit (Δ) une droite passant par A.

1. Démontrer que la droite (OO') est la médiatrice du segment [AB].
2. a) Déterminer et construire l'ensemble (Δ') des points M lorsque A décrit la droite (Δ).

   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque A décrit le cercle $(\mathcal{C})$.



3



Soit ABC un triangle isocèle en A.

1. a) Construire le centre de gravité G de ABC

   b) Construire l'orthocentre H du triangle ABC.
2. Démontrer que les points A, H et G sont alignés.

4

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et (Δ) la droite passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AD).

1. Construire en utilisant uniquement la règle non graduée l'image (Δ') de la droite (Δ) par symétrie de centre O.
2. Démontrer que les droites (BC) et (Δ') sont perpendiculaires.

5

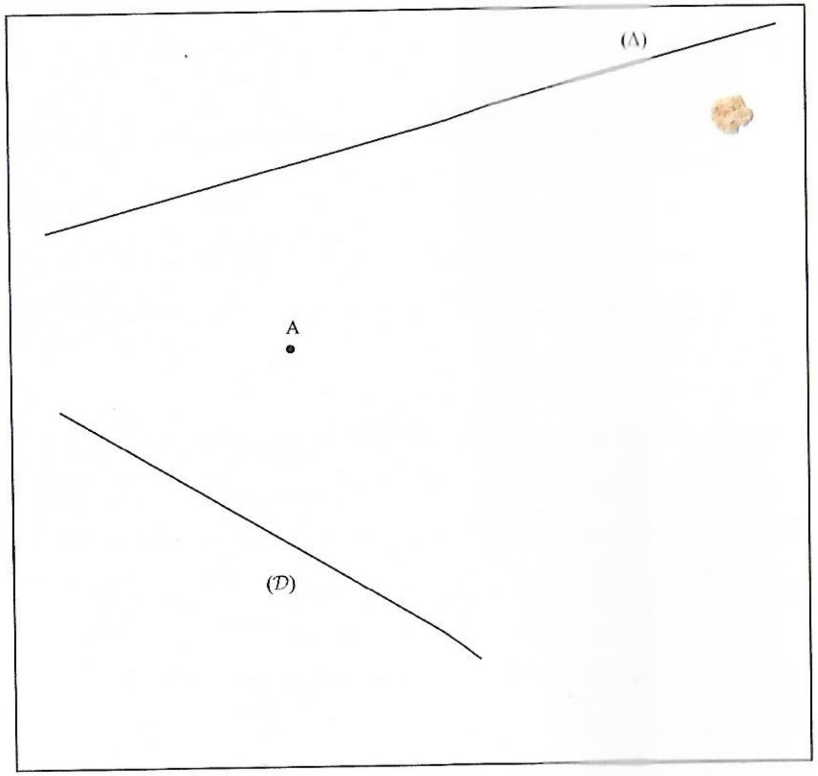
Soit ABC un triangle, A' et B' les milieux respectifs des segments [BC] et [AC]. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On désigne par $S_{A'}$ et $S_{B'}$ les symétries de centre respectifs A' et B'.

1. Construire les points $D = S_{A'}(M)$ et $E = S_{B'}(M)$.
2. a) Démontrer que : (MC)//(EA) et MC = EA.
   b) Démontrer que : (MC)//(BD) et MC = BD.
3. Déduire de ce qui précède le quadrilatère ABDE est un parallélogramme.

6

On donne un point A. Soit ($\mathcal{D}$) et (Δ) deux droites sécantes dont le point d'intersection I n'appartenant pas au cadre ci-dessous.

Construire le point I' image du point I par la symétrie de centre A.



7

On donne une droite($\mathcal{D}$), un point I appartenant à ($\mathcal{D}$) et un point M n'appartenant pas à ($\mathcal{D}$).

1. a) Construire l'image N du point M par la symétrie orthogonale d'axe ($\mathcal{D}$).
   b) Construire l'image P de M par la symétrie de centre I.
2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N.

8

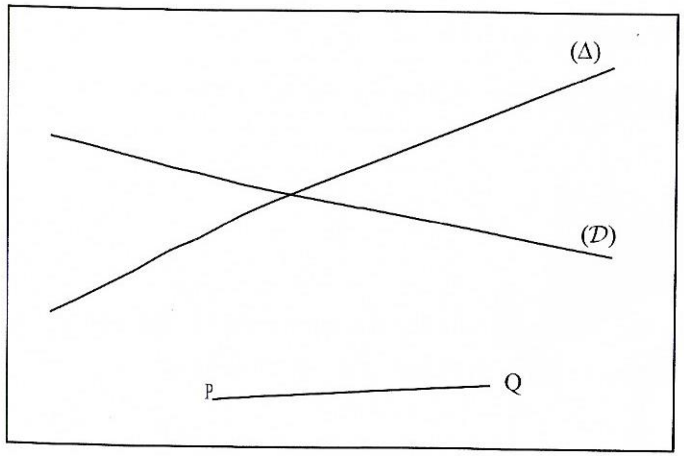
On donne un cercle ($\mathcal{C}$) et une droite ($\mathcal{D}$) qui coupe ($\mathcal{C}$) en deux points A et B. Soit I un point tel que la droite ($\mathcal{D}'$) symétrique de ($\mathcal{D}$) par rapport au point I coupe le cercle ($\mathcal{C}$).

Construire deux points F et K tels que le point I soit milieu du segment [FK] avec F appartenant à ($\mathcal{D}$) et K appartenant à ($\mathcal{C}$).

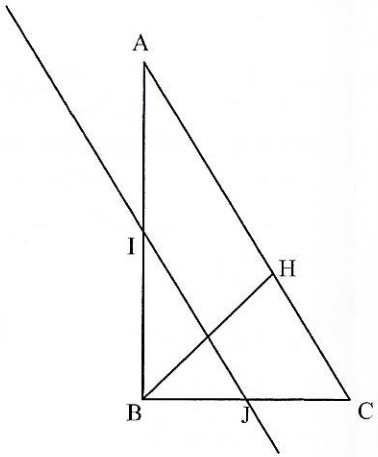
9

On donne deux droites sécantes ($\mathcal{D}$) et (Δ) et deux points P et Q.

Construire un parallélogramme PQRS tel que S et R appartiennent respectivement à ($\mathcal{D}$) et (Δ) .



10



Soit ABC un triangle rectangle en B et H le projeté orthogonal de B sur (AC). On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BC].

1. Justifier que les droites (IJ) et (BH) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [BH]
3. Démontrer que le triangle IJH est rectangle.

11

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de centres respectifs O et O', de même rayon et sécants en deux points A et B. Une droite $(\mathcal{D})$ qui passe par A recoupe $(\mathcal{C})$ en M et $(\mathcal{C}')$ en M'. Par B, on mène la parallèle à $(\mathcal{D})$; cette droite recoupe $(\mathcal{C})$ en N et $(\mathcal{C}')$ en N'.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que le quadrilatère AOBO' est un losange dont on nommera I le centre.
3. Soit S_I la symétrie de centre I.

a) Justifier que la droite (MM') est l'image de (NN') par S_I.

b) Justifier que $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par S_I.

3. Déterminer en utilisant la question 2) les points images $S_I(M)$ et $S_I(M')$.
4. En déduire la nature du quadrilatère MNN'M'.

12

On donne une droite $(\mathcal{D})$ et deux points A et B n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$ et situés d'un même côté de $(\mathcal{D})$. Construire le point M de la droite $(\mathcal{D})$ tel que : AM + MB soit minimal.

13

Soit ABC un triangle rectangle en A et K un point de [BC]. On note E l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et F l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

1. Faire une figure.
2. a) Démontrer que A est le centre du cercle circonscrit au triangle EKF.

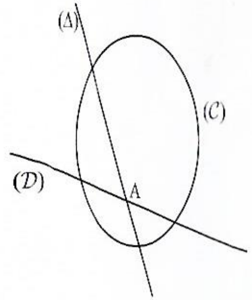
b) Démontrer que les droites (EK) et (FK) sont perpendiculaires.

3. Démontrer que A est le milieu du segment [EF].

14

Soit (C) un cercle, A un point à l'intérieur de (C), (D) et (Δ) deux droites sécantes en A.

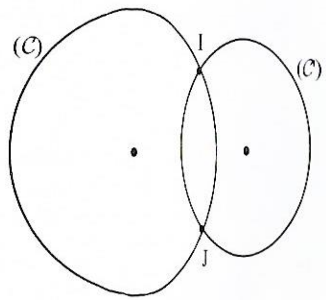
Construire un point M sur $(\mathcal{D})$ et un point N sur $(\mathcal{C})$ tel que (Δ) soit la médiatrice de [MN].



15

On donne deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de rayons différents, sécants en I et J.

Déterminer un point A sur $(\mathcal{C})$ et un point B sur $(\mathcal{C}')$ tel que I soit le milieu de [AB].

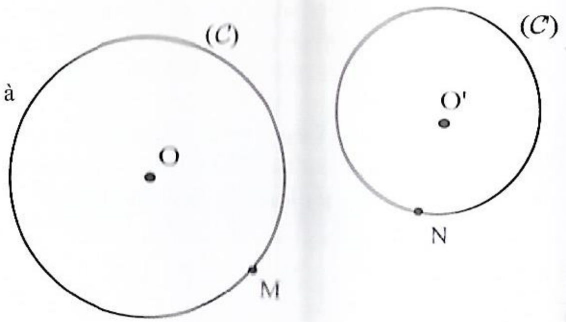


16

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de centre O et O'.

Soit M et N deux points appartenant respectivement à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

Construire un point P sur $(\mathcal{C})$ et un point Q sur $(\mathcal{C}')$ tels que MNQP soit un parallélogramme.



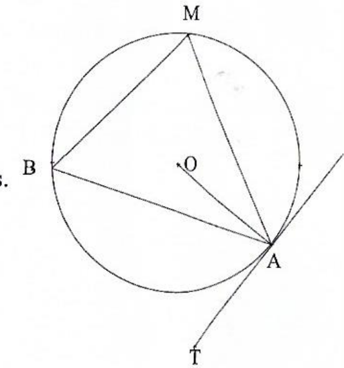
Angles inscrits

L'essentiel du cours sur les angles inscrits.

1. *Angles orienté défini par une corde et une demi – tangente*

La droite (TT') est la tangente en A au cercle de centre O.

Les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont considérés comme étant les angles inscrits.



$$\text{mes}\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$$

$$\text{mes}\widehat{T'AB} = 180 - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$$

2. *Ensemble des points M tels que : $\text{mes}\widehat{AMB} = \alpha$*

Cet ensemble est la réunion de deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB).

4. *Relations métriques dans un triangle.*

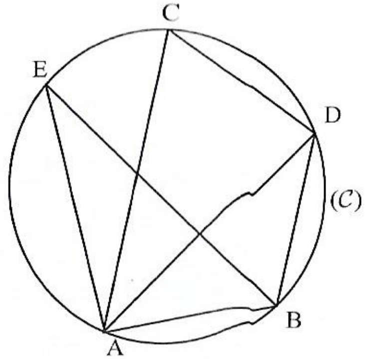
Soit ABC un triangle d'aire $\mathcal{A}$, R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

On pose : AB = c, AC = b et BC = a.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

On a : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{\mathcal{A}} = 2R$ (Théorème du sinus)

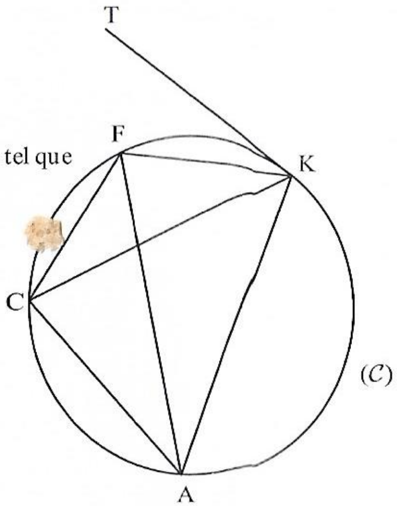
1



Soit (C) un cercle et E un point de (C). Soit les points A, B, C et D appartenant à (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ aient la même longueur. On donne : $mes\widehat{AEB} = 30°$

1. Justifier que : $mes\widehat{CAD} = 30°$.
2. Démontrer que les droites (AC) et (DB) sont parallèles.

2

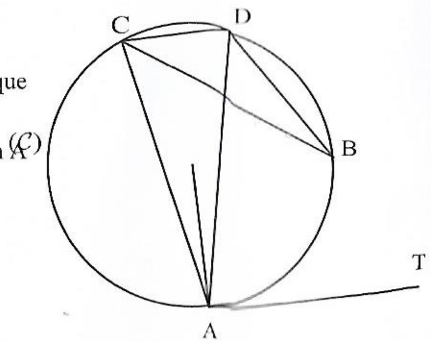


Soit (C) un cercle et AKFC un quadrilatère inscrit dans ce cercle tel que la droite (AF) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{CAK}$

Soit T un point de la tangente à (C) au point K dans le demi – plan de frontière (KC).

Démontrer que la droite (KF) est la bissectrice de $\widehat{CKT}$.

3



Soit (C) un cercle et A, B, C et D , B, C des points du cercle tels que le triangle ACD soit isocèle en A. La droite (AT) est la tangente en A au cercle (C).

On donne : $mes\widehat{CAD} = 25°$.

Déterminer la mesure de chacun des angles $\widehat{DBC}$, $\widehat{ACD}$ et $\widehat{DAT}$.

Avomaths • Seconde C

4

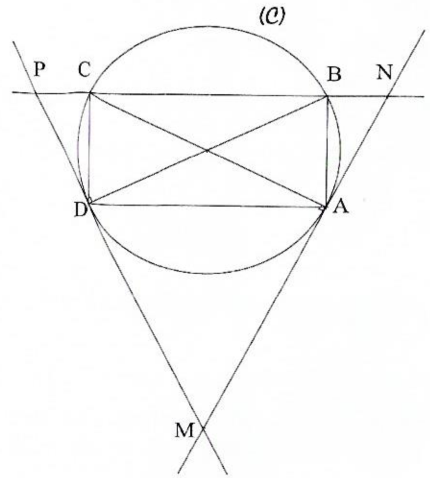
Soit A, B et C trois points d'un cercle (C) et (TT') la tangente en A à (C) telle que A appartienne au segment [TT'], $mesTAB = 75°$ et $mesT'AC = 60°$. Déterminer les angles du triangle ABC.

5

Soit (C) un cercle de diamètre [AB] ; C un point de (C) et I le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$. La tangente en I au cercle (C) coupe (AC) en D.

1. Justifier que les résultats suivants : $mes\widehat{AIB} = 90^0$ et $mes\widehat{AID} = mes\widehat{IBA}$.
2. En déduire que les angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{IAB}$ ont la même mesure.
3. Démontrer que le triangle AID est rectangle en D.

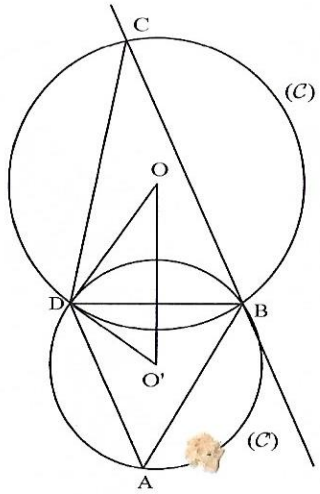
6



Soit ABCD un rectangle tel que BD = 2AB et (C) le cercle circonscrit à ABCD. Les tangentes en A et D au cercle (C) ont pour point d'intersection M et coupent la droite (BC) respectivement en N et P.

Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

7



Soit ODO' un triangle rectangle en D. Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ passent par le point D et sont respectivement de centre O et O'.

Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en un point B autre que D.

Soit C un point de $(\mathscr{C})$ dans le demi –plan de bord (BD) contenant O et A un point de $(\mathscr{C}')$ dans le demi –plan de bord (BD) contenant le point O'.

Démonter que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ ont complémentaires.

8

L'unité est le centimètre.

Soit A et B deux points du plan tels que : AB = 4. Construire dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M du plan tels que : $mes\widehat{AMB} = \alpha$

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 90°$ c) $\alpha = 120°$.

9

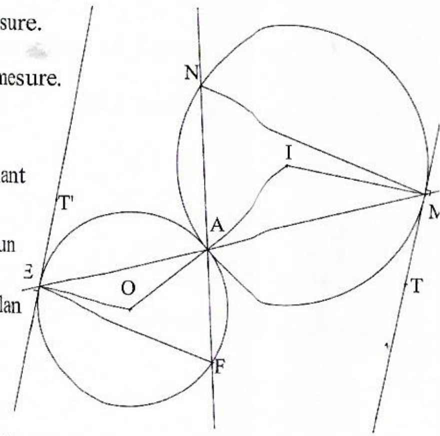
Soit ABC un triangle équilatéral. Construire l'ensemble des points M tels que : $mes\widehat{AMC} = mes\widehat{ABC}$.

10

Soit EFG un triangle tel que $mes\widehat{EFG} = 45°$. Construire l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{EMG} = 135°$.

11

Soit deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centres respectifs I et O et, tangents en un point A. On note M et N deux points du cercle $(\mathscr{C})$. On désigne par E le point d'intersection de (AM) et $(\mathscr{C}')$, et F le point d'intersection de (AN) et de $(\mathscr{C}')$



1. Justifier que les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{EAF}$ sont de même mesure.
2. Démontrer que les angles $\widehat{EOA}$ et $\widehat{MIA}$ sont de même mesure.
3. En déduire que les droites (EF) et (MN) sont parallèles.

On note T un point de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point M, appartenant au demi plan de bord (MA) ne contenant pas le point I et T' un point de la tangente à $(\mathscr{C}')$ au point E, appartenant au demi plan de bord (EA) ne contenant pas le point O.

4. Démontrer que les angles $\widehat{TMA}$ et $\widehat{T'EA}$ sont de même mesure.
5. En déduire la position relative des tangentes (MT) et (T'E).

12

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et de diamètre [AF]. Soit OAK un triangle rectangle en A tel que OA = 1 et AK = 2. On note Q le milieu du segment [OF]. Le cercle de centre O et de rayon $\frac{OK}{2}$ coupe la demi droite [OA] en un point P. On désigne par (Γ) l'arc $\widehat{AF}$ appartenant au demi plan de bord (OA) contenant le point K.

La médiatrice du segment [PQ] coupe (Γ) en un point C, la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$ coupe (Γ) en un point B, la parallèle à la droite (BC) passant par A coupe (Γ) en un point D et la parallèle à la droite (BC) passant par O coupe (Γ) en un point E.

1. Démontrer chacun des résultats suivants :

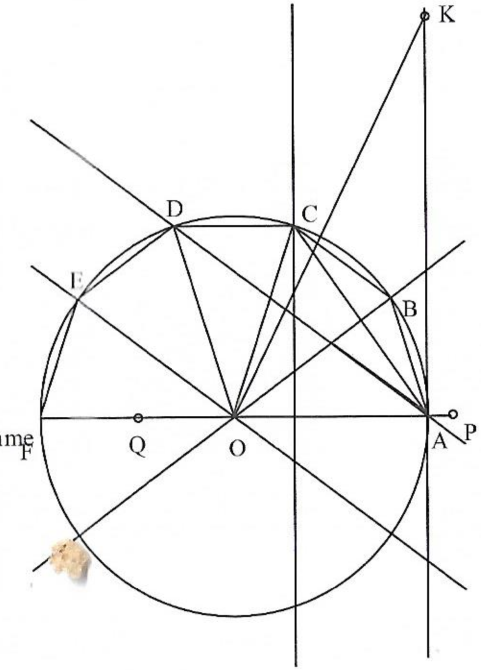
a) Les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{AOB}$ sont de même mesure.

b) Les angles $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COB}$ sont de même mesure.

2. On admet que les droites (AD), (OC) et (BE) se coupent en un point I.

a) Démontrer que le triangle IDC est isocèle en D.

b) En déduire que le quadrilatère DIBC est un parallélogramme.



3. Démontrer que :

a) Les angles $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOC}$ sont de même mesure.

b) Les angles $\widehat{FOE}$ et $\widehat{EOD}$ sont de même mesure.

4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$.

5. Soit H le milieu du segment [PQ]. Démontrer que : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

13

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que AB = 1 et AFC un triangle équilatéral. On désigne par K le point tel que le quadrilatère ABFK soit un parallélogramme. On note E le point d'intersection des droites (AC) et (FK).

1. a) Démontrer que les droites (FK) et (AC) sont perpendiculaires.

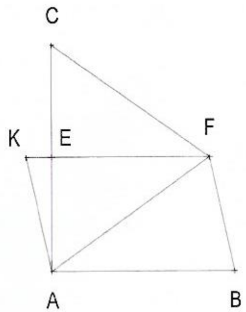
   b) Démontrer que les angles $\widehat{AFK}$ et $\widehat{KFC}$ ont pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

   c) Justifier que le point E est le milieu du segment [AC].

2. Démontrer que : AF = KF = 1.

3. a) Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{KAE}$ est $\frac{\pi}{12}$.

   b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BF})$.



4. a) Justifier que: $EK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $AK^2 = 2 - \sqrt{3}$.

   b) Calculer $(1+\sqrt{3})^2$ puis démontrer que $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8}$.

5. Déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$.

6. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Vérifier que : $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

14

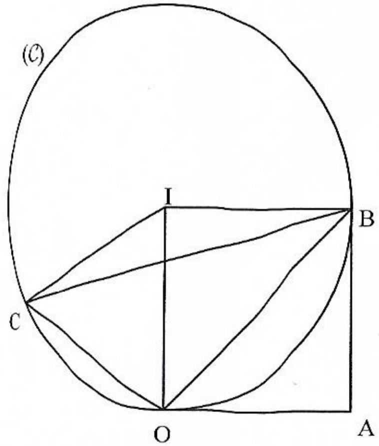
Soit IOAB un carré de coté 1 et C le point tel que : OI = OC et $\text{mes}\,\widehat{IOC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est $\frac{7\pi}{12}$.

2. Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC. On notera (C) ce cercle.

3. Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{OBC}$ est $\frac{\pi}{6}$ et que la mesure de l'angle $\widehat{OCB}$ est $\frac{\pi}{4}$.

4. Justifier que la mesure de l'angle $\widehat{CBI}$ est $\frac{5\pi}{6}$.



5. On note $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les aires respectives des triangles ICB et OBC ; et $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère OBIC.

a) Justifier : $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{4}$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. En déduire la valeur de $\mathcal{A}_2$.

b) Démontrer que la distance BC est $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

6. Déterminer la valeur exacte du sinus de l'angle $\frac{7\pi}{12}$.

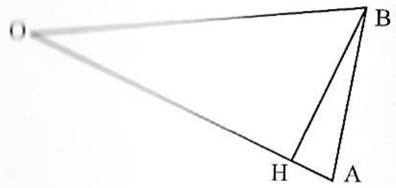
Degré	30	45	60	90	120	150
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ci –contre, tableau de correspondance à consulter.

15

Soit OAB un triangle isocèle en O tel que : $OA = 1$ et $\text{mes}\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$.

On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).



1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle OAB est $\frac{1}{4}$.
2. En utilisant la réciproque du Théorème de Pythagore dans le triangle ABH, démontrer que : $AB^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2$.
3. Déterminer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Produit scalaire

L'essentiel du cours sur le produit scalaire

1. *Définition*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.

Sinon, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

2. *Théorème d'Al-Kashi*

Dans le triangle ABC, on pose : $AB = c, AC = b, BC = a$. On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

3. *Théorème de la médiane*

Dans le triangle ABC, (AA') est une médiane. On a : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC}{2}$.

1

Déterminer le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. a) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ b) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \pi$.
2. a) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ b) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$.
3. a) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ b) $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{3\pi}{2}$.
4. a) $\|\vec{v}\| = \frac{2}{3}$, $\|\vec{u}\| = \frac{15}{4}$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$ b) $\|\vec{v}\| = \frac{22}{21}$, $\|\vec{u}\| = \frac{35}{6}$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{11\pi}{6}$.
5. a) $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$ b) $\|\vec{v}\| = \frac{22}{21}$, $\|\vec{u}\| = \frac{35}{6}$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{11\pi}{6}$.

2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$.

Calculer

1. a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $2\vec{v}.\vec{u}$ c) $\vec{u}.(3\vec{v})$ d) $7\vec{u}.(-4\vec{v})$
2. a) $\vec{u}.\vec{u}$ b) $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$ c) $\vec{u}.(\vec{u}-2\vec{v})$ d) $2\vec{u}.(-3\vec{u}+5\vec{v})$
3. a) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$ b) $(\vec{u}-\vec{v})^2$ c) $(2\vec{u}+3\vec{v})^2$ d) $(5\vec{u}-2\vec{v}).(7\vec{u}+4\vec{v})$.

3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit $\vec{u}(\frac{2}{3};\frac{3}{4})$ et $\vec{v}(\frac{4}{3};-\frac{1}{2})$ deux vecteurs du plan. Calculer :

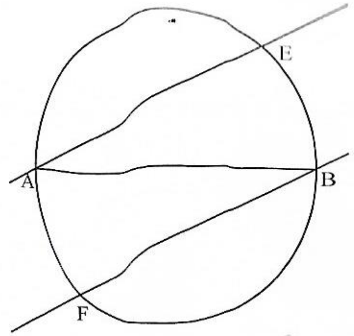
1. a) $\vec{u}.\vec{u}$ b) $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$ c) $\vec{u}.(\vec{u}-2\vec{v})$ d) $2\vec{u}(-3\vec{u}+5\vec{v})$.
2. a) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ b) $(\vec{u}-\vec{v})^2$ c) $(3\vec{u}+12\vec{v})^2$ d) $(6\vec{u}+\vec{v})(3\vec{u}-2\vec{v})$

4

Soit A et B deux points du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [AB]. Une droite (D) passant par A recoupe $(\mathcal{C})$ en E.

La parallèle à (D) passant par B recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en F.

Démontrer que : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BF} = 0$ et $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{FA} = BE^2$.

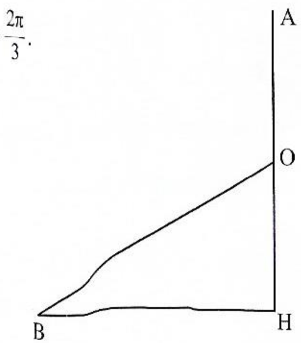


5

Soit les points O, A et B tels que : OA = 2, OB = 4 et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{3}$.

On désigne par H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

1. Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.
2. Justifier que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -4$.
3. Démontrer que O est le milieu du segment [AH].

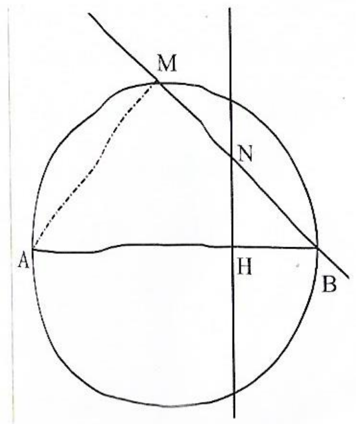


6

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre [AB], H un point de [AB] et (D) la droite perpendiculaire à (AB) en H.

Soit M un point de $(\mathcal{C})$. La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe la droite (BM) en N.

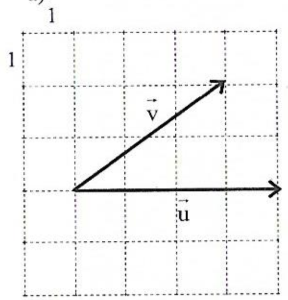
1. Démontrer que ; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AM} = 0$.
2. En déduire que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$.
3. Justifier que : $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA} = BH \times BA$. En déduire que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M parcourt $(\mathcal{C})$.



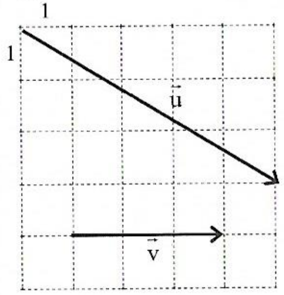
7

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas de figure ci –dessous.

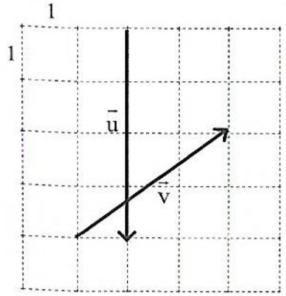
a)



b)



c)



8

L'unité de construction est 2 centimètres.

A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. et M un point du plan.

1. Justifier que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - MA^2$.
2. Déterminer et construire les points M tels que: a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4$ et $MA = 2$; b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 11$ et $MA = 3$.

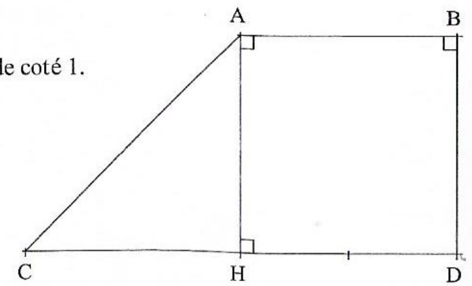
9

On considère la figure ci –contre où AHDB est un carré de coté 1.

et ACH est un triangle isocèle en H.

Calculer les produits scalaires suivants.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.



10

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 6$, $AC = 4$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faire une figure.
2. En utilisant le théorème d'Al Kashi, démontrer que la distance BC vaut $2\sqrt{19}$.
3. Déterminer le cosinus de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$.
4. En déduire les distances HA, HB et HC.

11

ABCD est un parallélogramme de centre O tel que : $AB = 6$, $AD = 2\sqrt{3}$ et $mes\widehat{DAB} = \frac{5\pi}{6}$.

1. Prouver que : a) $BD = 2\sqrt{21}$ b) $AC = 2\sqrt{3}$ c) $\cos\widehat{DOC} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
2. Calculer : a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ b) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|$.

12

L'unité est le centimètre.

Soit les points P, Q et R tels que : $RP = 5$, $RQ = 10$ et $Mes(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = -\frac{\pi}{3}$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que le triangle RPQ est rectangle en P.
3. On désigne par H le projeté orthogonal de P sur (RQ). Déterminer RH, HQ et PH.

13

On prendra un centimètre pour la construction.

Soit A, B et C trois points tels que : $AB = 8$, $BC = 6$ et $AC = 10$

1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On désigne par H le pied de la hauteur issue de B.
4. Calculer les distances AH, BH et HC.
5. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.
6. Une droite passant par le milieu de [BC] coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points P et Q.

Déterminer PQ.

14

L'unité de construction est le centimètre.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : AB = 3 et BC = 4. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et K celui de H sur la droite (AC).

1. Faire une figure.
2. En utilisant le théorème de la médiane, démontrer que : $AH = \sqrt{5}$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = 5$ puis que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = 3AK$.
4. En déduire la valeur de AK.

15

OAB est un triangle équilatéral de sens direct de coté $\sqrt{3}$ de centre Ω. $O\Omega J$ est un triangle rectangle isocèle en O et de sens direct. I est le milieu du segment [AB] et K le point d'intersection des droites (ΩJ) et (OB).

1. a) Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{OKJ}$ est $\frac{5\pi}{12}$.

b) Justifier que la distance $O\Omega$ est égale à 1.

2. En déduire que (O,Ω, J) est un repère orthonormé direct.
3. Démontrer que les droites (OJ) et (AB) sont parallèles.
4. a) Justifier que le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega J}$

est $(-1 ; 1)$ dans la base $(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{OJ})$

b) Déterminer le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IB}$. dans la même base.

Dans la même base.

c) En déduire que le couple de coordonnées du point B dans le

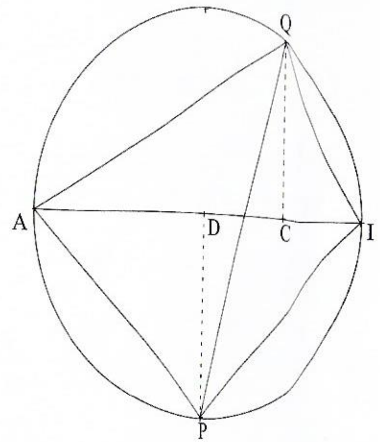
repère (O,Ω, J) est $(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

5. Vérifier que : $BO \times \Omega J = \sqrt{6}$ et $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{\Omega J} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

6. En déduire que : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

16

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre [AI] de longueur $2\sqrt{2}$, A et P deux points de $(\mathcal{C})$ tels que la mesure de l'angle $\widehat{IAQ}$ soit de mesure $\frac{\pi}{6}$ et AP = PI. On note C et D les projetés orthogonaux respectifs des points Q et P sur la droite (AI). *Le but de cet exercice est de déterminer par le produit scalaire le cosinus de l'angle* $\widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{PQ})}$.



1. Justifier que $\frac{\pi}{6}$ est la mesure de l'angle $\widehat{IPQ}$ et que $\frac{\pi}{4}$ est la mesure de l'angle $\widehat{IQP}$.
2. Démontrer les résultats suivants.

a) $\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IA} = IQ^2$ et $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IA} = IP^2$.

b) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IQ}$.

3. Démontrer que :

$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QI} = QP \times QI \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PI} = PQ \times PI \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. En utilisant ce qui précède, démontrer que :

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = PQ(\frac{\sqrt{2}}{2} \times QI - \frac{\sqrt{3}}{2} \times PI)$

5. Etablir les résultats suivants :

$QI = \sqrt{2}$, $PI = 2$, $IC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AD = \sqrt{2}$ et $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Démontrer que : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = -2$.
7. En utilisant les questions 4) et 6), établir que : $PQ = 1 + \sqrt{3}$.
8. Conclure.

Droites et cercles

L'essentiel du cours sur les droites et les cercles

1. *Vecteur normal à une droite.*

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite (D) si la direction de $\vec{n}$ est perpendiculaire à (D).

2. *Equation cartésienne d'une droite*

Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$.

3. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est une équation d'un cercle de centre de coordonnée $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R.

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1

Lesquels d'entre les points $A\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas ci-dessous ?

a) $(\mathcal{D}) : x - 8y + 6 = 0$ b) $(\mathcal{D}) : x + 4y - 3 = 0$ c) $(\mathcal{D}) : x - 11y + 12 = 0$

2

Donner un vecteur normal à la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants

1. a) $2x + 3y - 5 = 0$ b) $-2x + y + 1 = 0$ c) $x + y - 5 = 0$ d) $2x + 3 = 0$
2. a) $y = 0$ b) $y = -2$ c) $5x = 1$ d) $-6x = 3$
3. a) $2x = y$ b) $x = -y$ c) $x = 3(-5y + 2)$ d) $4(-x+1) = 2(-y)$
4. a) $\frac{2x + 3y - 1}{5} = 0$ b) $\frac{4x - 8y + 1}{2} = 0$ c) $\frac{6x + 4y - 32}{8} = -5$ d) $\frac{2(y-6x) + 20}{4} = \frac{2}{3}$
5. a) $y = -2x + 2$ b) $y = \frac{-2x+3}{5}$ c) $\frac{y}{2} = \frac{-3(2-9x)}{12}$ d) $\frac{y-4}{3} = \frac{-2x+7}{5}$

3

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A donné et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u}(1; 2)$ et $A(3; -2)$ b) $\vec{u}(4; -2)$ et $A(0; 1)$ c) $\vec{u}(-5; -2)$ et $A(3; 0)$.

4

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas suivants.

a) $A\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $A\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

5

Les droites (D) et (D') sont-elles parallèles dans chacun des cas suivants ?

1. a) (D): $2x - 4y + 7 = 0$ et (D): $6x - 12y + 1 = 0$ b) (D): $12x + 5y + 20 = 0$ et (D): $10x + 4y + 9 = 0$.
2. a) (D) : $-\frac{7}{2}x + \frac{5}{3}y + \frac{1}{4} = 0$; (D') : $\frac{7}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{8} = 0$. b) (D) : $\frac{8}{15}x + \frac{5}{2}y - \frac{9}{13} = 0$; (D') : $\frac{28}{25}x + \frac{21}{4}y = 0$

6

Justifier que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires dans chacun des cas suivants.

1. a) (D): $x - y + 2 = 0$ et (D'): $2x + 2y + 5 = 0$ b) (D): $x + 3y - 8 = 0$ et (D'): $3x - y + 5 = 0$
2. a) (D): $x\sqrt{2} - y + 2 = 0$ et (D'): $\sqrt{3}x + y\sqrt{6} + 5 = 0$ b) (D): $\frac{1}{2}x + \frac{10}{3}y - \frac{5}{7} = 0$ (D'): $\frac{5}{2}x - \frac{3}{8}y + \frac{2}{3} = 0$

7

Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre A et de rayon R dans chacun des cas suivants.

1. a) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R = 1$ b) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R = 6$ c) $A\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $R = 4$

2. a) $A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $R = 1$ b) $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $R= 3$ c) $A\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$ et $R = 10$

3. a) $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $R = \sqrt{3}$ b) $A\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ et $R = 4\sqrt{2}$ c) $A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $R = \frac{2}{3}$

8

En considérant les équations ci –dessous, indiquer le centre et le rayon du cercle dans chacun des cas suivants

1. a) $(x-6)^2+(y-10)^2=3^2$ b) $(x-4)^2+(y+11)^2=25$ c) $(x+15)^2+(y+1)^2=4$
2. a) $(x+4)^2+y^2=1$ b) $x^2+(y-1)^2=3$ c) $(x-9)^2+(y+16)^2=8$

9

Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(x\,;y)$ dans chacun des cas suivants :

1. a) $x^2+y^2-6y=0$ b) $x^2+2x+y^2=0$ c) $(x-7)^2+y^2-8y=0$
2. a) $x^2+4x+y^2-6y=0$ b) $x^2-10x+y^2-2y+2=0$ c) $x^2+5x+y^2+y=-10$
3. a) $4(x+1)^2+4(y-1)^2=8$ b) $(3x+3)^2+9(y+1)^2=16$ c) $(4x-1)^2+(4y+4)^2=64$
4. a) $x(x+1)+(y-1)^2=2$ b) $(x+3)^2+(y+5)(y-5)=11$ c) $(x-3)(x+2)+(y+4)(y-1)=4$

10

Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB] dans chacun des cas suivants.

a) $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ c) $A\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$

11

Déterminer et construire l'intersection de la droite (D) et du cercle (C) dans chacun des cas.

a) $(\mathcal{D}): x-y+2=0$ et $(\mathcal{C}): x^2+y^2=10$

b) $(\mathcal{D}): 2x-y-4=0$ et $(\mathcal{C}): (x-1)^2+(y+7)^2=5$

c) $(\mathcal{D}): y=x+2$ et $(\mathcal{C}): (x-2)^2+(y+1)^2=4$

12

Déterminer et construire l'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans chacun des cas suivants

a) $(\mathcal{C}'): (x-1)^2+(y-1)^2=2$ et $(\mathcal{C}): (x-2)^2+y^2=4$

b) $(\mathcal{C}'): x^2+y^2=1$ et $(\mathcal{C}): (x-1)^2+y^2=4$

c) $(\mathcal{C}'): (x+1)^2+(y-2)^2=1$ et $(\mathcal{C}): (x+1)^2+(y+1)^2=2$

13

Démontrer que la droite (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A dans chacun des cas suivants.

a) $(\mathcal{C}): (x-1)^2+(y-4)^2=5$ et $(T): 2x+y-1=0$ et $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

b) $(\mathcal{C}): x^2+(y+1)^2=25$, $(T): 4x+3y-22=0$ et $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

c) $(\mathcal{C}): (x+3)^2+(y+3)^2=18$, $(T): x-y+6=0$ et $A\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$.

14

1. a) Tracer le cercle de $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1
   b) Tracer la droite $(\mathcal{D})$ passant par les points $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
2. a) Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$
   b) Démontrer que $4x+3y-5=0$ une équation de $(\mathcal{D})$.

3. a) Vérifier que le point $K\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{9}{15} \end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

b) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal à la droite $(\mathcal{D})$.

4. Déduire de ce qui précède que $(\mathcal{D})$ est la tangente à $(\mathcal{C})$ en K.

15

1. Démontrer que l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(x,y)$ tels que : $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$ est le cercle de centre $A(-2,1)$ et de rayon 3.
2. On note (Δ) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $y = x + 2$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (Δ) et $(\mathcal{C})$.
3. Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$.

16

L'unité de construction est le centimètre. Soit les points $A(1,0)$ et $B(-1,0)$.

1. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points $M(x,y)$ tels que : $MA^2 + MB^2 = 10$ est un cercle que l'on caractérisera.
2. Justifier que le point $F(0,2)$ appartient à (Γ).
3. Déterminer une équation à la tangente (T) à (Γ) au point F.
4. Placer A, B et F. Construire (Γ) ainsi que la tangente (T).

Homothéties

L'essentiel du cours sur les homothéties

1. *Image d'un point par une homothétie.*

M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k si : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

2. *Propriétés des homothéties*

Un point M, son image M' par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

Propriété fondamentale des homothéties :

Soit h une homothétie de rapport k.

On pose : $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

3. *Homothéties et configurations géométriques.*

Les homothéties transforment les droites en droites, les cercles en cercles, deux droites parallèles en deux droites parallèles, deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

1

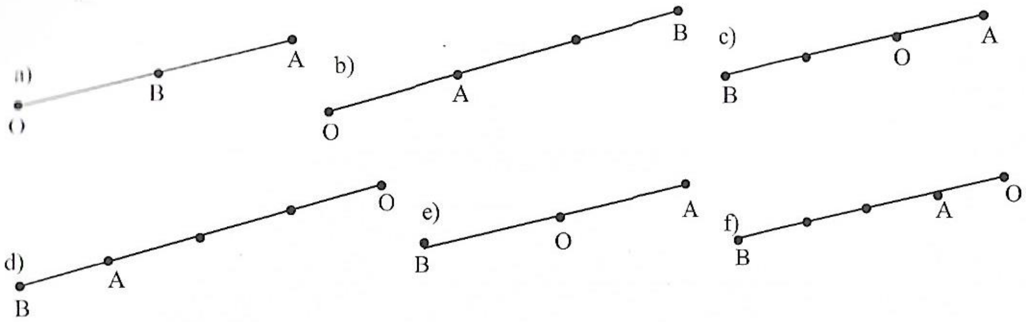
Utiliser une homothétie pour traduire les égalités vectorielles dans chacun des cas ci-dessous.

1. a) $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA}$. b) $\overrightarrow{FD} = -3\overrightarrow{FC}$ c) $4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$.

2. a) $\overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$ b) $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ c) $\frac{8}{5}\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PK}$.

2

Soit h l'homothétie de centre O telle que le point A admette pour image le point B dans chacun des cas de figure ci-dessous, déterminer le rapport de h.



3

Ecrire l'égalité vectorielle qui traduit l'expression donnée dans chacun des cas suivants.

a) B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

b) A est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport -3.

c) O est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

d) O est l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 4.

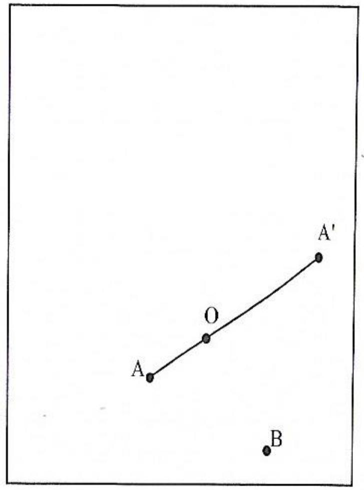
e) A est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport -1.

4

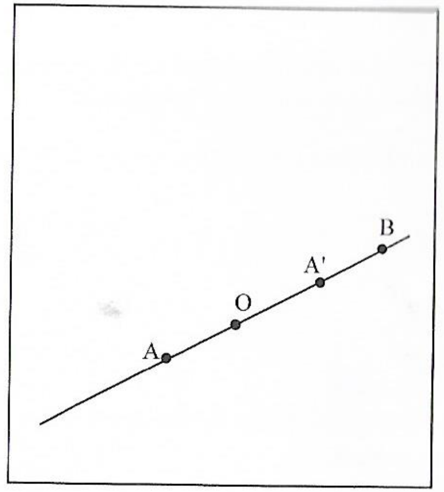
Soit A, A' et O trois points distincts du plan ; et B un point n'appartenant pas à la droite (AO).

Construire l'image B' du point B par l'homothétie de centre O qui transforme A en A' dans chacun des cas suivants.

a) B n' appartient pas à la droite (AA').



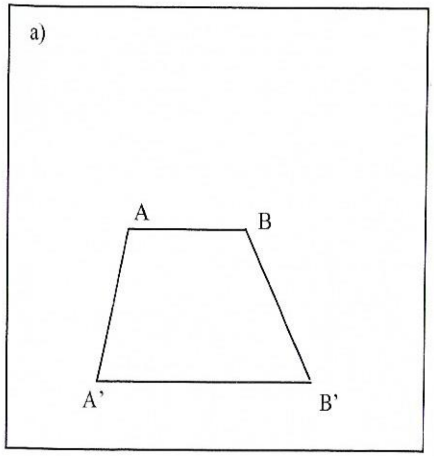
b) B appartient à la droite (AA').

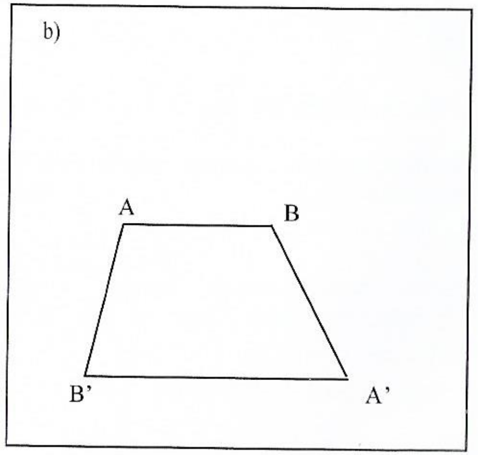


5

Soit A, A' , B et B' quatre points distincts du plan tels que les droites (AB) et (A'B') soient parallèles.

Construire le centre I de l'homothétie qui transforme A en A' et B en B' dans chacun des cas de figure suivants.





6

Soit M et N deux points du plan et O un point n'appartenant pas à la droite (MN). On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport k.

Construire selon la valeur de k l'image de (MN) par h.

a) $k = 2$ b) $k = \frac{1}{2}$ c) $k = -1$ c) $k = -\frac{3}{2}$

7

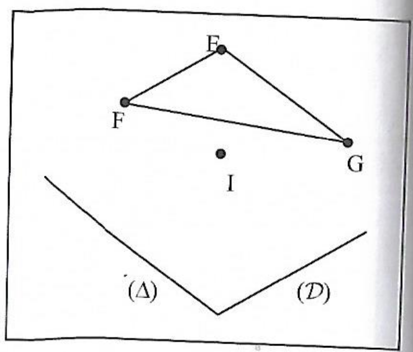
Soit O et A deux points du plan. On considère le cercle (C) de centre O et de rayon OA. Soit (D) une droite passant par A.

Soit B un point de la droite (D) et A ' le point tel que : $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Construire le cercle (C') image de (C) par l'homothétie h de centre B transformant A en A '.
   On n'utilisera pas le rapport de h pour la construction.
3. Déterminer le rapport de h puis préciser le rayon du cercle (C') dans le cas OA = 2.

8

Soit EFG un triangle et I un point du plan. On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme la droite (EF) en (D) et la droite (EG) en (Δ).



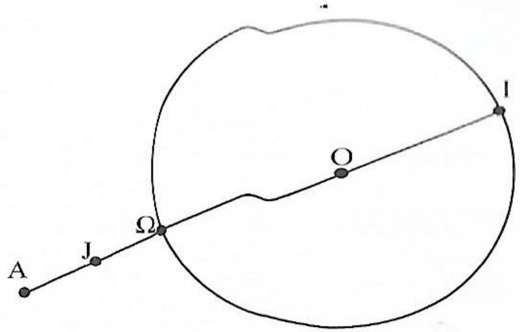
1. Placer l'image E' du point E par h.
2. Construire en utilisant uniquement une règle non graduée, F' = h(F) et G' = h(G).

Justifier vos réponses aux questions 1) et 2).

9

Soit A, O, I, Ω et J quatre points alignés tels que J milieu de [AΩ], Ω milieu de [AO] et O milieu de [IΩ].

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de diamètre [IΩ].



1. Faire une figure.
2. Déterminer et construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par l'homothétie h définie dans chacun des cas suivants.
   a) h est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
   b) h est l'homothétie de centre O et de rapport −1.
   c) h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
   d) h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.
   e) h est l'homothétie de centre I et de rapport 2.
   f) h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{5}{2}$.

10

Soit A point du plan. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme M en M'.

1. a) $\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$ b) $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{AM'} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AM}$.
2. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM'}$ b) $\overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{M'M}$ c) $\overrightarrow{AM'} = 7\overrightarrow{MM'}$
3. a) $2\overrightarrow{MM'} = -9\overrightarrow{AM'}$ b) $3\overrightarrow{MM'} + 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$ c) $5\overrightarrow{AM'} - 4\overrightarrow{MM'} = 6\overrightarrow{MA}$

11

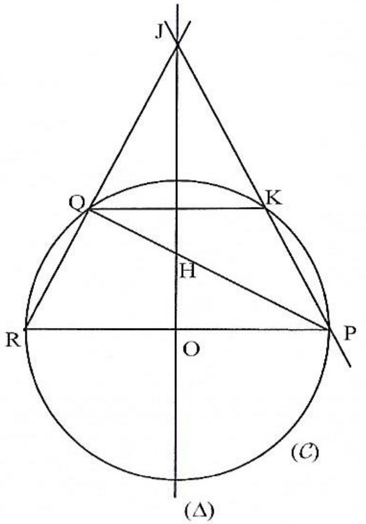
Soit ABC un triangle tel que les points A', B' et C' soient les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]. On désigne par G le centre de gravité respectif de triangle ABC.

On note h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les images des points A, B et C par h.
3. En déduire le centre de gravité du triangle A'B'C'.

12

Soit (C) un cercle centre O et de diamètre [PR] et ; Q un point de (C). La médiatrice (Δ) du segment [PR] coupe la droite (PQ) en un point H et (RQ) en un point J .La parallèle à la droite (RP) passant par Q recoupe (C) en K.



1. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle RPJ.
2. On désigne par h l'homothétie de centre J qui transforme R en Q.
Démontrer que K est l'image de P par J.
3. a) En déduire l'image du triangle PJR par l'homothétie h.
   b) Construire le point $H' = h(H)$.
4. Déterminer l'orthocentre du triangle KJQ.

13

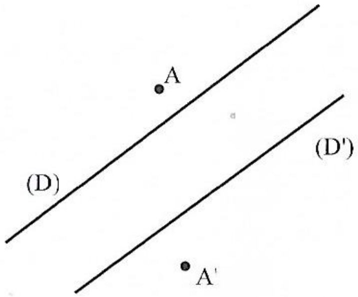
Soit ABC un triangle et E un point appartenant au segment [AB]. La droite passant par E et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) en F. On désigne par h l'homothétie de centre A qui transforme B en E.

1. Faire une figure.
2. a) Justifier que F est l'image de C par h.
   b) Construire le centre O de l'homothétie H qui transforme E en C et F en B.
3. Construire le point $I = H(A)$.
4. Démontrer que le quadrilatère ABIC est un parallélogramme.

14

Soit A et A' deux points distincts du plan et (D) en (D') deux droites parallèles.

Construire le centre Ω de l'homothétie h qui transforme A en A' et (D) et (D')



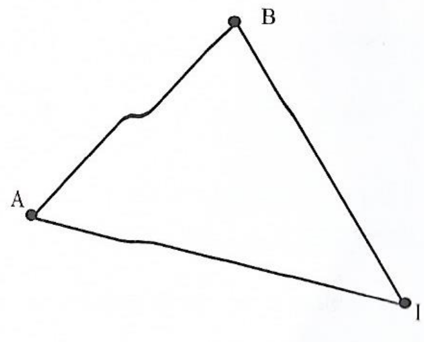
15

Soit MNOP un parallélogramme et Ω le milieu du segment [MN].

1. Faire une figure, qu'on complétera au fur et à mesure.
2. Construire le point d'intersection A des droites (ON) et $(P\Omega)$.
3. a) Démontrer qu'il existe une 'homothétie h qui transforme N en O et Ω en P. On précisera son centre.
   b) Déterminer le rapport de l'homothétie h.
4. On désigne par h ' l'homothétie de centre Ω qui transforme N en M.
a) Déterminer le rapport de h'.
b) Justifier que : $h'(A) = P$.
5. On note I le milieu du segment [OM] et J le point d'intersection des droites (ΩI) et (AM).
a) Justifier que Ω est le milieu du segment [AP].
b) En déduire que J est le milieu du segment [AM].
6. Démontrer que : $h'(I) = J$.

16

Soit A, B et I trois points non alignés du plan. H l'homothétie de centre I et de rapport 2



1. Construire les points A' et B' par H.
2. Déterminer puis construire par l'homothétie H l'image de chacun des ensembles suivants.
a) la droite (AB)
b) le cercle de centre A passant par B.
c) le cercle de diamètre [AB].
d) le cercle circonscrit au triangle ABI.

17

L'unité est le centimètre.

Soit ABC et A'B'C' deux triangles dont les aires sont notés respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

1. Déterminer $\mathcal{A}'$ si $\mathcal{A}$ est égale à 13 et :
a) A'B'C' est l'image de ABC par une homothétie de rapport 3.
b) A'B'C' est l'image de ABC par une homothétie de rapport -2.
2. On suppose que A'B'C' est l'image de ABC par une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$.

On pose : AB = 5, BC = 4 et AC = 3.

Quelle est la nature du triangle ABC.

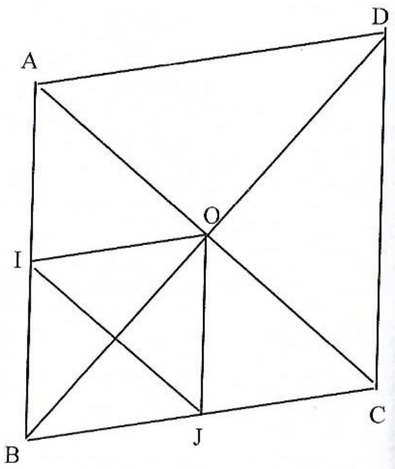
3. a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$.

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}'$.

18

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On note I milieu [AB] et J milieu de [BC]. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme :

a) ABC en AIO
b) IBJ en ABC
c) ABC en CAD



19

L'unité est le centimètre.

Soit O et O' deux points distincts du plan tels que OO' = 12. On désigne par Ω le point du plan tel que : $\overrightarrow{O'O} = 3\overrightarrow{O\Omega}$.

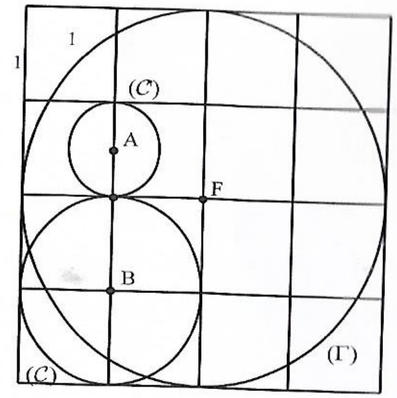
1. Justifier que O' est l'image de O par une h homothétie de centre Ω dont on précisera le rapport.
2. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 4 et ; $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre O' de rayon 16.
a) Faire une figure.
b) Démontrer que $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par h.
3. Soit A, B et C trois points du cercle $(\mathcal{C})$. Les droites (ΩA), (ΩB) et (ΩC) coupent $(\mathcal{C}')$ en des points A', B' et C'.
a) Démontrer que Ω appartient aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
b) Démontrer que A'B'C' est l'image de ABC par h.

20

Sur la figure ci – contre sont représentés des cercles $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$, (Γ) et (Γ').

Déterminer le centre et de rapport de chacune des homothéties qui transforment :

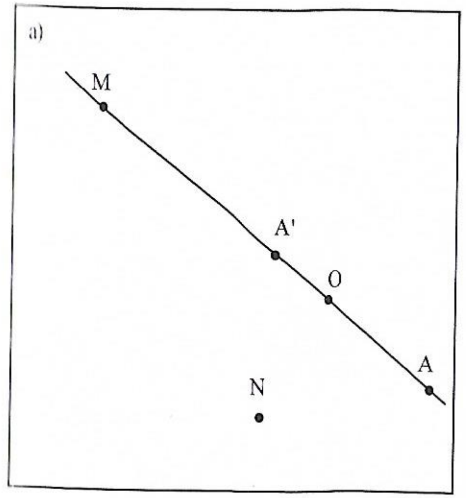
a) $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$
b) $(\mathcal{C}')$ en (Γ)
c) $(\mathcal{C})$ en (Γ)

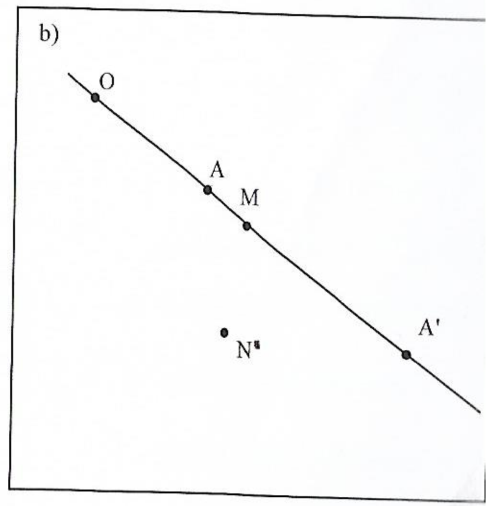


21

Soit O, A, A' et M quatre points alignés et ; N un point n'appartenant pas à la droite (OA).

Reproduire les figures ci –dessous puis construire dans chacun des cas les images M' et N' des points M et N par l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.





22

Soit A un point du plan et ; M et N deux points tels que : $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MA}$.

1. Démontrer que N est l'image de M par une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport.
2. Soit $(\mathcal{D})$ un droite ne passant pas par A et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$. Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M décrit :

a) La droite $(\mathcal{D})$

b) La droite passant par A et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.

c) Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A passant par H

23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

On donne : $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. a) Placer les points A, B et E.

b) Justifier que A est l'image de E par une homothétie h de centre B dont on précisera le rapport.

2. Construire le point T de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ et son image T' par H.
3. Déterminer les coordonnés de T' image de T par h.

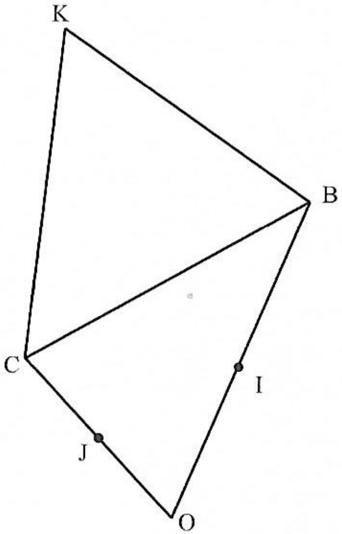
24

Soit OBC et BKC deux triangles. On note I et J les milieux respectifs des segments [OB] et [OC]

On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport 2 et ;

h ' l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.

1. Justifier que : h(I) = B et h(J) = C.
2. Construire les points P et Q tels que : P = h '(B) et Q = h '(C).



3. En utilisant la propriété fondamentale des homothéties, démontrer que le quadrilatère PQJI est un parallélogramme.

25

Soit O, A, et B trois points non alignés et . On désigne par K et F les images respectives des points A et B p l'homothétie h de centre O et de rapport 3.

1. Faire une figure à compléter progressivement.
2. Soit I le milieu du segment [AB], et l'homothétie h' de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Construire les points A' et B' images respectives de K et F par h'.

3. Soit I' le milieu du segment [KF]. Démontrer que I' est l'image de I par h.
4. a) Démontrer que O est l'image de I' par h'.

b) En déduire que O est le milieu du segment [A'B'].

5. Démontrer qu'il existe une homothétie H qui transforme A en A' et B en B'.
6. a) Préciser le rapport de H.

b) Construire le centre Ω de H.

c) Déterminer l'image de I par l'homothétie H.

Rotations

L'essentiel du cours sur les rotations

1. *Image d'un point par une rotation*

M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α si : $OM' = OM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}}) = \alpha$.

2. *Propriétés des rotations*

Propriété fondamentale des rotations. Soit R une rotation d'angle α.

On pose : $R(M) = M'$ et $R(N) = N'$ On a : $M'N' = MN$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{MN}}) = \alpha$.

Les rotations transforment une droite en droite, un cercle en un cercle de même rayon, deux droites parallèles en deux droites parallèles, deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

1

Interpréter en utilisant une rotation les résultats dans chacun des cas suivants.

1. a) $OB = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$. b) $OB = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{6}$.

2. a) $AO = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$. b) $AO = AB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \frac{2\pi}{3}$

3. a) $OA = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}}) = \pi$. b) $OA = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{5}$

2

1. Soit A et B deux points distincts du plan et I un point du plan.

Construire l'image de la (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Soit CDE un triangle et Ω un point du plan.

Construire l'image du triangle CDE par la rotation de centre Ω et d'angle π.

3. Soit FGHJ un carré et P un point du plan.

Construire l'image d'un carré FGHJ par la rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3

Soit AIOL, IBJO, OJCK et LOKD des carrés de sens direct et de centres respectifs R, S, T et U.

1. Construire l'image ($\mathcal{C}$ ') du cercle ($\mathcal{C}$) par la rotation r dans chacun des cas ci –dessous.

a) ($\mathcal{C}$) est le cercle de centre R passant par A et r est la rotation de centre O d'angle π.

b) ($\mathcal{C}$) est le cercle de diamètre [IB] et r est la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) ($\mathcal{C}$) est le cercle passant par les points L, I et J et r est la rotation de centre T d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. Construire l'image ($\mathcal{D}$') de la droite ($\mathcal{D}$) par la rotation r dans chacun des cas suivants.

a) ($\mathcal{D}$) est la droite (AD) et r est la rotation de centre O d'angle π.

b) ($\mathcal{D}$) est la droite (IL) et r est la rotation de centre S d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) ($\mathcal{D}$) est la droite (RS) et r est la rotation de centre R d'angle $\frac{\pi}{4}$.

4

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. Voir figure ci – dessous.

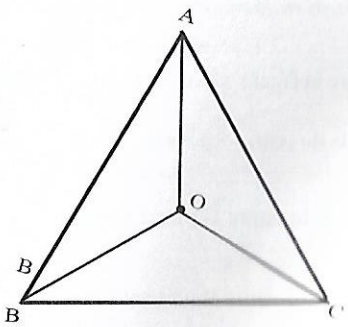
Déterminer les images des points A, B et C par la rotation R définie dans chacun des cas suivants.

1. a) R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a) R est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) R est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.



5

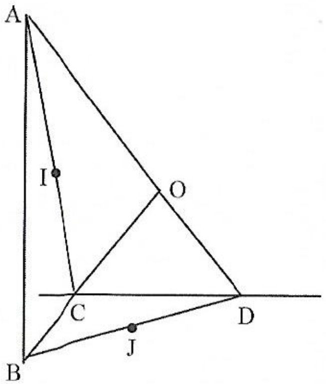
On considère les points A, B, C, D, E et F tels que : $R(A) = D$, $R(B) = E$ et $R(C) = F$.

Déterminer l'image de l'ensemble (Γ) dans chacun des cas suivants.(On justifiera la réponse)

1. (Γ) est la droite (AB).
2. (Γ) est la demi – droite $[AC)$
3. (Γ) est le segment $[BC]$
4. $\Gamma)$ est le cercle de centre A passant par C
5. (Γ) est la cercle de diamètre $[BC]$
6. (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

6

Soit OAB un triangle isocèle en O tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$



et C un point du segment $[OB]$. La droite passant par C et

perpendiculaire à (AB) coupe la droite (OA) en un point D.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$

1. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par R.

2. a) Démontrer que le triangle OCD est isocèle rectangle en O.

b) En déduire l'image de C par R.

3. Démontrer que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

7

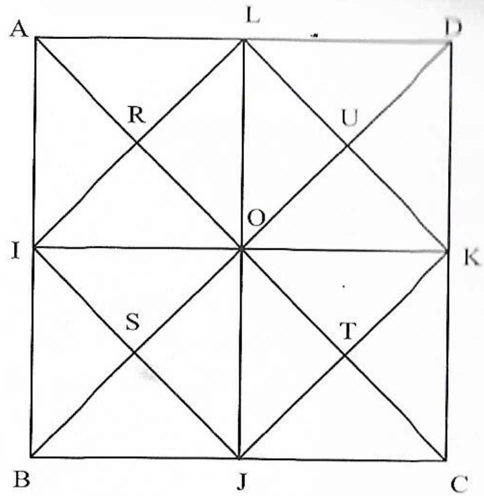
On considère la figure ci –contre et on désigne par :

$(\mathcal{C})$ le cercle de centre S passant par B.

$(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre U passant par D.

$(\mathcal{C}_2)$ le cercle de centre R passant par O.

$(\mathcal{C}_3)$ le cercle de centre R passant par A.



Quelle est la rotation r qui transforme :

a) $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_1)$

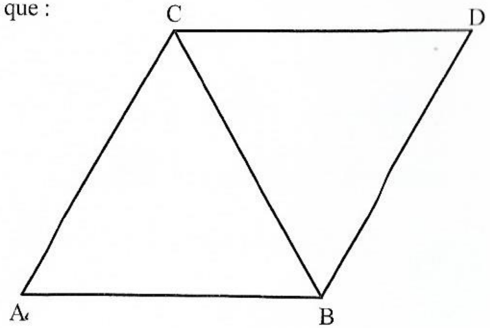
b) $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_2)$

c) $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_3)$

On ne demande pas de justifier la réponse.

8

On donne deux triangles équilatéraux ABC et BDC tels que :



$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$

Déterminer la rotation R dans chacun des cas suivants

a) R transforme A en B et B en D.
b) R transforme A en D et B en C.
c) R transforme A en D et B en B.

9

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de mêmes rayons, de centres respectifs O et O', se coupant en deux points A et B. On note I le milieu de $[OO']$. On désigne par r la rotation de centre I et d'angle π.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par r.
3. Démontrer que le quadrilatère OBO'A est un losange.
4. En déduire l'image de A par r.

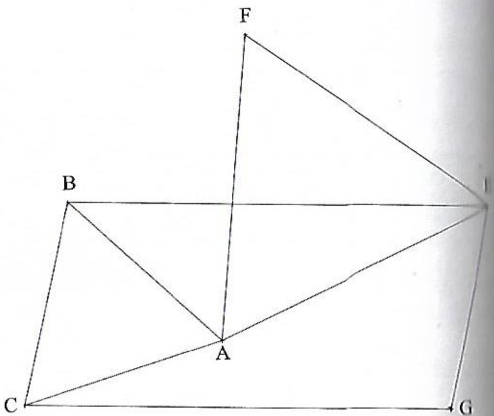
10

Soit ABO un triangle équilatéral et K un point tels que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$ et $2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AO}$.

1. Faire une figure.
2. Quelle est la rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en O.
3. Construire l'image E de K par la rotation R.
4. Démontrer que les droites (AB) et (OE) sont perpendiculaires.

11

Soit ABC et AEF deux triangles équilatéraux de sens direct et EBCG un parallélogramme.



1. Déterminer le centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ telle que : r(B) = C et r(E) = F.
2. En déduire que : CF = BE et $Mes(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.
3. Démontrer que le triangle FCG est équilatéral de sens direct.

12

1. Soit OAM un triangle rectangle isocèle en O et de sens direct et I milieu de [AM]
Déterminer une rotation de centre O qui transforme A en M.
2. En déduire et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M lorsque A décrit le cercle de centre I passant par A.

13

Soit PQR un triangle tel que : QR = QP et $Mes(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}}) = \frac{\pi}{12}$.

1. a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}})$.
b) Déterminer la rotation r de centre Q qui transforme R en P.
2. On pose : P' = r(P). Construire P'. .
3. a) Démontrer que Q est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle P'PR.

4. En déduire que le triangle RQP' est équilatéral

14

Soit ABO et OEF deux triangles rectangles isocèles en O de sens direct tels que : OB = OE.

1. Démontrer que les droites (AE) et (FB) sont perpendiculaires.*(On pourra considérer la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$).*
2. Justifier que les points A, B, E et F appartiennent à un même cercle que l'on précisera. On notera (Γ) ce cercle.
3. a) Démontrer que les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{EBF}$ ont la même mesure.
b) En déduire que les droites (BE) et (AF) sont parallèles.
4. On désigne par I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
Démontrer que : EI = BI et IA = IF.
5. On note R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer R(B) et R(F).

15

Soit O, I et O' trois points tels que O' soit l'image de O par la rotation d de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires telles O appartienne à (Δ) et O' appartienne à (Δ').

1. Démontrer que (Δ') est l'image de (Δ) par la rotation d.
2. On note J le point d'intersection de (Δ') et de (Δ). Démontrer que les points J, O, I et O'. appartiennent à un même cercle
3. Construire le cercle de la question précédente.

16

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et H le pied de la hauteur issue de C.

La rotation R de centre H et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme A en A', B en B' et C en C'.

La parallèle à la droite (AC) passant par A' coupe la droite (HC') en G et (B'C') en I.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que le triangle A'B'C' est équilatéral de sens direct.
3. Démontrer que le quadrilatère AA'BB' est un rectangle de centre H.

3. Démontrer que le quadrilatère AA'BB' est un rectangle de centre H.

4. Démontrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'I}})$ sont égaux.

5. a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$.

   b) En déduire que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'I}}) = \frac{\pi}{6}$

6. a) Démontrer que I est le milieu de [B'C'].

   b) Démontrer G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

7. En déduire que G est l'image de O par R.

17

Soit ABE un triangle rectangle en A tel que : BE = 2AB et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de [BE]

et $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABE. On désigne par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. a) Démontrer que A est l'image du point E par r.

   b) Construire les points C = r(A) et D = r(B).

2. a) Démontrer que le triangle CDA est rectangle en C.

   b) Démontrer que le quadrilatère ABDE est un rectangle.

3. Déterminer l'image du point C par r.

4. Construire l'image F du point D par r.

5. Démontrer que le polygone ABCDEF est un hexagone régulier.

18

Soit ABCD un carré et BCE un triangle équilatéral tous deux de sens direct.

On note R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et R' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1. a) Déterminer l'image de D par R puis l'image de B par R'.

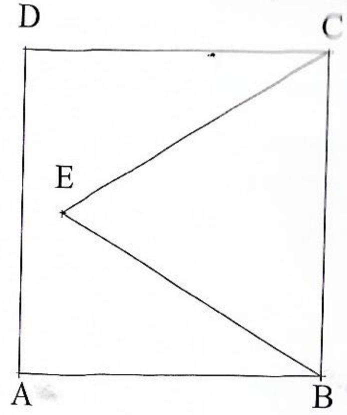
   b) Déterminer l'angle de la rotation de centre C qui transforme D en E.

2. a) Justifier que C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis déterminer l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminer le centre de la rotation d'

qui transforme D en E.



19

Soit OMN un triangle rectangle isocèle en O avec $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{2}$ et MNP un triangle équilatéral de sens direct. On note R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et R' la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'image de N par R puis l'image de M par R'.
3. On pose : J = R(M) et I = R'(J).

a) Construire les points I et J.

b) Démontrer que le triangle MNJ est rectangle isocèle en M.

c) Démontrer que le triangle PMJ est isocèle en M.

d) En déduire que la droite (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JMP}$.

4. a) Déterminer le mesure de l'angle $\widehat{JMP}$ puis celle de l'angle $\widehat{IMP}$.

   b) Démontrer que N est le centre du cercle circonscrit au triangle MPI.

5. Déduire de ce qui précède que I est l'image de M par une rotation de centre N dont on précisera l'angle.

20

Soit ABC et ADE deux triangles équilatéraux de sens direct.

On note r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1. Faire une figure.
2. a) Déterminer r(D) puis r'(A).

b) Construire : $F = r'(E)$.

3. On désigne par r" la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

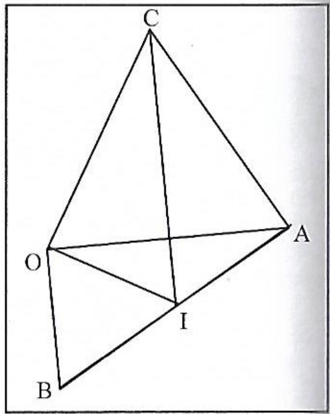
Déterminer les images par r" de chacun des points B et D.

4. En utilisant ce qui précède, démontrer que le quadrilatère DEFB est un parallélogramme.

21

Soit OBA un triangle rectangle en O tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}) = \frac{\pi}{3}$.

On note I le milieu du segment [AB]. La parallèle à la droite (OB) passant par I et la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A se coupent en un point C.



