Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Tome 2

05 Cours bien détaillés

05 Résumés bien précis

05 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025/2026

Préparé par **Aissa HIYAB** professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 28/06/2025

Table des matières

Corrections des séries et les devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1KU_-FJjiZZNG3p6ZiIZxGxMmEDNauM2P/view?usp=sharing

11

Trigonométrie 2

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة

مادة الرياضيات

الأستاذ

عيسى هياب

1) Rappel 1

Activité 1 :

1) Représenter l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$ sur un cercle trigonométrique.

2) Représenter l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$ sur un cercle trigonométrique.

Activité 2 :

Compléter le tableau suivant :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin					
cos					
tan					

Activité 3 :

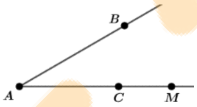
Représenter sur un cercle trigonométrique les nombres : 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π ; $-\pi$; 2π

Activité 4 :

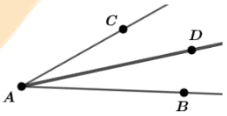
1) Existe-il un réel x tel que $cos(x)=2$? ; 2) Existe-il un réel y tel que $sin(y)=3$?

Remarques 1 :

- La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.
- Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
- La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.
- Le centre du cercle inscrit est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle.
- La somme des mesures des angles géométriques d'un triangle est égale à π .
- Tout triangle non rectangle a tous ses angles sont aigus (on dit dans ce cas que le triangle est acutangle) ou au plus un angle obtus (on dit dans ce cas que le triangle est obtus).
- Si $M\in[AC)$ alors $B\hat{A}M=B\hat{A}C$



- Relation de Chasles : $B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C$



- Si b désigne la longueur d'un côté d'un triangle et h la hauteur relative à ce côté, l'aire de ce triangle est $S=\frac{1}{2}\times b\times h$

2) Equations et inéquations trigonométriques

2-1 L'équation $cos(x)=a$ et les inéquations $cos(x)>a$ et $cos(x)<a$

Rappel 2 :

$1=cos(....)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}=cos(....)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}=cos(....)$; $\frac{1}{2}=cos(....)$; $0=cos(....)$; $-cos(a)=cos(........)$

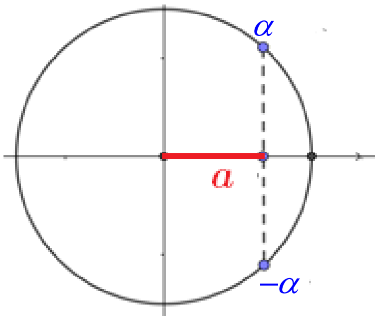
Propriété 1

On considère l'équation $cos(x)=a$ avec $a\in\left]-1;1\right[$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha\in\left]0;\pi\right[$ tel que $a=cos(\alpha)$

Et $S=\{\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $cos(x)=cos(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\alpha+2k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\end{cases}$



Remarque 2 :

Pour résoudre l'inéquation $cos(x) > a$ ou $cos(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $cos(x) = a$

Exemple 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) $cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E_1) et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En utilisant le cercle trigonométrique précédent résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations :

$cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Application 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $cos(x) = -\frac{1}{2}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ des inéquations : $cos(x) > -\frac{1}{2}$; $cos(x) < -\frac{1}{2}$; $cos(x) \geq -\frac{1}{2}$; $cos(x) \leq -\frac{1}{2}$

Remarque 3 : Cas particulier

- Si $a > 1$ *ou* $a < -1$ alors l'équation $cos(x) = a$ n'admet pas de solution : $S = \varnothing$
- L'ensemble de solutions de l'équation $cos(x) = -1$ est $S = \{\pi + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation $cos(x) = 1$ est $S = \{2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

2-2 L'équation $sin(x) = a$ et les inéquations $sin(x) > a$ et $sin(x) < a$

Rappel 3 :

$1 = sin(....)$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = sin(....)$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = sin(....)$; $\frac{1}{2} = sin(....)$; $0 = sin(....)$; $-sin(a) = sin(........)$

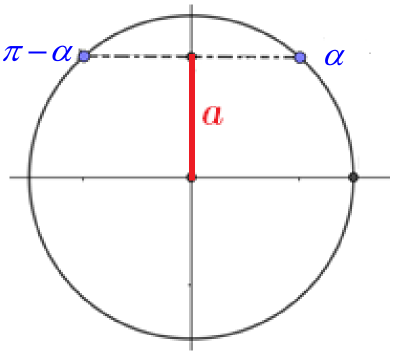
Propriété 2

On considère l'équation $sin(x) = a$ avec $a \in]-1;1[$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = sin(\alpha)$

Et on a $S = \{\alpha + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $sin(x) = sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



Remarque 4 :

Pour résoudre l'inéquation $sin(x) > a$ ou $sin(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $sin(x) = a$

Application 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) $sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $[-\pi;2\pi[$ l'équation (E_1) et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans $[-\pi;2\pi[$ des inéquations : $sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Remarque 5 : Cas particulier

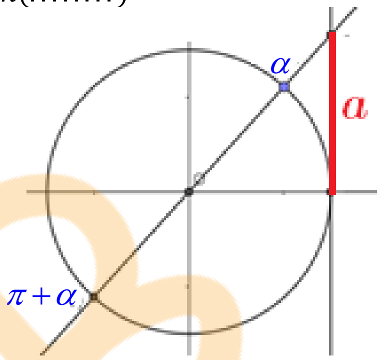
- Si $a > 1$ *ou* $a < -1$ alors l'équation $sin(x) = a$ n'admet pas de solution : $S = \varnothing$
- L'ensemble de solutions de l'équation $sin(x) = -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation $sin(x) = 1$ est $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2-3 L'équation $tan(x) = a$ et les inéquations $tan(x) > a$ et $tan(x) < a$

Rappel 4 :

$1 = tan(....)$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = tan(....)$; $\sqrt{3} = tan(....)$; $0 = tan(....)$; $-tan(a) = tan(........)$

Propriété 3



On considère l'équation $tan(x) = a$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = tan(\alpha)$ et on a $S = \{\alpha + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $tan(x) = tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

Remarque 6 :

Pour résoudre l'inéquation $tan(x) > a$ ou $tan(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $tan(x) = a$

Application 3 :

1) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ l'équation $tan(x) = -1$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ les inéquations : $tan(x) > -1$ et $tan(x) < -1$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{7\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right[$ l'équation $tan(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$ (tu peux mettre $X = 2x - \frac{\pi}{3}$)

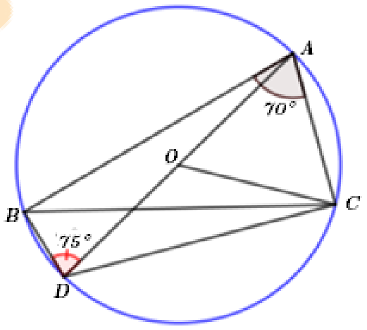
Exercices : Exercices de 1 à 12 de la série 11.

3) Angle inscrit - quadrilatère inscriptible - loi des sinus

Activité 4 :

$[AD]$ un diamètre d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

B et C de points de $(\mathcal{C})$ tel que $B\hat{A}C = 70°$ et $A\hat{D}B = 75°$ (voir la figure ci-dessous)



1) Déterminer la nature des triangles ABD et ACD.

2) Déterminer la mesure des angles suivants : $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $C\hat{A}O$ et $D\hat{B}C$.

3) Déterminer la nature du triangle AOC.

4) En déduire la mesure des angles $A\hat{O}C$ et $A\hat{B}C$.

5) Déterminer par deux méthodes la mesure des angles $A\hat{C}B$ et $B\hat{C}D$.

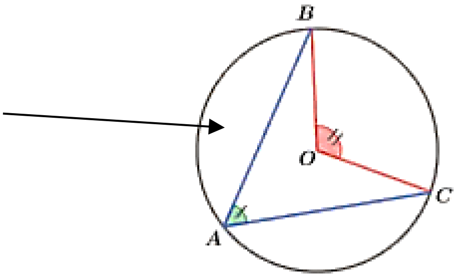
6) Déterminer la mesure de l'angle $B\hat{D}C$ et vérifier que $B\hat{D}C + B\hat{A}C = 180°$.

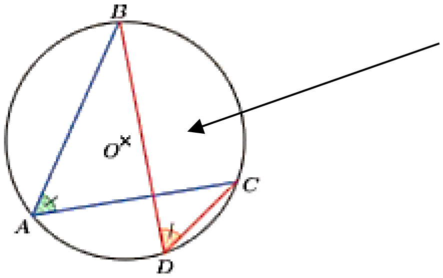
Propriétés 4

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

$B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$

$B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C$





$B\hat{A}C = B\hat{D}C$

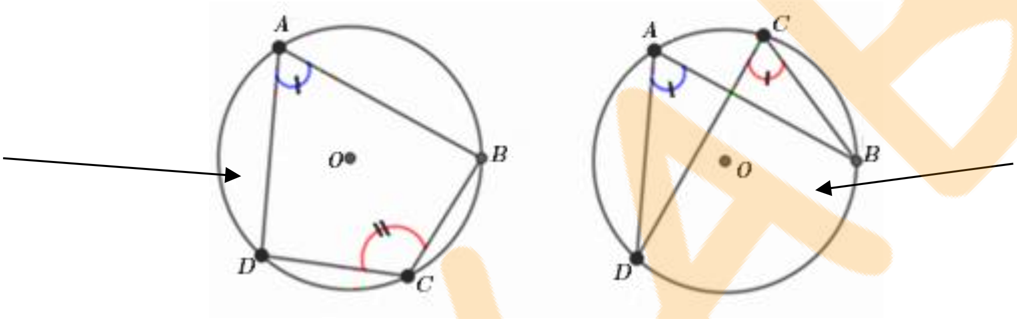
Propriété 5 : Quadrilatère inscriptible :

A, B et C sont trois point non alignés, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ ou $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$

(Dans ce cas on dit que $ABCD$ est un **quadrilatère inscriptible** et que les points A, B, C et D sont **cocycliques**)

$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$



$\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$

Application 4 :

Dans un trapèze isocèle, les côtés adjacents aux bases sont isométriques.

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, M le point d'intersection de (AC) et (BD) et N est le point d'intersection de (AD) et (BC).

1) Montrer que $B\hat{A}D + B\hat{C}D = \pi$ puis déduire que $ABCD$ est inscriptible.

2) Soit O le centre du cercle circonscrit au trapèze $ABCD$.

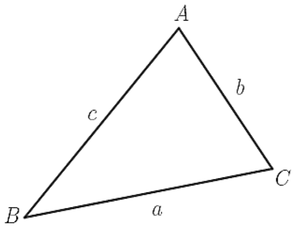
Montrer que $D\hat{O}M + D\hat{A}M = \pi$ puis déduire que $AMOD$ est inscriptible.

Théorème 1 : Loi des sinus

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $B\hat{A}C = \hat{A}$, $C\hat{B}A = \hat{B}$, $A\hat{C}B = \hat{C}$ on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



Théorème 2 : Aire d'un triangle

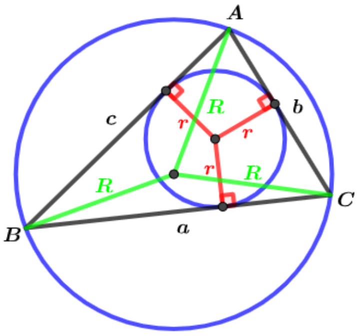
Soit ABC un triangle.

R et r sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

L'aire du triangle ABC est :

- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \frac{1}{2}a \times b \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2}b \times c \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2}a \times c \times \sin \hat{B}$



Application 5 :

ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$, $\widehat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$ et $AB = 6$. Calculer $\widehat{BAC}$ et AC.

Application 6 :

ABC un triangle tel que $BC = 4$, $AC = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1) En utilisant la loi des sinus déterminer $sin(\widehat{ABC})$.

2) En déduire $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Application 7 :

1) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de coté 5.

2) En déduire R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

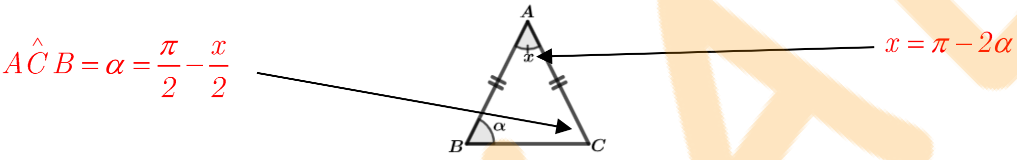
Application 8 :

Calculer l'aire du triangle ABC sachant que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

Remarques 7 :

- Si ABC est un triangle isocèle en A alors :

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \pi - 2\widehat{ABC} = \pi - 2\widehat{ACB}$$

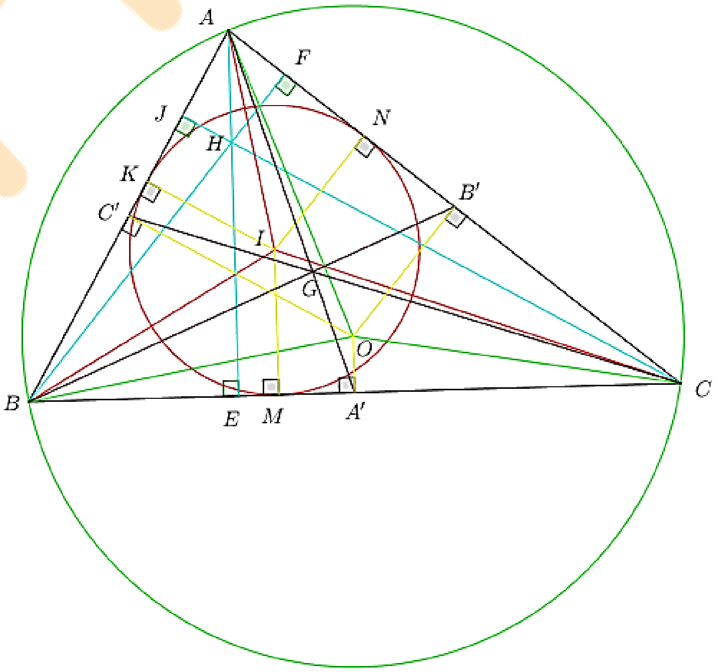


- Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angles égale à $60°$ alors il est équilatéral.
- Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes de ce triangle.
- Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé.
- L'orthocentre est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

Exercices : Exercices de 13 à 24 de la série 11.

Pour la recherche :

- Cercle et inégalité d'Euler
- Point de Gergonne d'un triangle.
- Les cercles exinscrits et point de Nagel d'un triangle.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle et l'axe radical de deux cercles.



Résumé 11 : Trigonométrie 2

Les équations trigonométriques de base :

- $\cos(x)=\cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \end{cases}$
- $\sin(x)=\sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\alpha+2k\pi & / k\in\mathbb{Z} \end{cases}$
- $\tan(x)=\tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

Les inéquations trigonométriques de base :

Pour résoudre une inéquation trigonométrique de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

Angle inscrit-angle au centre :

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle

au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

Quadrilatère inscriptible :

A, B et C sont trois point non alignés, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$ ou $\widehat{BCD}+\widehat{BAD}=\pi$

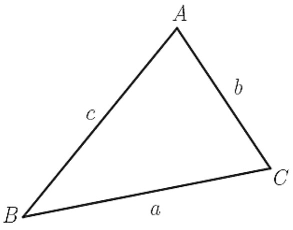
(Dans ce cas on dit que $ABCD$ est un **quadrilatère inscriptible** et que les points A, B, C et D sont **cocycliques**)

Loi des sinus :

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit.

On pose $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ on a :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$



Aire d'un triangle :

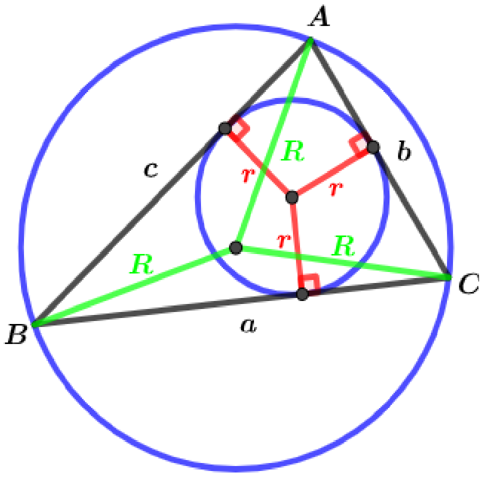
Soit ABC un triangle.

R et r sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

On pose $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est :

- $S=\frac{abc}{4R}$
- $S=pr$
- $S=\frac{1}{2}a\times b\times\sin\hat{C}=\frac{1}{2}b\times c\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}a\times c\times\sin\hat{B}$



Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 11

Trigonométrie 2

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Équations trigonométriques

Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle I les équations :

1) $4sin(x) = -2 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad I =]-\pi; 2\pi]$

3) $\sqrt{2}cos(3x) = 1 \quad ; \quad I =]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$

4) $\sqrt{3}tan(x) = -3 \quad ; \quad I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

5) $cos^3(x) + sin^2(x) = 1 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin(x) = -sin\frac{\pi}{7} \quad ; I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x) = -cos\frac{\pi}{8} \quad ; I = [0; 2\pi]$

3) $cos(3x) = -sin\frac{\pi}{3} \quad ; I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

4) $cos(3x) = -sin(x) \quad ; I = \mathbb{R}$

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{7} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x)\,cos(3x) = 0 \quad ; \quad I =]-\pi; \pi]$

3) $tan(x).tan(2x) = 1 \quad ; \quad I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

4) $tan(x) = sin(x) \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad tan(x) = tan\left(\frac{7\pi}{11}\right) \quad ; \quad tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

2) Résoudre dans l'intervalle I les équations :

a) $tan\ (x) = tan\frac{\pi}{5} \quad ; \quad I = [0\,; 3\pi]$

b) $tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad ; \quad I = [-2\pi; \pi]$

Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin(x) = cos\frac{\pi}{8} \quad ; \quad I = [0\,; 3\pi]$

2) $sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad I = \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $sin(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad I = \left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $sin(x).cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad ;$ 2) $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

3) $sin^2(x) - 16 = 0 \quad ;$ 4) $sin^2(x) - cos^2(x) = 0$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $tan\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = tan(3x)$

3) $sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) $tan\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).tan(2x) = 1$

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$(E): \cos^3 x + \sin^3 x + 2 = 3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x . \sin x)$

et S l'ensemble des solutions de (E).

1) Montrer que $x \in S$ équivaut à $(\cos x + \sin x)(1 - \cos x . \sin x) = 1$.

2) On pose $cos\, x + sin\, x = t$

a) Montrer que $x \in S$ équivaut à $t^3 - 3t + 2 = 0$

b) Résoudre l'équation à $t^3 - 3t + 2 = 0$.

c) En déduire l'ensemble S.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} cos\, 2x = cos\, y \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} sin\, x = sin\, y \\ x - 2y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} tan\, x = tan\, y \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} sin(2x - y) = 0 \\ cos(x - 2y) = 0 \end{cases}$

Inéquations trigonométriques

Exercice 10

Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1) $cos(x) \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad I =]-\pi; \pi]$

2) $cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad I = [0; 2\pi]$

3) $tan(x) > -1 \quad ; \quad I = [0; 2\pi]$

4) $sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad I = [0; 2\pi]$

5) $tan(x) < -\sqrt{3} \quad ; \quad I = [-\pi; \pi]$

Correction

Exercice 11

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les inéquations :

$cos\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad sin\, x \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad cos\, x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tan\, x \geq 1 \quad ; \quad tan\, x \leq \sqrt{3} \quad ; \quad tan\, x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 12

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les inéquations :

$cos(x).sin(x) \geq 0 \quad ; \quad 2\,sin^2(x) + sin(x) \leq 0 \quad ;$

$2\,cos^2(x) - cos(x) > 0 \quad ;$

$(2\,sin(x) - 1)\left(\sqrt{3}\,tan(x) + 1\right) > 0$

Loi des sinus - aire d'un triangle

Exercice 13

Soit ABC un triangle tel que :

$\hat{B} = \frac{\pi}{6}$, $BA = c = \sqrt{3}$ et $AC = b = \sqrt{3}$

Calculer $\hat{A}$, $\hat{C}$, BC, S , R et r

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 11

Trigonométrie 2

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 14

Soit ABC un triangle tel que :

$\hat{A}=\frac{\pi}{4}$, $BC=a=4$ et $AC=b=4$

Calculer $AB,\ \hat{B},\ \hat{C}$, S , R et r

Correction

Exercice 15

Soit ABC un triangle tel que :

$\hat{A}=\frac{\pi}{4}$, $\hat{B}=\frac{\pi}{6}$ et $R=4$

Calculer $AB,\ AC,\ BC,\ \hat{C},\ S$, R et r

Exercice 16

Soit ABC un triangle tel que :

$AB=\sqrt{3}$, $AC=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $BC=\sqrt{2}$ et $\widehat{BCA}=\dfrac{\pi}{3}$

1) Calculer $\sin\widehat{BAC}$ puis déduire une mesure de $\widehat{BAC}$

2) Vérifier que $\widehat{ABC}=\frac{5\pi}{12}$ puis déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) Calculer l'aire du triangle ABC ainsi que les deux rayons des deux cercles inscrit et circonscrit du triangle ABC.