On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Démontrer que I est l'image de B par r.
2. Démontrer que :

a) $Mes\widehat{OAC} = \frac{\pi}{3}$.

b) AI = OB puis que AC = OA.

3. En déduire la nature du triangle OAC.
4. Déterminer l'image de A par r.

22

Soit EIF un triangle isocèle en I tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}}) = \frac{\pi}{2}$. Soit K le symétrique de E par rapport à F.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle IFK.

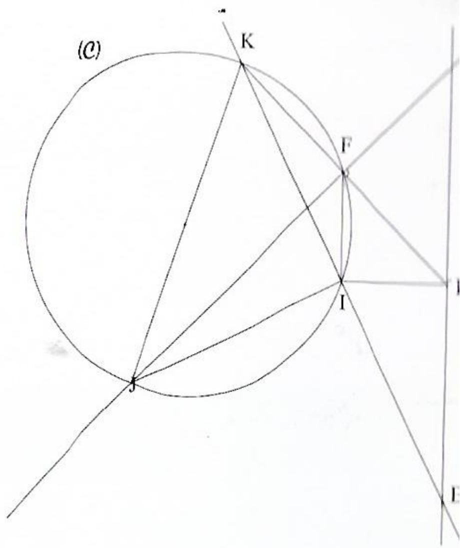
La perpendiculaire à la droite (FK) passant par F recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point J. On note R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Justifier que F est l'image de E par R.
2. Démontrer que le triangle KJI est rectangle isocèle en I.
3. En déduire l'image de K par R.
4. La perpendiculaire à la droite (IE) passant par E et la droite (IK) se coupent en B.

a) Justifier que les droites (IF) et (EB) sont parallèles.

b) En déduire que I est le milieu du segment [BK]

5. Justifier que : IB = IJ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{2}$.
6. En déduire l'image du point J par la rotation R.



CORRIGÉS

Ensemble des nombres réels

1

1. a) $\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7+4}{3}=\frac{11}{3}$; $\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$.

b) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5+2\times4}{4\times5}=\frac{5+8}{20}=\frac{13}{20}$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{13}{20}$.

c) $\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=\frac{7+5\times2}{12}=\frac{7+10}{12}=\frac{17}{12}$; $\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=\frac{17}{12}$.

d) $\frac{9}{10}+\frac{1}{15}=\frac{9}{5\times2}+\frac{1}{3\times5}=\frac{9\times3+1\times2}{5\times2\times3}=\frac{29}{30}$;

$\frac{9}{10}+\frac{1}{15}=\frac{29}{30}$.

2. a) $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=\frac{7-4}{3}=\frac{3}{3}=1$; $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=1$.

b) $-\frac{9}{11}+\frac{5}{8}=\frac{-9}{11}+\frac{5}{8}=\frac{-9\times8+5\times11}{11\times8}=-\frac{17}{88}$;

$-\frac{9}{11}+\frac{5}{6}=-\frac{17}{88}$.

c) $-\frac{3}{14}-\frac{5}{6}=-\frac{3}{7\times2}-\frac{5}{6\times2}=\frac{-3\times6-5\times7}{7\times2\times6}$

$=\frac{-53}{7\times2\times6}=\frac{-53}{84}$; $-\frac{3}{14}-\frac{5}{6}=-\frac{53}{84}$.

d) $\frac{7}{2}+\frac{4}{5}-3=\frac{7}{2}+\frac{4-3\times5}{5}=\frac{7}{2}+\frac{-11}{5}$

$=\frac{7\times5-11\times2}{10}=\frac{13}{10}$;

$\frac{7}{2}+\frac{4}{5}-3=\frac{13}{10}$.

2

1. a) $2-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2\times3-7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{3}{3}$;

$2-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=1$.

b) $-\frac{9}{4}+\frac{1}{5}+\frac{7}{2}=-\frac{9}{4}+\frac{7}{2}+\frac{1}{5}=-\frac{-9+7\times2}{4}+$

$=\frac{5}{4}+\frac{1}{5}=\frac{29}{20}$; $-\frac{9}{4}+\frac{1}{5}+\frac{7}{2}=\frac{29}{20}$.

c) $-\frac{7}{2}\times\frac{5}{9}(-\frac{1}{10})=\frac{7\times5\times1}{2\times9\times10}=\frac{7}{2\times9\times2}=\frac{7}{36}$;

$-\frac{7}{2}\times\frac{5}{9}(-\frac{1}{10})=\frac{7}{36}$.

d) $\frac{10}{3}\times\frac{6}{15}\times\frac{9}{4}=\frac{10\times6\times9}{3\times15\times4}=3$; $\frac{10}{3}\times\frac{6}{15}\times\frac{9}{4}=3$.

2.a) $-\frac{7}{5}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{6}\times\frac{4}{5}=-\frac{7}{4}+\frac{14}{45}=-\frac{259}{180}$.

b) $\frac{5+\frac{1}{2}}{\frac{2}{7}+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{25}{14}}=\frac{11}{2}\times\frac{14}{25}=\frac{77}{25}$.

c) $\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+\frac{7}{4}}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{-1+\frac{7}{4}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{10}{9}$.

d) $\frac{\frac{1}{2}-4}{1-\frac{3}{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}}=\frac{-\frac{7}{2}}{1-\frac{3}{\frac{3}{4}}}=\frac{-\frac{7}{2}}{1-3\times\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{7}{2}}{1-4}=\frac{-\frac{7}{2}}{-3}=$

3

1\. a) $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

b) $2^7 \times 2^{-9} = 2^{7-9} = 2^{-2}$

c) $2^{13} \times 2^{-7} = 2^{13-7} = 2^6$

d) $2^5 \times 128 = 2^5 \times 2^7 = 2^{12}$

2\. a) $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

b) $\dfrac{2^{10}}{2^{-3}} = 2^{10-(-3)} = 2^{13}$

c) $\dfrac{2^{-2}}{64} = \dfrac{2^{-2}}{2^6} = 2^{-2-6} = 2^{-8}$

d) $\dfrac{16384}{2^{11}} = \dfrac{2^{14}}{2^{11}} = 2^{14-11} = 2^3$

4

1\. a) $2^5 \times 81 = 2^5 \times 3^4$

b) $(2\times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

c) $2\times 6^{10} = 2\times(2\times 3)^{10} = 2^{11}\times 3^{10}$

d) $324 = 4\times 81 = 2^2 \times 3^4$

2\. a) $9^5 \times 2^3 = (3^2)^5 \times 2^3 = 3^{10}\times 2^3$

b) $(2\times 3^5)^8 = 2^8 \times (3^5)^8 = 2^8 \times (3^5)^8$

$= 2^8 \times 3^{5\times 8} = 2^8 \times 3^{40}$

c) $(2^{-4}\times 9)^3 = (2^{-4})^3 \times (3^2)^3$

$= 2^{-4\times 3} \times 3^{2\times 3} = 2^{-12}\times 3^{21}$

d) $(2^2 \times 24)^{-6} = (2^2 \times 8 \times 3)^{-6}$

$= (2^2 \times 2^3 \times 3)^{-6} = (2^5 \times 3)^{-6}$

$= (2^5)^{-6} \times 3^{-6} = 2^{-30} \times 3^{-6}.$

3\. a) $\dfrac{2^5}{3} = 2^5 \times 3^{-1}.$

b) $\dfrac{2^9}{162} = \dfrac{2^9}{2\times 81} = \dfrac{2^{9-1}}{3^4} = 2^8 \times 3^{-4}.$

c) $\dfrac{36}{3^{-11}} = \dfrac{2^2\times 3^2}{3^{-11}} = 2^2 \times 3^{2+11} = 2^2\times 3^{13}.$

d) $\dfrac{48\times 2^5}{2^{-5}\times 3^4} = \dfrac{2^4\times 3\times 2^{5+5}}{3^4} = 3^{-3}\times 2^{14}.$

5

1 a) $2^2 \times 2^9 \times 3^6 \times 3 \times 5^4 \times 5^5 = 2^{11}\times 3^7 \times 5^9$

b) $(-2)^6 \times 3^7 \times 5^4 \times 3^{-2} \times 5^3 = 2^6 \times 3^5 \times 5^7$

c) $-3^{10} \times 3 \times (-7)^3 \times 7^2 = -3^{11} \times (-7^3) \times 7^2$

$= 3^{11} \times 7^5.$

2 a) $3^5 \times 30^2 \times 2^4 = 3^5 \times (2\times 3\times 5)^2 \times 2^4$

$= 3^5 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 2^4$

$= 2^6 \times 3^7 \times 5^2.$

b) $10^5 \times 9^4 \times 15^{-3} = (2\times 5)^5 \times (3^2)^4 \times (3\times 5)^{-3}$

$= 2^5 \times 5^5 \times 3^8 \times 3^{-3} \times 5^{-3}$

$= 2^5 \times 5^2 \times 3^5.$

c) $(-6)^5 \times 12 \times (-45)^2 = -6^5 \times 2^2 \times 3 \times (45)^2$

$= 2^5 \times 3^5 \times 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 5$

$= 2^7 \times 3^8 \times 5.$

3 a) $\dfrac{2^{10}\times 3^8 \times 5^{-4}}{3\times 2^5 \times 5^3} = 2^{10-5} \times 3^{8-1} \times 5^{-4-3}$

$= 2^5 \times 3^7 \times 5^{-7}.$

b) $\dfrac{4^3 \times 3^{-4} \times 15}{6^{-1}\times 2\times 5^2} = \dfrac{(2^2)^3 \times 3^{-4} \times 3 \times 5}{(2\times 3)^{-1} \times 2 \times 5^2}$

$= \dfrac{2^6 \times 3^{-3} \times 5^{1-2}}{2^{-1} \times 3^{-1} \times 2} = 2^6 \times 3^{-2} \times 5^{-1}.$

c) $\dfrac{(-28)^7 \times 500}{3^2 \times 2^5 \times (-25)^{-3}} = \dfrac{-28^7 \times 4 \times 5 \times 25}{3^2 \times 2^5 \times (-25^{-3})}$

$= \dfrac{(2^2\times 7)^7 \times 2^2 \times 5 \times 5^2}{3^2 \times 2^5 \times (5^2)^{-3}}$

$= \dfrac{(2^2)^7 \times 7^7 \times 2^{2-5} \times 3^{-2} \times 5^3}{5^{-6}}$

$= 2^{14} \times 7^7 \times 2^{-3} \times 3^{-1} \times 5^{3+6}$

$= 2^{11} \times 3^{-1} \times 5^9 \times 7^7.$

6

1\. a) $0,3 \times 0,25 = 3\times 10^{-1} \times 25 \times 10^{-2}$

$= 75 \times 10^{-3}$

b) $0,014 \times 1000000 = 14 \times 10^{-3} \times 10^6$

$= 14 \times 10^3$

c) $18,7 \times 0,07 = 187 \times 10^{-1} \times 7 \times 10^{-2}$

$= 1309 \times 10^{-3}.$

d) $0,2 \times 400 \times 0,25 = 2 \times 10^{-1} \times 4 \times 10^2 \times 25 \times 1$

$= 2\times 10^{-1} \times 100 = 2 \times 10^{-1} \times 10^2$

$= 2 \times 10^1.$

2\. a) $\dfrac{0,03}{0,005} = \dfrac{3\times 10^{-2}}{5\times 10^{-3}} = \dfrac{3}{5} \times 10^{-2+3}$

$= 0,6 \times 10 = 6 \times 10^{-1} \times 10 = 6 \times 10$

b) $\dfrac{0,8 \times 800}{0,02 \times 0,016} = \dfrac{8 \times 10^{-1} \times 8 \times 10^2}{2 \times 10^{-2} \times 16 \times 10^{-3}}$

$= \dfrac{2 \times 10}{10^{-5}} = 2 \times 10^6.$

c) $\dfrac{0,00012 \times 5000}{0,005 \times 20 \times 0,01} = \dfrac{12 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^3}{5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-1}}$

$= \dfrac{6 \times 10^{-2}}{10^{-4}} = 6 \times 10^2.$

d) $\dfrac{2,4 \times 0,132}{0,5 \times 1,1 \times 0,012} = \dfrac{24 \times 10}{5} = 48 \times 10^0.$

7

1. a) On a: $x > 1$ donc $x - 1 > 0$

$$2(x-1) > 0.$$

b) On a $x > 1$ donc $x - 1 > 0$

$$-3(x-1) < 0.$$

c) On a : $x > 1$ donc $1 - x < 0$ et $x > 0$

$$(1-x)x < 0.$$

d) On a: $x > 1$ donc $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 3$

$$(x-1)(x+2) > 0.$$

2. a) On a : $x > 1$ donc $3x > 3$

$$3x - 2 > 3 - 2$$

$$3x - 2 > 1$$

$$3x - 2 > 0$$

b) On a : $x > 1$ donc $2x > 2$

Par suite, $2x - 1 > 1$ et $x - 1 > 0$

$$(2x-1)(x-1) > 0.$$

c) On a : $x > 1$ donc $3x > 3$ et $-x < -1$

Il s'ensuit que, $3x - 2 > 1$ et $-2x < -2$

$3x - 1 > 0$ et $-2x+1 < -1$

$3x - 1 > 0$ et $-2x+1 < 0$

$$(3x-1)(-2x+1) < 0.$$

d) On a: $x > 1$ donc $x - 1 > 0$ et $x + 4 > 5$

$x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$

$$(x-1)(x+2) > 0$$

$$-5(x-1)(x+4) < 0.$$

3. a) On a: $x > 1$ donc $x - 1 > 0$ et $x > 0$

Par conséquent $\frac{x-1}{x} > 0.$

b) On a: $x > 1$ donc $1 - x < 0$ et $x+1 > 2$

$1 - x < 0$ et $x+1 > 0$

Il s'ensuit que $\frac{1-x}{1+x} < 0.$

c) On a: $x > 1$ donc $x+4 > 5$ et $2x > 2$

$x+4 > 0$ et $2x+3 > 5$

$x+4 > 0$ et $2x+3 > 5$

On conclut que $\frac{x+4}{2x+3} > 0.$

8

1. a) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $x^2 + 1 \geq 1$

$x^2 + 1 > 0$

b) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $4x^2 \geq 0$; $4x^2 + 1 \geq 1$

Par conséquent, $4x^2 + 1 > 0$

c) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $x^2 + 7 \geq 7$; $x^2 + 7 > 0$

Il s'ensuit que, $3(x^2 + 7) > 0$

d) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $4x^2 \geq 0$; $4x^2 + 9 \geq 9$

$$4x^2 + 9 > 0$$

Il s'ensuit que, $5(4x^2 + 9) > 0$

2. a) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $-x^2 \leq 0$; $-x^2 - 1 \leq -1$

$$-x^2 - 1 < 0$$

b) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $-3x^2 \leq 0$; $-3x^2 - 2 \leq -2$

Par conséquent, $-3x^2 - 2 < 0.$

c) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $x^2 + 5 \geq 5$; $x^2 + 5 > 0$

$$-(x^2 + 5) < 0.$$

d) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $3x^2 \geq 0$; $3x^2 + 17 > 17$

$$3x^2 + 17 > 0.$$

Il s'ensuit que, $-8(3x^2 + 17) < 0$

3. a) Pour tout nombre réel x, $(x+1)^2 \geq 0.$

Donc, $(x+1)^2 + 4 \geq 4$

$$(x+1)^2 + 4 > 0.$$

b) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0.$

Donc, $(1-x)^2 + 9 \geq 9$

$$(1-x)^2 + 9 > 0.$$

c) Pour tout nombre réel x, $(x-6)^2 \geq 0.$

$$(x-6)^2 + 10 \geq 10$$

$$(x-6)^2 + 10 > 0.$$

Par conséquent, $-4[(x-6)^2 + 10] < 0$

d) Pour tout nombre réel x, $(-x+1)^2 \geq 0.$

Donc, $-(-x+1)^2 \leq 0$

$$-(-x+1)^2 - 7 \leq -7$$

$$-(-x+1)^2 - 7 < 0$$

9

1. a) $|5| = 5$ b) $|-2| = 2$

c) On a : $4 + \sqrt{3} > 0$

Donc, $|4 + \sqrt{3}| = 4 + \sqrt{3}.$

d) On a : $-\sqrt{5} - \sqrt{8} < 0.$

Donc, $|-\sqrt{5} - \sqrt{8}| = \sqrt{5} + \sqrt{8}.$

2. a) On a : $6 > 2$ donc $\sqrt{6} > \sqrt{2}$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0.$$

Il en résulte que : $|\sqrt{6} - \sqrt{3}| = \sqrt{6} - \sqrt{3}.$

b) On a : $4^2 = 16$ et $(\sqrt{15})^2 = 15.$

Comme $16 > 15$ alors $4^2 > (\sqrt{5})^2$

$$4 > \sqrt{15}$$

Donc, $4 - \sqrt{15} > 0$

Il en résulte que : $|4 - \sqrt{15}| = 4 - \sqrt{15}.$

c) On a : $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \times (\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$

et $(3)^2 = 9.$

Or $8 < 9$ donc $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$

$$2\sqrt{2} < 3$$

Par suite, $2\sqrt{2} - 3 < 0$

Il en déduit que :

$|2\sqrt{2}-3| = -(2\sqrt{2}-3) = 3-2\sqrt{2}$

d) On a : $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(\sqrt{11})^2 = 11$.

Puisque $12 > 11$ alors $(2\sqrt{3})^2 > \sqrt{11}^2$

$$2\sqrt{3} > \sqrt{11}$$

Par suite, $2\sqrt{3} - \sqrt{11} > 0$

Il en déduit que : $|2\sqrt{3} - \sqrt{11}| = 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

10

1. a) On a : $x \in [1;2]$ donc $x > 1$

$$x - 1 > 0.$$

Par conséquent, $|x-1| = x-1$.

b) On a : $x \in [1;2]$ donc $x < 2$

$$x - 2 < 0$$

Il en résulte que : $|x-2| = -x+2$.

c) On a : $x \in [1;2]$ donc $x > 1$

$$x + 2 > 2$$

$$x + 2 > 0$$

Il en résulte que : $|x+2| = x+2$.

d) On a : $x \in [1;2]$ donc $x > 1$

$$1 - x < 0$$

Il en résulte que : $|1-x| = x-1$.

2 a) On a : $x \in [1;2]$ donc $x > 1$

$$4x > 4$$

$$4x > 0$$

Il en résulte que : $|4x| = 4x$.

b) On a : $x \in [1;2]$ donc $x > 1$

$$2x > 2$$

$$2x - 2 > 0$$

Il en résulte que : $|2x-2| = 2x-2$.

c) On a : $x \in [1;2]$ donc $1 \quad x < 2$

$$-2 < -x < -1$$

$$-2+3 < -x+3 < -1+3$$

$$1 < -x+3 < 2$$

Il s'ensuit que : $-x+3 > 0$

On conclut que : $|-x+3| = -x+3$.

d) On a : $x \in [1;2]$ donc $1 < x < 2$

$$-2 < -x < -1$$

$$-6 < -3x < -3$$

$$-6+2 < -3x+2 < -3+2$$

$$-4 < -3x+2 < -1$$

Par conséquent : $-3x+2 < 0$

Donc $|-3x+2| = 3x-2$.

3. a) On a: $x \in [1;2]$ donc $x > 1$ et $x < 2$

$1 - x < 0$ et $x - 2 < 0$

Il s'ensuit que : $(1-x)(x-2) > 0$.

Donc, $|(1-x)(x-2)| = (1-x)(x-2)$.

b) On a: $x \in [1;2]$ donc $1 < x < 2$

$$x > 0 \text{ et } -2 < -x < -1$$

$$x > 0 \text{ et } -2+2 < -x+2 < -1+2$$

$$x > 0 \text{ et } 0 < -x+2 < 1$$

$$(-x+2)x > 0.$$

Par conséquent, $|(-x+2)x| = (-x+2)x$.

c) On a: $x \in [1;2]$ donc $1 < x < 2$

$$1^2 < x^2 < 2^2$$

$$1 < x^2 < 4$$

$$x^2 - 4 < 0$$

Par suite : $|x^2 - 4| = 4 - x^2$.

d) On a: $x \in [1;2]$ donc $1 < x < 2$

$$1^2 < x^2 < 2^2$$

$$1 < x^2 < 4$$

$$-12 < -3x^2 < -3$$

$$-10 < 2 - 3x^2 < -1$$

Par suite, $|2 - 3x^2| = 3x^2 - 2$.

11

1 a) On a :

$(2\sqrt{6})^2 = 2^2 \times (\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$.

et $5^2 = 25$. Comme $24 < 25$ alors

$$(2\sqrt{6})^2 < 5^2$$

$$2\sqrt{6} < 5$$

$$2\sqrt{6} - 5 < 0.$$

b) $(2\sqrt{6}-5)^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2\times 2\sqrt{6}\times 5 + 5^2$.

$$= 24 - 4\sqrt{6}\times 5 + 25$$

$$= 49 - 20\sqrt{6}$$

2 $\sqrt{49-20\sqrt{6}} = \sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2} = |2\sqrt{6}-5|$

Or d'après la question 1, $2\sqrt{6} - 5 < 0$.

Donc, $\sqrt{49-20\sqrt{6}} = -2\sqrt{6}+5$.

12

1. x appartient à l'intervalle $[1;\sqrt{2}]$.

Donc, $1 \le x \le \sqrt{2}$

$$1\times\sqrt{2} \le x\sqrt{2} \le \sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \le x\sqrt{2} \le 2$$

$$\sqrt{2}-1 \le x\sqrt{2}-1 \le 2-1$$

$$\sqrt{2}-1 \le x\sqrt{2}-1 \le 1.$$

On a : $\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-\sqrt{1}$

Or, $2 > 1$.

Donc, $\sqrt{2} > \sqrt{1}$

$$\sqrt{2}-\sqrt{1} > 0$$

$$\sqrt{2}-1 > 0$$

Par conséquent, $x\sqrt{2}-1 \ge 0$.

Par ailleurs, $\sqrt{2}-2x = -\sqrt{2}(x\sqrt{2}-1)$.

Comme $x\sqrt{2}-1 \ge 0$ alors $\sqrt{2}-2x \le 0$.

2. $A = \sqrt{(x\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-2x)^2}$

$= |x\sqrt{2}-1| - |\sqrt{2}-2x|$

D'après 1), $x\sqrt{2}-1 \ge 0$ et $\sqrt{2}-2x \le 0$.

Donc,

$A = x\sqrt{2}-1-[-(\sqrt{2}-2x)]$

$= x\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-2x$.

$= x(\sqrt{2}-2)-1+\sqrt{2}$

3. $x \in [1;\sqrt{2}] \Rightarrow 1 \le x \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{2}-2) \le x(\sqrt{2}-2) \le \sqrt{2}-2$

$\Rightarrow 1-\sqrt{2} \le x(\sqrt{2}-2)-1+\sqrt{2} \le -3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 1-\sqrt{2} \le A \le -3+2\sqrt{2}$

Donc, si x appartient à $[1;\sqrt{2}]$ alors

$1-\sqrt{2} \le A \le -3+2\sqrt{2}$.

4. a) Pour x appartenant à $[1;\sqrt{2}]$,

$A = -1+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-2)-1+\sqrt{2} = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x(\sqrt{2}-2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{2(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2+2\sqrt{2}}{2(2-4)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1+\sqrt{2}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

On a : $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \simeq 1,2$ et $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

Donc $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \in [1;\sqrt{2}]$.

On conclut que x prend la valeur $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

b) On a : $1-\sqrt{2} \leq A \leq -3+2\sqrt{2}$

où $-3+2\sqrt{2} \simeq -0,17$

Il en résulte que A ne peut être égal à 2. On en déduit qu'aucune de x dans $[1;\sqrt{2}]$ ne convient.

c) Pour x appartenant à $[1;\sqrt{2}]$,

$$A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-2)-1+\sqrt{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2}-2) = \frac{2}{3}-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x(\sqrt{2}-2) = 2-3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{(2-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{-2-4\sqrt{2}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$$

On a : $\frac{1+2\sqrt{2}}{3} \simeq 1,27$; $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

Donc $\frac{1+2\sqrt{2}}{3} \in [1;\sqrt{2}]$.

Par conséquent x prend la valeur $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

13

Pour tout nombre réel x strictement positif,

$$x+\frac{1}{x}-2 = \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Comme $x > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$ alors $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

Il s'ensuit que : $x+\frac{1}{x}-2 \geq 0$

Donc, $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

14

On a : $\sqrt{z+1} > 0$ et $\sqrt{z}+1 > 0$.

Par suite,

$$(\sqrt{z+1})^2 - (\sqrt{z}+1)^2 = z+1-(z+1+2\sqrt{z})$$

$$= -2\sqrt{z}.$$

On a : $-2\sqrt{z} < 0$

Il s'ensuit que : $(\sqrt{z+1})^2 - (\sqrt{z}+1)^2 < 0$

Donc, $(\sqrt{z+1})^2 < (\sqrt{z}+1)^2$

Par conséquent $\sqrt{z+1} < \sqrt{z}+1$.

15

1. a) $x^2+y^2-2xy = x^2-2xy+y^2$

$$= (x-y)^2$$

On a : $(x-y)^2 \geq 0$

$$x^2+y^2-2xy \geq 0$$

Par conséquent : $x^2+y^2 \geq 2xy$.

b) D'après la question 1a), $x^2+y^2 \geq 2xy$.

Or $2xy > xy$. (car x et y sont positifs).

Donc, $x^2+y^2 > xy$.

c) $x+y-2\sqrt{xy} = x-2\sqrt{xy}+y$

$$= (\sqrt{x})^2 - 2\times\sqrt{x}\times\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2$$

$$= (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

On a : $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

$$x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$

On conclut que : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

d) $\frac{1}{x+y}-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) = \frac{1}{x+y}-\frac{y+x}{xy}$

$$= \frac{xy-(y+x)(x+y)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{xy-(x^2+2xy+y^2)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{xy-x^2-2xy-y^2}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{-x^2-xy-y^2}{xy(x+y)}$$

Comme x et y sont strictement positifs, alors $-x^2-xy-y^2 < 0$.

De plus, $x+y > 0$ et $xy > 0$ donc, $xy(x+y) > 0$.

Il s'ensuit que : $\frac{-x^2-xy-y^2}{xy(x+y)} < 0$.

$$\frac{1}{x+y}-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) < 0$$

Donc, $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

2. a) $y^2-x^2-(x-y) = (y-x)(y+x)+(y-x)$

$$= (y-x)(y+x+1).$$

Comme

$0 < x < y$ alors $y-x > 0$ et $x+y+1 > 0$

Par suite $(y-x)(y+x+1) > 0$

$$y^2-x^2-(x-y) > 0$$

Donc, $y^2-x^2 > x-y$.

b) $\frac{1}{y-x}-(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}) = \frac{1}{y-x}-\frac{y-x}{xy}$

$$= \frac{xy-(y-x)^2}{(y-x)xy}$$

$$= \frac{xy-y^2+2xy-x^2}{(y-x)xy}$$

$$= \frac{xy-(x^2+y^2)}{(y-x)xy}$$

D'après la question 1b), $x^2+y^2 > xy$.

Il en découle $xy-(x^2+y^2) < 0$ (1).

De plus comme $x < y$ alors $y-x > 0$.

Donc, $(y-x)xy > 0$ (2).

De (1) et (2), on a : $\frac{xy-(x^2+y^2)}{(y-x)xy} < 0$

$$\frac{1}{y-x}-(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}) < 0$$

: $\frac{1}{y-x} < \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

c) On a : $\sqrt{y-x} > 0$.

Et, $0 < x < y$ implique $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

$$\sqrt{y}-\sqrt{x} > 0.$$

Par suite, $(\sqrt{y-x})^2 = y - x$ et

$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y - 2\sqrt{y} \times \sqrt{x} + x.$

On a :

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 - \sqrt{y-x}\,^2 = y + x - 2\sqrt{y} \times \sqrt{x} - y + x.$$

$$= 2x - 2\sqrt{y} \times \sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x} \times \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$= 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Or $2\sqrt{x} > 0$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$

Donc, $2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) < 0$

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 - \sqrt{y-x}\,^2 < 0$$

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 < (\sqrt{y-x})^2$$

On en déduit que : $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \sqrt{y-x}.$

16

1\. a) $s^2 + t^2 - st = s^2 - st + t^2$

$$= s^2 - 2 \times s \times \frac{t}{2} + t^2$$

$$= (s - \frac{t}{2})^2 - (\frac{t}{2})^2 + t^2$$

$$= (s - \frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4} + t^2$$

$$= (s - \frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{4t^2}{4}$$

Donc, $s^2 + t^2 - st = (s - \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4}.$

b) On a : $(s - \frac{t}{2})^2 \geq 0$ et $\frac{3t^2}{4} > 0$

Donc, $(s - \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4} \geq \frac{3t^2}{4} > 0.$

$$(s - \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4} > 0.$$

2\. $s^2 + t^2 - st = (s - \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4}.$ et

$$(s - \frac{t}{2})^2 + \frac{3t^2}{4} > 0.$$

Par conséquent, $s^2 + t^2 - st > 0.$

Donc, $s^2 + t^2 > st.$

17

1\. Pour m différent de 0,

$$\frac{(m-1)^2(m+2)}{m} = \frac{(m^2-2m+1)(m+2)}{m}$$

$$= \frac{m^3+2m^2-2m^2-4m+m+2}{m}$$

$$= \frac{m^3-3m+2}{m}$$

$$= \frac{m^3}{m} + \frac{-3m}{m} + \frac{2}{m}$$

$$= m^2 - 3 + \frac{2}{m}$$

$$= m^2 + \frac{2}{m} - 3$$

Donc, $m^2 + \frac{2}{m} - 3 = \frac{(m-1)^2(m+2)}{m}.$

2\. On a : $m > 0$; $m+2 > 0$ et $(m-1)^2 \geq 0$.

Il s'ensuit que : $\frac{(m-1)^2(m+2)}{m} \geq 0.$

Or $m^2 + \frac{2}{m} - 3 = \frac{(m-1)^2(m+2)}{m}.$

Donc, $m^2 + \frac{2}{m} - 3 \geq 0$

$$m^2 + \frac{2}{m} \geq 3.$$

18

1\. $\frac{1}{x}(x-1)^2(x+1) = \frac{1}{x}(x^2 - 2x + 1)(x+1)$

$$= \frac{1}{x}(x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1)$$

$$= \frac{1}{x}(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$= x^2 - x - 1 + \frac{1}{x}.$$

Donc, $\frac{1}{x}(x-1)^2(x+1) = x^2 + \frac{1}{x} - (x+1).$

2\. D'après la question précédente,

$$x^2 + \frac{1}{x} - (x+1) = \frac{1}{x}(x-1)^2(x+1).$$

Pour tout nombre réel strictement positif,

$\frac{1}{x} > 0$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $x + 1 > 0.$

$$\frac{1}{x}(x-1)^2(x+1) \geq 0$$

Donc, $x^2 + \frac{1}{x} - (x+1) \geq 0$

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x+1.$$

19

1\. x et y étant non nul,

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(\frac{y+x}{xy})$$

$$= \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{y+x}{2xy}$$

$$= \frac{2xy(x+y)-(x^2+y^2)(x+y)}{(x^2+y^2)2xy}$$

$$= \frac{(x+y)[2xy-(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)2xy}$$

$$= \frac{-(x+y)[x^2+y^2-2xy]}{(x^2+y^2)2xy}$$

Donc, $\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{-(x+y)(x-y)^2}{(x^2+y^2)2xy}.$

2\. On a : $x > 0$ et $y > 0$

Donc, $x + y > 0$; $2xy > 0$ et $x^2 + y^2 > 0$

Par conséquent, $(x^2+y^2)2xy > 0$ (1).

Or $(x-y)^2 \geq 0$

Donc, $-(x+y)(x-y)^2 \leq 0$ (2).

De (1) et (2), on a : $\frac{-(x+y)(x-y)^2}{(x^2+y^2)2xy} \leq 0$

Il s'ensuit que : $\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \leq 0$

On conclut que : $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}).$

20

1\. $\frac{2}{b-a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b-a} - (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

$$= \frac{2}{b-a} - \frac{b-a}{ab}$$

$$= \frac{2ab-(b-a)^2}{(b-a)ab}$$

$$= \frac{2ab-(b^2-2ab+a^2)}{(b-a)ab}$$

$$= \frac{2ab-b^2-2ab-a^2}{(b+a)ab}$$

Donc, $\dfrac{2}{b-a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{-(a^2+b^2)}{(b-a)ab}$.

2. On a : $\dfrac{2}{b-a}-(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})=\dfrac{2}{b-a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$$=\dfrac{-(a^2+b^2)}{(b-a)ab}.$$

a et b sont strictement positifs avec $b > a$.

Donc, $b-a>0$; $ab>0$ et $a^2+b^2>0$.

Par suite, $\dfrac{-(a^2+b^2)}{(b-a)ab}<0$

$$\dfrac{2}{b-a}-(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})<0$$

On en déduit que : $\dfrac{2}{b-a}<\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.

21

1. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a(b+d)-(a+c)b}{b(b+d)}$

$$=\dfrac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)}$$

$$=\dfrac{ad-bc}{b(b+d)}$$

On a : $b>0$ et $b+d>0$ donc $b(b+d)>0$ (1)

De plus, $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}<0$

$$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{ad-bc}{bd}<0$$

$$\Rightarrow ad-bc<0 \text{ (2) car } bd>0.$$

Il s'ensuit de (1) et (2) que : $\dfrac{ad-bc}{b(b+d)}<0$

Donc, $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+d}<0$

$$\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}.$$

2. Comparons $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}$.

On a : $(\dfrac{\sqrt{3}}{4})^2=\dfrac{3}{16}$ et $(\dfrac{\sqrt{2}}{3})^2=\dfrac{2}{9}$.

Or, $\dfrac{3}{16}-\dfrac{2}{9}=-\dfrac{5}{144}<0$

Donc, $\dfrac{3}{16}<\dfrac{2}{9}$

$$\dfrac{\sqrt{3}}{4}<\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$$

Les nombres réels 3, 4, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ étant

strictement positifs alors,
D'après la question 1,

on conclut que $\dfrac{\sqrt{3}}{4}<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{7}$.

Comparons $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

On a : $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{7}=-\dfrac{1}{21}<0$.

Donc, $\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}$

$$\sqrt{\dfrac{2}{3}}<\sqrt{\dfrac{5}{7}}$$

$$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}.$$

D'après la question 1, on a : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

22

1. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$$=a^3-b^3+ab^2-ab^2+a^2b-a^2b$$

$$=a^3-b^3.$$

Donc, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. $(a+\dfrac{b}{2})^2+\dfrac{3}{4}b^2=a^2+2\times a\times\dfrac{b}{2}+(\dfrac{b}{2})^2+\dfrac{3}{4}b^2$

$$=a^2+ab+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{3b^2}{4}$$

$$=a^2+ab+\dfrac{b^2+3b^2}{4}$$

$$=a^2+ab+\dfrac{4b^2}{4}$$

$$=a^2+ab+b^2$$

Par conséquent, $a^2+ab+b^2=(a+\dfrac{b}{2})^2+\dfrac{3}{4}b^2$.

23

1a) $(1-\sqrt{a})(a+\sqrt{a}+1)=a+\sqrt{a}+1-a\sqrt{a}-\sqrt{a}\times\sqrt{a}-\sqrt{a}$

$$=1-a\sqrt{a}.$$

Donc, $1-a\sqrt{a}=(1-\sqrt{a})(a+\sqrt{a}+1)$.

b) On a : $a>1$ donc $\sqrt{a}>1$.

Par conséquent, $a\sqrt{a}>1$

$$1-a\sqrt{a}<0.$$

2. $\dfrac{1}{a}(1-a\sqrt{a})(1-\sqrt{a})=\dfrac{1}{a}(1-\sqrt{a}-a\sqrt{a}+a\sqrt{a}$

$$=\dfrac{1}{a}(1-\sqrt{a}-a\sqrt{a}+a^2)$$

$$=\dfrac{1}{a}-\dfrac{\sqrt{a}}{a}-\dfrac{a\sqrt{a}}{a}+\dfrac{a^2}{a}$$

$$=\dfrac{1}{a}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}-\sqrt{a}+a$$

$$=\dfrac{1}{a}+a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$$

$$=\dfrac{1}{a}+a-(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}).$$

Il en résulte que :

$(a+\dfrac{1}{a})-(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}})=\dfrac{1}{a}(1-a\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$.

3. D'après la question précédente,

$(a+\dfrac{1}{a})-(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}})=\dfrac{1}{a}(1-a\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$.

On a : $a>1$ donc, $\sqrt{a}>1$

$$1-\sqrt{a}<0.$$

De plus, $\dfrac{1}{a}>0$ et d'après la question 1b),

$1-a\sqrt{a}<0$.

Il s'ensuit que : $\dfrac{1}{a}(1-a\sqrt{a})(1-\sqrt{a})>0$

Donc, $(a+\dfrac{1}{a})-(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}})>0$

$$a+\dfrac{1}{a}>\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}.$$

Avomaths • Seconde C

24

1. Pour tout entier naturel n,

$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2$

$= n+1-n = 1$

Donc, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ sont inverses l'un de l'autre.

2. $A = \sqrt{2}+\sqrt{1}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{4}+\sqrt{3}$

$A = \sqrt{2}+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{3}$

$A = \sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+2$

$A = 3.$

25

1. On a : $2 > 1$. Donc, pour un entier naturel n donné, $n+2 > n+1 > 0$.

Par conséquent, $\frac{n+2}{n+1} > 1$.

$$\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+6}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3)-(n+2)(n+6)}{(n+2)(n+3)}$$ el n

$$= \frac{n^2+4n+3-n^2-8n-12}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{-4n-9}{(n+2)(n+3)}.$$

On a : $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$.

Donc, $(n+2)(n+3) > 0$.

De plus, $-4n-9 < 0$.

Il s'ensuit que : $\frac{-4n-9}{(n+2)(n+3)} < 0$

$$\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+6}{n+3} < 0$$

On conclut que : $\frac{n+1}{n+2} < \frac{n+6}{n+3}$

2. D'après la question 1),

$1 < \frac{n+1}{n+2}$ et $\frac{n+1}{n+2} < \frac{n+6}{n+3}$.

On en déduit que $1 < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+6}{n+3}$.

26

1. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x+1} = \frac{x^2(x+1)-2}{2(x+1)}$

On a : $x \in]0;1[$ donc $0 < x < 1$

$$0 < x^2 < 1 \text{ et } 1 < x+1 < 2.$$

$$0 < x^2(x+1) < 2$$

$$x^2(x+1)-2 < 0 \quad (1).$$

De plus, $x+1 > 0$ (2).

De (1) et (2), on a : $\frac{x^2(x+1)-2}{2(x+1)} < 0.$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x+1} < 0$$

Donc, $\frac{x^2}{2} < \frac{1}{x+1}$.

Autre méthode pour la question 1.)

Pour tout x appartenant à $]0;1[$, $0 < x < 1$

Donc, $0 < x^2 < 1$ et $1 < x+1 < 2$.

$$0 < \frac{x^2}{2} < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1.$$

Par conséquent, $\frac{x^2}{2} < \frac{1}{x+1}$.

Déduisons en que : $\frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

On a : $\frac{x^2}{2} < \frac{1}{x+1}$ donc $\sqrt{\frac{x^2}{2}} < \sqrt{\frac{1}{x+1}}$

$$\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

On conclut que : $\frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2. Pour tout x appartenant à $]0;1[$, $0 < x < 1$

Donc $x-1 < 0$ (1).

D'autre part, $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$ et $1^2 = 1$.

Comme $\frac{1}{2} < 1$ alors $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 < 1^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \quad (2)$$

De (1) et (2), on a : $1\times(x-1) < \frac{\sqrt{2}}{2}\times(x-1)$

Donc, $x-1 < \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

3. D'après la question 2, $x-1 < \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

Donc, $x-1 < x\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x-1+\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{x\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

D'après question 1), $\frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (2).

De (1) et (2), $x-1+\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{x\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

27

1. $|x| < 1$ et $|y| < 1$. donc, $|x||y| < 1$

$$|xy| < 1.$$

Déduisons en que : $1+xy > 0$.

On a : $|xy| < 1$ et $-xy < |xy|$ donc $-xy < 1$.

Par conséquent, $1+xy > 0$.

2. a) On a : $|x| < 1$ et $|y| < 1$

Donc, $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$

$1+x > 0$, $1-x < 0$, $1+y > 0$ et $1-y < 0$.

On en déduit que :

$(1-x)(1-y) > 0$ et $(1+x)(1+y) > 0$.

b) $(1-x)(1-y) = 1-y-x+xy$

$(1+x)(1+y) = 1+y+x+xy$

3) D'après les questions 2),

$1-y-x+xy > 0$ et $1+y+x+xy > 0$.

Donc, $x+y < 1+xy$ et $-(1+xy) > x+y$

$$-(1+xy) < x+y < 1+xy$$

Il s'ensuit que : $|x+y| < 1+xy$

• Déduisons en que : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

On a : $|x+y| < 1 + xy$.

Par conséquent, $|x+y| < |1 + xy|$.

Donc, $\frac{|x+y|}{|1+xy|} < 1$.

On conclut que : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

28

1. $1 + a + a^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2$

$= 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{(-1)^2 - 2\times1\times\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4}$

$= \frac{4}{4} + \frac{2\times(-1+\sqrt{5})}{4} + \frac{(-1)^2 - 2\times1\times\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4}$

$= \frac{4 - 2 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}$

$= \frac{8}{4}$

Donc, $1 + a + a^2 = 2$.

On a: $a^3 = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^3$

$= \frac{(-1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})^2}{2^3}$

$= \frac{(-1+\sqrt{5})(1-2\sqrt{5}+5)}{8}$

$= \frac{-6+2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-2\times5}{8}$

$= \frac{-16+8\sqrt{5}}{8}$

$= -2 + \sqrt{5}$.

2. a) $(1+a+a^2)(1+a^3+a^6) =$

$= 1 + a^3 + a^6 + a + a\times a^3 + a\times a^6$

$+ a^2 + a^2\times a^3 + a^2\times a^6$

$= 1 + a^3 + a^6 + a + a^4 + a^7 + a^2 + a^5 + a^8$

$= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8$.

Or, $b = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 +$

Donc, $b = (1+a+a^2)(1+a^3+a^6)$.

b.) $b = (1+a+a^2)(1+a^3+a^6)$.

On a : $1 + a + a^2 = 2$ et $a^3 = -2 + \sqrt{5}$.

Calculons a^6

On a : $a^6 = a^{3\times2} = (a^3)^2 = (-2+\sqrt{5})^2$

$= (-2)^2 - 2\times2\times\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$

$= 4 - 4\sqrt{5} + 5$

$= 9 - 4\sqrt{5}$.

Par suite, $b = 2(1 + -2 + \sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5})$

$= 2(8 + 5\sqrt{5})$

$= 16 + 10\sqrt{5}$.

29

1. $(x-2)^2(x^2+4x+20) =$

$= (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 20)$

$= x^2\times x^2 + x^2\times 4x + 20\times x^2 - 4x\times x^2$

$- 4x\times 4x - 4x\times 20 + 4x^2 + 4\times 4x + 4\times 20$

$= x^4 + 4x^3 + 20x^2 - 4x^3 - 16x^2$

$- 80x + 4x^2 + 16x + 80$

$= x^4 + 4x^3 - 4x^3 + 20x^2 - 16x^2 + 4x^2 - 64x + 80$

$= x^4 + 8x^2 - 64x + 80$.

Donc, $x^4 + 8x^2 - 64x + 80 = (x-2)^2(x^2+4x+20)$.

$-x^4 - 8x^2 + 64x - 80 = -(x-2)^2(x^2+4x+20)$.

2. $\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} = \frac{64(x-1) - (x^2+4)^2}{64(x^2+4)^2}$

$= \frac{64x - 64 - (x^4 + 2\times4\times x^2 + 16)}{64(x^2+4)^2}$

$= \frac{64x - 64 - x^2 - 8x^2 - 16}{64(x^2+4)^2}$

$= \frac{64x - 64 - x^4 - 8x^2 - 16}{64(x^2+4)^2}$

Donc,

$\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} = \frac{-x^4 - 8x^2 + 64x - 80}{64(x^2+4)^2}$.

3. D'après les questions 1) et 2),

$\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} = \frac{-(x-2)^2(x^2+4x+20)}{64(x^2+4)^2}$.

Pour tout nombre réel positif x, $(x-2)^2 \geq 0$

$x^2 + 4x + 20 \geq 0$.

Donc, $(x-2)^2(x^2+4x+20) \geq 0$

$-(x-2)^2(x^2+4x+20) \leq 0$

Or, $64(x^2+4)^2 > 0$.

Par conséquent, $\frac{-(x-2)^2(x^2+4x+20)}{64(x^2+4)^2} \leq 0$

$\frac{x-1}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{64} \leq 0$

4. De la question précédente, $\frac{x-1}{(x^2+4)^2} \leq \frac{1}{64}$

Puisque x supérieur à 1, $x - 1 \geq 0$

Donc, $0 \leq \frac{x-1}{(x^2+4)^2} \leq \frac{1}{64}$

$\sqrt{\frac{x-1}{(x^2+4)^2}} \leq \sqrt{\frac{1}{64}}$

On conclut que $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+4} \leq \frac{1}{8}$

30

1. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{1+1}}{1+1} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1}+1}$ avec $1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) $(2\sqrt{n+1})^2 = 4(n+1)$ et

$(\sqrt{2}(\sqrt{n}+1))^2 = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{n}+1)^2$

$= 2(n + 2\sqrt{n} + 1)$

$= 2n + 4\sqrt{n} + 2$.

Donc,

$$\begin{aligned}(2\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{2}(\sqrt{n}+1))^2 &= 4n+4-2n-4\sqrt{n}-2\\ &= 2n-2\sqrt{n}+2\\ &= 2(n-2\sqrt{n}+1)\\ &= 2(\sqrt{n}-1)^2.\end{aligned}$$

b) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$2(\sqrt{n}-1)^2 \geq 0$$

$$(2\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{2}(\sqrt{n}+1))^2 \geq 0$$

Par conséquent, $(2\sqrt{n+1})^2 \geq (\sqrt{2}(\sqrt{n}+1))^2$.

Puisque pour tout entier naturel n,

$2\sqrt{n+1} > 0$ et $\sqrt{2}(\sqrt{n}+1) > 0$,

alors, $2\sqrt{n+1} > \sqrt{2}(\sqrt{n}+1)$.

c) Pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{n+1}-\sqrt{2}(\sqrt{n}+1)}{2(\sqrt{n}+1)}.$$

On a : $2\sqrt{n+1} > \sqrt{2}(\sqrt{n}+1)$.

Donc, $2\sqrt{n+1} - \sqrt{2}(\sqrt{n}+1) \geq 0$.

De plus, $2(\sqrt{n}+1) > 0$.

Par suite, $\dfrac{2\sqrt{n+1}-\sqrt{2}(\sqrt{n}+1)}{2(\sqrt{n}+1)} \geq 0$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

Donc pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. D'après la question 1), $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à $\mathcal{A}$.

et de la question 2), pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On conclut que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est le minimum de $\mathcal{A}$.

4: Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}-1=\frac{\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1}$$

On a : $(\sqrt{n+1})^2 = n+1$

Et, $(\sqrt{n}+1)^2 = n+2\sqrt{n}+1$.

Donc, $(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n}+1)^2 = n+1-n-2\sqrt{n}$

$= -2\sqrt{n} < 0$

car n est strictement supérieur à 0.

$$(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n}+1)^2 < 0$$

Par suite, $(\sqrt{n+1})^2 < (\sqrt{n}+1)^2$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n}+1$$

$$\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}+1) < 0.$$

Par conséquent, $\dfrac{\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1} < 0$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}-1 < 0$$

On conclut que pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} < 1.$$

Fonctions

1

1. a) $x \in D_f \Leftrightarrow x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x-4 \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x \neq 4$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{4}{3}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{4}{3}\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow -2x+8 \neq 0$

$\Leftrightarrow -2x \neq -8$

$\Leftrightarrow x \neq 4$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2. a) $x \in D_f \Leftrightarrow x+4 \neq 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x+ \neq -4$ et $x \neq 0$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 2x-6 \neq 0$ et $-x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq 6$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq 0$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow x-4 \neq 0$ et $x+7 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 4$ et $x \neq -7$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4; -7\}$.

3. a) $x \in D_f \Leftrightarrow (8x+4)(x-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow 8x+4 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 8x \neq -4$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$ et $x \neq 1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}; 1\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow x+4x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x(1+4x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $1+4x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -\dfrac{1}{4}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{4}; 0\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2-9 \neq 0$

$\Leftrightarrow (2x)^2-3^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x-3 \neq 0$ et $2x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq 3$ et $2x \neq -3$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\}$.

4. a) $x \in D_f \Leftrightarrow 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

Donc, $D_f = [0; +\infty[$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 1+3x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -\dfrac{1}{3}$

Donc, $D_f = [-\dfrac{1}{3};+\infty[$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow -2x-4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x \geq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{4}{-2}$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -2$

Donc, $D_f =]-\infty;-2]$.

5. a) $x \in D_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \geq 0$

Donc, $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x+4 \neq 0$ et $1-2x \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x \neq -4$ et $-2x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{4}{3}$ et $x \leq \dfrac{-1}{-2}$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{4}{3}$ et $x \leq \dfrac{1}{2}$

Donc, $D_f =]-\infty;-\dfrac{4}{3}[\cup]-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{2}]$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x+2 \neq 0$ et $-1+4x \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x \neq -2$ et $4x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$ et $x \geq \dfrac{1}{4}$

Donc, $D_f = [\dfrac{1}{4};+\infty[$.

6. a) $x \in D_f \Leftrightarrow 3+x \geq 0$ et $2+x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -3$ et $x \geq -2$

Donc, $D_f = [-3;+\infty[\cap[-2;+\infty[$

$D_f = [-2;+\infty[$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x \geq 0$ et $2x \geq 0$

$\Leftrightarrow -x \geq -1$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 1$ et $x \geq 0$

Donc, $D_f = [0;+\infty[\cap]-\infty;1]$

$D_f = [0;1]$

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 2(1-x) \geq 0$ et $x+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1-x \geq 0$ et $x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad -x \geq -1$ et $x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 1$ et $x \geq -4$

Donc, $D_f = [-4;1]$.

7. a) $x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \neq 0$ et $1-x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1-x \neq 0$ et $1-x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1-x > 0$

$\Leftrightarrow \quad -x > -1$

$\Leftrightarrow \quad x < 1$

Donc, $D_f =]-\infty;1[$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} \neq 0$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \neq 2$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \neq 2^2$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 4$ et $x \geq 0$

Donc, $D_f = [0;4[\cup]4;+\infty[$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 1-3\sqrt{x} \neq 0$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x} \neq 1$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow (3\sqrt{x})^2 \neq 1^2$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow 3^2 \times (\sqrt{x})^2 \neq 1$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 9x \neq 1$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{1}{9}$ et $x \geq 0$

Donc $D_f = [0;\dfrac{1}{9}[\cup]\dfrac{1}{9};+\infty[$.

8. a) $x \in D_f \Leftrightarrow 4-\sqrt{3x} \neq 0$ et $3x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3x} \neq 4$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x \neq 16$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{16}{3}$ et $x \geq 0$

Donc $D_f = [0;\dfrac{16}{3}[\cup]\dfrac{16}{3};+\infty[$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 3-\sqrt{x+1} \neq 0$ et $x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} \neq 3$ et $x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x+1 \neq 9$ et $x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 8$ et $x \geq -1$

Donc $D_f = [-1;8[\cup]8;+\infty[$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 4-\sqrt{2-x} \neq 0$ et $2-x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2-x} \neq 4$ et $x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad 2-x \neq 16$ et $x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad -x \neq 14$ et $x \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad x \neq -14$ et $x \leq 2$

Donc $D_f =]-\infty;-14[\cup]-14;2[$.

2

1. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |x| \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 0$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, c'est à dire $\mathbb{R}^*$

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |x-2| \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x-2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 2$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow -4x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow -4x \neq -3$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{3}{4}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{3}{4}\}$.

2. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |x|-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad |x| \neq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 1$ et $x \neq -1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |x+1|-4 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad |x+1| \neq 4$

$\Leftrightarrow x+1 \neq 4$ et $x+1 \neq -4$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 3$ et $x \neq -5$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5;3\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |4-x|-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad |4-x| \neq 1$

$\Leftrightarrow 4-x \neq 1$ et $4-x \neq -1$

$\Leftrightarrow -x \neq -3$ et $-x \neq -5$

$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq 5$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3;5\}$.

3. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |2x| \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$

Donc, $D_f = \mathbb{R}^*$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |2x| - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow |2x| \neq 2$

$\Leftrightarrow |2x| \neq |2|$

$\Leftrightarrow 2x \neq -2$ et $2x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |3x+1| - 5 \neq 0$

$\Leftrightarrow |3x+1| \neq 5$

$\Leftrightarrow 3x+1 \neq -5$ et $3x+1 \neq 5$

$\Leftrightarrow 3x \neq -6$ et $3x \neq 4$

$\Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq \frac{4}{3}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;\frac{4}{3}\}$.

4. a) $x \in D_f \Leftrightarrow 4|x| \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$

Donc, $D_f = \mathbb{R}^*$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 3|x| - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$ et $x \neq -\frac{2}{3}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow 3|1-x| - 6 \neq 0$

$\Leftrightarrow |1-x| \neq 2$

$\Leftrightarrow 1-x \neq 2$ et $1-x \neq -2$

$\Leftrightarrow -x \neq 1$ et $-x \neq -3$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 3$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$.

5. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |x(x-1)| \neq 0$

$\Leftrightarrow x(x-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |x^2 - 3x| \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x \neq 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 3$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |25x^2 - 9| \neq 0$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 9 \neq 0$

$\Leftrightarrow (5x)^2 - 3^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (5x-3)(5x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow 5x-3 \neq 0$ et $5x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{5}$ et $x \neq -\frac{3}{5}$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5};\frac{3}{5}\}$.

6. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |x+1||x-2| \neq 0$

$\Leftrightarrow |x+1| \neq 0$ et $|x-2| \neq 0$

$\Leftrightarrow x+1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |x-3| \neq 0$ et $|x+3| \neq 0$

$\Leftrightarrow x-3 \neq 0$ et $x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -3$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3;-3\}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |x| - 1 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 1$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

7. a) $x \in D_f \Leftrightarrow |x| + 2 \neq 0$

Pour tout nombre réel x, $|x| \geq 0$

Donc, $|x| + 2 \geq 2$

$|x| + 2 > 0$

Il s'ensuit que : $|x| + 2 \neq 0$

On conclut que : $D_f = \mathbb{R}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 3|x| + 4 \neq 0$

Pour tout nombre réel x, $|x| \geq 0$

Donc, $3|x| \geq 0$

$3|x| + 4 \geq 4$

Par conséquent : $3|x| + 4 > 0$

Il s'ensuit que : $3|x| + 4 \neq 0$

On conclut que : $D_f = \mathbb{R}$.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |x^2 + 1| \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$

Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$

$x^2 + 1 \geq 1$

Donc $x^2 + 1 > 0$

Il s'ensuit que : $x^2 + 1 \neq 0$

On conclut que : $D_f = \mathbb{R}$.

3

1. a) $D_f = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$

pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = -x$.

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = g(x)$.

Il en résulte que f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

b) $D_f = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

Par conséquent f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

2. a) $D_f = \mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$.

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = g(x)$.

On en déduit que f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$

b) $D_f = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = -x$.

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = g(x)$.

Par conséquent, f et g sont égales sur $\mathbb{R}_-$.

4

1. a) $D_f = \mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{|x|^2}{|x|}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = |x|$.

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = g(x)$.

On en déduit que f et g sont égales sur $\mathbb{R}^*$.

b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sqrt{x}$.

et $D_g = \mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Donc, pour tout $x \in= \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(x)$.

Par conséquent, f et g sont égales sur $= \mathbb{R}_+^*$.

2. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x \neq \cancel{x}$

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$.

Il s'ensuit que, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = g(x)$.

On conclut que f et g sont égales sur $]-\infty; 1[$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = x - 2$.

et $D_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x - 2|$.

Donc, pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) = x - 2$.

Par suite, pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) = g(x)$.

Par conséquent, f et g sont égales sur $]2;+\infty[$.

5

Les images de -1, 2 et $\dfrac{4}{9}$ par f.

$f(-1) = 3\times(-1) + 7 = -3 + 7 = 4;$

$f(-1) = 4.$

$f(2) = 3\times 2 + 7 = 6 + 7 = 13;\ f(2) = 13.$

$f(\dfrac{4}{9}) = 3\times\dfrac{4}{9} + 7 = \dfrac{4}{3} + 7 = \dfrac{25}{3};\ f(\dfrac{4}{9}) = \dfrac{25}{3}.$

Les images de -1, 2 et $\dfrac{4}{9}$ par g.

$g(-1) = \dfrac{-1+3}{-1-1} = \dfrac{2}{-2} = -1; g(-1) = -1.$

$g(2) = \dfrac{2+3}{2-1} = \dfrac{5}{1} = 5; g(2) = 5.$

$g(\dfrac{4}{9}) = \dfrac{\frac{4}{9}+3}{\frac{4}{9}-1} = \dfrac{\frac{31}{9}}{\frac{-5}{9}} = -\dfrac{31}{5};\ g(\dfrac{4}{9}) = -\dfrac{31}{5}.$

Les images de -1, 2 et $\dfrac{4}{9}$ par h.

$h(-1) = \sqrt{-1+1} - 6 = -6;\ h(-1) = -6.$

$h(2) = \sqrt{2+1} - 6 = \sqrt{3} - 6;\ h(2) = \sqrt{3} - 6.$

$h(\dfrac{4}{9}) = \sqrt{\dfrac{4}{9}+1} - 6 = \dfrac{\sqrt{13}}{3} - 6;\ h(\dfrac{4}{9}) = \dfrac{\sqrt{13}}{3} -$

6

$f(0) = (0 + \sqrt{5})^2 - 4 = (\sqrt{5})^2 - 4 = 5 - 4 = 1; f(0$

$f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5} + \sqrt{5})^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4;$

$f(-\sqrt{5}) = -4.$

$f(3\sqrt{5}) = (3\sqrt{5} + \sqrt{5})^2 - 4 = (4\sqrt{5})^2 - 4 = 76;$

$f(3\sqrt{5}) = 76.$

$f(7) = (7 + \sqrt{5})^2 - 4 = 49 + 14\sqrt{5} + 5 - 4 = 50 + 14\sqrt{5}.$

$f(7) = 50 + 14\sqrt{5}.$

7

$f(1) = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2\times1-3}} = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}-3} = 1;\ f(1) = 1.$

$f(2) = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2\times2-3}} = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{2-3} = 3 - \sqrt{2};\ f(2) = 3 - \sqrt{2}.$

$f(4) = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2\times4-3}} = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2}-3} = \dfrac{(\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)};$

$f(4) = 5 + 3\sqrt{2}.$

$f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2\times\frac{3}{2}-3}} = \dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}-3} = \dfrac{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{3}+3)}{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+3)};$

$f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{1}{6}\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}.$

8

1. a) $f(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1; f(0) = 1.$

$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1; f(1) = 1.$

$f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 1 = 3; f(1) = 3.$

$f(4) = 4^2 - 4 + 1 = 16 - 3 = 13; f(4) = 13.$

$f(\dfrac{3}{2}) = (\dfrac{3}{2})^2 - (\dfrac{3}{2}) + 1 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{7}{4};$

$f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{7}{4}.$

b) $f(0) = 0(0 + 1) - 4 = -4; f(0) = -4.$

$f(1) = 1(1 + 1) - 4 = 2 - 4 = -2; f(1) = -2.$

$f(2) = 2(2 + 1) - 4 = 6 - 4 = 2; f(2) = 2.$

$f(4) = 4(4 + 1) - 4 = 20 - 4 = 16; f(4) = 16.$

$f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{3}{2}(\dfrac{3}{2} + 1) - 4 = \dfrac{15}{4} - 4 = -\dfrac{1}{4}; f(\dfrac{3}{2}) = -$

c) $f(0) = -3\times 0^2 + 0 + 5 = 5; f(0) = 5.$

$f(1) = -3\times 1^2 + 1 + 5 = -3 + 6 = 3; f(1) = 3.$

$f(2) = -3\times 2^2 + 2 + 5 = -12 + 7 = -5; f(2) = -5.$

$f(4) = -39.$

$f(\dfrac{3}{2}) = -3\times(\dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{3}{2} + 5 = -\dfrac{27}{4} + \dfrac{26}{4} = -\dfrac{1}{4};$

$f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{1}{4}.$

2. a) $f(0) = (0 + 1)(0 - 2) = 1\times(-2) = -2;\ f(0)$

$f(1) = (1 + 1)(1 - 2) = 2\times(-1) = -2;\ f(1) = -2.$

$f(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3\times 0 = 0;\ f(2) = 0.$

$f(4) = (4 + 1)(4 - 2) = 4\times 2 = 8;\ f(4) = 8.$

$f(\dfrac{3}{2}) = (\dfrac{3}{2} + 1)(\dfrac{3}{2} - 2) = \dfrac{5}{2}\times(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{5}{4};$

$f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{5}{4}.$

b) $f(0) = 13 - (0 + 1)^2 = 13 - 1 = 12;\ f(0) = 12.$

$f(1) = 13 - (1 + 1)^2 = 13 - 4 = 9;\ f(1) = 9.$

$f(2) = 13 - (2 + 1)^2 = 13 - 9 = 4;\ f(2) = 4.$

$f(4) = 13 - (4 + 1)^2 = 13 - 25 = -12;\ f(4) = -12.$

$f(\dfrac{3}{2}) = 13 - (\dfrac{3}{2} + 1)^2 = 13 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{27}{4};\ f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{27}{4}.$

c) $f(0) = \dfrac{2}{3}(0 - 3)^2 + 1 = \dfrac{2}{3}\times 9 + 1 = 6 + 1 = 7;$

$f(0) = 7.$

$f(1) = \dfrac{2}{3}(1 - 3)^2 + 1 = \dfrac{2}{3}\times 4 + 1 = \dfrac{8}{3} + 1 = \dfrac{11}{3}; f(1) =$

$f(2) = \dfrac{2}{3}(2 - 3)^2 + 1 = \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{5}{3};\ f(2) = \dfrac{5}{3}.$

$f(4) = \dfrac{2}{3}(4 - 3)^2 + 1 = \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{5}{3};\ f(4) = \dfrac{5}{3}$

$f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{2}{3}(\dfrac{3}{2} - 3)^2 + 1 = \dfrac{2}{3}(-\dfrac{3}{2})^2 + 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2};$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$.

3. a) $f(0) = \frac{2}{0-3} = -\frac{2}{3}$; $f(0) = -\frac{2}{3}$.

$f(1) = \frac{2}{1-3} = \frac{1}{-2} = -1$; $f(1) = -1$.

$f(2) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$; $f(2) = -2$.

$f(4) = \frac{2}{4-3} = \frac{2}{1} = 2$; $f(4) = 2$.

$f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{\frac{3}{2}-3} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$; $f(\frac{3}{2}) = -\frac{4}{3}$.

b) $f(0) = \frac{8}{0+1} - \frac{4\times0}{3} = 8$; $f(0) = 8$.

$f(1) = \frac{8}{1+1} - \frac{4\times1}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$; $f(1) = \frac{8}{3}$.

$f(2) = \frac{8}{2+1} - \frac{4\times2}{3} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$; $f(2) = 0$.

$f(4) = \frac{8}{4+1} - \frac{4\times4}{3} = \frac{8}{5} - \frac{16}{3} = -\frac{56}{15}$ =; $f(4) = -\frac{56}{15}$.

$f(\frac{3}{2}) = \frac{8}{\frac{3}{2}+1} - \frac{4\times\frac{3}{2}}{3} = \frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$; $f(\frac{3}{2}) = \frac{6}{5}$.

c) $f(0) = \frac{7-2\times0}{1+2\times0} = 7$; $f(0) = 7$.

$f(1) = \frac{7-2\times1}{1+2\times1} = \frac{5}{3}$; $f(1) = \frac{5}{3}$.

$f(2) = \frac{7-2\times2}{1+2\times2} = \frac{3}{5}$; $f(1) = \frac{3}{5}$.

$f(4) = \frac{7-2\times4}{1+2\times4} = -\frac{1}{9}$; $f(4) = -\frac{1}{9}$.

$f(\frac{3}{2}) = \frac{7-2\times\frac{3}{2}}{1+2\times\frac{3}{2}} = \frac{7-3}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$; $f(\frac{3}{2}) = 1$.

9

1. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow 2x + 5 = -1$.

$\Leftrightarrow 2x = -6$

$\Leftrightarrow x = -3$.

L'antécédent de -1 par f est -3.

Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow 2x + 5 = 6$.

$\Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

L'antécédent de 6 par f est $\frac{1}{2}$.

b) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow -4x + 9 = -1$

$\Leftrightarrow -4x = -1 - 9$

$\Leftrightarrow -4x = -10$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

L'antécédent de -1 par f est $\frac{5}{2}$.

Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow -4x + 9 = 6$

$\Leftrightarrow -4x = -9 + 6$

$\Leftrightarrow -4x = -3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

L'antécédent de 6 par f est $\frac{3}{4}$.

c) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x + \frac{7}{3} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x = -\frac{7}{3} - 1$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x = -\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \times \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$.

L'antécédent de -1 par f est $-\frac{8}{3}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x + \frac{7}{3} = 6$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x = -\frac{7}{3} + 6$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x = \frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \times \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{44}{15}$.

L'antécédent de 6 par f est $\frac{44}{15}$.

2. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{2-x} = -1$

$\Leftrightarrow x - 2 = 5$

$\Leftrightarrow x = 7$

L'antécédent de -1 par f est 7.

Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2-x} = 6$

$\Leftrightarrow -6x + 12 = 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$

L'antécédent de 6 par f est $\frac{7}{6}$.

b) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = -1$

$\Leftrightarrow x - 1 = -x - 2$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

L'antécédent de -1 par f est $-\frac{1}{2}$.

Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 6$

$\Leftrightarrow x - 1 = 6x + 12$

$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{5}$.

L'antécédent de 6 par f est $-\frac{13}{5}$.

c) Pour x tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-x}{5x+4} = -1$

$\Leftrightarrow -x = -5x - 4$

$\Leftrightarrow x = -1$.

L'antécédent de -1 par f est -1.

Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\}$,

$f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{-x}{5x+4} = 6$

$\Leftrightarrow -x = 30x + 24$

$\Leftrightarrow x = -\frac{24}{31}$.

L'antécédent de 6 par f est $-\frac{24}{31}$.

10

1. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0.$

L'antécédent de 0 par f est 0.

Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$

Les antécédents de 9 par f sont –3 et3.

b) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 13 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 13$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{13} \text{ ou } x = \sqrt{13}.$

Les antécédents de 0 par f sont $-\sqrt{13}$ et $\sqrt{13}$.

Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow 13 - x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$

Les antécédents de 9 par f sont –2 et 2.

c) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\frac{x}{3})^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} = 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 36$

$\Leftrightarrow x = -6 \text{ ou } x = 6.$

Les antécédents de 0 par f sont –6 et 6.

Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow (\frac{x}{3})^2 - 4 = 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} = 13$

$\Leftrightarrow x^2 = 13 \times 9$

$\Leftrightarrow x = -3\sqrt{13} \text{ ou } x = 3\sqrt{13}.$

Les antécédents de 0 par f est $-3\sqrt{13}$ et $3\sqrt{13}$.

2. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5+x} = 0$

$\Leftrightarrow 5 + x = 0$

$\Leftrightarrow x = -5.$

L'antécédent de 0 par f est –5.

Pour x élément de $[-5; +\infty[$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow \sqrt{5+x} = 9$

$\Leftrightarrow 5 + x = 81$

$\Leftrightarrow x = 76.$

L'antécédent de 9 par f est 76.

b) Pour tout élément de $]-\infty; \frac{17}{2}]$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{17-2x} = 0$

$\Leftrightarrow 17 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{17}{2}.$

L'antécédent de 0 par f est $\dfrac{17}{2}$.

Pour tout élément de $]-\infty; \frac{17}{2}]$

$f(x) = 9 \Leftrightarrow \sqrt{17-2x} = 9$

$\Leftrightarrow 17 - 2x = 81$

$\Leftrightarrow x = -32.$

L'antécédent de 0 par f est –32.

c) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + \sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow x - 2 = 16$

$\Leftrightarrow x = 18$

L'antécédent de 0 par f est 18.

Pour x élément de $[1;+\infty[$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow -4 + \sqrt{x-2} = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 13$

$\Leftrightarrow x - 2 = 169$

$\Leftrightarrow x = 171$

L'antécédent de 0 par f est 171.

3. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x+8| = 0$

$\Leftrightarrow x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = -8.$

L'antécédent de 0 par f est – 8.

Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow |x+8| = 9$

$\Leftrightarrow x + 8 = 9 \text{ ou } x + 8 = -9$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -17.$

Les antécédents de 9 par f sont – 17 et 1.

b) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 6|2x-5| = 0$

$\Leftrightarrow |2x-5| = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = 0.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}.$

L'antécédent de 0 par f est $\dfrac{5}{2}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow 6|2x-5| = 9$

$\Leftrightarrow |2x-5| = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = \dfrac{3}{2} \text{ ou } 2x - 5 = -\dfrac{3}{2}.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{13}{4} \text{ ou } x = \dfrac{7}{4}.$

Les antécédents de 9 par f sont $\dfrac{13}{4}$ et $\dfrac{7}{4}$.

c) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{x+2}\right| = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0.$

L'antécédent de 0 par f est 0.

Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$f(x) = 9 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{x+2}\right| = 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} = 9 \text{ ou } \dfrac{x}{x+2} = -9$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{4} \text{ ou } x = -\dfrac{9}{5}.$

Les antécédents de 9 par f sont $-\dfrac{9}{4}$ et $-\dfrac{9}{5}$.

11

1. a) $(x-1)^2 + x^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2$

$= 2x^2 - 2x + 1$

b) $2[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}] = 2(x^2 - 2\times\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$

$= 2(x^2 - x + \frac{1}{2})$

$= 2x^2 - 2x + 1$

Donc, $2x^2 - 2x + 1 = 2[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$.

2. a) $x \in D_f \Leftrightarrow (x-1)^2 + x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}] \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \neq 0$

Pour tout nombre réel x, $(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0$

$(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$

Il s'ensuit que : $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \neq 0$.

Donc, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) $f(-2) = \frac{(-2)^2}{(-2)^2 + (-2-1)^2} == \frac{4}{4+9} = \frac{4}{13}$

$f(-2) = \frac{4}{13}$.

$f(0) = \frac{0^2}{0^2 + (0-1)^2} == \frac{0}{1} = 0$; $f(0) = 0$.

$f(\frac{4}{3}) = \frac{(\frac{4}{3})^2}{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3}-1)^2} = \frac{\frac{4^2}{3^2}}{\frac{4^2}{3^2} + (\frac{1}{3})^2} == \frac{\frac{16}{9}}{\frac{16}{9} + \frac{1}{9}}$

$f(\frac{4}{3}) = \frac{16}{17}$.

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + (x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$.

L'antécédent de o par f est 0.

Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{4}{13} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + (x-1)^2} = \frac{4}{13}$

$\Leftrightarrow 13x^2 = 4(x-1)^2 + 4x^2$

$\Leftrightarrow 13x^2 - 4x^2 = 4(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 = 4(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (3x)^2 = [2(x-1)]^2$

$\Leftrightarrow 3x = 2(x-1)$ ou $3x = -2(x-1)$

$\Leftrightarrow 3x = 2x - 2$ ou $3x = -2x + 2$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $5x = 2$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{2}{5}$.

Les antécédents par f de $\frac{4}{13}$ sont -2 et $\frac{2}{5}$

12

$A(-4;-10)$ appartient à $(\mathcal{C})$ si $f(-4) = -10$

Or, $f(-4) = \frac{-4}{2}(3-(-4)) + 4 = -2(7) + 4 =$

Donc $A(-4;-10)$ appartient à $(\mathcal{C})$

$f(-1) = \frac{-1}{2}(3-(-1)) + 4 = -\frac{1}{2}\times 4 + 4 = 2$

Donc, $B(-1;0)$ n'appartient pas à $(\mathcal{C})$.

$f(1) = \frac{1}{2}(3-1) + 4 = \frac{1}{2}\times 2 + 4 = 5$.

$C(1;5)$ appartient à $(\mathcal{C})$.

$f(3) = \frac{3}{2}(3-3) + 4 = 4$.

$E(3;4)$ appartient à $(\mathcal{C})$.

$f(0) = \frac{0}{2}(3-0) + 4 = 0 + 4 = 4$.

$D(0;2)$ appartient à $(\mathcal{C})$.

13

1. $f(-x) = \frac{4(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-4x}{\sqrt{x^2+1}}$,

Donc : $f(-x) = f(x)$.

2.

x	−5	−4	−3	−2
f(x)	−3,92	−3,88	−3,79	−3,58

−1	−0,5	−0,25	0
−2,83	−1,79	−0,97	0

14

1. Pour tout nombre réel x,

$(3x-5)^2 - 4 = (3x)^2 - 2\times 3x \times 5 + 25 - 4$

$= 3^2 \times x^2 - 30x + 21$

$= 9x^2 - 30x + 21$.

2. $x \in D_g \Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 21 \neq 0$

$\Leftrightarrow (3x-5)^2 - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow (3x-5)^2 \neq 4$

$\Leftrightarrow 3x - 5 \neq \sqrt{4}$ ou $3x - 5 \neq -\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow 3x \neq 7$ ou $3x \neq 3$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{7}{4}$ ou $x \neq 1$.

Donc, l'ensemble de définition de $\mathbb{R} \setminus \{1 ; \frac{7}{3}\}$.

15

1. Pour nombre nul x,

$|1+x| + |1-x| \geq |1+x+1-x|$

$|1+x| + |1-x| \geq |2|$

Donc, $|1+x| + |1-x| \geq 2$.

2. $x \in D_h \Leftrightarrow |1+x| + |1-x| \neq 0$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|1+x| + |1-x| \geq 2$.

Par suite, $|1+x| + |1-x| > 0$.

Par conséquent, $|1+x| + |1-x| \neq 0$.

Donc, l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$

3. $h(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{|1+\frac{1}{2}| + |1-\frac{1}{2}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$;

$h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

$h(1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{|1+1-\sqrt{2}| + |1-(1-\sqrt{2})|} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

$h(1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

16

$f(-4,5) = -1$; $f(-3) = 0$; $f(-1) = 0,5$;
$f(0) = 0$ et $f(1) = 1,7$.

17

$f(-5,5) = 1,5$; $f(-4) = 3$; $f(-3) = -1,5$;
$f(0) = 2,5$; $f(2) = 0$; $f(3,5) = -1$; $f(5,5) = -2$.

18

1. $D_f = [-1;6]$.

2. $f(-1) = 4$; $f(-0,5) = 1,5$; $f(0) = 0,5$;
$f(2) = 0,25$; $f(4) = 1,5$ et $f(5) = 2,5$.

3. $f(-0,5) = \dfrac{(-0,5-1)^2}{-0,5+2} = \dfrac{(-\frac{1}{2}-1)^2}{-\frac{1}{2}+2} = \dfrac{3}{2}$;

$f(-0,5) = \dfrac{3}{2}$.

$f(2) = \dfrac{(2-1)^2}{2+2} = \dfrac{1^2}{4} = \dfrac{1}{4}$; $f(2) = \dfrac{1}{4}$.

$f(5) = \dfrac{(5-1)^2}{5+2} = \dfrac{4^2}{7} = \dfrac{16}{7}$;

19

1. $D_f = [-3,5;1] \cup]1,5;5]$.

2. a) $f(-3,5) = -1$; $f(-2,5) = 3$; $f(-1) = 0,5$; $f(0) = -2$; $f(5) = -2$.

b) $f(-3) \simeq 2,6$; $f(-1,5) \simeq 1,8$ et $f(3) \simeq -3,6$.

3. $M(-3,5;-1) \in (\mathcal{C})$; $M(-3;-2,5) \notin (\mathcal{C})$; $P(-1;-1) \notin (\mathcal{C})$; $Q(0;-2) \in (\mathcal{C})$; $R(2;-4) \notin (\mathcal{C})$ et $S(4,5;0) \in (\mathcal{C})$.

20

2 est l'antécédent de − 1;
− 1 est l'antécédent de 0;
− 2 est l'antécédent de 1;
− 2,5 est l'antécédent de 2;
− 3 est l'antécédent de 4.

21

− 3 est l'antécédent de −3,5;
− 2,7 et 1,5 sont les antécédents de − 1;
− 2 ; 0,5 et 2,5 sont les antécédents de 0;
− 1 et 3,2 sont les antécédents de 1;
3,6 est l'antécédent de 3;
4 est l'antécédent de 4,5.

22

1. a) $x \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$
$\Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2$
$\Leftrightarrow 0+5 \le 2x+5 \le 2+5$
$\Leftrightarrow 5 \le f(x) \le 7$

L'image directe de $[0;1]$ par f est $[5;7]$.

b) $x \in [2;10] \Leftrightarrow 2 \le x \le 10$
$\Leftrightarrow -70 \le -7x \le -14$
$\Leftrightarrow -70+3 \le -7x+3 \le -14+3$
$\Leftrightarrow -67 \le f(x) \le -11$.

L'image directe de $[2;10]$ par f est $[-67;-11]$.

c) $x \in [-1;6] \Leftrightarrow -1 \le x \le 6$
$\Leftrightarrow -1+4 \le x+4 \le 6+4$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5} \le \dfrac{x+4}{5} \le \dfrac{10}{5}$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5} \le f(x) \le 2$.

L'image directe de $[-1;6]$ par f est $[\frac{3}{5};2]$.

2. a) $x \in [-4;-1] \Leftrightarrow -4 \le x \le -1$
$\Leftrightarrow -1 \le \dfrac{1}{x} \le -\dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow -2 \le \dfrac{2}{x} \le -\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow -2 \le f(x) \le -\dfrac{1}{2}$.

L'image directe de $[-4;-1]$ par f est $[-2;-\frac{1}{2}]$

b) $x \in]2;5] \Leftrightarrow 2 < x \le 5$
$\Leftrightarrow -5 \le -x < -2$
$\Leftrightarrow 3 \le 8-x < 6$
$\Leftrightarrow \dfrac{12}{6} < \dfrac{12}{8-x} \le \dfrac{12}{3}$.
$\Leftrightarrow 2 < f(x) \le 4$.

L'image directe de $]2;5]$ par f est $]2;4]$.

c) $x \in [-3;2[\Leftrightarrow -3 \le x < 2$
$\Leftrightarrow -6 \le 2x < 4$
$\Leftrightarrow 7 \le 2x+13 < 17$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{17} < \dfrac{1}{2x+13} \le \dfrac{1}{7}$.
$\Leftrightarrow \dfrac{10}{17} < \dfrac{10}{2x+13} \le \dfrac{10}{7}$.
$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{17} < \dfrac{10}{2x+13} - 1 \le \dfrac{3}{7}$.
$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{17} < f(x) \le \dfrac{3}{7}$.

L'image directe de $[-3;2[$ par f est $]-\frac{7}{17};\frac{3}{7}]$.

23

1. a) $x \in [0;16] \Leftrightarrow 0 \le x \le 16$
$\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 4$
$\Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 4$

L'image directe de $[0;16]$ par f est $[0;4]$.

b) $x \in [-1;6] \Leftrightarrow -1 \le x \le 6$
$\Leftrightarrow 1 \le x+2 \le 8$
$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x+2} \le 2\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 2\sqrt{2}$

L'image directe de $[-1;6]$ par f est $[1;2\sqrt{2}]$.

c) $x \in [9;25] \Leftrightarrow 9 \le x \le 25$
$\Leftrightarrow 3 \le \sqrt{x} \le 5$
$\Leftrightarrow -9 \le 1-2\sqrt{x} \le -5$
$\Leftrightarrow -10 \le -2\sqrt{x} \le -6$
$\Leftrightarrow -9 \le f(x) \le -5$

L'image directe de $[-1;6]$ par f est $[-9;-5]$.

2. a) $x \in]1;2[\Leftrightarrow 1 < x < 2$
$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 4$
$\Leftrightarrow 1 < f(x) < 4$

L'image directe de $]1;2[$ par f est $]1;4[$.

b) $x \in [3;5] \Leftrightarrow 3 \le x \le 5$
$\Leftrightarrow 2 \le x-1 \le 4$
$\Leftrightarrow 4 \le (x-1)^2 \le 16$
$\Leftrightarrow 4 \le f(x) \le 16$.

L'image directe de $[-1;6]$ par f est $[-10;-6]$.

c) $x \in [-9;-5] \Leftrightarrow -9 \le x \le -5$
$\Leftrightarrow -4 \le x+5 \le 0$
$\Leftrightarrow 0 \le (x+5)^2 \le 16$
$\Leftrightarrow -9 \le 7-(x+5)^2 \le 7$
$\Leftrightarrow -9 \le f(x) \le 7$

L'image directe de $[-9;-5]$ par f est $[-9;7]$.

24

a) $[0;3]$; b) $[-1;2]$; c) $[-0,5;1,4]$.

25

$[0;4,5]$ est l' image directe de $[-4;-2,5]$;

$[4;5,5]$ est l'image directe de $[-2,5;-1]$;

$]-3,5;4]$ est l' image directe de $[-1;0[$;

$[-4;0]$ est l' image directe de $[0;4,5]$;

$]-4;4,5;[$ est l' image directe de $]0,5;7,5[$.

26

1. $[-3;0]$ est l'image réciproque de $[-3;-2]$;

$]-4;-3,2] \cup [0;0,5[$ est l'image réciproque de $[-2;-1[$;

$[1;3,5]$; est l'image réciproque de $[0;2,5]$,

$\{-4; 0,5; 4\}$ est l'image réciproque de $\{-1\}$;

$\{1; 3, 5\}$ est l'image réciproque de $\{0\}$

27

1. a) Pour tout élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [8;12] \Leftrightarrow 8 \leq f(x) \leq 12$

$\Leftrightarrow 8 \leq x+9 \leq 12$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$

L'image réciproque de $[8;12]$ par f est $[-1;3]$.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [-2;0] \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq -x+3 \leq 0$

$\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5.$

L'image réciproque de $[-2;0]$ par f est $[3;5]$.

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [1;4] \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 4$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{15}{8} \leq x \leq \frac{51}{8}.$

L'image réciproque de $[1;4]$ par f est $[\frac{15}{8};\frac{51}{8}]$.

2. a) Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$f(x) \in [2;5] \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 5$

$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{-3}{x+1} \leq 5$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{8}{5}.$

L'image réciproque de $[2;5]$ par f est $[-\frac{5}{2};-\frac{8}{5}]$.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}^*$,

$f(x) \in]1;6] \Leftrightarrow 1 < f(x) \leq 6$

$\Leftrightarrow 1 < \frac{8}{5x} \leq 6$

$\Leftrightarrow \frac{4}{15} \leq x < \frac{8}{5}.$

L'image réciproque de $]1;6]$ par f est $[\frac{4}{15};\frac{8}{5}[$

c) Pour x élément de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$f(x) \in]-2;-1[\Leftrightarrow -2 < f(x) < -1$

$\Leftrightarrow -2 < \frac{2}{x-3} < -1$

$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$

L'image réciproque de $]-2;-1[$ par f est $]1;2[$

28

1. a) Pour x élément de $[0;+\infty[$,

$f(x) \in [1;5] \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 5$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 25.$

L'image réciproque de $[1;5]$ par f est $[1;25]$

b) Pour x élément de $[0;+\infty[$,

$f(x) \in [2;3] \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 3$

$\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{12x} \leq 3$

$\Leftrightarrow 4 \leq 12x \leq 9$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}.$

L'image réciproque de $[2;3]$ par f est $[\frac{1}{3};\frac{3}{4}]$

c) Pour x élément de $]-\infty;\frac{1}{2}]$,

$f(x) \in [4;2\sqrt{5}]. \Leftrightarrow 4 \leq f(x) \leq 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 4 \leq \sqrt{3(1-2x)} \leq 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 16 \leq 10(1-2x) \leq 20$

$\Leftrightarrow \frac{8}{5} \leq 1-2x \leq 2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{3}{10}.$

L'image réciproque de $[4;2\sqrt{5}]$ est

$[-\frac{1}{2};-\frac{3}{10}]$.

2. a) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [3;4] \Leftrightarrow 3 \leq f(x) \leq 4$

$\Leftrightarrow 3 \leq x^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3} \leq x \leq 2.$

L'image réciproque de $[1;5]$ par f est

$[-2;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};2]$.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [0;6] \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{25x^2}{6} \leq 6$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{36}{25}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x^2} \leq \frac{6}{5}$

$\Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq \frac{6}{5}$

$\Leftrightarrow -\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}.$

L'image réciproque de $[2;3]$ par f est $[-\frac{6}{5};\frac{6}{5}]$.

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) \in [-1;18] \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 18$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\frac{x+5}{7})^2 \leq 18$

$\Leftrightarrow -5-21\sqrt{2} \leq x \leq -5+21\sqrt{2}.$

L'image réciproque de $[-1;18]$ par f est

$[-5-21\sqrt{2};-5+21\sqrt{2}]$.

29

1. a) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $u < v$. Donc, $2u < 2v$

Donc, $2u+8 < 2v+8$

$f(u) < f(v)$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $\mathbb{R}$ tels que : $u < v$. Donc, $-13v < -13u$

Donc, $-13v+7 < -13u+7$

$f(v) < f(u)$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $u < v$,

Donc, $5u < 5v$

$5u+11 < 5v+11$

$\frac{5u+11}{8} < \frac{5v+11}{8}$

$f(u) < f(v)$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. a) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que : $u < v$. Donc, $0 \leq u < v$

$u^2 < v^2$

$7u^2 < 7v^2$

$f(u) < f(v)$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $[-\frac{1}{2};+\infty[$ tels que : $u < v$.

Donc, $-\frac{1}{2} \leq u < v$

$-\frac{1}{2} \times 2 \leq 2u < 2v$

$0 \leq 2u+1 < 2v+1$

$(2u+1)^2 < (2v+1)^2$

$f(u) < f(v)$

f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$

c) Soit u et v éléments de l'intervalle $[7;+\infty[$ tels que : $u < v$. Donc, $7 \leq u < v$

$$0 \leq u-7 < v-7$$
$$0 \leq u-7 < v-7$$
$$(u-7)^2 < (v-7)^2$$
$$-3(v-7)^2 < -3(u-7)^2$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement décroissante sur $[7;+\infty[$.

3. a) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}_-^*$ tels que :

$u < v$. Donc, $u < v < 0$

$$3u < 3v < 0$$
$$\frac{1}{3v} < \frac{1}{3u}$$
$$\frac{2}{3v} < \frac{2}{3u}$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $]-\infty;-1[$ tels que : $u < v$. Donc, $u < v < -1$

$$u+1 < v+1 < 0$$
$$\frac{1}{v+1} < \frac{1}{u+1}$$
$$\frac{-2}{u+1} < \frac{-2}{v+1}$$
$$\frac{-2}{u+1}+5 < \frac{-2}{v+1}+5$$
$$f(u) < f(v)$$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$.

c) Soit u et v éléments de l'intervalle $]2;+\infty[$ tels que : $u < v$. Donc, $2 < u < v$

$$0 < u-2 < v-2$$
$$0 < 3(u-2) < 3(v-2)$$
$$\frac{1}{3(v-2)} < \frac{1}{3(u-2)}$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

4 .a) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que :

$u < v$. Donc, $0 < u < v$

$$0 < 2u < 2v$$
$$\sqrt{2u} < \sqrt{2v}$$
$$f(u) < f(v)$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit u et v éléments de $[-1;+\infty[$ tels que :

$u < v$. Donc, $-1 \leq u < v$

$$-6 \leq 6u < 6v$$
$$0 \leq 6u+6 < 6v+6$$
$$\sqrt{6u+6} < \sqrt{6v+6}$$
$$-\sqrt{6v+6} < -\sqrt{6u+6}$$
$$4-\sqrt{6v+6} < 4-\sqrt{6u+6}$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$.

c) Soit u et v éléments de $]-\infty;2]$ tels que :

$u < v$. Donc, $< u < v \leq 2$

$$-8 < -4v \leq -4u$$
$$0 < -4v+8 \leq -4u+8$$
$$\sqrt{-4v+8} < \sqrt{-4u+8}$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$.

5. a) Soit u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que ; $u < v$

Donc, $0 < u < v$

$$0 < u^2 < v^2$$
$$\frac{1}{v^2} < \frac{1}{u^2}$$
$$\frac{5}{v^2} < \frac{5}{u^2}$$
$$f(v) < f(u)$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit u et v éléments de $]-1;+\infty[$ tels que ;

$u < v$. Donc, $-1 < u < v$

$$0 < u+1 < v+1$$
$$0 < (u+1)^2 < (v+1)^2$$
$$\frac{1}{(v+1)^2} < \frac{1}{(u+1)^2}$$
$$\frac{-6}{(u+1)^2} < \frac{-6}{(v+1)^2}$$
$$f(u) < f(v)$$

f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) Soit u et v éléments de $]-\infty;3[$ tels que :

$u < v$. Donc, $u < v < 3$

$$4u < 4v < 12$$
$$4u-12 < 4v-12 < 0$$
$$0 < (4v-12)^2 < (4u-12)^2$$
$$\frac{1}{(4u-12)^2} < \frac{1}{(4v-12)^2}$$
$$\frac{10}{(4u-12)^2} < \frac{10}{(4v-12)^2}$$
$$f(u) < f(v)$$

f est strictement croissante sur $]-\infty;3[$.

30

a)

x	−4		6
f(x)	2	↗	9

b)

x	−4		1		6
f(x)	2	↗	3	↘	−8

c)

x	−4		0		1		6
f(x)	15	↘	−1	↗	4	↘	1

31

1. a) f strictement croissante $[-5;3]$.

On a : $-5 < 3$ donc, $f(-5) < f(3)$.

b) f est strictement décroissante sur $[-5;3]$.

On a : $-5 < 3$ donc, $f(3) < f(-5)$.

2. a) x est un élément de $[0;7]$. Donc,
$0 < x < 7$ De plus, f est strictement croissante sur $[0;7]$.

Par conséquent, $f(0) < f(x)$.
On conclut que : $1 < f(x)$.

b) D'après le 2a), $0 < x < 7$ et f strictement croissante sur $[0;7]$. Donc, $f(x) < f(7)$.
Par suite, $f(x) < 6$.

32

a) f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 0$.

Donc, $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1)$.

$\Rightarrow f(x) < 0$ car $f(1) = 0$.

Et, $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1)$.

$\Rightarrow f(x) > 0$ car $f(1) = 0$.

On en déduit : $\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0$

$f(1) = 0$.

b) f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(-2) = 0$.

Donc, $x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2)$.

$\Rightarrow f(x) > 0$ car $f(-2) = 0$.

Et, $x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2)$.

$\Rightarrow f(x) < 0$ car $f(-2) = 0$.

On en déduit : $\forall x \in]-\infty; -2[, f(x) > 0$

$\forall x \in]-2; +\infty[, f(x) < 0$

$f(-2) = 0$.

33

1. f est strictement croissante sur $]-\infty; 5]$ et f est strictement décroissante sur $[5; 13]$.

2. a) x est un élément de $[-4; 5]$. Donc, $-4 < x < 5$. De plus, f est strictement croissante sur $[-4; 5]$. Par suite, $f(x) < f(5)$.

Il en résulte que : $f(x) < 16$.

Par ailleurs, $f(x) > f(-4)$. Donc, $f(x) > 0$.

3. a) f strictement croissante sur $]-\infty; 5]$ et $f(-4) = 0$.

Donc, $x < -4 \Rightarrow f(x) < f(-4)$

$\Rightarrow f(x) < 0$ car $f(-4) = 0$.

Et, $-4 < x < 5 \Rightarrow f(x) > f(-4)$

$\Rightarrow f(x) > 0$ car $f(-4) = 0$.

D'autre part, f est strictement décroissante sur $[5; 13]$. Donc,

$5 \le x \le 13 \Rightarrow f(13) \le f(x) \le f(5)$

$\Rightarrow 1 < f(x) < 16$.

$\Rightarrow f(x) > 0$.

On conclut que : $\forall x \in]-\infty; -4[, f(x) < 0$

$\forall x \in]-4; 13[, f(x) > 0$

$f(-4) = 0$.

34

1. f est strictement croissante sur $]-\infty; 5]$, -5 et 1 appartiennent à $]-\infty; 5]$ avec $-5 < 1$. Par conséquent, $f(-5) < f(1)$.

f est strictement décroissante $[5; 13]$ et; 6 et 8 appartiennent à $[5; 13]$.
Puisque $6 < 8$ alors $f(8) < f(6)$.

2. D'après le tableau de variation, la plus grande valeur de $f(x)$ est 16.
16 est le maximum de f atteint en 5.

35

1. a) Sens de variation de h.
h est strictement décroissante sur $[-2; 3]$.

Tableau de variation de h.

x	-2		3
h(x)	2	↘	$-1,5$

1. a) Extrémums de h.

$(-2; 2)$ est le couple de coordonnées du point de la courbe ayant la plus grande ordonnée. Donc 2 est le maximum de h atteint en -2.

$(3; -1,5)$ est le couple de coordonnées du point de la courbe ayant la plus petite ordonnée. $-1,5$ est donc le minimum de h atteint en 3.

2. b) Sens de variation de h.
h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

Tableau de variation de h.

x	0		4
f(x)	0	↗	3,5

b) Extrémum de h.
D'après le tableau de variation de h,
0 est la plus petite valeur prise par h(x). Par conséquent, 0 est le minimum de h atteint en 0.

La fonction h n'est pas définie en 4. Par conséquent, h n'admet pas de maximum.

1. c) Sens de variation de h.
h est strictement croissante sur $[-1,5; 1]$ et h est strictement décroissante sur $[1; 4]$.

Tableau de variation de h

x	$-1,5$		1		4
h(x)	$-2,5$	↗	1	↘	-2

2.c) Extrémums de h.
$-2,5$ est la plus petite valeur prise par h(x).
Donc, $-2,5$ est le minimum de h atteint en $-1,5$.

1 est la plus grande valeur prise par h(x).
Il s'ensuit que 1 est le maximum de h atteint en

36

a) g n'est pas définie en 2 donc, g n'admet de minimum.
La plus grande valeur prise par g est 9.
Par suite, 9 est la maximum de g atteint en 7.

b) 14 est plus grande valeur prise par g.
Donc, 14 est le maximum de g atteint en -1.
3 est la plus petite valeur prise par g. Il s'ensuit que 3 est le minimum de g atteint en 6.

c) g n'est ni définie en 0, ni en 8 donc g n'adme ni maximum, ni minimum.

37

1. L'ensemble de définition de k est $[-4; 5]$.

2. k est strictement décroissante sur les interva $[-4; -2]$ et $[\frac{3}{2}; 5]$ et k est strictement croissante sur $[-2; \frac{3}{2}]$.

3. $k(-4) = \frac{(-4+2)^2}{(-4)^2+3} = \frac{(-2)^2}{16+3} = \frac{4}{19}$;

$k(-4) = \frac{4}{19}$.

$k(\frac{3}{2}) = \frac{(\frac{3}{2}+2)^2}{(\frac{3}{2})^2+3} = \frac{(\frac{7}{2})^2}{\frac{9}{4}+3} = \frac{\frac{49}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{49}{21}$;

$k(\frac{3}{2}) = \frac{7}{3}$.

$k(5) = \frac{(5+2)^2}{5^2+3} = \frac{7^2}{25+3} = \frac{49}{28}$; $k(5) = \frac{7}{4}$.

4. $(-2; 0)$ est le couple de coordonnées du point de la courbe ayant la plus petite ordonnée. Donc 0 est le minimum de k atteint en -2. $(\frac{3}{2}; \frac{7}{3})$ est le couple de coordonnées du point de la courbe ayant la plus grand de ordonnée. Donc $\frac{7}{3}$ est le minimum de k atteint en $\frac{3}{2}$.

5. Tableau de variation de k

x	-4		-2				5
k(x)	$\frac{4}{19}$	↘	0	↗	$\frac{7}{3}$	↘	$\frac{7}{4}$

38

1. a) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geq 0$

Donc, $f(x) \geq 0$

De plus, $f(-1) = (-1+1)^2 = 0$.

Par suite, 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en -1.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $(x-4)^2$

Donc, $(x-4)^2 + 7 \geq 7$

$f(x) \geq 7$

De plus, $f(x) = 7 \Leftrightarrow (x-4)^2 + 7 = 7$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$.

Donc, $f(4) = 7$

On conclut que 7 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en 4.

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

$3x^2 \geq 0$

$3x^2 + 10 \geq 10$

Donc, $f(x) \geq 0$

De plus, $f(0) = 3 \times 0^2 + 10 = 10$.

Donc, 10 est le minimum de f atteint en 0.

2. a) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $|x-2| \geq 0$

$|x-2| + 9 \geq 9$

Donc, $f(x) \geq 9$.

De plus, $f(-2) = |-2+2| + 9 = 9$

0 est donc le minimum de f atteint en -1.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $|5-2x| \geq 0$

$|5-2x| + 13 \geq 13$

Donc, $f(x) \geq 13$.

Et, $f(x) = 13 \Leftrightarrow |5-2x| + 13 = 13$

$\Leftrightarrow |5-2x| = 0$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Donc, $f(\frac{5}{2}) = 13$.

Par suite, 13 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en $\frac{5}{2}$.

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$, $|x-2| \geq 0$

$|x-2| + 15 \geq 15$

$\frac{1}{|x-2|+15} \leq \frac{1}{15}$

$\frac{-21}{|x-2|+15} \geq -\frac{21}{15}$

Il s'ensuit que : $f(x) \geq -\frac{7}{5}$.

De plus, $f(2) = \frac{-21}{|2-2|+15} = -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5}$.

Donc, $-\frac{7}{5}$ est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en 2.

39

1. a) $x \in D_f \Leftrightarrow x + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -3$.

L'ensemble de définition de f est $[-3; +\infty[$.

Pour x élément de $[-3; +\infty[$, $\sqrt{x+3} \geq 0$

$-\sqrt{x+3} \leq 0$

Donc, $f(x) \leq 0$.

Et, $f(-3) = -\sqrt{-3+3} = 0$.

Par conséquent, f admet en -3 un maximum qui est 0.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow 14 - 7x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 2$.

L'ensemble de définition de f est $]-\infty; 2]$.

Pour x élément de $]-\infty; 2]$, $\sqrt{14-7x} \geq 0$

$-2\sqrt{14-7x} \leq 0$

$5 - 2\sqrt{14-7x} \leq 5$

Donc, $f(x) \leq 5$.

De plus, $f(2) = 5 - 2\sqrt{14-7\times 2} = 5$.

On conclut que, f admet en 2 un maximum qui est 5.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ et $\sqrt{x} + 4 \neq 0$

Or pour tout x nombre réel x positif, $\sqrt{x} \geq 0$

$\sqrt{x} + 4 \geq 4$

Donc, $\sqrt{x} + 4 \neq 0$

Il en résulte que l'ensemble de définition de f est $[0; +\infty[$.

Pour x élément de $[0; +\infty[$, $\sqrt{x} \geq 0$

$\sqrt{x} + 4 \geq 4$

$\frac{4}{\sqrt{x}+4} \leq 1$

Donc, $f(x) \leq 1$.

Et, $f(0) = \frac{4}{\sqrt{0}+4} = 1$.

Par suite, f admet en 0 un maximum qui est 1.

2. a) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 8 \neq 0$

Or pour tout x nombre réel x, $x^2 \geq 0$

$x^2 + 8 \geq 8$

Donc, $x^2 + 8 \neq 0$

Par suite, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

$x^2 + 8 \geq 8$

$\frac{10}{x^2+8} \leq \frac{5}{4}$

Donc, $f(x) \leq \frac{5}{4}$.

De plus, $f(0) = \frac{10}{0^2+8} = \frac{5}{4}$.

Par conséquent, f admet en 0 un maximum qui est $\frac{5}{4}$.

b) $x \in D_f \Leftrightarrow |x-1|+3 \neq 0$

Or pour tout x nombre réel x, $|x-1| \geq 0$

$$|x-1|+3 \geq 3$$

Donc, $|x-1|+3 \neq 0$

Par suite, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}$, $|x-1| \geq 0$

$$|x-1|+3 \geq 3$$

$$\frac{1}{|x-1|+3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{|x-1|+3} \leq 2$$

Il en résulte que $f(x) \leq 2$.

De plus, $f(1) = \frac{6}{|1-1|+3} = \frac{6}{3} = 2$.

Donc, f admet en 1 un maximum qui est 2.

c) $x \in D_f \Leftrightarrow |x+3|+24 \geq 0$

Or pour tout x nombre réel x, $|x+3| \geq 0$

$$|x+3|+24 \geq 24$$

Donc, $|x+3|+24 \neq 0$

Par suite, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}$, $|x+3| \geq 0$

$$|x+3|+24 \geq 24$$

$$\sqrt{|x+3|+24} \geq \sqrt{24}$$

$$-\sqrt{|x+3|+24} \leq -2\sqrt{6}$$

Donc, $f(x) \leq -2\sqrt{6}$.

Et, $f(-3) = -\sqrt{|-3+3|+24} = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6}$.

On conclut que f admet en -3 un maximum qui est $2\sqrt{6}$.

40

1. a) Soit u et v éléments de l'intervalle $]0;+\infty[$ tels que : $u < v$. On a : $0 < u < v$

Donc, $u^2 < v^2$ et $\frac{1}{v} < \frac{1}{u}$

$u^2 < v^2$ et $-\frac{1}{u} < -\frac{1}{v}$

$$u^2 - \frac{1}{u} < v^2 - \frac{1}{v}$$

$$f(u) < f(v)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que : $u < v$. On a : $u < v < 0$

Il s'ensuit que : $v^2 < u^2$ et $\frac{1}{v} < \frac{1}{u}$

$3v^2 < 3u^2$ et $\frac{1}{v} < \frac{1}{u}$

$3v^2 + \frac{1}{v} <$ et $< 3u^2 + \frac{1}{u}$

Donc, $f(v) < f(u)$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

2. a) Soit u et v éléments de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $u < v$. On a : $1 \leq u < v$

Par suite, $0 \leq u-1 < v-1$

$$\sqrt{u-1} < \sqrt{v-1}$$

$$\sqrt{u-1} + u < \sqrt{v-1} + v$$

$$f(u) < f(v)$$

On conclut que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que : $u < v$. On a : $u < v < 0$

$v^2 < u^2$ et $0 < -2v < -2u$

$\frac{v^2}{5} < \frac{u^2}{5}$ et $0 < \sqrt{-2v} < \sqrt{-2u}$

$$\frac{v^2}{5} + \sqrt{-2v} < \frac{u^2}{5} + \sqrt{-2u}$$

Donc, $f(v) < f(u)$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

3. a) Soit u et v éléments de l'intervalle $]4;+\infty[$ tels que : $u < v$. On a : $4 < u < v$

Donc, $0 < u-4 < v-4$

$\sqrt{u-4} < \sqrt{v-4}$ et $\frac{1}{v-4} < \frac{1}{u-4}$

$\sqrt{u-4} < \sqrt{v-4}$ et $-\frac{1}{u-4} < -\frac{1}{v-4}$

$$\sqrt{u-4} - \frac{1}{u-4} < \sqrt{v-4} - \frac{1}{v-4}$$

$$f(u) < f(v)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]4;+\infty[$.

b) Soit u et v éléments de l'intervalle $]-\infty;1[$ tels que : $u < v$. On a : $u < v < 1$

$u-1 < v-1$ et $-3v < -3u$

$(v-1)^2 < (u-1)^2$ et $-3v < -3u$

$$(v-1)^2 - 3v < (u-1)^2 - 3u$$

Donc, $f(v) < f(u)$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

41

1. $f(b) - f(a) = b^2 - 2b + 4 - (a^2 - 2a + 4)$

$= b^2 - a^2 - 2b + 2a$

$= (b-a)(b+a) - 2(b-a)$

Donc, $f(b) - f(a) = (b-a)(b+a-2)$.

2) Supposons a et b dans l'intervalle $]-\infty;1[$ tels que : $a < b$.

Par suite, $a < 1$, $b < 1$ et $b - a > 0$

$b + a < 2$ et $b - a > 0$

$b + a - 2 < 0$ et $b - a > 0$

$$(b-a)(b+a-2) < 0$$

$$f(b) - f(a) < 0$$

Il en découle que f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.

Supposons a et b dans l'intervalle $]1;+\infty[$. tels que : $a < b$.

Donc, $a > 1$, $b > 1$ et $b - a > 0$

$b + a > 2$ et $b - a > 0$

$b + a - 2 > 0$ et $b - a > 0$

$$(b-a)(b+a-2) > 0$$

$$f(b) - f(a) > 0$$

Il en découle que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

42

1. $f(v) - f(u) = \frac{3v+1}{4v-5} - \frac{3u+1}{4u-5}$

$= \frac{(3v+1)(4u-5)-(3u+1)(4v-5)}{(4u-5)(4v-5)}$

$= \frac{-15v+4u+15u-4v}{(4u-5)(4v-5)}$

$= \frac{-19v+19u}{(4u-5)(4v-5)}$

Donc, $f(v) - f(u) = \frac{-19(v-u)}{(4u-5)(4v-5)}$.

2. Supposons u et v dans l'intervalle $]-\infty;\frac{5}{4}[$ tels que : $u < v$.

Donc,

$$u < \frac{5}{4},\ v < \frac{5}{4} \text{ et } v - u > 0$$

$$4u < 5,\ 4v < 5 \text{ et } v - u > 0$$

$$4u - 5 < 0,\ 4v - 5 < 0 \text{ et } v - u > 0$$

Il en résulte que : $\dfrac{-19(v-u)}{(4u-5)(4v-5)} < 0.$

Par conséquent, $f(v) - f(u) < 0.$

Donc, $f(v) < f(u).$

Il s'ensuit que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{5}{4}[$.

b) Supposons u et v dans l'intervalle $]\frac{5}{4}; +\infty[$.

tels que : $u < v$. On a,

$$u > \frac{5}{4},\ v > \frac{5}{4} \text{ et } v - u > 0$$

$$4u > 5,\ 4v > 5 \text{ et } v - u > 0$$

$$4u - 5 > 0,\ 4v - 5 > 0 \text{ et } v - u > 0$$

Donc, $\dfrac{-19(v-u)}{(4u-5)(4v-5)} < 0.$

Il en découle que, $f(v) - f(u) < 0.$

Donc, $f(v) < f(u).$

On conclut que f est strictement décroissante sur $]\frac{5}{4}; +\infty[$.

43

1. Pour tout nombre réel x,

$$g(x) = -4x^2 + 32x - 4$$

$$= -4[(x-4)^2 - 16 + 1]$$

$$= -4[(x-4)^2 - 15].$$

Il en découle que : $g(x) = -4(x-4)^2 + 60.$

2. Soit u et v éléments de l'intervalle $]-\infty; 4]$ tels que : $u < v$. On a, $u < v \leq 4$

$$u - 4 < v - 4 \leq 0$$

$$(v-4)^2 < (u-4)^2$$

$$-4(u-4)^2 < -4(v-4)^2$$

$$-4(u-4)^2 + 60 < -4(v-4)^2 + 60$$

$$f(u) < f(v)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty; 4]$.

Soit u et v éléments de l'intervalle $[4; +\infty[$ tels que : $u < v$. On a : $4 \leq u < v$

$$0 \leq u - 4 < v - 4$$

$$(u-4)^2 < (v-4)^2$$

$$-4(v-4)^2 < -4(u-4)^2$$

$$-4(v-4)^2 + 60 < -4(u-4)^2 + 60$$

$$f(v) < f(u)$$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[4; +\infty[$.

44

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} - 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } (\sqrt{x})^2 \neq 2^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x \neq 4.$$

$D_f = [0; 4[\cup]4; +\infty[.$

2. Pour tout nombre réel x élément de $[0; 4[$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2 + 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 2}.$$

3. Soit u et v deux éléments de l'intervalle $[0; 4[$

On a : $0 \leq u < v < 4$

Donc, $0 \leq \sqrt{u} < \sqrt{v} < \sqrt{4}$

$$\sqrt{u} < \sqrt{v} < 2$$

$$\sqrt{u} - 2 < \sqrt{v} - 2 < 2 - 2$$

$$\sqrt{u} - 2 < \sqrt{v} - 2 < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{v} - 2} < \frac{1}{\sqrt{u} - 2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{v} - 2} < \frac{2}{\sqrt{u} - 2}$$

$$1 + \frac{2}{\sqrt{v} - 2} < 1 + \frac{2}{\sqrt{u} - 2}$$

$$f(v) < f(u)$$

On conclut que f est strictement décroissante sur $[0; 4[$

45

1. $x \in D_f \Leftrightarrow -2x + 3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow -2x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}.$

2. Effectuons la division euclidienne de $x + 1$ par $-2x + 3$.

$$\begin{array}{rr|l} & x + 1 & -2x + 3 \\ \cline{3-3} - & x - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & \frac{5}{3} & \end{array}$$

Donc, pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{5}{2}}{-2x+3}$

On conclut que : $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(-2x+3)}.$

3. Soit u et v deux éléments de l'intervalle $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

tels que : $u < v$. On a : $\frac{3}{2} < u < v$

Donc, $-2v < -2u < -3$

$$-2v + 3 < -2u + 3 < 0$$

$$2(-2v + 3) < 2(-2u + 3) < 0$$

$$\frac{1}{2(-2u+3)} < \frac{1}{2(-2v+3)}$$

$$\frac{5}{2(-2u+3)} < \frac{5}{2(-2v+3)}$$

$$f(u) < f(v)$$

f est strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

46

1. a) Pour tout nombre réel x, on a :

$$(x+1)(2x-5) = 2x^2 - 5x + 2x - 5$$

$$= 2x^2 - 3x - 5.$$

Donc, $2x^2 - 3x - 5 = (x+1)(2x-5).$

b) $x^2 - x - 2 = x^2 - 2 \times \frac{1}{2} x - 2$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{2 \times 4}{4}$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1+8}{4}$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3^2}{2^2}$

$= (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$

$= (x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})$

$= (x - \frac{1+3}{2})(x + \frac{3-1}{2})$

$= (x - \frac{4}{2})(x + \frac{2}{2})$

$= (x - 2)(x + 1)$

Il en résulte que : $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

c) $x \in D_g \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ ou $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ ou $x \neq -1$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

2. Factorisons $2x^2 - 3x - 5$ en utilisant la forme canonique. On a :

$2x^2 - 3x - 5 = 2[x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}]$

$= 2[x^2 - 2 \times \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}]$

$= 2[(x - \frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 - \frac{5}{2}]$

$= 2[(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{40}{16}]$

$= 2[(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{49}{16}]$

$= 2[(x - \frac{3}{4})^2 - (\frac{7}{4})^2]$

$= 2(x - \frac{3}{4} - \frac{7}{4})(x - \frac{3}{4} + \frac{7}{4})$

$= 2(x - \frac{10}{4})(x + \frac{4}{4})$

$= (2x - 5)(x + 1)$

Donc, $2x^2 - 3x - 5 = (2x - 5)(x + 1)$

Par conséquent, pour tout nombre réel x différent de -1 et 2, on a :

$$g(x) = \frac{(2x-5)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x-5}{x-2}.$$

3. Pour tout réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ on a :

$$g(x) = a + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b}{x-2}$$

$$= \frac{ax + b - 2a}{x-2}$$

En identifiant les coefficients du polynôme au numérateur de g(x), on a :

$a = 2$ et $b - 2a = -5$

$a = 2$ et $b - 2 \times 2 = -5$

$a = 2$ et $b = -1$.

Répondons autrement : Effectuons la division euclidienne de $2x - 5$ par $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x - 5 & x - 2 \\ \hline -\ 2x - 4 & 2 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Il en résulte que, $g(x) = 2 - \frac{1}{x-2}$.

On pourrait également utiliser la démarche suivante :

Pour tout nombre réel x différent de -2,

$$g(x) = \frac{2x-4-1}{x-2} = \frac{2(x-2)-1}{x-2}$$

$$= \frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x-2}.$$

4. Soit u et v deux éléments de l'intervalle $]2; +\infty[$ tels que : $u < v$.

On a : $2 < u < v$

$0 < u - 2 < v - 2$

$\frac{1}{v-2} < \frac{1}{u-2}$

$-\frac{1}{u-2} < -\frac{1}{v-2}$

$2 - \frac{1}{u-2} < 2 - \frac{1}{v-2}$

$g(u) < g(v)$

g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

5. Démontrons d'abord que : $\frac{1}{3} + \sqrt{3} < 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a : $3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{1}{3} + \sqrt{3}) = 3 - \frac{1}{3} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3})$

$= \frac{9-1}{3} - \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{8}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{(\frac{8}{3})^2} - \frac{\sqrt{3^2 \times 3}}{\sqrt{2^2}}$

$= \sqrt{\frac{64}{9}} - \sqrt{\frac{27}{4}}$

Or, $\frac{64}{9} - \frac{27}{4} = \frac{64 \times 4 - 9 \times 27}{36} = \frac{256-243}{36} = \frac{13}{36}$

Donc, $\frac{64}{9} > \frac{27}{4}$

$\sqrt{\frac{64}{9}} > \sqrt{\frac{27}{4}}$

$\sqrt{\frac{64}{9}} - \sqrt{\frac{27}{4}} > 0$

$3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{1}{3} + \sqrt{3}) > 0$

Par conséquent, $3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{3} + \sqrt{3}$.

D'autre part, $\frac{1}{3} + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - \frac{5}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{25}}{3}$

$= \frac{\sqrt{27} - \sqrt{25}}{3}$.

Comme $27 > 25$ alors $\sqrt{27} > \sqrt{25}$

$\sqrt{27} - \sqrt{25} > 0$

$\frac{\sqrt{27} - \sqrt{25}}{3} > 0$

$\frac{1}{3} + \sqrt{3} - 2 > 0$

Donc, $\frac{1}{3} + \sqrt{3} > 2$.

Et, $3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3}$

Puisque, $4 > 3$ alors $\sqrt{4} > \sqrt{3}$

$\sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$

$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{2} > 0$

Donc, $3 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 2$.

Par suite, $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ et $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ appartiennent à $]2; +\infty[$ tels que $\frac{1}{3} + \sqrt{3} < 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus la fonction g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

Par conséquent, $g(\frac{1}{3} + \sqrt{3}) < g(3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Polynômes et fractions rationnelles

1

1. $P(x) = x^2 + 2x + 3x - 3 = x^2 + 5x - 3.$

2. $P(x) = 2x^2 + 5x + 7x - 28$

   $= 2x^2 + 12x - 28.$

3. $P(x) = x - x^2 - 5x - 10 = -x^2 - 4x - 10$

4. $P(x) = -8x + 10x^2 + 3x - 12$

   $= 10x^2 - 8x + 3x - 12$

   $= 10x^2 - 5x - 12.$

2

1. $P(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1$

   $= x^2 + x^2 + 2x - 2x + 1 + 1$

   $= 2x^2 + 2.$

2. $P(x) = 3(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4)$

   $= 3x^2 + 6x + 3 - x^2 + 4x - 4$

   $= 3x^2 - x^2 + 6x + 4x + 3 - 4$

   $= 2x^2 + 10x - 1.$

3. $P(x) = (3x)^2 + 6x + 1 - (x^2 + 8x + 16)$

   $= 9x^2 + 6x + 1 - x^2 - 8x - 16$

   $= 9x^2 - x^2 + 6x - 8x + 1 - 16$

   $= 8x^2 - 2x - 15.$

4. $P(x) = (x+1)^3 + 5(x-4)^2$

   $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5(x^2 - 8x + 16)$

   $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x^2 - 40x + 80$

   $= x^3 + 8x^2 - 37x + 81.$

   $P(x) = (x+2)^3 - (x-4)^3$

   $= x^3 + 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 + 2^3$

   $-(x^3 - 3 \times x^2 \times 4 + 3 \times x \times 4^2 - 4^3)$

   $= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$

   $= 18x^2 - 36x + 72.$

3

1 a) $\deg P = 2$; b) $\deg P = 8$; c) $\deg P = 3$;

2. a) $P(x) = (x + 1 + x - 2)(x + 1 - x + 2)$

   $= 6x - 3$; $\deg P = 1.$

   b) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^4 + x$

   $= -2x^4 + x^3 + x$; $\deg P = 4.$

   c) $P(x) = x(1 - 2x + x^2) - x^3 - 4x$

   $= x - 2x^2 + x^3 - x^3 - 4x$

   $= -2x^2 - 3x$; $\deg P = 2.$

3. a) $\deg P = 2 + 5; \deg P = 7.$

   b) $\deg P = 6 \times 3 = 18; \deg P = 18.$

   c) $\deg P = 4 \times 3 + 1 \times 6; \deg P = 18.$

4

$P(x) = 5x^2 - 4x^n + 1$

On a : $3 \le n \le 7$, donc $\deg P = n.$

On a : $3 \le n \le 7$; $6 \le 2n \le 14$, donc $4 < 2n.$

Il s'ensuit que : $\deg Q = 2n.$

$R(x) = x^{n+3} + 6x^{15} - 9x^{15} + x^{11};$

$R(x) = x^{n+3} - 3x^{15} + x^{11}$

On a : $3 \le n \le 7; 6 \le n+3 \le 10.$

Donc, $\deg R = 15.$

$S(x) = x^{3n+2} + 6x^{4n} - 4x^{17}$

On a : $3 \le n \le 7$

Par suite, $11 \le 3n+2 \le 23$ et $24 \le 8n \le 56.$

Donc, $3n+2 < 8n$; $\deg S = 8n.$

5

1. Après développement et réduction,

$(x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 15x + 6$

2. Pour tout nombre réel x,

$P(x) = \dfrac{x^2(x^2-5x+2)(x^2+3)}{x^2+3}$; $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2.$

Il en résulte que P est un polynôme de degré 4.

6

1. Après développement et réduction,

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$

Donc, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

2. $Q(x) = (\sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1} + x) \times$

$[(\sqrt{x^2+1} + x)^2 + (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x) +$

$(\sqrt{x^2+1} - x)^2] = 2x[x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + x^2 + 1 - x^2$

$+ x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 = 2x(4x^2 + 3);$

$Q(x) = 8x^3 + 6x.$ Par conséquent, Q est un polynôme de degré 3.

7

1. $P(1) = 1^2 + 3 \times 1 - 4 = 4 - 4 = 0;$

   $P(1) = 0.$ Donc, 1 est racine de P.

2. $P(1) = 5 \times 1^4 - 3(1+1)^2 + 7;$

   $= 5 - 3 \times 4 + 7$

   $= 12 - 12 = 0.$

   $P(1) = 0$; 1 est racine de P.

3. $P(1) = 1^3 \times (1 - \sqrt{2}) + 2 \times 1 \times \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$

   $= 1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + -1 - \sqrt{2}$

   $= 1 - 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0;$

   $P(1) = 0$; 1 est racine de P.

4. $P(1) = (1^2 - 2) - 6(1+1)^2 + (2 \times 1 + 3)^2$

   $= -1 - 6 \times 4 + 5^2 = -1 - 24 + 25$

   $= -25 + 25 = 0$; $P(1) = 0$;

   1 est racine de P.

8

$P(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 17 \times 1 + 12$

$= 2 + 3 - 17 + 12 = -12 + 12 = 0$; $P(1) = 0.$

1 est une racine de P.

$P(-1) = 2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 - 17 \times (-1) + 12$

$= -2 + 3 + 17 + 12;$

$P(-1) = 30; P(-1) \neq 0.$

-1 n'est pas une racine de P.

$P(0) = 2 \times 0^3 + 3 \times 0^2 - 17 \times 0 + 12 = 12 \neq 0$

$P(0) \neq 0.$

0 n'est pas une racine de P.

$$P(\frac{3}{2}) = 2\times(\frac{3}{2})^3 + 3\times(\frac{3}{2})^2 - 17\times\frac{3}{2} + 12$$
$$= \frac{27}{4} + \frac{81}{4} - \frac{51}{2} + 12$$
$$= \frac{27}{4} + \frac{27}{4} - \frac{51}{2} + 12$$
$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{2};\ P(\frac{3}{2}) = 0.$$

$\frac{3}{2}$ est une racine de P.

$$P(-4) = 2\times(-4)^3 + 3\times(-4)^2 - 17\times(-4) + 12$$
$$= -2\times 64 + 48 + 68 + 12 = -128 + 128 = 0;\ P(-4) = 0.$$

-4 est une racine de P.

9

1. $P(1) = a\times 1^2 + 3\times 1 - 4 = 0$
$$a - 1 = 0;$$
$$a = 1.$$

2. $P(-3) = (-3)^4 - 5\times(-3)^2 + a\times(-3) + 2 = 0;$
$$81 - 45 - 3a + 2 = 0$$
$$38 - 3a = 0;$$
$$a = \frac{38}{3}.$$

3. $P(\frac{1}{2}) = 12\times(\frac{1}{2})^3 - 4\times(\frac{1}{2}) + a = 0$
$$\frac{12}{8} - 2 + a = 0$$
$$-\frac{1}{2} + a = 0;$$
$$a = \frac{1}{2}.$$

4. $P(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^4 - a\times(\sqrt{2})^2 + 6 = 0$
$$12 - 2a + 6 = 0$$
$$18 - 2a = 0;$$
$$a = 9.$$

10

1. a) $P(x) = (x+1)^2 + 3(x+1)$
$$= (x+1)(x+1+3)$$
$$= (x+1)(x+4)$$

b) $P(x) = 4(x+3)^2 + x^2 - 9$
$$= 4(x+3)^2 + (x-3)(x+3)$$
$$= (x+3)(4(x+3) + x - 3)$$
$$= (x+3)(4x + 12 + x - 3)$$
$$= (x+3)(5x+9)$$

c) $P(x) = 2x(x-1) + 1 - x^2$
$$= 2x(x-1) + (1-x)(1+x)$$
$$= 2x(x-1) - (x-1)(1+x)$$
$$= (x-1)(2x - (1+x))$$
$$= (x-1)(2x - x - 1)$$
$$= (x-1)(x-1)$$
$$= (x-1)^2$$

2. a) $P(x) = (3x-2)^2 - (x+4)^2$
$$= (3x - 2 + x + 4)(3x - 2 - x - 4)$$
$$= (4x+2)(2x-6)$$

b) $P(x) = 25 - 9x^2$
$$= 5^2 - (3x)^2$$
$$= (5-3x)(5+3x)$$

c) $P(x) = 16(x-1)^2 - x^2$
$$= 4^2(x-1)^2 - x^2$$
$$= (4x-4)^2 - x^2$$
$$= (4x - 4 - x)(4x - 4 + x)$$
$$= (3x-4)(5x-4)$$

3. a) $P(x) = x^2 - 2x + 1$
$$= (x-1)^2$$

b) $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$
$$= (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2$$
$$= (3x+1)^2$$

c) $P(x) = 4x^2 - 12x + 9$
$$= (2x)^2 - 2\times 3\times 2x + 3^2$$
$$= (2x-3)^2$$

4. a) $P(x) = 25 - x^2 - x(x+5)$
$$= (5-x)(5+x) - x(x+5)$$
$$= (x+5)(5-x-x)$$
$$= (x+5)(-2x+5)$$

b) $P(x) = (x+2)(1-x)^2 - x^2 + 1$
$$= (x+2)(1-x)^2 + 1 - x^2$$
$$= (x+2)(1-x)^2 + (1-x)(1+x)$$
$$= (1-x)[(x+2)(1-x) + 1 + x]$$
$$= (1-x)[-x^2 - x + 2 + 1 + x]$$
$$= (1-x)(3-x^2)$$
$$P(x) = (1-x)(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x).$$

11

1. a) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$$= (x+1)^3$$

b) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$$= (x-1)^3$$

c) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$
$$= x^3 + 3\times 2\times x^2 + 3\times 2^2\times x + 2^3$$
$$= (x+2)^3$$

2. a) $P(x) = (2x)^3 - 3\times(2x)^2 + 3\times 2x - 1.$
$$= (2x)^3 - 3\times(2x)^2 + 3\times 2x - 1^3$$
$$= (2x-1)^3$$

b) $P(x) = 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$
$$= 4^3x^3 + 3\times 4^2x^2 + 3\times 4x + 1^3$$
$$= (4x)^3 + 3\times(4x)^2 + 3\times 4x + 1$$
$$= (4x+1)^3$$

c) $P(x) = 5^3 + 3\times 5^2\times 3x + 3\times 5\times 3^2x^2 + 3^3x^3$
$$= 5^3 + 3\times 5^2\times 3x + 3\times 5\times 3^2x^2 + 3^3x^3$$
$$= 5^3 + 3\times 5^2\times 3x + 3\times 5\times(3x)^2 + (3x)^3$$
$$= (5+3x)^3$$

3. a) $P(x) = x^3 - 1$
$$= x^3 - x^2 + x^2 - 1$$
$$= x^2(x-1) + (x-1)(x+1)$$
$$= (x-1)(x^2 + x + 1)$$

b) $P(x) = x^3 + 1$
$$= x^3 + x^2 - x^2 + 1$$
$$= x^2(x+1) + 1 - x^2$$
$$= x^2(x+1) + (1-x)(1+x)$$
$$= (x+1)(x^2 - x + 1)$$

c) $P(x) = 8 - x^3$

$= 8 - 4x + 4x - x^3$

$= 4(2 - x) + x(4 - x^2)$

$= 4(2 - x) + x(2 - x)(2 + x)$

$= (2 - x)[4 + x(2 + x)]$

$= (2 - x)(4 + 2x + x^2)$

d) $P(x) = 3^3 - 4^3 \times x^3$

$= 3^3 - (4x)^3$

$= (3 - 4x)(3^2 + 3 \times 4x + (4x)^2$

$= (3 - 4x)(9 + 12x + 16x^2).$

4. a) $P(x) = 1 - x^3 + (x-1)^2 - 2 + 2x^2$

$= (1 - x)(1 + x + x^2) + (1 - x)^2 - 2(1 - x^2$

$= (1 - x)[1 + x + x^2 + 1 - x - 2 - 2x]$

$= (1 - x)(x^2 - 2x)$

$= x(1 - x)(x - 2)$

b) $P(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3 + x(x - 1)^2$

$= (-1 + x)^3 + x(x - 1)^2$

$= (x - 1)^3 + x(x - 1)^2$

$= (x - 1)(x^2 - 2x + 1 + x^2 - x)$

$= (x - 1)(2x^2 - 3x + 1)$

$= (x - 1)(2x^2 - 2x - x + 1)$

$= (x - 1)[2x(x - 1) - (x - 1)]$

$= (x - 1)^2(2x - 1)$

c) $P(x) = 512 - (x + 1)^3 + 196 - 4x^3$

$= 8^3 - (x + 1)^3 + 4 \times 7^2 - 4x^3 + x(7 - x)$

$= (8 - x - 1)[68 + 4x + (x + 1)^2] + 4(7^2 - x$

$= (7 - x)(x^2 + 6x + 69) + 4(7 - x)(7 + x)$

$= (7 - x)(x^2 + 6x + 69 + 28 + 4x)$

$= (7 - x)(x^2 + 14x + 67)$

12

1. a) $P(x) = x^2 + 4x + 1$

$= (x + 2)^2 - 2^2 + 1$

$= (x + 2)^2 - 3$

b) $P(x) = x^2 - 6x + 2$

$= (x - 3)^2 - 3^2 + 2$

$= (x - 3)^2 - 7$

c) $P(x) = x^2 + 2x + 5$

$= (x + 1)^2 - 1 + 5$

$= (x + 1)^2 + 4$

2. a) $P(x) = x^2 + 3x - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{4}{4}$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9+4}{4}$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + \frac{32}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{32}{4} - \frac{25}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{32-25}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4}$

c) $P(x) = x^2 - 11x + 30$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4} + 30$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4} + \frac{120}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 + \frac{120}{4} - \frac{121}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 + \frac{120 - 121}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{1}{4}.$

3. a) $P(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$= (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + 1$

$= (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + \frac{9}{9}$

$= (x - \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}$

b) $P(x) = x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{7}{4}$

$= x^2 + 2 \times \frac{3}{10}x - \frac{7}{4}$

Avomaths • Seconde C

$= (x + \frac{3}{10})^2 - (\frac{3}{10})^2 - \frac{7}{4}$

$= (x + \frac{3}{10})^2 - \frac{9}{100} - \frac{175}{100}$

$= (x + \frac{3}{10})^2 - \frac{184}{100}.$

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 7$

$= (x - \frac{1}{8})^2 - \frac{3}{64}.$

13

1. a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 8$

$= 2(x^2 + 2x + 4)$

$= 2[(x + 1)^2 - 1 + 4]$

$= 2[(x + 1)^2 + 3].$

b) $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$= 3[(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{1}{36}].$

c) $P(x) = -x^2 + x - 8$

$= -(x^2 - x + 8)$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 8]$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{32}{4}]$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{31}{4}]$

2.a) $P(x) = 6x^2 + 4x + 12 = 6(x^2 + \frac{2}{3}x + 2)$

$= 6[(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{17}{9}].$

c) $P(x) = 8 - x^3$

$= 8 - 4x + 4x - x^3$

$= 4(2 - x) + x(4 - x^2)$

$= 4(2 - x) + x(2 - x)(2 + x)$

$= (2 - x)[4 + x(2 + x)]$

$= (2 - x)(4 + 2x + x^2)$

d) $P(x) = 3^3 - 4^3 \times x^3$

$= 3^3 - (4x)^3$

$= (3 - 4x)(3^2 + 3 \times 4x + (4x)^2$

$= (3 - 4x)(9 + 12x + 16x^2)$.

4. a) $P(x) = 1 - x^3 + (x - 1)^2 - 2 + 2x^2$

$= (1 - x)(1 + x + x^2) + (1 - x)^2 - 2(1 - x^2)$

$= (1 - x)[1 + x + x^2 + 1 - x - 2 - 2x]$

$= (1 - x)(x^2 - 2x)$

$= x(1 - x)(x - 2)$

b) $P(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3 + x(x - 1)^2$

$= (-1 + x)^3 + x(x - 1)^2$

$= (x - 1)^3 + x(x - 1)^2$

$= (x - 1)(x^2 - 2x + 1 + x^2 - x)$

$= (x - 1)(2x^2 - 3x + 1)$

$= (x - 1)(2x^2 - 2x - x + 1)$

$= (x - 1)[2x(x - 1) - (x - 1)]$

$= (x - 1)^2(2x - 1)$

c) $P(x) = 512 - (x + 1)^3 + 196 - 4x^3$

$= 8^3 - (x + 1)^3 + 4 \times 7^2 - 4x^3 + x(7 - x)$

$= (8 - x - 1)[68 + 4x + (x + 1)^2] + 4(7^2 - x^2)$

$= (7 - x)(x^2 + 6x + 69) + 4(7 - x)(7 + x)$

$= (7 - x)(x^2 + 6x + 69 + 28 + 4x)$

$= (7 - x)(x^2 + 14x + 67)$

12

1. a) $P(x) = x^2 + 4x + 1$

$= (x + 2)^2 - 2^2 + 1$

$= (x + 2)^2 - 3$

b) $P(x) = x^2 - 6x + 2$

$= (x - 3)^2 - 3^2 + 2$

$= (x - 3)^2 - 7$

c) $P(x) = x^2 + 2x + 5$

$= (x + 1)^2 - 1 + 5$

$= (x + 1)^2 + 4$

2. a) $P(x) = x^2 + 3x - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 1$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{4}{4}$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9+4}{4}$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 8$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + \frac{32}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{32}{4} - \frac{25}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{32-25}{4}$

$= (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4}$

c) $P(x) = x^2 - 11x + 30$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4} + 30$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4} + \frac{120}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 + \frac{120}{4} - \frac{121}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 + \frac{120 - 121}{4}$

$= (x - \frac{11}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

3. a) $P(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$= (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + 1$

$= (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + \frac{9}{9}$

$= (x - \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}$

b) $P(x) = x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{7}{4}$

$= x^2 + 2 \times \frac{3}{10}x - \frac{7}{4}$

$= (x + \frac{3}{10})^2 - (\frac{3}{10})^2 - \frac{7}{4}$

$= (x + \frac{3}{10})^2 - \frac{9}{100} - \frac{175}{100}$

$= (x + \frac{3}{10})^2 - \frac{184}{100}$.

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 7$

$= (x - \frac{1}{8})^2 - \frac{3}{64}$.

13

1. a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 8$

$= 2(x^2 + 2x + 4)$

$= 2[(x + 1)^2 - 1 + 4]$

$= 2[(x + 1)^2 + 3]$.

b) $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$= 3[(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{1}{36}]$.

c) $P(x) = -x^2 + x - 8$

$= -(x^2 - x + 8)$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 8]$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{32}{4}]$

$= -[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{31}{4}]$

2.a) $P(x) = 6x^2 + 4x + 12 = 6(x^2 + \frac{2}{3}x + 2)$

$= 6[(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{17}{9}]$.

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]\frac{1}{2};+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(0) = P(\frac{1}{2}) = 0$

c) On a : $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4$

$\Leftrightarrow \quad x = -2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		+		+	0	−	
$2x+4$		−	0	+		+	
P(x)		−	0	+	0	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[,\ P(x) < 0$

$\forall x \in]-2;0[,\ P(x) > 0$

$P(-2) = P(0) = 0.$

d) On a : $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -4$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

Et, $\quad 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-x$		+	0	−		−	
$4-2x$		+		+	0	−	
P(x)		+	0	−	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[,\ P(x) > 0$

$\forall x \in]1;2[,\ P(x) < 0$

$P(1) = P(2) = 0$

3. a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
P(x)		+	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(0) = 0$

b) $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
P(x)		+	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(-1) = 0$

c) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
P(x)		−	0	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[,\ P(x) < 0$

$P(0) = 0$

d) $(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		$+\infty$
P(x)		−	0	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[,\ P(x) < 0$

$P(1) = 0$

4. a) On a : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Et, $\quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$x-2$		−		−	0	+	
P(x)		−	0	−	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;2[,\ P(x) < 0$

$\forall x \in]2;+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(0) = P(2) = 0$

b) On a : $(5x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \quad 5x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{5}$

Et, $\quad -4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{4}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$(5x+2)^2$		+		+	0	+	
$-4x-3$		+	0	−		−	
P(x)		+	0	−	0	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-\frac{3}{4}[,\ P(x) > 0$

$\forall x \in]-\frac{3}{4};-\frac{2}{5}[\cup]-\frac{2}{5};+\infty[,\ P(x) < 0$

$P(-\frac{3}{4}) = P(-\frac{2}{5}) = 0$

c) On a : $(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \quad x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -3$

Et, $\quad 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow \quad 4x = -12$

$\Leftrightarrow \quad x = -3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$(x+3)^2$		+	0	+	
$4x+12$		−		+	
P(x)		−	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-3[,\ P(x) < 0$

$\forall x \in]-3;+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(-3) = 0.$

5. a) On a : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x = -1$

Et, $\quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
$x-2$		−		−		−	0	+	
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;2[,\ P(x) < 0$

$\forall x \in]-1;0[\cup]2;+\infty[,\ P(x) > 0$

$P(-1) = P(0) = P(2) = 0.$

b) On a : $2 - x = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$

Et, $\quad 9x + 3 = 0 \Leftrightarrow \quad 9x = -3$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$

Et, $\quad 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \quad x = -2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$9x+3$		−		−	0	+		+	
$4x+8$		−	0	+		+		+	
$2-x$		+		+		+	0	−	
P(x)		+	0	−	0	+	0	−	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{3};2[,\ P(x) > 0$

$\forall x \in]-2;-\frac{1}{3}[\cup]2;+\infty[,\ P(x) < 0$

$P(-2) = P(-\frac{1}{3}) = P(2) = 0$

c) On a : $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

Et, $\quad -4 - 3x = 0 \Leftrightarrow \quad x = -\frac{4}{3}$

Avomaths • Seconde C

Enfin, $3+x=0 \Leftrightarrow x=-3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		$-\frac{4}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		+		+		+	0	−	
$-4-3x$		+		+	0	−		−	
$3+x$		−	0	+		+		+	
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-3[\cup]-\frac{4}{3};\frac{1}{2}[, F(x)<0$

$\forall x \in]-3;-\frac{4}{3}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[, F(x)>0$

$F(-3)=F(-\frac{4}{3})=F(\frac{1}{2})=0$

17

1\. a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

On a : $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+	
$x-3$		−		−	0	+	
F(x)		+	‖	−	0	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[, P(x)>0$

$\forall x \in]-1;3[, P(x)<0$

$F(3)=0$

b) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

On a : $3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Et, $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		+		+	0	−	
$3x$		−	0	+		+	
F(x)		−	0	+	‖	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[, P(x)<0$

$\forall x \in]0;1[, P(x)>0$

$F(0)=0$

c) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

On a : $1+3x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
x		−		−	0	+	
$1+3x$		−	0	+		+	
F(x)		+	0	−	‖	+	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]0;+\infty[, P(x)>0$

$\forall x \in]-\frac{1}{3};0[, P(x)<0$

$P(-\frac{1}{3})=0$

d) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

On a : $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
-3		−		−	
$2x-4$		−	0	+	
F(x)		+	‖	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;-2[, P(x)>0$

$\forall x \in]2;+\infty[, P(x)<0$

$F(-2)=0$

2\. a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

On a : $-x=0 \Leftrightarrow x=0$

Et, $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Enfin, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$-x$		+		+	0	−		−	
$x+2$		−	0	+		+		+	
$x-1$		−		−		−	0	+	
P(x)		+	0	−	0	+	‖	−	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]0;1[, P(x)>0$

$\forall x \in]-2;0[\cup]1;+\infty[, P(x)<0$

$P(-2)=P(0)=0$

b) $x \in D_f \Leftrightarrow (2x-4)(5x+15)\neq 0$

$\Leftrightarrow 2x-4\neq 0$ et $5x+15\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 2$ et $x\neq -3$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.

On a : $9x-12=0 \Leftrightarrow 9x=12$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Et, $2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4$

$\Leftrightarrow x=2$

Enfin, $5x+15=0 \Leftrightarrow x=-3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$9x-12$		−		−	0	+		+	
$2x-4$		−		+		+	0	+	
$5x+15$		−	0	−		−		+	
F(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]\frac{4}{3};2[, P(x)<0$

$\forall x \in]-3;\frac{4}{3}[\cup]2;+\infty[, P(x)>0$

$F(\frac{4}{3})=0$

c) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

On a : $(x-5)^2=0 \Leftrightarrow x-5=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Et, $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$(x-5)^2$		+		+	0	+	
$3-x$		+	0	−		−	
F(x)		+	‖	−	0	−	

Donc, $\forall x \in]-\infty;3[, P(x)>0$

$\forall x \in]3;5[\cup]5;+\infty[, P(x)<0$

$P(5)=0$.

d) On a : $(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$

Et, $3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		+	0	+		+	
$3x+2$		+		−	0	−	
F(x)		+	‖	−	0	−	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-1[, P(x)>0$

$\forall x \in]-1;-\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3};+\infty[, P(x)<0$

$F(-\frac{2}{3})=0$

3\. a) $x \in D_f \Leftrightarrow (x-1)(4x+7)\neq 0$

$\Leftrightarrow x-1\neq 0$ et $4x+7\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -\frac{7}{4}$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{7}{4};1\}$.

On a : $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Et, $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Enfin, $4x+7=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-5		$-\frac{7}{4}$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-5[\cup]-\frac{7}{4};0[\cup]1;+\infty[$, $P(x) > 0$

$\forall x \in]-5;-\frac{7}{4}[\cup]0;1[$, $P(x) < 0$

$F(-5) = P(0) = 0$

b) $x \in D_f \Leftrightarrow (-2x+4)(5x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow -2x+4 \neq 0$ et $5x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -\frac{3}{5}$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3};2\}$.

On a : $2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

Et, $1+3x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

Enfin, $5x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x+4$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$5x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-\frac{3}{5}[\cup]-\frac{1}{3};2[\cup]3;+\infty[$, $P(x) < 0$

$\forall x \in]-\frac{3}{5};-\frac{1}{3}[\cup]2;3[$, $P(x) > 0$

$F(-3) = P(-\frac{1}{3}) = 0$

c) L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a : $(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Et, $2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$-2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(1-x)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$F(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;\frac{1}{2}[\cup]1;+\infty[$, $F(x) > 0$

$\forall x \in]-\frac{1}{2};1[$, $F(x) < 0$

$F(1) = F(\frac{1}{2}) = 0$

d) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2(5x+6) \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \neq 0$ et $5x+6 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -\frac{6}{5}$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{6}{5};0\}$.

On a : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Et, $10-4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$5x+6=0 \Leftrightarrow x=-\frac{6}{5}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$10-4x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Donc,

$\forall x \in]-\infty;-\frac{6}{5}[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$, $F(x) < 0$

$\forall x \in]-\frac{6}{5};0[\cup]0;\frac{5}{2}[$, $F(x) > 0$

$F(\frac{5}{2}) = 0$.

18

1. a) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$; $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

b) $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$; $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x}$.

c) $\frac{2x}{x-1} = \frac{2x-2+2}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1}$

$= \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1}$

$\frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$.

2. a) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1}$

$= \frac{ax-a+bx+b}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+b-a}{x^2-1}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $a+b=0$ et $b-a=1$

Donc, $a+b=0$ et $2b=1$

$a+b=0$ et $b=\frac{1}{2}$

$a+\frac{1}{2}=0$ et $b=\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$.

b) $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x+2)}{x^2-4} = \frac{ax-2a+bx+2}{x^2-4}$

$= \frac{(a+b)x-2a+2b}{x^2-4} = \frac{-(a+b)x+2a-2b}{4-x^2}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $a+b=0$ et $2a-2b=1$

$a+b=0$ et $a-b=\frac{1}{2}$

$2a=\frac{1}{2}$ et $a-b=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{4}$ et $a-b=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4-x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-2}$.

c) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{(a+b)x+b-a}{x^2-1}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $a+b=1$ et $b-a=0$

Donc, $a+b=1$ et $2b=1$

$a+b=1$ et $b=\frac{1}{2}$

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2};$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

3. a) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} = \frac{(a+b)x-b}{x(x+1)}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $a+b=1$ et $-b=2$

Donc, $a+b=1$ et $b=-2$

$a=3$ et $b=-2$;

$$\frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x}$$

b) $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+(x+1)b}{(x+1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-2a+b}{x^2-x-2}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $a+b=0$ et $-2a+b=1$

Donc, $2a+2b=0$ et $-2a+b=1$

$3b=1$ et $-2a+b=1$

$b=\frac{1}{3}$ et $-2a+b=1$

$a=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$;

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}.$$

c) $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{2x+3} = \frac{(2a+b)x+3a-b}{2x^2+x-3}$

En identifiant les coefficients du numérateur,

on a : $2a+b=4$ et $3a-b=-1$.

Donc, $5a=3$ et $3a-b=-1$

$a=\frac{3}{5}$ et $3a-b=-1$

$a=\frac{3}{5}$ et $b=\frac{14}{5}$;

$$\frac{4x-1}{2x^2+x-3} = \frac{\frac{3}{5}}{x-1} + \frac{\frac{14}{5}}{2x+3}.$$

19

1. a) Division euclidienne de x^2+x-2 par $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^2-x) & x+2 \\ \cline{1-1} 2x-2 & \\ -(2x-2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+2)(x-1)$.

b) Division euclidienne de $3x^2-x-4$ par $x+1$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-x-4 & x+1 \\ \cline{2-2} -(3x^2+3x) & 3x-4 \\ \cline{1-1} -4x-4 & \\ -(-4x-4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(3x-4)$.

c) Division euclidienne de $-x^2+2x+3$ par $x-3$.

$$\begin{array}{r|l} -x^2+2x+3 & x-3 \\ \cline{2-2} -(-x^2+3x) & -x-1 \\ \cline{1-1} -x+3 & \\ -(-x+3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(-x-1)(x-3)$.

2. a) Division euclidienne de $2x^2+11x-6$ par $4x-2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+11x-6 & 4x-2 \\ \cline{2-2} -(2x^2-x) & \frac{1}{2}x+3 \\ \cline{1-1} 12x-6 & \\ -(12x-6) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(\frac{1}{2}x+3)(4x-2)$.

b) Division euclidienne de $-3x^2-7x+40$

x^2+x-2 par $-\frac{3}{2}x+4$.

$$\begin{array}{r|l} -3x^2-7x+40 & 2x+10 \\ \cline{2-2} -(-3x^2-15x) & -\frac{3}{2}x+4 \\ \cline{1-1} 8x+40 & \\ -(8x+40) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(-\frac{3}{2}x+4)(2x+10)$.

c) Division euclidienne de $-4x^2+25x-6$

x^2+x-2 par $8x-2$.

$$\begin{array}{r|l} -4x^2+25x-6 & -\frac{1}{2}x+3 \\ \cline{2-2} -(-4x^2+24x) & 8x-2 \\ \cline{1-1} x-3 & \\ -(x-3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(-\frac{1}{2}x+3)(8x-2)$.