Exercice 17

Soit ABC un triangle tel que : $AB=4$, $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$ et $\hat{B}=\frac{\pi}{4}$

On pose $AC=b$ et $BC=a$

1) Montrer que $b=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

2) a) Montrer que $a^2+4a\sqrt{6}-48=0$

b) Calculer a puis déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) Calculer l'aire du triangle ABC ainsi que les deux rayons de ses deux cercles inscrit et circonscrit.

Exercice 18

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et de rayon R.

H est le projeté orthogonal de O sur (BC).

Le demi droit $[OH)$ coupe le cercle (C) au point I.

On pose $\widehat{BAC}=\alpha$

1) Montrer que :

$IC=2R.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $CH=2R.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

2) Déduire que : $\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice 19

Soit ABC un triangle, on pose

$BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$

1) Montrer que : $\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}=\frac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\hat{A}$

2) Déterminer la nature du triangle ABC dans le cas où $\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}=\sin^2\hat{A}$

3) Montrer que $\sin\hat{A}-\sin\hat{B}=\frac{1}{2R}(a-b)$

4) Déduire que :

$c(\sin\hat{A}-\sin\hat{B})+a(\sin\hat{B}-\sin\hat{C})+b(\sin\hat{C}-\sin\hat{A})=0$

Angles inscrits-quadrilatères inscriptibles

Exercice 20

Un cerf-volant est quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie.

On veut établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cerf-volant soit inscriptible.

On considère un cerf-volant $ABCD$ inscriptible et O le milieu de $[BD]$

1) On suppose que $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=\frac{\pi}{2}$

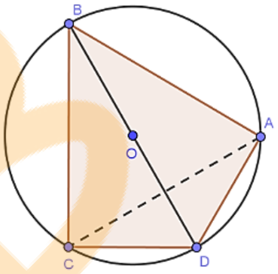
M.q $ABCD$ est inscriptible.

2) On suppose que $ABCD$ est inscriptible

a) Vérifier que $[BD]$ est un diamètre du cercle circonscrit au $ABCD$.

b) Déterminer la nature des triangles BCD et BAD.

c) On déduire que : $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=\frac{\pi}{2}$ puis conclure



Exercice 21

Soit (C) un cercle, $[BC]$ une corde, et $A\in(C)$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G respectivement.

Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

Exercice 22

Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F.

1) Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

2) Montrer que le quadrilatère $CFDE$ est inscriptible.

Exercice 23

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). On considère H_A , H_B et H_C les symétriques de H respectivement par rapport à (BC), (AC) et (AB)

Montrer que les quadrilatères :

AH_ABC , AH_BBC et AH_CBC sont inscriptibles.

Exercice 24 (Exercice d'olympiade nationale)

ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit. On considère un point E de la tangente (T) au cercle (C) au point A. Les points P et Q sont respectivement les projections orthogonales de E sur (AB) et (AC)

1) Montrer que $(PQ)\perp(BC)$

2) La tangente (T) et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupent la droite (BC) respectivement aux points F et D. Montrer que $FD=FA$

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL4

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$sin(x)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad cos(x)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad tan(x)=-\sqrt{3} \quad ; \quad 2\,sin^2(x)+7\,sin(x)+3=0 \quad ; \quad cos(x)=1$$

$$sin(x)=1 \quad ; \quad cos(x)=-\frac{3}{2} \quad ; \quad sin(3x)=sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad ; \quad \sqrt{3}tan(2x+1)=1 \; ; \quad cos(2x+\frac{\pi}{3})=sin(5x-\frac{\pi}{6})$$

Exercice 2

En utilisant le cercle trigonométrique résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :

(I_1) $2sin(x)+\sqrt{2}<0$; (I_2) $2cos(x)+1\geq 0$

(I_3) $(2sin(x)+\sqrt{2})(2cos(x)+1)<0$; (I_4) $-1\leq tan(x)\leq 1$

Exercice 3

Partie A

Le but de cet exercice est de démontrer que la symétrie de l'orthocentre d'un triangle acutangle par rapport à l'un de ses côtés appartient à son cercle circonscrit.

Soit ABC un triangle acutangle et H son orthocentre (point d'intersection des hauteurs).

E est le point d'intersection des droites (AH) et (BC).

D est le point d'intersection de la droite (AH) et le cercle circonscrit au triangle ABC. (Voir la figure ci-contre)

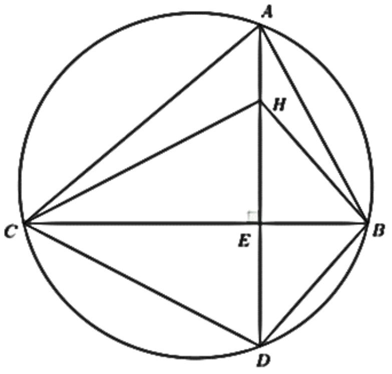
On pose $B\hat{A}C=\hat{A}$, $C\hat{B}A=\hat{B}$ et $A\hat{C}B=\hat{C}$

1) Montrer que : $C\hat{A}E=C\hat{A}D=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$; $C\hat{B}D=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$; $C\hat{D}B=\pi-\hat{A}$; $A\hat{B}D=\frac{\pi}{2}+(\hat{B}-\hat{C})$

$C\hat{D}E=C\hat{D}A=\hat{B}$; $A\hat{D}B=\hat{C}$; $B\hat{A}D=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$; $E\hat{C}D=B\hat{C}D=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$; $A\hat{C}D=\frac{\pi}{2}+(\hat{C}-\hat{B})$

2) Soit F le point d'intersection des droites (CH) et (AB).

Montrer que : $F\hat{C}B=H\hat{C}B=H\hat{C}E=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$



3) a) Montrer que $H\hat{C}D=\pi-2\hat{B}$

b) Déduire la mesure de l'angle $C\hat{H}D$ et la nature du triangle CHD.

4) a) En déduire que la droite (CE) est la médiatrice du segment $[HD]$

b) En déduire que E est le milieu de $[HD]$

5) Soit D' la symétrie de H par rapport à (BC)

En déduire que $D'=D$ et que D' appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Partie B

Le but est de calculer S', p' et r': l'aire, le demi périmètre et le rayon de cercle inscrit au triangle ABD'.

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) En utilisant la loi des sinus dans le triangle ABD' montrer que :

$AB=2Rsin(\hat{C})$, $BD'=2Rcos(\hat{B})$ et $AD'=2Rcos(\hat{B}-\hat{C})$

Correction

2) On suppose que $R=2\sqrt{2}$, $\hat{C}=\frac{\pi}{12}$, $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ et $sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

a) Montrer que $S'=2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ (Remarquer que $S'=\frac{1}{2}AD'\times AB\times sin(B\hat{A}D')$)

b) Montrer que $p'=2+\sqrt{2}+\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ (Remarquer que $p'=\frac{1}{2}(AB+AD'+BD')$) et déduire la valeur de r'.

بسم الله الرحمن الرحيم

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS4

TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (6 pts)

1) a) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points suivants : $A\left(\frac{123\pi}{12}\right)$ et $B\left(\frac{-39\pi}{4}\right)$ ……………….1pt

b) Placer les points A et B dans le même cercle trigonométrique. ……………………………………….1pt

c) Soit O le centre du cercle trigonométrique.

Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ et déduire $sin\left(\overline{OA};\overline{OB}\right)$ ………………………………….1pt

2) On pose $A(x)=cos(\frac{9\pi}{2}-x)sin(5\pi+x)-cos(x)sin(x+\frac{3\pi}{2})$

a) Montrer que $A(x)=2cos^2(x)-1$ ……………………………………………………….2pt

b) Calculer $A(\frac{\pi}{3})$ et $A(\frac{\pi}{4})$ ……………………………………………………….1pt

Exercice 2 (4 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $\sqrt{2}sin(x)=1$ ……………………………………….2pt

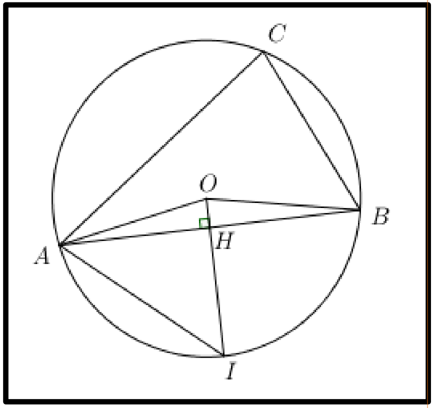
2) En utilisant le cercle trigonométrique résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $tan(x)>-\sqrt{3}$ ……………….2pt

Exercice 3 (10 pts)

Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit (C)

Soit R le rayon de (C) et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BA)

La demi droite $[OH)$ coupe (C) en I (Voir la figure ci-contre) on pose $B\hat{C}A=\hat{C}$



1) a) Montrer que $A\hat{O}B=2\hat{C}$ ……………………………………….1pt

b) Déterminer en justifiant votre réponse la nature du triangle OBA ……………….0.5pt

Dans le reste de l'exercice, rappelons la propriété suivante :

Si MNP est un triangle isocèle en M alors $M\hat{N}P=M\hat{P}N=\frac{\pi}{2}-\frac{N\hat{M}P}{2}$

c) En déduire que $O\hat{B}A=O\hat{A}B=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$ ……………………………………….1pt

2) a) En utilisant le triangle AOH montrer que $A\hat{O}H=A\hat{O}I=\hat{C}$ (remarquer que $O\hat{A}H=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$)……………….1pt

b) Déterminer en justifiant votre réponse la nature du triangle IAO ……………………………….0.5pt

c) En déduire que $O\hat{A}I=O\hat{I}A=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{C}}{2}$ et $OI=OA=R$ ……………………………………….1pt

d) En utilisant la loi des sinus dans le triangle IAO montrer que : $\frac{sin(\hat{C})}{IA}=\frac{cos(\frac{\hat{C}}{2})}{R}$ (rappel $sin(\frac{\pi}{2}-x)=cos(x)$) ……1pt

e) On suppose que $sin(\hat{C})=2sin(\frac{\hat{C}}{2})cos(\frac{\hat{C}}{2})$, déduire que $IA=2Rsin(\frac{\hat{C}}{2})$……………………………….1pt

Dans le reste de l'exercice on suppose que $R=2\sqrt{6}$ et $\hat{C}=\frac{\pi}{3}$

3) Montrer que l'aire du triangle IAO est $S'=6\sqrt{3}$ (remarquer que $S'=\frac{1}{2}OI\times OA\times sin(A\hat{O}I)$)……………….1pt

4) Montrer que le demi périmètre du triangle IAO est $p'=3\sqrt{6}$ et déduire r' et R' le rayon de cercle inscrit et circonscrit au triangle IAO ……………………………………………………….2pt

12

Fonctions numériques

الأستاذ

عيسى هياب

1) Généralités

1-1 Fonction numérique d'une variable réelle

Activité 1 :

Pour une personne de taille x en cm, la relation qui nous donne sa masse idéale $f(x)$ en kg est donnée par :

$$f(x) = x - 100 - \frac{x-150}{4}$$

1) Montrer que $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{125}{2}$ puis en déduire la nature de la relation (ou la fonction) qui lie x et $f(x)$.

2) Calculer la masse idéale dans les cas suivants : $x = 158cm$; $x = 164cm$; $x = 182cm$

3) Déterminer la taille de la personne dont la masse idéale est $71kg$

4) Montrer algébriquement que l'équation $f(x) = -80{,}5$ n'a pas de solution dans l'ensemble $D =]0;300[$ puis donner une explication de ce résultat.

Définition 1 :

Une fonction f est une relation qui, à chaque nombre réel x d'un ensemble D, associe au plus, un nombre réel y noté $f(x)$.

- Le nombre $f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
- Le nombre x , s'il existe tel que $f(x) = y$, s'appelle **antécédent** de y par la fonction f.

Application 1 :

Soit f et g les deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par : $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x-2}$ et $g(x) = x^2 + 3$

1) Calculer si possible l'image des nombres réels 1 ; 4 ; -4 ; 6 et 2 par la fonction f.

2) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres 3 ; 4 et 2 par la fonction g.

Remarques 1 :

- Une fonction f se note également par $f : x \mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x) = b$ d'inconnue x.

1-2 Ensemble de définition d'une fonction numérique

Définition 2 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.

L'ensemble de définition de la fonction f, noté D ou D_f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est calculable dans $\mathbb{R}$.

Remarques 2 :

- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction numérique, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif…
- On dit qu'une fonction numérique f est définie sur I si I est une partie de D_f .
- L'ensemble de définition d'une fonction numérique f est appelé aussi le domaine de définition de f.

Propriété 1 : Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes ;

La fonction f	Ensemble de définition
$f =$ Polynôme	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

Rappel

Soit a un nombre réel, on a :

- $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} = [a;+\infty[$;
- $\{x \in \mathbb{R} / x > a\} =]a;+\infty[$;
- $\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\} =]-\infty;a]$;
- $\{x \in \mathbb{R} / x < a\} =]-\infty;a[$;
- $\{x \in \mathbb{R} / x \neq a\} = \mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Exemple 1

Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x^2-4x+3 \;;\quad f(x)=\frac{-x-6}{x+3} \;;\quad f(x)=\sqrt{4x-2} \;;\quad f(x)=\frac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$$

- Pour $f(x)=x^2-4x+3$ on a $D_f=\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{x+3}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq -3\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$
- Pour $f(x)=\sqrt{4x-2}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 4x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\geq \frac{1}{2}\}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 7-x>0\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x<7\}=\left]-\infty;7\right[$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Application 2 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{x-1} \;;\; f(x)=\frac{1}{x-1} \;;\; f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}} \;;\; f(x)=\frac{2x+3}{x^2-x-2} \;;\; f(x)=\sqrt{x^2-x-2} \;;\; f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \;;\; f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+3} \;;\; f(x)=\sqrt{7-x} \;;\; f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}} \;;\; f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1} \;;\; f(x)=\frac{3x+1}{x\sqrt{x+1}} \;;\; f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+3} \;;\; f(x)=tan(x)$$

1-3 Egalité de deux fonctions

Définition 3 :

Soient f et g deux fonctions. D_f et D_g sont leurs ensembles de définition respectifs.

On dit que f et g sont **égales**, et on écrit $f=g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f=D_g$
- $f(x)=g(x)$ pour tout x de D_f

Exemple 2 :

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x^2}$ et $g(x)=|x|$

- On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$, donc $D_f=D_g$
- Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$ alors $f=g$ et donc les deux fonctions f et g sont égales.

Application 3 :

Déterminer si les deux fonctions f et g sont égales dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x)=x+1$

3) $f(x)=x+1$ et $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$; 4) $f(x)=sin(x)$ et $g(x)=cos(x)\times\dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

1-4 Représentation graphique d'une fonction numérique

Activité 2 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=2x+1$

Construire le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 4 :

- Dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ **la courbe représentative** d'une fonction f, notée souvent $(\mathcal{C}_f)$, est l'ensemble des points $M(x;f(x))$ du plan où x parcourt D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
- Autrement dit : $M(x,y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $y=f(x)$

Remarque 3 :

L'équation $y=f(x)$ est appelée **l'équation de la courbe** $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points appartenant à $(\mathcal{C}_f)$ parmi les points suivants : $O(0;0)$; $A(3;\dfrac{9}{4})$; $B(2;4)$; $C(-1;1)$

2) Fonction paire - Fonction impaire

2-1 Fonction paire

Activité 3 : On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=|x|-1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=f(x)$
3) Vérifier que $\begin{cases} f(x)=x-1 & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=-x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$
4) En déduire la nature de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
5) En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie à déterminer.

Définition 5 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que D est **symétrique par rapport à zéro** si pour tout $x\in D$ on a $-x\in D$.

Exemple 3 :

Déterminer les parties symétriques par rapport à zéro parmi les parties suivantes :

$[-2;2]$; $[-2;1]$; $[-3;-2]\cup[2;4]$; $]2;9[$; $\mathbb{R}$; $\{-2;5;7;2;-7;-5:0\}$; $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$; $\mathbb{R}^*$; $[-3;-2]\cup[2;3]$; $]-1;1[$; $[0;+\infty[$; $\{-2;5;7;2;-7;0\}$

Remarques 4 :

- L'ensemble de définition de la fonction tangente : $x\mapsto tan(x)$ est $D_{tan}=\{\mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $-x\in D_{tan}$ (D_{tan} est symétrique par rapport à zéro)
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $\pi+x\in D_{tan}$

Définition 6 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.
On dit que f est une **fonction paire** si :

- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=f(x)$

Exemple 4 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x)=x^2$ est une fonction paire.

Application 5 :

Déterminer si f est une fonction paire dans les cas suivants :

$f(x)=|x|-\dfrac{1}{x^2}$; $f(x)=\sqrt{x}+1$; $f(x)=cos(x)$; $f(x)=3x^2+2x-4$

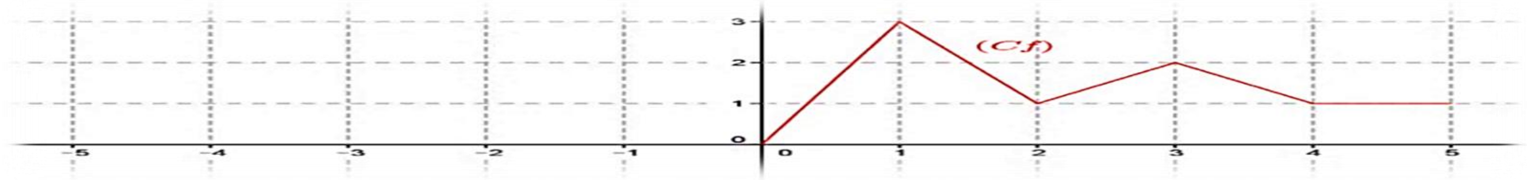
الأستاذ عيسى هياب

Propriété 2 :

La courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application 6 :

Compléter la courbe suivant sachant que la fonction f est paire :



2-2 Fonction impaire

Activité 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=-f(x)$

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ puis vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par-rapport à l'origine du repère.

Définition 7 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.
On dit que f est une **fonction impaire** si :

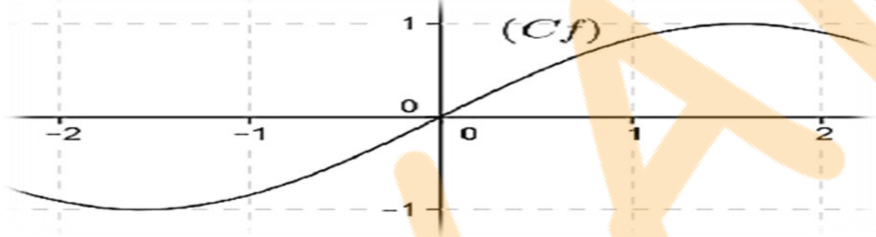
- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=-f(x)$

Application 7 : Déterminer si f est une fonction impaire dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{2}{x}$; $f(x)=x^2+x+1$; $f(x)=sin(x)$; $f(x)=tan(x)$

Propriété 3 :

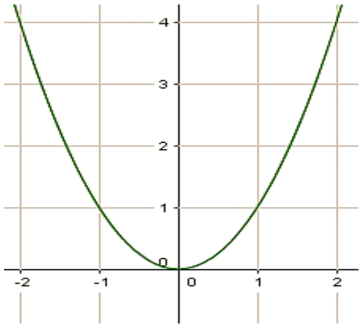
La courbe d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.



3) Variations d'une fonction numérique

3-1 Définitions

Activité 5 :



Soit f la fonction numérique représentée graphiquement dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-contre :

1) Déterminer puis comparer $f(-2)$ et $f(-1)$.

2) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[-2;0]$?

3) Déterminer puis comparer $f(2)$ et $f(1)$.

4) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[0;2]$?

Définition 8 :

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition. On dit que :

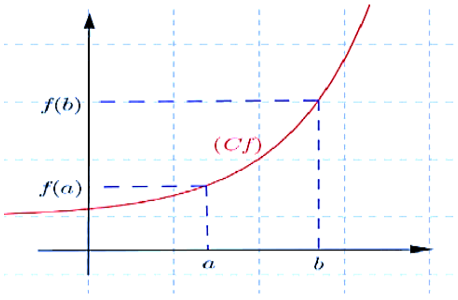
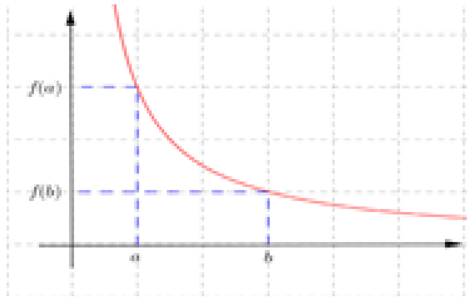
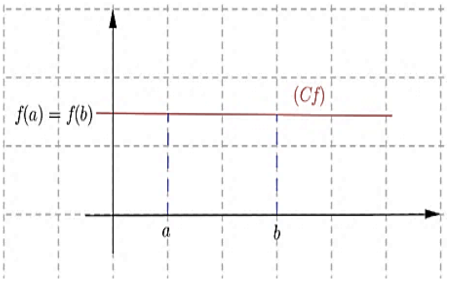
- f est **croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\leq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)<f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\geq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)>f(y)$.
- f est **constante** sur I si pour tous nombres x et y de I on a $f(x)=f(y)$.