3. a) Division euclidienne de x^3-x^2+x-2 par $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2+2x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2-2 \\ \cline{1-1} 2x-2 & \\ -(2x-2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-2)$.

b) Division euclidienne de $2x^3-x-3$ par $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} -(2x^3-2x^2) & 2x^2-2x+1 \\ \cline{1-1} -2x^2-x & \\ -(-2x^2+2x) & \\ \cline{1-1} -3x-3 & \\ -(-3x-3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(2x^2-2x+1)$.

c) Division euclidienne de $6x^3+2x^2-x-2$ par $3x-2$.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+2x^2-x-2 & 3x-2 \\ \cline{2-2} -(6x^3-4x^2) & 2x^2+2x+1 \\ \cline{1-1} 6x^2-x & \\ -(6x^2-4x) & \\ \cline{1-1} 3x-2 & \\ -(3x-2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x)=(3x-2)(2x^2+2x+1)$.

4. a) Division euclidienne de $2x^3 + x^2 - 4x + 4$ par $x + 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +x^2 & -4x & +4 & 2x^2-3x+2 \\ \cline{5-5} -\ 2x^3 & -3x^2 & +2x & & x+2 \\ \cline{1-4} & 4x^2 & -6x & +4 & \\ - & 4x^2 & -6x & +4 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (2x^2 - 3x+2)(x + 2)$.

b) Division euclidienne de $12x^3 - 26x^2 + 18x - 4$

par $2x^2 - 3x + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 12x^3 & -26x^2 & +18x & -4 & 2x^2-3x+1 \\ \cline{5-5} -\ 12x^3 & -18x^2 & +6x & & 6x-4 \\ \cline{1-4} & -8x^2 & -12x & -4 & \\ - & -8x^2 & -12x & -4 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (6x - 4)(2x^2 - 3x + 1)$.

c) Division euclidienne de $4x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

par $2x - 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -x^2 & +\frac{3}{2}x & -1 & 2x^2+\frac{1}{2}x+1 \\ \cline{5-5} -\ 4x^3 & +x^2 & +2x & & 2x-1 \\ \cline{1-4} & -2x^2 & -\frac{1}{2}x & -1 & \\ - & -2x^2 & -\frac{1}{2}x & -1 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

Donc, $P(x) = (2x - 1)(2x^2 + \frac{1}{2}x + 1)$.

20

1. $P(1) = -1^4 - 2\times 1^3 + 1 + 2$
$= -1 - 2 + 3$
$= -3 + 3$
$= 0.$

Donc, $P(1) = 0$.

$P(2) = -(-2)^4 - 2\times(-2)^3 + (-2) + 2$
$= -16 + 2\times 8 - 2 + 2$
$= -16 + 16 - 2 + 2$
$= 0.$

Donc, $P(-2) = 0$.

2. Division euclidienne de $-x^4 - 2x^3 + x + 2$ par $x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} -x^4 & -2x^3 & & +x & +2 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} -\ -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & -x^2-x+2 \\ \cline{1-5} & -x^3 & +x^2 & +x & +2 & \\ - & -x^3 & -x^2 & -x & & \\ \cline{2-5} & & 2x^2 & +2x & +2 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = -x^2 - x + 2.$

3. Pour tout nombre réel x,

$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Pour tout nombre réel x,

$(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0; (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Donc, $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

Par conséquent pour tout nombre réel x,

$x^2 + x + 1 > 0.$

4. $Q(x) = -x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2)$

$= -[(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2]$

$= -[(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4}]$

$= -[(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]$

$= -[(x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2]$

$= -(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})$

$= -(x - 1)(x + 2)$

$= (1 - x)(x + 2)$

Puisque $P(x) = Q(x)(x^2 + x + 1)$ alors

$P(x) = (1 - x)(x + 2)(x^2 + x + 1)$

D'après la question 3) $x^2 + x + 1 > 0$ donc le signe de P(x) est celui de $(1 - x)(x + 2)$.

On a : $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Et, $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc,

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[,\ P(x) < 0$

$\forall x \in]-2; 1[,\ P(x) > 0$

$P(1) = P(-2) = 0$

21

1. a) $P(x) = 4(x - 1)^2 - (x + 1)^2$

$= 4(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

$= 4x^2 - 8x + 4 - x^2 - 2x - 1$

$P(x) = 3x^2 - 10x + 3.$

b) $P(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 3(x^2 - \frac{10}{3}x + 1)$

$= 3(x^2 - \frac{10}{3}x + 1)$

$= 3[(x - \frac{5}{3})^2 - (\frac{5}{3})^2 + 1]$

$= 3[(x - \frac{5}{3})^2 - \frac{25}{9} + 1]$

$= 3[(x - \frac{5}{3})^2 - \frac{25}{9} + \frac{9}{9}]$

$P(x) = 3[(x - \frac{5}{3})^2 - \frac{16}{9}]$

2. a) $P(\frac{1}{3}) = 4(\frac{1}{3} - 1)^2 - (\frac{1}{3} + 1)^2$

$= 4(-\frac{2}{3})^2 - (\frac{4}{3})^2 = 4 \times \frac{4}{9} - \frac{16}{9}$

$= \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$

$P(\frac{1}{3}) = 0.$

b) Effectuons la division euclidienne de P(x) par $3x - 1$

On a :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 10x + 3 & 3x-1 \\ \cline{2-2} 3x^2 - x & x-3 \\ \cline{1-1} -9x + 3 & \\ -9x + 3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$.

1

1. $A(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$;
$A(-2) = 7$.

$A(0) = (0)^2 - (0) + 1 = 1$; $A(0) = 1$.

$A(5) = 5^2 - 5 + 1 = 21$; $A(5) = 21$.

$B(-2) = 2 \times (-2) + 11 = 7$; $B(-2) = 7$.
$B(0) = 2 \times 0 + 11 = 11$; $B(0) = 11$.
$B(5) = 2 \times 5 + 11 = 21$; $B(5) = 21$.

2. On a : $A(-2) = B(-2)$ et $A(5) = B(5)$.
Donc, -2 et 5 vérifient l'équation $A(x) = B(x)$.
Par contre $A(0) \neq B(0)$. Par conséquent, 0 ne vérifie pas l'équation $A(x) = B(x)$.

2

a) $(0+2)(1-0) = 2 \times 1 = 2$

$2 \times (0-1)^2 = 2 \times (-1)^2 = 2$

On a : $(0+2)(1-0) = 2 \times (0-1)^2$. Donc, 0 est solution de l'équation (E).
$(1+2)(1-1) = 3 \times 0 = 0$

$2 \times (1-1)^2 = 2 \times 0 = 0$.

Par suite, $(1+2)(1-1) = 2 \times (1-1)^2$.
On en déduit que 1 est solution de l'équation (E).

$(4+2)(1-4) = 6 \times (-3) = -18$

$2 \times (4-1)^2 = 2 \times 3^2 = 18$.

Donc, $(4+2)(1-4) \neq 2 \times (4-1)^2$.
4 n'est pas solution de (E).

b) $0^2 + 4 = 4$ et $(0-2)(2 \times 0-3) = (-2) \times (-3) = 6$

Donc, $(0-2)(2 \times 0 - 3) < 0^2 + 4$.
0 n'est pas solution de l'inéquation (I).

$1^2 + 4 = 5$ et $(1-2)(2 \times 1 - 3) = (-1) \times (-1) = 2$

Donc, $(1-2)(1 \times 0 - 3) < 1^2 + 4$.
1 est solution de l'inéquation (I).

$4^2 + 4 = 20$ et $(4-2)(2 \times 4-3) = (2) \times (5) = 10$

Donc, $(4-2)(1 \times 4 - 3) < 4^2 + 4$
4 est solution de l'inéquation (I).

3

$(-3)^3 = -27$ et $7 \times (-3) - 6 = -21 - 6 = -27$;

$(-3)^3 = 7 \times (-3) - 6$.

Par conséquent, -3 est solution de (F).

$1^3 = 1$ et $7 \times 1 - 6 = 7 - 6 = 1$; $1^3 = 7 \times 1 - 6$.
1 est solution de l'équation (F).

$2^3 = 8$ et $7 \times 2 - 6 = 8$. Donc, $2^3 = 7 \times 2 - 6$.
2 est solution de l'équation (F).
On conclut que -3, 1 et 2 sont solutions de l'équation (F). Or (F) est une équation de degré 3. Donc cette équation admet au plus trois solutions. Par conséquent -3, 1 et 2 sont les solutions de l'équation (F).

4

$\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2} = \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

Donc, $\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2} = \frac{1}{2} + 1$.

Il en résulte que $\frac{1}{2}$ est solution de (E).

$\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ et $\dfrac{3}{2 \times \frac{1}{2}} = 3$; $\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2 \times \frac{1}{2}}$.

Par conséquent $\frac{1}{2}$ est solution de (E').

5

1. a) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,
$(x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0$ ou $x-3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$.
Les solutions sont -2 et 3.
b) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$(x-6)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 6$.
La solution est 6.

c) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,
$5x(6x-14) = 0 \Leftrightarrow 5x = 0$ ou $6x - 14 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{3}$.

Les solutions sont 0 et $\frac{7}{3}$.

2. a) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,
$(x+5) - x(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(1-x) = 0$
$\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 1$.
Les solutions sont -5 et 1.
b) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,
$(x-1)^2 - 7(1-x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 7(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+6) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -6$.
Les solutions sont 1 et -6.
c) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$(2x+1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 3^2$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$.
Les solutions sont 1 et -2.

6

1. a) On a: $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ et $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$
Tableau de signe

x	$-\infty$		-4		7		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+4)(x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,
$S =]-\infty; -4] \cup [7; +\infty[$.

b) On a: $2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ et $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		2		$+\infty$
$6x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$5-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(2-5x)(6x-12)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]\frac{2}{5}; 2[$.

c) On a: $(x+10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -10$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-10		$+\infty$
$(x+10)^2$		$+$	0	$+$	

$S = \{-10\}$.

2. a) On a: $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-5}{x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$S=]0;5[$.

b) On a: $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ et $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+3}{-x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$S=]-\infty;-3]\cup]1;+\infty[$.

c) On a : $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Et, $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(x+2)}{4-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$S=]-\infty;-2[\cup]0;4[$.

7

1. a) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-4+3=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2=1$

$\Leftrightarrow x+2=1$ ou $x+2=-1$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-3$

Les solutions sont -1 et -3.

b) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$x^2+8x+17=0 \Leftrightarrow (x+4)^2-16+17=0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2=-1$.

Puisque pour tout nombre réel x, $(x+4)^2 \geq 0$ alors l'équation n'admet pas de solution.

c) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$3x^2-9x+6=0 \Leftrightarrow 3(x^2-3x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2=0$

$\Leftrightarrow x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ ou $x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=1$.

Les solutions sont 1 et 2.

2. a) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$4x^2=10x+6 \Leftrightarrow 4x^2-10x-6=0$

$\Leftrightarrow 4(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2})=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2-(\frac{5}{4})^2-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2-(\frac{7}{4})^2=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2=(\frac{7}{4})^2$

$\Leftrightarrow x-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$ ou $x-\frac{5}{4}=-\frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

Les solutions sont 3 et $-\frac{1}{2}$.

b) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$2x(x+4)=1 \Leftrightarrow 2x^2+8x-1=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+4x-\frac{1}{2})=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-4-\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-\frac{9}{2}=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2=(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2$

$\Leftrightarrow x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $x+2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Les solutions sont $-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$(9x-8)(1-6x)-5=0 \Leftrightarrow -54x^2+57x-13=0$

$\Leftrightarrow -54(x^2-\frac{19}{18}x+\frac{13}{54})=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{19}{36})^2-(\frac{19}{36})^2+\frac{13}{54}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{19}{36})^2-\frac{361}{1296}+\frac{312}{1296}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{19}{36})^2-\frac{49}{1296}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{19}{18})^2=(\frac{7}{36})^2$

$\Leftrightarrow x-\frac{19}{36}=\frac{7}{36}$ ou $x-\frac{19}{36}=-\frac{7}{36}$

$\Leftrightarrow x=\frac{13}{18}$ ou $x=\frac{1}{3}$.

Les solutions sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{13}{18}$.

8

1. a) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$(3x+2)(x-3)<4 \Leftrightarrow 3x^2-7x-10<0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-\frac{7}{3}x-\frac{10}{3})<0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}-\frac{10}{3}<0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{7}{6})^2-(\frac{13}{6})^2<0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x-10)<0$

On a: $3x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}$ et $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Tableau de signe de $(x+1)(x-\frac{10}{3})$

x	$-\infty$		-1		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(3x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-1;\frac{10}{3}[$.

b) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$(2-5x)(6x-4) \geq 3x-1 \Leftrightarrow -30x^2+29x-7 \geq 0$

$\Leftrightarrow -30(x^2-\frac{29}{30}x+\frac{7}{30}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{29}{60})^2-(\frac{1}{60})^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (15x-7)(2x-1) \leq 0$

On a: $15x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{15}$ et $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Tableau de signe de $(15x-7)(2x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{7}{15}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$15x-7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(15x-7)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]\frac{7}{15} ; \frac{1}{2}[$

c) Pour x élément de $\mathbb{R}$,

$(2x+1)^2 - 8x > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 8x > 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 > 0$

On a: $(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et pour tout x

élément de $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $(2x-1)^2 > 0$.

On conclut que : $S = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

2. a) Contrainte sur l'inconnue x : $x - 1 \neq 0$.

On a : $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Donc, x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$\frac{x^2-5x}{x-1} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x}{x-1} + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+3x-3}{x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-2^2}{x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} \geq 0.$

On a : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Et, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-3)(x+1)}{x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$S = [-1; 1[\cup[3; +\infty[$.

b) Contrainte sur x : $x - 2 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$.

$x - 2 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq 1$;

Donc, x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$,

$\frac{x+4}{x-2} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4-2x+4}{(x2)(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{(x-2)(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{(x-2)(x-1)} \leq 0$

On a : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Et, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tableau de signe de $\frac{x(x+1)}{(x-2)(x-1)}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(x+1)}{(x+2)(x-1)}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$S = [-1; 0] \cup]1; 2[$.

c) Contrainte sur x : $x(x+2) \neq 0$ et $x^2 \neq 0$.

$x(x+2) \neq 0$ et $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 0$;

Donc, x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

$\frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-x-2}{(x+2)x^2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)x^2} > 0$

On a : $x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

Et, $x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)x^2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$S =]-2; -\sqrt{2}[\cup]0; \sqrt{2}[$.

9

1. a) Contrainte sur x : $x \neq 0$.

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) On a : $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$;

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

c) Contrainte sur x : $4(x+3) - x(x+3) \neq 0$.

$4(x+3) - x(x+3) \Leftrightarrow (x+3)(4-x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x + 3 \neq 0$ et $4 - x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ et $x \neq 4$;

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$.

2. a) Contrainte sur x : $x - 2 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0$.

$x - 2 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -3$;

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

b) Contrainte sur x : $5x \neq 0$ et $x(x+1) \neq 0$.

$5x \neq 0$ et $x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$;

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

c) Contrainte sur x :

$(x-3)(x+4) \neq 0$ et $(11-x)(x-8) \neq 0$.

On a: $\begin{cases}(x-3)(x+4) \neq 0 \\ (11-x)(x-8) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \neq 0 \text{ et } x+4 \neq 0 \\ 11-x \neq 0 \text{ et } x-8 \neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 3 \text{ et } x \neq -4 \\ x \neq 11 \text{ et } x \neq 8;\end{cases}$

x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3; 8; 11\}$.

10

2. a) Contrainte sur x : $x \geq 0$.

x appartient à $[0; +\infty[$.

b) Contrainte sur x : $3x - 6 \geq 0$.

$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

x appartient à $[2; +\infty[$.

c) Contrainte sur x : $4 - x \geq 0$.

$4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.

x appartient à $]-\infty; 4]$.

2. a) Contrainte sur x : $x + 3 \geq 0$ et $\sqrt{x+3} \neq 0$.

$x + 3 \geq 0$ et $\sqrt{x+3} \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ et $x + 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -3$ et $x \neq -3$

x appartient à $]-3; +\infty[$.

b) Contrainte sur x : $2 - x \geq 0$ et $x + 6 \geq 0$

$2 - x \geq 0$ et $x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ et $x \geq -6$.

x appartient à $[-6; 2]$.

c) Contrainte sur x : $x - 1 \geq 0$ et $x \neq 2 \neq 0$.

$x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ et $x \neq 2$

x appartient à $[1; 2[\cup]2; +\infty[$.

11

1. a) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow x(x+1)-(x+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x+1=0$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $\mathbb{R}$.

b) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-3=0$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $\mathbb{R}$.

2. a) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow (x+1)^2-(x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1-x+1)(x+1+x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 4x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $\mathbb{R}$.

b) Pour x tout appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x=x^2+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $\mathbb{R}$.

12

1. a) Pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow x=4(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 4x+4-x=0$$
$$\Leftrightarrow 3x=-4$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $]1;+\infty[$.

b) Pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{4}{x-1}=2x$$
$$\Leftrightarrow 4=2x(x-1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=x+2.$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $]1;+\infty[$.

2. a) Pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow 2x-1=x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=1.$$

b) Pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x-1+2}{x-1}=x+2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=x+2$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{x-1}=x+2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}=x+1.$$

(E) et (F) sont équivalentes dans $]1;+\infty[$.

13

1. a) $\frac{20}{x}=5x \Rightarrow 5x^2=20$

$$\Rightarrow x^2=4$$
$$\Rightarrow x=-2 \text{ ou } x=2.$$

Vérification :

$\frac{20}{2}=10$ et $5\times 2=10$ donc, $\frac{20}{2}=5\times 2$;

$\frac{20}{-2}=-10$ et $5\times(-2)=-10$ donc, $\frac{20}{-2}=5\times(-2)$.

Par suite les solutions de l'équation sont -2 et 2.

b) $\frac{2}{x-1}=3 \Rightarrow 3(x-1)=2$

$$\Rightarrow 3x-3=2$$
$$\Rightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Vérification :

$\frac{2}{\frac{5}{3}-1}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=2\times\frac{3}{2}=3;\ \frac{2}{\frac{5}{3}-1}=3.$

La solution de l'équation est $\frac{5}{3}$.

c) $\frac{x}{x-3}=x-4 \Rightarrow (x-4)(x-3)=x$

$$\Rightarrow x^2-8x+12=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2-16+12=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2-2^2=0$$
$$\Rightarrow (x-4-2)(x-2+4)=0$$
$$\Rightarrow (x-6)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow x-6=0 \text{ ou } x+2=0$$
$$\Rightarrow x=6 \text{ ou } x=-2$$

Vérification :

$\frac{6}{6-3}=\frac{6}{3}=2$ et $6-4=2;\ \frac{6}{6-3}=6-4.$

$\frac{2}{2-3}=\frac{2}{-1}=-2$ et $2-4=-2;\ \frac{6}{2-3}=2-4.$

Les solutions de l'équation sont 2 et 6.

2. a) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x} \Rightarrow 3x-2=x$

$$\Rightarrow x=1$$

Vérification :

$\sqrt{3\times 1-2}=\sqrt{1}$;

1 est la solution de l'équation.

b) $\sqrt{4-x}=x-2 \Rightarrow 4-x=(x-2)^2$

$$\Rightarrow x^2-3x=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ ou } x=3.$$

Vérification :

$\sqrt{4-0}=\sqrt{4}=2$ et $0-2=-2$ donc, $\sqrt{4-0}\neq 0-$

$\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1$ et $3-2=1;\ \sqrt{4-3}=3-2.$

Il s'ensuit que la solution de l'équation est 3.

c) $\sqrt{\frac{x}{2}+3}=\frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}+3=\frac{x^2}{16}$

$$\Rightarrow x^2-8x-48=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2-16-48=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2-64=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2-8^2=0$$
$$\Rightarrow (x-4-8)(x-4+8)=0$$
$$\Rightarrow x=12 \text{ ou } x=-4.$$

Vérification :

$\sqrt{\frac{12}{2}+3}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$ et $\frac{12}{4}=3;\ \sqrt{\frac{12}{2}+3}=$

$\sqrt{\frac{-4}{2}+3}=\sqrt{-2+3}=\sqrt{1}=1$ et $\frac{-4}{4}=-1;\ \sqrt{\frac{-4}{2}+3}\neq$

On conclut la solution de l'équation est 12.

14

1 $(x-1)(x+2)^2=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-$

$$=x^3+3x^2-4$$

Donc, $x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$.

2. $\sqrt{x+3}=\frac{2}{x} \Rightarrow x\sqrt{x+3}=2$

$$\Rightarrow x^2(x+3)-4=0$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2-4=0$$

$\Rightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0$

$\Rightarrow x-1=0$ ou $x+2=0$

$\Rightarrow x=1$ ou $x=-2$

Vérification :

$\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et $\frac{2}{1} = 2; \sqrt{1+3} = \frac{2}{1}$,

$\sqrt{-2+3} = \sqrt{1} = 1$ et $\frac{2}{-2} = -1; \neq \sqrt{-2+3} = \frac{2}{-2}$.

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation (E) est $\{1\}$.

15

1. a) Contrainte sur x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{x}{4} = \frac{x-1}{6} - \frac{1-x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{8} = \frac{x-1}{6} + \frac{x-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{8} = \frac{x-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{8} + \frac{x-1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4x-4}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{5}.$$

La solution de l'équation (E) est $\frac{4}{5}$.

b) Contrainte sur x : $x \in \mathbb{R}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$(F) \Leftrightarrow 4x^2 + x^2 - x + x^2 - 4x - 5 = 2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{6} - \frac{7}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{12})^2 - \frac{1}{144} - \frac{7}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{12})^2 - (\frac{13}{12})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{12}+\frac{13}{12})(x+\frac{1}{12}-\frac{13}{12}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{7}{6})(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{7}{6} = 0 \text{ ou } x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{6} \text{ ou } x = 1.$$

L'ensemble solution est $\{-\frac{7}{6};1\}$.

2. a) Contrainte sur x : $x \neq 0$ et $x+1 \neq 0$.

On a : $x \neq 0$ et $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$.

Donc, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$,

$$(G) \Leftrightarrow (x+1)^2 - x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Comme $-\frac{1}{3}$ est élément $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$, alors la solution est $-\frac{1}{3}$.

b) Contrainte sur x : $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0$.

On a : $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Donc, $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}^*$,

$$(H) \Leftrightarrow x(x-1) + (x+1)(x+2) + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4})(x+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } x+\frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Puisque -1 et $-\frac{1}{2}$ sont éléments de $\mathbb{R}^*$ alors l'ensemble solution est $\{-1;-\frac{1}{2}\}$.

16

Contrainte sur l'inconnue x :

$x+2 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ et $x^2-4 \neq 0$.

On a : $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ x-2\neq 0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\neq 0 \\ x-2\neq 0. \end{cases}$

Donc, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.

Pour x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)+(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6+x^2+x-2}{x^2-4} - \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{4}+\frac{1}{4})(x-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-\frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x-\frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

Puisque 1 et $\frac{3}{2}$ sont éléments de $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ alors les solutions sont 1 et $\frac{3}{2}$.

17

1. a) $|3x-5| = x \Rightarrow (|3x-5|)^2 = x^2$

$$\Rightarrow (3x-5)^2 = x^2$$

$$\Rightarrow 3x-5 = x \text{ ou } 3x-5 = -x$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{4}.$$

Vérification :

$|3\times\frac{5}{2} - 5| = |\frac{15}{2} - 5| = |\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$; $|3\times\frac{5}{2} - 5| = \frac{5}{2}$,

$|3\times\frac{5}{4} - 5| = |\frac{15}{4} - 5| = |-\frac{5}{4}| = \frac{5}{4}$; $|3\times\frac{5}{4} - 5| = \frac{5}{4}$

Les solutions de l'équation sont $\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{4}$.

b) $|x+7| = 5x+2 \Rightarrow (|x+7|)^2 = (5x+2)^2$

$\Rightarrow (x+7)^2 = (5x+2)^2$

$\Rightarrow x+7 = 5x+2$ ou $x+7 = -5x-2$

$\Rightarrow x = \frac{5}{4}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Vérification :

$|\frac{5}{4}+7| = |\frac{33}{4}| = \frac{33}{4}$ et $5\times\frac{5}{4}+2 = \frac{25}{4}+2 = \frac{33}{4}$;

$|\frac{5}{4}+7| = 5\times\frac{5}{4}+2,$

$|-\frac{3}{2}+7| = |\frac{11}{2}| = \frac{11}{2}$ et $5\times(-\frac{3}{2})+2 = -\frac{15}{2}+2 = -\frac{11}{2}$;

$|-\frac{3}{2}+7| \neq 5\times(-\frac{3}{2})+2.$

La solution de l'équation est $\frac{5}{4}$.

c) $|2-x| = 4x+1 \Rightarrow (|2-x|)^2 = (4x+1)^2$

$\Rightarrow (2-x)^2 = (4x+1)^2$

$\Rightarrow 2-x = 4x+1$ ou $2-x = -4x-1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$ ou $x = -1.$

Vérification :

$|2-\frac{1}{5}| = |\frac{9}{5}| = \frac{9}{5}$ et $4\times\frac{1}{5}+1 = \frac{4}{5}+1 = \frac{9}{5}$;

$|2-\frac{1}{5}| = 4\times\frac{1}{5}+1.$

$|2-(-1)| = |3| = 3$ et $4\times(-1)+1 = -4+1 = -3$;

$|2-(-1)| \neq 4\times(-1)+1.$

La solution de l'équation est $\frac{1}{5}$.

2. a) Exprimons l'équation sans valeur absolue.

On a : $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

et $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

Considérons le tableau suivant.

x	$-\infty$ ... -2	-2 ... 0	0 ... $+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert 3x\rvert$	$-3x$	$-3x$	$3x$
$\lvert 3x\rvert+\lvert x+2\rvert = 8$	$-4x = 10$	$-2x = 6$	$4x = 6$

On déduit du tableau que :

Pour x élément de $]-\infty;-2]$,

$|3x|+|x+2| = 6 \Leftrightarrow -4x = 10$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$

On a : $-\frac{5}{2} = -2,5$ donc, $-\frac{5}{2} \in]-\infty;-2].$

Pour x élément de $[-2;0]$,

$|3x|+|x+2| = 6 \Leftrightarrow -2x = 6$

$\Leftrightarrow x = -3.$

On a : $-3 \notin [-2;0].$

Pour x élément de $[0;+\infty[$,

$|3x|+|x+2| = 6 \Leftrightarrow 4x = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

$\frac{3}{2} = 1,5$ donc, $\frac{3}{2} \in [0;+\infty[$,

On conclut que les solutions de l'équation sont $-\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

b) $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et $2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

et $2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Il s'ensuit le tableau suivant.

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ... $+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+3\rvert-\lvert 2x-1\rvert = x$	$x-4 = x$	$3x+2 = x$	$-x+4 = x$

Par conséquent,

Pour x élément de $]-\infty;-3]$,

$|x+3|-|2x-1| = x \Leftrightarrow x-4 = x$

$\Leftrightarrow -4 = 0$ absurde.

Pour x élément de $[-3;-\frac{1}{2}]$,

$|x+3|-|2x-1| = x \Leftrightarrow 3x+2 = x$

$\Leftrightarrow x = -1.$

On a : $-1 \in [-3;-\frac{1}{2}].$

Pour x élément de $[-\frac{1}{2};+\infty[$,

$|x+3|-|2x-1| = x \Leftrightarrow -x+4 = x$

$\Leftrightarrow x = 2;$

$2 \in [-\frac{1}{2};+\infty[$,

On conclut que les solutions de (E) sont -1 et 2.

c) $x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ et $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Il s'ensuit le tableau suivant.

x	$-\infty$ ... 1	1 ... 4	4 ... $+\infty$
$\lvert x-4\rvert$	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
(E)	$-6x^2+5x = 0$	$6x^2-7x = 0$	$6x^2-5x+4 = 0$

Donc,

Pour x élément de $]-\infty;1]$,

(E) $\Leftrightarrow -6x^2+5x = 0$

$\Leftrightarrow x(6x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $6x-5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}.$

On a : $0 \in]-\infty;1]$; et $\frac{5}{6} = 0,83$ donc, $\frac{6}{5} \in]-\infty;1].$

Pour x élément de $[1;4]$,

(E) $\Leftrightarrow 6x^2-7x = 0$

$\Leftrightarrow x(6x-7) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $6x-7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{6}.$

On a $0 \notin [1;4]$; et $\frac{7}{6} = 1,16$ donc, $\frac{7}{6} \in [1;4].$

Pour x élément de $[4;+\infty[$,

(E) $\Leftrightarrow 6x^2-5x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{5}{6}x+\frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{12})^2+\frac{71}{144} = 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{12})^2 = -\frac{71}{144}$; absurde car $(x-\frac{5}{12})^2 \geq 0.$

De ce qui précède, on déduit que l'ensemble solution de (E) est $\{0;\frac{5}{6};\frac{7}{6}\}$.

18

a) Contrainte sur x : $x \geq 0.$

Donc $x \in [0;+\infty[.$

Pour x appartenant à $[0;+\infty[$,

$|3x-5| = x \Leftrightarrow 3x-5 = x$ ou $3x-5 = -x$

$\Leftrightarrow 2x = 5$ ou $4x = 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{4}.$

Comme $\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{4}$ appartiennent à $[0;+\infty[$ alors l'ensemble solution est $\{\frac{5}{4};\frac{5}{2}\}$.

b) Contrainte sur x : $x \in \mathbb{R}.$

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$|x-3| = x^2+1 \Leftrightarrow x-3 = x^2+1$ ou $x-3 = -x^2-1$

$\Leftrightarrow x^2-x+4 = 0$ (1) ou $x^2+x-2 = 0$ (2)

On a (1) $\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 = -\frac{15}{4}$ absurde car $(x-\frac{1}{2})^2 \geq$

Et, (2) $\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1.$

Les solutions de l'équation sont -2 et 1.

c) Contrainte sur x : $(x+2)(x+3) \geq 0.$

Dressons le tableau de signe de $(x+2)(x+3)$.

On a :

$x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Il s'ensuit le tableau suivant.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent,

$(x+2)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[.$

Donc, la contrainte est que x appartienne à

$]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[.$

Par suite, pour x élément de

$]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[,$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = (x+2)(x+3) \\ 1-x = -(x+2)(x+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = x^2+5x+6 \\ 1-x = -x^2-5x-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5=0 \quad (1) \\ x^2+4x+7=0 \quad (2). \end{cases}$$

On a : (1) $\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 2^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3+2)(x+3-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+5)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x+5 = 0$ ou $x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -1;$

-5 et -1 appartiennent à $]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[.$

Et, (2) $\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 3 = 0$

Or, pour tout nombre réel x, $(x+2)^2 \geq 0$

$(x+2)^2 + 3 \geq 3$

Donc, $(x+2)^2 + 3 \neq 0.$

De ce qui précède, il résulte que les solutions de (E) sont -5 et -1.

19

$$\left|\frac{x+2}{x}\right| = 3x \Rightarrow \left(\left|\frac{x+2}{x}\right|\right)^2 = (3x)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = (3x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x} = 3x \text{ ou } \frac{x+2}{x} = -3x$$

$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$ (1) ou $3x^2 + x + 2 = 0$ (2).

On a :

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}.$$

Et, $(2) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{23}{36} \text{ absurde car } \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0.$$

Vérification :

$$\left|\frac{-\frac{2}{3}+2}{-\frac{2}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}}\right| = |-2| = 2 \text{ et } 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -2;$$

$$\left|\frac{-\frac{2}{3}+2}{-\frac{2}{3}}\right| \neq 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$\left|\frac{1+2}{1}\right| = |3| = 3 \text{ et } 3 \times 1 = 3; \left|\frac{1+2}{1}\right| = 3 \times 1.$$

On conclut que la solution est 1.

20

1. La partie noircie est un rectangle de dimentions $4-x$ et x. Donc, $\mathcal{A} = x(4-x).$

2. Contrainte sur x : $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq x \leq 4.$

On conclut que x appartient à l'intervalle [0 ;4].

a) Pour tout x élément de [0 ;4],

$\mathcal{A} = 4 \Leftrightarrow x(4-x) = 4$

$\Leftrightarrow x = 2.$

$2 \in [0; 4]$ donc x est égale à 2 si $\mathcal{A} = 4.$

b) Pour tout x élément de [0 ;4].

$\mathcal{A} = 3 \Leftrightarrow x(4-x) = 3$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1.$

On a : $1 \in [0; 4]$ et $3 \in [0; 4]$

Donc : les valeurs de x sont 1 et 3 si $\mathcal{A} = 3.$

c) Pour tout x élément de [0 ;4].

$\mathcal{A} \geq 2 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 2$

$\Leftrightarrow (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) \leq 0$

On pose : $P(x) = (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

De plus, $2-\sqrt{2} \simeq 0{,}59$ et $2+\sqrt{2} \simeq 3{,}41.$

Tableau de signe de P(x)

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-2-\sqrt{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-2+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
P(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les valeurs de x sont celles de l'ensemble

$[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}] \cap [0; 4],$

c'est à dire l'intervalle $[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}].$

3. a) $\mathcal{A} = -(x^2 - 4x) = -((x-2)^2 - 4)$

Donc : $\mathcal{A} = 4 - (x-2)^2$

b) Pour tout nombre réel x de [0 ;4],

$(x-2)^2 \geq 0$

$4 - (x-2)^2 \leq 4$

$\mathcal{A} \leq 4.$

De plus, d'après 2 a), $\mathcal{A} = 4$ si x est égale à 2 qui appartient à l'intervalle [0 ;4]

Donc : 4 est la valeur maximale de $\mathcal{A}$.

21

1. On a : $0 \leq 2x \leq 10$ et $0 \leq 2x \leq 6.$

Cest à dire $0 \leq x \leq 5$ et $0 \leq x \leq 3.$

Donc : les valeurs x de sont celles de [0 ;3].

2. La partie noircie est un rectangle de dimensions $10-2x$ et $6-2x$.

Il en découle que : $\mathcal{A}(x) = (10-2x)(6-2x)$

Par suite, $\mathcal{A}(x) = 60 - 20x - 12x + 4x^2$

$\mathcal{A}(x) = 4x^2 - 32x + 60.$

3. a) $\mathcal{A}(x) = 4(x^2 - 8x + 15)$

$\mathcal{A}(x) = 4((x-4)^2 - 1)$

b) Pour tout x appartenant à [0 ;3],

$\mathcal{A}(x) = 12 \Leftrightarrow 4((x-4)^2 - 1) = 12$

$\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 2.$

On a : $2 \in [0; 3]$ et $6 \notin [0;3].$

Il en résulte que la valeur de x est 2.

Pour tout x appartenant à [0 ;3],

$\mathcal{A}(x) = 16 \Leftrightarrow 4((x-4)^2 - 1) = 16$

$\Leftrightarrow x = 4-\sqrt{5}$ ou $x = 4+\sqrt{5}.$

On a : $4-\sqrt{5} \simeq 1{,}76$ et $4+\sqrt{5} \simeq 6{,}24.$

$4-\sqrt{5} \in [0; 3]$ et $4+\sqrt{5} \notin [0; 3].$

Par conséquent, $4-\sqrt{5}$ est la valeur de x.

Etudes de fonctions

1

$f(-1) = 5\times(-1)+2 = -5+2;\ f(-1) = -3.$

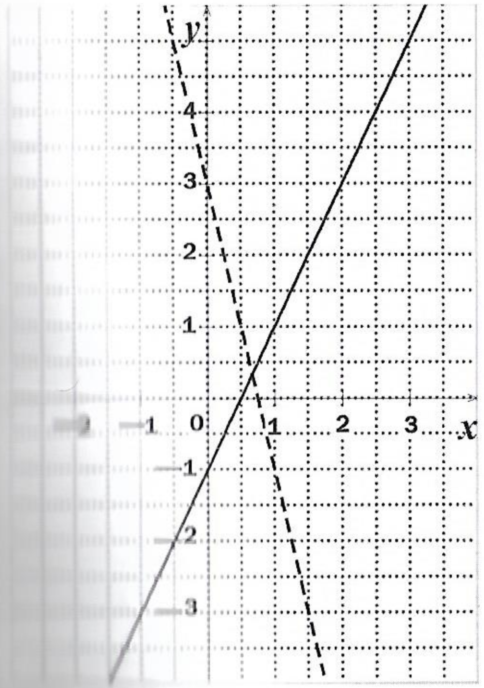
$f(0) = 5\times 0+2 = 2;\ f(0) = 2.$

$f(6) = 5\times 6+2 = 30+2;\ f(6) = 32.$

2

La représentation graphique de f est la droite $(D) : y = 2x - 1.$

Celle de g est la droite $(D') : y = -4x + 3.$



3

Traçons les droites $(D_1) : y = -4x + 5$ et $(D_2) : y = x + 1.$

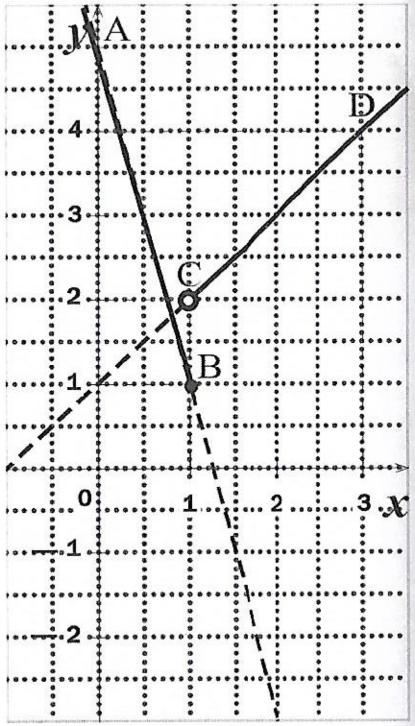
On a :

(D_1)

	A	B
x	0	1
y	5	1

(D_2)

	C	D
x	1	3
y	2	4



La représentation graphique de f est $[BA)\cup]CD).$

4

Une fonction affine est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

a) $f(1) = a\times 1 + b = -2$ et $f(5) = a\times 5 + b = 0.$

Donc, $a + b = -2$ et $5a + b = 0;$

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{5}{2}.$$

Par conséquent, $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$

b) $f(0) = a\times 0 + b = 0$ et $f(6) = a\times 6 + b = 18.$

Donc, $b = 0$ et $6a = 18;$

$a = 3$ et $b = 0.$

Par suite, $f(x) = 3x.$

c) $f(3) = a\times 3 + b = -9$ et $f(5) = a\times 5 + b = -9.$

Donc, $3a + b = -9$ et $5a + b = -9$

$2a = 0$ et $5a + b = -9.$

$a = 0$ et $b = -9.$

Il en résulte que, $f(x) = -9.$

5

1 a) La droite d'équation $y = -3$ coupe (C) au point de coordonnées $(1; -3)$. Donc, 1 est la solution de l'équation.

b) (C) est en dessous de la droite d'équation y=0 sur $]-\infty; 2]$.

La solution est donc, $]-\infty; 2]$.

c) La droite d'équation $y = \frac{9}{2}$ coupe (C) au point de coordonnées $(\frac{7}{2}; \frac{9}{2})$ et la droite d'équation $y = \frac{9}{2}$ est au dessus de (C) sur $]-\infty; \frac{7}{2}]$.

Donc, l'ensemble solution est $]-\infty; \frac{7}{2}[$.

2. f est une fonction affine. Donc, pour tout nombre réel x, $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

De plus (C) passe par les points de coordonnées $(1; -3)$ et $(3;3)$.

Il s'ensuit que :

$f(1) = a\times 1 + b = -3$ et $f(3) = a\times 3 + b = 3.$

Donc, $a + b = -3$ et $3a + b = 3$

$2a = 6$ et $3a + b = 3$

$a = 3$ et $3a + b = 3$

$a = 3$ et $b = -6.$

Par conséquent, $f(x) = 3x - 6.$

6

On a : $-3 \le -2 < 0$ donc,

$f(-2) = -(-2) + 1 = 2 + 1;\ f(-2) = 3.$

On a : $0 \le 6 \le 6$ donc,

$f(6) = 5\times 6 + 9 = 39;\ f(6) = 39.$

On a : $8 > 6$ donc, $f(8) = 2\times 8 - 4 = 12;$

$f(8) = 12.$

7

Pour $-8 \le x < 2,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

On a : $\frac{5}{3} \approx 1,66$. Donc, $-8 \le \frac{5}{3} < 2.$

Pour $2 \le x \le 3,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

On a : $-1 < -8.$

Pour $3 < x \le 11,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

On a : $\frac{7}{2} = 3,5$. Donc, $3 < \frac{7}{2} \le 11.$

Les antécédents par f de 0 sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{7}{2}$.

Pour $-8 \le x < 2$, $f(x) = 4 \Leftrightarrow -3x + 5 = 4$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

On a : $\frac{1}{3} \approx 0,33$. Donc, $-8 \le \frac{1}{3} < 2$.

Pour $2 \le x \le 3$, $f(x) = 4 \Leftrightarrow x + 1 = 4$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

On a : $2 \le 3 \le 3$.

Pour $3 \le x \le 11$, $f(x) = 4 \Leftrightarrow 2x - 7 = 4$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{2}.$$

On a : $\frac{11}{2} = 5,5$. Donc, $3 \le \frac{11}{2} \le 11$.

Par conséquent, les antécédents de 4 par f sont $\frac{1}{3}$, 3 et $\frac{11}{2}$.

8

a) f coïncide sur chacun des intervalles $]-\infty;-2]$, $[-2;1[$ et $[1;+\infty[$ avec une fonction affine. Il en résulte que, f est une fonction affine par intervalles.

b) $f(x) = 7\sqrt{x} + 3$ si $x > 8$ donc, f ne coïncide pas sur l'intervalle $]8;+\infty[$ avec une fonction affine. Par conséquent, f n'est pas une fonction affine par intervalles.

a) f coïncide sur chacun des intervalles $[-6;-3]$, $]-3;0[$ et $[0;+\infty[$ avec une fonction affine. Donc, que f est une fonction affine par intervalles.

9

1. Si $1 \le x \le 4$, $f(x) = (x+1)^2 - x^2$

$$= x^2 + 2x + 1 - x^2$$
$$= 2x + 1.$$

Par conséquent, $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } -5 \le x < 1 \\ f(x) = 2x+1 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ f(x) = 9 & \text{si } 4 \le x \le 10 \end{cases}$

Donc, f est égale sur chacun des intervalles $[-5;1[$, $[1;4]$ et $[4;10]$ à une fonction affine. Il en découle que f est une fonction affine par intervalles.

2. Si $x \le -1$, $g(x) = -x - 1$.

si $x > -1$ $g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$.

Donc, $\begin{cases} g(x) = -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ g(x) = x - 2 & \text{si } x > -1. \end{cases}$

Par conséquent g coïncide sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $]-1;+\infty[$ avec une fonction affine il s'ensuit que, g est une fonction affine par intervalles.

Si $x \le 0$, $h(x) = x - x^2 + x^2 + 4x - x - 4$

$h(x) = 4x - 4$.

Si $x > 0$ $h(x) = |2x + 6| = 2x + 6$.

Donc, $\begin{cases} h(x) = 4x - 4 & \text{si } x \le 0 \\ h(x) = 2x - 6 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

h coincide sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $]0;+\infty[$ avec une fonction affine. On conclut que f est une fonction affine par intervalles.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$3x + 2 \ge x + 4 \Leftrightarrow 2x \ge 2$$
$$\Leftrightarrow 2x \ge 2$$
$$\Leftrightarrow x \ge 1.$$

Par suite, $\begin{cases} k(x) = x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ k(x) = 3x + 2 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$

k coincide sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et avec une fonction affine. Donc, k est une fonction affine par intervalles.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$-3x + 9 \le 2x + 5 \Leftrightarrow -5x \le -4$$
$$\Leftrightarrow x \ge \frac{4}{5}$$

Donc, $\begin{cases} j(x) = 2(2x+5) - 13 & \text{si } x \le \frac{4}{5} \\ j(x) = 2(-3x+9) - 13 & \text{si } x \ge \frac{4}{5}. \end{cases}$

$\begin{cases} j(x) = 4x - 3 & \text{si } x \le \frac{4}{5} \\ j(x) = -6x + 5 & \text{si } x \ge \frac{4}{5}. \end{cases}$

j est égale sur chacun des intervalles $]-\infty;\frac{4}{5}]$ et $[\frac{4}{5};+\infty[$ à une fonction affine. On en déduit que j est une fonction affine par intervalles.

11

1. Pour tout nombre réel x,

$E(x) = n$ si $x \in [n;n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Il en découle que :

$\begin{cases} \forall x \in [-2;-1[, & m(x) = x + 2 \\ \forall x \in [-1;0[, & m(x) = x + 1 \\ \forall x \in [0;1[, & m(x) = x \\ \forall x \in [1;2[, & m(x) = x - 1 \\ \forall x \in [2;3[, & m(x) = x - 2. \end{cases}$

m coincide sur chacun des intervalles $[-2;-1[$, $[-1;0[$, $[0;1[$, $[1;2[$ et $[2;3[$ avec une fonction affine donc, m est une fonction affine par intervalles.

12

1. On a : $p(x) = (4-x)E(x); x \in [-1;2[$.

Donc,

$\begin{cases} \forall x \in [-1;0[, & p(x) = (4-x)\times(-1) = x - 4 \\ \forall x \in [0;1[, & p(x) = (4-x)\times 0 = 0 \\ \forall x \in [1;2[, & p(x) = (4-x)\times 1 = 4 - x \end{cases}$

Par conséquent,

$\begin{cases} \forall x \in [-1;0[, & p(x) = x - 4 \\ \forall x \in [0;1[, & p(x) = 0 \\ \forall x \in [1;2[, & p(x) = 4 - x. \end{cases}$

p est égale sur chacun des intervalles $[-1;0[$, $[0;1[$ et $[1;2[$ à une fonction affine. On en déduit que p est une fonction affine par intervalles.

On a : $q(x) = xE(x+1) - 3; x \in [2;4,5]$.

Donc,

$\begin{cases} \forall x \in [2;3[, & q(x) = 3x - 3 \\ \forall x \in [3;4[, & q(x) = 4x - 3 \\ \forall x \in [4;4,5], & q(x) = 5x - 3. \end{cases}$

q coincide sue chacun ds intervalles $[2;3[$, $[3;4[$ et $[4;4,5]$ avec une fonction affine. Il en résulte que q est une fonction affine par intervalles.

13

1. $|x+3| = x+3$ si $x+3 \geq 0$; $x \geq -3$.

$|x+3| = -x-3$ si $x+3 \leq 0$; $x \leq -3$.

Par conséquent,

$$\begin{cases} \forall x \in [-5;-3[, & f(x) = -x-3-x \\ \forall x \in [-3;1[, & f(x) = x+3-x \\ \forall x \in [1;7[, & f(x) = -x+4. \end{cases}$$

Donc, $$\begin{cases} \forall x \in [-5;-3[, & f(x) = -2x-3 \\ \forall x \in [-3;1[, & f(x) = 3 \\ \forall x \in [1;7[, & f(x) = -x+4. \end{cases}$$

f coincide sur chacun des intervalles $[-5;-3[$, $[-3;1[$ et $[1;7[$ avec une fonction affine. On conclut que f est une fonction affine par intervalles.

2. On a : $-5 \in [-5;-3[$ donc,

$f(-5) = |-5+3| - (-5) = |-2| + 5 = 7$; $f(-5) = 7$.

$1 \in [1;7[$ donc, $f(1) = -1+4 = 3$; $f(1) = 3$.

On a : $\frac{8}{3} \approx 2,66$. Par conséquent, $\frac{8}{3} \in [1;7[$.

Donc, $f(\frac{8}{3}) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$; $f(\frac{8}{3}) = \frac{4}{3}$.

14

$4x+8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Considérons le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\lvert 4x+8 \rvert$		$-4x-8$	0	$4x+8$		$4x+8$	
$\lvert x+1 \rvert$		$-x-1$		$-x-1$	0	$x+1$	
f(x)		$-2x+2$		$-10x-14$		$2x-2$	

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-2], & f(x) = -2x-2 \\ \forall x \in [-2;-1], & f(x) = -10x-14 \\ \forall x \in [-1;+\infty[, & f(x) = 2x-2. \end{cases}$$

f coincide sur chacun des intervalles $]-\infty;-2]$, $[-2;-1]$ et $[-1;+\infty[$ avec une fonction affine. Donc, f est une fonction affine par intervalles.

15

a) (C) coincide sur l'intervalle $[-5;-1[$ avec l'axe des abscisses. Donc,

$\forall x \in [-5;-1[$, $f(x) = 0$.

(C) coincide sur l'intervalle $[-1;3]$ avec la droite passant par les points de coordonnées $(-1;-2)$ et $(3;1)$. Il s'ensuit que : $f(-1) = a \times (-1) + b = -2$ et $f(3) = a \times 3 + b = 1$.

Par conséquent, $-a+b = -2$ et $3a+b = 1$

$4a = 3$ et $3a+b = 1$

$a = \frac{3}{4}$ et $3a+b = 1$

$a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{5}{4}$.

Donc, $\forall x \in [-1;3]$, $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

On conclut que :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in [-5;-1[, & f(x) = 0 \\ \text{Pour } x \in [-3;1[, & f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}. \end{cases}$$

b) (C) coincide sur l'intervalle $[-4;-2]$ avec la droite qui passe par les points de coordonnées $(-4;4)$ et $(-2;0)$. Donc,

$f(-4) = a \times (-4) + b = 4$

$f(-2) = a \times (-2) + b = 0$.

Par suite, $-4a+b = 4$ et $-2a+b = 0$

$-2a = 4$ et $-2a+b = 0$

$a = -2$ et $b = -4$.

Donc, $\forall x \in [-4;-2]$, $f(x) = -2x-4$.

(C) coincide sur l'intervalle $[-2;0]$ avec la droite qui passe par les points de coordonnées $(-2;0)$ et $(0;4)$. Donc, $f(-2) = a \times (-2) + b = 0$

$f(0) = a \times 0 + b = 4$.

Il s'ensuit que : $-2a+b = 0$ et $b = 4$

$a = 2$ et $b = 4$

Donc, $\forall x \in [-2;0]$, $f(x) = 2x+4$.

(C) coincide sur l'intervalle $[0;3]$ avec la droite d'équation $y = 4$.

Donc, $\forall x \in [0;3]$, $f(x) = 4$.

De ce qui précède :

$$\begin{cases} \forall x \in [-4;-2], & f(x) = -2x + 4 \\ \forall x \in [-2;-1], & f(x) = 2x + 4 \\ \forall x \in [-1;+\infty[, & f(x) = 4. \end{cases}$$

16

f est une fonction affine par intervalles.

Déterminons suivant les valeurs de x des nombres réels a et b tels que : $f(x) = ax + b$.

La fonction f coincide sur chacun des intervalles $[-8;-2]$ et $[-2;7]$ avec une fonction affine.

a) D'après le tableau de variation, $f(-8) = 6$ et $f(-2) = 3$. Par conséquent,

$-8a+b = 6$ et $-2a+b = 3$

Donc, $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$.

Il en résulte que : $\forall x \in [-8;-2]$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

De plus, $f(-2) = 3$ et $f(7) = 10$.

Donc, $-2a+b = 3$ et $7a+b = 12$

Il en découle que : $a = 1$ et $b = 5$.

Par suite, $\forall x \in [-2;7]$, $f(x) = x+5$.

On conclut que :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 & \text{si } x \in [-8;-2] \\ f(x) = x + 5 & \text{si } x \in [-2;7]. \end{cases}$$

b) La fonction f est égale sur chacun des intervalles $[1;4]$, $[4;5]$ et $[5;9]$ à une fonction affine.

D'une part, $f(1) = -4$ et $f(4) = 2$.

$a+b = -4$ et $4a+b = 2$

$a = 2$ et $b = -6$.

Il s'ensuit que : $\forall x \in [1;4]$, $f(x) = 2x - 6$.

D'autre part, $f(4) = 2$ et $f(5) = 0$.

$4a+b = 2$ et $5a+b = 0$

$a = -2$ et $b = 10$.

Par conséquent, $\forall x \in [4;5]$, $f(x) = -2x + 10$.

Enfin, on a : $f(5) = 0$ et $f(9) = 6$.

Donc, $5a+b = 0$ et $9a+b = 6$

$a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{15}{2}$.

Il en découle que : $\forall x \in [5;9]$, $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 4 & \text{si } x \in [1;4] \\ f(x) = -2x + 10 & \text{si } x \in [4;5] \\ f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} & \text{si } x \in [5;9]. \end{cases}$$

17

1. La fonction f coincide sur l'intervalle $[-3;1]$ avec la fonction affine $x \mapsto -x+5$. Cette fonction affine est décroissante car le coefficient de la variable x est négatif. Donc, f est décroissante sur $[-3;1]$.

De même f coïncide sur l'intervalle $]1;4]$ avec la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$. Cette fonction affine est croissante car le coefficient de la variable x est positif. Par conséquent, f est croissante sur $]1;4]$.

2.) $-3 \in [-3;1]$ donc, $f(-3) = -(-3)+5 = 8$;
$-1 \in [-3;1]$ donc, $f(1) = -(-1)+5 = 6$;
$4 \in]1;4]$ donc, $f(4) = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$.

Tableau de variation de f.

x	−3		1		4
f(x)	8	↘	4	↗	5

18

1. a) Les courbes (C_f) et (C_g) se coupent aux points d'abscisses -3 et -1. Donc, l'ensemble solution est $\{-3;-1\}$.

b) La courbe (C_f) et la droite d'équation $y = 3x+5$ se coupent uniquement au point d'abscisse -1. Il en découle que la solution est -1.

c) (C_g) et la droite $y = 1-x$ se coupent aux points d'abscisses -3 et -1. Par conséquent, l'ensemble solution est $\{-3;-1\}$.

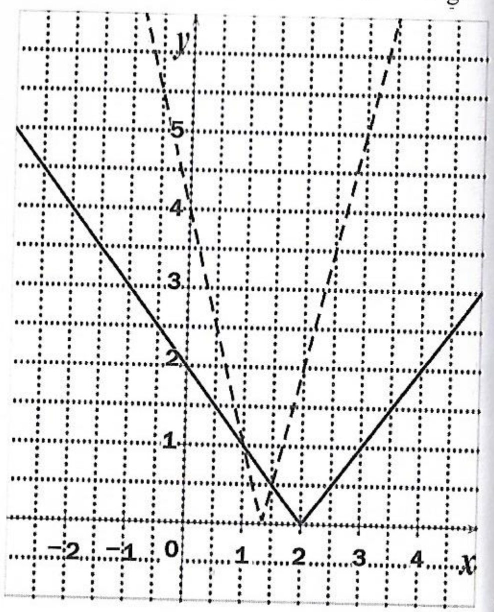
2. a) (C_f) est en dessous de (C_g) sur chacun des intervalles $]-\infty;-3]$ et $[1;+\infty[$. Par conséquent, l'ensemble solution de est $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$.

b) (C_f) est au dessus de la droite d'équation $y = 3x+5$ sur l'intervalle $]-\infty;-1]$. Donc, l'ensemble solution de l'équation est $]-\infty;-1[$.

c) (C_g) est en dessous de la droite d'équation $y = 1-x$ sur l'intervalle $[-3;-1]$. Donc, l'ensemble solution de l'équation est $]-3;-1[$.

19

1. Représentation graphique de (C_f) et (C_g)

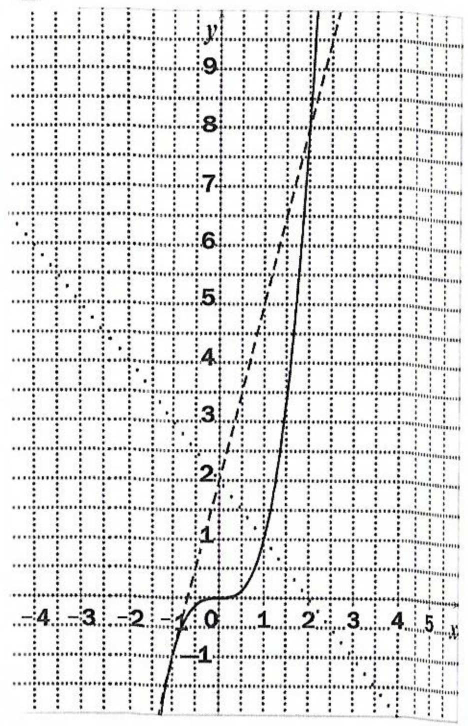


2. a) Les courbes (C_f) et (C_g) se coupent aux points d'abscisses 1 et $\frac{3}{2}$. Donc, l'ensemble solution est $\{1;\frac{3}{2}\}$.

b) (C_g) et la droite d'équation $y = 4$ se coupent au point d'abscisse -2. Il en découle que la solution est -2.

c) (C_f) est au dessus de (C_g) sur l'intervalle $[1;\frac{3}{2}]$. Donc, l'ensemble solution de est $[1;\frac{3}{2}]$.

20



a) (C) et la droite d'équation $y = -x+2$ se[...] uniquement au point d'abscisse 1. Donc, 1 [...] solution de l'équation $x^3 = -x+2$.
Or, pour tout nombre réel x,
$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -x+2$.
Il s'ensuit que 1 est la solution de l'équatio[n]
$x^3 + x - 2 = 0$.

b) (C) et la droite d'équation $y = 3x+2$ se [...] aux points d'abscisses -1 et 2. Donc, -1 [...] sont les solutions de l'équation $x^3 = 3x+[2]$.
De plus, pour tout nombre réel x,
$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x+2$.
Donc, l'ensemble solution de l'équation
$x^3 - 3x - 2 = 0$ est $\{-1;2\}$.

21

1. La fonction f strictement croissante sur [...]

2. a) Soit deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

Donc, $a+2 < b+2$

$$(a+2)^3 < (b+2)^3$$
$$(a+2)^3 - 10 < (b+2)^3 - 10$$
$$h(a) < h(b).$$

On conclut que h est strictement croissante s[...]

b.) On a : $h(-1) = (-1+2)^3 - 10 = 1 - 10$ [...]
$h(2) = (2+2)^3 - 10 = 64 - 10$ [...]

Tableau de variation de h.

x	−1		2
h(x)	−9	↗	54

22

1. La fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

2. $x \in D_k \Leftrightarrow 4x - 6 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2};$$

$$D_k =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[.$$

Soit deux nombres réels u et v dans $]-\infty; \frac{3}{2}[$ tels que : $u < v$.

Donc, $$u < v < \frac{3}{2}$$

$$4u < 4v < 6$$

$$4u - 6 < 4v - 6 < 0$$

$$\frac{1}{4v-6} < \frac{1}{4u-6}$$

$$\frac{1}{4v-6} + 12 < \frac{1}{4u-6} + 12$$

$$k(v) < k(u).$$

Par conséquent, k est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

Soit deux nombres réels u et v dans $]\frac{3}{2}; +\infty[$. tels que : $u < v$.

Donc, $$\frac{3}{2} < u < v$$

$$6 < 4u < 4v$$

$$0 < 4u - 6 < 4v - 6$$

$$\frac{1}{4v-6} < \frac{1}{4u-6}$$

$$\frac{1}{4v-6} + 12 < \frac{1}{4u-6} + 12$$

$$k(v) < k(u).$$

Il s'ensuit que, k est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

On conclut que k est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$ et sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

23

1. a) $$f(v) - f(u) = v^3 - 3v - 2 - (u^3 - 3u - 2)$$

$$= v^3 - u^3 - 3(v - u).$$

$$= (v - u)(v^2 + vu + u^2) - 3(v - u)$$

Donc, $f(v) - f(u) = (v - u)(v^2 + vu + u^2 - 3)$.

b) Sens de variation de f sur $]-\infty; -1]$:

Supposons que u et v appartiennent à $]-\infty; -1]$ avec $u < v$.

Il s'ensuit que : $$u < v \leq -1$$

$$u^2 > 1, v^2 \geq 1 \text{ et } uv > 1$$

$$v^2 + vu + u^2 > 3$$

$$v^2 + vu + u^2 - 3 > 0$$

Or $u < v$ implique $v - u > 0$.

Par conséquent, $(v - u)(v^2 + vu + u^2 - 3) > 0$

$$f(v) - f(u) > 0$$

$$f(v) > f(u).$$

f est donc strictement croisante sur $]-\infty; -1]$.

Sens de variation de f sur $]-1; 1]$

Supposons que u et v appartiennent à $]-1; 1]$ tels que : $u < v$.

On a: $$-1 < u < v \leq 1$$

$$u^2 < 1, v^2 \leq 1, |u| < 1 \text{ et } |v| \leq 1$$

$$u^2 + v^2 < 2 \text{ et } |vu| < 1$$

$$u^2 + v^2 < 2 \text{ et } -1 < vu < 1$$

$$v^2 + u^2 + vu < 3$$

$$v^2 + u^2 + vu - 3 < 0$$

De plus, $u < v$ implique $v - u > 0$.

Donc, $(v - u)(v^2 + vu + u^2 - 3) < 0$

Il en résulte que: $f(v) < f(u)$.

f est strictement décroisante sur $]-1; 1]$.

Supposons que u et v appartiennent à $[1; +\infty[$. avec $u < v$.

Par conséquent : $$1 \leq u < v$$

$$u^2 \geq 1, v^2 > 1 \text{ et } uv > 1$$

$$v^2 + vu + u^2 > 3$$

$$v^2 + vu + u^2 - 3 > 0$$

Or $u < v$ implique $v - u > 0$.

Donc, $$(v - u)(v^2 + vu + u^2 - 3) > 0$$

$$f(v) > f(u).$$

On en déduit que f est strictement croisante sur $[1; +\infty[$.

2. a) $$(x + 1)^2(x - 2) = (x^2 + 2x + 1)(x - 2)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$$

$$= x^3 - 3x - 2.$$

Donc, $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$.

b) $x \in D_g \Leftrightarrow f(x) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0$$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

c) La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$. Donc, pour tout a et b dans $]-\infty; -1[$ tels que : $a < b$, on a : $f(a) < f(b) < f(-1)$

$$f(a) < f(b) < 0$$

Par conséquent, $$\frac{1}{f(b)} < \frac{1}{f(a)}$$

$$g(b) < g(a).$$

g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

La fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Par conséquent, elle l'est sur $]2; +\infty[$, car $]2; +\infty[\subset [1; +\infty[$. Donc, pour tout a et b dans $]2; +\infty[$,

On a : $a < b \Rightarrow f(2) < f(a) < f(b)$

$$0 < f(a) < f(b)$$

Il s'ensuit que, $$\frac{1}{f(b)} < \frac{1}{f(a)}$$

$$g(b) < g(a).$$

On conclut que g est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$,

3. a) Pour tout nombre réel x,

$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

On a : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ et $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Tableau de signe de f sur $]-1; 2[$.

x	-1		2
$(x+1)^2$	0	+	
$x-2$		−	0
$f(x)$	0	−	0

Donc, $\forall x \in]-1; 2[$, $f(x) < 0$.

b) La fonction f est strictement décroissante sur $]-1; 1]$. Donc, pour tout a et b dans $]-1; 1]$ avec $a < b$, on a : $f(b) < f(a) < f(-1)$

$$f(b) < f(a) < 0$$

$$\frac{1}{f(a)} < \frac{1}{f(b)}$$

$$g(a) < g(b).$$

On conclut que g est strictement croissante sur $]-1; 1]$.

La fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Donc, elle l'est sur $[1; 2[$ car $[1; 2[\subset [1; +\infty[$.

Il s'ensuit que pour tout a et b dans [1; 2[avec

$a < b$, on a : $f(a) < f(b) < f(2)$

$f(b) < f(a) < 0$

$\frac{1}{f(a)} < \frac{1}{f(b)}$

$g(a) < g(b)$.

g est strictement décroissante sur [1; 2[.

Vecteurs et points du plan

1

1. a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

c) $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2. a) $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{-5}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

b) $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} = \frac{4}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

c) $3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + 4(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = -4\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

3. a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 4)\overrightarrow{AM} = -4\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1\times3}{2\times3} - \frac{5\times2}{3\times2} + 4)\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{3-10}{6} + 4)\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{-7}{6} + \frac{4\times6}{6})\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7+24}{6}\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{17}{6}\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{6}{17} \times 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{24}{17}\overrightarrow{AB}$$

c) $\frac{5}{6}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{5}{6} - \frac{3}{4})\overrightarrow{MA} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow -(\frac{5}{6} - \frac{3}{4})\overrightarrow{AM} = (\frac{1}{8} + \frac{3}{4})\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow -(\frac{5\times2}{6\times2} - \frac{3\times3}{4\times3})\overrightarrow{AM} = (\frac{1}{8} + \frac{3}{4})\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10-9}{12}\overrightarrow{AM} = \frac{1+3\times2}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\overrightarrow{AM} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (-12) \times \frac{7}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -4 \times 3 \times \frac{7}{4\times2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{21}{2}\overrightarrow{AB}$$

2

1. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

b) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$

$$= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

c) $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$$= -4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$$

$$= -7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$$

2. a) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{4+1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{4} - \frac{3}{2})\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + (\frac{1-6}{4})\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

c) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{CA}$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC}$$

$$= (\frac{5}{6} + \frac{1}{9})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC}$$

$$= (\frac{5\times3}{6\times3} + \frac{1\times2}{9\times2})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{17}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC}$$

3. a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{11}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC})$

$$= \frac{11}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= (\frac{11}{5} + \frac{3}{2})\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{37}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$$

c) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - (\frac{3}{2} \times 2)\overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$$

3

1. a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CG} =$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}$$

c) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GC} =$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

2. a) $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{CG}=-2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{CA}$

c) $-3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$

4

1. On a: $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CB}+4(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})$

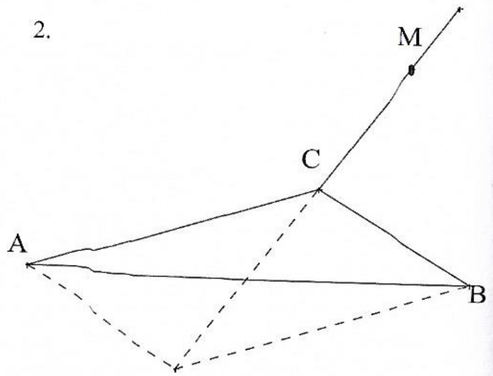
$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{AM}$

$-3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{CA}$

$-3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}).$

2.



5

1. a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.$

Donc, $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$

$\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}.$

Les points A, I et J sont alignés

b) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AJ}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$

Donc, $\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AI}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$-3\overrightarrow{AI}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$-3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{AJ}=-3\overrightarrow{AI}$

Les points A, I et J sont alignés

2. a) $\overrightarrow{JI}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Donc, $\overrightarrow{JI}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $4\overrightarrow{AJ}=4(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{JI}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $4\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{JI}=4\overrightarrow{AJ}$

Les points A, I et J sont alignés

b) $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{BA}+\frac{15}{4}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}(-3\overrightarrow{AB}+\frac{15}{4}\overrightarrow{AC}).$

$\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $-\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}=-\frac{2}{3}(-3\overrightarrow{AB}+\frac{15}{4}\overrightarrow{AC}).$

$\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $-\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}).$

$\overrightarrow{JA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$

Les points A, I et J sont alignés

6

1. Voir figure.

2. On a : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$

ABCD est un parallélogramme.

Donc, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}.$

On a : $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{CB}$

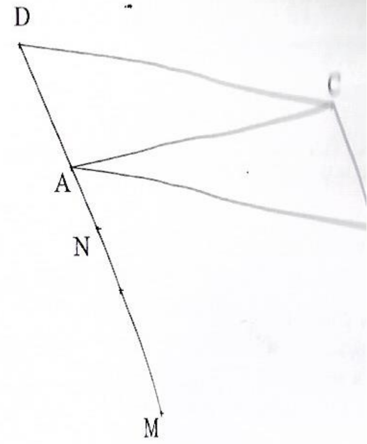
$\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{BC}$

Par conséquent, $\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Et, $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM})$

Donc, $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}.$

On conclut que les points M, N et A sont alignés.



7

1. Voir figure :

$\overrightarrow{EM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{GN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{GP}.$

2.) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}$

On a : $5\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{EF}$ et $2\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{NE}$

Donc, $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $2\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{NE}$

$-\overrightarrow{ME}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $2\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{E}$

$\overrightarrow{ME}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $3\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{ME}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$

Par conséquent, $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{EF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{FE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$

D'autre part, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EP}$

On a : $\overrightarrow{EN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$ donc, $\overrightarrow{NE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$

De plus, $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{GP}$

Donc, $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{EP} - 3\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{FE}$

$-2\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{EP} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{EP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

Par suite, $\overrightarrow{NP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + (-\frac{2}{3} + \frac{3}{2})\overrightarrow{EG}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{-4+9}{6}\overrightarrow{EG}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{5}{6}\overrightarrow{EG}$

3. On a: $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{FE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{5}{6}\overrightarrow{EG}$.

$5\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{FE} + \frac{10}{3}\overrightarrow{EG}$ et $2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{FE} + \frac{5}{3}\overrightarrow{EG}$.

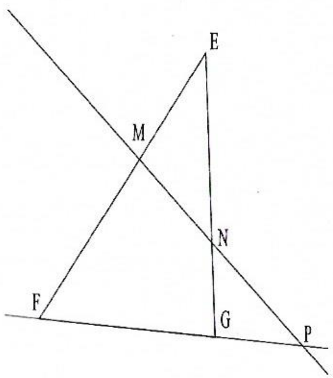
$5\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{FE} + \frac{10}{3}\overrightarrow{EG}$ et $2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{FE} + \frac{5}{3}\overrightarrow{EG}$.

$5\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{FE} + \frac{10}{3}\overrightarrow{EG}$ et $4\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{FE} + \frac{10}{3}\overrightarrow{EG}$.

Donc, $5\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NP}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{NP}$

Il en découle que les points M, N et P sont alignés.



8

1. $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CI}$

Or I milieu de [BC] et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Donc, $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

Par conséquent, $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

D'autre part, $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE}$

Le point E est le symétrique de A par rapport à B.

Donc, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$

Comme I est le milieu de [BC] alors $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Par suite, $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

Enfin, $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc, $3\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

On en déduit que $\overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{FI}$.

2. Puisque $\overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{IF}$ alors les points I, E et F sont alignés.

9

E est le symétrique de A par rapport à la droite (BD). Puisque les symétries orthogonales conservent les diatances alors, DC = AD = 1. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est unitaire.

DEC est équilatéral donc, CE = DC = 1

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est unitaire. Le quadrilatère DBFC est un parallélogramme. Il en découle que : CF = DB.

Le triangle ABD étant rectangle isocèle en A, on a : $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 1+1 = 2$; $DB = \sqrt{2}$

Donc, $CF = \sqrt{2}$.

On conclut que le vecteur $\overrightarrow{CF}$. n'est pas unitaire. Le quadrilatère DBCF est un parallélogramme. Il s'ensuit que : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DC}$. Comme le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est unitaire alors le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est également unitaire.

10

1. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC. Donc les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires. Par conséquent, le triangle ABH est rectangle en H. De plus H est le milieu de [BC] car la hauteur (AH) est également une médiane.

D'après le théorème de Pythagore,

$AB^2 = AH^2 + HB^2$;

$AH^2 = AB^2 - HB^2$

$AH^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3a^2}{4}$

$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est unitaire si AH = 1.
vecteur est unitaire si AH = 1.

On a : $AH = 1 \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc, $\overrightarrow{AH}$ est unitaire si a est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. H est le milieu de [BC]. Par suite, J appartient au cercle de diamètre [BC]. Donc, le triangle BCJ est rectangle en J. Il en découle que les droites (BJ) et (AC) sont perpendiculaires.
Par conséquent, la droite(BJ) est la hauteur issue de B. Elle est également une médiane dans le ABC. Il s'ensuit que (BJ) est une médiane. Donc, BJ = AH = 1.

On en déduit que $\overrightarrow{BJ}$ est unitaire.
De meme I appartient au cercle de diamètre [BC]. Par conséquent, le triangle BCI est rectangle en I. Par suite, (IC) est la médiane issue de C. Donc, IC = AH = 1. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{IC}$ est unitaire.

11

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

$= 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

Donc, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Par conséquent, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Il en découle que : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

12

a) Coordonnées de $\vec{u} = \vec{i}$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$

$\vec{u} = \vec{i}$

$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{j}$

$= 1(\vec{i} + \vec{j}) - 1\vec{j}$

Donc, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Coordonnées de $\vec{u} = \vec{i}$ dans la base $(2\vec{j}, \vec{j} - \vec{i})$.