Remarques 5 :

- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.
- En général on résume les variations d'une fonction dans un tableau appelé **tableau de variations** où on indique par une flèche « vers le haut » que la fonction est croissante et par une flèche « vers le bas » que la fonction est décroissante.
- Dans l'activité précédente, on a f est décroissante sur l'intervalle $[-2;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;2]$. Donc le tableau de variations de f est le suivant

x	-2		0		2
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

Interprétations géométriques :

 f est croissante sur $[a;b]$	 f est décroissante sur $[a;b]$	 f est constante sur $[a;b]$

Exemple 5 :

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 4$ et $g(x) = x^2 + 1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

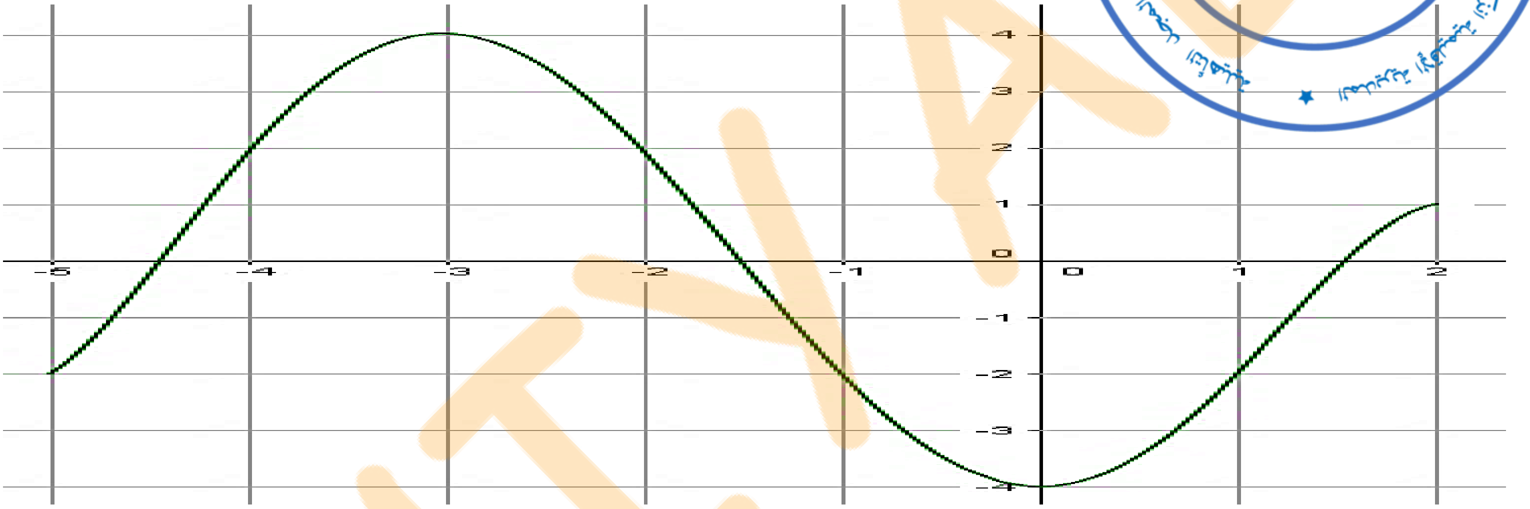
2) Etudier les variations de la fonction g sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

3) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

4) Comparer sans calcul $g(-2)$ et $g(-3)$

Application 8 :

La courbe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal :



1) Déterminer graphiquement les réels qui ont une image par la fonction f, puis déduire son ensemble de définition.

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

3-2 Taux de variation

Définition 9 :

Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, x et y deux nombres distincts de D_f.

Le nombre $T = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est appelé **taux de variation** de f entre x et y.

Exemple 6 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$

Le taux de variation de f entre deux réels distincts x et y est $T = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{(3x-1)-(3y-1)}{x-y} = \dfrac{3x - 3y}{x - y} = \dfrac{3(x-y)}{x-y} = 3$

Propriété 4 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. x et y sont deux éléments distincts de I.
T est le taux de variation de f entre x et y.

- Si $T \geq 0$ pour tous x et y de I, alors f est croissante sur I.
- Si $T > 0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $T \leq 0$ pour tous x et y de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $T < 0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $T = 0$ pour tous x et y de I, alors f est constante sur I.

Exemple 7 : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$

1) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x)-f(y)=(x-y)(x+y-4)$

2) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T=x+y-4$

3) En utilisant le taux de variation, étudier les variations de f sur les intervalles $\left[2;+\infty\right[$ et $\left]-\infty;2\right]$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Application 9 : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Soit x et y deux éléments de D_f . Montrer que $f(x)-f(y)=\dfrac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)}$

3) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=\dfrac{-1}{(x-1)(y-1)}$

4) Etudier les variations de f sur les intervalles $\left]1;+\infty\right[$ et $\left]-\infty;1\right[$

5) Dresser le tableau de variations de f .

3-3 Variations et parité

Propriété 5 :

Soit f une fonction numérique telle que son domaine de définition D_f est symétrique par rapport à 0 .

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ inclus dans D_f et J le symétrique de I par rapport à 0 $(J=\{-x/\ x\in I\})$.

→ Dans le cas où f est paire, on a :

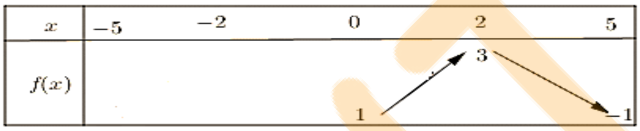
- Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur J .
- Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur J.

→ Dans le cas où f est impaire, on a :

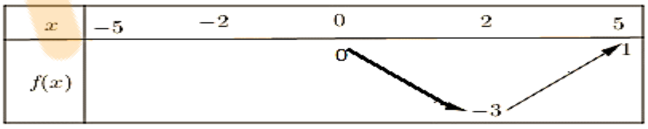
- f à le même sens de variations sur I et J.

Exemple 8 :

1) Compléter le tableau suivant sachant que f est paire



2) Compléter le tableau suivant sachant que f est impaire



Remarques 6 :

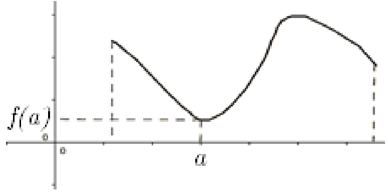
- Il suffit d'étudier les variations des fonctions paires et des fonctions impaires sur $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$
- L'ensemble $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est appelé **l'ensemble d'étude** (des fonctions paires et des fonctions impaires)

4) Valeur minimale et valeur maximale d'une fonction numérique

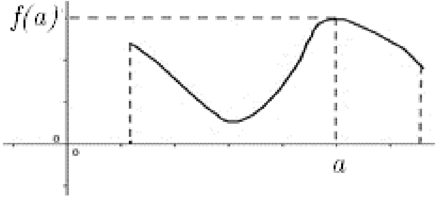
Définition 10 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou le **minimum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\geq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou le **maximum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\leq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est un **extrémum** de f sur I si $f(a)$ est la valeur maximale ou la valeur minimale de f sur I .

Exemple 9 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=-x^2+1$

Montrons que $f(0)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

C'est-à-dire montrons que $f(x)\leq f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)-f(0)=(-x^2+1)-(0^2+1)=-x^2$ et on sait que $-x^2\leq 0$ donc $f(x)-f(0)\leq 0$ C.Q.F.D

Propriété 6 :

- M valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq M \text{ pour tout } x\in I \\ l'\text{équation } f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$
- m valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq m \text{ pour tout } x\in I \\ l'\text{équation } f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

Application 10 :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+6x+5$

1) a) Montrer que $f(x)\leq -2$ pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$

b) Résoudre dans $\left]-\infty;0\right[$ l'équation $f(x)=-2$

c) En déduire que -2 est la valeur maximale de f sur $\left]-\infty;0\right[$

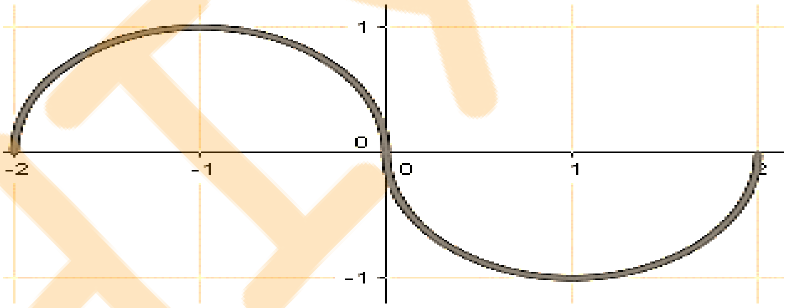
2) Montrer que -4 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

Remarques 7 :

- f admet une valeur maximale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale de f sur I .
- f admet une valeur minimale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur minimale de f sur I .
- f admet un extrémum en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale ou valeur minimale de f sur I .

Application 11 :

Soit f la fonction numérique représenté sur un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ suivante :



1) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2;2]$

2) La fonction f est-elle impaire ? justifier votre réponse.

3) Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[-2;2]$

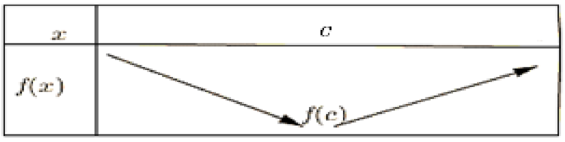
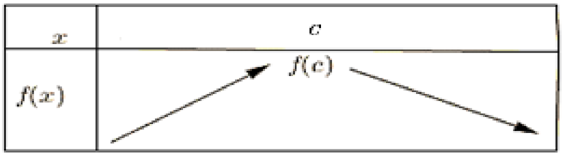
4) Déterminer trois intervalles dans lesquels la fonction f admet une valeur maximale locale en -1.

Remarque 8 :

- Les extremums de f sur $I=D_f$ sont appelés valeur maximale globale (ou absolue) et valeur minimale globale (ou absolue).
- Les extremums de f sur $I\neq D_f$ sont appelés valeur maximale locale et valeur minimale locale.

Propriété 7 : Extremums et variations

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle et c un élément de I

• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur minimale de f sur I	• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur maximale de f sur I

5) Etude de la fonction $x \mapsto ax^2$

Activité 6 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2$.

1) Montrer que f est paire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T=a(x+y)$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a>0$ et $a<0$
4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas $a>0$ et $a<0$
5) En déduire le cas dont la fonction f admet une valeur minimale et le cas dont f admet une valeur maximale

Activité 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (utiliser l'activité précédente)
2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

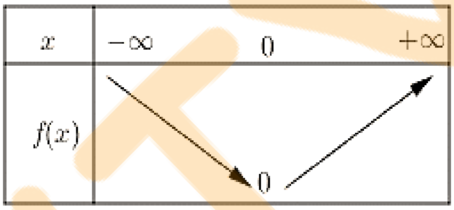
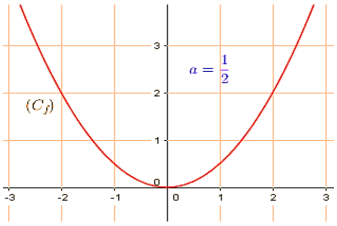
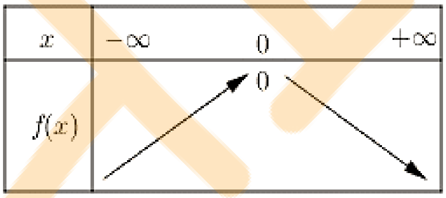
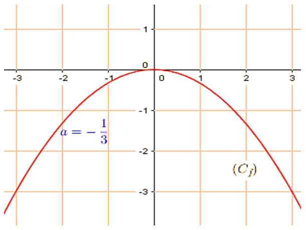
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x;f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 11 et propriété 8 :

Soit a un nombre réel non nul.

La courbe de la fonction $f: x \mapsto ax^2$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **parabole** de **sommet** O et **d'axe de symétrie** la droite $x=0$ (l'axe des ordonnées).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a>0$		
$a<0$		

Exemple 10 :

Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$; 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

6) Etude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

Activité 8 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{a}{x}$

1) Montrer que f est impaire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}^*$ est $T=-\frac{a}{xy}$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a>0$ et $a<0$
4) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a>0$ et $a<0$

Activité 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

الأستاذ عيسى هياب

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$ (utiliser l'activité précédente)

2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

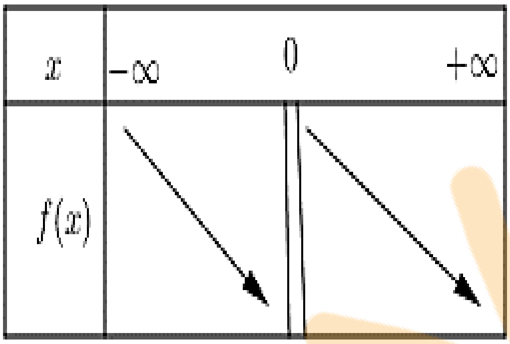
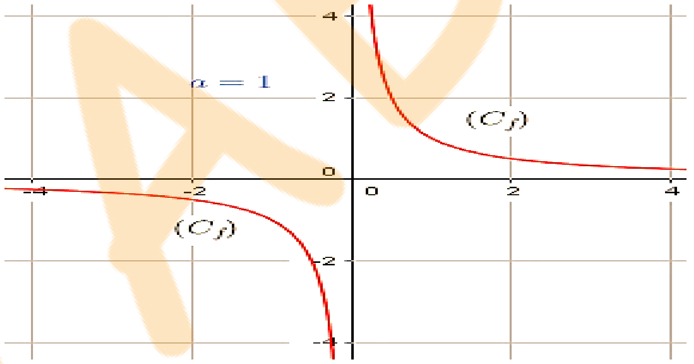
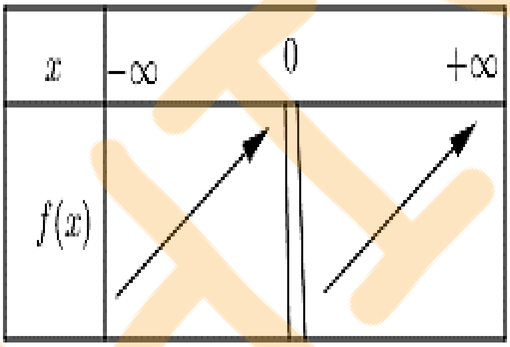
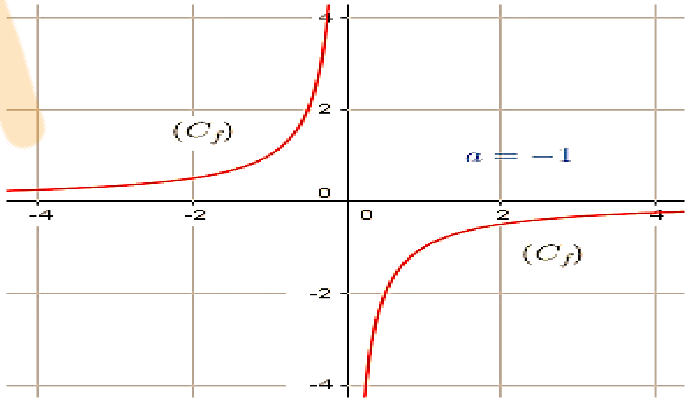
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x;f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 12 et propriété 9 :

Soit a un nombre réel non nul.

La courbe de la fonction $f:x\mapsto\frac{a}{x}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **hyperbole de centre** O et **d'asymptotes** les droites $x=0$ et $y=0$ (les axes du repère).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a>0$		
$a<0$		

Exemple 11 :

Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x)=\frac{3}{x}$; 2) $f(x)=-\frac{2}{x}$

7) Représentation graphique des fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

Soit f une fonction numérique et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

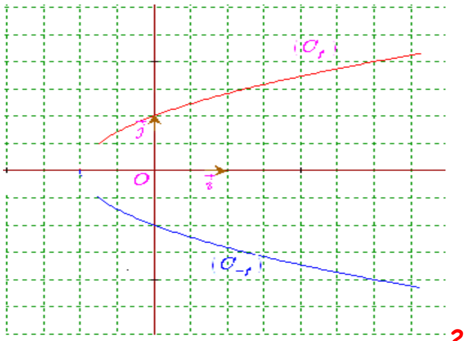
7-1 Représentation graphique de la fonction $-f:\ x\mapsto -f(x)$

Remarque 9 :

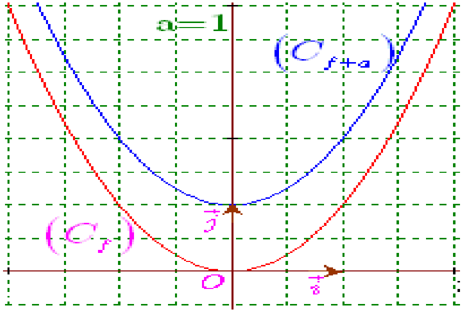
On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x;-f(x))\in(\mathcal{C}_{-f})$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{-f})$ sont symétriques par-rapport à l'axe des abscisses

Par conséquent, la courbe de la fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses



7-2 Représentation graphique de la fonction $f+a:\ x\mapsto f(x)+a$



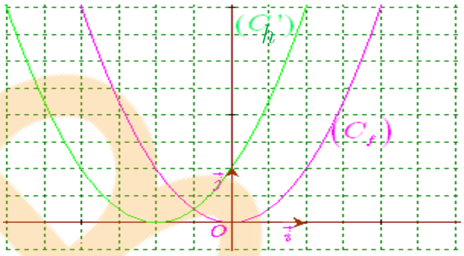
Remarque 10 :

On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x;f(x)+a)\in(\mathcal{C}_{f+a})$

Donc $\overrightarrow{MM'}(0;a)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}=0\vec{i}+a\vec{j}=a\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=a\vec{j}$

7-3 Représentation graphique de la fonction $h:\ x\mapsto f(x+a)$



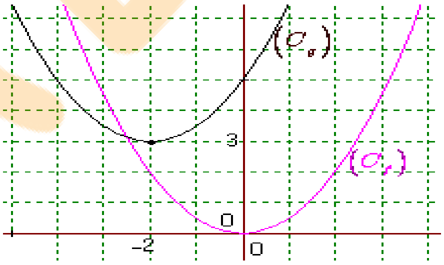
Remarque 11 :

On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x-a;f(x))\in(\mathcal{C}_h)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}=-a\vec{i}+0\vec{j}=a\vec{i}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $x\mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}$

7-4 Représentation graphique de la fonction $g:\ x\mapsto f(x+a)+b$



Remarque 12 :

On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x-a;f(x)+b)\in(\mathcal{C}_g)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;b)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}=-a\vec{i}+b\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $k:\ x\mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j}$

7-5 Applications

Application 12 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, $g(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2$ et $h(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) a) Montrer que $g(x)=f(x+1)$ puis déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) a) Montrer que $h(x)=g(x)+1$ puis déduire que $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Application 13 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x)=\frac{3}{x}$, $f(x)=\frac{3}{x-1}$ et $h(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Montrer que $g(x)=f(x-1)$ puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Montrer que $h(x)=g(x)+2$ puis construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Application 14 :

On considère les fonctions f et g tels que $f(x)=\frac{5}{x}$ et $h(x)=\frac{-3x+2}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $-3x+2=-3(x+1)+....$ puis déduire que $g(x)=f(x+1)-3$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Les fonctions de références : $x \mapsto ax^2+bx+c$, $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \mapsto cos(x)$ et $x \mapsto sin(x)$

8-1 Etude de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ tel que $a \neq 0$

Activité 10 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=a\left(x+y+\dfrac{b}{a}\right)$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ dans les cas $a>0$ et $a<0$

4) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique et déduire que $f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a>0$ et $a<0$ puis déduire que f admet un extremum à déterminer.

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=ax^2$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\dfrac{b}{2a})+f(-\dfrac{b}{2a})$

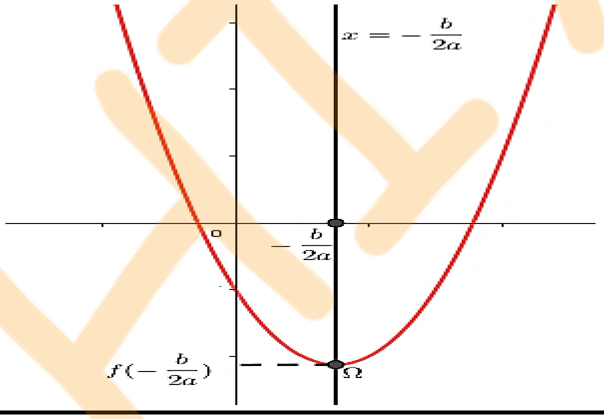
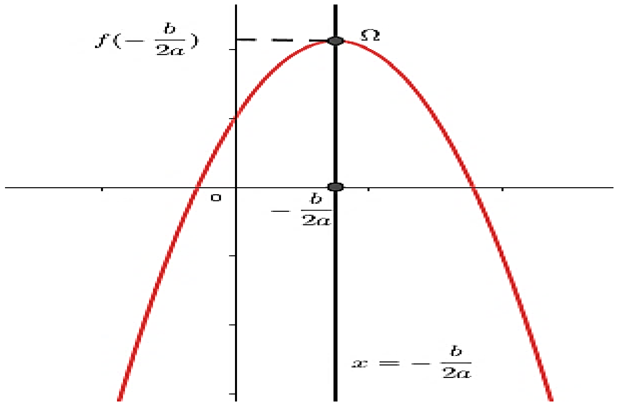
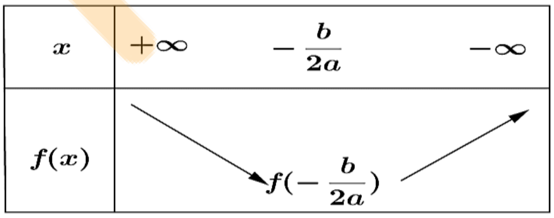
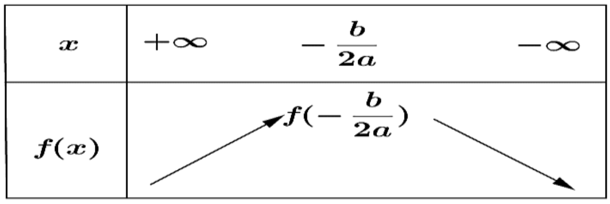
c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Propriété 10 :

Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

La courbe de la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ dans un repère du plan est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	$a>0$	$a<0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f	 x : $+\infty$; $-\dfrac{b}{2a}$; $-\infty$ $f(x)$: $f(-\dfrac{b}{2a})$	 x : $+\infty$; $-\dfrac{b}{2a}$; $-\infty$ $f(x)$: $f(-\dfrac{b}{2a})$
Extremums	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Remarque 13 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ): $x=-\dfrac{b}{2a}$

Donc il suffit de tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et déduire $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ en utilisant la symétrie axiale d'axe (Δ)

Exemple 12 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis déduire que f est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Propriété 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$
Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)$ alors la courbe de la fonction f est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Forme canonique

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Exemple 13 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^2-5x+3$

On a la forme canonique de $f(x)$ est $f(x)=2(x-\frac{5}{2\times 2})^2+\frac{(-5)^2-4\times 2\times 3}{4\times 2}$, c'est-à-dire $f(x)=2(x-\frac{5}{4})^2+\frac{49}{8}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega\left(\frac{5}{4};\frac{49}{8}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\frac{5}{4}$

Application 15 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=-3x^2+12x+4$ et $g(x)=x^2+4x+3$

1) Donner la forme canonique de f et de g

2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

8-2 Etude de la fonction $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

Activité 11 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le taux de variation de f entre deux éléments distincts x et y de D_f est :

$T=\frac{1}{c^2}\times\frac{\Delta}{(x+\frac{d}{c})(y+\frac{d}{c})}$ tel que $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{-\frac{1}{c^2}\times(ad-bc)}{x}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\frac{d}{c})+\frac{a}{c}$

c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

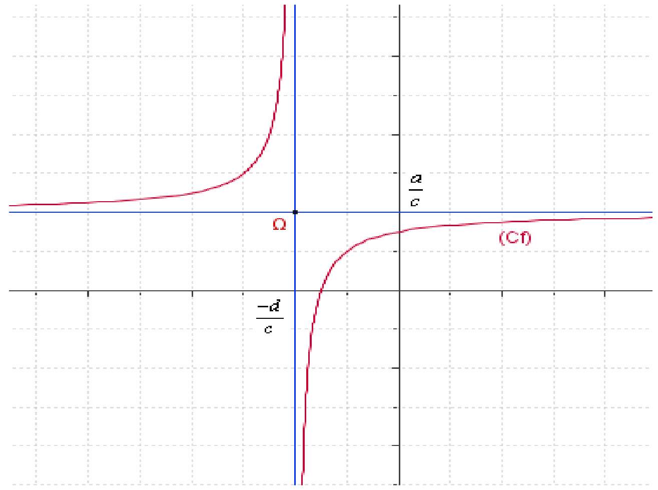
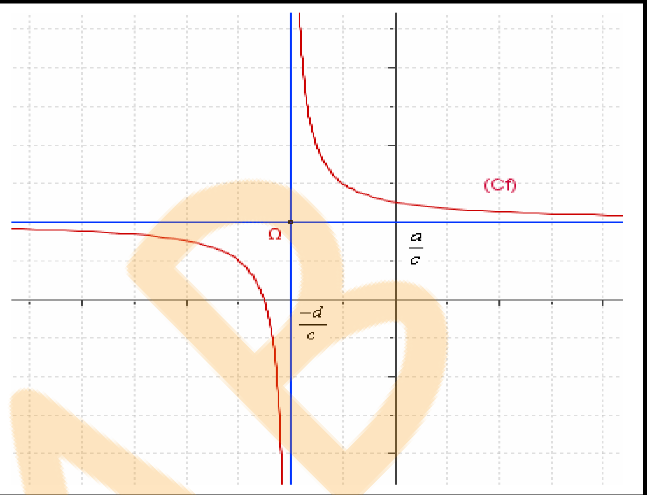
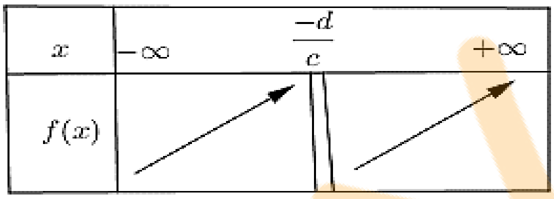
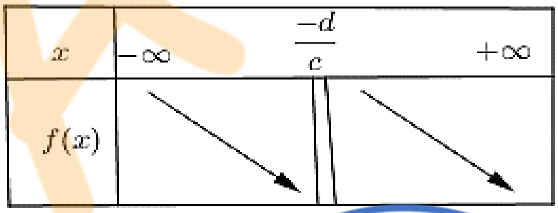
d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

e) On pose $\alpha=\frac{d}{c}$, $\beta=\frac{a}{c}$ et $\lambda=-\frac{1}{c^2}\times(ad-bc)$. Montrer que $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x+\alpha}$ (Utiliser la question 6) b))

Définition 13 et propriété 12 :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ est appelée **fonction homographique**.
- La courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ dans un repère du plan est

une **hyperbole** de **centre** $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et **d'asymptotes** les droites $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f		

Remarque 14 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

Exemple 14 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 14 et propriété 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Il existe des nombres réels α, β et λ tel que $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$

Cette formule est appelée **la formule réduite** de $f(x)$.

Propriété 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)$ alors :

- La courbe de la fonction f est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

$\lambda > 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

$\lambda < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

Exemple 15 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

- On a la forme réduite de $f(x)$ est $f(x)=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(3;2)$ et d'asymptotes les droites $x=3$ et $y=2$

- Tableau de variations de f :

Puisque $7>0$ alors :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Application 16 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=\dfrac{4x+8}{x+6}$ et $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

1) Donner la forme réduite de f et de g
2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$
3) Dresser les tableaux de variations de f et de g

8-3 Fonction périodique

Définition 15 :

Soit T un nombre réel strictement positif.

On dit que f est **périodique** de période T si pour tout $x\in D_f$ on a : $\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

Exemple 16 :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ on a : $\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Application 17 :

Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=sin(2x)$ et $T=\pi$
2) $f(x)=cos(\pi x)$ et $T=2$
3) $f(x)=\dfrac{1}{1+sin^2(x)}$ et $T=\pi$

Propriété 15 :

Soit f une fonction périodique de période T et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est invariante par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Ainsi pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

  (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0;T]$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$).

8-4 Etude de la fonction $x \mapsto cos(x)$

Définition 16 :

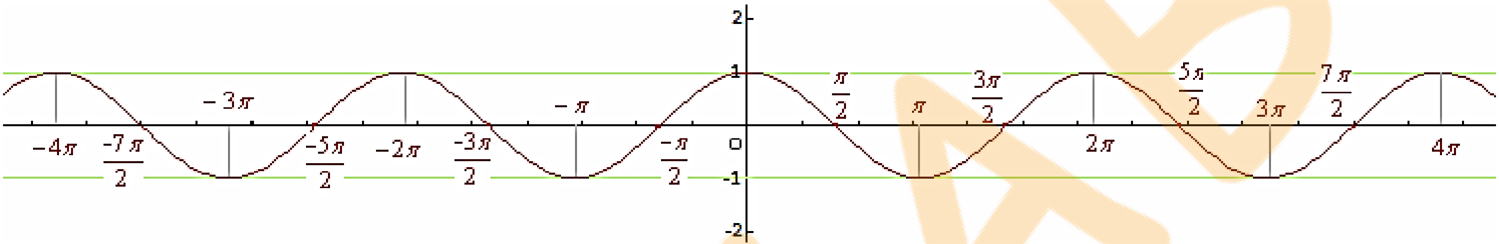
La fonction cosinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son cosinus : $cos(x)$ on écrit $x \mapsto cos(x)$

Propriété 16 :

La fonction $x \mapsto cos(x)$ est paire et périodique de période 2π.

Remarque 15 : La courbe de la fonction $x \mapsto cos(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x \mapsto cos(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :



8-5 Etude de la fonction $x \mapsto sin(x)$

Définition 17 :

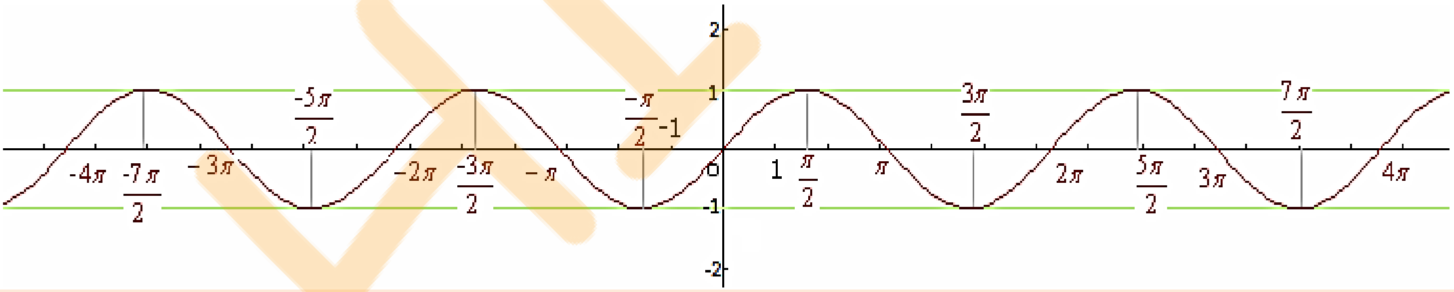
La fonction sinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son sinus : $sin(x)$ on écrit $x \mapsto sin(x)$

Propriété 17 :

La fonction $x \mapsto sin(x)$ est impaire et périodique de période 2π.

Remarque 16 : La courbe de la fonction $x \mapsto sin(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x \mapsto sin(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :



9) Résolution graphique des équations et inéquations

Activité 12 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-4;5]$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$

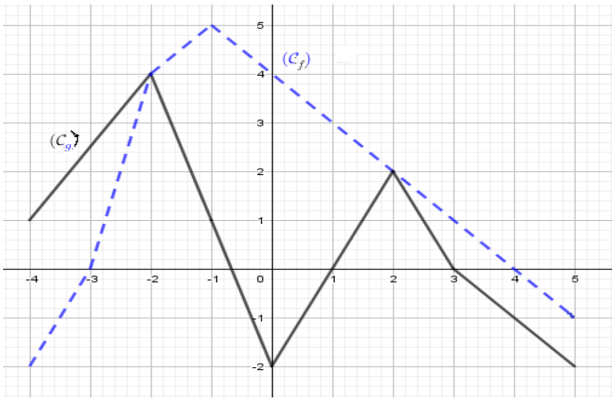
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$

3) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$

4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 4$ et $f(x)\leq 4$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$



Propriétés 18 :

Soient f et g deux fonctions numériques, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes respectives dans un repère et m un nombre réel.

- Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ (resp. $f(x)\leq m$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessus (resp. au-dessous) de la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessus (resp. au-dessous) de $(\mathcal{C}_g)$.

Application 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad h(x)=x$$

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations $f(x)=g(x)$, $f(x)=h(x)$ et $g(x)=h(x)$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2\leq 1$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{1}{x}-x\leq 0$

Application 19 :

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=x^2-2x-3\quad \text{et}\quad g(x)=\frac{-x-7}{x+1}$$

2) Dresser dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

3) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x)=0$

4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=5$

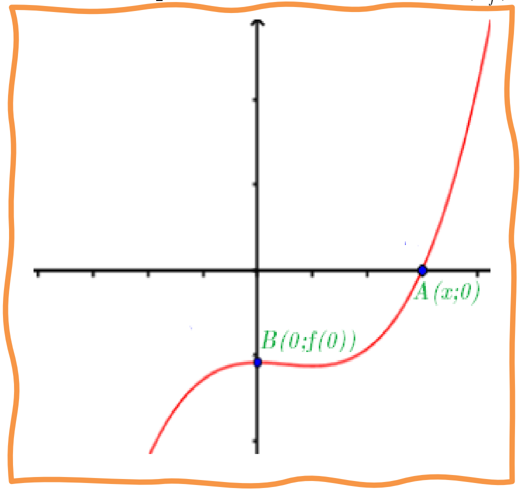
6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 5$ et $f(x)\leq 5$

7) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$

Remarque 17 : Les points d'intersection avec les axes du repère :

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des ordonnées.



Application 20 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-8x+7$

Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

Complément de cours : Etude des fonctions $x\mapsto f(|x|)$ et $x\mapsto |f(x)|$

Résumé 12 : Fonctions numériques

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit x et y deux éléments distincts de D_f, on pose $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (Le taux de variation de f entre x et y).

I un intervalle de D_f. On note "pour tout " par " prt "

Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f=\{$les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)\}$
- Si f est un polynôme alors $D_f=\mathbb{R}$
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\;Q(x)\neq 0\}$
- Si $f(x)=\sqrt{P(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\;P(x)\geq 0\}$

Parité d'une fonction

Définition

- f *est paire* $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=f(x) \end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=-f(x) \end{cases}$

Propriété

- f *est paire* $\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'axe des ordonnés} \end{cases}$
- f *est impaire* $\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'origine du repère} \end{cases}$

Variations d'une fonction

Définition :

- f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow [(\text{prt } x;y\in I):\; x>y \Rightarrow f(x)\geq f(y)]$
- f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow [(\text{prt } x;y\in I):\; x>y \Rightarrow f(x)\leq f(y)]$
- f *est constante sur* $I \Leftrightarrow [(\text{prt } x;y\in I):\; x>y \Rightarrow f(x)=f(y)]$

Propriété :

- f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow (\text{prt } x,y\in I):\; T(x;y)\geq 0$
- f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow (\text{prt } x,y\in I):\; T(x;y)\leq 0$
- f *est constante sur* $I \Leftrightarrow (\text{prt } x,y\in I):\; T(x;y)=0$

Variations et parité :

Soit I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 de D_f

- Si f est paire, alors :

f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

- Si f est impaire, alors :

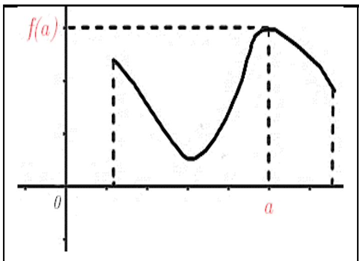
f *est croissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* J

f *est décroissante sur* $I \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* J

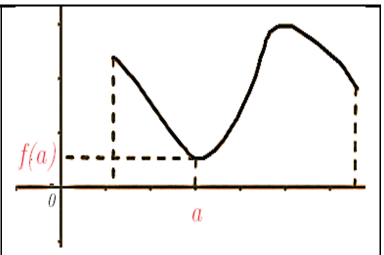
Valeur maximale - Valeur minimale

Définition

- $f(a)$ valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow (\text{prt } x\in I)\;\; f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow (\text{prt } x\in I)\;\; f(x)\geq f(a)$



$f(a)$ valeur maximale



$f(a)$ valeur minimale

- $f(a)$ est un extremum de $f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \text{ valeur maximale de } f \\ \quad ou \\ f(a) \text{ valeur minimale de } f \end{cases}$

Propriété

- M valeur maximale de f sur I

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq M \text{ pour tout } x\in I \\ \text{l'équation } f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

- m valeur minimale de f sur I

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq m \text{ pour tout } x\in I \\ \text{l'équation } f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

Egalité de deux fonctions

- $f=g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f=D_g \\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(x)=g(x) \end{cases}$

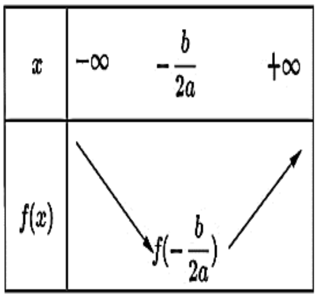
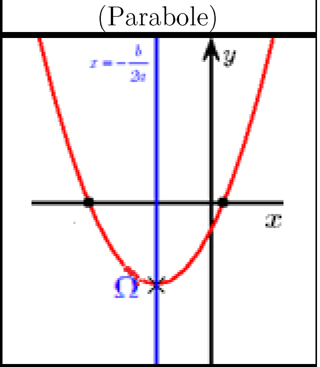
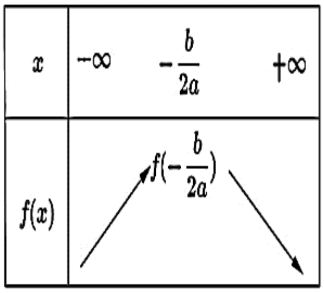
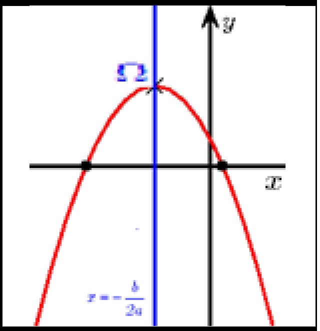
Courbe d'une fonction

- $(\mathcal{C}_f)=\{M(x;f(x))\,/\,x\in D_f\}$
- $M(x;y)\in(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow x\in D_f$ *et* $f(x)=y$

Etude de la fonction f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$

- f est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f=\mathbb{R}$
- $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de **sommet** $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et

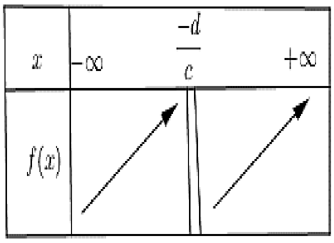
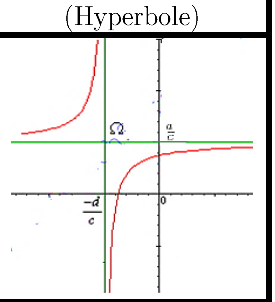
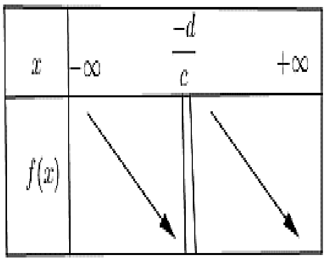
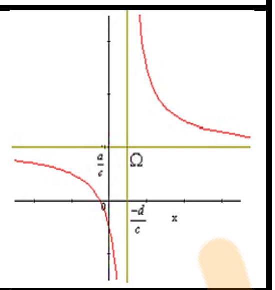
d'**axe de symétrie** la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Parabole)
$a>0$		
$a<0$		

Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)=ax^2+bx+c$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Etude de la fonction g tel que $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- g est appelé : fonction homographique
- $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$
- $(\mathcal{C}_g)$ est une hyperbole de **centre** $\Omega\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'**asymptotes** les droites $x=\dfrac{-d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	Tableau de variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$ (Hyperbole)
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}>0$	 x : $-\infty$, $\frac{-d}{c}$, $+\infty$ $f(x)$: ↗ ‖ ↗	
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}<0$	 x : $-\infty$, $\frac{-d}{c}$, $+\infty$ $f(x)$: ↘ ‖ ↘	

Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ alors :

- $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

Si $\lambda>0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Si $\lambda<0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$

L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Remarques :

- Une fonction f se note également par $f:\ x\mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$
- Pour déterminer D_f, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif...
- $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est l'ensemble d'étude des fonctions paires et des fonctions impaires.
- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Intersection avec les axes du repère

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des ordonnées.