$\vec{u} = \vec{i}$

Déterminer a et b tels que : $\vec{u} = a(2\vec{j}) + b(\vec{j} - \vec{i})$

$\vec{u} = a(2\vec{j}) + b(\vec{j} - \vec{i})$

$= 2a\vec{j} + b\vec{j} - b\vec{i}$

$= -b\vec{i} + (2a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$,

On a : $-b = 1$ et $2a + b = 0$

$b = -1$ et $2a + b = 0$

$b = -1$ et $2a - 1 = 0$

$b = -1$ et $a = \frac{1}{2}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

b) Coordonnées de $\vec{u} = \vec{j}$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$

$\vec{u} = a(\vec{i} + \vec{j}) + b\vec{j}$

$\vec{u} = a\vec{i} + (a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $a = 0$ et $a + b = 1$

$a = 0$ et $b = 1$

Par conséquent, $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Coordonnées de $\vec{u} = \vec{j}$ dans la base $(2\vec{j}, \vec{j} - \vec{i})$.

$\vec{u} = -b\vec{i} + (2a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $-b = 0$ et $2a + b = 1$

$b = 0$ et $2a = 1$

$b = 0$ et $a = \frac{1}{2}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

c) Coordonnées de $\vec{u} = 5\vec{i} + 8\vec{j}$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$.

$\vec{u} = a(\vec{i} + \vec{j}) + b\vec{j}$

$\vec{u} = a\vec{i} + (a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $a = 5$ et $a + b = 8$

$a = 5$ et $5 + b = 8$

$a = 5$ et $b = 3$

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

Coordonnées de $\vec{u} = \vec{j}$ dans la base $(2\vec{j}, \vec{j} - \vec{i})$.

$\vec{u} = -b\vec{i} + (2a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $-b = 5$ et $2a + b = 8$

$b = -5$ et $2a + b = 8$

$b = -5$ et $2a - 5 = 8$

$b = -5$ et $a = \frac{13}{2}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\-5\end{pmatrix}$

d) Coordonnées de $\vec{u} = -4\vec{i} + 10\vec{j}$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$.

$\vec{u} = a(\vec{i} + \vec{j}) + b\vec{j}$

$\vec{u} = a\vec{i} + (a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $a = -4$ et $a + b = 10$

$a = -4$ et $-4 + b = 10$

$a = -4$ et $b = 14$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}$

Coordonnées de $\vec{u} = -4\vec{i} + 10\vec{j}$ dans la base $(2\vec{j}, \vec{j} - \vec{i})$.

$\vec{u} = -b\vec{i} + (2a + b)\vec{j}$

En identifiant les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $-b = -4$ et $2a + b = 10$

$b = 4$ et $2a + 4 = 10$

$b = 4$ et $a = 3$

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

13

1. Les points A, B et D sont non alignés donc le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2. a) A est le centre du repère donc $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Coordonnées du point E dans le repère (A, B, D).

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

$E\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Coordonnées du point F dans le repère (A, B, D)

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(3\overrightarrow{DF})$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

Comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Par suite, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$F\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$.

b) On a : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-y_A \\ y_E-y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F-y_A \\ y_F-y_A \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-0 \\ \frac{3}{4}-0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

3. On a : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} \\ 1\times\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On en découle que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$

Par conséquent, les points A, E et F alignés.

4. a) laissé au soin du lecteur.

b) $K\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

14

Coordonnées des points O, A, B, C, D et E dans chacun le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } E\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Coordonnées des points O, A, B, C, D et E dans chacun le repère $(O,\vec{v},\vec{u})$.

$$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } E\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Coordonnées des points O, A, B, C, D et E dans chacun le repère $(A,\vec{u},\vec{v})$.

$$O\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

15

1. a) Voir figure

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

2. $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}$

$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ car S est le milieu de [BC]

Et, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

3. De la question précédente, on a système suivant : $\begin{cases} \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \end{cases}$

Donc,

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

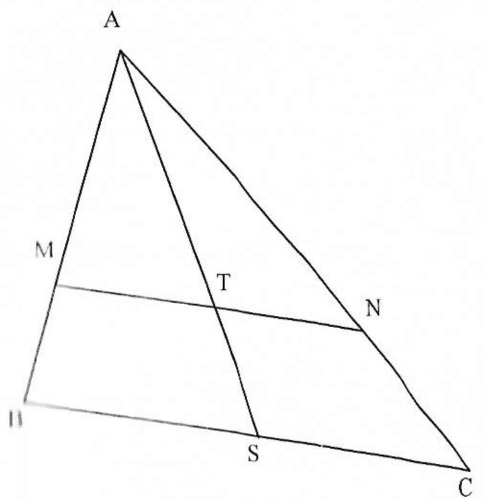
$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$= \vec{0}$$

Par conséquent, $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS}.$$

Les points A, S et T sont donc alignés.



16

1. a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 5\times 8 - 3\times 7$

$= 40 - 21$

$= 19.$

b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 - 6\times 9$

$= 8 - 54$

$= -46$

c) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -10 & 11 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= -10\times 1 - (-4)\times 11$

$= -10 + 44$

$= 34$

d) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & 25 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}$

$= (-5)\times(-10) - 2\times 25$

$= 50 - 50$

$= 0.$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix}$

2. a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

$= \frac{5}{8}\times\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{5}{12} - \frac{3}{8}$

$= \dfrac{10-9}{24}$

$= \dfrac{1}{24}.$

b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -\dfrac{7}{5} & 0 \\ \dfrac{9}{2} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix}$

$= -\dfrac{7}{5} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{9}{2} \times 0$

$= -\dfrac{7}{15}.$

c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ \dfrac{3}{34} & \dfrac{2}{17} \end{vmatrix}$

$= 6 \times \dfrac{2}{17} - \dfrac{3}{34} \times 8$

$= \dfrac{12}{17} - \dfrac{12}{17} = 0.$

d) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{6}{11} \\ \dfrac{3}{4} & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 0 - \dfrac{6}{11} \times \dfrac{3}{4} = -\dfrac{9}{22}.$

17

a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 28 = -68$

$\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires. Donc, $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires.

$(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas une base de $\mathcal{V}$.

c) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires.

$(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas une base de $\mathcal{V}$.

d) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$

$\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires.

$(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

18

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$

$\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires.

$(\vec{u},\vec{v})$ est donc une base de $\mathcal{V}$.

On a : $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} - \vec{j}. \end{cases}$

Il en résulte : $\vec{i} = \dfrac{1}{2}\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{j} = \dfrac{1}{2}\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{v}.$

Donc, $\vec{i}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

$\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires. Par conséquent,

$(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

On a : $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}. \end{cases}$

Il en résulte : $\vec{i} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\vec{j} = 2\vec{u} - \vec{v}.$

Donc, $\vec{i}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0.$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires.

$(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas une base de $\mathcal{V}$.

19

a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = x - 8$

On a : $x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8.$

Donc, $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ si $x = 8$.

Par conséquent, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires si x est égal à 8 et ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires si x est différent de 8.

b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 16.$

On a : $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4.$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires si x est élément de l'ensemble $\{-4;4\}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires si x est élément de $\mathbb{R} \setminus \{-4;4\}$.

c) $\vec{u}$ existe si et seulement si $x + 3 \neq 0$

$\vec{u}$ existe si et seulement si $x \neq -3.$

Pour x différent de -3,

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ \dfrac{1}{x+3} & x \end{vmatrix} = x - \dfrac{10}{x+3}.$

On a: $x - \dfrac{10}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -5.$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinaires si x est élément de l'ensemble $\{-5; 2\}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinaires si x est élément de $\mathbb{R} \setminus \{-5; -3; 2\}$.

20

1.a) Les points A, B et C trois points non alignés. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Par conséquent $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base.

b) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \mu\overrightarrow{AC}$ donc, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2 \\ -\mu \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \mu(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= (1-\mu)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Donc, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix}$.

2. $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = \begin{vmatrix} 2 & 1-\mu \\ -\mu & \mu \end{vmatrix} = 2\mu - (-\mu)(1-\mu)$

$= 2\mu + \mu - \mu^2$

Donc, $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = 3\mu - \mu^2$.

3. a) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont non colinéaires si

$$\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) \neq 0$$
$$3\mu - \mu^2 \neq 0$$
$$\mu(3-\mu) \neq 0$$
$$\mu \neq 0 \text{ et } \mu \neq 3.$$

Il faut que μ soit un nombre réel différent de 0 et de 3.

b) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires si

$$\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = 0$$
$$3\mu - \mu^2 = 0$$
$$\mu(3-\mu) = 0$$
$$\mu = 0 \text{ ou } \mu = 3.$$

Il faut que μ soit égal à 0 ou à 3.

4. a) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont non colinéaires si μ différent de 0 et de 3. Or μ est égal à 2. Il en découle que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont non colinéaires. Donc, le couple $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$ est une base.

b) On a : $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}. \end{cases}$

En additionnant membres à membres les deux égalités, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

Par suite, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

Donc, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. D'après la question 5b), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

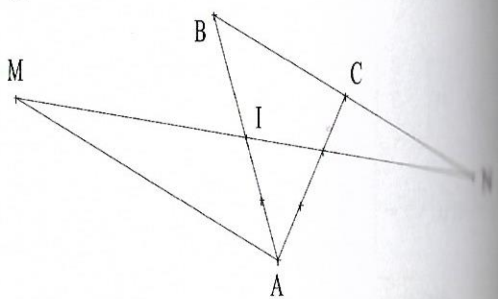
Donc, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AN}$.

On en déduit que le quadrilatère ANBM est un parallélogramme. Par conséquent les diagonales [AB] et [NM] se coupent en leur milieu. Or I est le milieu de [AB]. Donc, I appartient à la droite (NM). Il en résulte que les points I, M et N sont alignés.

6.



21

1- On a : $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'M}$

Comme C' est le milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{C'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

De plus, comme M est le milieu du segment [AA'] alors $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$.

Il s'ensuit que :

$\overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'A})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'})$

Par conséquent, $\overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'}$

Par ailleurs, $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}$

On a M milieu du segment [AB] alors

$\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

De plus, comme B' est le milieu du segment [CA] alors $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Il s'ensuit que :

$\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CA})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'C})$

Par conséquent, $\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C}$

b) Le point A' est milieu du segment [BC] donc $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C}$.

Par suite, $\overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{MB'}$.

Donc, $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{MB'}$. On conclut que M est le milieu du segment [B'C'].

2. Dans le triangle A'B'C' le point M est le milieu du segment [B'C']. et le point N est le milieu du segment [A'C']. Donc les droites (A'M) et (B'N) sont des médianes du triangle A'B'C'.
De plus G est le point d'intersection des droites (A'M) et (B'N). On en déduit que G est le centre de gravité du triangle A'B'C'. Il en résulte que: $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$.

22

Les quadrilatères MABA', MBCB' et MCAC' étant des parallélogrammes, on a: $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{CA}$.

Donc, $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

Par conséquent, $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}$.
On conclut que le point M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

23

1. Le point I est centre de gravité du triangle AGC donc, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}$. (1)

Le point J est centre de gravité du triangle ABG donc, $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JG}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}$. (2)

Le point K est centre de gravité du triangle BCG donc, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KG}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}$. (3)

A partir des résultats (1), (2) et (3), on a : que :

$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{GC}$.

2 Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}$

$=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IG}++\overrightarrow{IC}$

$=3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IG}++\overrightarrow{IC}$

Le point I est centre de gravité du triangle AGC donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Donc, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MI}$.

En particulier, on a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}$

Donc, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}$.

3. En s'inspirant de la question 2), les points J et K étant respectivement centre de gravité des triangles ABG et BCG, on a :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MJ}$ et

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MK}$.

En particulier, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GG}=3\overrightarrow{GJ}$ et

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GG}=3\overrightarrow{GK}$.

Donc, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GJ}$ (1) et

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GK}$. (2)

D'après la question 2), $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}$ (3)

En additionnant les égalités (1), (2) et (3) membre à membre, on a :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}+3\overrightarrow{GJ}+3\overrightarrow{GK}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}=3(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK})$

$2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=3(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK})$

$2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK})$

Par conséquent,

$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.

4. D'après la question précédente,

$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.

Puisque G est le centre de gravité du triangle ABC alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Donc, $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$.

On en déduit que G est le centre de gravité du triangle IJK.

24

1. a) $||\vec{u}||=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

b) $||\vec{u}||=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{225}=15$

c) $||\vec{u}||=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

d) $||\vec{u}||=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$

2. a) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{1}{5})^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$.

b) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{3}{5})^2+(-\frac{4}{5})^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$

c) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{8}{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+4}=\frac{10}{3}$

d) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{1}{6})^2+(-\frac{4}{7})^2}=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{16}{49}}$

$=\sqrt{\frac{49+36\times16}{36\times49}}=\sqrt{\frac{625}{36\times49}}=\frac{25}{42}$

3. a) $||\vec{u}||=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$.

b) $||\vec{u}||=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\sqrt{\frac{13}{3}}$.

c) $||\vec{u}||=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$.

d) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{7}{8})^2+(-\frac{3}{4})^2}=\sqrt{(\frac{49+9\times4}{64}}=\frac{\sqrt{85}}{8}$

4. a) $||\vec{u}||=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$

b) $||\vec{u}||=\sqrt{(-1)^2+(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{1+80}=9$

c) $||\vec{u}||=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{2}{16}+3}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

d) $||\vec{u}||=\sqrt{(2-\sqrt{6})^2+0^2}=\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$

$=|2-\sqrt{6}|$

On a : $4<6$ donc, $\sqrt{4}<\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}$

$2-\sqrt{6}<0$

Par conséquent, $||\vec{u}||=-(2-\sqrt{6})$

$=\sqrt{6}-2$.

25

1. Voir figure.

2. $AB=\sqrt{(3-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$;

$AB=\sqrt{13}$

$BC=\sqrt{(1-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$;

$BC=\sqrt{5}$

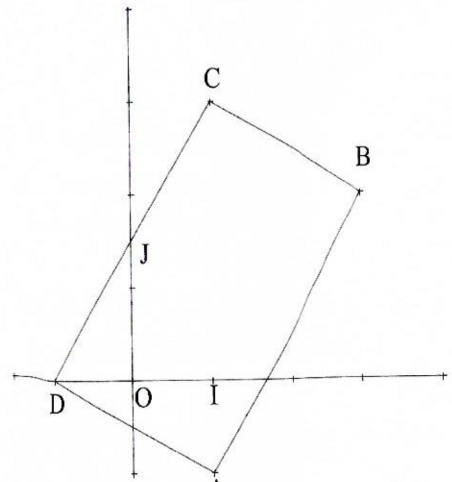
$DC=\sqrt{(-1-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$;

$DC=\sqrt{13}$

$AD=\sqrt{(-1-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

$AD=\sqrt{5}$.

3. $AB=DC$ et $BC=AD$. Donc, ABCD est un parallélogramme



26

1. Voir figure.

2. $OB=\sqrt{(0+1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$;

$OB=2$

$OC = \sqrt{(0+1)^2+(0+\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$;

$OC = 2$

On a : $OB = OC = 2$. Par suite, B et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$.

3. a) B est le point de (C) dont l'abscisse -1 et d'ordonnée positive. Et, C est le point de (C) d'abscisse -1 et d'ordonnée négative.

Voir figure.

b) $AB = \sqrt{(-1-2)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$AB = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{(-1-2)^2+(-\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$;

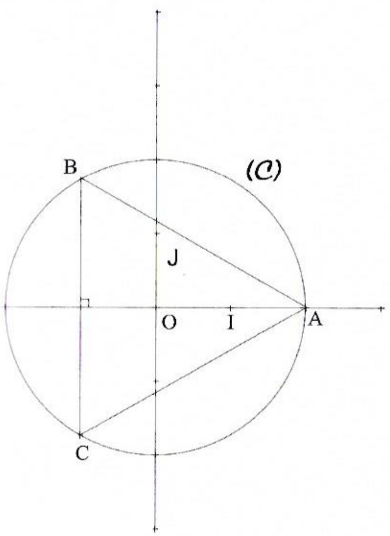
$AC = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(-1+1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$BC = 2\sqrt{3}$

$AB = DC$ et $BC = AD$.

4. On a : $AB = AC = BC$ par conséquent le triangle ABC est équilatéral.



27

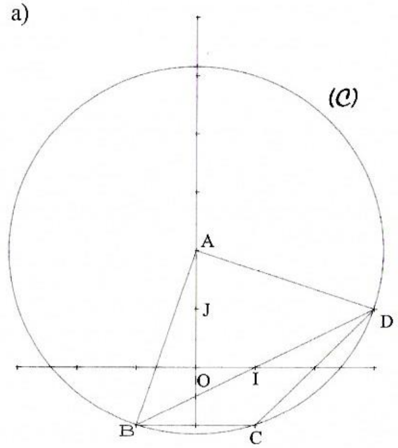
1. Voir figure.2.

$BC = \sqrt{(1+1)^2+(-1+1)^2} = \sqrt{4} = 2$; $BC = 2$

$BD = \sqrt{(3+1)^2+(1+1)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $BD = 2\sqrt{5}$

$DC = \sqrt{(3-1)^2+(1+1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $DC = 2\sqrt{2}$

3. Voir figure.
4. a)



$AB = \sqrt{(-1-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{10}$; $AB = \sqrt{10}$

$AD = \sqrt{(3-0)^2+(1-2)^2} = \sqrt{10}$; $AD = \sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(3+1)^2+(1+1)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $BD = 2\sqrt{5}$

De plus, $AB^2 + AD^2 = 10 + 10 = 20$.

Donc, $AB^2 + AD^2 = BD^2$.

D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.Or, $AD = BD$.

On conclut que le triangle ABD est rectangle isocèle en A.

b) $AC = \sqrt{(1-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{10}$

Puisque $AB = AC = AD$ alors A est le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

28

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.

Puisque I est le milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Il s'ensuit que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

2. $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{AB}\|$

$\Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MI}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$

$\Leftrightarrow IM = AB$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre I et de rayon AB.

$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MB}\|$

$\Leftrightarrow 2MI = 2MB$

$\Leftrightarrow MI = MB$.

$(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment [IB].

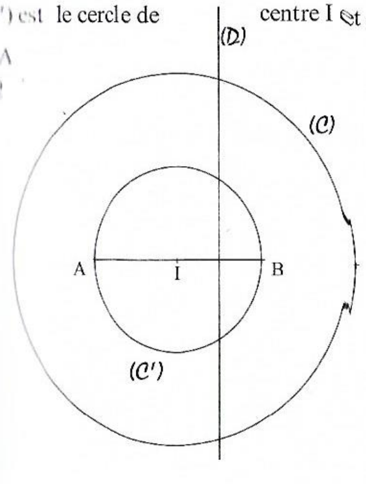
$M \in (\mathcal{C}') \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

$\Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$

$\Leftrightarrow 2MI = BA$

$\Leftrightarrow MI = \frac{BA}{2}$.

$(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{BA}{2}$



29

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$

$+ \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

Le point G étant le centre de gravité du triangle ABC alors, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Il s'ensuit que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

2. $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AB$

$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = AB$

$\Leftrightarrow MG = \frac{AB}{3}$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{3}$.

On note J le milieu du segment [AC]

$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$

$\Leftrightarrow 2(3MG) = 3(2MJ)$

$\Leftrightarrow MG = MJ$

$(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment [GJ].

Soit G' le centre de gravité du triangle ABG.

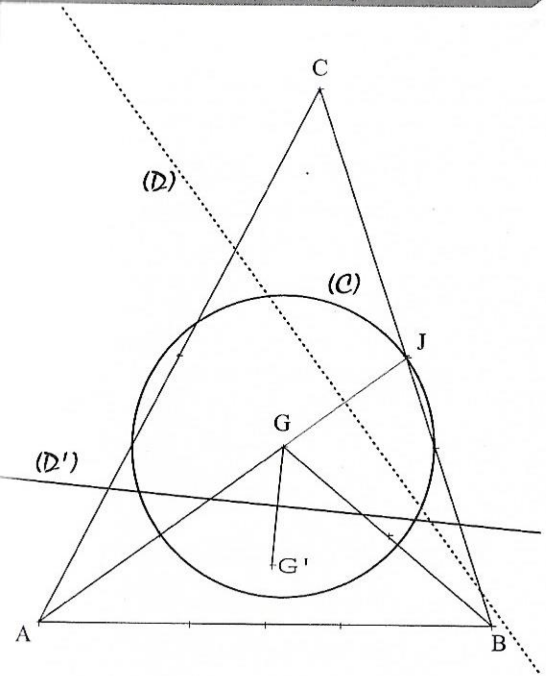
D'après la question 1, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG'}$.

Par conséquent, $M \in (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MG'}\|$

$\Leftrightarrow 3MG = 3MG'$

$\Leftrightarrow MG = MG'$.

$(\mathcal{D}')$ est la médiatrice du segment [GG'].



30

1. a) $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc, $2\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA}.$$

Par conséquent, G est le point tel que :
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA}$.

b) Voir figure.

2. $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$$= 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB}$$

$$= \overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}.$$

On a : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc, $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG}$.

Il s'ensuit que : $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 5$

$$\Leftrightarrow MG = 5.$$

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon 5.

31

1. a) On a : $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$3(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{GB} + 2(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Il en résulte que G est l'unique point tel que :

$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Voir figure.

2. a) $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} =$

$= 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB} + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

$= 4\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}$.

Comme $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

alors, $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

b) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$

$$= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$

Donc, $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

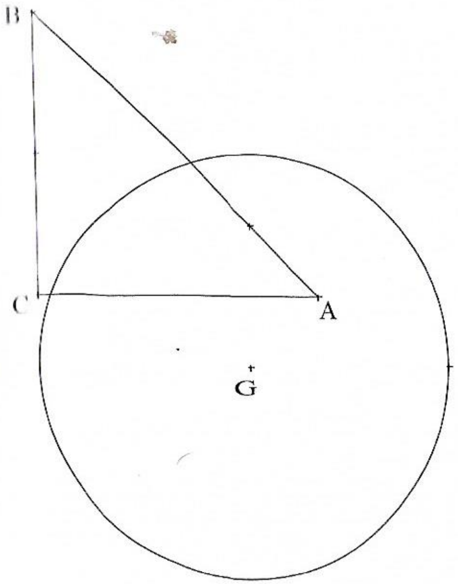
3. $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\|$

$$\Leftrightarrow 4MG = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\|$$

$$\Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\|.$$

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon

$\frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\|$.



32

1. Voir figure.

2. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-1-1\\-2-0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$. On conclut que le quadrilatère ABCI est un parallélogramme.

3. a) $\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$

$\overrightarrow{HA} - 2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Donc, H est le point tel que : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) $x_{\overrightarrow{AH}} = x_{\overrightarrow{BI}} + \frac{1}{2}x_{\overrightarrow{AC}}$

$$x_H - x_A = x_I - x_B + \frac{1}{2}(x_C - x_A)$$

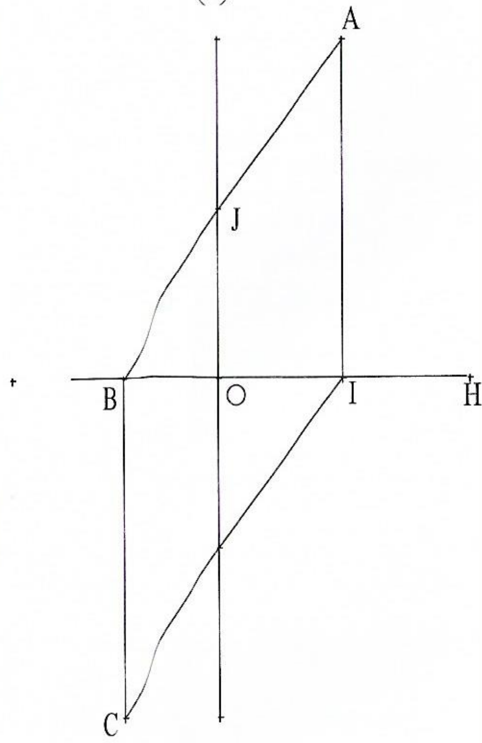
$$x_H = x_I - x_B + \frac{1}{2}(x_C - x_A) + x_A$$

$$y_H = y_I - y_B + \frac{1}{2}(y_C - x_A) + y_A$$

Par suite, $x_H = 1 + 1 + \frac{1}{2}(-1-1) + 1 = 2$

$$y_H = 0 - 0 + \frac{1}{2}(-2-2) + 2 = 0$$

Il en résulte que : $H\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.



33

1. $\det(\vec u;\vec v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4\times 1 = -6.$

$\det(\vec u;\vec v) \neq 0.$

Donc, les vecteurs $\vec u$ et $\vec v$ ne sont pas colinéaires. Il en résulte que le couple $(\vec u;\vec v)$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. On a : $\begin{cases} \vec u = \vec i + 4\vec j \\ \vec v = \vec i - 2\vec j. \end{cases}$

Il en découle que : $\vec u - \vec v = 6\vec j$; $\vec j = \frac{1}{6}\vec u - \frac{1}{6}\vec v.$

On a : $\begin{cases} \vec u = \vec i + 4\vec j \\ 2\vec v = 2\vec i - 4\vec j \end{cases}$

Par suite, $\vec u + 2\vec v = 3\vec i$; $\vec i = \frac{1}{3}\vec u + \frac{2}{3}\vec v.$

On conclut que : $\vec i = \frac{1}{3}\vec u + \frac{2}{3}\vec v$ et $\vec j = \frac{1}{6}\vec u - \frac{1}{6}\vec v.$

3. a) $\overrightarrow{OM} = x\vec i + y\vec j = x'\vec u + y'\vec v$

$x(\frac{1}{3}\vec u + \frac{2}{3}\vec v) + y(\frac{1}{6}\vec u - \frac{1}{6}\vec v) = x'\vec u + y'\vec v$

$x'\vec u + y'\vec v = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y)\vec u + (\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y)\vec v$

Par conséquent, $x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y$ et $y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y.$

b) $x'_A = \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{6}y_A$

$= \frac{1}{3}\times(-3) + \frac{1}{6}\times 9 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2};$

$y'_A = \frac{2}{3}x_A - \frac{1}{6}y_A$

$= \frac{2}{3}\times(-3) - \frac{1}{6}\times 9 = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

Donc, $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ dans le repère $(O,\vec u;\vec v)$.

34

1. $\det(\vec u;\vec v) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0\times 2 = 1$

$\det(\vec u;\vec v) \neq 0.$

Donc, les vecteurs $\vec u$ et ne sont pas colinéaires. Il en résulte que le couple $(\vec u;\vec v)$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. $\vec u(1;0)$ et $\vec u(2;1)$.

On a le système : $\begin{cases} \vec u = \vec i \\ \vec v = 2\vec i + \vec j. \end{cases}$

Donc, $\vec i = \vec u$ et $\vec j = -2\vec u + \vec v.$

3. A est le centre du repère

$(A,\vec u;\vec v)$. Donc, $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dans le repère $(A,\vec u;\vec v)$.

On a : $\overrightarrow{AB} = -2\vec i + 3\vec j$

Il s'ensuit que : $(A,\vec u;\vec v)$.

$\overrightarrow{AB} = -2\vec u + 3(-2\vec u + \vec v) = -8\vec u + 3\vec v;$

$\overrightarrow{AB} = -8\vec u + 3\vec v.$

On en déduit que : $B\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ dans le repère

$(A,\vec u;\vec v)$.

Enfin, $\overrightarrow{AB} = -2\vec i + 3\vec j$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -2\vec i + 3\vec j$

$\overrightarrow{AO} + 2\vec i + \vec j = -2\vec i + 3\vec j$

$\overrightarrow{AO}$ [illegible]

$\overrightarrow{AO}$ [illegible] $(-2\vec u + \vec v) = -7\vec u + 2\vec v;$

$\overrightarrow{AO}$ [illegible]

Il en [illegible] que : $O\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$ dans le repère

(A,[illegible])

35

$\|\vec s\| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$

$\|\vec s\| = 1;$

Le vecteur $\vec s$ est unitare.

$\|\vec t\| = \sqrt{(\frac{4}{9})^2+(-\frac{8}{9})^2} = \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{80}{81}};$

$\|\vec t\| \neq 1;$

Le vecteur $\vec t$ n'est pas unitaire.

$\|\vec u\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$

$\|\vec u\| = 1;$

Le vecteur $\vec u$ est unitaire.

$\|\vec v\| = \sqrt{(-\frac{12}{13})^2+(-\frac{5}{13})^2} = \sqrt{\frac{144}{169}+\frac{25}{169}}$

$= \sqrt{\frac{169}{169}} = \sqrt{1} = 1$

$\|\vec v\| = 1;$

Le vecteur $\vec v$ est unitaire.

$\|\vec w\| = \sqrt{(\frac{7}{11})^2+(-\frac{9}{11})^2} = \sqrt{\frac{49}{121}+\frac{81}{121}} = \sqrt{\frac{130}{121}};$

$\|\vec w\| \neq 1;$

Le vecteur $\vec w$ n'est pas unitaire.

36

a) $\|\vec u\| = \sqrt{(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4})^2+(\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4})^2}$

$= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}+\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = 1;$

$\|\vec u\| = 1.$

Le vecteur $\vec u$ est donc unitaire.

b) $\|\vec u\| = \sqrt{(\frac{1-\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt{1+2\sqrt2}}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{1-2\sqrt2+2}{4}+\frac{1+2\sqrt2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1;$

$\|\vec u\| = 1.$

Le vecteur $\vec u$ est donc unitaire.

c) $\|\vec u\| = \sqrt{(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{8}})^2+(\frac{\sqrt5+1}{4})^2}$

$= \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{8}+\frac{5+2\sqrt5+1}{16}}$

$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt5+6+2\sqrt5}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1.$

$\|\vec u\| = 1.$

Le vecteur $\vec u$ est donc unitaire.

37

a) $\|\vec v\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(-\frac{4}{5})^2+x^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{16}{25} + x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{25}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$ ou $x = \frac{3}{5}.$

Comme x est positif, alors $x = \frac{3}{5}$.

b) $||\vec{v}|| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + x^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} + x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Or x est négatif donc, $x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

c) $||\vec{v}|| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (-\frac{\sqrt{7}}{4})^2} = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{7}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ ou } x = -\frac{3}{4}.$$

x est positis. Donc, $x = -\frac{3}{4}$.

1

$$y = \frac{\pi}{180} x$$

Mesure en degré x	0	30	45	90	120	150	180
Mesure en radian y	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2

$$x = \frac{180}{\pi} y$$

Mesure en radian y	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$
Mesure en degré x	90	36	30	20	22,5	15

3

Mesure en radian	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{36}$	0,0117	$\frac{\pi}{10}$	1	0,039	3,4
Mesure en degré	67,5	35	1	18	57,29	$\frac{7}{\pi}$	194,8

4

$mes\widehat{IOA} = \pi$; $mes\widehat{IOC} = \frac{\pi}{4}$; $mes\widehat{JOA} = \frac{\pi}{2}$; $mes\widehat{AOC} = \frac{3\pi}{4}$ et $mes\widehat{COB} = \frac{3\pi}{4}$.

5

$mes\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$; $mes\widehat{AOE} = \frac{\pi}{3}$; $mes\widehat{EOD} = \frac{\pi}{6}$; $mes\widehat{AOF} = \frac{3\pi}{4}$; $mes\widehat{COF} = \frac{\pi}{4}$ et $mes\widehat{EOB} = \frac{2\pi}{3}$.

6

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est : $2 \times \frac{3\pi}{4}$ c'est à dire $\frac{3\pi}{2}$.

7

Soit r le rayon de ce cercle. On a : $r \times mes\widehat{EOF} = \frac{\pi}{7}$. Donc, $r \times \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{7}$.

On en déduit que le rayon est 2,57 cm.

8

$mes\widehat{AOF} = \frac{\pi}{4}$ et le rayon du cercle est 4 donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AF}$ est $\frac{\pi}{4} \times 4$, soit π.

Le triangle EOD est équilatéral donc, $mes\widehat{EOD} = \frac{\pi}{3}$. Il en découle que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{ED}$ est $\frac{4\pi}{3}$.

On a : $mes\widehat{EOB} = mes\widehat{EOD} - mes\widehat{BOD} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Par conséquent la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EB}$ est $\frac{\pi}{6} \times 4$, soit $\frac{2\pi}{3}$.

Les arcs $\overset{\frown}{EB}$ et $\overset{\frown}{CK}$ sont de même longueur. Il en découle que la longueur de $\overset{\frown}{CK}$ est $\frac{2\pi}{3}$.

On a : $mes\widehat{KOF} = mes\widehat{KOA} + mes\widehat{AOF} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$.

Donc, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{FK}$ est $\frac{7\pi}{12} \times 4$, soit $\frac{7\pi}{3}$.

On a : $mes\widehat{BOF} = mes\widehat{BOD} + mes\widehat{DOF} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Il en résulte que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BF}$ est 3π.

9

$\widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})}$ sont orientés dans le même sens. De plus les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{CID}$ sont opposés par le sommet. Donc, $mes\widehat{AIB} = mes\widehat{CID}$. Par suite, les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})}$ sont égaux.

$\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI})}$ et sont orientés dans le même sens. De plus les angles $\widehat{DCI}$ et $\widehat{CAB}$ sont alternes- internes définis par les droites parallèles (AB) et (CD) et leur sécante commun (AC). Donc, $mes\widehat{DCI} = mes\widehat{CAB}$. On en déduit que les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ sont égaux.

10

Les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$ sont orientés dans le même sens. De plus les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DAC}$ interceptent un même arc. Il s'ensuit que $mes\widehat{DBC} = mes\widehat{DAC}$. On conclut que $\widehat{(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$ sont égaux.

11

$\widehat{(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NM})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MT})}$ sont de même sens ; et les angles inscrits $\widehat{PNM}$ et $\widehat{PMT}$ interceptant un même arc. Ce qui signifie que $\widehat{PNM}$ et $\widehat{PMT}$ sont de même mesure. Par conséquent $\widehat{(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NM})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MT})}$ sont égaux.

12

$\widehat{(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{ML},\overrightarrow{MK})}$ sont orientés dans le même sens. D'autre part, $\widehat{FEM}$ et $\widehat{LKM}$ sont correspondant définis par les parallèles (EF) et (KL) et leur sécante commune (EM). Donc, $mes\widehat{FEM} = mes\widehat{LKM}$ (1).

Enfin le triangle KLM est isocèle en L. Il en résulte que $mes\widehat{LKM} = mes\widehat{LMK}$ (2). Des égalités (1) et (2), on a : $mes\widehat{FEM} = mes\widehat{LMK}$.

Comme les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{ML},\overrightarrow{MK})}$ sont de même sens et que ; $mes\widehat{FEM} = mes\widehat{LMK}$, alors $\widehat{(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{ML},\overrightarrow{MK})}$ sont égaux.

13

Le quadrilatère ABCD est un carré donc, les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens. Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}}) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de sens contraires. Donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AB}}) = \pi$.

$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ est de sens direct. Il s'ensuit que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = mes\widehat{CBA}$.

Puisque ABCD étant un carré alors $mes\widehat{CBA} = \frac{\pi}{2}$. Par suite, $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{2}$.

$(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ est de sens indirect donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) = -mes\widehat{BCD}$.

Comme ABCD est un carré, alors $mes\widehat{BCD} = \frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) = -\frac{\pi}{2}$.

$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est de sens direct. Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = mes\widehat{ACB}$.

ABCD étant un carré donc, $mes\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$.

14

$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$ est de sens direct. Par suite, $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = mes\widehat{ADB}$.

Or ABCD est un carré donc, $mes\widehat{ADB} = \frac{\pi}{4}$. Donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens. Il en découle que $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OB}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires et de même sens $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CA}}) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DO}$ sont respectivement colinéaires de même sens que $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$. Il en découle que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DO}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

Il en résulte que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DO}}) = \frac{\pi}{4}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont respectivement colinéaires de même sens que $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OA}$ donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{CA}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}})$ est de sens direct. Il s'ensuit que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}) = mes\widehat{AOD}$.

Puisque ABCD est un carré de centre O alors $mes\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{2}$. On conclut que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{CA}}) = \frac{\pi}{2}$.

15

Soit F un point tel que les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires de même sens. Il en découle que :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$ est de sens indirect donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}}) = -mes\widehat{FCB}$

On a : $mes\widehat{ACB} + mes\widehat{BCF} = mes\widehat{ACF}$.

$$\frac{\pi}{9} + mes\widehat{BCF} = \pi;\quad mes\widehat{BCF} = \frac{8\pi}{9}$$

Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{8\pi}{9}$. On en déduit que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{8\pi}{9}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement de sens contraires que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{8\pi}{9}$. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}}) = -\frac{8\pi}{9}$.

Enfin, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont respectivement de sens contraires que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Par suite, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{9}$.

16

1. $(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}) = \text{mes}\widehat{BDC}$.

$\widehat{BDC}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$. Par suite, $\text{mes}\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOC}$

Comme ABCDEF est un hexagone régulier alors $\text{mes}\widehat{BOC} = \frac{\pi}{3}$.

On en déduit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{6}$. $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}})$ est de sens indirect.

Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = -\text{mes}\widehat{DAB}$.

Or $\text{mes}\widehat{DAB} = \text{mes}\widehat{OAB} = \frac{\pi}{3}$. On conclut que : $\text{mes}\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{3}$.

$(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FE}})$ est de sens direct donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FE}}) = \text{mes}\widehat{AFE}$.

Or $\text{mes}\widehat{AFE} = \text{mes}\widehat{AFO} + \text{mes}\widehat{OFE} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FE}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires et de même sens. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FA}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}})$ est de sens indirect. Par conséquent, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}) = \text{mes}\widehat{AFC}$.

Or $\text{mes}\widehat{AFC} = \frac{\pi}{3}$. Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}) = \frac{\pi}{3}$. On conclut que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FA}}) = \frac{\pi}{3}$.

2. B appartient au segment [CG] donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires et de même sens.

Il s'ensuit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$.

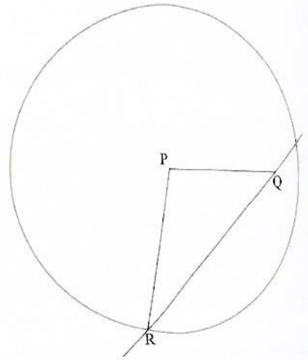
L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}}) = \text{mes}\widehat{FCB}$.

Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, $\text{mes}\widehat{CFG} = \text{mes}\widehat{AFC} = \frac{\pi}{3}$.

Comme dans le triangle CFG, on a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\text{mes}\widehat{CFG} = \frac{\pi}{3}$ alors le triangle CFG est équilatéral de sens direct.

17



On place des points P et Q tels que : PQ = 4.

Il reste à construire R.

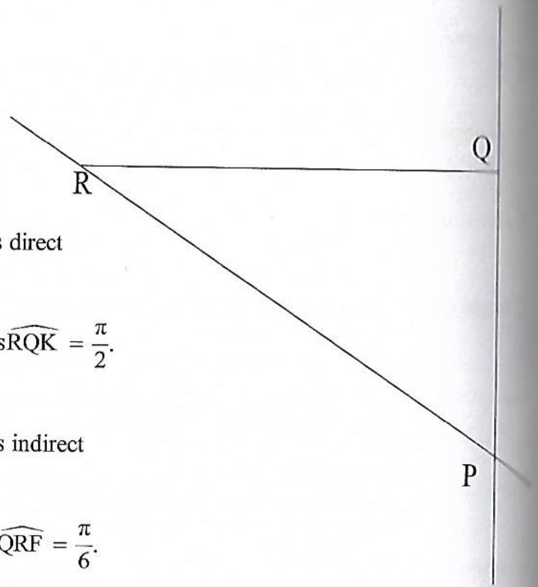
PR = 5 signifie que R appartient au cercle de centre P et de rayon 5.

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}}) = \frac{\pi}{4}$ signifie que $(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}})$ est de sens direct et R appartient à la demi-droite [QJ) telle que $\text{mes}\widehat{PQJ} = \frac{\pi}{4}$.

18

On place des points R et Q tels que : $RQ = 7$.

Il reste à construire P.



$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}}) = \frac{\pi}{2}$ signifie que $(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}})$ est de sens direct

et P appartient à la demi –droite [QK) telle que : $\text{mes}\widehat{RQK} = \frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RP}}) = -\frac{\pi}{6}$ signifie que $(\widehat{\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RP}})$ est de sens indirect

et P appartient à la demi –droite [RF) telle que : $\text{mes}\widehat{QRF} = \frac{\pi}{6}$.

19

Voir la figure ci –dessous pour les différentes constructions.

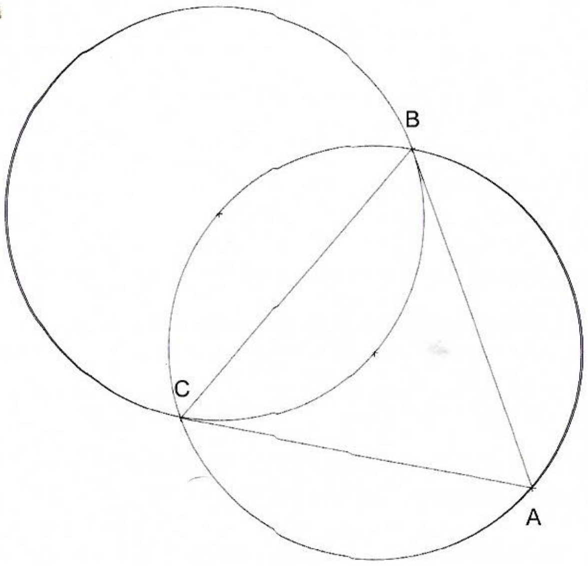
a) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) = \frac{\pi}{3}$ signifie que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}})$ est de sens direct et $\text{mes}\widehat{BMC} = \frac{\pi}{3}$.

Considérons le cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC. On a : $\text{mes}\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est de sens direct et A appartient à l'arc $\breve{BC}$ On en déduit que (Γ) est l'arc $\breve{BC}$ privé des points B et C.

b) La symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé. Considérons la symétrie orthogonale d'axe (BC). L'ensemble (Γ') est le symétrique de l'ensemble (Γ) par rapport (BC).

c) Soit E un point de l'arc $\widehat{BC}$. Donc, $\text{mes}\widehat{CEB} = \pi - \text{mes}\widehat{BAC} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. De plus $(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC}})$ est de sens indirect. On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC}}) = -\text{mes}\widehat{CEB} = -\frac{2\pi}{3}$.

Comme la symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé alors (Ψ) est l'image de l'arc $\widehat{BC}$ privé des points B et C par la symétrie orthogonale d'axe (BC).



20

α appartient à $]0;\pi[$. Donc, $(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}})$ est orienté dans le sens direct.

Soit T un point tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ET},\overrightarrow{EF}}) = \alpha$.

La perpendiculaire à la droite (ET) et la médiatrice du segment [EF] se coupent en un point O.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par les points E et F.

Considérons α appartenant à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$ et soit K un point de l'arc $\breve{EF}$ privé des points E et F.

Les angles $\widehat{TEF}$ et $\widehat{EKF}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$ interceptant le même arc $\widehat{EF}$.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KF}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KF}}) = \text{mes}\widehat{EKF}$.

Il s'ensuit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KF}}) = \alpha$.

On conclut que l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \alpha$ est l'arc $\breve{EF}$ privé des point E et F.

Considérons α appartenant à $]\frac{\pi}{2};\pi[$ et soit J un point $\widehat{EF}$ de l'arc privé des points E et F.

Les angles $\widehat{TEF}$ et $\widehat{EJF}$ sont deux angles inscrits dans le cercle interceptant le même arc EF

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JF}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JF}}) = \text{mes}\widehat{EJF}$.

Il s'ensuit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JF}}) = \alpha$.

On conclut que l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \alpha$ est l'arc $\overset{\frown}{EF}$. privé des points E et F.

Lorsque α est égal à $\frac{\pi}{2}$, soit$(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [EF]. Soit T' un point de la tangente en E à $(\mathscr{C})$ tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ET'}}) = \frac{\pi}{2}$, Donc l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \frac{\pi}{2}$ est le demi –cercle de diamètre [EF] privé de E et F, contenu dans le demi – plan de frontière (EF) contenant le point T'

2. Lorsque α est égal à $\frac{\pi}{2}$, on a : $\alpha - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

On déduit de la question 1) que l'ensemble des points tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \frac{\pi}{2}$ est le demi –cercle de diamètre [EF] privé de E et F, contenu dans le demi – plan de frontière (EF) ne contenant pas T'

D'autre part, α appartient à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$ équivaut à $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

équivaut à $-\pi < \alpha - \pi < \frac{\pi}{2} - \pi$

équivaut à $\alpha - \pi$ appartient à $]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$.

Il découle de la question 1) que l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \alpha$ est le symétrique de l'arc $\overset{\frown}{EF}$ de l'arc privé des points E et F.

Enfin, α appartient à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$ équivaut à $\alpha - \pi$ appartient à $]-\frac{\pi}{2};0[$.

Il résulte de la question 1) que l'ensemble des points M tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF}}) = \alpha$ est le symétrique de l'arc $\overset{\smile}{EF}$ de l'arc privé des points E et F.

21

a) $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$ est l'opposé de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$. On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = -\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{\pi}{4}$.

Il en découle que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$.

$(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}})$ est orienté dans le sens indirect. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}) = -\text{mes}\widehat{DAC}$.

La droite (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Par conséquent, $\text{mes}\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \times = \frac{\pi}{8}$.

Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{8}$.

Soit K un point tel que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{DA}$ soient colinéaires et de même sens. Il en découle que :

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}) = \text{mes}\widehat{KAC}$.

Or $\text{mes}\widehat{KAC} = \text{mes}\widehat{KAD} - \text{mes}\widehat{DAC}$

$\text{mes}\widehat{KAC} = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$

On conclut que : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}) = \frac{7\pi}{8}$. Par conséquent, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC}}) = \frac{7\pi}{8}$.

Le quadrilatère ABCD est un losange donc, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens opposés. Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}}) = \pi$.

b) $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$ est orienté dans le sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = \text{mes}\widehat{ADB}$.

Le triangle ADB est isocèle en A. On en déduit que : $2\text{mes}\widehat{ADB} + \text{mes}\widehat{DAB} = \pi$

$$\text{mes}\widehat{ADB} = \frac{\pi - \text{mes}\widehat{DAB}}{2}$$

$$\text{mes}\widehat{ADB} = \frac{3\pi}{8}.$$

On conclut que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = \frac{3\pi}{8}$.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}})$ est orienté dans le sens indirect. Il s'ensuit que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}})$ = mes$\widehat{CDA}$.

La droite (DB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CDA}$. Donc, mes$\widehat{CDA}$ = 2mes$\widehat{ADB} = 2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$.

Par suite, Mes$(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) = \frac{3\pi}{4}$.

Le quadrilatère ABCD est un losange donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de même sens.

Il en résulte que : Mes $= (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}) = 0$.

Soient P et Q des points tels que les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ soient respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$. Il s'ensuit que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}})$ =Mes$(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ}})$.

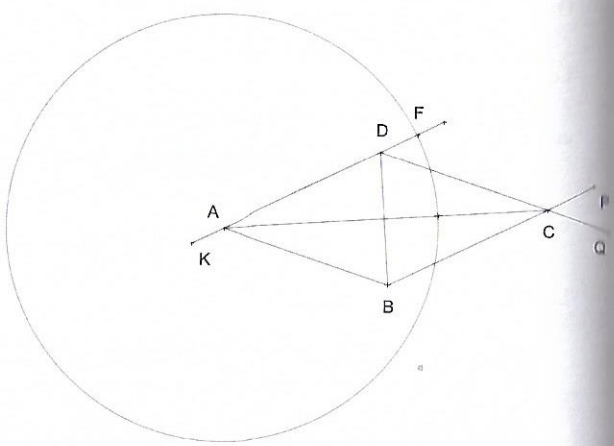
$(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ}})$ est de sens indirect. Donc, Mes$(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ}}) = -mes\widehat{QPC}$.

Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{QPC}$ sont opposés par le sommet donc ces angles ont la même mesure.

De plus comme le quadrilatère ABCD est un losange alors, mes$\widehat{BCD}$ = mes$\widehat{DAC} = \frac{\pi}{4}$.

Il s'ensuit que : mes$\widehat{QPC} = \frac{\pi}{4}$.

On conclut que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ}}) = -\frac{\pi}{4}$.



2. AF $= \frac{2}{3}$AC signifie que F appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{2}{3}$AC.

Mes$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) = \frac{\pi}{8}$ signifie que $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}})$ est de sens direct et F appartient à la demi-droite [AN) telle que : mes$\widehat{NAC} = \frac{\pi}{8}$.

22

1. Soit F le point d'intersection des droites (IK) et (JB). Les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JB}$. Donc, Mes$(\widehat{\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JB}})$ = Mes$(\widehat{\overrightarrow{FK},\overrightarrow{FB}})$.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{FK},\overrightarrow{FB}})$ est de sens indirect. Donc, Mes$(\widehat{\overrightarrow{FK},\overrightarrow{FB}}) = -mes\widehat{KFB}$.

Dans le triangle FBK, on a : mes$\widehat{KFB}$ + mes$\widehat{FBK}$ + mes$\widehat{BKF} = \pi$

$$\text{mes}\widehat{KFB} = \pi - (\text{mes}\widehat{FBK} + \text{mes}\widehat{BKF}).$$

Les angles $\widehat{KFJ}$ et $\widehat{JKB}$ sont adjacents. Par conséquent, mes$\widehat{BKF}$ = mes$\widehat{FKJ}$ + mes$\widehat{JKB}$.

Le triangle KJB est équilatéral donc, mes$\widehat{JKB} = \frac{\pi}{3}$.

De plus, mes$\widehat{FKJ}$ = mes$\widehat{IKJ}$.

Comme le triangle IJK est rectangle isocèle en I, alors mes$\widehat{FKJ}$ = mes$\widehat{IKJ} = \frac{\pi}{4}$.

On conclut que : mes$\widehat{BKF} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$ (1).

Or mes$\widehat{FBK}$ = mes$\widehat{JBK} = \frac{\pi}{3}$ (2).

Les égalités (1) et (2) conduisent à mes$\widehat{KFB} = \pi - (\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{12}) = \pi - \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.

On conclut que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{FK},\overrightarrow{FB}}) = -\frac{\pi}{12}$. On en déduit que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JB}}) = -\frac{\pi}{12}$.

Répondons autrement à la question 1.

Soit D un point tel que les vecteurs $\overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{IK}$ soient colinéaires et de même sens.

Il s'ensuit que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JB}})$ =Mes$(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}})$.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}})$ est de sens indirect. Donc, Mes$(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}}) = -mes\widehat{JDB}$.

Les angles $\widehat{DJK}$ et $\widehat{IKJ}$ sont alternes-internes définis par les droites parallèles (IK) et (JD) et leur sécante commune (JK). Il en découle que : mes$\widehat{DJK}$ =mes$\widehat{IKJ}$.

Puisque le triangle IJK est rectangle isocèle en I alors, $\text{mes}\widehat{IKJ} = \frac{\pi}{4}$.

Il s'ensuit que : $\text{mes}\widehat{DJK} = \frac{\pi}{4}$.

On a : $\text{mes}\widehat{DJK} + \text{mes}\widehat{DJB} = \text{mes}\widehat{KJB}$. Il en découle que :

$\text{mes}\widehat{DJK} = \frac{\pi}{12}$. Par suite, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}}) = -\frac{\pi}{12}$. On conclut que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{JB}}) = -\frac{\pi}{12}$.

2. $(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{IK}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{JB}})$ sont opposées. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{IK}}) = -\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{JB}}) = \frac{\pi}{12}$.

On en déduit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{IK}}) = \frac{\pi}{12}$.

Enfin les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont respectivement opposés aux vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JB}$.

Il en résulte que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{BJ}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{JB}}) = -\frac{\pi}{12}$

Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{BJ}}) = -\frac{\pi}{12}$.

23

1. Dans le triangle ABC, les points J et K sont respectivement milieux des segments [AC] et [AB].

Donc, d'après la propriété de la droite des milieux, les droites (BC) et (JK) sont parallèles. Or I appartient à (BC). Par conséquent les droites (CI) et (KJ) sont parallèles.

De même, les points K et I sont milieux respectifs des segments [AB] et [BC] donc, d'après la propriété de la droite des milieux, les droites (AC) et (KI) sont parallèles. Or J appartient à (AC) par suite, les droites (JC) et (KI) sont parallèles.

Comme (CI)//(KJ) et ((JK)//(KI) alors le quadrilatère JKIC est un parallélogramme.

D'autre part, I appartient au segment [BC] et K appartient au segment [AB] donc,

$\text{mes}\widehat{KBI} = \text{mes}\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ (1).

De plus, K milieu de [AB] et I milieu de [AC] implique que : $BK = \frac{1}{2}BA$ et $BI = \frac{1}{2}BC$.

Puisque ABC est un triangle équilatéral, on a : BA = BC.

Par suite, BK = BI (2).

De (1) et (2), on déduit que le triangle KIB est équilatéral.

2. Le triangle ABC est équilatéral de sens direct. Donc, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est de sens direct et $\text{mes}\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

Par suite, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \text{mes}\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$. On conclut que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Puisque JKIC est un parallélogramme alors les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de mêmes sens. Il s'ensuit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KI}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$ On conclut que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KI}}) = \frac{\pi}{3}$.

Le quadrilatère JKIC étant un parallélogramme donc les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et de sens opposés. De plus, le point I appartient au segment [BC] par conséquent, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens opposés. On en déduit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{JK}}) = \pi$.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}})$ est de sens indirect. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}}) = \text{mes}\widehat{CIK}$.

On a : $\text{mes}\widehat{CIK} + \text{mes}\widehat{KIB} = \pi$.

$$\text{mes}\widehat{CIK} = \frac{2\pi}{3}.$$

Il s'ensuit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Soit R un point tel que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IR}$ soient colinéaires et de même sens.

Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AI}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IR}})$. De plus les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires et de mêmes sens, on a :

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AI}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IR}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IR}})$.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IR}})$ est de sens indirect donc, $\text{Mes}\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IR}} = -\text{mes}\widehat{RIC}$.

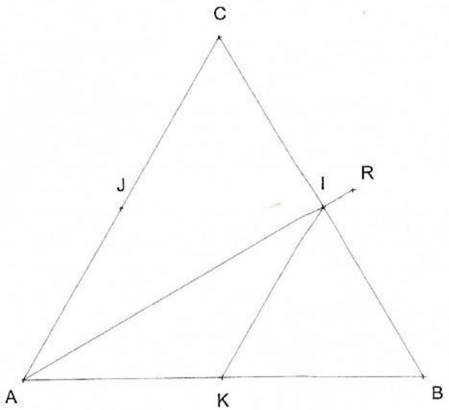
Le triangle ABC est équilatéral et I est le milieu de [BC]. Il en découle que la droite (AI) est bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$. Par conséquent, $\text{mes}\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Dans le triangle AIB, on a : $\text{mes}\widehat{AIB} + \text{mes}\widehat{IBA} + \text{mes}\widehat{IAB} = \pi$.

$\text{mes}\widehat{AIB} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$. $\text{mes}\widehat{AIB} = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{RIC}$ sont opposés par le sommet. Donc, $\text{mes}\widehat{RIC} = \text{mes}\widehat{AIB} = \frac{\pi}{2}$.

On conclut que : $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IR})} = -\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que : $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AI})} = -\frac{\pi}{2}$.



24

1. $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$ si et seulement si $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

si et seulement si $\text{mes}\widehat{ABC} = \text{mes}\widehat{ACB}$

si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A.

Par conséquent, triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

2. $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ si et seulement si $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$

si et seulement si $\text{mes}\widehat{ABC} = \text{mes}\widehat{ACB} = \text{mes}\widehat{CAB}$

si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

Donc, ABC est équilatéral si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.

25

1. Le triangle PQR étant de sens direct, on a :

$\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} = \text{mes}\widehat{QPR}$; $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} = \text{mes}\widehat{PQR}$ et $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = \text{mes}\widehat{PRQ}$.

Par suite, $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = \text{mes}\widehat{QPR} + \text{mes}\widehat{PQR} + \text{mes}\widehat{PRQ}$

De plus, dans le triangle PQR, on a : $\text{mes}\widehat{QPR} + \text{mes}\widehat{PQR} + \text{mes}\widehat{PRQ} = \pi$.

On en déduit que : $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = \pi$.

2. Le triangle PQR étant de sens indirect, on a :

$\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} = -\text{mes}\widehat{QPR}$; $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} = -\text{mes}\widehat{PQR}$ et $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = -\text{mes}\widehat{PRQ}$.

Par suite, $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = -\text{mes}\widehat{QPR} - \text{mes}\widehat{PQR} - \text{mes}\widehat{PRQ}$

$= -(\text{mes}\widehat{QPR} + \text{mes}\widehat{PQR} + \text{mes}\widehat{PRQ})$

Dans le triangle PQR, on a : $\text{mes}\widehat{QPR} + \text{mes}\widehat{PQR} + \text{mes}\widehat{PRQ} = \pi$.

Donc, $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})} + \text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = -\pi$.

26

S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et G appartient (Δ). Donc, G = S(G).

De plus, E' = S(E) et F' = S(F). On en déduit que les angles $\widehat{(\overrightarrow{E'F'},\overrightarrow{E'G})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})}$ sont opposés.

Il en résulte que : $\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{E'F'},\overrightarrow{E'G})} = -\text{Mes}\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})} = -\frac{5\pi}{6}$.

On conclut que la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{E'F'},\overrightarrow{E'G})}$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

27

1. Voir Figure.

2. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est orienté dans le sens indirect. Donc Mes$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\text{mes}\widehat{CAB}$.

Dans le triangle ABC, on a : $\text{mes}\widehat{CAB} + \text{mes}\widehat{ABC} + \text{mes}\widehat{ACB} = \pi$.

$\text{mes}\widehat{CAB} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \pi$.

Donc, $\text{mes}\widehat{CAB} = \frac{5\pi}{12}$.

Par suite, $\text{Mes}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{5\pi}{12}$.

3. I est le milieu du segment [BC]. Donc, $s_I(B) = C$ et $s_I(C) = B$. De plus, $s_I(A) = E$.

Puisque les symétries centrales transforment un angle orienté en un angle orienté qui lui est égal alors

$(\overrightarrow{EC};\overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

Par suite, $\text{Mes}(\overrightarrow{EC};\overrightarrow{EB}) = -\frac{5\pi}{12}$

4. a) $\overrightarrow{CA}$ est le vecteur de translation de la translation T. Donc l'image de C par T est A.

On a : $s_I(A) = E$ donc, I est le milieu du segment [AE]. Or, I est le milieu du segment [BC].

On en déduit que le quadrilatère ACEB est un parallélogramme. Par conséquent, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CA}$.
Il en résulte que B est l'image de E par la translation T.

b) Considérons la symétrie de centre I. On a : $s_I(A) = E$ et $s_I(B) = C$. De plus, les symétries centrales transforment un angle orienté en un angle orienté qui lui est égal. Il en découle que :

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$. Or $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE})$. Il s'ensuit que : $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

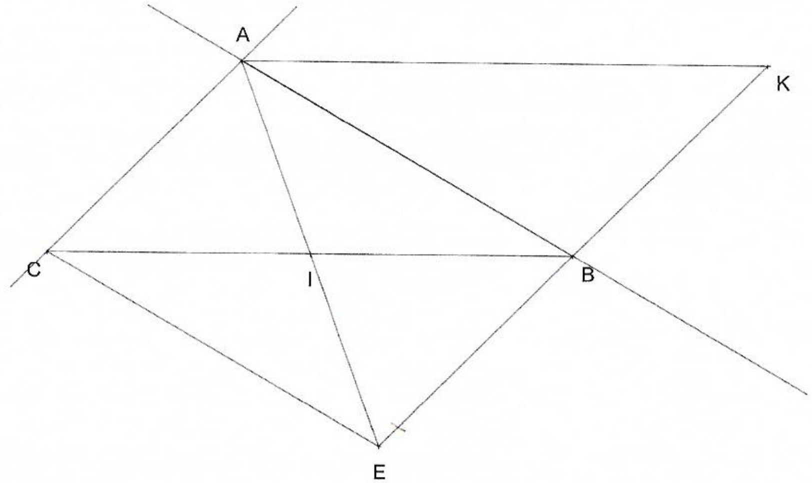
On en déduit que : $\text{Mes}(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}) = -\text{Mes}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$

Donc, la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB})$ est $\frac{\pi}{4}$.

b) D'après la question 4a), $T(B) = K$, $T(C) = A$ et $T(E) = B$.
Comme les translations transforment un angle orienté en un angle orienté qui lui est égal alors,

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK}) = (\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB})$.

On conclut que : $\text{Mes}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AK}) = \text{Mes}(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{4}$



28

1. Voir figure.
2. On a : $mes\widehat{OQR} = mes\widehat{PQO} + mes\widehat{RQP}$.

L'angle $\widehat{ROP}$ est inscrit dans le cercle (C), intercepte l'arc $\widehat{RP}$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{RQP}$.

Donc, $mes\widehat{RQP} = 2mes\widehat{ROP} = 2\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. De plus, le triangle OPQ est équilatéral. Il en découle que :

$mes\widehat{PQO} = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $mes\widehat{OQR} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Puisque les point O et P appartiennent au cercle (C) de centre Q alors le triangle ORQ est isocèle en Q.

On conclut que le triangle ORQ est rectangle isocèle en Q.

De plus, l'angle orienté $(\overrightarrow{OR},\overrightarrow{OQ})$ est de sens direct. Par suite, le triangle ORQ est rectangle isocèle en Q et de sens direct.

3. Les points P et R appartiennent au cercle (C) de centre Q donc, le triangle PRQ est isocèle en Q.

Il en découle que : $2mes\widehat{RPQ} + mes\widehat{RQP} = \pi$.

$$2mes\widehat{RPQ}+\frac{\pi}{6} = \pi$$

Donc, $$mes\widehat{RPQ} = \frac{5\pi}{12}.$$

L'angle $(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ})$ étant orienté dans le sens direct, on a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ}}) = mes\widehat{RPQ} = \frac{5\pi}{12}$

On en déduit que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ})$ est $\frac{5\pi}{12}$.

D'autre part, P' l'image de P par la symétrie orthogonale d'axe (RQ).

Donc, S(P'), S(R) = R et S(Q) = Q.

Or la symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

Il en résulte que, $(\overrightarrow{P'R},\overrightarrow{P'Q}) = -(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ})$. Par suite, $Mes(\widehat{\overrightarrow{P'R},\overrightarrow{P'Q}}) = -Mes(\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ}}) = -\frac{5\pi}{12}$.

On conclut que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{P'R},\overrightarrow{P'Q}}) = -\frac{5\pi}{12}$.

29

1. Voir figure.
2. Le triangle OMN est isocèle en O donc, ON = OM (1). De plus, le triangle OPM est équilatéral. Il s'ensuit que : OM = OP (2). De (1) et (2), on déduit que : OP = OM = ON. Par conséquent les point M et N appartiennent au cercle (Γ) qui est le cercle de centre O passant par P.

3. $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$ est de sens direct. Donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}}) = mes\widehat{NMP}$.

L'angle $\widehat{NMP}$ est inscrit dans le cercle et intercepte l'arc $\smile{NP}$.

Par conséquent, $mes\widehat{NMP} = \pi - \frac{1}{2}mes\widehat{NOP}$.

Comme le triangle OPM un triangle équilatéral alors $mes\widehat{MOP} = \frac{\pi}{3}$. De plus, $mes\widehat{MON} = \frac{7\pi}{12}$.

Il s'ensuit que : $mes\widehat{NOP} = \frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$.

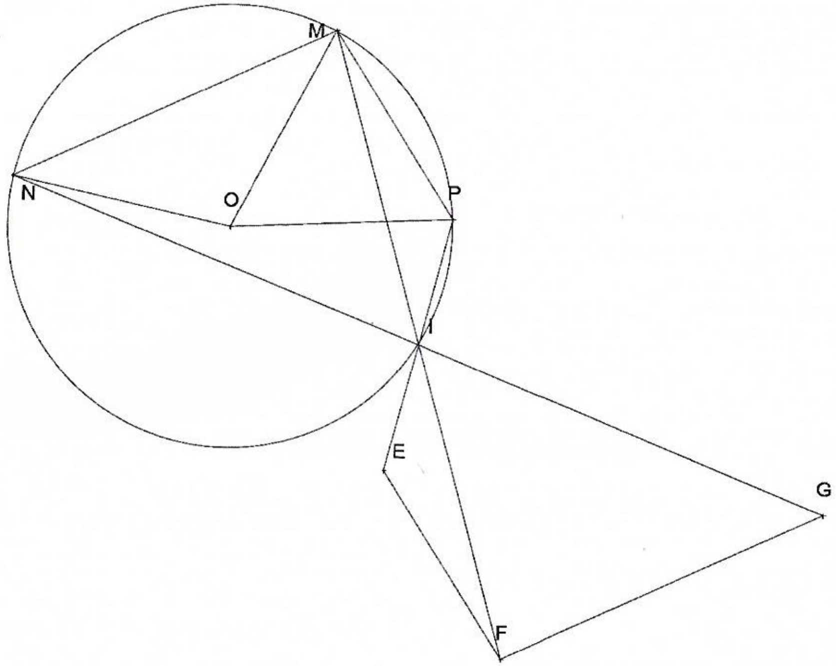
Donc, $mes\widehat{NMP} = \pi - \frac{1}{2}\times\frac{11\pi}{12} = \frac{13}{24}$. On en déduit que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}}) = \frac{13}{24}$.

4. On a : $F = S_I(M)$, $G = S_I(N)$ et $E = S_I(P)$.

Puisque les symétries centrales transforment un angle orienté en un angle orienté qui lui est égal alors

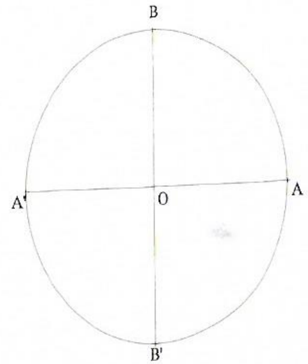
$(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}}) = (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}})$.

Il en résulte que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}}) = \frac{13}{24}$.

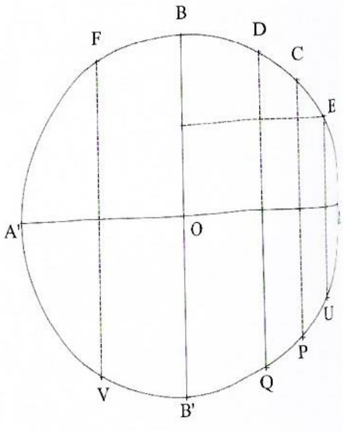


Trigonométrie

1



2



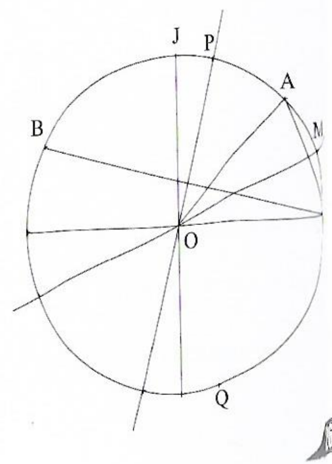
a) Le triangle OAD est équilatéral de sens direct ;

$\text{mes}\widehat{OAC} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\text{mes}\widehat{OAE} = \frac{1}{2} \times \text{mes}\widehat{OAD}$;

$\text{mes}\widehat{OAF} = 2 \times \text{mes}\widehat{OAD}$;

b) P, Q, U et V sont les images respectifs des C, D, E et F par la symétrie orthogonale d'axe (OA).

3



Sur la figure, On a : $\text{mes}\widehat{IOA} = \text{mes}\,\frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{8}$ est obtenu à partir de la bissectrice de l'angle $\widehat{IOA}$. On a :

$\text{mes}\widehat{IOB} = \text{mes}\,\frac{5\pi}{6}$ donc $\frac{5\pi}{12}$ est obtenu à partir de la bissectrice de l'angle $\widehat{IOB}$. $-\frac{5\pi}{12}$ a pour point image sur le cercle le symétrique de B par rapport à l'axe (OI).

4

0 pour image A ; $\frac{2\pi}{5}$ a image B ; $\frac{4\pi}{5}$ a pour image C ; $-\frac{4\pi}{5}$ a pour image D et $-\frac{2\pi}{5}$ a pour image E.

5

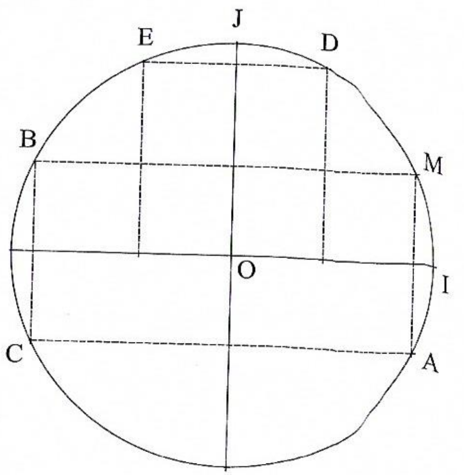
1. $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6}$; $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}}) = \frac{5\pi}{6}$; $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}}) = -\frac{5\pi}{6}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}}) = -\frac{\pi}{6}$.
2. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

6

1. $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{3}$; $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}}) = \frac{2\pi}{3}$; $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}}) = -\frac{\pi}{3}$.
2. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

7

1.



2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha; \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha; \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha, \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha, \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$.

8

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha; \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha; \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$A = -\cos\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha$

$A = -2\cos\alpha$.

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha, \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ et $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$.

$B = \sin\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha$

$B = \sin\alpha$.

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\ \cos(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$ et $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$.

$C = \cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha$

$C = 0$.

9

$\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10}$.

Or $\frac{\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} = \pi$ et $\frac{3\pi}{10} + \frac{7\pi}{10} = \pi$ donc, $\cos\frac{9\pi}{10} = -\cos\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{7\pi}{10} = -\cos\frac{3\pi}{10}$.

Par suite, $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{10} = 0$.

On conclut que : $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} = 0$.

10

$\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$ donc, $\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; et $\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$;

$\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$ donc, $\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$; et $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\cos(-\frac{\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$;

11

1. a) Pour $\alpha \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[$, $\cos x < 0$, b) pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0$ c) pour $\alpha \in]\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $\cos x < 0$.
2. a) Pour $\alpha \in]-\pi ; 0[$, $\sin x < 0$, b) pour $\alpha \in]0 ; \pi[$, $\sin x > 0$.
3. $\frac{\pi}{7} \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\cos\frac{\pi}{7} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{7} > 0$; $\frac{5\pi}{7} \in]\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $\cos\frac{5\pi}{7} < 0$ et $\sin\frac{5\pi}{7} > 0$.

$-\frac{\pi}{7} \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[$, $\cos(-\frac{\pi}{7}) > 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{7}) < 0$.

12

1.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$-\frac{\pi}{2}$		π
sinx	0	−		−	0	+		+	0
cosx		−	0	+		+	0	−	

2. a) $D_f =]-\pi ; \pi]$.

$x \in D_g \Leftrightarrow \cos x \neq 0$ Donc, $D_f =]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

$x \in D_h \Leftrightarrow \cos x \geq 0$ Donc, $D_f = [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

b) $\begin{cases} \forall x \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]0 ; \frac{\pi}{2}[, f(x) > 0 \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi[, f(x) < 0 \\ f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \forall x \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[\cup]0 ; \frac{\pi}{2}[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup]\frac{\pi}{2} ; \pi[, g(x) < 0. \end{cases}$

13

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc, $\cos^2 x + (\frac{1}{2})^2 = 1$. ; $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme : $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ alors il en résulte que : $\cos x > 0$.

Par conséquent, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc, $(\frac{5}{13})^2 + \sin^2 x = 1$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\sin^2 x = \frac{144}{169}$$

$$\cos x = \frac{12}{13} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{12}{13}.$$

Comme : $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ alors, $\cos x < 0$. Il s'ensuit que, $\cos x = -\frac{12}{13}$.

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$. Donc, $\tan x = -\frac{5}{12}$.

15

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$; $\tan(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

$\tan\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{6} = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(-\frac{3\pi}{4})}{\cos(-\frac{3\pi}{4})} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

16

$\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$ donc, $\cos^2\frac{\pi}{12} + (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2 = 1$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{6-2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}{16}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{16-8+2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{8+2\sqrt{6}\times\sqrt{2}}{16}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{6+2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}{16}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}$$

$\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ou $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On a : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ alors $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que : $\cos\frac{\pi}{12} > 0$.