Fonction périodique

Définition : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} f \text{ est périodique} \\ \text{de période } T \end{cases} \Leftrightarrow (\text{prt } x\in D_f):\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

Exemples classiques :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car : $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$

  et $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$
- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$

  car : $(\text{prt } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}):\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Les fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

- La courbe de la fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses.
- La courbe de la fonction $x\mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=a\vec{j}$
- La courbe de la fonction $x\mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}$
- La courbe de la fonction $g:\ x\mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 12
Fonctions numériques

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$f_1(x)=x^3-3x+1$; $f_2(x)=2x-\sqrt{x}$;

$f_3(x)=x^2-3x+\dfrac{2}{x}$; $f_4(x)=\dfrac{2x}{x-5}$;

$f_5(x)=x^2-\sqrt{3x+4}$; $f_6(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$;

$f_7(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$; $f_8(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$;

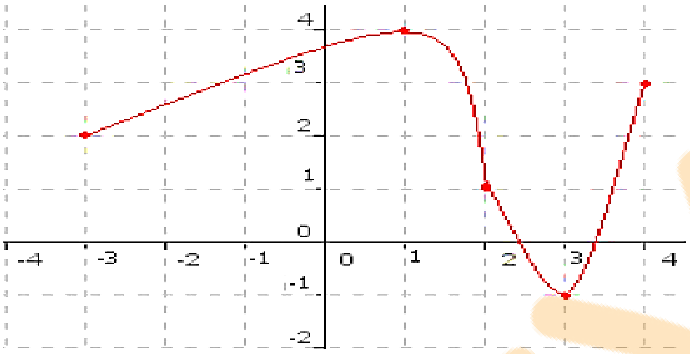
$f_9(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$; $f_{10}(x)=\dfrac{5x^3}{x^2-x+1}$;

$f_{11}(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2+2x-3}$; $f_{12}(x)=\dfrac{x^3}{|x|-5}$

Correction

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par sa courbe :



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de f

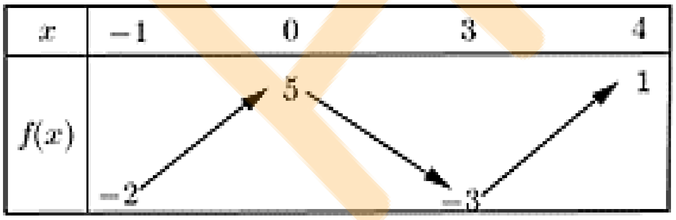
3) En déduire que $-1\leq f(x)\leq 4$ pour tout $x\in D_f$

3) Dresser le tableau de variations de f .

4) Justifier que f est ni paire ni impaire.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par son tableau de variations sur $[-1;4]$:



x	-1		0		3		4
$f(x)$	-2	↗	5	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrémums de f sur $[-1;4]$

2) Comparer $f(1)$ et $f(2)$

3) Sachant que f est paire dresser sa table de variations sur $[-4;4]$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=-4x^2+4x+5$

1) Montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$

2) En déduire que $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire que 6 est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est paire.

2) En déduire $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ l'ensemble d'étude de f .

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_E ,

on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\dfrac{x+y}{(x^2-1)(y^2-1)}$

4) Etudier les variations de f sur $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

5) En déduire les variations de f sur $]-1;0]$ et $]-\infty;-1[$

6) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 8 : (Exercice 3 de DL5)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.

2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f ,

on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\frac{4}{xy}\right)$

3) a) Etudier les variations de f sur $[2;+\infty[$ et sur $]0;2]$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;-2]$ et sur $[-2;0[$

4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $]0;+\infty[$

5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t

a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$

b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-5}{2-x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Comment appelle-t-on la fonction f ? Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

3) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 12

Fonctions numériques

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 10 :

On considère les fonctions f et g tels que :

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $2x+1=2(x+1)+....$ puis déduire que $g(x)=f(x+1)+2$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-x^2+2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Vérifier que $f(x)=-(x-1)^2+1$ pour tout $x\in D_f$

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f on a : $T=2-x-y$

4) En utilisant le taux de variations étudier les variations de f sur $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) En déduire les extrémums de f

7) On considère la fonction g définie par : $g(x)=f(|x|)$

   a) Montrer que g est paire.

   b) Montrer que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

   c) En déduire le tableau de variations de g.

Exercice 12 :

A) On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+2x-3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $T=x+y+2$

4) Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$

5) Dresser le tableau de variations de f et déduire les extrémums de f

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis le construire.

B) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{4x}{|x|+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Montrer que g est impaire.

3) Montrer que $g(x)=4-\frac{4}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

4) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$

5) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

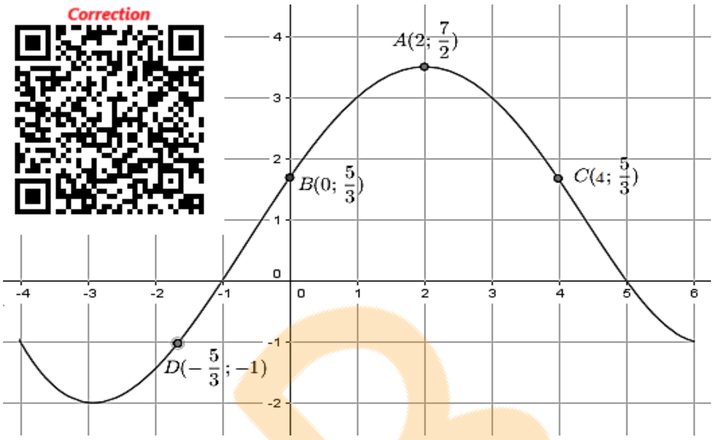
6) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $(x^2+2x-3)(|x|+1)=4x$

Exercice 13 : (Exercice 1 de DL5)

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Correction



1) Vérifier que f est ni paire ni impaire.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f.

3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$

4) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres : 3 ; $\frac{5}{3}$ et -3 par la fonction f

5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.

6) Dresser le tableau de variations de f.

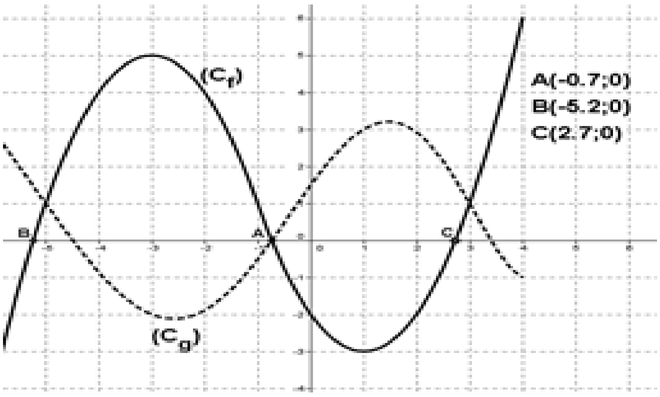
7) Résoudre graphiquement les équations : $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$

8) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$

9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h définies par : $h(x)=\frac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 14 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ **et** $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-6;4]$



1) Déterminer $f(4)$, $f(1)$, $f(-1)$, $g(1)$ et $g(-3)$

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Résoudre les graphiquement l'équation : $f(x)=g(x)$

4) Résoudre les graphiquement les inéquations :

   a) $f(x)\leq 0$ sur $[-4;2]$

   b) $f(x)\geq g(x)$ sur $[-6;-2]$

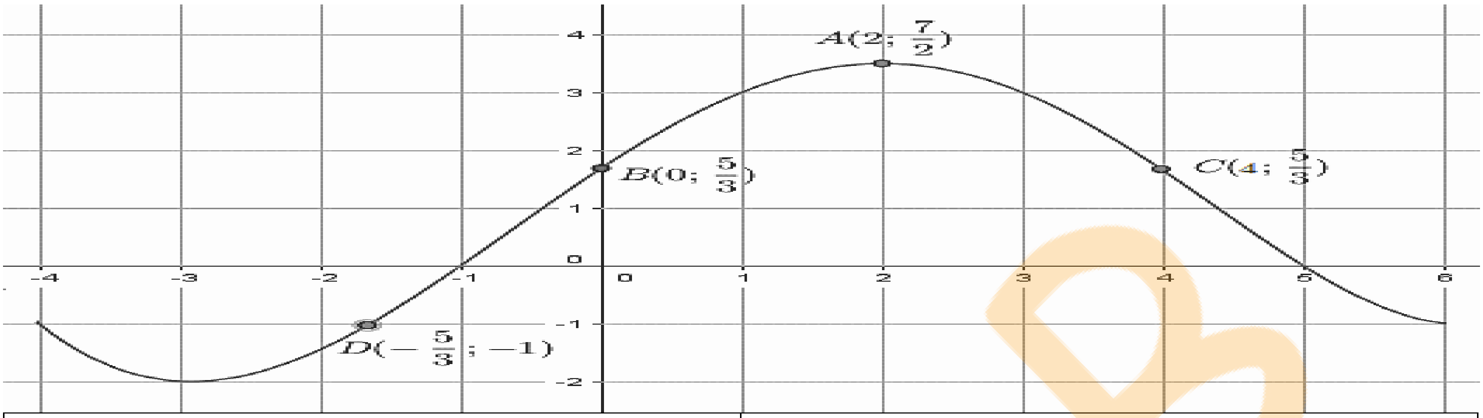
5) Déterminer les extrémums de f sur $[-5;3]$

DL5

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Vérifier que f est ni paire ni impaire.
2) Déterminer l'ensemble de définition de f.
3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$
4) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres : 3 ; $\frac{5}{3}$ et -3 par la fonction f
5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Résoudre graphiquement les équations : $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$
8) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$
9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h définies par : $h(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ et $g(x)=x^2-2x$

Correction

1) Déterminer D_f et D_g
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$
3) Dresser les tableaux de variations de f et de g
4) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont concourantes au points $O(0;0)$, $A(1;-1)$ et $B(3;3)$
5) Montrer par deux méthodes que -1 est la valeur minimale de g sur D_g
6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
7) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x)=3$
8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq 0$
9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{x}{x-2}-x(x-2)\geq 0$
10) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)\leq 2x-3$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.
2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\dfrac{4}{xy}\right)$
3) a) Etudier les variations de f sur $[2;+\infty[$ et sur $]0;2]$; b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;-2]$ et sur $[-2;0[$
4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $]0;+\infty[$
5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t
   a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$; b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

بسم الله الرحمن الرحيم

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵖⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS5

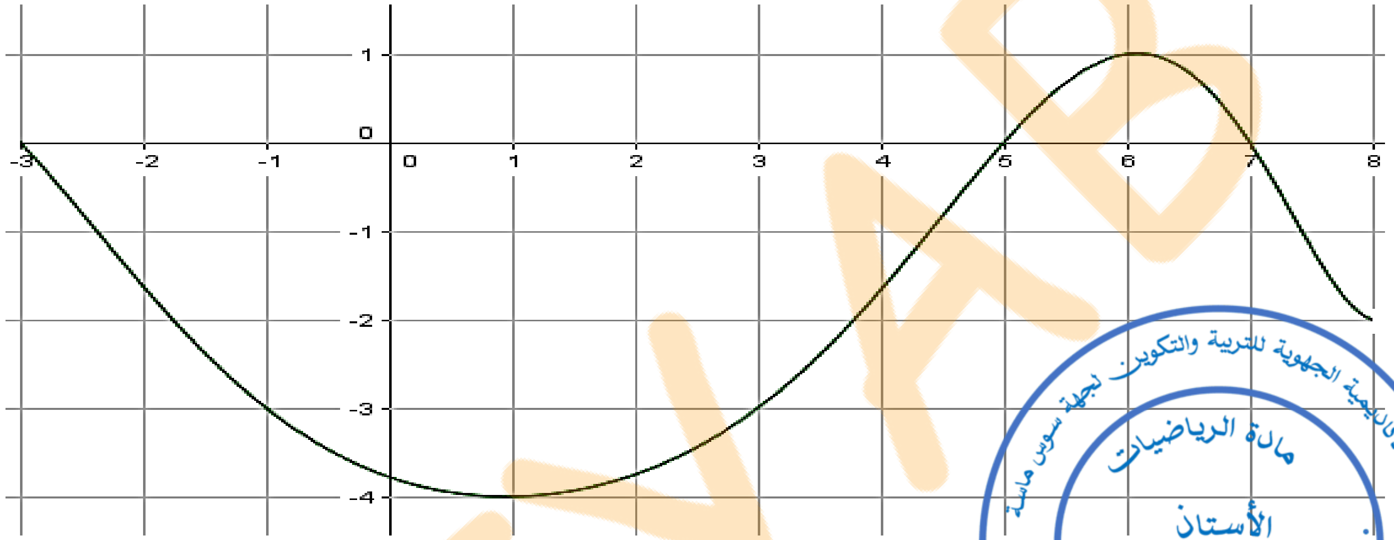
TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (6 pts)

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f ……………………………… 0.5pt

2) Déterminer $f(6)$, $f(8)$, $f(-3)$ et $f(-1)$ ……………………………… 1pt

3) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres : 0 et -3 par la fonction f ……………… 1pt

4) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de f……………………………… 1pt

5) Dresser le tableau de variations de f……………………………… 1.5pt

6) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h tel que $g(x)=\sqrt{f(x)}$ et $h(x)=\sqrt{-3-f(x)}$ ..1pt

Exercice 2 (14 pts)

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{-x+4}{-x+2}$ et $g(x)=-x^2+2x+2$

1) Vérifier que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $D_g=\mathbb{R}$ ……………………………… 1pt

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$ ……………… 1.25pt

3) Dresser les tableaux de variations de f et de g ……………………………… 2pt

4) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont concourantes au points $A(1;3)$, $B(0;2)$ et $C(3;-1)$ ……………… 0.75pt

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ……………… 3pt

6) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x)=-1$ ……………………………… 1pt

7) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)-2\geq 0$ ……………………………… 1pt

8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$ ……………………………… 1pt

9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq -x+2$ ……………………………… 1pt

10) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$ ……………………………… 2pt

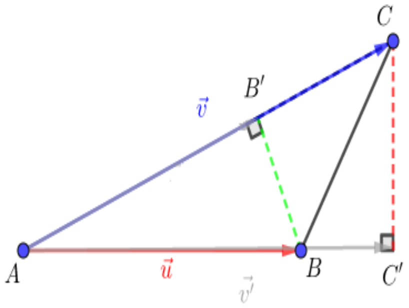
عيسى هياب

13

Produit scalaire

1) Définition du produit scalaire

Activité 1 :



Soit ABC un triangle non rectangle.

Le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

Le point C' est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}'=\overrightarrow{AC'}$ (Voir la figure ci-contre)

1) a) Vérifier que $B\hat{A}B' = C\hat{A}C'$ et $cos(B\hat{A}B') = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AB'}{AB}$

b) En déduire que $AB\times AC\times cos(B\hat{A}B') = AB\times AC' = AB'\times AC$

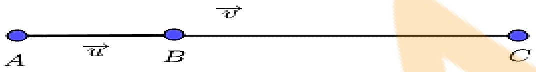
2) Vérifier que $B\hat{A}B' = B\hat{A}C$ et déduire que : $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}'\| = AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Définition 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on note A, B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

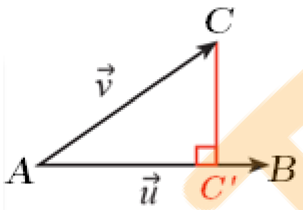
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC$

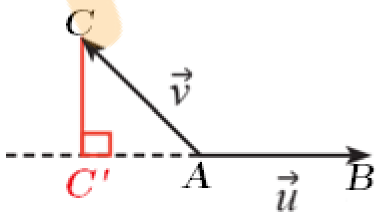


→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB\times AC$

→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB\times AC'$



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = -AB\times AC'$

Propriété 1 et définition 2 : La formule trigonométrique du produit scalaire

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée **la formule trigonométrique** du produit scalaire.

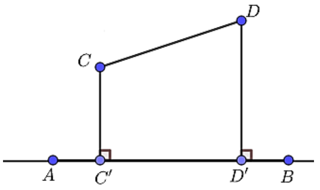
Remarques 1 :

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé **le carré scalaire** de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$, on écrit : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$.

On a : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times cos(\widehat{\vec{u};\vec{u}}) = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times 1 = \|\vec{u}\|^2$, d'où $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ou encore $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

- Pour tous points A et B du plan on a $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Propriété 2 :



En général le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.

Exemple 1 :

$ABCD$ un rectangle de centre I tel que $AB=6$ et $AD=3$.

Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DI}$

Exemple 2 :

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\|=5,\ \|\vec{v}\|=6$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3},\ \|\vec{v}\|=4$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\|\vec{u}\|=2,\ \|\vec{v}\|=5$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$cos(\pi-x)=-cos(x)$
$cos(\pi+x)=-cos(x)$
$cos(-x)=cos(x)$

2) Soit ABC un triangle tel que $AB=3,\ AC=4$ et $B\hat{A}C=\frac{4\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3) Soit MNE un triangle tel que $MN=5,\ ME=3$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ME}=-6$. Calculer $cos(\overline{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{ME}})$.

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 13.

2) Les propriétés du produit scalaire

Activité 2 :

Soit $\vec{u},\ \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de même norme.

Soit $O,\ A,\ B$ et C quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA},\ \vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

On suppose que $A\hat{O}B=\frac{\pi}{3},\ B\hat{O}C=\frac{\pi}{4}$ et $A\hat{O}C=\frac{\pi}{12}$

Calculer puis comparer $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$

Propriétés 3 : Les propriétés du produit scalaire

Quels que soit les vecteurs $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ et le nombre réel k on a :

- $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$ on dit que le produit scalaire **est symétrique.**
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\times\vec{v})=k\times(\vec{u}.\vec{v})$ on dit que le produit scalaire **est linéaire.**
- $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ et l'égalité $\vec{u}.\vec{u}=0$ n'ayant lieu que pour $\vec{u}=\vec{0}$.

Exemple 3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=2,\ \|\vec{v}\|=3$ et $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v},\ \vec{u}^2,\ \vec{v}^2$ et $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v})$.

Remarque 2 :

Il découle des propriétés 3 que le comportement du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs et leur multiplication par un nombre réel suit des règles analogues à celles de la multiplication des nombres.

On retiendra en particulier certains produits scalaires remarquables (par analogie avec les identités remarquables)

Propriétés 4 : Les identités remarquables

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Exemple 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=7$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

1) a) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

b) En déduire la valeur de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et de $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

2) Vérifier que $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\geq\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et que $\|\vec{u}-\vec{v}\|\geq\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$

3) Vérifier que $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\geq|\vec{u}.\vec{v}|$

Propriété 5 : Résultat des identités remarquables

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;
- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$

Exemple 5 :

Montrer que quels que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Propriétés 6 et définition 3 :

- Quels que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u}.\vec{v}=0$ et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$
- Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Exemple 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=5$

Déterminer le réel a sachant que : $\left(a\times\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=13$.

Exemple 7 :

Soit ABC un triangle tel que $AB=1$, $AC=\sqrt{2}$ et $cos(B\hat{A}C)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et déduire la valeur de BC.

2) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Exercices : Exercices 3 et 4 de la série 13.

3) Théorème d'Al-Kashi

Activité 3 : Soit ABC un triangle.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ et déduire que $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2$

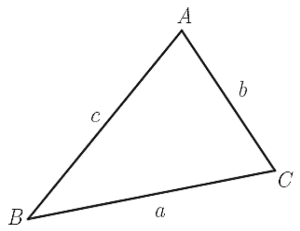
2) En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ et $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

→ Cette dernière égalité est appelé le **théorème d'Al-Kashi.**

Théorème 1 : Théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

- $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$
- $CA^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times cos(C\hat{B}A)$
- $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times cos(A\hat{C}B)$



Propriété 7 : Résultat du théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

$cos(B\hat{A}C)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$; $cos(C\hat{B}A)=\frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2BC\times BA}$; $cos(A\hat{C}B)=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA\times CB}$

Exemple 8 :

1) ABC un triangle tel que $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$ et $B\hat{A}C=\frac{\pi}{6}$. Calculer BC.

2) ABC un triangle tel que $AB=1$, $AC=\sqrt{2}$ et $BC=2$.

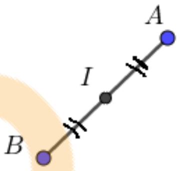
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $cos(B\hat{A}C)$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 13.

4) Théorème de la médiane

Activité 4 : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Soit M un point du plan.



1) En écrivant $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$ vérifier que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2) En déduire que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

3) En déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ et $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Propriété 8 : La propriété caractéristique du milieu d'un segment :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Théorème 2 : Théorème de la médiane :

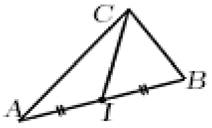
Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a : $\begin{cases} MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2 \\ MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2 \end{cases}$

Remarque 3 :

La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle en fonction de ses côtés.

Dans cette égalité on pose $M=C$ on obtient : $CI^2=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\frac{1}{2}AB^2\right)$



Exemple 9 :

ABC un triangle et I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$et $[CA]$.

1) Sachant que $AB=4$, $BC=8$ et $CA=5$, calculer les distances CI , AJ et BK.

2) En utilisant le théorème de la médiane calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$.

3) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Propriété 9 : Les ensembles des points usuels du plan

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA=R$	Le cercle du centre A et de rayon R
$MA=0$	Le singleton $\{A\}$
$MA=-R$	L'ensemble vide
$MA=MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

Exemple 10 :

A et B deux points du plan tel que $AB=4$.

En utilisant le théorème de la médiane déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

1) $MA^2+MB^2=16$; 2) $MA^2+MB^2=8$; 3) $MA^2+MB^2=0$

4) $MA^2-MB^2=0$; 5) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=5$; 6) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Exercices : Exercices 7 et 8 de la série 13.

5) Les relations métriques dans un triangle rectangle

Activité 5 :

Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

2) a) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ équivalent à $BA^2=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}\geq 0$

b) En déduire que : ABC est un triangle rectangle en A équivalent à $BA^2=BH\times BC$.

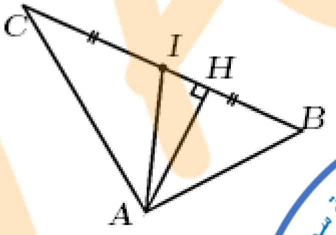
Propriétés 10 : Les relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle.