On conclut que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Par ailleurs, $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4}$

Il en résulte que : $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

17

$\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1$ donc, $\cos^2\frac{4\pi}{5} + \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{8} = 1$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}$$

$$\cos^2\frac{4\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ou $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

On a : $\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5} = -\frac{3\pi}{10}$ alors $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$. Il en résulte que : $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$.

Par suite : $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Par ailleurs, on a : $\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi$. On en déduit que, $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$.

Par conséquent, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

18

1. $(1-\sqrt{5})^2 = 1-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2 = 1-2\sqrt{5}+5$

$(1-\sqrt{5})^2 = 6-2\sqrt{5}$.

On a : $1 < 5$. Donc, $\sqrt{1} < \sqrt{5}$

$1 < \sqrt{5}$

Par conséquent, $1-\sqrt{5} < 0$.

2. $\cos^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{\pi}{10} = 1$ donc, $\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{10} = 1$

$$\frac{10+2\sqrt{5}}{16} + \sin^2\frac{\pi}{10} = 1$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{16-10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{(1-\sqrt{5})^2}{16}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{16}} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\pi}{10}=-\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{16}}$$

Comme $0<\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$ alors $\sin\frac{\pi}{10}>0$. Il s'ensuit que : $\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{16}}$

On a : $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}}{4}=\frac{|1-\sqrt{5}|}{4}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ car $1-\sqrt{5}<0$.

On conclut que $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

19

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$ Donc, $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

20

Le triangle OIT est rectangle en I. Donc l'aire du triangle OIT est : $\frac{OI\times IT}{2}$.

Comme $OI=1$ alors $\frac{OI\times IT}{2}=\frac{IT}{2}$.

L'image M de α sur le cercle trigonométrique appartient à la demi-droite [OT).

Par conséquent, $|\tan\alpha|=\tan\widehat{IOM}=\frac{IT}{OI}=IT$

On conclut l'aire du triangle OIT est $\frac{\tan\alpha}{2}$.

Par ailleurs, l'aire du disque de centre O et de rayon OI est : $\pi\times1^2$ c'est-à-dire π.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan délimitée par les segments [OI], [OM] et l'arc $\overset{\frown}{IM}$.

On a la correspondance suivante : $\pi\rightarrow 2\pi$,

$$\mathcal{A}\rightarrow|\alpha|.$$

Donc, $2\pi\mathcal{A}=\pi|\alpha|$.

$$\mathcal{A}=\frac{|\alpha|}{2}.$$

21

1. a) Les points N et B appartiennent à un cercle de centre O. Donc, ON = OB. Il s'ensuit que le triangle OBN est isocèle en O. De plus la droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NOB}$. , Par conséquent, la droite (OM) est la médiatrice du segment [NB].

b) La droite (OM) est la médiatrice du segment [NB] et I est le point d'intersection des droites (NB) et (OM). On en déduit que I est le milieu du segment [NB].

2. α est la mesure de l'angle inscrit $\widehat{NBM}$ interceptant l'arc $\overset{\frown}{NM}$ et associé à l'angle au centre $\widehat{NOM}$.

Donc 2α est la mesure de l'angle $\widehat{NOM}$. Par suite, $\cos2\alpha=\cos\widehat{NOM}$.

De plus (OI) est la médiatrice du segment [NB] donc, le triangle OIN est rectangle en I. Par conséquent :

$\cos\widehat{NOM}=\frac{OI}{ON}$. Puisque le point N appartient au cercle trigonométrique de centre O alors ON = 1. Donc,

$\cos\widehat{NOI}=OI$. Il en découle que : $\cos2\alpha=OI$.

On a : $\sin\widehat{NOI}=\frac{IN}{ON}$. Donc, $\sin\widehat{NOI}=IN$. Par conséquent, $\sin2\alpha=IN$.

Dans le triangle IBM rectangle en I, on a : $\cos\widehat{IBM}=\frac{IB}{MB}$. Donc, $IB=MB\cos\widehat{IBM}$.

Comme I est le milieu de [NB] alors IN = IB. De plus, α est la mesure de l'angle inscrit $\widehat{IBM}$. Il s'ensuit que $\cos\alpha=\cos\widehat{IBM}$. On conclut que : $IN=MB\cos\alpha$.

Dans le triangle MOB isocèle en O, $\sin\alpha=\frac{\frac{MB}{2}}{OB}$. Donc, $\sin\alpha=\frac{MB}{2}$ car OB = 1.

On en résulte que : $MB=2\sin\alpha$.

Enfin, dans le triangle IBM rectangle en I, $\sin\alpha=\frac{IM}{MB}$. Donc, $IM=MB\sin\alpha$

3. a) On a : $\sin 2\alpha = IN$ et $IN = MB\cos\alpha$. Donc, $\sin 2\alpha = MB\cos\alpha$. Puisque $MB = 2\sin\alpha$, alors $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

b) Le point I appartient au segment [OM]. Il en résulte que : $OI + IM = OM$.

On a : $IM = MB\sin\alpha$ et $MB = 2\sin\alpha$. Donc, $IM = 2\sin^2\alpha$.

De plus, $\cos 2\alpha = OI$, $OM = 1$

Par conséquent, $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$. On conclut que : $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

D'autre part, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Donc, $\cos 2\alpha = 1 - 2(1 - \cos^2\alpha)$,

$\cos 2\alpha = 1 - 2 + 2\cos^2\alpha$

Il en découle que : $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

4. $\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc, $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ ou } \cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On a : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$. Il en résulte que $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Le cosinus de $\frac{\pi}{8}$ est donc positif. Il en découle que : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

On a : $\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc, $2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ ou } \sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin\frac{\pi}{8} > 0$. Par conséquent, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

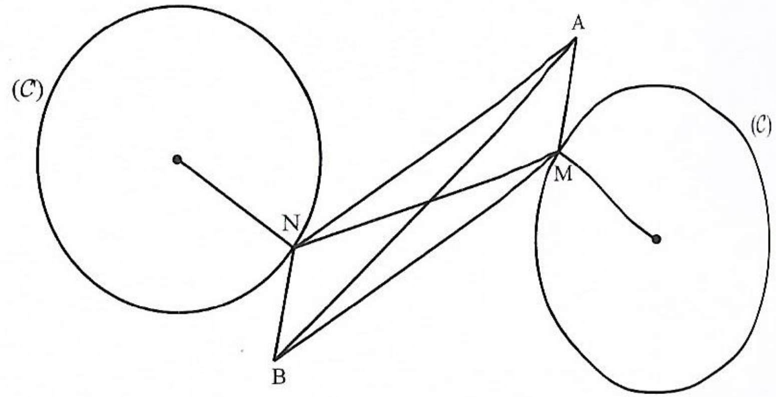
Symétries et translations

1

1. N est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{MA}$. Voir figure.

2. Le point I est le milieu du segment [AB] et MANB est un parallélogramme. Il s'ensuit que I est le milieu du segment [MN]. Par conséquent N est l'image de M par la symétrie de centre I.

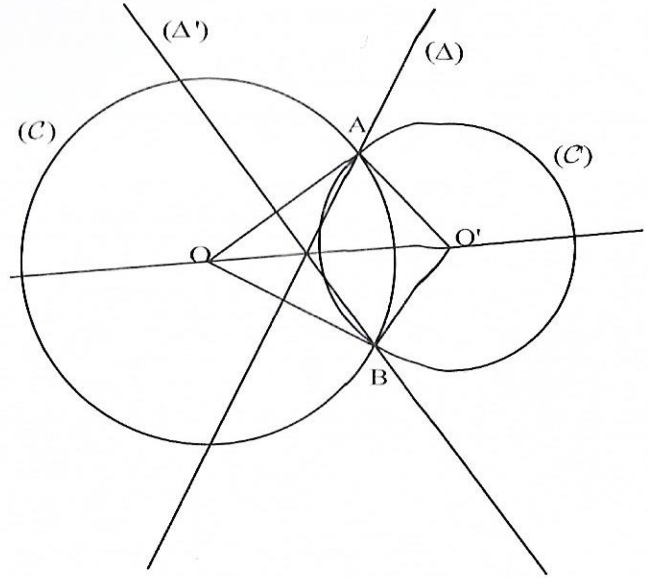
Par suite, lorsque M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$, le point N décrit le cercle $(\mathcal{C}')$ image $(\mathcal{C})$ de par la symétrie de centre I.



2

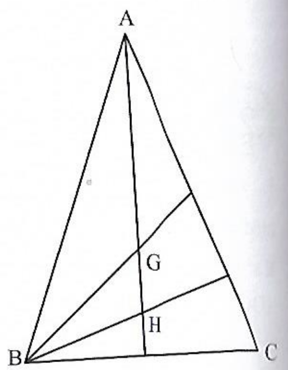
1. A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O donc, OA = OB. Par conséquent O appartient à la médiatrice du segment [AB]. De plus, A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' donc, O'A = O'B. Il s'ensuit que O' appartient à la médiatrice du segment [AB]. On déduit de ce qui précède que la droite (OO') est la médiatrice du segment [AB].

2. a) D'après la question 1) comme la droite (OO') est la médiatrice du segment [AB] alors B est l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (OO').
Par conséquent lorsque A parcourt la droite (Δ) alors B décrit l'image de (Δ) par la symétrie orthogonale d'axe (OO').
b) B est l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (OO'). Donc, lorsque A parcourt le cercle (𝒞) alors B parcourt l'image du cercle (𝒞) par la symétrie orthogonale d'axe (OO').
De plus, le point O appartient à la droite (OO') donc l'image de O par la symétrie orthogonale d'axe (OO') est O. Donc (𝒞) est sa propre image par cette symétrie.
Par suite lorsque A parcourt (𝒞) alors B parcourt également le cercle (𝒞).



3

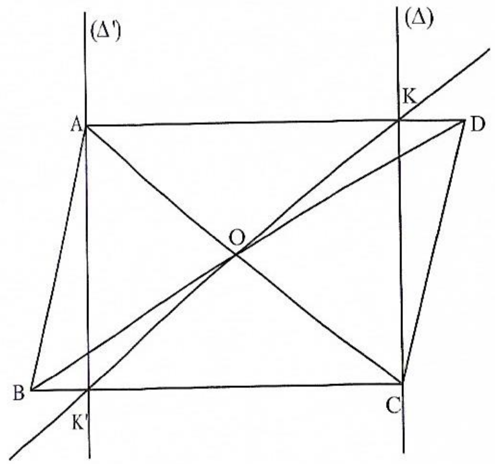
1. Voir figure.
2. Voir figure.
3. G est le centre de gravité du triangle ABC donc la droite (AG) est la médiane issue de A dans le triangle ABC. D'autre part le point H est l'orthocentre du triangle ABC donc la droite (AH) est la hauteur issue sommet A dans le triangle ABC. De plus le triangle ABC est isocèle en A. Il s'ensuit que la médiane issue de A et la hauteur issue de A sont confondues. Par conséquent les droites (AH) et (AG) sont confondues. Donc le point G appartient à la droite (AH). On conclut que les points A, G et H sont alignés.



4

1. La droite (Δ) est une droite donc son image (Δ') par la symétrie de centre O est une droite.
Comme C appartient la droite (Δ) alors son image A par la symétrie de centre O appartient à (Δ'). De plus soit K le point d'intersection de (Δ) et de la droite (AD). Son image K' par la symétrie de centre O appartient à la droite (OK) et à la droite (BC) qui est l'image de (AD) par la symétrie de centre O. Il résulte de ce qui précède que (Δ') est la droite (AK').

2. (Δ') et (BC) sont respectivement les images des droites (Δ) et (AD) par la symétrie de centre O.
Puisque les symétries centrales conservent la perpendicularité et que les droites (Δ) et (AD) sont perpendiculaires alors les droites (Δ') et (BC) sont perpendiculaires.



5

1. Voir figure.
2. a) E est l'image de M par la symétrie $S_{B'}$. De plus, B' est le milieu du segment [AC].

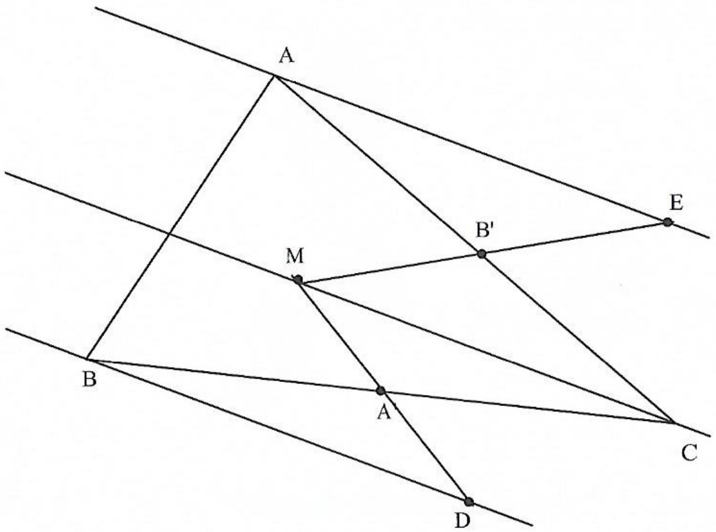
Donc A est l'image du point C par la symétrie $S_{B'}$.

On a : $S_{B'}(C) = A$ et $S_{B'}(M) = E$. Comme l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle alors : (EA)//(MC). De plus les symétries centrales conservent les distances donc : EA = MC. On conclut que : (MC)//(EA) et MC = EA.

b) D'autre part, D est l'image de M par la symétrie $S_{A'}$. De plus, A ' est le milieu du segment [BC]. Donc B est l'image du point C par la symétrie $S_{A'}$.

On a : $S_{A'}(M) = B$ $S_{A'}(M) = D$ et $S_{A'}(C) = B$. De plus l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle et les symétries centrales conservent les distances. Donc :
(BD)//(MC) et BD = MC. Par conséquent : (MC)//(BD) et MC = BD.

3. D'après la question 2), MC = EA et BD = MC. Il s'ensuit que EA = BD (1).
De plus (MC)//(EA) et (MC)//(BD). Donc, (EA)//(BD (2).
De (1) et (2), il résulte que la quadrilatère ABDE est un parallélogramme.

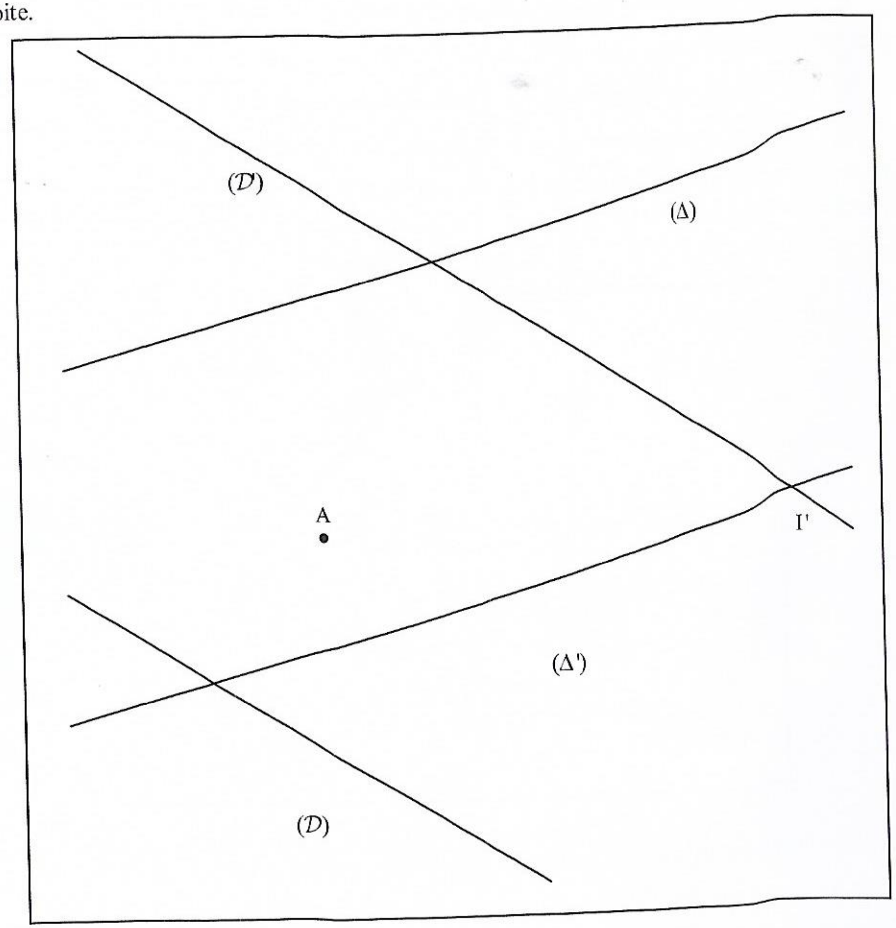


6

Soit les droites (Δ') et ($\mathcal{D}'$) images respectives de (Δ) et ($\mathcal{D}$) par la symétrie de centre A.

I étant le point l'intersection des droites (Δ) et ($\mathcal{D}$) donc son image I' par la symétrie de centre A est le point d'intersection des droites (Δ') et ($\mathcal{D}'$).

Pour construire l'image d'une droite par une symétrie on pourra construire d'abord les images de deux points de la droite.

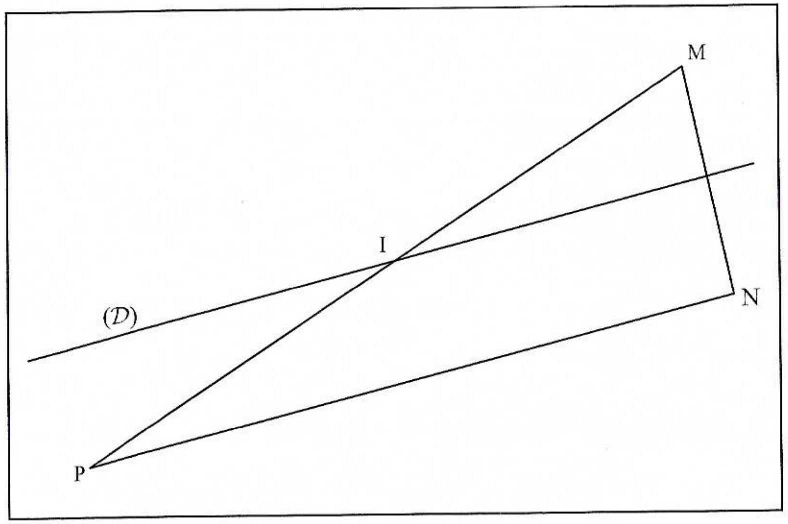


7

1. a) $(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment [MN].
Voir figure pour la construction.

b) I est le milieu du segment [MP].
Voir figure pour la construction.

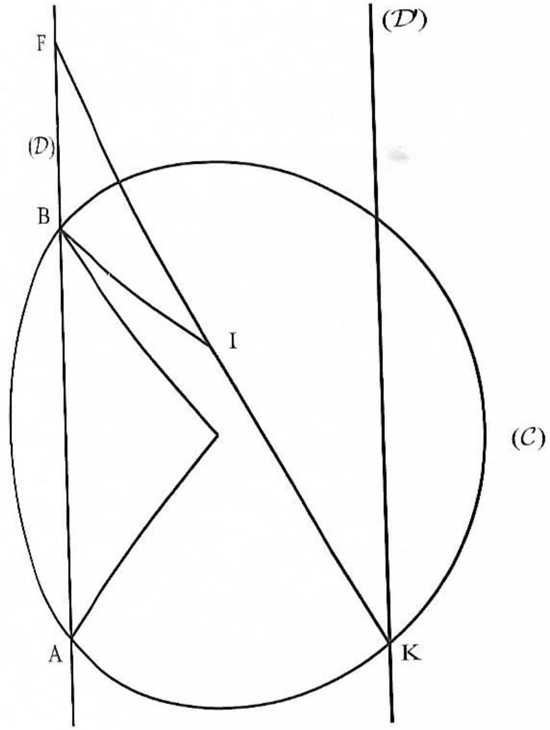
2. $(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment [MN]. Donc $(\mathcal{D})$ passe par le milieu de [MN]. De plus I est le milieu du segment [MP]. Par suite dans le triangle MNP, la droite $(\mathcal{D})$ passe par les milieux des cotés [MN] et [MP]. Donc, d'après la réciproque de la propriété de la droite des milieux les droites $(\mathcal{D})$ et (PN) sont parallèles.
D'autre part, $(\mathcal{D})$ est la médiatrice du segment [MN] donc, $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à la droite (MN).
En définitive, on a : $(\mathcal{D}) \perp (MN)$ et $(\mathcal{D}) // (PN)$ donc $(PN) \perp (MN)$.
Il en découle que le triangle MNP est rectangle en N.



8

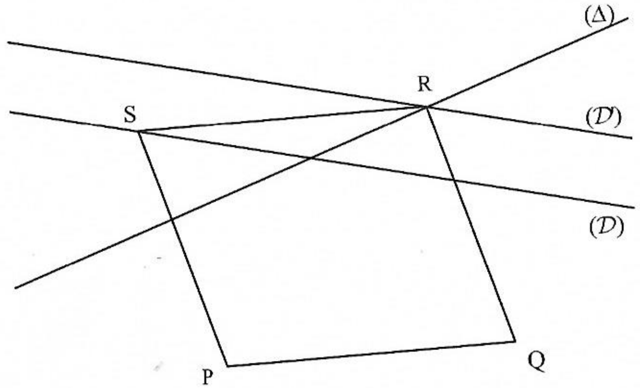
Notons K l'un des point d'intersection de $(\mathcal{D}')$ et de $(\mathcal{C})$. Puisque K appartient à $(\mathcal{D}')$ alors le point F qui a pour image K par la symétrie de centre I appartient à la droite $(\mathcal{D})$. Par conséquent F appartient à $(\mathcal{D})$

K appartient à $(\mathcal{C})$ et I milieu du segment [FK].



9

Le quadrilatère PQRS est un parallélogramme si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Construisons l'image $(\mathcal{D}')$ de la droite $(\mathcal{D})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$. On note R le point d'intersection de $(\mathcal{D}')$ et de (Δ). Soit S le point qui a pour image R par la translation de vecteur. Il s'ensuit que R appartient à la droite (Δ), S appartient à la droite $(\mathcal{D})$ et le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.



10

1. Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [AB] donc d'après la propriété de la droite des milieux, les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
De plus H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Par conséquent, les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
De ce qui précède, on a : (IJ)//(AC) et (BH) $\perp$(AC). On en déduit que les droites (IJ) et (BH) sont perpendiculaires.
2. Dans le triangle ABH, la droite (IJ) passant par le milieu J de [AB] est parallèle à la droite (AH).
D'après la réciproque de la propriété de la droite des milieux, la droite (IJ) passe par le milieu du segment [BH]. Par suite, comme (IJ) passe par le milieu de [BH] et que les droites (IJ) et (BH) sont perpendiculaires alors la droite (IJ) est la médiatrice du segment [BH].
3. Soit $S_{(IJ)}$ la symétrie orthogonale d'axe (IJ).

Les points I et J appartiennent à la droite (IJ) donc : $S_{(IJ)}(I) = I$ et $S_{(IJ)}(J) = J$.

De plus, la droite (IJ) est la médiatrice du segment [BH] donc : $S_{(IJ)}(B) = H$.

D'autre part, le triangle ABC est rectangle en B et les points I et J appartiennent respectivement aux segments [BC] et [AB]. Il en découle que le triangle IJB est rectangle en B.
Considérons le tableau de correspondance suivant

$S_{(IJ)}$	
I	I
J	J
B	H

L'image du triangle IJB par la symétrie $S_{(IJ)}$ est le triangle IJH.

Comme la symétrie conserve l'orthogonalité et que le triangle IJB est rectangle en B alors le triangle IJH est rectangle en H.

11

1. Voir figure.

2. D'une part les points A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O donc OA = OB. D'autre part A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' donc O'A = O'B. Puisque les cercles sont de même rayon alors OA = OB = O'A = O'B. Il en découle que le quadrilatère AOBO' est un losange.

3. a) Le quadrilatère AOBO' est un losange donc I est le milieu de la diagonale [AB]. Par conséquent B est le symétrique de A par rapport à I.
De plus les droites (MM') et (NN') sont parallèles avec A appartenant à (MM') et B appartenant à (NN').
Le symétrique de (MM') par rapport à I est donc la parallèle à (MM') passant par B.
On en déduit que le symétrique de la droite (MM') par S_I est la droite (NN').
Il en résulte que (NN') est l'image de (MM') par S_I.

b) Le quadrilatère AOBO' est un losange donc I est le milieu de la diagonale [OO'].
Par conséquent O' est le symétrique de O par rapport à I. Comme O' est le centre du cercle $(\mathcal{C}')$, O est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ et que les cercles $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C})$ sont de même rayon alors est $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par S_I.

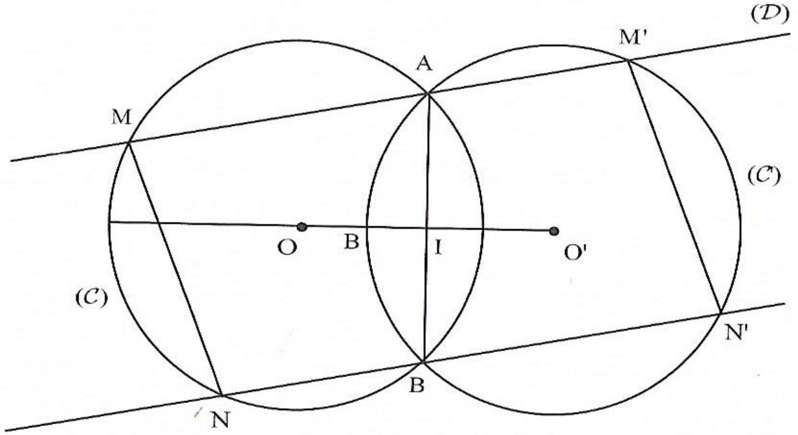
4. Considérons la tableau de correspondance suivant.

S_I	
(MM')	(NN')
(NN')	(MM')
$(\mathcal{C})$	$(\mathcal{C}')$
$(\mathcal{C}')$	$(\mathcal{C})$

Les points d'intersection de (MM') et $(\mathcal{C})$ ont pour images par S_I les points d'intersection de (NN') et $(\mathcal{C}')$.
Or les points d'intersection de (MM') et $(\mathcal{C})$ sont les points A et M ; et les points d'intersection de (NN') et $(\mathcal{C}')$ sont les points B et N'. Puisque $S_I(A) = B$ alors $S_I(M) = N'$.

D'autre part, les points d'intersection de (MM') et $(\mathcal{C}')$ ont pour images par S_I les points d'intersection de (NN') et $(\mathcal{C})$. Or les points d'intersection de (MM') et $(\mathcal{C}')$ sont les points A et M'; et les points d'intersection de (NN') et $(\mathcal{C})$ sont les points B et N. Puisque $S_I(A) = B$ alors $S_I(M') = N$.

5. On a : $S_I(M) = N'$ et $S_I(M') = N$. Par conséquent I est le milieu de chacun des segments [MN'] et [M'N]. On en déduit que le quadrilatère MNN'M' est un parallélogramme.



12

Un point et son symétrique par la droite (𝒟) sont équidistants de tout point de (𝒟).

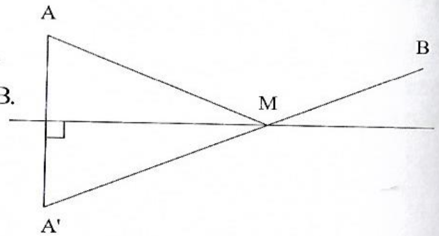
Considérons A ' le symétrique de A par rapport à (𝒟).

On désigne par M le point d'intersection de (A ' B) et (𝒟).

Comme $AM = A'M$ alors $AM + MB = A'M + MB = A'B$.

car M appartient au segment [A'B].

Donc, $AM + MB$ est minimale lorque M est le point d'intersection de (A ' B) et (𝒟).



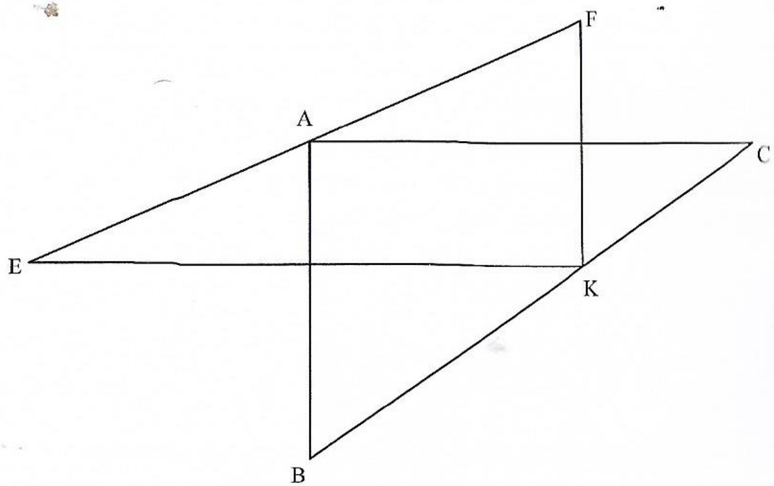
13

1. Voir figure.

2. a) E est l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AB) donc : AE = AK (1). De plus F est l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AC) donc : AF= AK (2). De (1) et (2) on a :
AE = AK = AF. On conclut que A est le centre du cercle circonscrit au triangle EKF.

b) E est l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AB). Donc la droite (AB) est la médiatrice du segment [EK]. Il en découle $(EK) \perp (AB)$ (1). :
Comme le triangle ABC est rectangle en A alors : $(AB) \perp (AC)$ (2).
De (1) et (2), il résulte que les droites (EK) et (AC) sont parallèles.
D'autre part, F est l'image de K par la symétrie orthogonale d'axe (AC). Donc la droite (AC) est la médiatrice du segment [FK]. Il en découle $(FK) \perp (AC)$.
On a : $(FK) \perp (AC)$ et $(EK) // (AC)$. On conclut que les droites (EK) et (FK) sont perpendiculaires.

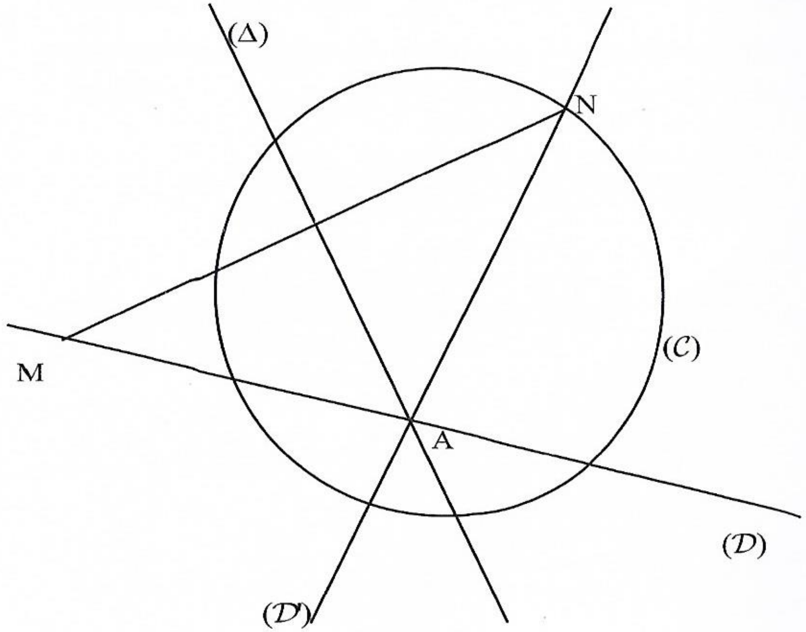
3. Les droites (EK) et (FK) sont perpendiculaires donc le triangle EKF est rectangle en K. Or A est le centre du cercle circonscrit au triangle EKF. Il s'ensuit que A le milieu du segment [EF].



14

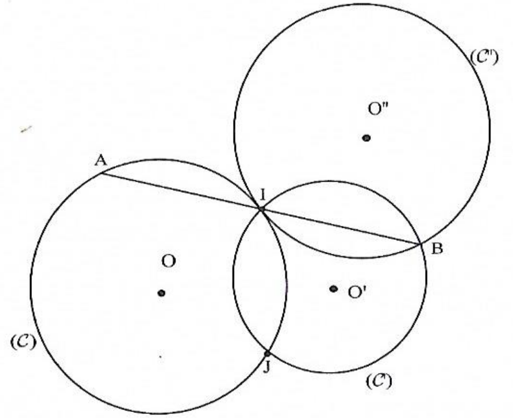
(Δ) est la médiatrice de [MN] si M et N sont symétriques par rapport à (Δ).

Construisons le symétrique (𝒟') de la droite (𝒟) par la symétrie orthogonale d'axe (Δ). On note N le point d'intersection de (𝒟') et du cercle (𝒞) Soit M l'image de N par la symétrie orthogonale d'axe (Δ). Comme N appartient à la droite (𝒟') alors M appartient à la droite (𝒟). On conclut que N appartient au cercle (𝒞), M appartient à la droite (D) et (Δ) est la médiatrice du segment [MN].



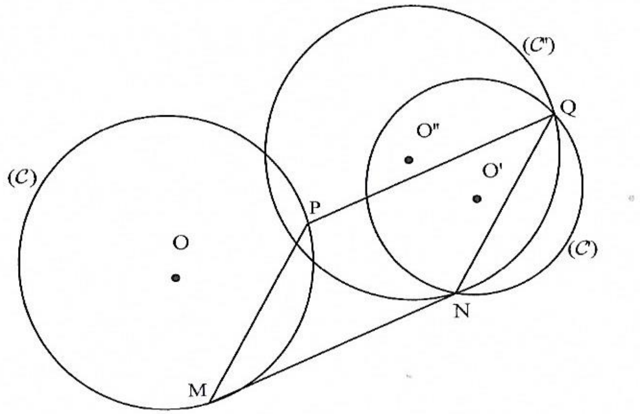
15

I est le milieu du segment [AB] si A et B sont symétriques par rapport à I.
Construisons le cercle image (C'') du cercle (C) par la symétrie de centre I. On note B le point d'intersection de (C) et de (C''). Soit A le point qui a pour image B par la symétrie de centre I.
Puisque B appartient à (C'') alors A appartient à (C) tel que I soit le milieu du segment [AB].



16

MNQP est un parallélogramme si N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
Construire le cercle image (C'') du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$. On note Q le point d'intersection de (C') et de (C''). Soit P le point qui a pour image Q par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.
Puisque Q appartient à (C'') alors P appartient à (C) et le quadrilatère MNQP est un parallélogramme.



Angles inscrits

1

1. Les angles inscrits $\widehat{CAD}$ et $\widehat{AEB}$ interceptent respectivement les arcs $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{AB}$ qui ont la même longueur. Donc, $mes\widehat{CAD} = mes\widehat{AEB}$.
Puisque $mes\widehat{AEB} = 30°$ alors $mes\widehat{CAD} = 30°$.
2. Les angles inscrits $\widehat{CAD}$ et $\widehat{AEB}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Donc, $mes\widehat{ADB} = mes\widehat{AEB}$.
On en déduit que : $mes\widehat{ADB} = mes\widehat{CAD}$.
Il s'ensuit que les angles alternes - internes $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CAD}$ définis par les droites (AC) et (DB); et leur sécante commune (AD) sont de même mesures. On conclut que les droites (AC) et (DB) sont parallèles.

2

Les angles inscrits $\widehat{FAK}$ et $\widehat{FKT}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{FK}$. Donc, $mes\widehat{FAK} = mes\widehat{FKT}$ (1).

De plus la droite (AF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAK}$ Par conséquent, $mes\widehat{CAF} = mes\widehat{FAK}$ (2).

D'autre part, les angles inscrits $\widehat{CAF}$ et $\widehat{CKF}$ interceptent respectivement le même $\overset{\frown}{CF}$. Donc, $mes\widehat{CAF} = mes\widehat{CKF}$ (3).

Des égalités (1), (2) et (3), on a : $mes\widehat{TKF} = mes\widehat{FAK} = mes\widehat{CAF} = mes\widehat{CKF}$.

Donc : $mes\widehat{TKF} = mes\widehat{CKF}$.

Il en découle que la droite (KF) est la bissectrice de $\widehat{CKT}$.

3

Les angles inscrits $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DBC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{CD}$. Donc, $mes\widehat{DBC} = mes\widehat{CAD} = 25°$.

Donc. $mes\widehat{DBC} = 25°$.

D'autre part, le triangle CAD est isocèle en A. Par conséquent, $2mes\widehat{ACD} + mes\widehat{CAD} = 180°$.

$$mes\widehat{ACD} = \frac{180° - mes\widehat{CAD}}{2}.$$

Donc, $mes\widehat{ACD} = 77,5°$.

Enfin, les angles inscrits $\widehat{ACD}$ et $\widehat{DAT}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AD}$.

Donc, $mes\widehat{DAT} = mes\widehat{ACD} = 77,5°$.

Il en résulte que : $mes\widehat{DAT} = 77,5°$

4

Les angles inscrits $\widehat{TAB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent un même arc. Donc $mes\widehat{ACB} = mes\widehat{TAB} = 75°$.

D'autre part, les angles inscrits $\widehat{T'AC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent un même arc. Il s'ensuit que $mes\widehat{ABC} = mes\widehat{T'AC} = 60°$.

Par suite, dans le triangle ABC, on a : $mes\widehat{ACB} = 75°$ et $mes\widehat{ABC} = 60°$.

Or $\quad mes\widehat{ACB} + mes\widehat{ABC} + mes\widehat{BAC} = 180°$.

Donc, $\quad 60° + 75° + mes\widehat{BAC} = 180°$.

$$mes\widehat{BAC} = 180° - 135°$$

$$mes\widehat{BAC} = 45°.$$

5

1. Le point I appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB] donc le triangle AIB est rectangle en I.

Il en découle que : $mes\widehat{AIB} = 90°$.

D'autre part, les angles $\widehat{AID}$ et $\widehat{IBA}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$ interceptant un même arc.

Par conséquent, $mes\widehat{AID} = mes\widehat{IBA}$.

2. Les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{IAD}$ sont deux angles inscrits dans le cercle interceptant des arcs de même longueur.

Donc, $mes\widehat{IAB} = mes\widehat{IAD}$

3. Dans les triangles AID et AIB, on a : $mes\widehat{AID} = mes\widehat{IBA}$ et $mes\widehat{IAB} = mes\widehat{IAD}$

Il en découle que : $mes\widehat{ADI} = mes\widehat{AIB} = 90°$.

Par conséquent le triangle AID est rectangle en D.

6

Les droites (AM) et (DM) sont les tangentes respectivement en A et D au cercle (C). Les angles inscrits $\widehat{MAD}$, $\widehat{ABD}$ et $\widehat{MDA}$ dans le cercle interceptant un même arc. Il s'ensuit que :

$mes\widehat{MAD} = mes\widehat{MDA} = mes\widehat{ABD}$

De plus, le triangle ABD étant rectangle en A, on a : $\cos\widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$. Donc, $mes\widehat{ABD} = 60°$.

On en déduit que : $mes\widehat{MAD} = mes\widehat{MDA} = 60°$

Par ailleurs, les angles $\widehat{MAD}$ et $\widehat{MNP}$ sont deux angles correspondants définis par les droites parallèles (AD) et (NP) et leur sécante commune (MN). Donc, $mes\widehat{MNP} = mes\widehat{MAD} = 60°$.

De même, les angles $\widehat{MDA}$ et $\widehat{MPN}$ sont deux angles correspondants définis par les droites parallèles (AD) et (NP) et leur sécante commune (MP). Donc, $mes\widehat{MPN} = mes\widehat{MDA} = 60°$.

On conclut que : $mes\widehat{MPN} = mes\widehat{MPN} = 60°$

Par conséquent, dans le triangle MNP. $mes\widehat{MPN} = mes\widehat{MPN} = 60°$.

Donc, le triangle MNP est équilatéral.

7

Le triangle ODO' est rectangle en D et O est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O donc la droite (DO') est la tangente en D à $(\mathcal{C})$. Il s'ensuit que les angles inscrits $\widehat{DCB}$ et $\widehat{BDO'}$ dans le cercle $(\mathcal{C})$ ont la même mesure.

D'autre part, le triangle ODO' étant rectangle en D et O' est le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O donc la droite (DO) est la tangente en O à $(\mathcal{C})$. Il s'ensuit que les angles inscrits $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BDO}$ dans le cercle $(\mathcal{C}')$ ont la même mesure.

Enfin les angles sont adjacents et $\widehat{BDO}$ et $\widehat{BDO'}$ et $mes\widehat{BDO} + mes\widehat{BDO'} = mes\widehat{ODO'} = 90°$

On a : $mes\widehat{DCB} = mes\widehat{BDO'}$ et $mes\widehat{DAB} = mes\widehat{BDO}$. De plus $mes\widehat{BDO} + mes\widehat{BDO'} = 90°$

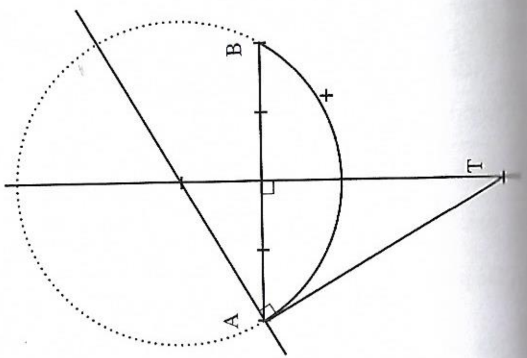
Donc, $mes\widehat{DCB} + mes\widehat{DAB} = 90°$.

On conclut que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ ont complémentaires.

8

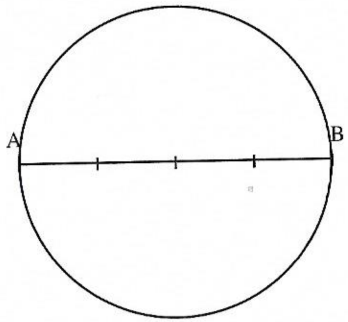
a) Soit T un point tel que : $mes\widehat{TAB} = 60°$.
La perpendiculaire à la droite (AT) et la médiatrice de du segment [AB] se coupent en un point O. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par les points A et B.

L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 60°$ est la réunion de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de son symétrique par rapport la droite (AB) privée des points A et B.



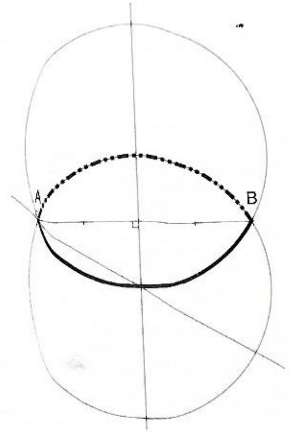
b) Considérons le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB].

L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 90°$ est le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points A et B.



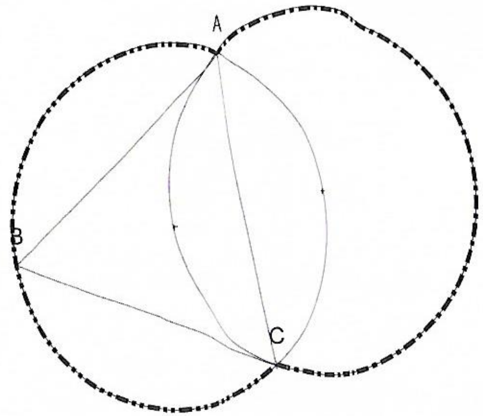
c) Soit F un point tel que : $mes\widehat{FAB} = 120°$.
La perpendiculaire à la droite (AF) et la médiatrice du segment [AB] se coupent en un point O'. Soit $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre O' passant par A et B.

L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 120°$ est la réunion de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et de son symétrique par rapport à la droite (AB) privée des points A et B.



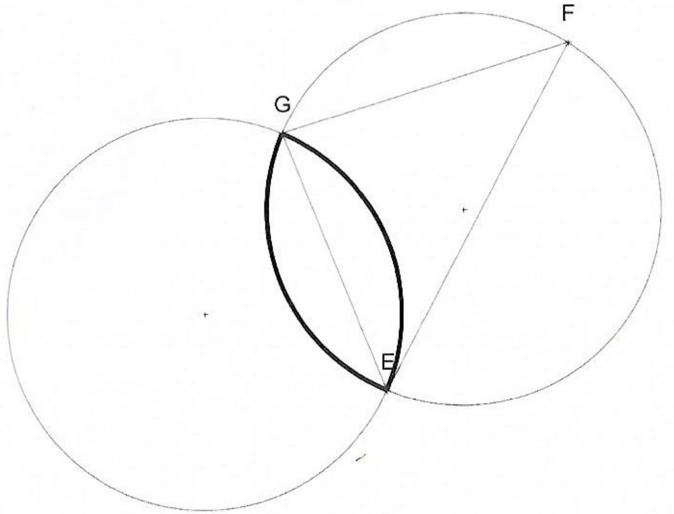
9

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au tringle ABC. L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMC} = mes\widehat{ABC}$. est la réunion de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ et de son symétrique par rapport à la droite (AC) privée des points A et C.



10

Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle EFG. L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{EMG} = 135°$ est la réunion de l'arc de cercle $\overset{\frown}{EG}$ et de son symétrique par rapport à la droite (EG) privée des points E et G.



11

1. Les droites (FN) et (EM) sont sécantes en A donc les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{EAF}$ sont opposés par le sommet. Il en découle que les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{EAF}$ sont de même mesure.

2. Les droites (OI) et (FN) sont sécantes en A donc les angles $\widehat{OAE}$ et $\widehat{IAM}$ sont opposés par le sommet. Donc, $mes\widehat{OAE} = mes\widehat{IAM}$ (1).

Par ailleurs, comme les points A et M appartiennent au cercle de centre I alors le triangle MIA est isocèle en I donc, $mes\widehat{MIA} = 180° - 2mes\widehat{IAM}$ (2).

De même puisque les points E et A appartiennent au cercle de centre O alors le triangle EOA est isocèle en O. Donc, $mes\widehat{EOA} = 180° - 2mes\widehat{OAE}$ (3).

De (1), (2) et (3), on déduit que les angles $\widehat{EOA}$ et $\widehat{MIA}$ sont de même mesure.

3. L'angle $\widehat{AFE}$ est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{EOA}$; et l'angle $\widehat{MNA}$ est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{MIA}$. D'après 2), les angles $\widehat{EOA}$ et $\widehat{MIA}$ sont de même mesure. On conclut que les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{MNA}$ sont de même mesure. De plus, ces angles sont alternes – internes définis par les droites (FE) et (MN) ; et leur sécante commune (FN). Il en résulte que les droites (FE) et (MN) sont parallèles.

4. L'angle $\widehat{TMA}$ est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{MIA}$; et l'angle $\widehat{T'EA}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{EOA}$. Or les angles $\widehat{EOA}$ et $\widehat{MIA}$ sont de même mesure donc, les angles $\widehat{TMA}$ et $\widehat{T'EA}$ sont de même mesure.

5. Le point A appartient au segment [EM]. Donc, les angles $\widehat{TMA}$ et $\widehat{T'EA}$ sont respectivement égaux aux angles $\widehat{TME}$ et $\widehat{T'EM}$. Puisque $mes\widehat{TMA} = mes\widehat{T'EA}$ alors $mes\widehat{TME} = mes\widehat{T'EM}$.

De plus les angles $\widehat{TME}$ et $\widehat{T'EM}$ sont alternes internes définis par les droites (MT) et (TE); et leur sécante commune (EM). On conclut les droites (MT) et sont parallèles (T'E).

12

1. a) La droite (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$. Donc, $mes\widehat{COB} = mes\widehat{AOB}$.

b) Les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAD}$ sont alternes-internes définis par les droites parallèles (BC) et (AD) donc : $mes\widehat{BCA} = mes\widehat{CAD}$. De plus, l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$ et et l'angle inscrit $\widehat{CAD}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{DOC}$. On en déduit que : $mes\widehat{DOC} = mes\widehat{AOB}$. D'après 1a), $mes\widehat{COB} = mes\widehat{AOB}$. Donc, les angles $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COB}$ sont de même mesure.

2. a) Le triangle COD est isocèle en O et dans le triangle IDC, on a : $mes\widehat{IDC} = mes\widehat{ADC} = mes\widehat{DOC}$.
De plus, $mes\widehat{ODC} = mes\widehat{DCO}$ et $mes\widehat{DCI} = mes\widehat{DCO} = mes\widehat{ODC}$. Par suite, $mes\widehat{CID} = mes\widehat{DCI}$.
On conclut que le triangle IDC est isocèle en D.
b) Les triangles IDC et DCB sont respectivement isocèle en D et en C. Il en découle que : ID = CD et CD = BC. Par conséquent ID = BC. De plus les droites (ID) et (BC) sont parallèles. Il s'ensuit que le quadrilatère DIBC est un parallélogramme.

3. a) Dans le parallélogramme DIBC, on a : $mes\widehat{IBC} = mes\widehat{IDC}$.
Or $mes\widehat{IDC} = mes\widehat{ADC} = mes\widehat{DOC}$.

D'autre part, $\text{mes}\widehat{IBC} = \text{mes}\widehat{EBC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{EOC} = \frac{1}{2}(\text{mes}\widehat{EOD} + \text{mes}\widehat{DOC})$.

Par conséquent : $\text{mes}\widehat{DOC} = \frac{1}{2}(\text{mes}\widehat{EOD} + \text{mes}\widehat{DOC})$

$$2\text{mes}\widehat{DOC} = \text{mes}\widehat{EOD} + \text{mes}\widehat{DOC}$$

Donc, $\text{mes}\widehat{EOD} = \text{mes}\widehat{DOC}$.

b) Les angles $\widehat{EOD}$ et $\widehat{ODA}$ sont alternes – internes définis par les droites (EO) et (AD) et leur sécante commune (OD). Comme les droites (EO) et (AD) sont parallèles alors le angles

$\widehat{EOD}$ et $\widehat{ODA}$ ont la même mesure.

D'autre part le triangle AOD est isocèle en O donc, $\text{mes}\widehat{ODA} = \text{mes}\widehat{OAD}$.

Par conséquent, on a : $\text{mes}\widehat{EOD} = \text{mes}\widehat{OAD}$ (1).

Enfin les angles $\widehat{FOE}$ et $\widehat{OAD}$ sont correspondants définis par les droites parallèles (EO) et (AD) et la sécante commune (AF). Donc, $\text{mes}\widehat{FOE} = \text{mes}\widehat{OAD}$ (2).

De (1) et (2), il résulte que les angles $\widehat{FOE}$ et $\widehat{EOD}$ sont de même mesure.

4. Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{COB}$, $\widehat{DOC}$, $\widehat{EOD}$ et $\widehat{FOE}$ sont adjacents, ces angles ont tous la même mesure et la somme de leurs mesures est égale à π.

Par conséquent, $5\text{mes}\widehat{AOB} = \pi$. Donc, $\text{mes}\widehat{AOB} = \frac{\pi}{5}$.

De plus la droite (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$. Donc, $\text{mes}\widehat{AOC} = 2\text{mes}\widehat{AOB}$

On conclut que : $\text{mes}\widehat{AOC} = \frac{2\pi}{5}$.

5. On a : $OQ = \frac{1}{2}$ et $OP = \frac{\sqrt{5}}{2}$. De plus O appartient au segment [PQ].

Donc, $QP = OQ + OP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$QP = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Par suite H étant le milieu de [PQ], on a : $QH = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Par ailleurs, $OH = HQ - OQ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}$. Donc, $OH = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Dans le triangle OHC rectangle en H, $\cos\widehat{AOC} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{OH}{OC} = OH$ car $OC = 1$.

Il en résulte que : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

13

1. a) Le triangle ABC est rectangle en A donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
De plus, le quadrilatère ABFK est un parallélogramme donc les droites (AB) et (FK) sont parallèles
De ce qui précède, il résulte que les droites (FK) et (AC) sont perpendiculaires.

b) Le triangle AFC est équilatéral. Puisque les droites (FK) et (AC) sont perpendiculaires alors la droite (FK) qui est la hauteur passant par F est également la bissectrice de l'angle $\widehat{AFC}$.

Par conséquent, $\text{mes}\widehat{AFK} = \text{mes}\widehat{KFC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AFC} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}$

$$\text{mes}\widehat{AFK} = \text{mes}\widehat{KFC} = \frac{\pi}{6}.$$

On conclut que les angles $\widehat{AFK}$ et $\widehat{KFC}$ ont pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

c) Le triangle ABC est équilatéral et les droites (FK) et (AC) se coupent en E. La droite qui est la hauteur du triangle ABC qui passe par F est également la médiatrice du segment [AC]. On en déduit que le point E est le milieu du segment [AC].

2. Le quadrilatère ABFK est un parallélogramme alors $FK = AB = 1$. (1)
Le triangle ABC est isocèle en A avec $AB = 1$. Il s'ensuit que $AC = 1$. Comme le triangle AFC est équilatéral donc, $AF = AC = 1$. (2)
De (1) et (2), il résulte que : $AF = KF = 1$.

3. a) De ce qui précède, on a : $FA = FK = FC$. Donc les points A, F et C appartiennent à un cercle de centre F. L'angle $\widehat{KAC}$ est un angle inscrit dans ce cercle qui intercepte l'arc $\widehat{KC}$ et est associé à l'angle au centre $\widehat{KFC}$. Par suite, $\text{mes}\widehat{KAC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{KFC} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$

$$\text{mes}\widehat{KAC} = \frac{\pi}{12}$$

Puisque le point E appartient au segment [AC] alors, $\text{mes}\widehat{KAE} = \text{mes}\widehat{KAC} = \frac{\pi}{12}$.

On conclut que $\frac{\pi}{12}$ est une mesure de l'angle $\widehat{KAE}$.

Autrement : $FA = FK$ donc le triangle AFK est isocèle en F.

Il en découle que $\text{mes}\widehat{AFK} = \dfrac{\pi}{6}$. De plus, $2\text{mes}\widehat{KAF} + \text{mes}\widehat{AFK} = \pi$.

Par suite, , $2\text{mes}\widehat{KAF} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ donc $\text{mes}\widehat{KAF} = \dfrac{5\pi}{12}$.

D'autre part comme les angles $\widehat{KAC}$ et $\widehat{CAF}$ sont adjacents alors

$$\text{mes}\widehat{KAF} = \text{mes}\widehat{KAC} + \text{mes}\widehat{CAF}$$

$$\text{mes}\widehat{KAC} = \text{mes}\widehat{KAF} - \text{mes}\widehat{CAF}$$

$$\text{mes}\widehat{KAC} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{mes}\widehat{KAC} = \frac{\pi}{12}$$

De plus le point E appartient au segment [AC] donc, $\text{mes}\widehat{KAE} = \text{mes}\widehat{KAC} = \dfrac{\pi}{12}$.

Conclure.

b) Le point E appartient au segment [AC] donc, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens.
Le quadrilatère ABFK est un parallélogramme donc les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et de même sens

Par conséquent $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BF}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AK}})$.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AK}})$ est de sens direct donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AK}}) = \text{mes}\widehat{KAE} = \dfrac{\pi}{12}$

On en déduit que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BF}}) = \dfrac{\pi}{12}$.

Ce qui signifie que la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BF}})$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

4. a) Les droites (AC) et (EF) sont perpendiculaires donc le triangle AFE est rectangle en E.

Il en découle que : $\cos\widehat{AFE} = \dfrac{EF}{AF}$

$$EF = AF \times \cos\widehat{AEF}$$

Donc, $EF = 1 \times \cos\dfrac{\pi}{6}$

$$EF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part, E appartient au segment [FK]. Il s'ensuit que :

$$FK = EK + EF$$

Donc, $EK = FK - EF$

$$EK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par ailleurs, le triangle AEK est rectangle en E. Il en découle que d'après le théorème de Pythagore

On a : $AK^2 = EK^2 + EA^2 = (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\dfrac{1}{2})^2 = 1 - 2\times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + \dfrac{1}{4}$

$$= 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \sqrt{3} + 1$$

On conclut que : $AK^2 = 2 - \sqrt{3}$.

b) On a : $(1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3$$

Donc, $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

Par ailleurs, le triangle AEK est rectangle en E. Il s'ensuit que :

$$\cos KAE = \frac{AE}{AK}$$

$$(\cos\widehat{KAE})^2 = (\frac{AE}{AK})^2$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{AE^2}{AK^2}$$

Donc, $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{1}{4}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4(4-3)} = \dfrac{2\times(2+\sqrt{3})}{2\times 4} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}$

Par conséquent, $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{8}$

5. On a : $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{8}$

Donc, $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{2})^2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = (\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})^2$$

Il s'ensuit que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ou $\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\frac{\pi}{12} > 0$.

Par suite, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\times 2}$

Par conséquent, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

6. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{3\times 4} = \frac{\pi}{12}$ donc $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Et, $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

On en déduit que : $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Produit scalaire

1

1. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos 0$

$= 2\times 3\times 1$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\pi$

$= 4\times 1\times(-1)$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = -4$.

2. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\frac{\pi}{2}$

$= 7\times 2\times 0$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\frac{\pi}{3}$

$= 8\times 9\times\frac{1}{2}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = 36$.

3. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\frac{2\pi}{3})$

$= 4\times\frac{5}{2}\times(-\frac{1}{2})$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = -5$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\pi$

$= \frac{2}{5}\times\frac{25}{6}\times(-1)$

$\vec{u}.\vec{v} = -\frac{5}{3}$.

4. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = 2$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(-\frac{\pi}{4})$

$= 7\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$.

5. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\frac{5\pi}{6})$

$= \frac{14}{3}\times\frac{6}{7}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = -2\sqrt{3}$.

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(-\frac{3\pi}{4})$

$= \sqrt{3}\times\frac{4}{3}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

2

1\. a) $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{2}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = \frac{3}{2}$.

b) $2\vec{v}.\vec{u} = 2 \times (\vec{v}.\vec{u}) = 2 \times (\vec{u}.\vec{v}) = 2 \times \frac{3}{2}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = 3$.

c) $\vec{u}.(3\vec{v}) = 3(\vec{u}.\vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2}$

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = \frac{9}{2}$.

d) $7\vec{u}.(-4\vec{v}) = 7 \times (-4) \times (\vec{u}.\vec{v}) = -7 \times 4 \times \frac{3}{2}$

Donc, $7\vec{u}.(-4\vec{v}) = -42$.

2\. a) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = (\sqrt{3})^2$

Donc, $\vec{u}.\vec{u} = 3$.

b) $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} = 3 + \frac{3}{2}$

Donc, $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{9}{2}$.

c) $\vec{u}.(\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - 2\vec{u}.\vec{v} = 3 - 2 \times \frac{3}{2}$

Donc, $\vec{u}.(\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$.

d) $2\vec{u}.(-3\vec{u} + 5\vec{v}) = -6 \times (\vec{u}.\vec{u}) + 10 \times (\vec{u}.\vec{v})$

$= -6 \times 3 + 10 \times \frac{3}{2}$

Donc, $2\vec{u}.(-3\vec{u} + 5\vec{v}) = -3$.

3\. a) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$= ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1$

Donc, $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 2$.

b) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \times (\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$

$= ||\vec{u}||^2 - 2 \times (\vec{u}.\vec{v}) + ||\vec{v}||^2$

$= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{3}{2} + 1^2$

$= 3 - 3 + 1$

Donc, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = 1$.

c) $(2\vec{u}+3\vec{v})^2 = (2\vec{u})^2 + 2(2\vec{u}).(3\vec{v}) + (3\vec{v})^2$

$= 2^2 \times \vec{u}^2 + 12 \times (\vec{u}.\vec{v}) + 3^2 \times \vec{v}^2$

$= 4 \times ||\vec{u}||^2 + 12 \times \frac{3}{2} + 9 \times ||\vec{v}||^2$

$= 4 \times 3 + 18 + 9 \times 1$

Donc, $(2\vec{u}+3\vec{v})^2 = 39$.

d) Posons $A = (5\vec{u} - 2\vec{v}).(7\vec{u} + 4\vec{v})$

$A = 35 \times \vec{u}^2 + 20(\vec{u}.\vec{v}) - 14 \times (\vec{v}.\vec{u}) - 8 \times \vec{v}^2$

$= 35 \times 3 + 20 \times \frac{3}{2} - 14 \times \frac{3}{2} - 8 \times 1$

$= 105 + 30 - 21 - 8 = 106$.

Donc, $(5\vec{u} - 2\vec{v}).(7\vec{u} + 4\vec{v}) = 106$.

3

1\. a) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{3}{4})^2$

$= \frac{4}{9} + \frac{9}{16} = \frac{145}{144}$

Donc, $\vec{u}.\vec{u} = \frac{145}{144}$.

b) On a: $\vec{u}(\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$ et $\vec{u}+\vec{v}(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}; \frac{3}{4} - \frac{1}{2})$

Donc, $\vec{u}(\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$ et $\vec{u}+\vec{v}(2; \frac{1}{4})$

$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = 2 \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} + \frac{3}{16}$

$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{73}{48}$.

c) $\vec{u}(\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$ et $\vec{u} - 2\vec{v}(\frac{2}{3} - 2 \times \frac{4}{3}; \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{2})$

Donc, $\vec{u}(\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$ et $\vec{u} - 2\vec{v}(-2; \frac{7}{4})$

$\vec{u}.(\vec{u} - 2\vec{v}) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} = -\frac{1}{48}$.

2\. a) $\vec{u}+\vec{v}(2; \frac{1}{4})$ et $\vec{u}-\vec{v}(-\frac{2}{3}; \frac{5}{4})$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 2 \times (-\frac{2}{3}) + \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = -\frac{63}{48}$.

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = -\frac{21}{16}$

b) On a: $\vec{u}-\vec{v}(-\frac{2}{3}; \frac{5}{4})$

Donc, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{5}{4})^2 = \frac{259}{225}$

En définitive, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \frac{259}{225}$.

c) On a: $3\vec{u}(3 \times \frac{2}{3}; 3 \times \frac{3}{4})$ et $12\vec{v}(12 \times \frac{4}{3}; 12(-\frac{1}{2}))$

$3\vec{u}(2; \frac{9}{4})$ et $12\vec{v}(16; -6)$

$3\vec{u} + 12\vec{v}(2+16; \frac{9}{4} - 6)$

$3\vec{u} + 12\vec{v}(18; -\frac{15}{4})$

$(3\vec{u} + 12\vec{v})^2 = \frac{5409}{16}$

4

Les points E et F appartiennent au cercle de diamètre [AB]. Il en découle que les triangles ABE et ABF sont respectivement rectangles en E et F. Par conséquent, on a : (AE) $\perp$ (BE)

Or, (AE)//(BF).

On en déduit que : (BE) $\perp$ (BF)

Donc, $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BF} = 0$

Puisque : (AE) $\perp$ (BE) et (BE) $\perp$ (BF)

alors les points E et B sont respectivement les projetés orthogonaux de A et F sur la droite (BE). Il s'ensuit que :

$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{FA} = \overline{BE} \times \overline{BE} = BE^2$.

On conclut que : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{FA} = BE^2$.

5

1\. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$

$= 2 \times 4 \cos\frac{2\pi}{3}$

$= 2 \times 4(-\frac{1}{2})$

$= -4$.

2\. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$.

De plus, les points A, O et H étant alignés,

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overline{OA} \times \overline{OH}$.

Il s'ensuit que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$.

Puisque $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -4$.

Autrement :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BH}$.

Le point H est le projeté orthogonal de B sur (OA) donc les droites (BH) et (OA) sont perpendiculaires.

Par conséquent $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BH} = 0$. On en déduit que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

On a $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -4$.

3. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -4$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et de sens opposés, c'est-à-dire que le point O appartient au segment [AH].

D'autre part, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = -4$ donc,

$-\ OA \times OH = -4$

$2 \times OH = 4$.

$OH = 2$.

OH = OA et O appartient au segment [AH]. Par conséquent, O est le milieu du segment [AH].

6

1. Le point M appartient au cercle de diamètre [AB] donc, les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.
Or le point N appartient à la droite (BM). Par conséquent, (AM) est perpendiculaire à (BN). On conclut que $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AM} = 0$.

2. On a : $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AM} = 0$.

$\overrightarrow{BN}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = 0$

$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.(-\overrightarrow{AB})$

Donc, $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$.

3. H appartient (AB) et (HN) perpendiculaire à (AB) donc H est le projeté orthogonal de N sur la droite (AB). Il s'ensuit que :

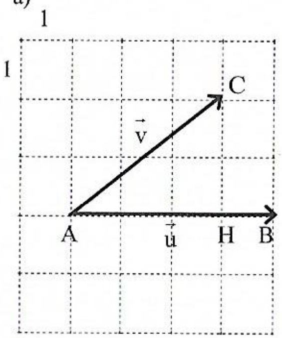
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BN} = \overline{BA} \times \overline{BH}$.

Donc, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BN} = BA \times BH$ car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires et de même sens.

Les points A, B et H sont fixes. Ceci implique que $BA \times BH$ est une constante. Il en résulte que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M parcourt ($\mathcal{C}$).

7

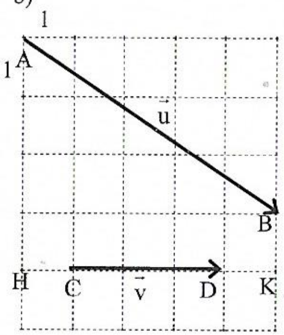
a)



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = AB \times AH = 4 \times 3$;

$\vec{u}.\vec{v} = 12$.

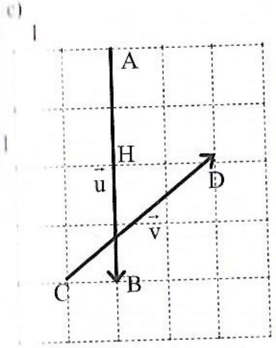
b)



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{HK} \times \overline{CD} = HK \times CD = 5 \times 3$;

$\vec{u}.\vec{v} = 15$.

c)



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{BH} = -AB \times BH = -4 \times 2$;

$\vec{u}.\vec{v} = -8$.

8

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}$

Donc, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - MA^2$.

2. a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 4 - 4$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$

Par conséquent : $(MA) \perp (AB)$ et $MA = 2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 11 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 11 - 9$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 2$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). Par suite, $\overline{HA} \times \overline{AB} = 2$.

$HA \times AB = 2$.

$HA = 1$.

On conclut que M appartient au cercle de centre A de rayon 3 et à la droite passant par H perpendiculaire à (AB) avec HA = 1 tel que les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires de meme sens.

Figure a)

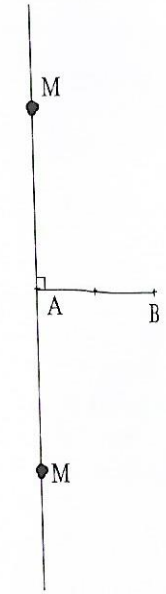
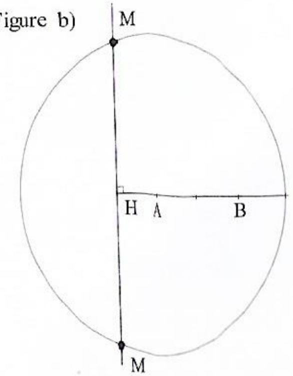


Figure b)



9

AHDB est un carré. Donc, H et D sont les projeté orthogonaux respectifs de A et B sur la droite (AB). Par suite,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB} = AB^2 = 1$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD} = 1$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HD}\times\overrightarrow{DC} = -HD\times DC = -2\times 1 = -2$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = -2$.

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HC}\times\overrightarrow{HC} = HC^2 = 4$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} = 4$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -2 + \sqrt{2}\times 1\times\cos\frac{3\pi}{4} = -3$.

10

1. Voir figure.

2. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\frac{2\pi}{3}$

$BC^2 = 36 + 16 - 2\times 6\times 4\times(-\frac{1}{2})$

$BC^2 = 36 + 16 - 2\times 6\times 4\times(-\frac{1}{2}) = 52 + 24 = 76$

$BC = 2\sqrt{19}$.

3. D'après le théorème d'Al Kashi,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\times BC\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\times BC};$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{96}{24\sqrt{19}} = \frac{4\sqrt{19}}{19};$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{4\sqrt{19}}{19}.$$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\times BC\times\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\times BC};$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = \frac{7\sqrt{19}}{38}.$$

4. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Par conséquent, les triangles AHC et AHB sont rectangles en H.

Donc, $\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{HB}{AB}$;

$$HB = AB\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = 6\times\frac{4\sqrt{19}}{19} = \frac{24\sqrt{19}}{19};$$

$$HB = \frac{24\sqrt{19}}{19}.$$

De meme, $\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = \frac{HC}{AC}$;

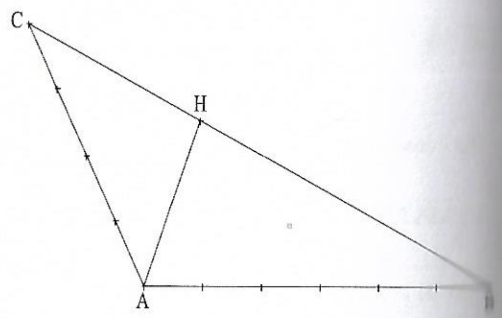
$$HC = AC\times\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = \frac{14\sqrt{19}}{19};$$

$$HC = \frac{14\sqrt{19}}{19}.$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHB, $AB^2 = AH^2 + HB^2$

$AH^2 = AB^2 - HB^2$

$AH = \frac{6\sqrt{57}}{19}$.



11

1. a) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABD,

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\times AD\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$

$BD^2 = 36 + 12 - 2\times 12\sqrt{3}\times\cos\frac{5\pi}{6}$;

$BD^2 = 48 + 24\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 36 = 84$;

$BD = 2\sqrt{21}$.

b) D'après le théorème de la médiane dans le trinagle BCD, $BC^2 + DC^2 = 2(\frac{AC}{2})^2 + \frac{BD^2}{2}$

$AC^2 = 2(BC^2 + DC^2) - BD^2 = 96 - 84 = 12$;

$AC = 2\sqrt{3}$.

c) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle OCD,

$DC^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC\times OD\times\cos(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) = \frac{OC^2 + OD^2 - DC^2}{2OC\times OD} = \frac{12}{2\sqrt{3}\times\sqrt{21}};$$

$$\cos\widehat{DOC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) = -\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= AB^2 + AB\times AD\times\cos\widehat{DAB}$

$= 36 + 6\times 2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 36 - 18 = 18$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 18$.

b) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$

$= AB^2 + AD^2 + 2\times\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= 36 + 12 + 2\times(-18) = 12$.

Donc, $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = 2\sqrt{3}$.

Autrement

$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = AC = 2\sqrt{3}$.

12

1. Voir figure.

2. D'après le théorème d'Al-Kashi,

$QP^2 = QR^2 + RP^2 - 2RP\times QR\times\cos(\widehat{\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ}})$

$QP^2 = 100 + 25 - 2\times 10\times 5\cos(-\frac{\pi}{3})$;

$QP^2 = 125 - 100\times\frac{1}{2} = 125 - 50 = 75$;

$QP = 5\sqrt{3}$.

De plus, $QP^2 + RP^2 = 75 + 25 = 100$;

$QP^2 + RP^2 = QP^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, On conclut que RPQ est rectangle en P.

3. Le triangle RPQ est rectangle en P et H est le projeté orthogonal de P sur (QR).

Donc, $RP^2 = \overrightarrow{RH}\times\overrightarrow{RQ}$

$RP^2 = RH\times RQ$;

$RH = \frac{RP^2}{RQ} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$;

$RH = \frac{5}{2}$.

D'autre part, $QP^2 = \overrightarrow{QH}\times\overrightarrow{QR}$

$QP^2 = QH\times QR$

$QH = \frac{QP^2}{QR} = \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$;

$QH = \frac{15}{2}$.

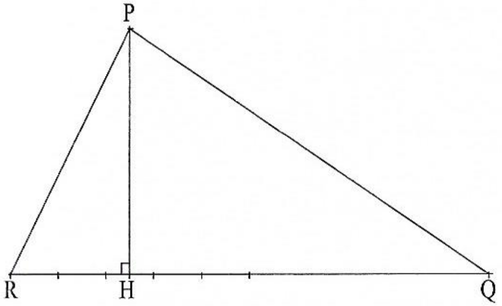
H étant le projeté orthogonal de P sur (RQ), les droites (PH) et (RQ) sont donc perpendiculaires.

Il s'ensuit que le triangle HPR est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$RH^2 + PH^2 = RP^2.$

Donc, $PH^2 = RP^2 - RH^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$;

$PH = \frac{\sqrt{75}}{2}$.



13

1. Vor figure.

2. $AB^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100$;

$AB^2 + BC^2 = AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en B.

14

1. Voir figure.

2. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Comme le triangle ABC est isocèle en A alors la droite (AH) est une médiane du triangle ABC. Donc, d'après le théorème de la médiane, dans le triangle ABC, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$AH^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{BC^2}{4}$$

$$AH^2 = \frac{1}{2}(9 + 9) - \frac{16}{4} = 9 - 4 = 5; \quad AH = \sqrt{5}.$$

2. Le triangle AHC est rectangle en H. Par conséquent, H est le projeté orthogonal de C sur (AH). Il s'ensuit que :

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AH} = AH^2 = 5$; $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = 5$.

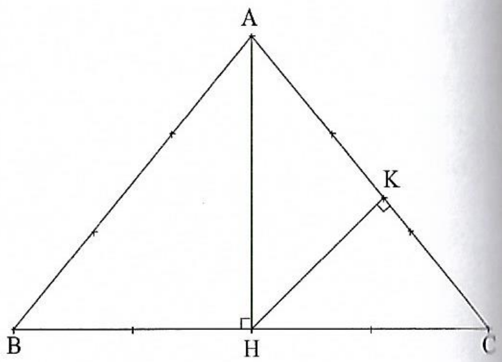
D'autre part, K est le projeté orthogonal de H sur (AC). Par suite,

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} \times \overrightarrow{AC} = AK \times AC$ car les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de meme sens.

On conclut que : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = 3AK$.

3. De la question 2, on a : $3AK = 5$.

On en déduit que : $AK = \frac{5}{3}$.



15

1. a) Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral. Donc, la droite $(O\Omega)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. On en déduit que :

$mes\widehat{\Omega OB} = \frac{\pi}{6}$.

Par suite, $mes\widehat{KOJ} = mes\widehat{\Omega OJ} - mes\widehat{\Omega OB} = \frac{\pi}{3}$;

Dans le triangle OKJ, on a :

$mes\widehat{OKJ} + mes\widehat{KOJ} + mes\widehat{OJK} = \pi.$

Il en résulte que : $mes\widehat{OKJ} = \frac{5\pi}{12}$.

b) Dans le triangle équilatéral OAB, I est le milieu du segment [AB]. Donc, la droite (OI) est la hauteur issue de O. Par conséquent, le triangle OIA est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, on a : $OI^2 + IA^2 = OA^2$; $OI = \frac{3}{2}$.

Or, $O\Omega = \frac{2}{3}OI$.

On conclut que : $O\Omega = 1$.

2. Le triangle est rectangle isocèle de sens direct avec $O\Omega = 1$.

Donc, $O\Omega = OJ = 1$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que le repère (O,Ω, J) est orthonormé direct.

3. D'une part, les droites (OI) et (AB) sont perpendiculaires et ; d'autre part, le triangle $O\Omega J$ étant rectangle en O, alors les droites (OI) et (AB) sont perpendiculaires. Il s'ensuit que les droites (OJ) et (AB) sont parallèles.

4. a) $\overrightarrow{\Omega J} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{\Omega J}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et de meme sens. De plus le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ est unitaire et $IB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent, $\overrightarrow{IB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ}$.

Puisque $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors, $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{OI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O\Omega}$. Donc, $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}$.

Il s'ensuit que : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 0 \\ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

On conclut que, $B\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ dans le repère (O,Ω, J)

5. $BO = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$;

$\Omega J = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$BO = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$; $BO = \sqrt{6}$.

On a : $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega J}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La base $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OJ})$ étant orthonormée, on a :

$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{\Omega J} = -\frac{3}{2} \times (-1) + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times 1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$;

$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{\Omega J} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

6. $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{\Omega J} = BO \times \Omega J \times \cos(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{\Omega J}})$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{\Omega J}}) = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{\Omega J}}{BO \times \Omega J} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{18}}{12}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{\Omega J}}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

De plus, $\cos(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{\Omega J}}) = \cos\widehat{OKJ} = \cos\frac{5\pi}{12}$.

Par conséquent, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

16

1. Les angles $\widehat{IPQ}$ et $\widehat{IAQ}$ sont inscrits dans le cercle (C) et intercepent un meme arc. Donc,

$\text{mes}\widehat{IPQ} = \text{mes}\widehat{IAQ} = \frac{\pi}{6}$; $\text{mes}\widehat{IPQ} = \frac{\pi}{6}$.

D'autre part, les angles $\widehat{IQP}$ et $\widehat{IAP}$ sont inscrits dans le cercle (C) et intercepent un meme arc.

$\text{mes}\widehat{IQP} = \text{mes}\widehat{IAP}$.

De plus, P appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [IA].Donc, IAP est un triangle rectangle en P tel que IP = IA. Par conséquent, IAP est un triangle rectangle isocèle en P. Il en résulte que :

$\text{mes}\widehat{IAP} = \frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit que : $\text{mes}\widehat{IQP} = \frac{\pi}{4}$.

2. a) Q appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [IA].Donc, IAQ est un triangle rectangle en Q.Il en découle que Q est le projeté orthogonal de A sur la droite (IQ).

Par suite, $\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IA} = \overline{IQ} \times \overline{IQ} = IQ^2$; $\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IA} = IQ^2$.

Le triangle IAP étant rectangle en P, le point P est le projeté orrthogonal de A sur la droite (IP).

Donc, $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IA} = \overline{IP} \times \overline{IP} = IP^2$; $\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IA} = IP^2$.

b) On a : $\overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IA} = IQ^2 - IP^2$

$$\overrightarrow{IA}.(\overrightarrow{IQ} - \overrightarrow{IP}) = (\overrightarrow{IQ} - \overrightarrow{IP}).(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IP})$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IP})$$

$$= \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IP}$$

On en déduit que : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IQ}$.

3. $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QI} = QP \times QI \times \cos(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QI}})$

$$= QP \times QI \times \cos \widehat{IQP}$$

$$= QP \times QI \times \cos \frac{\pi}{4};$$

Donc, $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QI} = QP \times QI \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PI} = PQ \times PI \times \cos(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PI}})$$

$$= PQ \times PI \times \cos \widehat{IPQ}$$

$$= PQ \times QI \times \cos \frac{\pi}{6};$$

$$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PI} = PQ \times PI \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IQ}$.

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.(-\overrightarrow{PI}) + (-\overrightarrow{QP}).(-\overrightarrow{QI})$$

$$= \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QI} - \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PI}$$

$$= QP \times QI \times \frac{\sqrt{2}}{2} - PQ \times PI \times \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Par suite, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = PQ(QI \times \frac{\sqrt{2}}{2} - PI \times \frac{\sqrt{3}}{2})$.

5. Le triangle IQA étant rectangle en Q, on a :

$$\sin \widehat{IAQ} = \frac{IQ}{IA}$$

$$IQ = IA \sin \widehat{IAQ}$$

De plus, $\text{mes}\widehat{IAQ} = \frac{\pi}{6}$ et $IA = 2\sqrt{2}$

Donc, $IQ = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$; $IQ = \sqrt{2}$.

Le triangle IAP est rectangle isocèle en P.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$2IP^2 = IA^2;$$

$$2IP^2 = 8$$

On en déduit que : $IP = 2$.

C est le projeté orthogonal de Q sur (IA). Donc, le triangle IQC est rectangle en C. Il en découle

que : $\cos \widehat{CIQ} = \frac{IQ}{IC}$; $IC = IQ \cos \widehat{CIQ}$.

Or C appartient à la demi –droite [IA).

Par conséquent, $IC = IQ \cos \widehat{AIQ}$.

Comme les angles $\widehat{AIQ}$ et $\widehat{IAQ}$ sont complémentaires et que la mesure de $\widehat{IAQ}$ est

$\frac{\pi}{6}$ alors, $\text{mes}\widehat{AIQ} = \frac{\pi}{3}$.

Il en résulte que :

$$IC = IQ \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad IC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D est le projeté orthogonal de P sur (IA) et le triangle IAP est isocèle en P. Donc la droite (DP) qui est la hauteur issue de P est également la médiatrice du segment [IA]. Par conséquent, D est le milieu du segment [IA]. On en déduit que : $AD = \sqrt{2}$.

$$CD = AI - (IC + AD) = 2\sqrt{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

On conclut que : $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. C et D sont respectivement les projetés orthogonaux des points Q et P sur la droite (IA). Donc, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = \overline{IA} \times \overline{DC}$.

De plus, les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens opposés. Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = -IA \times DC = -2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2;$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = -2.$$

7. On a : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = -2$ et

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = PQ(QI \times \frac{\sqrt{2}}{2} - PI \times \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Donc, $PQ(QI \times \frac{\sqrt{2}}{2} - PI \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = -2$

$$PQ(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = -2$$

$$PQ(1 - \sqrt{3}) = -2$$

$$PQ = \frac{-2}{1-\sqrt{3}}; \quad PQ = 1 + \sqrt{3}.$$

8. On a : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = IA \times PQ \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{PQ}})$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{PQ} = 2\sqrt{2} \times (1 + \sqrt{3}) \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{PQ}}) = 2$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{PQ}}) = \frac{-2}{2\sqrt{2}\times(1+\sqrt{3})} = \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-4}.$$

On conclut que : $\text{os}(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{PQ}}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Droites et cercles

1

a) On a : $10-8\times2+6=10-16+6$

$=16-16$

$=0.$

Donc $A\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

On a : $-1-8\times1+6=-1-8+6$

$=-3$

Par conséquent, $-1-8\times1+6\neq0$

Donc $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $(\mathcal{D})$.

On a : $0-8\times\frac{3}{4}+6=-6+6$

$=0.$

$C\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

b) On a : $10+4\times2-3=10+8-3$

$=15$

Donc $10+4\times2-3\neq0$

Il en découle que $A\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $(\mathcal{D})$.

On a : $-1+4\times1-3=-1+4-3$

$=-1+1$

$=0.$

$B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

On a : $0+4\times\frac{3}{4}-3=3-3$

$=0.$

$C\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

c) On a : $10-11\times2+12=10-22+12$

$=-12+12$

$=0.$

Donc $A\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

On a : $-1-11\times1+12=-12+12$

$=0.$

Donc $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$.

On a : $0-11\times\frac{3}{4}+12=-\frac{33}{4}+12$

$=\frac{15}{4}$

Par conséquent $0-11\times\frac{3}{4}+12\neq0$

Donc $C\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $(\mathcal{D})$

2

1. a) $\vec{n}(2;3)$ b) $\vec{n}(-2;1)$ c) $\vec{n}(1;1)$ d) $\vec{n}(2;0)$

2. a) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ d) $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$

3. a) $2x=y \Leftrightarrow 2x-y=0$; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

b) $x=-y \Leftrightarrow x+y=0$; $\vec{n}(1;1)$

c) $x=3(-5y+2) \Leftrightarrow x-3(-5y+2)=0$

$\Leftrightarrow x+15y-6=0$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix}$

d) $4(-x+1)=2(-y) \Leftrightarrow -4x+4-2(-y)=0$

$\Leftrightarrow -4x+2y+4=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

4. a) $\frac{2x+3y-1}{5}=0 \Leftrightarrow 2x+3y-1=0$

$\vec{n}(2;3)$

b) $\frac{4x-8y+1}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{4}{2}x+\frac{-8}{2}y+\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2x-4y+\frac{1}{2}=0$

$\vec{n}(2;-4)$

c) $\frac{6x+4y-32}{8}=-5 \Leftrightarrow 6x+4y-32=-40$

$\Leftrightarrow 6x+4y+8=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

d) $\frac{2(y-6x)+20}{4}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 6(y-6x)+60=8$

$\Leftrightarrow -36x+6y+52=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-36\\6\end{pmatrix}$

5. a) $y=-2x+2 \Leftrightarrow 2x+y-2=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

b) $y=\frac{-2x+3}{5} \Leftrightarrow 5y=-2x+3$

$\Leftrightarrow 2x+5y-3=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

c) $\frac{y}{2}=\frac{-3(2-9x)}{12} \Leftrightarrow 12y=-6(2-9x)$

$\Leftrightarrow 12y=-12+54x$

$\Leftrightarrow -54x+12y+12=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-54\\12\end{pmatrix}$

d) $\frac{y-4}{3}=\frac{-2x+7}{5} \Leftrightarrow 5(y-4)=3(-2x+7)$

$\Leftrightarrow 5y-20=-6x+21$

$\Leftrightarrow 6x+5y-41=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$

3

a) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$

Par suite, $M\in(D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 1\\y+2 & 2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-3)-(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 2x-6-y-2=0$

$\Leftrightarrow 2x-y-8=0.$

Donc, $2x-y-8=0$ une équation cartésienne de (D).

b) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$

Par suite, $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 4 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 4(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Donc $x + 2y - 2 = 0$ une équation cartésienne de (D).

c) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$

Par suite, $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -5 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-3) - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 5y + 6 = 0$$

Donc $-2x - 5y + 6 = 0$ une équation cartésienne de (D).

4

a) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Par suite, $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y+1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(x-1) - 3(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 8 - 3y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x - 3y + 5 = 0$$

Donc $-8x - 3y + 5 = 0$ une équation cartésienne de (D).

b) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par suite, $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AB}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & 8 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 8y + 21 = 0$$

Donc $x - 8y + 21 = 0$ une équation cartésienne de (D).

c) Vecteur directeur de (D) : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$

Donc, une équation de (D) est de la forme

$10x - 16y + c = 0$

De plus le point A appartenant à (D),

On a : $10 \times (-7) - 16 \times (-6) + c = 0$

$$-70 + 90 + c = 0$$

$$c = -26$$

Donc $10x - 16y - 26 = 0$ une équation cartésienne de (D).

5

On notera $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et $\vec{n'}$ un vecteur normal à (D').

1. a) On a : $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Et, $\det(\vec{n},\vec{n'}) = 2 \times (-12) - (-4) \times 6$

$$= -24 + 24 = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Les droites (D) et (D') sont parallèles.

b) On a : $\vec{n}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

Et, $\det(\vec{n},\vec{n'}) = 12 \times 4 - 10 \times 5$

$$= -2 \neq 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires.

Les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

2. a) On a : $\vec{n}\left(-\frac{7}{2};\frac{5}{3}\right)$ et $\vec{n}\left(\frac{7}{5};-\frac{2}{3}\right)$

Et, $\det(\vec{n},\vec{n'}) = -\frac{7}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{3} \times \frac{7}{5}$

$$= \frac{7}{3} - \frac{7}{3} = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Les droites (D) et (D') sont parallèles.

b) On a : $\vec{n}\left(\frac{8}{15};\frac{5}{2}\right)$ et $\vec{n}\left(\frac{28}{25};\frac{21}{4}\right)$

Et, $\det(\vec{n},\vec{n'}) = \frac{8}{15} \times \frac{21}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{28}{25}$

$$= \frac{14}{5} - \frac{14}{5} = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Les droites (D) et (D') sont parallèles.

6

On notera $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et $\vec{n'}$ un vecteur normal à (D').

1. a) On a : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Et, $\vec{n}.\vec{n'} = 1 \times 2 + (-1) \times 2$

$$= 2 - 2 = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.

b) On a : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Et, $\vec{n}.\vec{n'} = (-1) \times 3 + 3 \times 1$

$$= 3 - 3 = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Par conséquent les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.

2. a) : $\vec{n}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$

Et, $\vec{n}.\vec{n'} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (-1) \times \sqrt{6}$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.

b) $(D): \frac{1}{2}x + \frac{10}{3}y - \frac{5}{7} = 0$

$(D'): \frac{5}{2}x - \frac{3}{8}y + \frac{2}{3} = 0$

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2};\frac{10}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}\frac{5}{2};-\frac{3}{8}\end{pmatrix}$

Et, $\vec{n}.\vec{n'} = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} + \times\frac{10}{3}(-\frac{3}{8})$

$= \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Par conséquent les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.

7

1. a) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

b) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 35 = 0$

c) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y+2\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$

2. a) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-5\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-5)^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 18x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 18x + y^2 - 10y + 33 = 0$

b) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 8y + 8 = 0$

c) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y+7\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 + 14y - 47 = 0$

3. a) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{3}^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y - 1 = 0$

b) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-5\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 4^2 \times (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - 10y + 50 = 32$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - 10y + 18 = 0$

c) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\y-1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow AM = R$

$\Leftrightarrow AM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = (\frac{2}{3})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{29}{36} = 0$

8

1. a) Le centre $I\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$ et le rayon 3

b) Le centre $I\begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}$ et le rayon 5.

c) Le centre $I\begin{pmatrix}-15\\-1\end{pmatrix}$ et le rayon 2

2. a) Le centre $I\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ et le rayon 1

b) Le centre $I\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et le rayon $\sqrt{3}$. .

c) Le centre $I\begin{pmatrix}9\\-16\end{pmatrix}$ et le rayon $2\sqrt{2}$.

9

1. a) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 3^2$

Donc, (C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et de rayon 3.

b) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

Donc, (C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1.

c) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x-7)^2 + y^2 - 8y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)^2 + (y-4)^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

Donc, (C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et de rayon 4.

2. a)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ de rayon $\sqrt{13}$.

b)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y-1)^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{6})^2$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, de rayon $2\sqrt{6}$.

c)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{26}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = (\frac{\sqrt{26}}{2})^2$$

(C) est le cercle de centre $I(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

3. a) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ de rayon $\sqrt{2}$

b) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 9(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+1)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+1)^2 = (\frac{4}{3})^2$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{4}{3}$

c) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (4(x-\frac{1}{4}))^2 + (4(y+4))^2 = 64$

$$\Leftrightarrow 16(x-\frac{1}{4})^2 + 16(y+4)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{4})^2 + (y+4)^2 = 4$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-4\end{pmatrix}$ et de rayon 2.

4. a) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x(x+1) + (y-1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + (y-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$$

(C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ de rayon $\sqrt{3}$.

b)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow$ b) $(x+3)^2 + (y+5)(y-5) = 11$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 - 25 = 11$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 36$$

Donc, (C) est le cercle de centre $I\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 6.

10

a) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-6\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-3) + (y-2)(y-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 + y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 - 8y + 27 = 0$$

b) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y+7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-4) + (y+7)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 + y^2 + 3y - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 3y - 36 = 0$$

c) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-10\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+6\\y\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-10)(x-6) + (y+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 60 + y^2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + y^2 + y + 60 = 0$$

11

a) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2 = 0 \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ (y-2)^2+y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y^2-4y+4+y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2 \\ 2y^2-4y+4 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y^2-2y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y^2-2y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ (y-1)^2-1 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y-1 = 2 \text{ ou } y-1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y-1 = 2 \text{ ou } y-1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2 \\ y = 3 \text{ ou } y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ et } x = -1-3 \\ \text{ou} \\ y = 3 \text{ et } x= 3-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ et } x = -4 \\ \text{ou} \\ y = 3 \text{ et } x= 1 \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que la droite (D) et le cercle (C) ont deux points en commun qui sont les points de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ (x-1)^2+(y+7)^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ (x-1)^2+(2x-4+7)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ (x-1)^2+(2x+3)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2-2x+1+4x^2+12x+9 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ 5x^2+10x+10 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2+2x+2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2+2x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x = -1 \end{cases}$$

La droite $(\mathcal{D})$ et le cercle $(\mathcal{C})$ ont un seul point d'intersection, le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

c) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ (x-2)^2+(y+1)^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ (x-2)^2+(x+2)^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2+1=0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la droite $(\mathcal{D})$ et le cercle $(\mathcal{C})$ n'ont pas de points en commun. Donc leur intersection est l'ensemble vide.

12

a) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 \\ (x-2)^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1+y^2-2y+1 = 2 \\ x^2-4x+4+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y = 0 \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2x-2y = 0 \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y= 0 \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+x^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2=4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x-2)= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ et } y = 2 \end{cases}$$

On conclut que $(\mathcal{C})$ et admettent deux points d'intersection de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (x-1)^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2-2x+1+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ -2x+2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2+y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y = 0$$

Par conséquent, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ admettent un seul point d'intersection de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

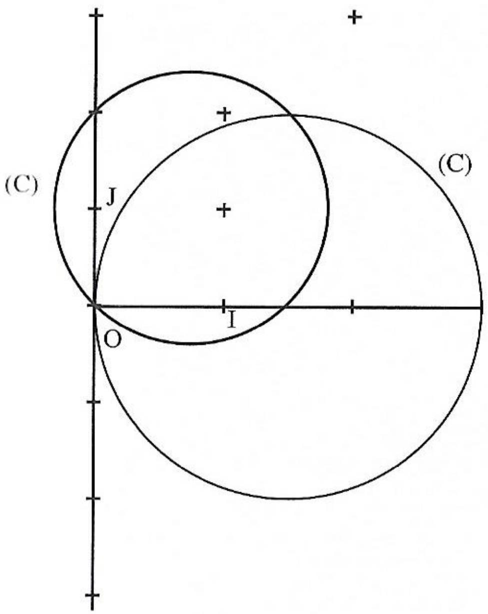
c) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.

$$M \in (C)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=1\\(x+1)^2+(y+1)^2=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=-\dfrac{7}{9}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution. Donc (C) et (C') n'admettent pas de points intersections.

Figure a)



13

a) Le centre du cercle (C) est le point $I\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

On a : $(-1-1)^2+(3-4)^2 = 4+1 = 5.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ appartient à (C).

On a : $2\times(-1)+3+-1 = -3+3 = 0.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ appartient à (T).

De plus, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (T).

Par conséquent, la droite (T) est la tangente au cercle (C) en $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

b) Le centre du cercle (C) est le point $I\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

On a : $8\times4+6\times2-44 = 44-44 = 0.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ appartient à (T).

Et, $4^2+(2+1)^2 = 16+9 = 25.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ appartient à (C).

Comme $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ est normal à (T).

On conclut que la droite (T) est la tangente au cercle (C) en $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

c) Le centre du cercle (C) est le point $I\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$.

On a : $(-6+3)^2+(0+3)^2 = 9+9$

$= 18.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ appartient à (C).

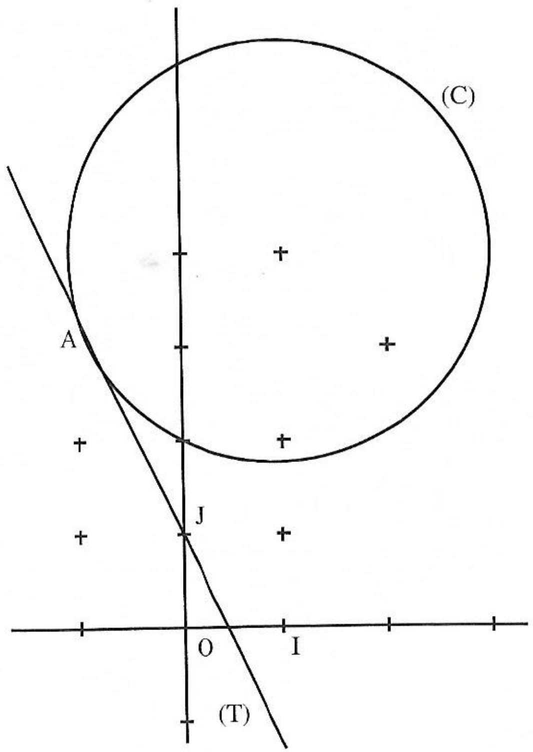
On a : $-6-0+6 = -6+6 = 0.$

Donc, le point $A\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ appartient à (T).

De plus, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (T).

Par conséquent, la droite (T) est la tangente au cercle (C) en $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Figure a)



Homothéties

1

1. a) B est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
b) D est l'image de C par l'homothétie de centre F et de rapport -3.
c) A est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport 4.

2. a) D est l'image de I par l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{2}{3}$.
b) M est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -1.
c) K est l'image de M par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{8}{5}$.

2

a) $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est $\frac{1}{2}$.

b) $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est 3.

c) $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est -2.

d) $\overrightarrow{OB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est $\frac{4}{3}$.

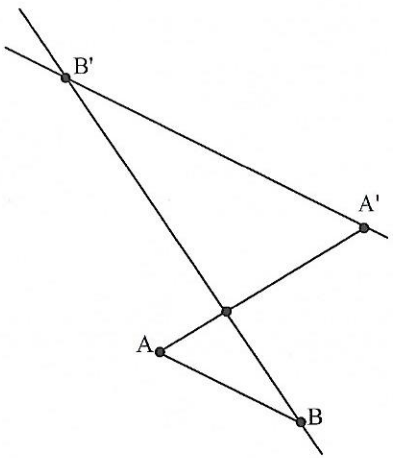
e) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est -1.

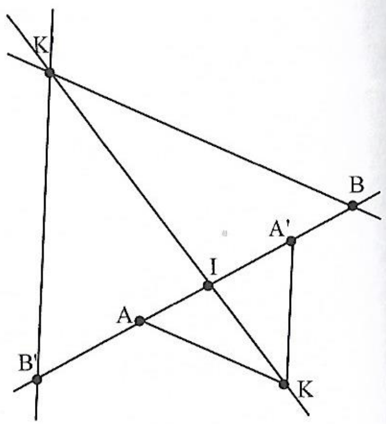
f) $\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OA}$ donc le rapport de h est 4

3

a) $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$. b) $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$. c) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. d) $\overrightarrow{BO} = 4\overrightarrow{BA}$. e) $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

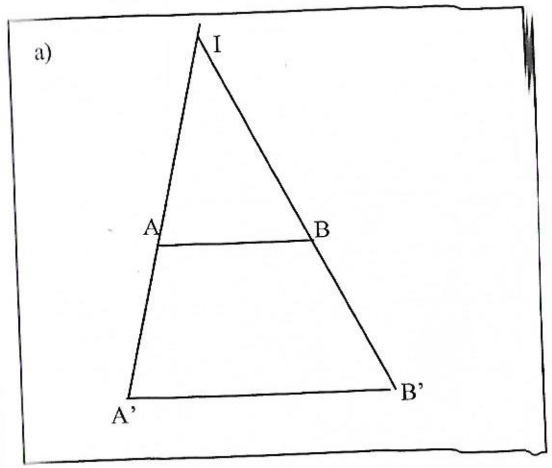
4

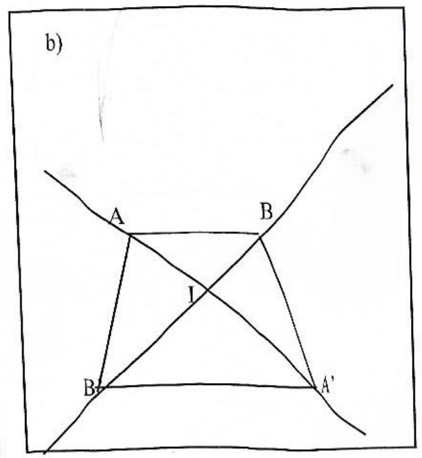




5

Un point, son image par une homothétie et le centre de cette homothétie son alignés. Par conséquent le centre I de l'homothétie qui transforme A en A' et B en B' appartient à l'intersection des droites (AA') et (BB').





6

Posons : $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$.

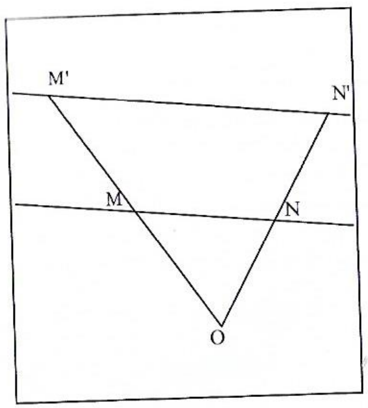
a) $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = 2\overrightarrow{ON}$ donc M et N sont respectivement milieux des segments [OM'] et [ON'].

b) $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$ donc M' et N' sont respectivement milieux des segments [OM] et [ON].

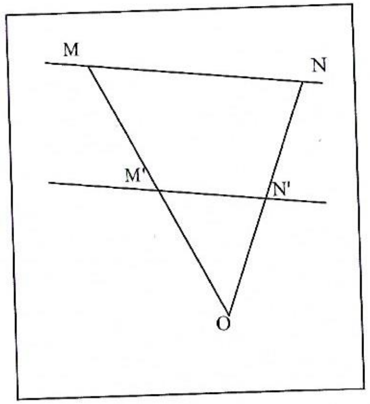
c) $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$ donc O est le milieu des segments [MM'] et [NN'].

d) $\overrightarrow{OM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$

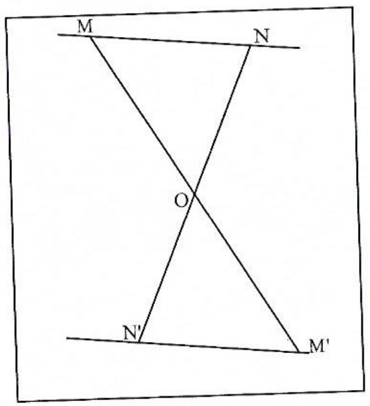
a)



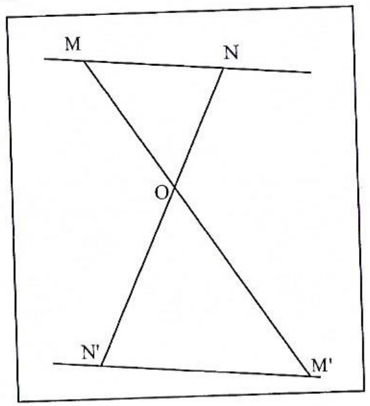
b)



c)



d)



7

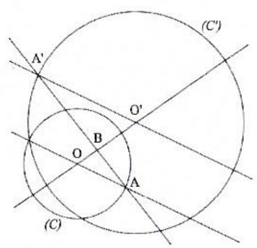
1. Voir figure à compléter.
2. Pour la construction : (C') est le cercle de centre $O' = h(O)$ passant par A'.

On a : $O' \in (OB)$ et $(A'O')//(AO)$.

3. $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BA'} = -2\overrightarrow{BA}$. Par conséquent h est une homothétie de rapport -2.

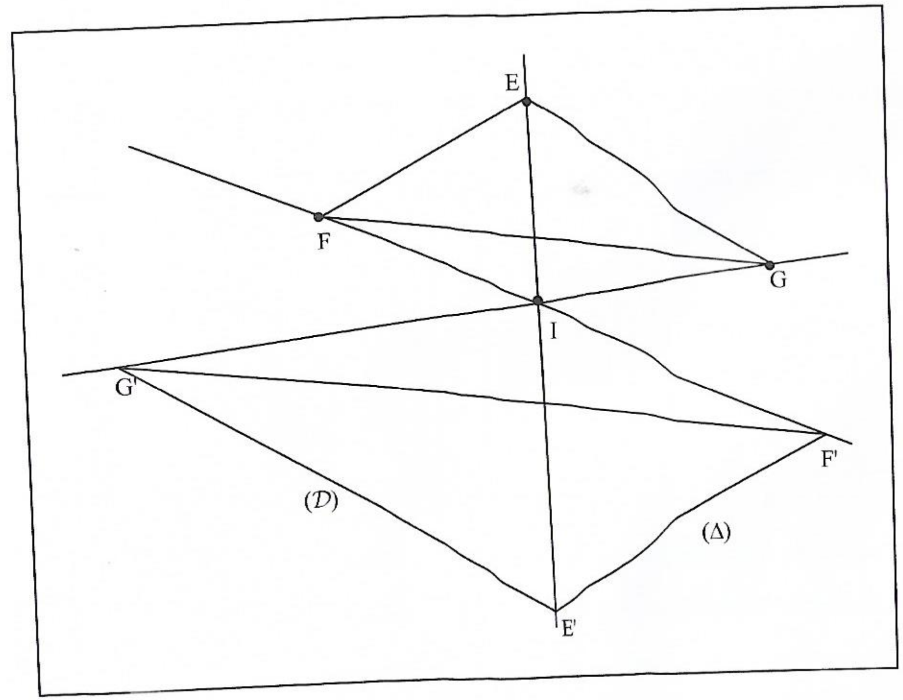
Lorsque $OA = 2$, le rayon de est $|-2| \times 2$ c'est à dire 4.

Figure



8

1. Les droites (EF) et (EG) se coupent en E donc leurs images par l'homothétie h se coupent en $E' = h(E)$.
2. Un point, son image par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.



9

1. Voir figure.
2. a) (C) est le cercle de centre O passant par Ω. Donc, (C') est le cercle de centre, h(O) passant par h(Ω).

On a Ω milieu de [AO] donc, $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{O\Omega}$. On en déduit que $h(\Omega) = A$.

De plus, comme O est le centre de l'homothétie h alors $h(O) = 0$.

De ce qui précède, il découle que (C') est le cercle de centre O passant par A.

b) O est le milieu du segment [IΩ]. Donc, $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{\Omega O}$; $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{0\Omega}$.

Il s'ensuit que : $h(\Omega) = I$. De plus, O étant le centre de la rotation on a : $h(O) = O$. Comme $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O passant par Ω alors son image $(\mathcal{C}')$ par h est le cercle de centre O passant par I.

c) Le point Ω milieu du segment $[AO]$ donc, $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$.

Il en résulte que : $h(O) = \Omega$

D'autre part, J milieu de $[A\Omega]$, donc, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$.

Il s'ensuit que : $h(\Omega) = J$.

Puisque $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O passant par Ω alors son image $(\mathcal{C}')$ par h est le cercle de centre Ω passant par J.

d) Ω milieu de $[AO]$ et O milieu de $[I\Omega]$. Donc, $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega O} = \overrightarrow{OI}$.

Par conséquent,
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OI}$$
$$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{OI}$$
$$\overrightarrow{AI} = 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI})$$
$$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AI}$$
$$-2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{OA}$$
$$-2\overrightarrow{AI} = -3\overrightarrow{AO}$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AO}.$$

On en déduit que I est l'image de O par l'homothétie h.

Soit K l'image de Ω par h. Donc, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega}$
$$2\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{A\Omega}$$
$$2(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega K}) = 3\overrightarrow{A\Omega}$$
$$2\overrightarrow{A\Omega} + 2\overrightarrow{\Omega K} = 3\overrightarrow{A\Omega}$$
$$2\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{A\Omega}$$

Comme $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{\Omega O}$ alors $2\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega O}$
$$\overrightarrow{\Omega K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega O}.$$

Il en résulte que K est le milieu du segment $[\Omega O]$.
On conclut que $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre I passant par K le milieu de $[\Omega O]$.

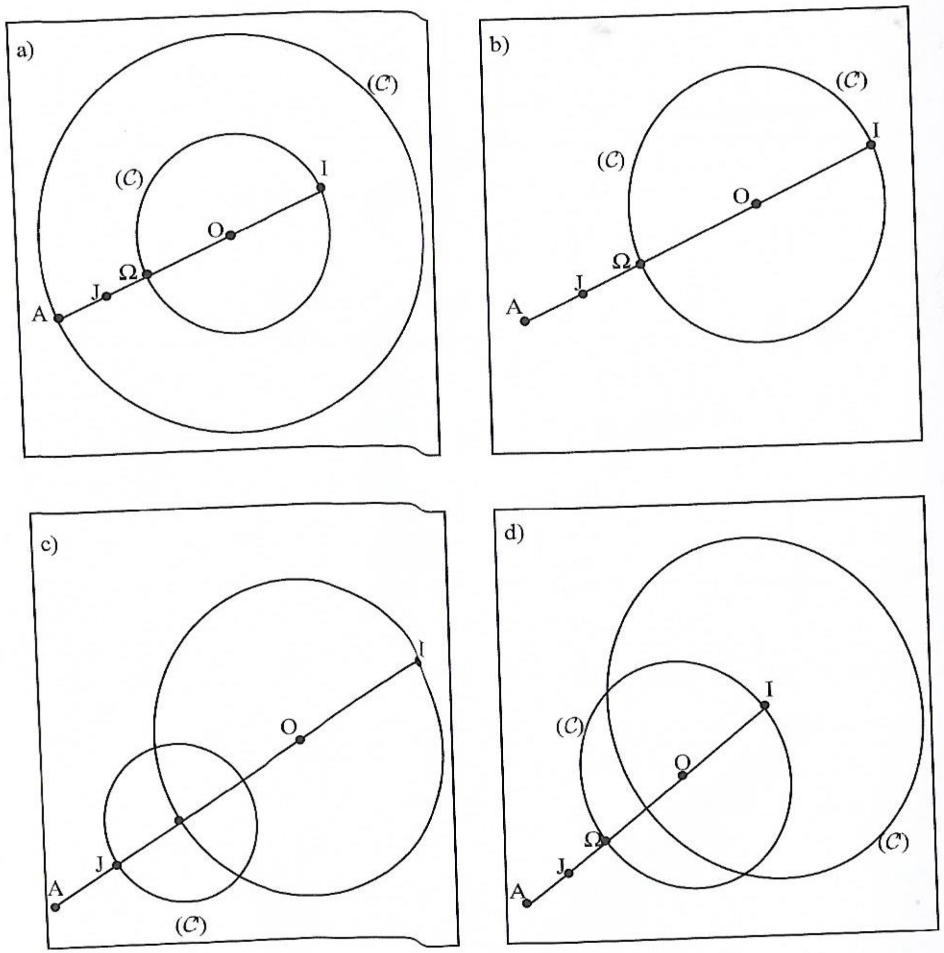
e) $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de diamètre passant par I.
I étant le centre de l'homothétie h, on a : $h(I) = I$.
D'autre part, O milieu de $[I\Omega]$. donc, $\overrightarrow{I\Omega} = 2\overrightarrow{IO}$.
Par suite, Ω est l'image de O par h.
Par conséquent, $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre Ω passant par I.

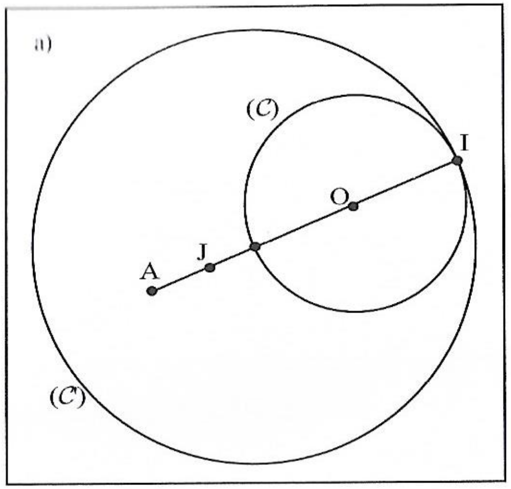
f) Ω milieu de $[AO]$ et O milieu de $[I\Omega]$. Donc, $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{O\Omega}$
Par suite, $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{\Omega A}$

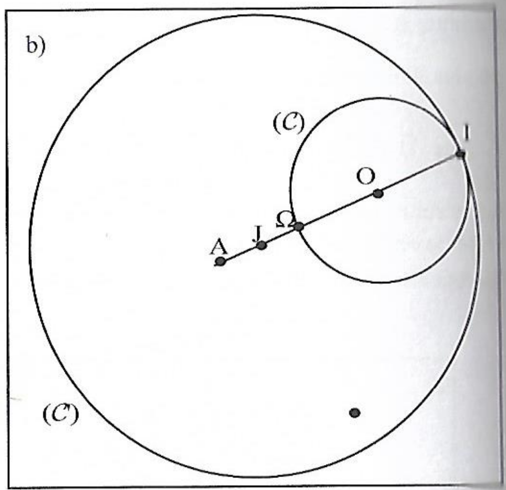
De plus, J milieu de $[A\Omega]$ implique $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A}$.

Puisque $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega J}$ alors $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$; $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{IO}$.

Il en résulte que J est l'image de O par l'homothétie h.
I étant le centre de h alors $h(I) = I$.
On conclut que est $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre J passant par I.







10

1. a) $\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$ donc M'est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 3.

b) $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ donc M'est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport -2.

c) $\overrightarrow{AM'} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AM}$ donc M'est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{7}{5}$

2. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

Par conséquent, M'est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

b) $\overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{M'M} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = 4(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{M'A} + 4\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{M'A}$

$\Rightarrow -5\overrightarrow{AM} = -4\overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AM}$

Il en découle que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{5}{4}$.

c) $\overrightarrow{AM'} = 7\overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 7(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} - 7\overrightarrow{AM'} = 7\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow -6\overrightarrow{AM'} = 7\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AM}$

Donc, M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{7}{6}$.

3. a) $2\overrightarrow{MM'} = -9\overrightarrow{AM'} \Rightarrow 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'}) = -9\overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AM'} = -9\overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM'} + 9\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow 11\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{2}{11}\overrightarrow{AM}.$

Par conséquent, M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{11}$.

b) $3\overrightarrow{M'M} + 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0} \Rightarrow 3(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) + 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{M'A} + 3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{AM'} = \vec{0}$

$\Rightarrow -5\overrightarrow{AM'} = -3\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{-3}{-5}\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AM}.$

Donc, M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{5}$.

c) $5\overrightarrow{AM'} - 4\overrightarrow{MM'} = 6\overrightarrow{MA} \Rightarrow 5\overrightarrow{AM'} - 4\overrightarrow{MM'} = 6\overrightarrow{MA}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AM'} - 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'}) = 6\overrightarrow{MA}$$
$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AM'} - 4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AM'} = 6\overrightarrow{MA}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 6\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MA}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 10\overrightarrow{MA}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = -10\overrightarrow{AM}.$$

Il en résulte que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport −10.

11

1. Voir figure.

2. G est le centre de gravité du triangle ABC et les points A', B' et C' soient les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

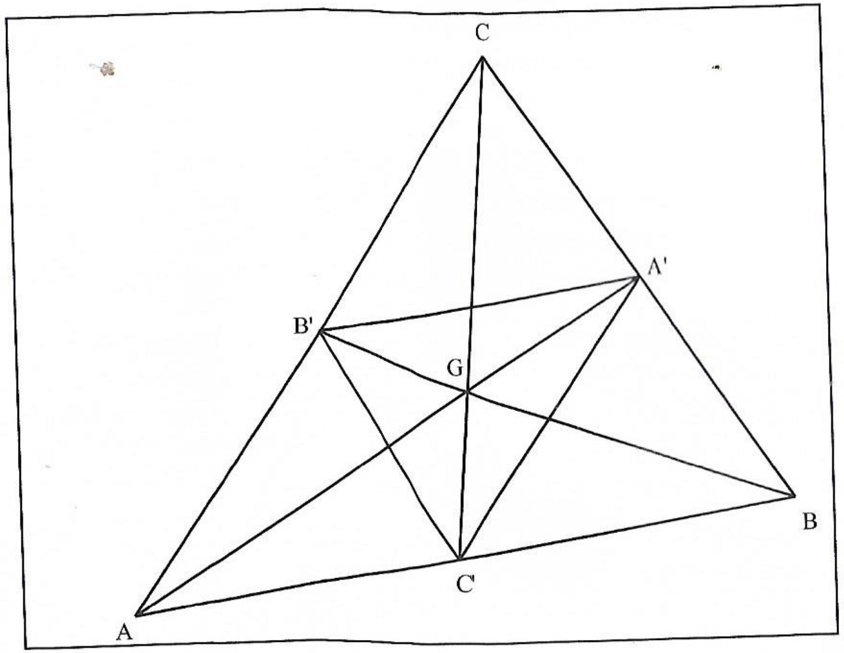
Par conséquent, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

Donc,

$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AA'}$	; $3\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BB'}$	; $3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CC'}$.
$3\overrightarrow{AG} = 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'})$	; $3\overrightarrow{BG} = 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'})$	; $3\overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'})$.
$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GA'}$	; $3\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GB'}$	; $3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CG} + 2\overrightarrow{GC'}$.
$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$	; $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}$	; $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$.
$2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{AG}$	; $2\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{BG}$	; $2\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{CG}$
$2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$	; $2\overrightarrow{GB'} = -\overrightarrow{GB}$	; $2\overrightarrow{GC'} = -\overrightarrow{GC}$
$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$	; $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$	; $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

On conclut que les points A', B' et C' sont respectivement les images par h des points A, B et C.

3. Il résulte de la question précédente que le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par h.
Or G est le centre de gravité de ABC donc l'image de G par h est le centre de gravité de A'B'C'.
Le point G étant le centre de l'homothétie h alors l'image de G par h est G. Il s'ensuit que G est le centre de gravité de A'B'C'.



12

1. Laissé au soin du lecteur.

2. h l'homothétie de centre J qui transforme R en Q. Donc l'image de P par h appartient à la droite (JP) et à la droite passant par Q et parallèle à (RP). On en découle que K est l'image de P par h.

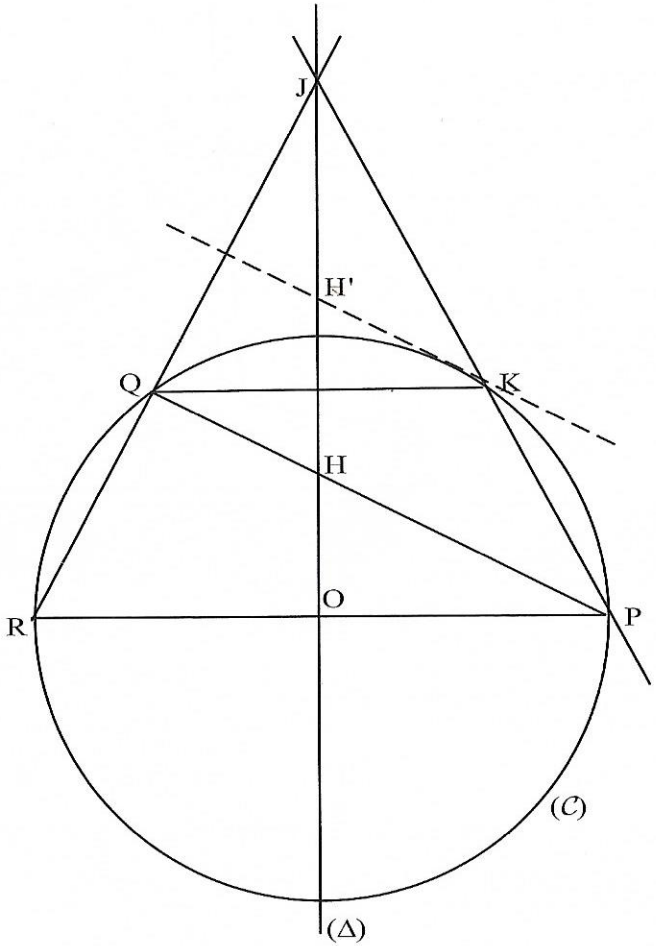
3. a) Considérons le tableau de correspondance suivant..

h	
J	J
R	Q
Q	K

Il en résulte que l'image du triangle PJR par h est le triangle KJQ.

b) h est l'homothétie de centre J qui transforme P en K donc l'image de H par h appartient à la droite (JH) et la parallèle à (PH) passant par K.
Pour la construction, voir figure.

4. L'homothétie conserve la perpendicularité et H est l'orthocentre du triangle PJR. De plus h transforme PJR en KJQ et H' = h(H). On en déduit que H' est l'orthocentre du triangle KJQ.



13

1. Voir figure.

2. a) h est l'homothétie de centre A qui transforme B en E et C' l'image du point C par h. Il s'ensuit que d'une part les points A, C et C' sont alignés et d'autre part les droites (BC) et ((EC')) sont parallèles. Par conséquent C' appartient à la droite (AC) et à la droite passant par E et parallèle à la droite (BC). On en déduit que C' est le point F. Donc le point F est l'image du point C par h.

b) Le centre O de l'homothétie H qui transforme E en C et F en B appartient de (EC) et (FB).

3. L'image du point A par l'homothétie H de O qui transforme E en C appartient à la droite (AO) et la droite passant par C et parallèle à (AE).

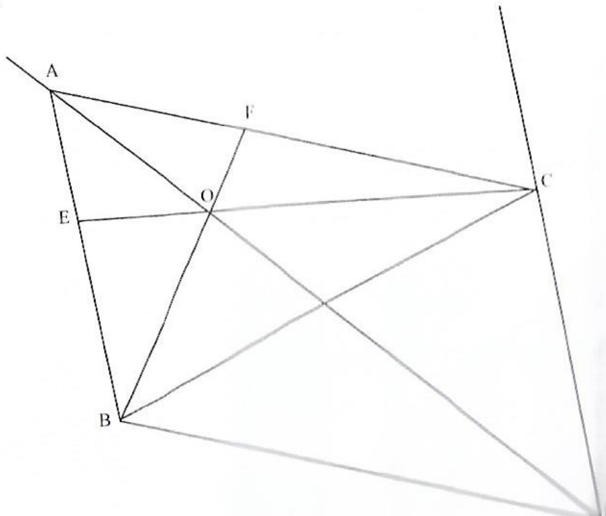
4. Considérons le tableau de correspondance suivant.

H	
E	C
F	B
A	I

Une homothétie transforme une droite en une droite qui lui est parallèle. Par conséquent d'une les droites (CI) et (EA) sont parallèles. Comme le point E appartient à la droite (AB) alors les droites (AB) et (CI) sont parallèles.

D'autre part, les droites (AF) et (BI) sont parallèles. Puisque le point F appartient la droite (AC) alors les droites (AC) et (BI) sont parallèles.

De ce qui précède, on a : (AB)//(CI) et (AC)//(BI). On conclut que le quadrilatère ABIC est un parallélogramme.

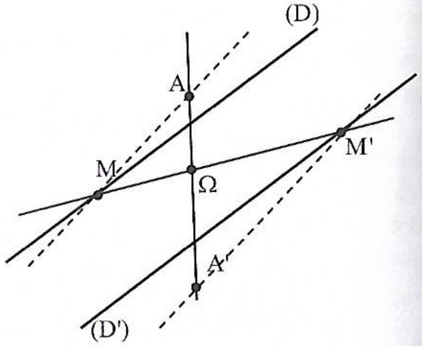


14

Considérons un point M de la droite (D) qui n'appartient pas à la droite (AA'). L'image M' de M appartient à la droite (D') et il ressort de la propriété fondamentale des homothétie que (A'M')//(AM).

De plus le point Ω appartient des droites (AA') et (MM').

Il résulte de ce qui précède la construction suivante.



15

1. Voir figure.
2. Voir figure.

3. a) Le quadrilatère MNOP est un losange donc, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP}$ (1). De plus, le point Ω est le milieu du segment [MN]. Par conséquent, $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{N\Omega}$ (2).

De (1) et (2), il résulte que : $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{N\Omega}$ (2).
Donc, il existe une homothétie qui transforme N en O et Ω en P.
Puisque le point A appartient à l'intersection des droites (ON) et (PΩ) alors A est le centre de homothétie h qui transforme N en O et Ω en P.
b) Soit k le rapport de l'homothétie h. Puisque h(N) = O et h(Ω) = P alors d'après la propriété fondamentale des homothéties, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{N\Omega}$.

Or $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{ON\Omega}$ donc $k = 2$.
On en déduit que le rapport de l'homothétie h est 2.

4. a) Le point Ω est le milieu du segment [MN]. Donc, $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{N\Omega}$.
$\overrightarrow{\Omega M} = -\overrightarrow{\Omega N}$.

Il en découle que M est l'image de N par l'homothétie de centre Ω et de rapport -1. Comme il existe une unique homothétie de centre Ω qui transforme N en M alors le rapport de h' est -1.

b) h est homothétie de centre A et de rapport 2 qui transforme Ω en P.
Par suite, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{A\Omega}$

$$\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega P} = 2\overrightarrow{A\Omega}$$
$$\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{A\Omega}$$
$$\overrightarrow{\Omega P} = -\overrightarrow{\Omega A}.$$

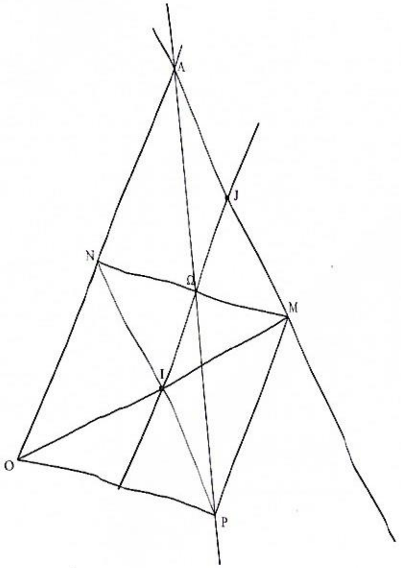
On conclut que P est l'image de A par l'homothétie h'. Donc $h'(A) = P$.

5. a) On a : $h'(A) = P$.

Donc, $\overrightarrow{\Omega P} = -\overrightarrow{\Omega A}$. Par conséquent, Ω est le milieu du segment [AP].

b) Le quadrilatère MNOP est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Le point I étant le milieu du segment [OM]donc I est également le milieu de [NP].
Par suite, dans le triangle MNP, les points I et Ω sont respectivement les milieux des segments [NP] et [NM] donc d'après la propriété de la droite des milieux, les droites (IΩ) et (MP) sont parallèles.
D'autre part, dans le triangle APM, Ω est le milieu du segment [AP], la droite (IΩ) passe par le point J appartenant au segment [AM] et (IΩ) est parallèle à la droite (MP). D'après la réciproque de la propriété de la droite des milieux, J est le milieu du segment [AM].

6. h' est l'homothétie qui transforme N en M et A en P. Donc le segment [MP] est l'image du segment [AN] par l'homothétie h'. De plus les points J et I sont respectivement les milieux des segments [AN] et [MP]. Par conséquent, le point J est l'image du point I par h'.
On en déduit que : $h'(I) = J$.



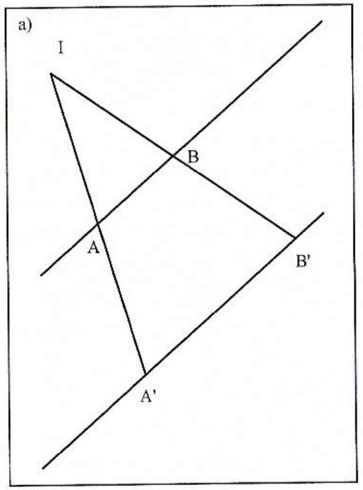
16

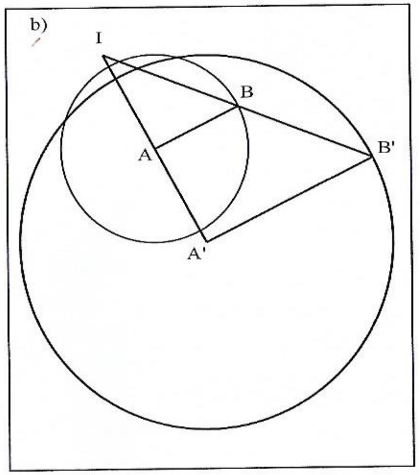
1. Voir figure.
2. a) L'image de la droite (AB) par H est la droite (A'B').

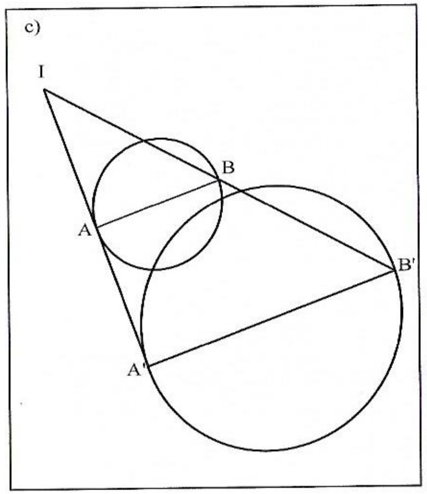
b) L'image du cercle de centre A passant par B est le cercle de centre A' passant par B'.

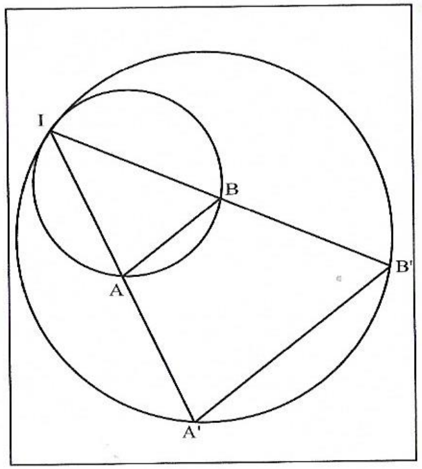
c) L'image du cercle de diamètre [AB] est le cercle de diamètre [A'B'].

d) L'image du cercle circonscrit au triangle ABI est le cercle circonscrit au triangle A'B'I.









17

1. a) Une homothétie multiplie les aires par le carré du rapport.

Une homothétie multiplie les aires par le carré de son rapport.

Par conséquent, $\mathcal{A}' = 3^2 \times \mathcal{A}$

$= 9 \times 13$

Donc, $\mathcal{A}' = 117$

b) $\mathcal{A}' = (-2)^2 \times \mathcal{A}$

$= 4 \times 13$

Donc, $\mathcal{A}' = 52$

2. $AB^2 = 25, AC^2 = 9$ et $BC^2 = 16$.

Par suite, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Il en découle que le triangle ABC est rectangle en C.

3. a) Le triangle ABC étant rectangle en C, $\mathcal{A} = \frac{AC \times BC}{2}$.

$= \frac{3 \times 4}{2}$.

Donc, $\mathcal{A} = 6$.

b) $\mathcal{A}' = (\frac{3}{2})^2 \times \mathcal{A}$

$= \frac{9}{4} \times 6$

On conclut que : $\mathcal{A}' = \frac{27}{2}$.

18

a) Le point O est le centre du carré ABCD donc O milieu de la diagonale [AC]

Par suite, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (1).

De plus, I est le milieu du segment [AB] donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (2).

De (1) et (2), on déduit que I et O sont respectivement les images des points B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Il s'ensuit que l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme ABC en AIO.

b) Les points I et J sont respectivement les milieux des segments [AB] et [BC]. Par conséquent, d'une part, $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$ (1) et d'autre part, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$ (2)
De (1) et (2), il ressort que A et C sont respectivement les images des points I et J par l'homothétie de centre B et de rapport 2.
On conclut que l'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme IBJ en ABC.

c) O étant le centre de ABCD, donc, O est le milieu de chacun des segments [AC] et [BD].
Par conséquent, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Donc, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$,
Il en découle que les points A, D et C sont respectivement les images par l'homothétie de centre O et de rapport -1 des points C, B et A.
On en déduit que l'homothétie de centre O et de rapport -1 transforme le triangle ABC en CAD.

19

1. On a : $\overrightarrow{O'O} = 3\overrightarrow{O\Omega}$.

$\overrightarrow{O'\Omega} + \overrightarrow{\Omega O} = 3\overrightarrow{O\Omega}$

$\overrightarrow{O'\Omega} = 3\overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{\Omega O}$

$\overrightarrow{O'\Omega} = 3\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{O\Omega}$

$\overrightarrow{O'\Omega} = 4\overrightarrow{O\Omega}$

$\overrightarrow{\Omega O'} = 4\overrightarrow{\Omega O}$.

Il en résulte que O' est l'image de O par l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

2. a) Voir figure.

b) (C) est le cercle de centre O et de rayon r = 4 et; (C') est le cercle de centre O' et de rayon r' = 16.
De plus, h est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

Comme O' est l'image de O par h et r' = 4r alors (C') est l'image de (C) par h.

3. a) On a : $\overrightarrow{O'O} = 3\overrightarrow{O\Omega}$ donc, $O'O = 3O\Omega$

$3O\Omega = 12$

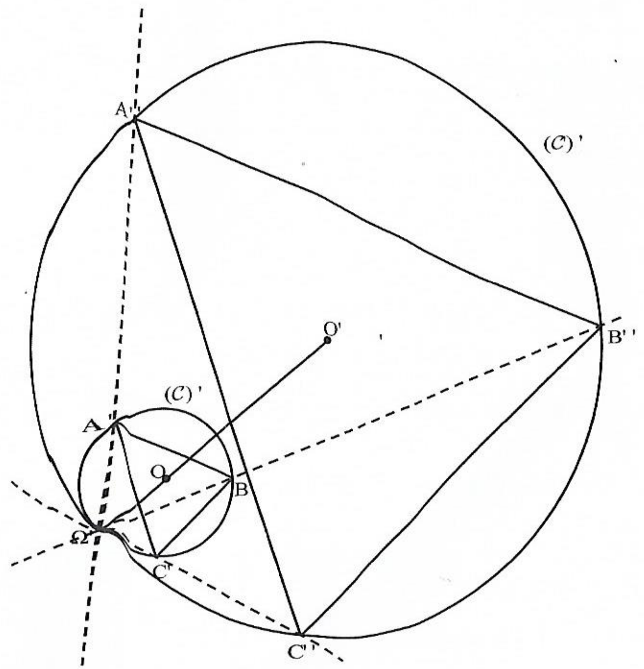
$O\Omega = 4$.

Comme (C) est le cercle de centre O et de rayon 4 alors Ω appartient à (C).

D'autre part Ω étant le centre de h, l'image de Ω par h est Ω lui-même. De plus (C') est l'image de (C) par h. Puisque Ω appartient à (C) alors l'image de Ω qui est Ω lui-même appartient à (C')

b) Un point, son image et le centre d'une homothétie sont alignés. Donc, les images des points A, B et C par h appartiennent respectivement aux droites (ΩA), (ΩB) et (ΩC) De plus si un point appartient à un cercle, son image par une transformation appartient à l'image de ce cercle par cette même transformation.
Par conséquent A' est l'image de A par h, B' est l'image de B par h et C' est l'image de C par h.

4.



20

a) $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre B et de rayon 1 et; $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

Soit k le rapport d'une homothétie qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$

Donc, $1 \times |k| = \frac{1}{2}$

$|k| = \frac{1}{2}$

$k = \frac{1}{2}$ ou $k = -\frac{1}{2}$.

Soit le Ω centre de l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

Donc, $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega B}$.

$2\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega B}$

$2\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{AB}$

Par conséquent, $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{BA}$.

D'autre part, soit O le centre de l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

Donc, $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

$-2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

$-2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$-3\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

On conclut $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

De ce qui précède, il s'ensuit que les homothéties qui transforment $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$ sont : l'homothétie de centre Ω et de rapport et $\frac{1}{2}$; l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

b) $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ et; (Γ) est le cercle de centre F et de rayon 2.

Soit k le rapport d'une homothétie qui transforme $(\mathcal{C}')$ en (Γ).

Donc, $\frac{1}{2} \times |k| = 2$

$|k| = 4$

$k = -4$ ou $k = 4$.

Soit I le centre de l'homothétie de rapport 4 qui transforme $(\mathcal{C}')$ en (Γ)

Donc, $\overrightarrow{IF} = 4\overrightarrow{IA}$.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{IA}$.

$3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

Soit J le centre de l'homothétie de rapport -4 qui transforme $(\mathcal{C}')$ en (Γ)

Donc, $\overrightarrow{JF} = -4\overrightarrow{JA}$.

$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AF} = -4\overrightarrow{JA}$.

$-5\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AF}$.

On conclut que les homothéties qui transforment $(\mathcal{C}')$ en (Γ) sont : l'homothétie de centre I et de rapport 4 et ; l'homothétie de centre J et de rapport -4.

c) $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon 1 et; (Γ) est le cercle de centre F et de rayon 2.

Soit k le rapport d'une homothétie qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

Donc, $1 \times |k| = 2$

$|k| = 2$

$k = -2$ ou $k = 2$.

Soit le G centre de l'homothétie de rapport 2 qui transforme $(\mathcal{C}')$ en (Γ)

Donc, $\overrightarrow{GF} = 2\overrightarrow{GB}$.

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{GB}$.

$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FB}$.

Soit E le centre de l'homothétie de rapport -2 qui transforme $(\mathcal{C})$ en (Γ).

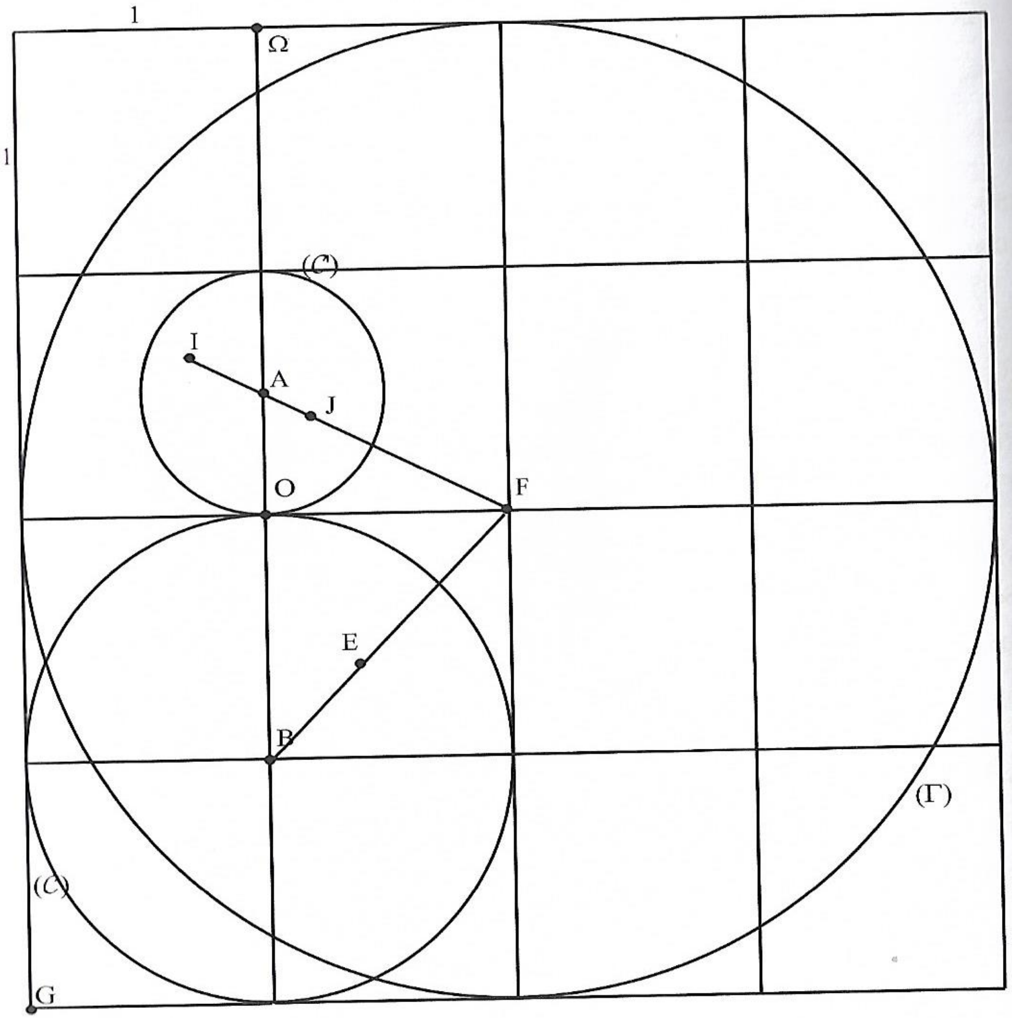
Donc, $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{EB}$

$-3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.

On conclut que les homothéties qui transforment (C) en (Γ) sont : l'homothétie de centre G et de rapport 2 et ; l'homothétie de centre E et de rapport -2.



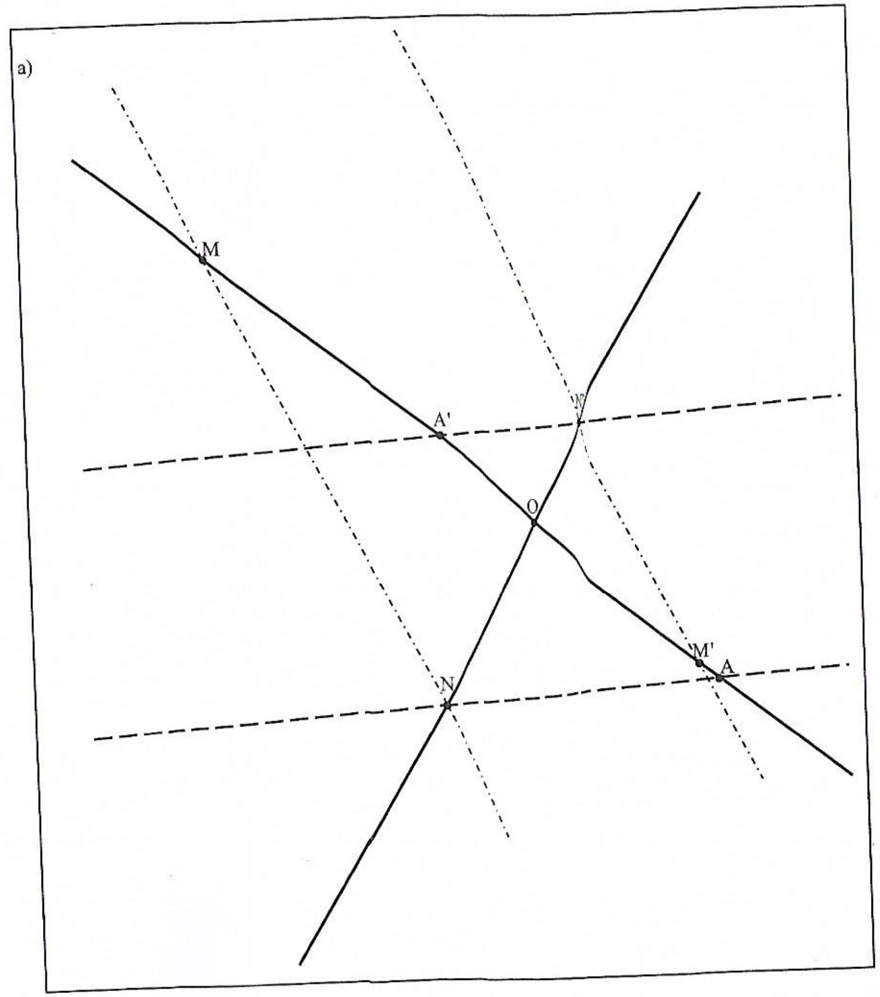
21

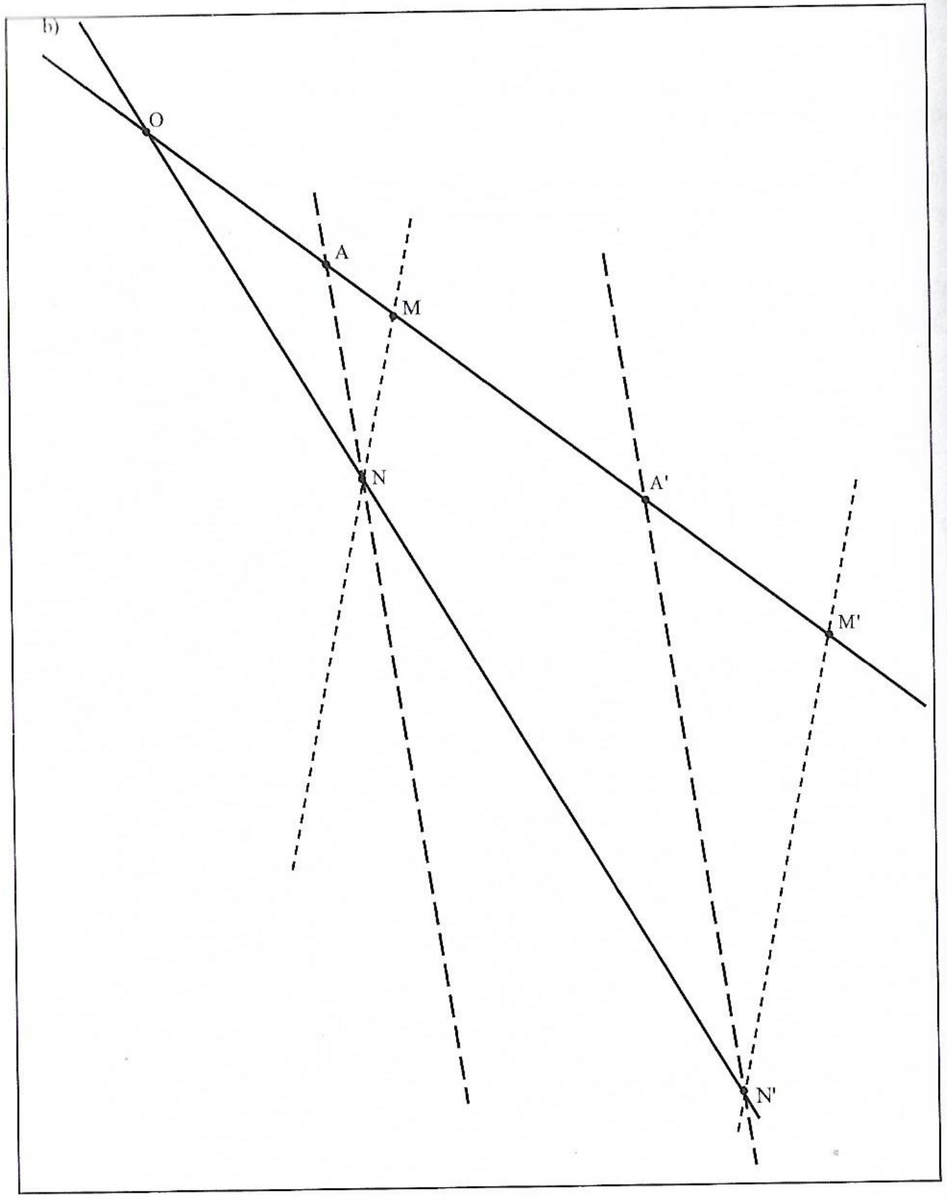
Dans chacun des cas de figures, on construit d'abord N' puis M'.

Le point O est le centre de l'homothétie utilisée,

Par conséquent, d'une part O, N et N' sont alignés et les droites (AN) sont parallèles (A'N')
Donc N' appartient à la droite (ON) et N' appartient à la droite passant par A' et parallèle à (AN).

D'autre part O, M et M' sont alignés et les droites (NM) sont parallèles (N'M'). Donc M' appartient à la droite (OM) et M' appartient à la droite passant par N' et parallèle à (NM).





22

1. On a : $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AM}.$

Par conséquent, N est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport 3.

2. a) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. Donc, lorsque M décrit la droite $(\mathcal{D})$ alors N décrit la droite $(\mathcal{D}')$ l'image de $(\mathcal{D})$ par l'homothétie de centre A et de rapport 3. Voir figure pour la construction.

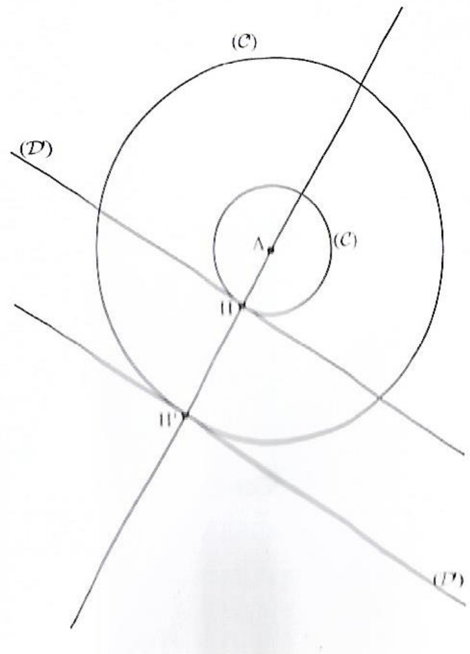
b) H est le projeté orthogonal de A sur la droite $(\mathcal{D})$. Donc la droite (AH) est la droite passant par A et qui est perpendiculaire à la droite $(\mathcal{D})$.

De plus A est le centre de l'homothétie h. Il s'ensuit que A admet pour image A lui-même par h.

Par conséquent, lorsque M décrit la droite (AH) alors N décrit la droite passant par A et parallèle à (AH). Il en résulte que N décrit la droite (AH). Voir figure pour la construction.

c) L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle. Donc lorsque M décrit le cercle (C) de centre A passant par H alors N décrit le cercle de centre A passant par le projeté orthogonal H' de A sur $(\mathcal{D}')$.

Voir figure pour la construction.



23

1. a) Voir figure.

b) On a : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Donc, $-2\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que : $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{BE}$.

On en déduit que A est l'image de E par l'homothétie de centre B et de rapport -2.

2. T est le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ sur le cercle de centre O et de rayon 1.

On construit T' tel que : $\overrightarrow{BT'} = -2\overrightarrow{BT}$.

3. On a : $\overrightarrow{BT'} = -2\overrightarrow{BT}$.

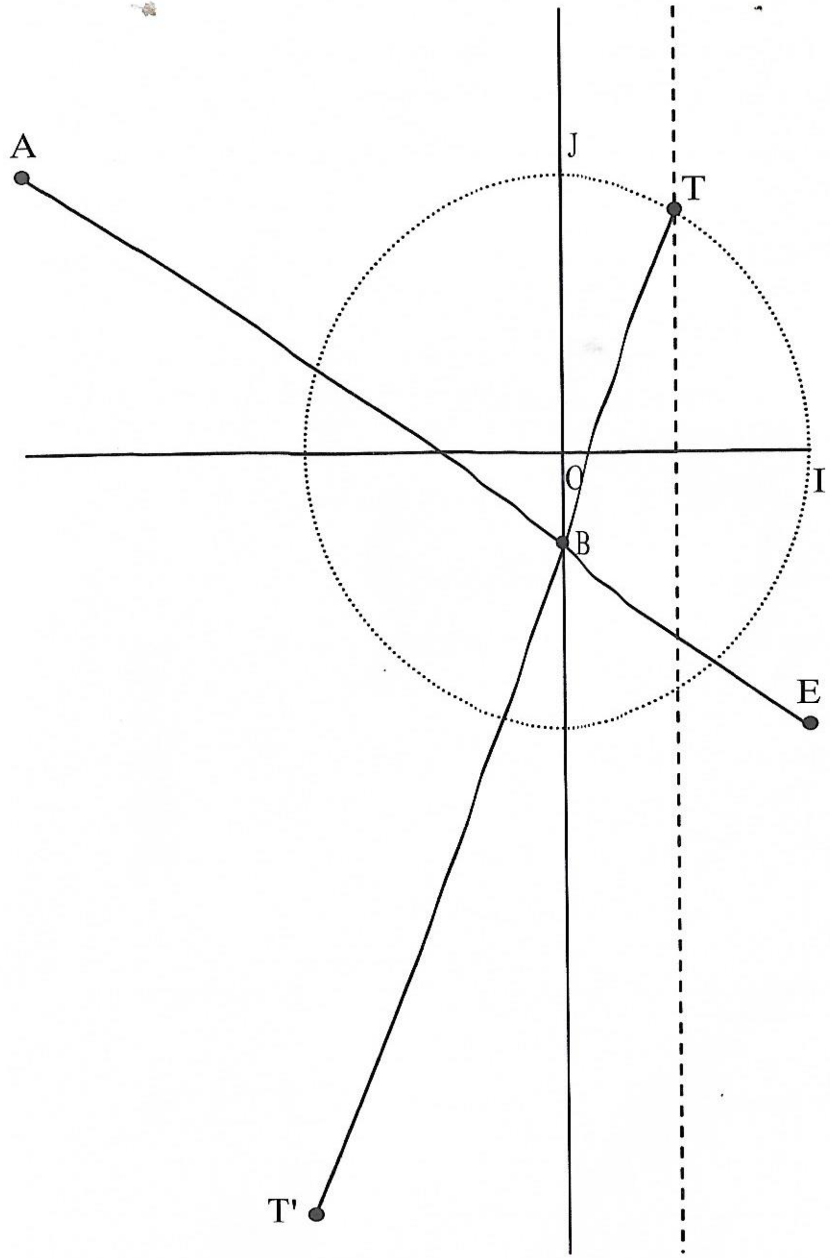
Par conséquent, $\overrightarrow{BT'}\begin{pmatrix}x-0\\ y+\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BT'}\begin{pmatrix}x\\ y+\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $-2\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

Il en découle que : $x = -\sqrt{3}$ et $y+\frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$.

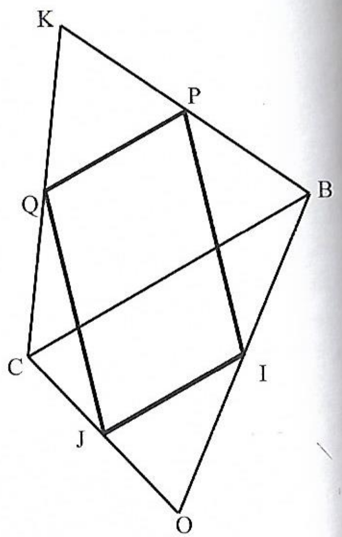
$x = -\sqrt{3}$ et $y = -2$.

Donc, T' est le point de coordonnées $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$.



24

1. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [OB] et [OC].Par conséquent, d'une part $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et d'autre part, $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OJ}$. On conclut que : h(I) = B et h(J) = C.



2. Voir figure.

3. Les points B et C sont respectivement les images des points I et J par l'homothétie h.

Donc, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ (1).

De plus, les points P et Q sont les images respectives des points B et C par l'homothétie h'

Il en découle que : $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2).

Des égalités (1) et (2), il résulte que : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{IJ}$.

On conclut que le quadrilatère PQJI est un parallélogramme.

25

1. Voir figure

2. Voir figure.

3. h est une homothétie qui transforme A en K et B en F. Par conséquent l'image du segment [AB] par h est le segment [KF]. Comme I est le milieu de [AB] et I' est le milieu de [KF] alors I' est l'image de I par h.

4. a) I' est l'image de I par h. Donc, $\overrightarrow{OI'} = 3\overrightarrow{OI}$.

Par suite,

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{II'} = 3\overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{IO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{II'}.$$

On conclut que O est l'image de I par h'.

b) h' est une homothétie qui transforme K en A' et F en B'. Donc [A'B'] est l'image du segment [KF] par h'. Puisque O est l'image de I' par h' et I' milieu de [KF] alors O est le milieu du segment [A'B']. .

5. K et F sont les images respectives des points A et B par une homothétie de rapport 3.

Donc, d'après la propriété fondamentale des homothéties, on a : $\overrightarrow{KF} = 3\overrightarrow{AB}$ (1).

D'autre part, A' et B' sont les images respectives de K et F par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$.

Donc, d'après la propriété fondamentale des homothéties, on a : $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KF}$ (2).

Des égalités (1) et (2), il découle que : $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

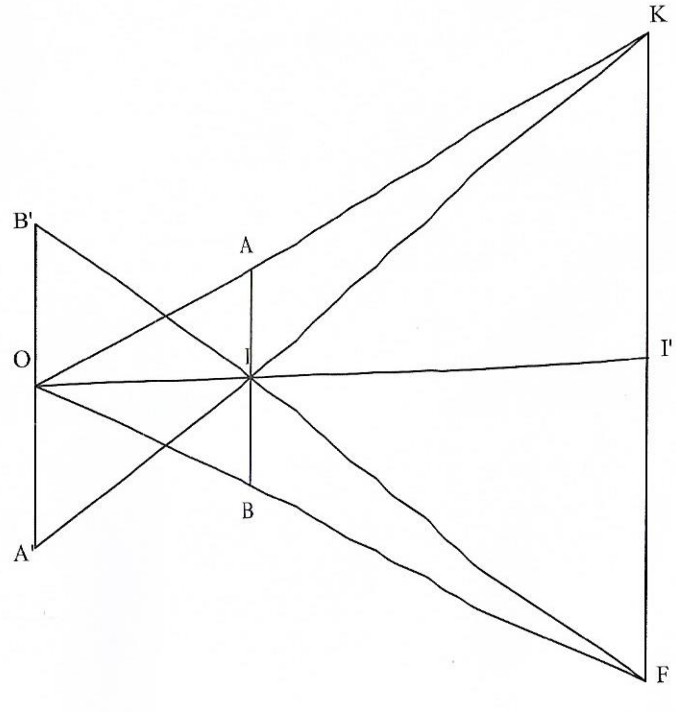
On conclut qu'il existe une homothétie H qui transforme A en A' et B en B'.

6. a) Soit α le rapport de H. Comme H(A) = A' et H(B) = B' alors d'après la propriété fondamentale des homothéties, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{KF}$.

Or $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc, le rapport α de H est $-\frac{3}{2}$.

b) On a : H(A) = A' et H(B) = B'. Par conséquent, le centre Ω de H est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

c) H est une homothétie qui transforme A en A' et B en B'. Il s'ensuit que l'image du segment [AB] par H est le segment [A'B']. De plus, I est le milieu de [AB] et O est le milieu de [A'B']. On conclut que O est l'image de I par H.



Rotations

1

1. a) B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2. a) $AO = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow OA = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc, A est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) O est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3. a) $OA = OB$ et $Mes(\widehat{-\overrightarrow{AO},-\overrightarrow{BO}}) = \pi \Leftrightarrow OB = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \pi$

Donc, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle π.

b) $OA = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow OB = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{5}$

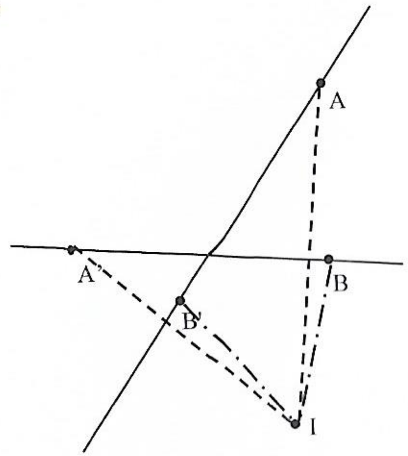
Donc, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{5}$.

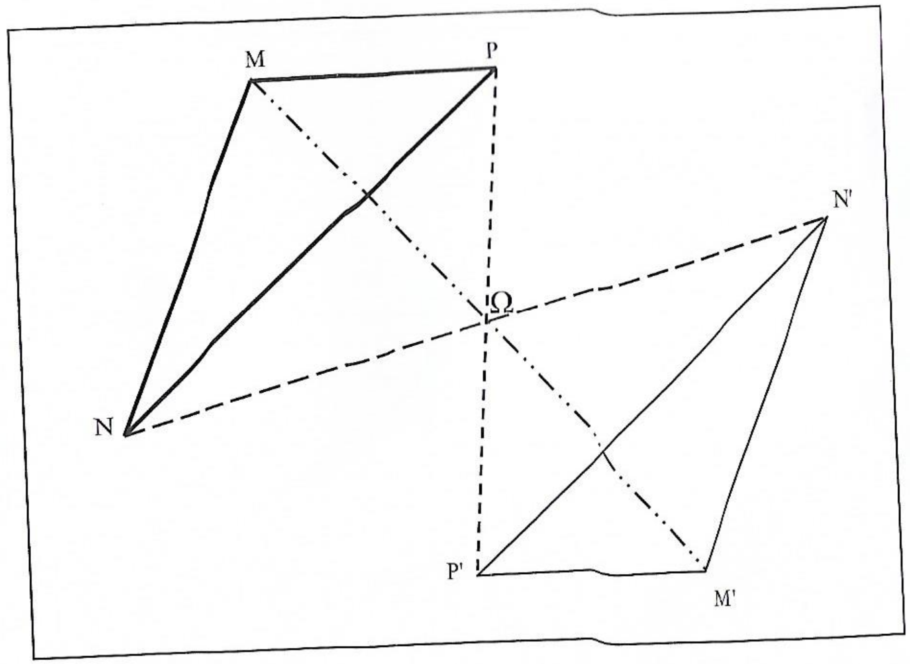
2

Si M' est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$ alors $IM' = IM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IM}}) = \frac{\pi}{3}$.

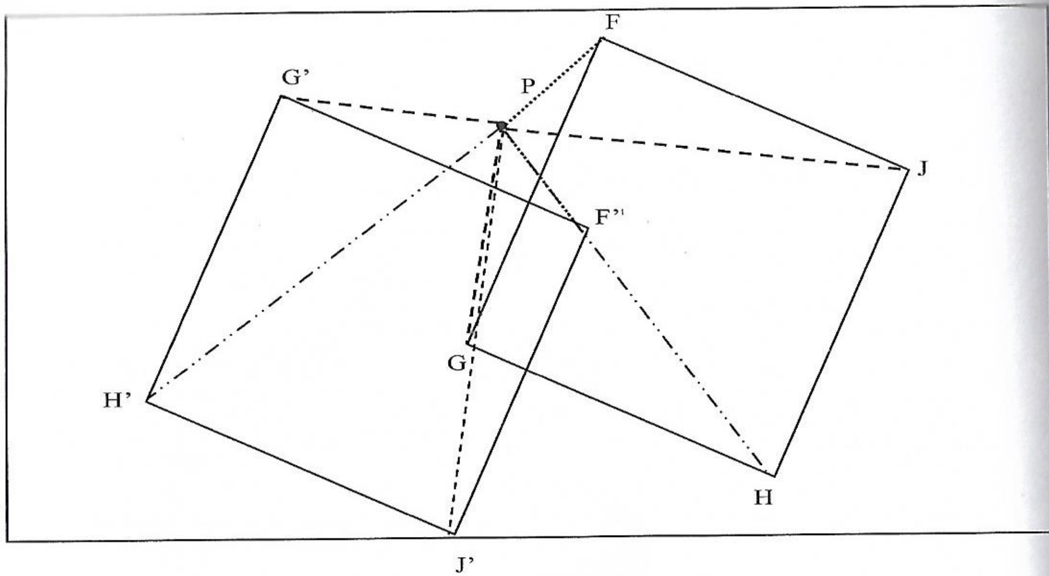
D'une part, $IM' = IM$ donc M' appartient au cercle de centre I et de rayyon IM.IM' = IM

D'autre part, $Mes(\widehat{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IM}}) = \frac{\pi}{3}$. Donc l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IM}})$ est de sens direct et $mes\widehat{MIM'} = \frac{\pi}{3}$

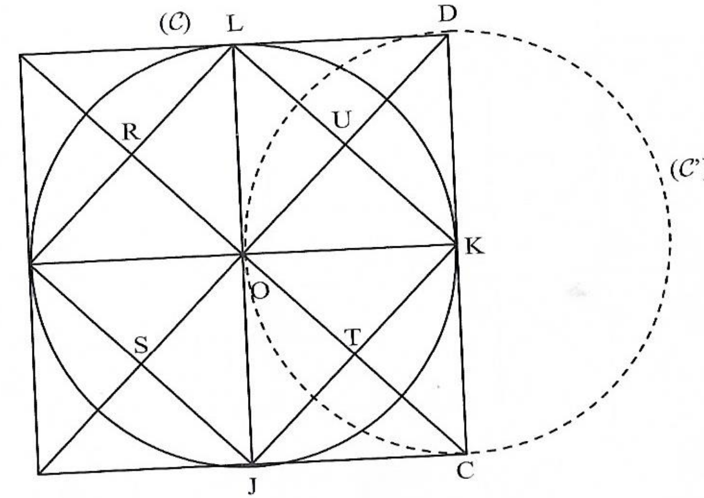




3.

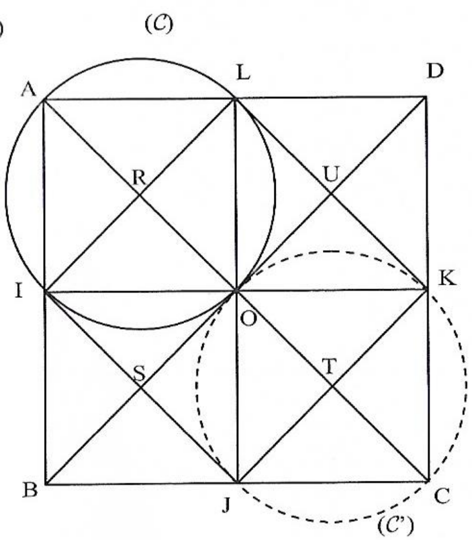


1b)

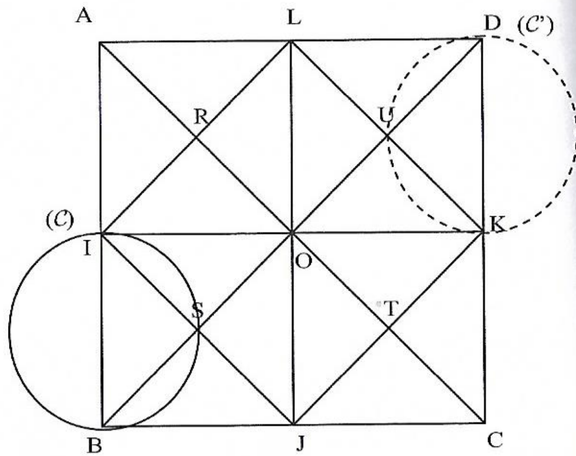


3

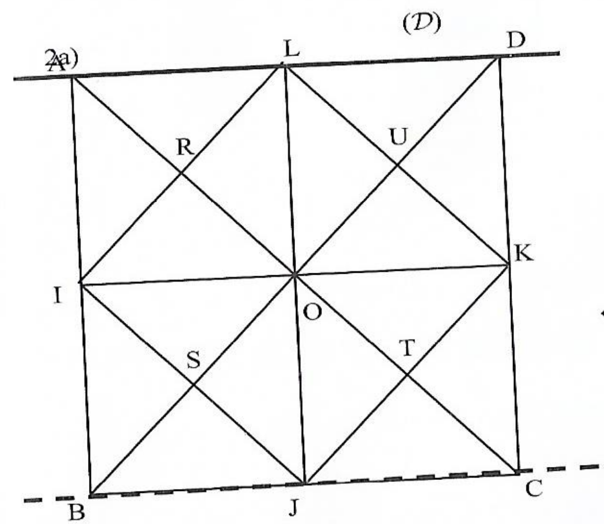
1a)



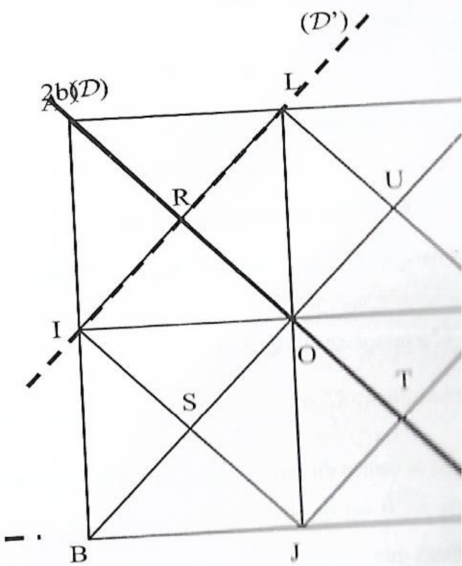
1b)



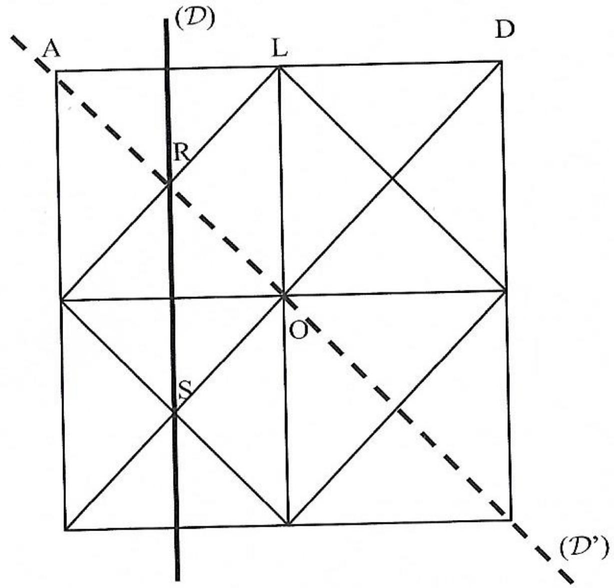
2a)



2b)



2c)



4

1. a) A est le centre de la rotation R donc A a pour image A par R.

ABC est équilatéral de sens direct. Donc, AB = AC et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, C est l'image de B par la rotation R.

Soit C' l'image de C par R. Donc, AC' = AC et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}}) = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, C' est le point tel que le triangle ACC' soit équilatéral de sens direct.

b) O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc OB = OA.

De plus $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Il s'ensuit que : $\operatorname{mes}\widehat{AOB} = 2\operatorname{mes}\widehat{ACB}$

Puisque le triangle ABC est équilatéral alors $\operatorname{mes}\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

Donc, $\operatorname{mes}\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.

De plus l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est de sens direct donc, $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Comme OB = OA et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{3}$ alors B est l'image de A par R.

D'autre part, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, OC = OB

De plus $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Donc : $\operatorname{mes}\widehat{BOC} = 2\operatorname{mes}\widehat{BAC} = 2\,\frac{\pi}{3}$ car le triangle ABC est équilatéral.

Par conséquent, $\operatorname{mes}\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$.

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$ est de sens direct donc, $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = \frac{2\pi}{3}$.

On a : OC = OB et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = \frac{2\pi}{3}$ donc, C est l'image de B par R.

Enfin, comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc OA = OC.

De plus $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Il s'ensuit que : $\operatorname{mes}\widehat{AOC} = 2\operatorname{mes}\widehat{ABC}$

On a $\operatorname{mes}\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ donc $\operatorname{mes}\widehat{AOC} = \frac{2\pi}{3}$.

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})$ est de sens direct alors $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}) = \frac{2\pi}{3}$.

En définitive, OA = OC et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}) = \frac{2\pi}{3}$. alors A est l'image de C par R.

2. a) C est le centre de la rotation R donc C est l'image C par R.

ABC est équilatéral de sens direct. Donc, CA = CB et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, A est l'image de B par la rotation R.

Soit A' l'image de A par R. Donc, CA' = CA et $\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA'}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, C' est le point tel que le triangle CAA' soit équilatéral de sens indirect.

b) O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc OC = OA.

De plus $\widehat{CBA}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Il s'ensuit que : $mes\widehat{COA} = 2mes\widehat{CBA}$

Le triangle ABC est équilatéral alors $mes\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$.

Donc, $mes\widehat{COA} = \frac{2\pi}{3}$.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ est de sens indirect donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = -mes\widehat{COA}$.

On a $OC = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

Par conséquent, C est l'image de A par la rotation R.

D'autre part, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, $OB = OC$

De plus $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Donc : $mes\widehat{BOC} = 2mes\widehat{BAC} = 2\frac{\pi}{3}$ car le triangle ABC est équilatéral.

Il s'ensuit que $mes\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$.

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$ est de sens indirect donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = -mes\widehat{BOC} = -\frac{2\pi}{3}$.

On a $OB = OC$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

Donc B est l'image de C par la rotation R.

Enfin, comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc $OA = OB$.

De plus $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans ce cercle interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Il s'ensuit que : $mes\widehat{AOB} = 2mes\widehat{ACB} = \frac{2\pi}{3}$ car le triangle ABC est équilatéral.

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$ est de sens indirect alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = -mes\widehat{AOB} = -\frac{2\pi}{3}$.

Il résulte de ce qui précède que $OA = OB$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

Donc A est l'image de B par R.

5

1. L'image d'une droite par une rotation est une droite.
On a $R(A) = D$, $R(B) = E$ donc l'image de la droite (AB) par R est la droite (ED)
2. L'image d'une demi-droite par une rotation est une demi – droite.
On a $R(A) = D$ et $R(C) = F$ donc l'image de la demi - droite [AC) par R est la deùi - droite [DF).
3. L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur
On a : $R(B) = E$ et $R(C) = F$ donc l'image du segment [BC] par R est le segment [EF]

4. L'image d'un cercle par une rotation est un cercle.
On a : $R(A) = D$ et $R(C) = F$ donc l'image le cercle de centre A passant par C est le cercle de centre D passant par F
5. On a : $R(B) = E$ et $R(C) = F$
De plus, l'image d'un cercle par une rotation étant un cercle, l'image du cercle de diamètre [BC] est le cercle de diamètre [EF]
6. $R(A) = D$, $R(B) = E$ et $R(C) = F$ et l'image d'un cercle par une rotation est un cercle
Donc l'image du cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle DEF

6

1. a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$ donc $mes\widehat{OAB} = \frac{\pi}{4}$.

De plus le triangle AOB est isocèle en O. Donc, $2mes\widehat{OAB} + mes\widehat{AOB} = \pi$

$$2 \times \frac{\pi}{4} + mes\widehat{AOB} = \pi$$

$$mes\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}.$$

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ est de sens direct et $mes\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$. donc, $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Pae conséquent, $OB = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que $R(A) = B$.

2. a) Soit K le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Puisque (AB) et (CD) sont pependiculaires alors $mes\widehat{AKD} = \frac{\pi}{2}$. De plus $mes\widehat{KAD} = \frac{\pi}{4}$.

Dans le triangle AKD, on a $mes\widehat{AKD} = \frac{\pi}{2}$ et $mes\widehat{KAD} = \frac{\pi}{4}$. donc, $mes\widehat{ADK} = \frac{\pi}{4}$.

Il s'ensuit que le $mes\widehat{ODC} = \frac{\pi}{4}$.

D'autre part les droites (OB) et (OD) sont perpendiculaires donc, $\text{mes}\widehat{COD} = \frac{\pi}{2}$.

Dans le triangle OCD, on a : $\text{mes}\widehat{ODC} = \frac{\pi}{4}$ et $\text{mes}\widehat{COD} = \frac{\pi}{2}$ donc, $\text{mes}\widehat{ODC} = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit que le triangle OCD est isocèle rectangle en O.

b) Le triangle OCD est isocèle rectangle en O. Donc, OD = OC et $\text{mes}\widehat{COD} = \frac{\pi}{2}$.

Comme l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}})$ est de sens direct, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{2}$.

En définitive, OD = OC et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{2}$. donc, R(C) = D.

3. R est une rotation de plus, R(A) = B et R(C) = D. Comme I est le milieu du segment [AC] et J est le milieu du segment [BD] alors, J est l'image de I par R.

De plus, R est la rotation de centre O et d'angle donc $\frac{\pi}{2}$. Donc, OJ = OI et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

7

1. a) $(\mathcal{C})$ le cercle de centre S passant par B. Considérons la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'image du centre S de $(\mathcal{C})$ est le centre T de $(\mathcal{C}_1)$ et l'image du point B de $(\mathcal{C})$ est le point C de $(\mathcal{C}_1)$. Donc r est le rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Considérons la rotation de centre O et d'angle π. L'image du centre S de $(\mathcal{C})$ est le centre U de $(\mathcal{C}_2)$ et l'image du point B de $(\mathcal{C})$ est le point D de $(\mathcal{C}_2)$. Donc r est le rotation de centre O et d'angle π.

c) Considérons le centre Ω du parallélogramme et la rotation de centre Ω et d'angle π. L'image du centre S de $(\mathcal{C})$ est le centre R de $(\mathcal{C}_3)$ et l'image du point I de $(\mathcal{C})$ est le point O de $(\mathcal{C}_3)$. Donc r est le rotation de centre O et d'angle π.

8

a) Le triangle ABC est équilatéral donc CB = CA et $\text{mes}\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. De plus, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$ est de sens direct donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \text{mes}\widehat{ACB}$. Par conséquent, CB = CA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$.

On en déduit que B est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

D'autre part, Le triangle BCD est équilatéral donc CD = CB et $\text{mes}\widehat{BCD} = \frac{\pi}{3}$. De plus, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}})$ est de sens direct donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}) = \text{mes}\widehat{BDC}$. Il s'ensuit que, CD = CB et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3}$. Donc D est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On conclut que R est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Les triangle ABC et CBD sont équilatéraux donc AC = AB = BC et BD = DC = BC.
Par conséquent, AC = AB = BD = DC. Donc le quadrilatère ABDC est un losange. Considérons le centre O de ce losange. Puisque les diagonales [AD] et [BC] se coupent en leur milieu O.
Donc, R est la rotation de centre O et d'angle π.

c) R(B) = B donc R est une rotation de centre B telle que A a pour image D.
On a BA = BD
Et, $\text{mes}\widehat{ABD} = \text{mes}\widehat{ABC} + \text{mes}\widehat{CBD}$

$$\text{mes}\widehat{ABD} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Puisque l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}})$ est de sens indirect alors $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}}) = -\frac{2\pi}{3}$

On a BA = BD et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}}) = -\frac{2\pi}{3}$ on conclut donc que R est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

9

1. Voir figure.

2. I le milieu de [OO'] donc O' est le symétrique de O par la rotation r.
Puisque $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont de même rayon alors $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par r.

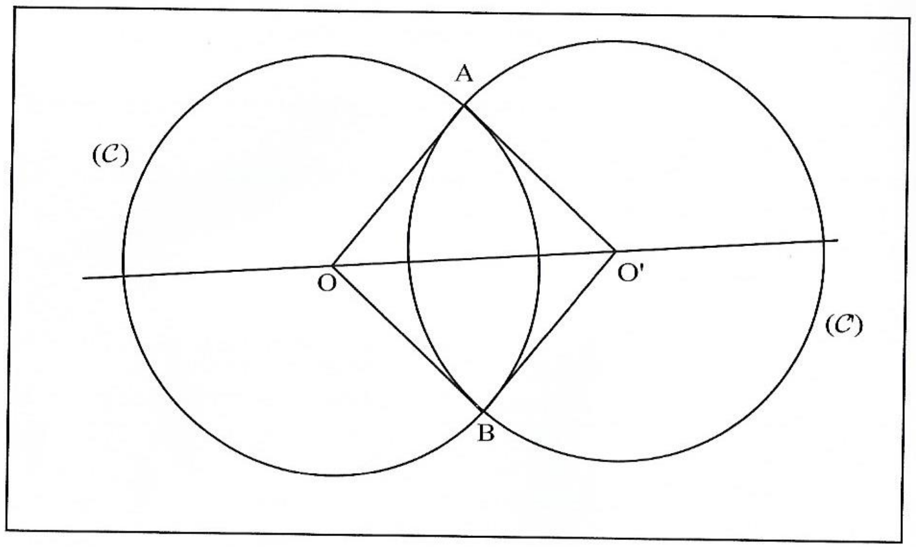
3. Les points A et B appartiennent aux cercles de centres respectifs $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

Donc, $OA = OB$ et $O'A = O'B$.

De plus, les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont de mêmes rayons de $OA = OB = O'A = O'B$.

Il en résulte que le quadrilatère $OBO'A$ est un losange.

4. $OBO'A$ est un losange donc les diagonales $[AB]$ et ont le même milieu I. On en déduit que B est l'image de A par la rotation r.



10

1. Voir figure

2. ABO est triangle équilatéral donc, $OB = OA$ et $\text{mes}\widehat{ABO} = \frac{\pi}{3}$.

De plus, l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}})$ est de sens indirect. Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}) = -\frac{\pi}{3}$

Par conséquent, $OB = OA$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}}) = -\frac{\pi}{3}$

Donc O est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Comme il existe une unique rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en O alors R est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

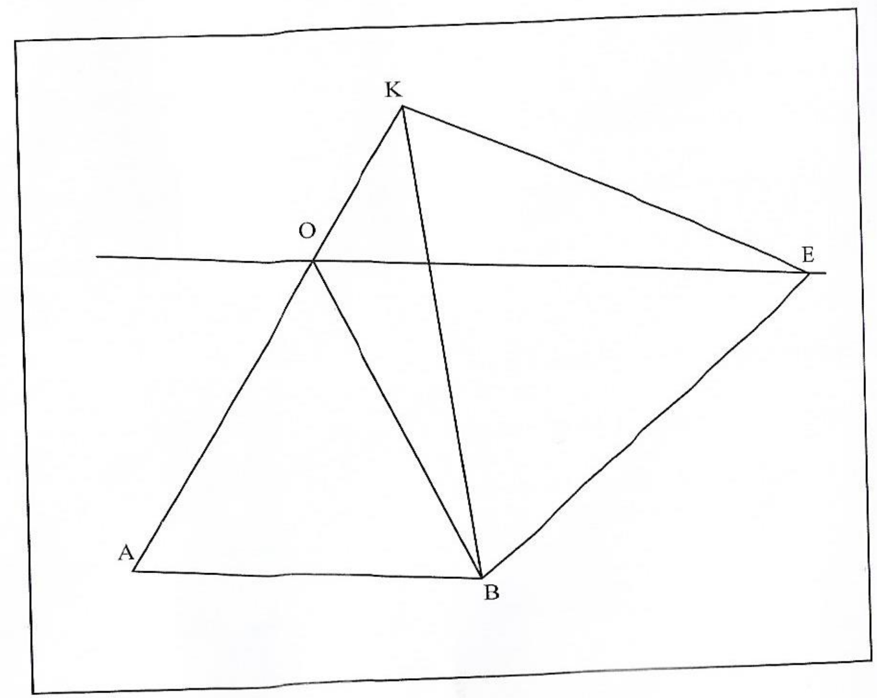
3. Voir figure.

4. R est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ telle que : $R(A) = O$ et $R(K) = E$. Donc d'après la propriété fondamentale des rotations, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AK};\overrightarrow{OE}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Par suite, $\text{mes}\widehat{KOE} = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABO étant équilatéral, on a $\text{mes}\widehat{OAB} = \frac{\pi}{3}$.

Les angles $\widehat{KOE}$ et $\widehat{OAB}$ sont correspondants formés par les droites (AB) et (OE) et leur sécante commune (AO). Puisque $\text{mes}\widehat{OAB} = \text{mes}\widehat{KOE}$ alors les droites (AB) et (OE) sont parallèles.



11

1. r est une rotation telle que : r(B) = C et r(E) = F donc le centre de r est le point l'intersection des médiatrices des segments [BC] et [EF].
Les triangles ABC et AEF sont équilatéraux donc, AB = AC et AE =AF. Il en découle que A appartient aux médiatrices des segments [BC] et [EF]. Donc, A est le centre de la rotation r.

2. r est une rotation telle que : r(B) = C et r(E) = F. D'après la propriété fondamentale des rotations,

$CF = BE$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.

3. D'après la question précédente, $CF = BE$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus le quadrilatère EBCG est un parallélogramme donc, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BE}$.

Par conséquent, $CG = CF$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il en résulte que le triangle FCG est équilatéral de sens direct.

12

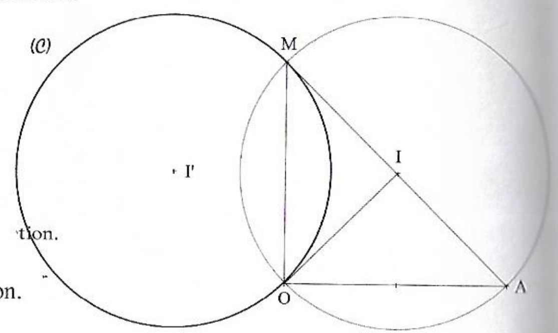
1. OAM est un triangle rectangle isocèle en O et de sens direct.

Donc, $OM = OA$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que M est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Soit I' l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Puisque M est l'image de A par cette rotation.

alors lorsque A parcourt le cercle de centre I passant par A , M parcourt le cercle de centre I' passant par M.



13

1. a) Dans le triangle PQR, on a $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}}) = \frac{\pi}{12}$. Donc $\text{mes}\widehat{QPR} = \frac{\pi}{12}$.

De plus, QP = QR donc le triangle PQR est isocèle en Q. Par conséquent,

$$2\text{mes}\widehat{QPR} + \text{mes}\widehat{PQR} = \pi$$

$$2 \times \frac{\pi}{12} + \text{mes}\widehat{PQR} = \pi$$

$$\text{mes}\widehat{PQR} = \frac{5\pi}{6}$$

D'autre part, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{QR};\overrightarrow{QP}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}}) = \frac{5\pi}{6}$.

b) On a : $QP = QR$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}}) = \frac{5\pi}{6}$. Il en résulte que P est l'image de R par la rotation r de centre Q

et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

2. Voir figure. $P = r(R)$

3. a) r est une rotation de centre Q tel que : $P = r(R)$ et $P' = r(P)$. Il s'ensuit que :
$QP = QR$ et $QP' = QP$. Donc, $QP' = QP = QR$. Par conséquent Q est le centre du cercle (C) circonscrit au triangle P'PR.

b) Le triangle PQR étant isocèle en Q avec $\text{mes}\widehat{QPR} = \frac{\pi}{12}$, il en découle que $\text{mes}\widehat{PRQ} = \frac{\pi}{12}$.

D'autre part, $QP' = QP$. Donc, le triangle P'QP est isocèle en P

Par suite, $2\text{mes}\widehat{QPP'} + \text{mes}\widehat{PQP'} = \pi$

$$2\text{mes}\widehat{QPP'} + \frac{5\pi}{6} = \pi \text{ car } \text{mes}\widehat{PQP'} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{mes}\widehat{QPP'} = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2}$$

Donc, $$\text{mes}\widehat{QPP'} = \frac{\pi}{12}$$

Les angles $\widehat{PRQ}$ et $\widehat{QPP'}$ sont adjacents donc, $\text{mes}\widehat{RPP'} = \text{mes}\widehat{PRQ} + \text{mes}\widehat{QPP'}$

$$\text{mes}\widehat{RPP'} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$$

$$\text{mes}\widehat{RPP'} = \frac{\pi}{6}.$$

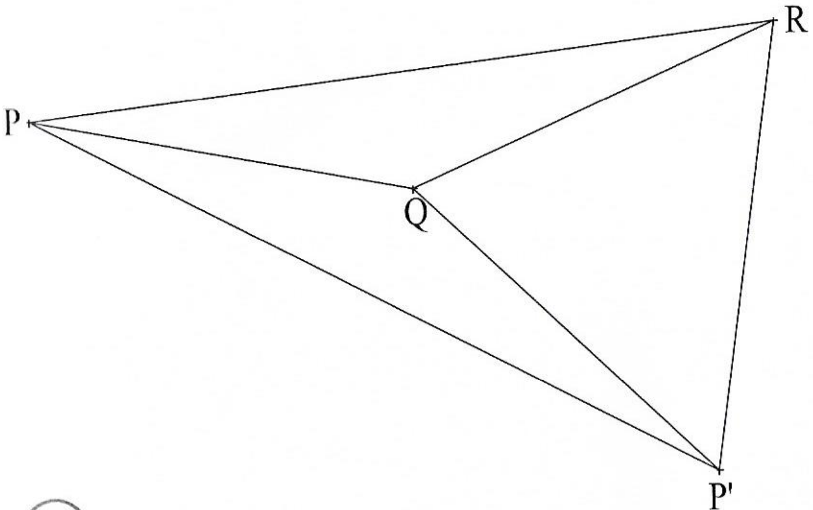
4. L'angle $\widehat{RPP'}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{RP'}$ et $\overset{\smile}{RP}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{RQP'}$.

Donc, $\text{mes}\widehat{RQP'} = 2\text{mes}\widehat{RPP'}$

$$\text{mes}\widehat{RQP'} = \frac{\pi}{3}.$$

Puisque Q est le centre d'un cercle passant par R et P' alors QR = QP'.

On conclut que le triangle RQP' est équilatéral.



14

1.. OAB et OEF sont des triangles rectangles isocèles en O et sens direct.

Par conséquent, d'une part, OB = OA et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$. Donc r(A) = B.

D'autre part, OF = OE et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}) = \frac{\pi}{2}$. Donc, r(E) = F.

Par suite, r est une rotation telle que r(A) = B et r(E) = F.

D'après la propriété fondamentale des rotations, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}}) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que les droites (AE) et (FB) sont perpendiculaires.

2. ABO et OEF deux triangles rectangles isocèles en O donc OA = OB et OE = OF.
Puisque OB = OE alors OA = OB = OE = OF.
Il en découle que les points A, B, E et F appartiennent au cercle de centre O passant par A.

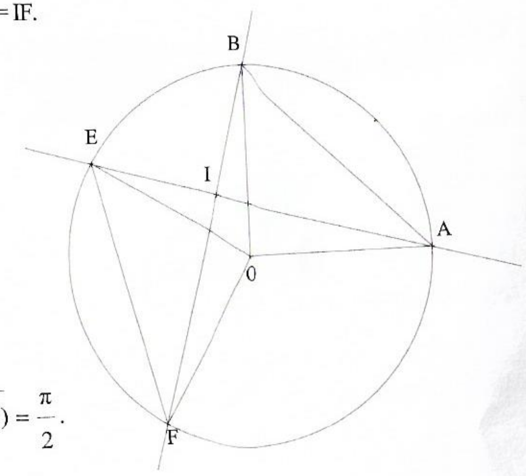
3. a) Laissé au soin du lecteur.

b) Les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{EBF}$ sont alternes internes définis par les droites (BE) et (AF) ; et leur sécante commune (AE). Comme les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{EBF}$ sont de même mesure alors droites (BE) et (AF) ; sont parallèles.

4. r est une rotation telle que r(A) = B et r(E) = F. Donc, d'après la propriété fondamentale des rotations BF = AE. De plus, les droites (BE) et (AF) ; sont parallèles et; les droites (AE) et (BF). sont sécantes en I. D'après le théorème de Thales, $\frac{EI}{EA} = \frac{BI}{BF}$.

On a BF = AE donc EI = BI.

D'autre part, $\frac{IA}{EA} = \frac{IF}{BF}$. Puisque BF = AE alors IA = IF.



5. Les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires et sont sécantes en I. Donc, $\text{mes}\widehat{BIE} = \frac{\pi}{2}$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IE}})$ étant de sens direct il s'ensuit que

$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IE}}) = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, EI = BI. On conclut R(B) = E.

D'autre part, $\text{mes}\widehat{FIA} = \frac{\pi}{2}$ et l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}}) = \frac{\pi}{2}$. est de sens direct.

Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}}) = \frac{\pi}{2}$.

De plus, IA = IF. Par conséquent, R(F) = A.

15

1. Soit A un autre point de (Δ) et A' son image par la rotation d.

Puisque O' est l'image de O par cette même rotation d alors d'après la propriété fondamentale des rotations,

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Il en découle que les droites (OA) et (O'A') sont perpendiculaires; et (O'A') est l'image de (Δ) par d.

Or la droite (Δ') passe par O' et elle est perpendiculaire à (Δ).

Il en résulte que (Δ') est l'image de (Δ) par la rotation d.

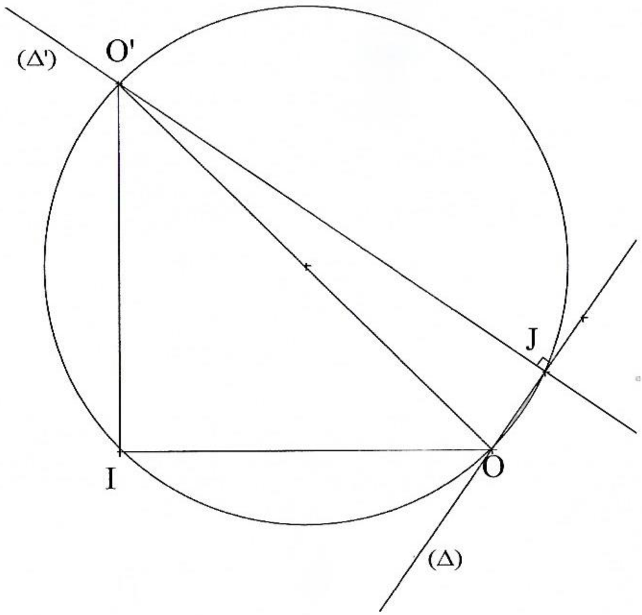
2. Les droites (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires et se coupent en J. De plus O appartient à (Δ) et O' appartient à (Δ') Donc le triangle JOO' est rectangle en J. Par conséquent, J appartient au cercle de diamètre [OO'].

D'autre part O est l'image de O' par la rotation d de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Donc, $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent les droites (OI) et IO' sont perpendiculaires. Donc le triangle IOO' est rectangle en I. Il s'ensuit que I appartient au cercle de diamètre [OO'].

Puisque les points I et J appartiennent au cercle de diamètre [OO'], on conclut que les points J, I, O et O' appartiennent à un même cercle.



16

1. Voir figure.

2. R est une rotation. Considérons la correspondance suivante.

$\xrightarrow{R}$	
A	A
B	B'
C	C'

Une rotation conserve les angles orientés et le triangle ABC équilatéral de sens direct alors A'B'C' est également un triangle équilatéral de sens direct.

3. Dans le triangle équilatéral ABC, H est le pied de la hauteur issue de C. Donc H est le milieu du segment [AB]. R étant une rotation de centre H et d'après la question 2), on a H milieu du segment [A'B'].

De plus A'B' = AB. Par conséquent le quadrilatère AA'BB' est un parallélogramme dont les diagonales ont la même mesure. Donc est un rectangle de centre H.

4. Les droites (AC) et (A'I) sont parallèles et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'I}$ sont colinéaires de même sens.

De plus, le quadrilatère AA'B'B étant un rectangle, les vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens.

Par conséquent, les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'I}})$ sont égaux.

5. a) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au rectangle AA'BB' de centre H. L'angle $\widehat{B'AB}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ interceptant l'arc $\overset{\frown}{B'B}$ et il est associé à l'angle au centre $\widehat{B'HB}$.

Donc, $\mathrm{mes}\widehat{B'AB} = \frac{1}{2}\mathrm{mes}\widehat{B'HB}$.

D'autre part, B' est l'image de B par la rotation R de centre H et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Il en découle que : $\mathrm{mes}\widehat{B'HB} = \frac{\pi}{6}$. Par conséquent, $\mathrm{mes}\widehat{B'AB} = \frac{\pi}{12}$.

Comme le triangle ABC est équilatéral alors $\mathrm{mes}\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

On a : $\mathrm{mes}\widehat{CAB} = \mathrm{mes}\widehat{CAB'} + \mathrm{mes}\widehat{B'AB}$.

$\mathrm{mes}\widehat{CAB'} = \mathrm{mes}\widehat{CAB} - \mathrm{mes}\widehat{B'AB}$.

$\text{mes}\widehat{CAB'} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$.

$\text{mes}\widehat{CAB'} = \frac{\pi}{4}$.

De plus l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$ est orienté de sens direct. On conclut que la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$. est $\frac{\pi}{4}$.

b) Les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'I}})$ sont égaux et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B};\overrightarrow{A'I}}) = \frac{\pi}{4}$.

Les angles $\widehat{B'AB}$ et $\widehat{B'A'B}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$ et ils interceptent le même arc $\widehat{B'B}$.

Donc, $\text{mes}\widehat{B'A'B} = \text{mes}\widehat{B'AB}$.

Puisque $\text{mes}\widehat{B'AB} = \frac{\pi}{12}$ alors $\text{mes}\widehat{B'A'B} = \frac{\pi}{12}$.

D'autre part les angles $\widehat{IA'B'}$ et $\widehat{B'A'B}$ sont adjacents.
Il s'ensuit que :

$$\text{mes}\widehat{IA'B} = \text{mes}\widehat{IA'B'} + \text{mes}\widehat{B'A'B}$$

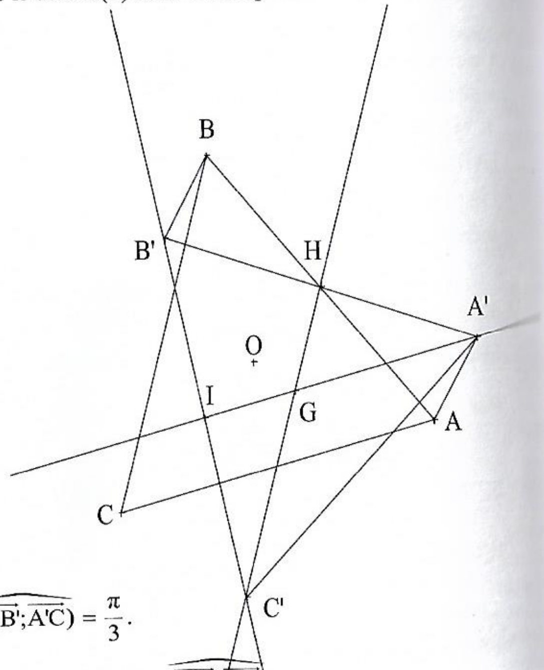
$$\text{mes}\widehat{IA'B'} = \text{mes}\widehat{IA'B} - \text{mes}\widehat{B'A'B}$$

$$\text{mes}\widehat{IA'B'} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$$

Donc, $\text{mes}\widehat{IA'B'} = \frac{\pi}{6}$.

De plus l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'I}})$ est de sens direct.

On conclut que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'I}}) = \frac{\pi}{6}$.



6. a) Le triangle A'B'C' est équilatéral. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}}) = \frac{\pi}{3}$.

Or $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'I}}) = \frac{\pi}{6}$. Donc la droite (A'I) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}})$.

Comme A'B'C' est équilatéral alors la droite (A'I) est la médiatrice du segment [B'C']. De plus, le point I appartient au segment [B'C'] donc I est le milieu de [B'C'].

b) C' est l'image de C par la rotation R de centre H. La droite (HC) est une hauteur dans le triangle ABC donc (HC') est une hauteur dans le triangle A'B'C'.
Dans le triangle équilatéral A'B'C', les hauteurs (HC') et (A'I) qui sont également les médianes se coupent en G. Par conséquent G est le centre de gravité de A'B'C'.

7. Le triangle A'B'C' de centre de gravité G est l'image du triangle ABC de centre de gravité O par la rotation R. On en déduit que G est l'image de O par R.

17

1. a) I est le milieu du segment [BE] donc I est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABE.
Donc, IA = IE.

D'autre part $\widehat{ABE}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ interceptant l'arc $\widehat{AE}$ et il est associé à l'angle au centre $\widehat{AIE}$. Donc, $\text{mes}\widehat{AIE} = 2\text{mes}\widehat{ABE}$.

Comme $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}$, alors $\text{mes}\widehat{ABE} = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, $\text{mes}\widehat{AIE} = \frac{2\pi}{3}$.

De plus l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EA}})$ est de sens direct. Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EA}}) = \frac{2\pi}{3}$.

On a : IA = IE et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EA}}) = \frac{2\pi}{3}$. On conclut que A est l'image de E par la rotation r.

b) Voir figure.

2. a) r est une rotation et on a la correspondance suivante.

r	
E	A
A	C
B	D

La rotation conserve les distances et le triangle ABE rectangle en A donc le triangle CDA est rectangle e

b) D'après la correspondance précédente, le segment [BE] a pour image par r le segment [DA] et ces deux segments ont la même longueur.
D'autre part, le segment [DA] a pour milieu l'image du milieu I de [BE]. Or I qui est le milieu de [BE] est centre de la rotation r. On en déduit que I le milieu de [DA]. Puisque les segments [DA] et [BE] ont le mê milieu I. On conclut de ce qui précède que le quadrilatère ABDE est un rectangle.

3. On a : C = r(A) et I milieu du segment [AD]

Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $\text{mes}\widehat{AIC} + \text{mes}\widehat{CID} = \pi$.

$\text{mes}\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$ et $\text{mes}\widehat{CID} = \pi - \text{mes}\widehat{AIC}$.

$\text{mes}\widehat{CID} = \pi - \frac{2\pi}{3}$

$\text{mes}\widehat{CID} = \frac{\pi}{3}$.

Par suite, $\text{mes}\widehat{CIE} = \pi - \text{mes}\widehat{CID} = \pi - \frac{\pi}{3}$; $\text{mes}\widehat{CIE} = \frac{2\pi}{3}$.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IE}})$ étant orienté dans le sens direct alors $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IE}}) = \frac{2\pi}{3}$.

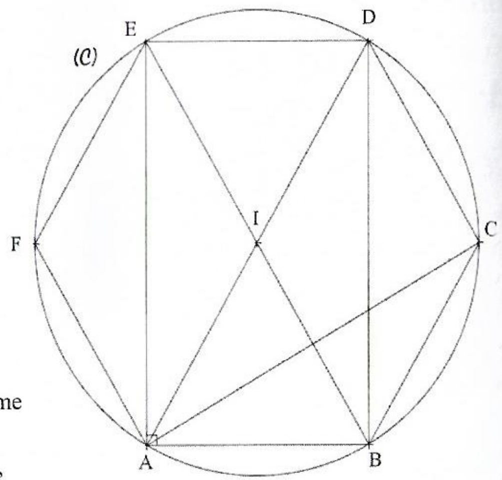
De plus, $A = r(E)$ et $C = r(A)$ implique $IA = IE$ et $IC = IA$.
Donc, $IE = IC$.

De ce qui précède, $IE = IC$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IE}}) = \frac{2\pi}{3}$. On conclut que E est l'image de C par r.

4. Voir figure.
5. Considérons le tableau de correspondance ci –dessous

$\xrightarrow{r}$

E	A
A	C
B	D
C	E
D	F



r est une rotation de centre I donc, $IF = ID$, $IE = IC$, $ID = IB$, $IC = IA$ et $IA = IE$.
Par suite, $IA = IB = IC = ID = IE = IF$. On en déduit que les points A, B, C, D, E et F appartiennent à un même cercle de centre I.
De plus d'après la propriété fondamentale des rotations, $EF = CD$, $CD = AB$, $DE = BC$, $AF = ED$
Or, le quadrilatère ABDE est un rectangle donc $AB = DE$.
Il s'ensuit que $AB = BC = DC = DE = EF = AF$.
De ce qui précède, on conclut que le polygone ABCDEF est un hexagone.

18

1. a) ABCD est un carré de sens direct donc, $CB = CD$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit que, B est l'image de D par R.

D'autre part BEC est un triangle équilatéral de sens direct donc, $CE = CB$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CE}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent E est l'image de B par R'.
b) ABCD est un carré et BCE est un triangle équilatéral
D'une part, $CD = CB$ et $CB = CE$. Donc, $CE = CD$.

D'autre part, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$

Donc, $\text{mes}\widehat{DCB} = \frac{\pi}{2}$ et $\text{mes}\widehat{ECB} = \frac{\pi}{3}$.

Les angles étant $\widehat{ECB}$ et $\widehat{DCE}$ adjacents, on a : $\text{mes}\widehat{DCB} = \text{mes}\widehat{ECB} + \text{mes}\widehat{DCE}$

$\text{mes}\widehat{DCE} = \text{mes}\widehat{DCB} - \text{mes}\widehat{ECB}$

$\text{mes}\widehat{DCE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

Donc, $\text{mes}\widehat{DCE} = \frac{\pi}{6}$.

De plus, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}})$ est de sens direct donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}}) = \frac{\pi}{6}$

Puisque $CE = CD$ et alors E est l'image de D par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2. a) Le quadrilatère ABCD est un carré donc, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
Il en découle que C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct donc, $BE = BC$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il s'ensuit que E est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Considérons le cercle ($\mathcal{C}$) circonscrit au triangle CDE et soit O son centre. Donc, $OE = OD$. D'autre part, $\widehat{DCE}$ est un angle inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) interceptant l'arc $\widehat{DE}$ et il est associé à l'angle au centre $\widehat{DOE}$.

Donc, $\text{mes}\widehat{DOE} = 2\text{mes}\widehat{DCE}$.

Or $mes\widehat{DCE} = \frac{\pi}{6}$ donc, $mes\widehat{DOE} = \frac{\pi}{3}$.

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE}})$ est de sens direct alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{3}$.

On a : OE = OD et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{3}$. On conclut que O est le centre de la rotation d'angle qui transforme D en E.

19

1. Voir figure.

2. Le triangle OMN un triangle isocèle en O avec $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{2}$

Donc, OM = ON et $Mes(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM}}) = -\frac{\pi}{2}$

Par conséquent, M est l'image de N par la rotation R.
D'autre part, le triangle MNP équilatéral de sens direct.

Donc, PN = PM et $Mes(\widehat{\overrightarrow{PM};\overrightarrow{PN}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il en résulte que N est l'image de M par la rotation R'.

3. a) Voir figure.

b) La rotation R transforme N en M et M en J. Par conséquent, d'une part OM = ON et $Mes(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc, le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

Il en découle que $mes\widehat{NMO} = \frac{\pi}{4}$.

D'autre part, OJ = OM et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc, le triangle OJM est rectangle isocèle en O.

Il en découle que $mes\widehat{OMJ} = \frac{\pi}{4}$.

Les angles $\widehat{NMO}$ et $\widehat{OMJ}$ étant adjacents, $mes\widehat{NMJ} = mes\widehat{NMO} + mes\widehat{OMJ}$.

$$mes\widehat{NMJ} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

$$mes\widehat{NMJ} = \frac{\pi}{2}.$$

Comme R(N) = M et R(M) = J, alors d'après la propriété fondamentale des rotations, MJ = MN.

On a : MJ = MN.

Or $mes\widehat{NMJ} = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle MNJ est isocèle rectangle en M.

c) Le triangle MNP est équilatéral donc, MN = MP. De plus, le triangle MNJ est isocèle en M implique MJ = MN. Par conséquent, MP = MJ. On en déduit que le triangle PMJ est isocèle en M.

d) I est l'image de J par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donc, PI = PJ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{PJ};\overrightarrow{PI}}) = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, le triangle PJI est équilatéral.

Il en découle que : IP = IJ. Donc, I appartient à la médiatrice du segment [PJ].

De plus, le triangle PMJ est isocèle en M donc MP = MJ. Il en résulte que M appartient à la médiatrice du segment [PJ].

Puisque les points I et M appartiennent à la médiatrice du segment [PJ] alors la droite (MI) est la médiatrice du segment [PJ].

On en déduit que la droite (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JMP}$.

4. a) Le triangle MNP est équilatéral et le triangle MNJ est rectangle en M. Donc, $mes\widehat{PMN} = \frac{\pi}{3}$ et $mes\widehat{JMN} = \frac{\pi}{2}$.

Puisque les angles $\widehat{PMN}$ et $\widehat{JMP}$ sont adjacents alors, $mes\widehat{JMN} = mes\widehat{JMP} + mes\widehat{PMN}$.

$$mes\widehat{JMP} = mes\widehat{JMN} - mes\widehat{PMN}.$$

$$mes\widehat{JMP} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}.$$

De plus la droite (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JMP}$.

Par conséquent, la mesure de l'angle $\widehat{IMP}$ est égale à $\frac{\pi}{12}$.

b) R' est une rotation telle que : R'(M) = N et R'(J) = I.

…près la propriété fondamentale des rotations, NI = MJ. Or le triangle MPJ étant isocèle en M, MP = MJ. Il s'ensuit que : NI = MP.
…lus, le triangle MNP est équilatéral donc, NM = NP = MP.
…onclut que : NP = NM = NI.
…résulte que N est le centre du cercle circonscrit au triangle IMP.

…L'angle $\widehat{IMP}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre N circonscrit au triangle IMP. Cet angle …tercepte l'arc $\widehat{IP}$ et il est associé à l'angle au centre $\widehat{INP}$.

…nc, $mes\widehat{INP} = 2mes\widehat{IMP}$.

$mes\widehat{INP} = \frac{\pi}{6}$.

…mme le triangle MNP est équilatéral alors $mes\widehat{MNP} = \frac{\pi}{3}$.

…s angles $\widehat{MNI}$ et $\widehat{INP}$ sont adjacents alors, $mes\widehat{MNP} = mes\widehat{MNI} + mes\widehat{INP}$.

$$mes\widehat{MNI} = mes\widehat{MNP} - mes\widehat{INP}$$

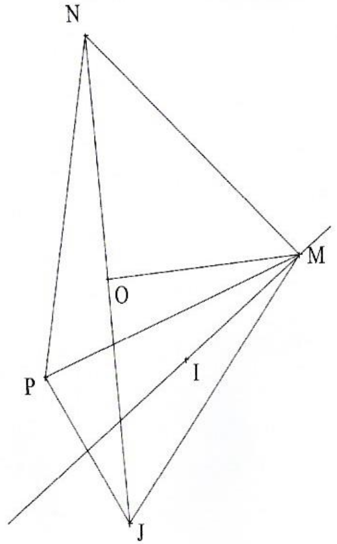
$$mes\widehat{MNI} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$mes\widehat{MNI} = \frac{\pi}{6}$$

…nc,

…r l'angle $(\widehat{\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NI}})$ est de sens indirect. Par conséquent, $Mes(\widehat{\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NI}}) = -\frac{\pi}{6}$.

…n a : NI = NM et $Mes(\widehat{\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NI}}) = -\frac{\pi}{6}$ donc I est l'image de M par la rotation de centre N et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.



20

1. Voir figure.

2. a) ADE est un triangle équilatéral de sens direct. Donc, EA = ED et $Mes(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Il en découle que A est l'image de D par la rotation r.

De même, ABC est un triangle équilatéral de sens direct donc, CB = CA et $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, B est l'image de A par la rotation de r'.

b) Voir figure

3. Soit ABC et ADE deux triangles équilatéraux de sens direct. Donc,

D'une part, on a : AC = AB et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Il en résulte que C est l'image de B la rotation r''.

D'autre part, AE = AD et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}}) = \frac{\pi}{3}$.

Par conséquent E est l'image de D la rotation r''.

4. Par les rotations r et r', on a les tableaux suivants.

$\xrightarrow{r}$	
D	A
E	E

et

$\xrightarrow{r'}$	
A	B
E	F

Donc, d'après la propriété fondamentale des rotations on a les résultats ci-dessous :
AE = DE et BF = AE.
On en déduit que : BF = DE (1).

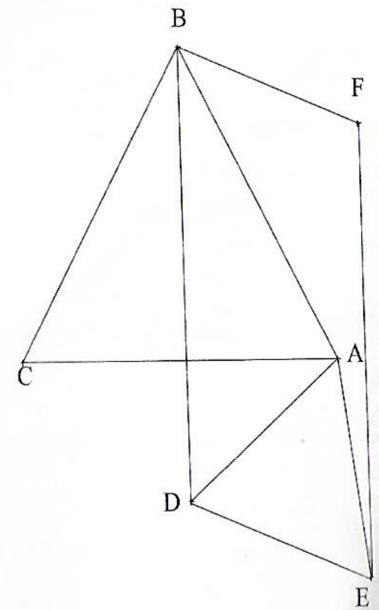
De plus par la rotation r'' on a ce qui suit :

$\xrightarrow{r''}$	
B	C
D	E

Il en découle d'après la propriété fondamentale des rotations que ; CE = BD (2).
Or F = r'(E) implique que CF = CE et

$Mes(\widehat{\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc, le triangle CEF est équilatéral Par conséquent, FE = CE (3).
Il s'ensuit que de (2) et (3), on a : DB = FE (4).
En définitive, il résulte de (1) et (4) que le quadrilatère DEFB est un parallélogramme.



21

1. Laissé qu soin du lecteur.

2. a)Les angles $\widehat{OBI}$ et $\widehat{CIA}$ sont deux angles correspondants définis par les droites parallèles (OB) et (IC) et leur sécante commune (AB) donc $mes\widehat{CIA} = mes\widehat{OBI} = \frac{\pi}{3}$.

De plus les droites (AC) et (IA) sont perpendiculaires donc le triangle IAC est un triangle rectangle en A et les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OAC}$ sont adjacents

Donc $mes\widehat{BAO} + mes\widehat{OAC} = mes\widehat{BAC}$.

$$\frac{\pi}{6} + mes\widehat{OAC} = \frac{\pi}{2},$$

$$mes\widehat{OAC} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Comme le triangle OBI est équilatéral alors OB = BI.
De plus, I milieu de [AB] donc AI = IB. Par conséquent OB = AI.

Le triangle IAC est rectangle en A avec $mes\widehat{CIA} = \frac{\pi}{3}$.

On $\tan\widehat{CIA} = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{AC}{AI}$.

D'autre part, le triangle OBA est rectangle en O avec $mes\widehat{OBA} = \frac{\pi}{3}$.

Donc $\tan\widehat{OBA} = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{OA}{OB}$.

Il s'ensuit que $\frac{AC}{AI} = \frac{OA}{OB}$.

Puisque OB = AI, on conclut que AC = OA.

3. On a $mes\widehat{OAC} = \frac{\pi}{3}$. et AC = OA donc le triangle OAC est équilatéral.

4. Le triangle OAC est équilatéral $mes\widehat{AOC} = \frac{\pi}{3}$. De plus l'angle $\widehat{(\vec{OA},\vec{OC})}$ est de sens direct.

On a : OC = OA et $Mes\widehat{(\vec{OA},\vec{OC})} = \frac{\pi}{3}$. On conclut que C est l'image de A par r.

22

1. Le triangle IEF est rectangle isocèle en I donc IF = IE

De plus $Mes\widehat{(\vec{IE},\vec{IF})} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que F est l'image de E par R.

2. Les droites (EF) et (FJ) sont perpendiculaires. Donc, $mes\widehat{KFJ} = \frac{\pi}{2}$.

$\widehat{KFJ}$ et $\widehat{KIJ}$ sont deux angles inscrits dans le cercle ($\mathcal{C}$) interceptant l'arc $\widehat{KJ}$. Par conséquent

$mes\widehat{KIJ} = mes\widehat{KFJ}$. Il s'ensuit que $mes\widehat{KIJ} = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, $\widehat{JFI}$ et $\widehat{IFE}$ sont deux angles adjacents donc $mes\widehat{JFI} + mes\widehat{IFE} = mes\widehat{JFE}$.

$$mes\widehat{JFI} = \frac{\pi}{4}.$$

$\widehat{JKI}$ et $\widehat{JFI}$ sont deux angles inscrits dans le cercle ($\mathcal{C}$) interceptant l'arc $\widehat{JI}$.

Par conséquent $mes\widehat{JKI} = mes\widehat{JFI}$. Il s'ensuit que $mes\widehat{JKI} = \frac{\pi}{4}$.

Puisque $mes\widehat{KIJ} = \frac{\pi}{2}$ et $mes\widehat{JKI} = \frac{\pi}{4}$ donc le triangle KJI est rectangle isocèle en I

3. L'angle orienté $\widehat{(\vec{IK},\vec{IJ})}$ est de sens direct avec $mes\widehat{KIJ} = \frac{\pi}{2}$. Donc $Mes\widehat{(\vec{IK},\vec{IJ})} = \frac{\pi}{2}$.

De plus IJ = IK Par conséquent J est l'image de K par la rotation R.

4. a) Les droites (IE) et (EB) sont perpendiculaires, et les droites (IE) et (IF) sont perpendiculaires car le triangle EIF est rectangle en I. Il en découle que les droites (EB) et (IF) sont parallèles.
b) Le point K est le symétrique de E par rapport à F donc F est le milieu du segment [KE].
Dans le triangle KBE, le point K est le milieu du segment [KE], le point I appartient au segment [KB] d'après la propriété de la droite des milieux, il en résulte que le point I est le milieu du segment [KB].

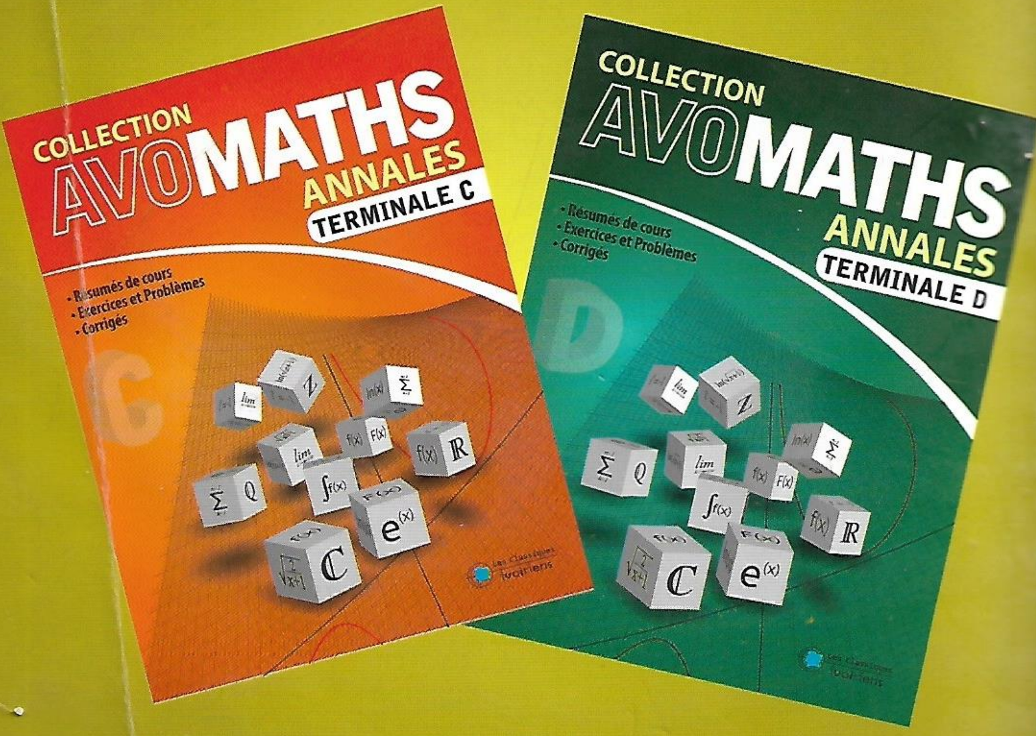
5. Le point I est le milieu de [KB] donc IK = IB. D'après la question 3, IJ = IK.
Par conséquent, IB = IJ.
D'autre part les droites (IJ) et (IK) sont perpendiculaires, et B appartient à la droite (IK) donc les droites (IB) et (IJ) sont perpendiculaires. Il en découle que : $mes\widehat{BIJ} = \frac{\pi}{2}$.

De plus, l'angle orienté $\widehat{(\vec{IJ},\vec{IB})}$ est de sens direct donc $Mes\widehat{(\vec{IJ},\vec{IB})} = \frac{\pi}{2}$.

6. D'après la question précédente, IB = IJ et $Mes\widehat{(\vec{IJ},\vec{IB})} = \frac{\pi}{2}$ donc B est l'image de J par R.

Création et Réalisation de la maquette :
Service PAO Les Classiques Ivoiriens

ISBN : 979-10-90625-68-6
Dépôt Légal : Editeur N° 11325 du 03 Juillet 2014 - 03 Trimestre 2014



ISBN 979-10-90625-[illegible]
9 791090 625[illegible]