I est le milieu du segment $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $BC^2=AB^2+AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2=BH\times BC$ ou $CA^2=CH\times CB$
- $HA^2=HC\times HB$
- $AI=\dfrac{1}{2}BC$

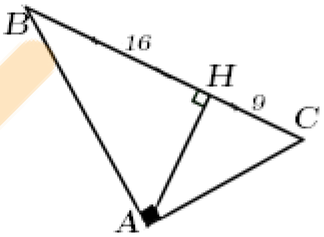


Exemple 11 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que :

$BH=16$ et $CH=9$

Calculer les distances BC, BA, CA et HA



Complément de cours : Formule de Héron

L'aire d'un triangle de côtés $a,\ b,\ c$ et de demi-périmètre p est : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice : Exercice 9 de la série 13.

Pour la recherche :

- Le lien entre le produit scalaire et le travail d'une force en physique.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.
- Théorème de Ménélaüs et Théorème de Céva.

Résumé 13 : Produit scalaire

Définition du produit scalaire :

- Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ défini par :

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)

La formule trigonométrique du produit scalaire :

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$$

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Autre formule du produit scalaire :

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.

Les propriétés du produit scalaire :

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k\in\mathbb{R}$ on a :

- $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\left(k\times\vec{v}\right)=k\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}^{\,2}=\vec{u}.\vec{u}$, $\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}^{2}=AB^2$
- $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
- $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

Les identités remarquables :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Théorème d'Al-Kashi :

Quel que soit le triangle ABC on a :

- $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$
- $CA^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times cos(C\hat{B}A)$
- $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times cos(A\hat{C}B)$

Autres résultats

- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$
- $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$
- Quel que soit le triangle ABC on a :

$$cos(B\hat{A}C)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$$

La propriété caractéristique du milieu d'un segment

- Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$

Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Théorème de la médiane :

- Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan

on a : $\begin{cases} MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2 \\ MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2 \end{cases}$

- La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle ABM .

Les relations métriques dans un triangle rectangle :

Soit ABC un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $BC^2=AB^2+AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2=BH\times BC$ ou $CA^2=CH\times CB$
- $HA^2=HC\times HB$
- $AI=\frac{1}{2}BC$

Formule de Héron :

- L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 13
Produit scalaire

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$:

1) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2) $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=1$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

3) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=4$. Calculer par deux méthodes $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC=6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ sachant que :
$\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2\sqrt{6}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle tels que :

$AB=1$, $AC=3$ et $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$

2) Soit E le point du plan tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

a) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

c) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que $(AB)\perp(IE)$

Exercice 4

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D.
O est le milieu de $[AD]$

On pose $AB=a$, $DC=b$ et $AD=c$

Correction

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

2) En écrivant $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=ab-\frac{c^2}{4}$

Exercice 5

1) ABC est un triangle tel que :
$AB=3$, $AC=5$ et $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$. Calculer BC.

2) MNP est un triangle tel que :
$MN=\sqrt{3}$, $NP=2$ et $\hat{N}=\frac{5\pi}{6}$. Calculer MP.

Exercice 6

ABC est un triangle $AB=6$, $AC=5$ et $BC=7$

1) En utilisant le théorème d'Al-Kashi montrer que :
$cos(\hat{A})=\frac{1}{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$.

3) Soit H le projeté de A sur (BC).
Calculer la distance : BH

Exercice 7

ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=4$ et $BC=5$
Soit I le milieu du segment $[BC]$, Calculer AI

Exercice 8

ABM un triangle, I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.
Sachant que $AB=4$, $AM=3$ et $BM=4$ calculer les distances MI, AK et BJ.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que
$AH=4$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{6}$.

Calculer les distances BA, CA, BC, BH et CH

Exercice 10 : Exercice d'olympiade

Soit a, b et c trois réels strictement positifs.
Montrer que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2+ca}$

Indications :
Considérons un quadrilatère $ABCD$ tel que
$A\hat{D}B=\frac{\pi}{3}$ et $B\hat{D}C=\frac{\pi}{3}$
On pose $AD=a$, $BD=b$ et $DC=c$

1) Construire une figure.

2) Calculer AB et BC en fonction de a, b et c

3) En déduire que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2+ca}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 13
Produit scalaire

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 11 : La loi des sinus

On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

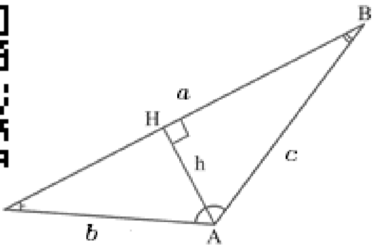
On note $AH = h$, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire que $c \times sin(B) = b \times sin(C)$.

2) Montrer que $\dfrac{a}{sin(A)} = \dfrac{b}{sin(B)} = \dfrac{c}{sin(C)}$.

Correction



Exercice 12 : Inégalité d'Euler.

Soit ABC un triangle.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

Soit $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ tel que :

$X = 2(p-a)$, $Y = 2(p-b)$ et $Z = 2(p-c)$

1) Vérifier que X, Y et Z sont strictement positif.

2) Vérifier que $X + Y = 2c$, $Y + Z = 2a$ et $Z + X = 2b$

3) En déduire que $abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$)

4) On note R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

a) En utilisant la formule de Héron, déduire que $R \geq 2r$

L'inégalité $R \geq 2r$ est appelée : inégalité d'Euler.

b) Montrer que $p^3 \geq 27(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$)

c) En utilisant la formule de Héron, déduire que $p \geq 3\sqrt{3}r$

Exercice 13

Soit ABC un triangle, on note O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$

Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1) Montrer que :

$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$ et $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ tel que A' est le milieu du segment $[BC]$

b) En déduire que $(AH) \perp (BC)$

3) a) Montrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et déduire que $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ tel que B' est le milieu du segment $[CA]$

b) En déduire que $(BH) \perp (CA)$

4) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC

5) En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où G est le centre de gravité du triangle ABC

6) Montrer que $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ et déduire que $OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

7) Montrer que :

$$cos(2A) + cos(2B) + cos(2C) = \frac{9OG^2 - 3R^2}{2R^2}$$

Exercice 14 : Exercice d'olympiade

Soit ABC un triangle, on pose

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) En utilisant la formule de Héron montrer que :

$R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ Et $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

2) On pose $B\hat{A}C = A$, $C\hat{B}A = B$ et $A\hat{C}B = C$

On suppose que :

$cos(2A) + cos(2B) + cos(2C) = -4cos(A)cos(B)cos(C) - 1$

Et $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - 4Rr - r^2)$

En utilisant l'exercice précédent déduire que :

$cos(A)cos(B)cos(C) = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$

Et $cos(A)cos(B)cos(C) \leq \frac{1}{8}$

3) En déduire que le triangle ABC est rectangle si et seulement si $p = 2R + r$

Exercice 15 : Exercice d'olympiade

O, G, H et I désignes respectifs le centre du cercle circonscrit, le centre du gravité, l'orthocentre et le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC .

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) a) Montrer que $OI^2 = R^2 - 2Rr$

b) En déduire que $R \geq 2r$

2) Montrer que $OH^2 = R^2 - 2p^2 + 2(2R+r)^2$

3) a) Montrer que $IH^2 = 2r^2 - p^2 + (2R+r)^2$

b) En déduire que $OH \geq \sqrt{2} \times IH$

4) Montrer que $IG^2 = \dfrac{1}{9}\left(p^2 - 16Rr + 5r^2\right)$

5) Déduire que $\sqrt{16Rr - 5r^2} \leq p \leq \sqrt{2r^2 + (2R+r)^2}$

14

Transformations

1) Translation – Symétrie centrale – Symétrie axiale

1-1 Définitions des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 1 :

Soit $ABCD$ un carré de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Déterminer l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer l'image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

c) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Activité 2 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Déterminer les symétrie de chacun des points A, B et O par rapport au point O.

2) En déduire la symétrie de la droite (AB) par rapport au point O.

Activité 3 :

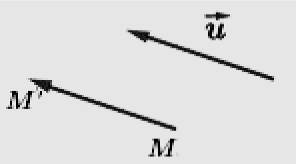
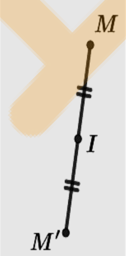
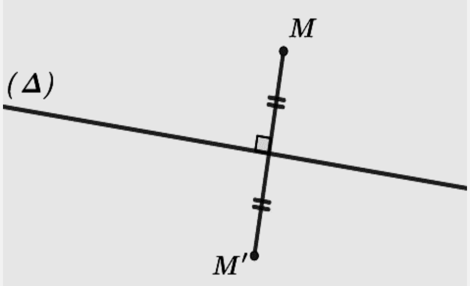
Soit $ABCD$ un losange de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Déterminer les symétrie de chacun des points B, O et I par rapport à la droite (AC).

b) En déduire la symétrie de la droite (IO) par rapport à la droite (AC).

Définitions 1 :

Translation	La symétrie centrale	La symétrie axiale
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La **translation** du vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.  On dit que M' est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $t_{\vec{u}}(M)=M'$. Ainsi $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	Soit I un point du plan. La **symétrie centrale** de centre I est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : Si : $M \neq I$, alors I est le milieu du segment $[MM']$. Si : $M = I$, alors $M'=M$.  On dit que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre I, on note $S_I(M)=M'$. Ainsi si : $M \neq I$, alors : $S_I(M)=M' \Leftrightarrow I$ est le milieu du segment $[MM']$	Soit (Δ) une droite du plan. La **symétrie axiale** d'axe (Δ) est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : Si : $M \in (\Delta)$, alors $M'=M$. Si : $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.  On dit que M' est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (Δ) , on note $S_{(\Delta)}(M)=M'$. Ainsi si : $M \notin (\Delta)$, alors : $S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow (\Delta)$ est la médiatrice du segment $[MM']$

Remarques 1 : Les points invariant

- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- $S_I(I)=I$, on dit que le point I est invariant par la symétrie centrale S_I et c'est le seul point invariant par S_I .
- Si $M \in (\Delta)$, alors $S_{(\Delta)}(M)=M$. Les points de (Δ) sont les seuls points invariants par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.

Remarques 2 :

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; $t_{\vec{0}}(A)=A$
- $t_{-\vec{u}}(A)=B \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(B)=A$.
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow S_I(M')=M$.
- $S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M')=M$.
- La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est appelé aussi symétrie orthogonale ou réflexion.

1-2 L'image des figures par les transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 4 :

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R. B est un point de (C).

1) a) Construire A' et B' les images respectives des points A et B par la symétrie centrale S_I .

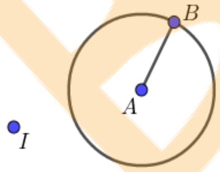
b) Montrer que $A'B'=R$ et $(A'B')\,||\,(AB)$.

2) Soit M un point de (C) et M'son image par la symétrie centrale S_I .

On note (C') le cercle de centre A' et de rayon R .

a) Vérifier que $A'M'=R$ et déduire que $M'\in(C')$.

b) En déduire que l'image du cercle (C) par la symétrie centrale S_I est le cercle (C') .



Définition 2 :

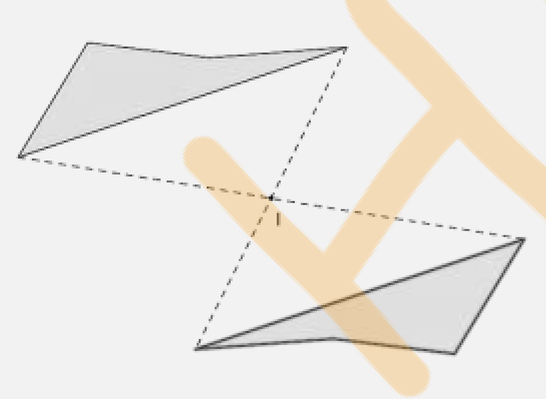
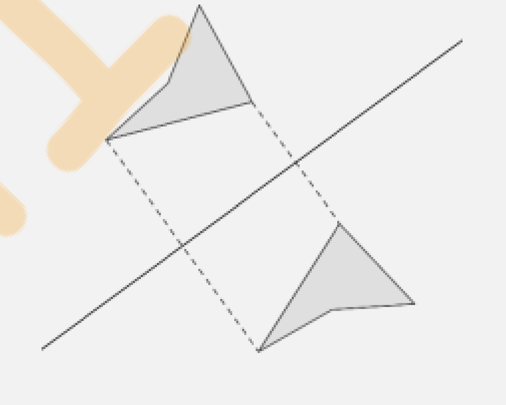
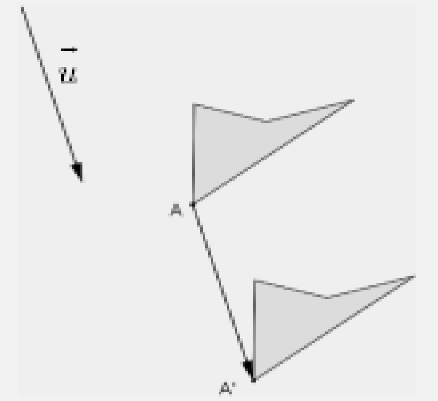
Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $T((\xi))$ l'image de (ξ) par la transformation T.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $T(M)$ appartient à $T((\xi))$.

Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$

Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation
		

Propriétés 1 : L'image des figures usuelles

Soit T une symétrie centrale, une symétrie axiale ou une translation.

Soit A, B et C trois points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$et $T(C)=C'$.

1) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la transformation T est un cercle de centre $T(A)=A'$ et de même rayon R .

2) L'image d'un segment par la transformation T est un segment de même longueur.

- On note $T([AB])$l'image du segment $[AB]$ par la transformation T .
- On a : $T([AB])=[A'B']$.

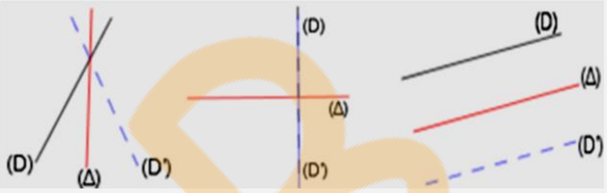
3) L'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

- On note $T\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par la transformation T
- On a : $T\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus : $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$.

4) L'image d'une droite par une symétrie centrale ou par une translation est une droite qui lui est parallèle.

- On note $T\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par la transformation T
- On a : $T\left((AB)\right)=\left(T(A)T(B)\right)$ c'est-à-dire $T\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus si T est une symétrie centrale ou une translation alors $(AB)//(A'B')$.

5) L'image d'une droite (D) par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une droite (D') :



- Si $(D)\parallel(\Delta)$ alors $(D')\parallel(\Delta)$.
- Si (D) est perpendiculaire à (Δ) alors $(D')=(D)$.
- Si (D) coupe (Δ) en un point M alors (D') coupe (Δ) en M.

6) L'image d'une demi-droite par la transformation T est une demi-droite.

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle isocèle en A et O le milieu du segment $[BC]$.

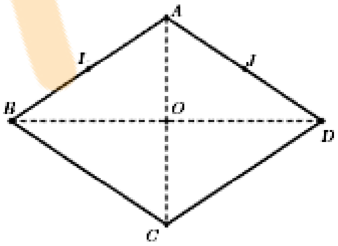
1) Déterminer l'image de la droite (AB) par S_O .

2) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par S_O .

3) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par S_O .

Exemple 2 :

Soient $ABCD$ un losange du centre O, I et J sont respectifs les milieux des segments $[AB]$ et $[AD]$



1) Déterminer les images des points B, O et I par $S_{(AC)}$.

2) Déterminer l'image de la droite (IO) par $S_{(AC)}$.

3) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par $S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par $S_{(AC)}$.

1-3 Les propriétés des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Propriétés 2 :

La propriété caractéristique de la symétrie centrale

Soit T une transformation du plan.

T est une symétrie centrale si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$

La propriété caractéristique de la translation

Soit T une transformation du plan.

T est une translation si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

Exemple 3 :

ABC un triangle, on note $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$, $t_{\vec{u}}(A)=A'$, $t_{\vec{u}}(C)=C'$, $S_B(A)=A''$ et $S_B(C)=C''$.

1) Construire une figure.

2) En utilisant la propriété caractéristique de la translation et de la symétrie centrale. Montrer que $\overrightarrow{C'A'}=-\overrightarrow{C''A''}$.

Activité 5 :

Soit T une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie centrale S_I.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan tel que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

On pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

1) Supposons que $T=t_{\vec{u}}$. En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

2) Supposons que $T=S_I$ .En utilisant la propriété caractéristique de la symétrie centrale montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

Propriétés 3 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si : $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel, alors $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le coefficient de colinéarité.

T conserve l'alignement des points :

- Les images de trois points alignés par la transformation T sont trois points alignés.

Autrement dit : Si $A,\ B$ et C sont trois points alignés, alors les points A', B' et C' sont alignés.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'alignement des points.

T conserve le milieu d'un segment :

A et B sont deux points distincts du plan.

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $I'=T(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le milieu.

T conserve le parallélisme :

- Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par la transformation T sont deux droites parallèles.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le parallélisme.

Exemple 4 :

ABC est un triangle rectangle en A et O le milieu de $[BC]$.

On note $S_{(AB)}(O)=I$ et $S_{(AC)}(O)=J$

1) Construire une figure.

2) Montrer que $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=I$ et $t_{\overrightarrow{OA}}(C)=J$

3) Les points $I,\ A$ et J sont-ils alignés ? Justifier.

4) Démontrer que A est le milieu de $[IJ]$.

Activité 6 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $t_{\vec{u}}$ la translation du vecteur $\vec{u}$.

A et B deux points du plan, on pose $t_{\vec{u}}(A)=A'$ et $t_{\vec{u}}(B)=B'$.

1) En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $A'B'=AB$.

2) Soit C un point du plan tel ABC est un triangle, on pose $t_{\vec{u}}(C)=C'$.

a) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont identiques puis en déduire que $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$.

b) En déduire que si $(AB)\perp(AC)$ alors $(A'B')\perp(A'C')$.

Propriétés 4 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve la distance :

- $A'B' = AB$.

Autrement dit : La distance entre deux points est égale à celle de leurs images par la transformation T.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les distances ou qu'elles sont isométries.

T conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$.

Autrement dit : l'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les mesures des angles géométriques.
- Remarque : la symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés.

T conserve l'orthogonalité :

- Si : $(AB) \perp (CD)$, alors $(A'B') \perp (C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par la transformation T sont deux droites perpendiculaires.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'orthogonalité.

T conserve l'intersection des figures géométriques :

- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par la transformation T est l'intersection des images de ces deux figures par cette transformation.
- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'intersection.

Exemple 5 : Soit $OABC$ un rectangle.

On considère la translation t de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{OC}$.

1) Construire les points O', A', B' et C' les images respectives des points O, A, B et C par la translation t.

2) Montrer que le quadrilatère $O'A'B'C'$ est un rectangle.

3) Soit M un point du plan, on pose $t_{\vec{u}}(M) = N$. Montrer que $CM = C'N$.

2) Homothétie

2-1 Définition d'une homothétie

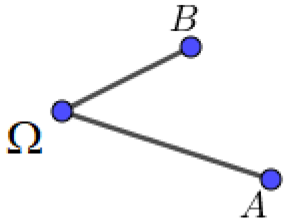
Activité 7 :

Soient Ω, A et B trois points non alignés du plan (Voir la figure ci-contre)

1) Construire les points A' et B' tels que $\overrightarrow{\Omega A'} = 3\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = 3\overrightarrow{\Omega B}$

A' est appelé l'image du point A par l'homothétie de centre Ω et du rapport 3 .

On écrit $h_{(\Omega;3)}(A) = A'$ ou $h(A) = A'$



2) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie h de centre Ω et du rapport 3 .

b) Déterminer $h(\Omega)$.

3) Déterminer l'image de la droite (AB) par l'homothétie h (C'est-à-dire déterminer $h((AB))$)

4) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$ et déduire que $h((AB)) \parallel (AB)$

5) Soit M un point distinct des points Ω, A et B . On pose $h(M) = M'$.

Déterminer la relation vectorielle qui permet de construire le point M' .

Définition 3 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

La transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle **l'homothétie** de centre Ω et du rapport k .

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et du rapport k, on écrit :

$h_{(\Omega;k)}(M) = M'$ ou $h(M) = M'$

Ainsi : $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Remarques 3 :

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

- Si $h(A)=A'$ alors les points A', A et Ω sont alignés.
- Si $k\neq 1$ alors le centre Ω d'homothétie h est le seul point invariant par cette homothétie.
- Si $|k|>1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est un agrandissement de rapport $|k|$.
- Si $|k|<1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est une réduction de rapport $|k|$.
- $h_{(\Omega;k)}(M)=M'\Leftrightarrow h_{\left(\Omega;\frac{1}{k}\right)}(M')=M$
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{\Omega M}=-\overrightarrow{\Omega M'}$ donc $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω .

Exemple 6 :

1) Soit I et A deux points distincts du plan.
   a) Construire l'image A' de A par l'homothétie de centre I et de rapport 3 .
   b) Construire A'' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -2 .

2) Quel est le rapport de l'homothétie de centre O et qui transforme le point A en B tel que $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{OB}$?

Exemple 7 :

A, B et C trois points du plan et soit h l'homothétie de centre A tel que $h(B)=C$.

Déterminer le rapport de l'homothétie h dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AB}$

2) $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

2-2 L'image des figures usuelles par l'homothétie

Définition 4 :

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k .

- L'image d'une figure par l'homothétie h est l'image de tous ces points par cette homothétie.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $h(M)$ appartient à $h((\xi))$.

Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $h(M)\in h((\xi))$

Propriétés 5 :

h désigne une homothétie de centre Ω et de rapport k .

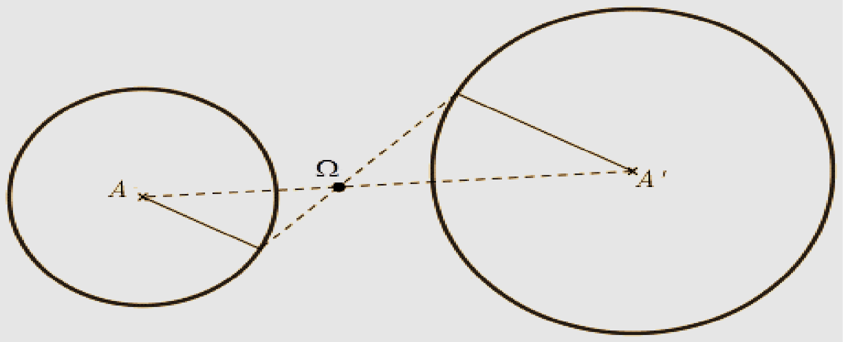
Soient A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$

1) L'image d'une figure géométrique par une homothétie est l'image de tous ces points par cette homothétie.

2) L'image d'un segment par une homothétie est un segment.

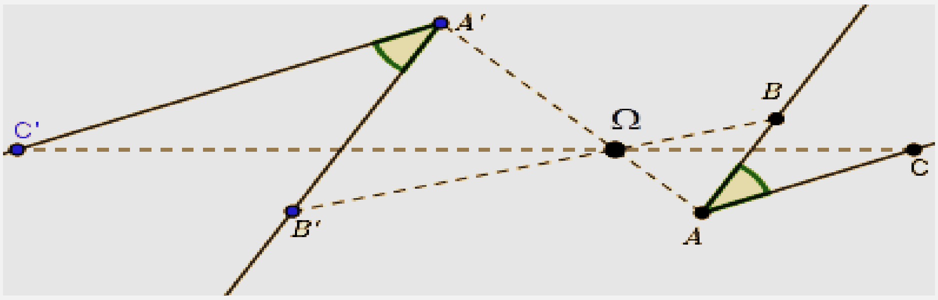
- On note $h([AB])$ l'image du segment $[AB]$ par l'homothétie h.
- On a $h([AB])=[A'B']$

3) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une homothétie h est un cercle de centre A' et de rayon $|k|\times R$.



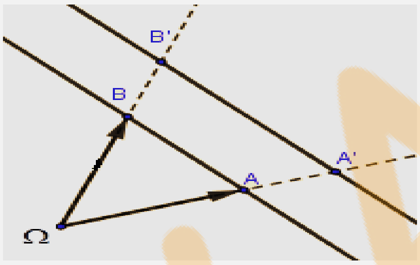
4) L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure

- On note $h\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par l'homothétie h.
- On a $h\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus on a $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$



5) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

- On note $h\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par l'homothétie h
- On a $h\left((AB)\right)=\left(h(A)h(B)\right)$ c'est-à-dire $h\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus on a $(AB)\parallel(A'B')$



- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h\left((\Delta)\right)=(\Delta)$

6) L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.

7) L'image du triangle ABC par l'homothétie h est le triangle $A'B'C'$.

- On dit que ABC et $A'B'C'$sont des triangles homothétiques.
- Si S et S' sont les aires respectives des triangles ABC et $A'B'C'$alors $S'=k^2\times S$.

2-3 Les propriétés d'homothétie

Activité 8 :

Ω un point du plan et $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

1) On pose $h(M)=M'$ et $h(N)=N'$, montrer que $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

2) Soit T une transformation du plan qui admet un unique point invariant A.

On suppose que $T(M)=M'$, $T(N)=N'$ et $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N du plan.

En choisissant $N=A$ montrer que T est une homothétie et que $k\neq 1$.

Propriété 6 : La propriété caractéristique d'homothétie

Soit T une transformation du plan.

T est une homothétie de rapport $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

Remarque 4 : Conséquence :

Si M et N sont deux points du plan, M' et N' sont leurs images par l'homothétie $h_{(\Omega;k)}$ alors $M'N'=|k|\times MN$

En général l'homothétie ne conserve pas les distances.

Exemple 8 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme, on considère l'homothétie h de centre D et de rapport -2.

1) Construire les points A', B' et C' tels que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$.

2) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Activité 9 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

On considère les points A, B, C et D tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ avec $(\alpha \in \mathbb{R})$

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre I et de rapport k.

On pose $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{C'D'}$

Propriétés 7 :

h est une homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soient A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$.

L'homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel alors : $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{C'D'}$.

L'homothétie conserve l'alignement des points :

Si A, B et C sont trois points alignés alors les points A', B' et C' sont alignés.

L'homothétie conserve le milieu d'un segment :

Si A et B sont deux points distincts du plan et I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I' = h(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

L'homothétie conserve le parallélisme :

Si $(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont deux droites parallèles.

L'homothétie conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$

Autrement dit : L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure.

- $(\overline{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})[2\pi]$ on dit que l'homothétie conserve les mesures des angles orienté.

L'homothétie conserve l'orthogonalité :

Si $(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par une homothétie sont deux droites perpendiculaires.

L'homothétie conserve l'intersection des figures géométriques :

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si $M \in (\xi)$ alors $h(M) \in h((\xi))$
- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par une homothétie est l'intersection des images de ces deux figures par cette homothétie.

Exercice :

$ABCD$ un parallélogramme et M le point tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1) Construire une figure convenable.
2) On considère l'homothétie h de centre A et qui transforme C en M.
   a) Déterminer k le rapport de l'homothétie h.
   b) Construire le point M' l'image de D par l'homothétie h.
3) Soit I l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$.
   a) Montrer que $h(B) = I$.
   b) En déduire que $(IM') \parallel (BD)$.
4) Soit (Δ) une droite passant par A et qui coupe la droite (IM) en F et (BC) en E.
   a) Déterminer les images des droites (BC) et (Δ) par l'homothétie h. ; b) Montrer que $h(E) = F$.

Résumé 14 : Transformations

Soit T une symétrie centrale S_I ou une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ ou une homothétie $h_{(\Omega;k)}$.

$A,\ B,\ C,\ D,\ M$ et N des points du plan.

On pose : $T(A)=A',\ T(B)=B',\ T(C)=C',\ T(D)=D',\ T(M)=M'$ et $T(N)=N'$,

Soit k un réel non nul. (ξ) et (Γ) deux figures du plan.

		La symétrie centrale S_I	**La translation** $t_{\vec{u}}$	**La symétrie axiale** $S_{(\Delta)}$	**L'homothétie** $h_{(\Omega;k)}$
M' est l'image de M		I est le milieu du segment $[MM']$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	(Δ) médiatrice de $[MM']$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\ \overrightarrow{\Omega M}$
Les points invariants par		I	…………..	Les points de (Δ)	Ω
Les propriétés de la transformation T	**Propriété caractéristique**	$\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$	…………………	$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$
	***T* conserve la distance (sauf si $T=h_{(\Omega;k)}$ avec $\lvert k\rvert\neq 1$)**	$A'B'=AB$			$A'B'=\lvert k\rvert AB$
	***T* conserve le coefficient de colinéarité**	Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ alors : $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$			
	***T* conserve l'alignement**	Si $A,\ B$ et C est alignés alors les points $A',\ B'$ et C' sont alignés			
	***T* conserve le milieu**	Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I'=T(I)$ est le milieu de $[A'B']$			
	***T* conserve le parallélisme**	Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$			
	***T* conserve les mesures des angles géométriques**	$B'\hat{A}'C'=B\hat{A}C$			
	***T* conserve l'orthogonalité**	Si $(AB)\perp(CD)$ alors $(A'B')\perp(C'D')$			
	***T* conserve l'appartenance**	Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$			
	***T* conserve l'intersection**	Si $(\xi)\cap(\Gamma)=M$ alors $T((\xi))\cap T((\Gamma))=M'$			
L' image des figures usuelles	**L'image d'un segment est un segment**	$T([AB])=[A'B']$			
	L'image d'une droite est une droite	$T((AB))=(A'B')$ et si $T\neq S_{(\Delta)}$ alors $(A'B')\parallel(AB)$			
	L'image d'un cercle de centre *A* et de rayon R	est un cercle de centre A' et de même rayon R			est un cercle de centre A' et de rayon $\lvert k\rvert\times R$

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; • $S_I(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h((\Delta))=(\Delta)$
- Si $h(A)=A'$ alors les points $A',\ A$ et Ω sont alignés.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω.
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 14
Transformations

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1

ABC est un triangle. D est un point de $[AC]$ tel que :

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. On pose :

$S_{(AB)}(D)=D'$, $S_{(AB)}(C)=C'$, $S_B(A)=A'$,

$S_B(D')=D''$ et $S_B(C')=C''$.

1) Construire une figure.

2) Montrer que. $\overrightarrow{A'D''}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A'C''}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.

ABB' et ACC' deux triangles équilatéraux.

Les droites (BB') et (CC') se coupent en point I.

Les droites (CB') et (BC') se coupent en point J.

Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

Montrer que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 3

ABC un triangle équilatéral et I le milieu de $[BC]$.

Soit A', B', C' et I' les images respectifs de A, B, C et I par la symétrie centrale S_O tel que O est le milieu de $[AC]$

Montrer que les droites $(CI')\perp(B'A)$

Exercice 4

ABC un triangle rectangle en B.

1) Construire le point D la symétrie de C par rapport à la droite (AB) .

2) Soit E le milieu de $[AC]$, déterminer F la symétrie de E par rapport à la droite (AB) .

3) Montrer que $CE=DF$ et $CF=DE$.

Exercice 5

Soient $ABCD$ un rectangle de centre O et S la symétrie axiale d'axe (BD) et soit A' et C' les images respectives de A et C par la symétrie axiale S .

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $AA'CC'$ est un rectangle.

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

- B' et C' deux points du plan tels que

$S_A(B)=B'$ et $S_A(C)=C'$.

- B'' et C'' deux points du plan tels que

$S_{\overline{AC}}(B)=B''$ et $S_{\overline{AC}}(C)=C''$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $(B'C')\parallel(B''C'')$.

Correction

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD) . K et L les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur la droite (AC)

Soit S_O la symétrie centrale de centre O.

1) Déterminer $S_O(I)$ et $S_O(K)$.

2) Soit E l'orthocentre du triangle OBC et F l'orthocentre du triangle ODA. Montrer que O est le milieu de $[EF]$.

Exercice 8

Soient h l'homothétie de centre I et de rapport 3 ,

h' l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

Déterminer les relations vectorielles des homothéties h et h'

Exercice 9

I, A, B, M et N des points du plan et soit h l'homothétie de centre I et de rapport k .

1) On suppose que $h(M)=A$ et $h(N)=B$

Exprimer avec des relations vectorielles les écritures précédentes.

2) En déduire que $\overrightarrow{h(M)h(N)}=k\overrightarrow{MN}$

Exercice 10

Soient A, B et L trois points du plan tels que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Déterminer le rapport de l'homothétie de centre L qui transforme A en B .

Exercice 11

Soit $C(O;2)$ et $C'(O';1)$ deux cercles tel que $OO'=7$

On considère l'homothétie $h\left(I,\frac{-1}{2}\right)$ de centre I et de rapport $k=-\frac{1}{2}$ qui transforme O en O' .

1) Faire une figure.

2) Quelle est l'image de (C) par l'homothétie h ?

Exercice 12

Soient ABC un triangle du sommet A.

B' le point tel que $\overrightarrow{BB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

C' le point tel que $C'\in(AC)$ et $(B'C')\parallel(BC)$

Soit h l'homothétie de centre A et qui transforme B en B' .

1) Déterminer le rapport de l'homothétie h.

2) Montrer que $h(C)=C'$

Exercice 13

ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit et soit D le point tel que A et D sont diamétralement opposés.

Soit I le milieu de $[BC]$.

Soit B' le point tel que B est le milieu de $[AB']$.

Soit C' le point tel que C est le milieu de $[AC']$.

Le point H est la projection orthogonale du point D sur la droite $(B'C')$.

1) Construire la figure.

2) Montrer que le point H est le milieu du $[B'C']$.

Montrer que les points A, I et H sont alignés.

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 14
Transformations

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 14

Soit A et B deux points distincts du plan
On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que
$3\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

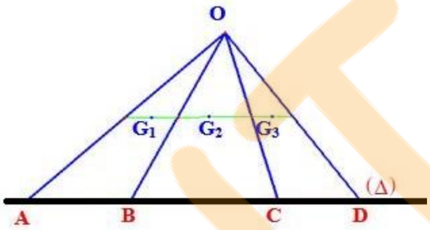
1) Déterminer vectoriellement O le point invariant par la transformation T.
2) Déterminer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.
3) En déduire la nature de la transformation T.

Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan
On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que
$2\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}+3\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$
Montrer que T est une translation de vecteur à déterminer.

Exercice 16

$A,\ B,\ C$ et D quatre points d'une droite (Δ) et O un point n'appartient pas à (Δ).
Soit G_1, G_2 et G_3 les centres de gravité des triangles OAB, OBC et OCD respectivement.
En utilisons l'homothétie, montrer que G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

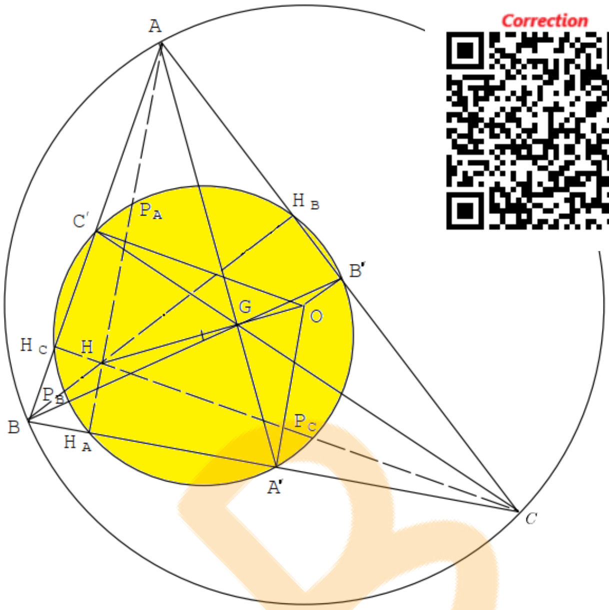


Exercice 17 : Cercle d'Euler

Si ABC est un triangle. Alors les milieux A', B' et C' de ses côtés, les milieux P_A, P_B et P_C des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$, où H est son orthocentre, et les pieds H_A, H_B et H_C des hauteurs. Sont sur un même cercle appelé le cercle d'Euler.
Le centre de ce cercle est le milieu de $[OH]$ où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration :

Nous avons vu (Série 2/ Exercice 13) que l'orthocentre H, le centre de gravité G, et le centre du cercle circonscrit O d'un triangle sont situé sur une même droite appelé la droite d'Euler.
Et que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$
On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon.



Correction

1) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$
On pose $h(O)=\Omega$ et on désigne par Γ' le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{R}{2}$
a) Montrer que $h(\Gamma)=\Gamma'$
b) Montrer que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$
c) En déduire que $A'\in\Gamma'$, $B'\in\Gamma'$ et $C'\in\Gamma'$

2) Vérifier que $\overrightarrow{G\Omega}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ puis montrer que Ω est le milieu du segment $[OH]$

3) Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $\dfrac{1}{2}$
On désigne par P_A, P_B et P_C les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$
a) Vérifier que $h'(O)=\Omega$
b) En déduire que $h'(\Gamma)=\Gamma'$
c) Montrer que $h'(A)=P_A$, $h'(B)=P_B$ et $h'(C)=P_C$
d) En déduire que $P_A\in\Gamma'$, $P_B\in\Gamma'$ et $P_C\in\Gamma'$

4) Soit (D_A) la droite parallèle à $(A'O)$ passant par Ω
On désigne par H_A, H_B et H_C les pieds de hauteurs issues de A, B et C respectivement.
a) Montrer que (D_A) est la médiatrice de $[A'H_A]$
b) En déduire que $\Omega H_A=\dfrac{R}{2}$ puis que $H_A\in\Gamma'$.
c) Démontrer que $H_B\in\Gamma'$ et $H_C\in\Gamma'$.

Application :

Soit I et I' les centres des cercles inscrits aux triangles ABC et $A'B'C'$ respectivement.
Montrer que les points I , G et I' sont alignés.

15

Géométrie de l'espace

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة

مادة الرياضيات

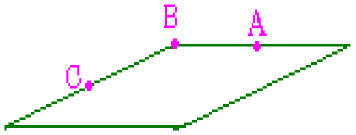
الأستاذ

عيسى هياب

1- التقاطع و التوازي في الفضاء

1.1 المستوى

- ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C تحدد مستوى نرمزله ب : (ABC)



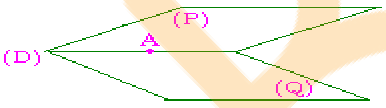
خاصيات

1- مستقيمان متقاطعان قطعا يحددان كذلك مستوى

2- مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى

3- مستقيم و نقطة خارجه يحددان مستوى

4- إذا كان لمستويين مختلفين نقطة مشتركة فهما يتقاطعان في مستقيم يمر من هذه النقطة .



5- جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صحيحة في كل مستوى من مستويات الفضاء.

2.1 الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

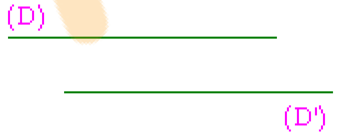
A- مستوائيان :

يوجدان ضمن نفس المستوى

فهما إما :

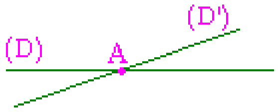
1- متوازين :

أ- متوازيان قطعا



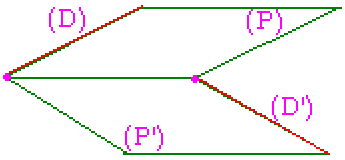
ب- منطبقان

2- متقاطعين :



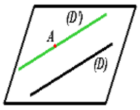
B- غير مستوائيان

إذا كان مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين نقول إنهما غير مستوائيين. (لا يوجدان ضمن نفس المستوى)

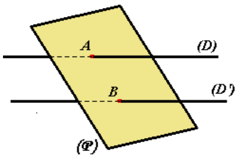


خاصيات

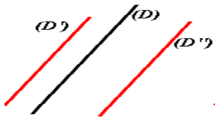
1. يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما



2. إذا قطع مستوى أحد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الأخر.



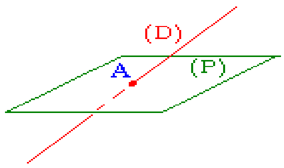
3. إذا كان مستقيمان متوازيان في الفضاء فان كل مستقيم يوازي أحدهما يكون موازيا للأخر



3.1 الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

(D) مستقيم ضمن الفضاء و (P) مستوى ضمن الفضاء

1- المستقيم و المستوى يتقاطعان في نقطة



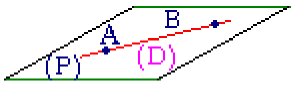
$$(D)\cap(P)=\{A\}$$

2- المستقيم و المستوى متوازيان $(D)\parallel(P)$

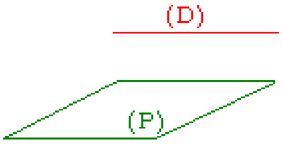
أ- منطبقان

يعني المستقيم ضمن المستوى

$$(D)\subset(P)$$



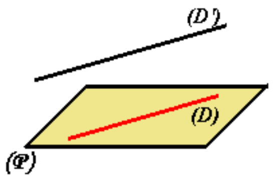
ب- متوازيان قطعا



$$(D)\cap(P)=\varnothing$$

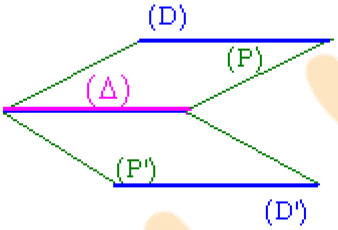
خاصيات

1- يكون مستقيم موازيا لمستوى إذا وجد ضمن هذا المستوى مستقيم يوازيه .



2- إذا توازى مستويان في الفضاء فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الأخر

3- مبرهنة السقف: إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا،فإن تقاطعهما هو مستقيم موازلهذين المستقيمين المتوازيين.



4- إذا كانت نقطتان من مستقيم تنتميان إلى مستوى فإن المستقيم المار منهما يوجد ضمن هذا المستوى

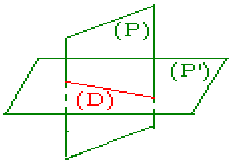
4.1 الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

(P) و (P') مستويان في الفضاء

(P) و (P') يكونان إما :

1- متقاطعين في مستقيم

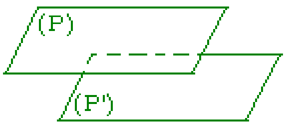
$$(P)\cap(P')=(D)$$



2- متوازيين $(P)\parallel(P')$

أ- منطبقين $(P)=(P')$

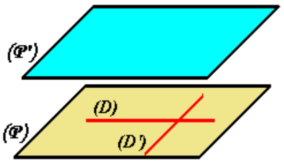
ب- متوازيان قطعا



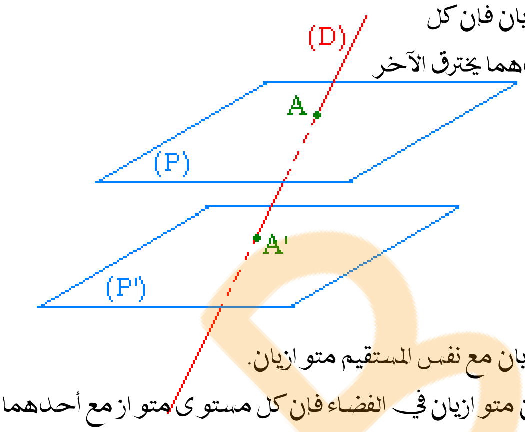
$$(P)\cap(P')=\varnothing$$

خاصيات

1ـ يكون مستويان متوازيين إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للمستوى الآخر



2ـ إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر



3ـ المستويان المتوازيان مع نفس المستقيم متوازيان.

4ـ إذا كان مستويان متوازيان في الفضاء فإن كل مستوى متواز مع أحدهما يكون موازيا للأخر.

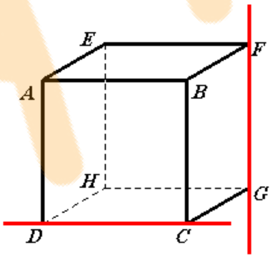
2- التعامد في الفضاء

1.2 المستقيمات المتعامدة في الفضاء

نقول إن مستقيمان متعامدين في الفضاء إذا وجد مستقيمان مستوائيان متعامدان موازيان لهما .

مثال: $ABCDEFGH$ مكعب،

نلاحظ أنّ: المستقيمين (DC) و (FG) متعامدان، لآن (DC) و (BC) مستوائيان و متعامدان في النقطة C، و (BC) و (FG) متوازيان و (DC) يوازي نفسه.



خاصيات

1ـ إذا كان مستقيمان متعامدين في الفضاء فإن كل مستقيم مواز لأحدهما يكون متعامدا مع الأخر.

2ـ إذا توازى مستقيمان في الفضاء فإن كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون عموديا مع الأخر.

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(DC)\perp(AE)$ و $(GH)\perp(BF)$

2.2 تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء

نقول إن مستقيم عمودي على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على جميع مستقيمات هذا المستوى.

خاصيات

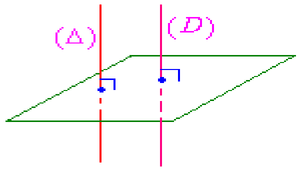
1ـ يكون مستقيم عموديا على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على مستقيمين متقاطعين ضمن هذا المستوى

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(ABC)\perp(BF)$

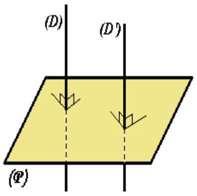
2ـ يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان أحدهما عمودي على مستوى يحتوي على الأخر.

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(DC)\perp(AE)$ و $(GH)\perp(BF)$

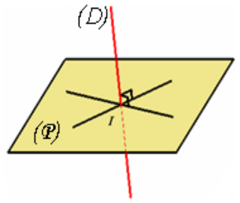
3ـ إذا توازى مستقيمان في الفضاء فإن كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



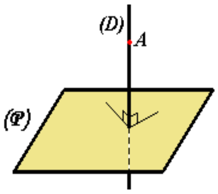
4ـ المستقيمان العموديان على نفس المستوى متوازيان



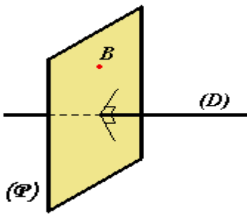
5ـ إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستوى فانه عمودي على كل مستقيمات هذاالمستوى



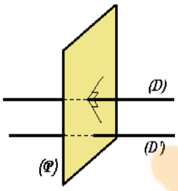
6ـ يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستوى معلوم



7ـ يوجد مستوى وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما

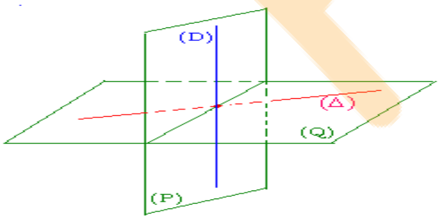


8ـ المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر



3.2 تعامد وتوازي مستويين في الفضاء

نقول إن مستويان متعامدين في الفضاء إذا وجد ضمن أحدهما مستقيم عمودي على المستوى الآخر

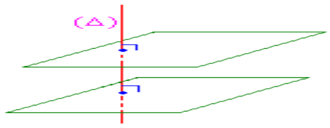


مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(ABG)\perp(DCD)$

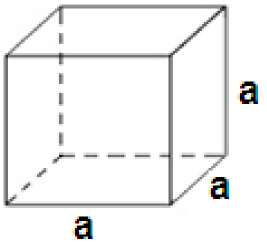
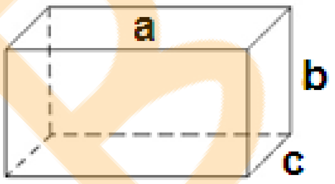
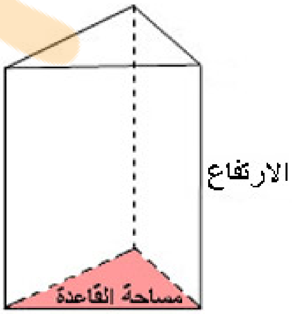
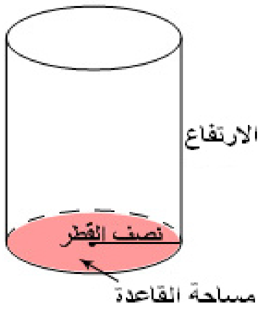
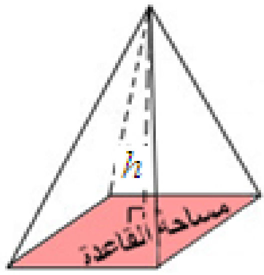
خاصيات

2ـ إذا كان مستويان متعامدين مع نفس المستقيم فإنهما يكونان متوازيان.

4ـ إذا توازى مستويان في الفضاء فإن كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



حساب المساحات والحجوم

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
مكعب طول ضلعه a 	$S_L = 4a^2$	$S_T = 6a^2$	$V = a^3$
متوازي مستطيلات أبعاده **a** و **b** و **c** 	$S_L = 2(ac + bc)$ أو $S_L = 2(ab + bc)$ أو $S_L = 2(ac + ab)$	$S_T = 2(ab + bc + ac)$	$V = abc$
موشور قائم إرتفاعه **h** 	$S_L = P_B \times h$ P_B : محيط القاعدة S_L : المساحة الجانبية	$S_T = S_L + 2 \times S_B$ S_B : مساحة القاعدة S_T : المساحة الكلية	$V = S_B \times h$
أسطوانة قائمة شعاعها **R** و ارتفاعها **h** 	$S_L = P_B \times h$ أي $S_L = 2\pi R \times h$	$S_T = S_L + 2 \times S_B$ أي $S_T = 2\pi R(R + h)$	$V = S_B \times h$ أي $V = \pi R^2 \times h$
هرم إرتفاعه **h** 	مجموع مساحات الأوجه الجانبية	$S_T = S_L + S_B$	$V = \frac{1}{3} S_B \times h$
	ملاحظة هامة قاعدة الهرم يمكن أن تكون مربعا أو مستطيلا أو خماسيا أو دائرة		

سلسلة التمارين رقم 15

الهندسة الفضائية

التمرين 1

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، النقطتان N و M منتصفا القطعتين $[BF]$ و $[AB]$ على التوالي.

1ـ أنشئ الشكل

2ـ بين أن $(AB)\perp(CG)$ و $(MN)\parallel(AF)$ و $(MN)\parallel(DG)$

3ـ بين أن المستقيمين (MN) و (EF) متقاطعان.

4ـ بين أن المستقيمين (MN) و (FG) غير مستوائيان.

5ـ بين أن $(MN)\subset(AEF)$ و $(EM)\parallel(DCG)$ و $(EH)\perp(MBN)$

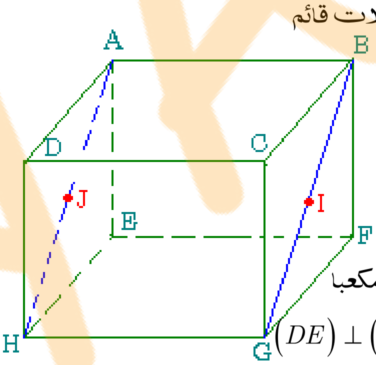
6ـ بين أن المستقيم (EN) يقطع المستوى (ABC) .

7ـ بين أن $(MBN)=(AEF)$ و $(NFG)\parallel(ADH)$ و $(MBC)\perp(AEH)$

8ـ بين أن المستويين (BCH) و (ADF) متقاطعان.

التمرين 2

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم



1ـ بين أن $\left(AD\right)\perp\left(EF\right)$

2ـ ليكن I منتصف $\left[BG\right]$

و J منتصف $\left[AH\right]$

بين أ ن : $\left(IJ\right)\perp\left(AEH\right)$

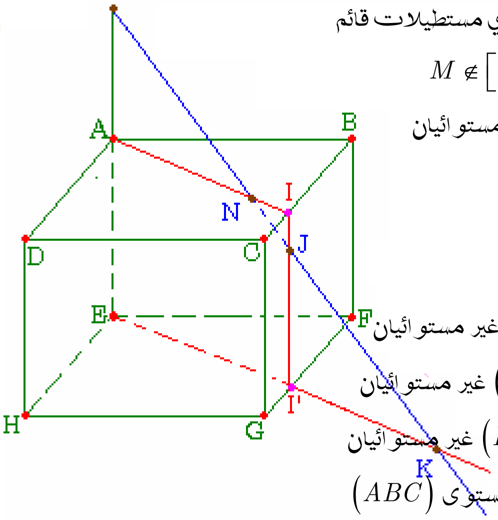
3ـ بين أ ن إذا كان $ABCDEFGH$ مكعبا

فإن : $\left(DCF\right)\perp\left(ABG\right)$ و $\left(DE\right)\perp\left(BG\right)$

التمرين 3

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم

$M\in[EA)$ بحيث $M\notin\left[EA\right]$



1ـ بين أن $\left(MB\right)$ و $\left(EF\right)$ مستوائيان

واستنتج أنهما متقاطعان

2ـ نفس السؤال بالنسبة

ل : $\left(MC\right)$ و $\left(EG\right)$

3ـ بين أن : $\left(AB\right)$ و $\left(EH\right)$ غير مستوائيان

4ـ بين أن : $\left(EG\right)$ و $\left(DC\right)$ غير مستوائيان

5 ـ بين أن : $\left(MB\right)$ و $\left(DC\right)$ غير مستوائيان

6 لتكن N نقطة من المستوى $\left(ABC\right)$

أـ بين أن $\left(MN\right)$ يقطع $\left(EFG\right)$ و ارسم K نقطة تقاطعهما

بـ بين أن $\left(MN\right)$ يقطع $\left(CBF\right)$ و ارسم J نقطة تقاطعهما

7ـ ليكن O منتصف $\left[BH\right]$ بين أن : $G;O;A$ نقط مستقيمية

8ـ ارسم تقاطع $\left(ACG\right)$ و $\left(DBF\right)$

التمرين 4

$ABCD$ مستطيل ضمن مستوى $\left(P\right)$

و $\left(\Delta\right)$ مستقيم عمودي على $\left(P\right)$

ويقطع $\left[AB\right]$ في I "$I\neq A;I\neq B$"

نعتبر نقطة S من $\left(\Delta\right)$ بحيث $\left(SB\right)\perp\left(SA\right)$

Correction

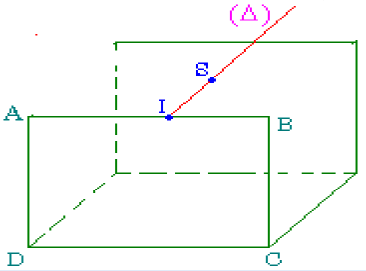
1) أـ بين أن : $\left(AD\right)\perp\left(SAD\right)$

بـ استنتج أ ن : $\left(SAD\right)\perp\left(SBH\right)$

2) أـ حدد $\left(\Delta'\right)$ تقاطع $\left(SAD\right)$ و $\left(SBH\right)$

ثم أنشئه .

بـ بين أن : $\left(\Delta'\right)\parallel\left(P\right)$



التمرين 5

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه I ، M نقطة مخالفة للنقطة A

وتنتمي إلى المستقيم المار من A والعمودي على المستوى (ABC)

و J منتصف $[MC]$

1ـ أنشئ الشكل

2ـ بين أن $(IJ)\parallel(MA)$

3ـ حدد تقاطع المستويين (JBD) و (MAC)

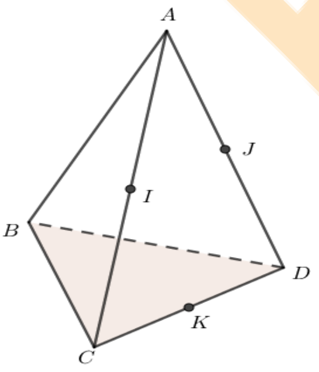
4ـ بين أن $(JBD)\perp(ABC)$

التمرين 6

نعتبر في الفضاء رباعي أوجه $ABCD$

I و J و K هي على التوالي منتصفات $[AC]$ و $[AD]$ و $[CD]$

و G مركز ثقل المثلث ACD



1ـأـ بين أن النقط B و C و I و J

غير مستوائية.

بـ حدد $(BDI)\cap(BCJ)$

2ـ أـ بين أن المستويين (BIJ) و (BCD)

يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المار من B

والموازي للمستقيم (CD)

3ـأـ لنفترض أن المثلث BCD متساوي

الساقين رأسه B وأن المستقيم (AK) عمودي على المستوى (BCD)

بين أن المستقيم (CD) عمودي على المستوى (ABK)

بـ استنتج أن $(\Delta)\perp(BG)$

DL6

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Dans l'exercice 1 les parties A), B), C) et D) sont indépendants et dans l'exercice 2 les parties A) et B) sont indépendants.

Exercice 1 (Produit scalaire)

A) ABC un triangle tel que $AB=3,\ AC=1$ et $cos(B\hat{A}C)=\frac{-1}{3}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $BC=2\sqrt{3}$

3) Soit I le milieu du segment $[AB]$, calculer CI

4) a) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que $cos(A\hat{C}B)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$ et F le milieu du segment $[BC]$

a) Ecrire $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Montrer que $DF=\frac{\sqrt{2}}{3}$ (remarquer que $DF^2=\overrightarrow{DF}^2$)

d) Montrer que $(DF)\perp(AB)$

e) En déduire la nature du triangle ADF

6) En utilisant la formule de Héron, montrer que l'aire du triangle ABC est $S=\sqrt{2}$

B) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que $AH=3$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{6}$

1) Calculer les distances $BA,\ CA,\ BC,\ BH$ et CH

2) On suppose que $AB=6$
Déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :
a) $MA^2+MB^2=218$; b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=40$

C) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan montrer que :

1) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2) $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

D) Soit m_1, m_2 et m_3 les médianes d'un triangle ABC. Montrer que

$$m^2+m_2{}^2+m_3{}^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

Exercice 2 (Transformations)

A) Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

1) Construire une figure convenable

2) Vérifier que $t_{\vec{u}}(I)=J$, $t_{\vec{u}}(A)=B$ et déduire que $t_{\vec{u}}((AI))=(BJ)$

3) a) Soit h une homothétie, montrer que $h((BA))\parallel(DC)$

b) On suppose que $h(B)=C$ montrer que $h((BA))=(DC)$ (remarquer que $B\in(BA)$)

4) Dans la suite de cette partie on suppose que $h(B)=C$ et que I est le centre de h.

a) Montrer que le rapport de h est $k=-2$.

b) Soit E l'image de J par h.

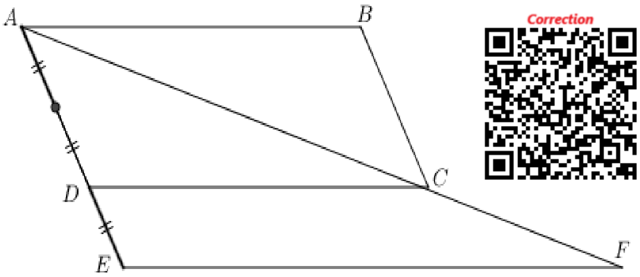
Montrer que $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

5) Soit F le point d'intersection des droites (BA) et (ID), montrer que $h(F)=D$

6) On pose $h(A)=A'$ montrer que les points $D,\ C$ et A' sont alignés.

B) Soit $ABCD$ un parallélogramme, E le point du plan tel que : $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit F la projeté de E sur (AC) parallèlement à (DC)



Correction

On considère l'homothétie h de centre A tel que $h(D)=E$

1) Montrer que le rapport de l'homothétie h est $k=\frac{3}{2}$

2) Déterminer l'image du point C par l'homothétie h

3) En déduire la distance EF on fonction de DC

4) Soit J l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

a) Montrer que $h(B)=J$

b) En déduire que $(BD)\parallel(JE)$

Exercice 3 (Géométrie de l'espace)

Exercice 1 de la série 15

DS6

TCSF
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (8 pts)

Soit ABC un triangle tels que $BA = 2$, $BC = 3$ et $C\hat{B}A = \frac{\pi}{3}$

1) Montrer que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = 3$ 1pt

2) En utilisant le théorème d'Al-Kashi montrer que $CA = \sqrt{7}$ 1.5pt

3) Montrer que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 6$ 1pt

4) En déduire que $cos(B\hat{C}A) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 0.5pt

5) Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (CA).

Montrer que $CH = \frac{6\sqrt{7}}{7}$ (Remarquer que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}$) 1pt

6) Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA}$

a) Montrer que le triangle BCE est rectangle en B 1.5pt

b) Montrer que $BE = 3\sqrt{3}$ 1.5pt

Exercice 2 (8 pts)

$ABCD$ un parallélogramme et O le point tel que $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$

1) Construire une figure convenable. 0.5pt

2) On considère l'homothétie h de centre O tel que $h(C) = D$

Montrer que le rapport de l'homothétie h est $k = -4$ 1.5pt

3) a) Montrer que $h((CB)) \parallel (AD)$ 0.5pt

b) Montrer que $D \in h((CB))$ (remarquer que $C \in (CB)$) 0.5pt

c) En déduire que $h((CB)) = (AD)$ 0.5pt

4) Déterminer l'image de la droite (OA) par l'homothétie h 0.5pt

5) Soit E le point d'intersection des droites (CB) et (OA), montrer que $h(E)=A$ 1pt

6) En déduire que $\overrightarrow{DA} = -4\overrightarrow{CE}$ 1pt

7) On pose $h(B) = N$

a) Montrer que les points A, D et N sont alignés. 1pt

b) Placer le point N dans la même figure précédente. 1pt

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice 3 (4 pts)

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$ 1pt

2) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tels que :

$CH = 9$ et $BH = 16$

a) Montrer que $AH = 12$ puis calculer AB 1.5pt

b) On suppose que $AB = 20$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 250$ 1.5pt

Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Tome 1

10 Cours bien détaillés

10 Résumés bien précis

10 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Tome 2

05 Cours bien détaillés

05 Résumés bien précis

05 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac sciences expérimentales

Tome 1

06 Cours bien détaillés

06 Résumés bien précis

06 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac sciences expérimentales

Tome 2

06 Cours bien détaillés

06 Résumés bien précis

06 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac sciences économiques et la gestion

10 Cours bien détaillés

10 Résumés bien précis

10 Séries d'exercices

6 Devoirs libres corrigés

6 Devoirs surveillés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac Sciences Mathématiques

Tome 1

08 Cours bien détaillés

08 Résumés bien précis

08 Séries d'exercices

04 Devoirs libres corrigés

08 Devoirs surveillés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac Sciences Mathématiques

Tome 2

06 Cours bien détaillés

06 Résumés bien précis

06 Séries d'exercices

04 Devoirs libres corrigés

08 Devoirs surveillés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2BACSPF & 2BACSVTF

Tome 1

06 Cours bien détaillés

06 Résumés bien précis

06 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

Extraits du bac

Examen blanc corrigé

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2BACSPF & 2BACSVTF

Tome 2

05 Cours bien détaillés

05 Résumés bien précis

05 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

Extraits du bac

04 Examens blancs corrigés

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2BSM A&B

Résumés des cours

8 Séries d'exercices et problèmes

8 Devoirs libres corrigés

Extraits du bac

Examen blanc corrigé

Astuces pour les concours

2025|2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant