

100%
EXOS

2^{de}

**NOUVEAU
BAC**

Maths

*L'entraînement
intensif!*

300 EXERCICES
progressifs & minutés

50 SUJETS de contrôle

CORRIGÉS détaillés
& commentés

COURS & MÉTHODES



GRATUIT*: des ressources interactives
et des parcours de révision
sur **annabac.com**



100%
EXOS

2^{de}

Maths

Laurent Darré

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée François Magendie (Bordeaux).



Maquette de principe : Frédéric Jély

Mise en pages : Grafatom

Schémas : Grafatom

Édition : Julien Lionnet

Sous réserve des exceptions légales, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite, par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par le Code de la Propriété Intellectuelle. Le CFC est le seul habilité à délivrer des autorisations de reproduction par reprographie, sous réserve en cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion de l'accord de l'auteur ou des ayants droit.

Votre ouvrage 100 % exos

- ▶ Conforme au nouveau programme de Maths 2^{de} entré en vigueur à la rentrée 2019, ce « 100 % exos » vous propose une **méthode de travail** complète et un **entraînement intensif** sur mesure, faisant une large place à la préparation du **nouveau bac**.
- ▶ Pour chaque thème du programme, vous trouverez un **COURS** structuré, les **MÉTHODES** qu'il faut maîtriser, des **EXERCICES** progressifs et leurs **CORRIGÉS** détaillés.
- ▶ Assortis d'**indications de solutions**, de **commentaires** et de **conseils** des auteurs, tous les exercices corrigés vous permettent :
 - de **comprendre** les notions essentielles et de **maîtriser** le cours ;
 - de **progresser** et de vous **entraîner** à votre rythme ;
 - de vous **évaluer** et de **réussir** vos devoirs et contrôles ;
 - de vous **préparer** à l'entrée en Première.

Le site de vos révisions

- ▶ L'achat de cet ouvrage vous permet de bénéficier d'un **ACCÈS GRATUIT*** à toutes les **ressources** d'annabac.com : fiches, quiz, sujets corrigés... et à ses **parcours de révision** personnalisés.
- ▶ Pour profiter de cette offre, rendez-vous sur **www.annabac.com**, dans la rubrique « Je profite de mon avantage client ».



* Selon les conditions précisées sur le site.

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

1 Algorithmique et programmation

COURS & MÉTHODES	7
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances	13
	S'entraîner	17
	Préparer un contrôle	20
	Aller plus loin	22
CORRIGÉS	24

NOMBRES ET CALCULS

2 Ensemble de nombres

COURS & MÉTHODES	37
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances	43
	S'entraîner	46
	Préparer un contrôle	48
	Aller plus loin	50
CORRIGÉS	52

3 Calcul littéral

COURS & MÉTHODES	61
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances	66
	S'entraîner	69
	Préparer un contrôle	74
	Aller plus loin	76
CORRIGÉS	77

FONCTIONS

4 Généralités sur les fonctions

COURS & MÉTHODES	91
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances	97
	S'entraîner	100
	Préparer un contrôle	107
	Aller plus loin	110
CORRIGÉS	112

5 Fonctions de référence

COURS & MÉTHODES	121
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	128
	S'entraîner.....	130
	Préparer un contrôle.....	135
	Aller plus loin.....	137
CORRIGÉS	139

GÉOMÉTRIE

6 Vecteurs

COURS & MÉTHODES	151
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	157
	S'entraîner.....	160
	Préparer un contrôle.....	163
	Aller plus loin.....	165
CORRIGÉS	166

7 Géométrie

COURS & MÉTHODES	177
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	181
	S'entraîner.....	183
	Préparer un contrôle.....	189
	Aller plus loin.....	190
CORRIGÉS	191

8 Équations de droites

COURS & MÉTHODES	205
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	210
	S'entraîner.....	213
	Préparer un contrôle.....	217
	Aller plus loin.....	219
CORRIGÉS	220

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

9 Statistiques

COURS & MÉTHODES	233
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	240
	S'entraîner.....	242
	Préparer un contrôle.....	247
	Aller plus loin.....	249
CORRIGÉS	250

10 Probabilités

COURS & MÉTHODES	261
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	268
	S'entraîner.....	271
	Préparer un contrôle.....	275
	Aller plus loin.....	276
CORRIGÉS	277

Index	287
--------------	-------	-----

1 Algorithmique et programmation

I ALGORITHMIQUE

1. Présentation d'un algorithme

- ▶ Un **algorithme** est une suite d'instructions, compréhensibles par qui doit l'exécuter, ayant pour but de conduire à un résultat donné.
- ▶ Les **variables** sont des objets (nombre entier, nombre réel, texte,...) utilisés au cours de l'algorithme qui prennent une valeur précise à un moment donné.
- ▶ Les **instructions** nécessaires au bon déroulement de l'algorithme peuvent être :
 - les **entrées** et les **sorties** (peu utilisées avec les algorithmes)
 - l'**affectation de variables**, notée avec une flèche ←
 - les **tests**
 - les **boucles**

2. Tests

Si (test) **alors**
(bloc d'instructions)
Fin Si

Si (test) **alors**
(bloc d'instructions)
Sinon
(bloc d'instructions)
Fin Si

Après le mot « Si », le test est formé d'une ou plusieurs conditions de comparaison utilisant les symboles : =, ≠, <, >, ≤, ≥, portant sur les variables de l'algorithme.

3. Boucles

Boucle conditionnelle

Tant que (condition)
(bloc d'instructions)
Fin Tant que

Boucle itérative

Pour (compteur) allant de N_1 à N_2
(bloc d'instructions)
Fin Pour

II PROGRAMMATION EN PYTHON

1. Variables

Les principaux types de variables sont :

int(nombre entier), float(nombre à virgule), str(texte) et bool(booléen ou logique).

EXEMPLE :

```
A = 1
B = 2.5
C = «1»
D = (1+1==2)
```

← A prend la valeur 1, elle est du type int
 ← B prend la valeur 2.5, elle est du type float
 ← C prend la valeur «1», elle est du type str
 ← D prend la valeur True, elle est du type bool

👍 Pour déclarer A comme un réel, tout en initialisant sa valeur à 1, on écrit `A = 1.0`
 Une variable booléenne ne peut prendre que deux valeurs : True et False.

2. Entrée/sortie

► **L'entrée** (ou lecture ou saisie) se fait au moyen de la fonction `input()`.

EXEMPLE :

```
A = input()
A = int(input())
A = int(input(«Saisir un entier»))
```

← Permet de déclarer A comme entier
 ← Une question ou un commentaire guide la saisie

👍 Pour déclarer un nombre à virgule ou un texte, on écrit `float` ou `str` à la place de `int`.

► **La sortie** (ou écriture ou affichage) se fait au moyen de la fonction `print()`.

EXEMPLE :

```
print(A)
print(«Bonjour»)
print(«Bonjour»,A)
```

← Affiche la valeur courante de A
 ← Affiche le texte entre guillemets
 ← Affiche un texte suivi de la valeur de A

3. Tests

Un test ou instruction conditionnelle se fait au moyen du mot « if » et éventuellement du mot « else ».

if (test) : (instructions) (suite du programme)	if (test) : (instructions) else : (instructions) (suite du programme)
--	---

EXEMPLE :

```
A = int(input(« quel est votre âge ? »))
if A < 18 :
    print(« Vous êtes mineur »)
else :
    print(« Vous êtes majeur »)
```

👍 Le mot « Alors » n'est pas utilisé dans Python.
 S'il y a plusieurs cas, on peut utiliser `elif` qui est la contraction de `else` et `if`, pour le « sinon si ».
 Avec un test qui utilise une égalité, on emploie le signe égal doublé : `==`


4. Les boucles

► Boucle conditionnelle (TANT QUE)

```
while (condition):  
    (bloc d'instructions)
```

EXEMPLE :

```
K ← 0  
while K < 4 :  
    K ← K + 1
```

 Veiller à ce que la condition ne soit plus vérifiée à un moment donné, sinon la boucle sera exécutée de façon illimitée.

► Boucle itérative (POUR)

```
for i in range(N1,N2):  
    (bloc d'instructions)
```

EXEMPLES :

range(2,9) donne les entiers de 2 à 8 (et pas de 2 à 9).

range(9) donne les entiers de 0 à 8 (et pas de 0 à 9).

range(2,9,3) donne les entiers de 2 à 8 par sauts de 3, c'est-à-dire 2,5,8.

 La variable i est le compteur. Elle prend les valeurs de N_1 à $N_2 - 1$.

5. Les fonctions


Les **fonctions** permettent de regrouper plusieurs instructions en un seul bloc. Certaines fonctions sont disponibles comme `input()` ou `print()`, d'autres sont utilisables si l'on a importé un module (voir paragraphe 6).

Enfin, on peut créer sa propre fonction avec la syntaxe :

```
def nomdefonction() :
```

EXEMPLE :

```
def cube(n) :  
    return n**3  
(programme)
```

 Dans le programme, `cube(4)` prend la valeur 64.
La double étoile `**` permet de calculer une puissance. Par Exemple, 3^4 se note `3**4`.

Remarque : Voici deux points importants qui concernent **les tests**, **les boucles** et **les fonctions**.

- Les deux points à la fin de la première ligne sont obligatoires.
- Le décalage du bloc d'instructions est très important, ceci s'appelle l'indentation. Il n'y a pas de fin, c'est le retour au niveau antérieur du texte qui signifie cette fin.

6. Les modules

► Un **module** est un fichier contenant des définitions et des fonctions. On utilise essentiellement les modules `math`, `random` et `turtle`.

Exemples de modules d'utilisation fréquente : `math`, `random`, `turtle`

Le module `math` contient, entre autres, la constante `pi`, la fonction racine carrée `sqrt()`, la fonction puissance `pow()`, les fonctions d'arrondis `floor()` et `ceil()` ...

► Pour accéder au contenu d'un module, celui-ci doit être importé.

► Une étoile `*` permet d'importer toutes les fonctions du module.

EXEMPLE : `from random import *`

► On peut aussi importer une fonction en particulier :

EXEMPLE : `from random import randint`



Afin de simuler le lancer d'un dé, on emploie `randint(1,6)` qui renvoie un nombre entier entre 1 et 6.

MÉTHODE 1

Utiliser une boucle POUR dans un algorithme

→ Voir les exos 10 et 24.

Étape 1. Choisir un nom de variable pour le compteur de la boucle.

Prévoir les valeurs que ce compteur doit prendre.

Étape 2. Entre deux lignes qui matérialisent le début et la fin de la boucle, écrire les instructions qui seront répétées autant de fois que cela a été prévu à l'étape 1.

Exo résolu

Calculer les 10 premiers multiples de 7 (de 7×1 à 7×10).

CORRIGÉ

Étape 1. La variable `I` est le compteur de la boucle.

L'instruction « Pour `I` allant de 1 à 10 » permet à la variable `I` de prendre toutes les valeurs entières entre 1 et 10.

Étape 2. Entre le début et la fin de la boucle, on insère une ligne qui permet de calculer un multiple pour chaque valeur du compteur `I`.

```
Pour I allant de 1 à 10
Début de boucle
    M ← 7*I
Fin de boucle
```



Lors de la première boucle, `I` prend la valeur 1, `M` est calculé et vaut 7.
Puis le compteur `I` prend la valeur 2, `M` est calculé et vaut 14.
Ainsi de suite jusqu'au dixième multiple.

MÉTHODE 2

Définir une fonction dans un algorithme

→ Voir les exos 11 et 15.

Étape 1. Choisir un nom pour la fonction, se demander s'il y a un ou des arguments, que l'on écrit entre parenthèses (séparés par des virgules s'il y en a plusieurs).

S'il n'y a pas d'argument, on laisse des parenthèses vides.

Étape 2. Écrire toutes les instructions nécessaires.

Parfois, ces instructions donnent lieu à un résultat que le programme va utiliser.

On utilise le mot "Renvoyer" ou "Retourner".

Exo résolu

Écrire une fonction qui renvoie 1 si la somme de trois nombres écrits en arguments est supérieure ou égale à 12, 0 sinon.

CORRIGÉ

Étape 1 Le nom choisi pour la fonction est : Somme().

En arguments, il y a trois nombres, qu'on nomme par exemple A, B et C.

Étape 2 Un test calcule la somme $A + B + C$ et vérifie si la somme obtenue est supérieure à 12.

La fonction renvoie 1 ou 0 selon les cas.

```
Fonction Somme(A,B,C)
  Si  $A + B + C \geq 12$  alors
    Renvoyer 1
  Sinon
    Renvoyer 0
  Fin Si
```



Les instructions concernées sont décalées pour une meilleure lisibilité.

MÉTHODE 3**Écrire un programme en Python avec des entrées et des sorties**

→ Voir les exos 8, 9, 14, 16 et 21.

Étape 1 Choisir des noms de variables simples et explicites.

Les initialiser si besoin.

Étape 2 Les entrées (saisies) se font avec la fonction `input()`, les sorties (affichages) avec la fonction `print()`.

Étape 3 Vérifier le programme en l'exécutant. S'il y a des saisies, le faire avec des valeurs différentes pour envisager tous les cas.

Exo résolu

Les médecins testent parfois l'adaptation à l'effort avec le test de Ruffier-Dickson.

Tout d'abord, ils prennent le pouls (nombre de battements cardiaques par minute) au repos (P_1). Après 30 flexions, le pouls est à nouveau mesuré (P_2). Il est une dernière fois mesuré après 1 minute de récupération (P_3). L'indice de Ruffier-Dickson se calcule avec la formule :

$$\frac{P_2 - 70 + 2(P_3 - P_1)}{10}$$

Écrire un programme qui calcule l'indice de Ruffier-Dickson à partir des trois mesures.

CORRIGÉ

Étape 1 P_1 , P_2 et P_3 sont des noms de variables possibles pour les trois mesures. Ici, il n'y a pas d'initialisation.

L'indice de Ruffier-Dickson est noté IRD.

Étape 2 La saisie de P_1 , P_2 et P_3 , qui sont des entiers, s'écrit : `int(input())`.

L'affichage de l'indice IRD s'écrit : `print(IRD)`.

Le programme complet s'écrit :

```
P1=int(input("Mesure du pouls au repos ?"))
P2=int(input("Mesure du pouls après 30 flexions ?"))
P3=int(input("Mesure du pouls 1 minute après l'effort ?"))
IRD=(P2-70+2*(P3-P1))/10
print(IRD)
```

Étape 3 Lors de l'exécution, on teste avec $P_1 = 70$, $P_2 = 110$ et $P_3 = 80$. Le programme affiche `IRD = 6.0`.



La flèche ← d'affectation d'une valeur à une variable, que l'on trouve dans les algorithmes, se traduit par =.

Entre les parenthèses de la fonction `input()`, il est recommandé d'écrire, entre guillemets, une question ou un texte qui guide la saisie.

Au niveau médical, plus l'indice est bas, meilleure est l'adaptation à l'effort.

Un indice supérieur à 10 est mauvais, un indice inférieur à 4 est bon.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 VARIABLES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 24

Déterminer les valeurs des différentes variables à la fin de chaque algorithme.

Algorithme 1

```
A ← 8
B ← 5
C ← A + B
A ← 7
B ← C - A
```

Algorithme 2

```
A ← 3
B ← A + 2
A ← A + 1
B ← A + B
```

2 TEST

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 24

Déterminer la valeur de A en sortie d'algorithme dans les deux cas suivants :

- a. $A = 10$
- b. $A = 9$

```
Si A est pair alors
  A ← A/2
Sinon
  A ← 3A+1
Fin Si
```

 Cet algorithme est repris dans un problème complet à l'exercice 18.

3 BILLES


★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 24

Une boîte contient 4 billes rouges, 5 billes vertes et 7 billes bleues.

On tire au hasard une bille et on observe sa couleur.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il simule cette expérience aléatoire.

```
N ← nombre entier aléatoire entre 1 et ...
Si N ≤ 4 alors
  Afficher « la bille est rouge »
Sinon Si N ≤ ... alors
  Afficher « la bille est ... »
Sinon
  Afficher « la bille est ... »
Fin Si
```

 Il y a 16 billes en tout. On tire au hasard un nombre entre 1 et 16.
Si ce nombre est 1,2,3, ou 4, c'est comme si on avait tiré une boule rouge.
S'il est compris entre 5 et 9, c'est une bille verte.
S'il est compris entre 10 et 16, c'est une bille bleue.

4 AVEC DEUX DÉES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 24

On lance deux dés et on observe les nombres obtenus sur les faces supérieures. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie le plus grand nombre obtenu.

La proposition suivante est-elle correcte ?

Corriger l'algorithme si nécessaire.

```
A,B ← nombres entiers aléatoires entre 1 et 6
Si A > B alors
    Afficher A
Sinon
    Afficher B
Fin Si
```

 Tous les cas pour A et B doivent être envisagés.


5 ATTENTION AUX COUPS DE SOLEIL

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 24

L'algorithme ci-dessous donne un conseil d'achat d'une crème solaire selon deux critères : le type de peau T (qui peut prendre la valeur M pour mate, ou C pour claire) et le nombre d'heures d'exposition par jour N.

```
Si (T= «C» et N ≥ 2 ) ou si (T=«M» et N ≥ 4 ) alors
    Afficher « Indice fort »
Sinon
    Afficher « Indice faible »
```

Quel est l'affichage lorsque l'utilisateur saisit T = «M» et N = 3 ?

 T est une variable de type texte, alors que N est une variable de type entier.


6 LA SUITE DE FIBONACCI

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 25

Voici un algorithme :

```
W ← 0
U ← 1
Tant que U < 10
    V ← W
    W ← U
    U ← V + W
Fin Tant que
```

Compléter le tableau suivant avec les valeurs successives des différentes variables :

V							
W	0						
U	1						

7 LES TYPES DE VARIABLES

★ | ⌚ 5 min | ► P. 25

Préciser le type de chaque variable, ainsi que sa valeur.

- 1 $A=8/2$
- 2 $B=8//2$
- 3 $C=\langle\langle 12 \rangle\rangle$
- 4 $D=\langle\langle 3 \rangle\rangle$
- 5 $E=C+D$
- 6 $F=D*B$
- 7 $G=\text{str}(B)$
- 8 $H=\text{int}(\langle\langle 12 \rangle\rangle)$
- 9 $I=(H==B*3)$
- 10 $J=(1+2==C)$



Les principaux types de variables sont : entier, flottant, texte, booléen.

8 IMC

★ | ⌚ 5 min | ► P. 26

Écrire un programme en langage Python qui demande la taille T (en m) et le poids P (en kg) et qui affiche l'IMC (Indice de Masse Corporelle).



L'IMC se calcule avec le quotient du poids en kg par le carré de la taille en m. Quatre lignes sont attendues : une pour saisir la taille, une pour saisir le poids, une pour calculer l'IMC, une pour l'afficher. Voir le cours, paragraphe II.2 et la méthode 3.

9 BONJOUR !

★ | ⌚ 5 min | ► P. 26

Écrire un programme en langage Python qui demande votre nom et votre âge, puis qui affiche un message de bienvenue répétant les données saisies.



Par exemple, si votre nom est Lisa et que vous avez 15 ans, le message sera :
« Bonjour Lisa, vous avez 15 ans. »

Trois lignes sont attendues : une pour saisir le nom, une pour saisir l'âge, une pour afficher le message. Voir le cours, paragraphe II.2 et la méthode 3.

10 LA SOMME DE GAUSS

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 26

a. Que fait l'algorithme suivant ?

```

S ← 0
Pour I de 1 à 100
    S ← S + I
Fin Pour

```



La boucle effectue 100 fois l'instruction $S \leftarrow S + I$.
À chaque fois, la valeur de I change : 1, puis 2, puis 3, et ainsi de suite jusqu'à 100.
Voir la méthode 1.

b. Écrire le programme en langage Python.



La ligne « Pour I de 1 à 100 » s'écrit : « `for I in range(1,101) :` »

11 FONCTION MAX

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 26

a. Compléter l'algorithme suivant avec une fonction qui prend en argument deux nombres réels et qui renvoie le plus grand des deux.

```

Fonction  $max(a, b)$ 
    Si ... alors
        Renvoyer ...
    ...
    Renvoyer ...

```

b. Écrire cette fonction en langage Python.



Les valeurs renvoyées sont a ou b .
Le cas d'égalité sera placé dans la condition du Si.
Voir la méthode 2.

12 LA TORTUE

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 27

Le module graphique turtle permet d'effectuer des dessins.

a. Taper le programme suivant et l'exécuter.

```

from turtle import *
i=0
while i<6:
    forward(100)
    left(60)
    i=i+1

```

b. S'inspirer du programme précédent pour tracer un hexagone régulier.



Ce module ouvre une fenêtre graphique. Les différentes fonctions de ce module permettent de donner des instructions à un curseur (la tortue) dans le but de tracer des figures :

`forward(100)` permet d'avancer de 100 pixels.

`left(90)` permet de tourner à gauche de 90°.

S'ENTRAÎNER

13 TRIANGLE RECTANGLE

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 27

Écrire un algorithme qui permet de saisir dans l'ordre croissant 3 nombres réels strictement positifs A, B et C et qui indique si le triangle de côtés A, B et C est rectangle.



Utiliser le théorème de Pythagore.

14 CELSIUS OU FAHRENHEIT ?

★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 27

Les températures s'expriment en degrés Celsius. Cependant, dans certains pays, on utilise une autre unité, le degré Fahrenheit.

Si T_C est la température en degrés Celsius, la température T_F en degrés Fahrenheit est :

$$T_F = 1,8T_C + 32.$$

a. Exprimer T_C en fonction de T_F .

b. On demande à l'utilisateur de saisir une température et de choisir une conversion. La température convertie est alors calculée.

La variable C peut prendre les valeurs 1 ou 2. Avec la valeur 1, c'est la conversion Celsius → Fahrenheit qui est effectuée. Avec la valeur 2, c'est le contraire.

T1 est la température à convertir, T2 est la température convertie.

Compléter l'algorithme suivant.

Si C = 1 alors	T2 ← ...
Sinon	T2 ← ...



Voir exercice 20 du chapitre 5, page 133.

c. Écrire un programme en langage Python qui permet de faire les deux conversions.



Voir la méthode 3.

15 ÉCOLE DE MUSIQUE

★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 28

Dans une ville, le tarif de l'inscription au conservatoire de musique dépend du revenu des familles. Pour cela, on calcule le quotient familial par la formule :


$$QF = \frac{\text{Revenus mensuels}}{\text{nombre de parts}}$$

Au numérateur, il s'agit des divers revenus de toute la famille. Au dénominateur, le nombre de parts dépend du nombre de personnes dans une famille. Chaque parent compte pour une part, chaque enfant compte pour une demi part pour les deux premiers, pour une part à partir du troisième enfant.

Ensuite, selon le QF obtenu, le tarif est le suivant :

Quotient familial	Tarif annuel
$QF \leq 250$	0
$250 < QF \leq 500$	$0,2(QF - 250)$
$500 < QF \leq 1000$	$0,3(QF - 500) + 50$
$1\,000 < QF \leq 1\,500$	$0,4(QF - 1000) + 200$
$1\,500 < QF \leq 2\,000$	$0,5(QF - 1500) + 400$
$QF > 2000$	650


1. a. Calculer le tarif si une famille composée de deux adultes et de deux enfants dispose d'un revenu global annuel de 27 000 euros.

 Diviser par 12 pour avoir le revenu mensuel.

b. Même question avec une famille composée de deux adultes et de quatre enfants disposant d'un revenu global annuel de 96 000 euros.

2. On souhaite proposer l'algorithme d'un formulaire qui demande à une famille leur composition et leurs revenus, et qui renvoie le tarif qu'ils doivent verser pour l'inscription annuelle à l'école de musique.

a. Écrire une fonction NbParts(P,E) qui renvoie le nombre de parts pour une famille qui contient P parents et E enfants.

 Voir la méthode 2.

b. Écrire une fonction tarif(QF) qui à un tarif donné, renvoie le tarif annuel à payer.

c. Écrire l'algorithme complet.

16 PIEDS ET POUCES

★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 29

Dans certains pays, la taille d'une personne s'exprime en pieds et en pouces. Un pied est égal à 30,48 cm et se subdivise en douze pouces, de sorte qu'un pouce est égal à 2,54 cm.

1. a. Le basketteur LeBron James mesure 6 pieds et 8 pouces.

Quelle est sa taille en cm ?

b. L'actrice Natalie Portman mesure 1,60 m.

Quelle est sa taille en pieds et en pouces ?

2. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il effectue cette conversion.

F ← entier immédiatement inférieur à ...

I ← entier le plus proche de ...



T est la taille (en cm), F est le nombre de pieds, I le nombre de pouces.

F est la partie entière du quotient de T par 30,48.

Ensuite, le nombre de cm restants est à convertir en pouces, en arrondissant à l'entier le plus proche.

3. Écrire le programme correspondant en langage Python.

4. Écrire le programme qui effectue la conversion inverse.



Voir la méthode 3.

17 LE RETOUR DE LA TORTUE



30 min

P. 30

En utilisant le module turtle, écrire trois programmes qui permettent d'obtenir les figures suivantes :

Dix carrés (côté 10, espacement 10)	5 cercles concentriques (rayons 20,40,60,80 et 100)	20 points rouges de taille variable, placés au hasard
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □		



L'exercice 12 doit être étudié auparavant

Pour les trois programmes, on utilise une boucle : voir les méthodes 1 et 3.

10 carrés : Les fonctions `up()` et `down()` permettent de se déplacer sans tracer.

5 cercles : La fonction `circle(20)` trace un cercle de rayon 20.

20 points : La taille du point et son placement sont aléatoires.

On utilise la fonction `randint()` du module `random` : voir cours, paragraphe III.6.

La fonction `dot()` trace un point ; par exemple, `dot(5, «red»)` trace un point rouge de taille 5.

Pour le placement du point, utiliser la fonction `goto()`.

Par exemple, `goto(100,200)` permet d'aller au point de coordonnées (100,200).

Le centre de l'écran a pour coordonnées (0,0) et la fenêtre est automatiquement centrée.

18 PROBLÈME DE COLLATZ

★★ | ⌚ 60 min | ▶ P. 31

À partir d'un nombre N entier strictement positif, on en calcule un autre de la manière suivante :

S'il est pair, on le divise par 2. S'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. Puis on recommence jusqu'à ce que l'on obtienne 1.

L'ensemble des nombres calculés est le vol de N .

Le nombre d'éléments de la liste ainsi constituée est le temps de vol de N .

L'altitude maximale du vol de N est le plus grand nombre de cette liste.

1. Donner le vol de 11, puis le temps de vol de 11 ainsi que l'altitude maximale du vol de 11.
2. Écrire un algorithme qui, à partir d'un entier N , calcule les différents nombres du vol de N .
3. a. Programmer en langage Python cet algorithme. Tester avec 23, 11 et 127.



Lorsque a et b sont des nombres entiers, $a\%b$ renvoie le reste dans la division euclidienne de a par b . Ainsi, $a\%2$ renvoie 0 lorsque a est pair et 1 lorsqu'il est impair.

- b. Ajouter les instructions nécessaires pour calculer et afficher le temps de vol.
- c. Compléter le programme pour qu'il affiche aussi l'altitude maximale du vol.

PRÉPARER UN CONTRÔLE**19** QCM

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 32

Les questions sont indépendantes.

À chaque question, une seule réponse est correcte.

Partie A : questions concernant les algorithmes

1. L'affectation de variable se note avec :

a. \rightarrow	b. \Leftrightarrow	c. \leftarrow	d. $=$
------------------	----------------------	-----------------	--------
2. Quel est l'intrus ?

a. Entrée	b. Affichage	c. Saisie	d. Lecture
-----------	--------------	-----------	------------
3. L'instruction de la forme « Si ... Alors ... » est :

a. une boucle conditionnelle	b. une boucle itérative
c. un test	d. une affectation de variable

Partie B : questions concernant le langage Python

1. Pour tester si un nombre A est pair, on écrit :

a. <code>if A%2==0</code>	b. <code>if A//2==0</code> :
c. <code>if A%2=0</code> :	d. <code>if A%2==0</code> :

2. Pour incrémenter une variable N d'une unité, on écrit :

- a. $N == N+1$ b. $N=N+1:$ c. $N=N+1$ d. $N\leftarrow N+1$

3. Pour définir une fonction nommée MATHS qui n'a aucun argument, on écrit :

- a. `def MATHS() :` b. `def MATHS :` c. `def MATHS()` d. `MATHS()` :

20 VALEURS DE VARIABLES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 33

Déterminer les valeurs des différentes variables à la fin de chaque algorithme.

Algorithme 1

```
A ← 2
B ← 5
A ← A + 1
B ← 2B
C ← A + B
```

Algorithme 2

```
N ← 1
Tant que N ≤ 8
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

21 DIVISION EUCLIDIENNE

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 33

a. Écrire la division euclidienne de 72 par 10.

b. Soit N un nombre entier à deux chiffres.

Compléter le texte suivant :

Le chiffre des dizaines de N est le quotient de la division euclidienne de ... par ...

Le chiffre des unités de N est le reste de la division euclidienne de ... par ...

c. Écrire un programme en langage Python qui demande un nombre N à deux chiffres et qui affiche le chiffre des dizaines et le chiffre des unités.

Par exemple, si l'utilisateur saisit $N = 72$, le programme affiche 7 et 2.



La division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$.
Le reste r s'obtient avec $a \% b$. Le quotient q s'obtient avec $a // b$.

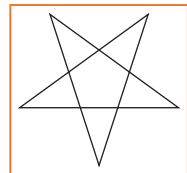
22 NUIT ÉTOILÉE

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 33

À l'aide du module turtle dans Python, on souhaite dessiner une fenêtre avec un fond bleu nuit et des étoiles blanches placées aléatoirement.

a. Que signifient ces deux lignes placées en haut du programme ?

```
from turtle import *
from random import randint
```



b. Écrire une fonction `star(L)` qui trace une étoile à 5 branches dont chaque côté est de longueur L .



S'inspirer des exercices 12 et 17.
L'angle fait par deux branches consécutives est de 36° .

- c. Le programme ci-dessous trace 50 étoiles blanches sur un fond bleu nuit. Le côté de chaque étoile est tiré au hasard entre 2 et 25. La position de l'étoile est tirée au hasard dans la fenêtre. La fonction star (L) demandée à la question précédente n'est pas écrite ci-dessous. Compléter le programme.

```

from turtle import *
from random import randint
setup(800,600) # ouvre une fenêtre de largeur 800 et de hauteur 600
bgcolor(«darkblue») # fond bleu nuit
speed(0) # vitesse de tracé la plus rapide
color("white") # couleur des étoiles
for ..... # Boucle pour tracer 50 étoiles
    X=randint(-400,400)
    Y=randint(.....)
    up()
    goto(X,Y) # Le curseur se déplace à une position aléatoire
    down()
    L=randint(.....) # choix au hasard d'une taille pour l'étoile
    star(L) # tracé de l'étoile
hideturtle()

```



La fonction setup(A,B) ouvre une fenêtre centrée sur l'écran, de tailles A et B. L'origine du repère est le centre de l'écran.

ALLER PLUS LOIN

23 REMBOURSEMENT D'UN EMPRUNT

★★★

🕒 45 min

▶ P. 34

Un particulier emprunte une somme S à un organisme bancaire, au taux mensuel de 0,4 %. Il rembourse à la banque chaque mois une somme appelée mensualité M .

L'objectif est de déterminer combien de mois sont nécessaires pour rembourser cette somme et calculer le coût du crédit (la somme totale payée à la banque, intérêts inclus).

- a. Un particulier emprunte $S = 100\,000$ euros et rembourse chaque mois une mensualité $M = 1\,000$ euros.

Combien doit-il à la banque après le premier mois ?



Appliquer un taux de 0,4% à une quantité revient à la multiplier par 1,004.

b. Compléter l'algorithme suivant qui permet de déterminer le nombre de mois nécessaires pour rembourser l'emprunt.

```
N ← 0
Tant que ...
    N ← N + 1
    S ← ...
Fin Tant que
```



N est la variable qui représente le nombre de mois.
À la fin du 1^{er} mois, N = 1, et ainsi de suite.

- c. Ajouter les instructions permettant d'afficher la dernière mensualité
- d. Ajouter les instructions permettant de calculer le coût du crédit.
- e. Convertir l'algorithme dans le langage Python.
- f. Exécuter le programme avec S = 100 000 euros et M = 1 000 euros.

24 NOMBRE DE LANCERS

★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 35

On souhaite estimer le nombre de lancers nécessaires pour faire apparaître toutes les faces d'un dé à six faces, bien équilibré.

Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
A, B, C, D, E, F ← 0
N ← 0
Tant que ABCDEF = 0
    Z ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
    Si Z = 1 alors A ← 1
    Si Z = 2 alors B ← 1
    Si Z = 3 alors C ← 1
    Si Z = 4 alors D ← 1
    Si Z = 5 alors E ← 1
    Si Z = 6 alors F ← 1
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

- a. Expliquer le fonctionnement de cet algorithme
- b. Modifier cet algorithme pour qu'il simule 1 000 fois l'expérience qui consiste à compter le nombre de lancers nécessaires pour que toutes les faces soient sorties une fois, et qui calcule ensuite le nombre moyen de lancers nécessaires.
- c. Programmer l'algorithme en langage Python.



Écrire sur la première ligne du programme :

```
from random import randint
```

Cela permet d'utiliser par la suite la fonction `randint(1,6)` qui choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 6.

CORRIGÉS

1 VARIABLES

Algorithme 1. En sortie d'algorithme, A vaut 7, B vaut 6 et C vaut 13.

Algorithme 2. En sortie d'algorithme, A vaut 4 et B vaut 9.

2 TEST

a. Si $A = 10$ (nombre pair), alors l'instruction $A \leftarrow A/2$ est exécutée.
La valeur de A en fin d'algorithme est donc 5.

b. Si $A = 9$ (nombre impair), alors l'instruction $A \leftarrow 3A + 1$ est exécutée.
La valeur de A en fin d'algorithme est donc 28.

3 BILLES

Voici l'algorithme complété :

```
N ← nombre entier aléatoire entre 1 et 16
Si N ≤ 4 alors
    Afficher « la bille est rouge »
Sinon Si N ≤ 9 alors
    Afficher « la bille est verte »
Sinon
    Afficher « la bille est bleue »
Fin Si
```

4 AVEC DEUX DÉS

L'algorithme proposé est incomplet car il n'envisage pas le cas d'égalité.


Voici une solution :


```
A, B ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
Si A > B alors
    Afficher A
Sinon Si A = B alors
    Afficher « égalité »
Sinon
    Afficher B
Fin Si
```

5 ATTENTION AUX COUPS DE SOLEIL

L'affichage est « **Indice faible** ».

6 LA SUITE DE FIBONACCI

V		0	1	1	2	3	5
W	0	1	1	2	3	5	8
U	1	1	2	3	5	8	13

 Dans une boucle du type « Tant que », la condition (ici, $U < 10$) doit être vérifiée au début. Il faut s'assurer que les instructions permettent que cette condition ne soit plus vérifiée à un moment donné, sinon, le programme boucle indéfiniment.


7 LES TYPES DE VARIABLES

La variable A est de **type flottant**.

Sa valeur est **4.0**


La variable B est de **type entier**.

Sa valeur est **4**.

 La division entière // est le quotient de la division euclidienne.
Par exemple, $17//3=5$.


Les variables C et D sont du **type texte** (ou chaîne de caractères).

Leurs valeurs sont « **12** » et « **3** ».

 Il ne faut donc pas confondre $X=8$ et $Y=«8»$: X est du type entier et Y du type texte.

La variable E est donc du **type texte** et prend la valeur «**123**».

La variable F est aussi du **type texte** et prend la valeur «**3333**».

 L'addition de deux chaînes de caractères est possible, elles sont écrites l'une derrière l'autre. De même, on peut multiplier une variable de type texte par un entier. Mais il n'est pas possible d'additionner une variable de type texte avec une variable de type entier : le calcul de $B + C$ conduirait à une erreur d'exécution du programme.


La variable G est du **type texte**, sa valeur est «**4**».

La variable H est du **type entier**, sa valeur est «**12**».

 La fonction str permet de convertir une variable en un type texte.
La fonction int permet de convertir une variable en un type entier.

La variable I est **booléenne**, sa valeur est **True**.

La variable J est **booléenne**, sa valeur est **False**.

 Une variable booléenne ne peut prendre que deux valeurs : True ou False.
L'égalité $H==B*3$ est vraie alors que l'égalité $1+2==C$ est fausse.

8 IMC

```
T=float(input(«Quelle est votre taille ? (en m)»))
P=float(input(«Quel est votre poids ? (en kg)»))
IMC=P/T**2
print(round(IMC,2))
```

- 👍 La fonction `float()` permet de déclarer `T` et `P` comme des variables réelles. La double étoile permet d'écrire les puissances. Ainsi, 10^{**3} est le cube de 10. La fonction `round(A, n)` arrondit le nombre `A` avec `n` décimales. L'IMC est un indice validé par l'OMS (Organisation Mondiale de la Santé). À l'âge adulte, l'OMS préconise de conserver un IMC compris entre 18,5 et 25.

9 BONJOUR !

```
nom=str(input(«Votre prénom ?»))
age=int(input(«Votre âge ?»))
print(«Bonjour»,nom,«vous avez»âge,«ans»)
```

- 👍 La fonction `str()` permet d'utiliser une variable de type texte, `int()` une variable de type nombre entier. La fonction `print()` affiche le texte entre «», alors que les variables sont remplacées par leur valeur.

10 LA SOMME DE GAUSS

a. Les valeurs successives des variables `I` et `S` sont :

I	1	2	3	4	...	100
S	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	...	1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100

La somme calculée est la somme des entiers de 1 à 100. Cette somme vaut 5 050.

- 👍 Dans le tableau, les additions ne sont pas calculées pour mieux visualiser les opérations effectuées.

b.

```
S=0
for I in range(1,101):
    S=S+I
print(S)
```

- 👍 `range(1,101)` est l'ensemble des entiers de 1 à 100.

11 FONCTION MAX

a. Voici l'algorithme complété :

```
Fonction max(a, b)
    Si  $a \geq b$  alors
        Renvoyer a
    Sinon
        Renvoyer b
```

b.

```
def max(a,b):
    if a>=b:
        return a
    else:
        return b
```

12 LA TORTUEa. Ce programme trace **un carré**.

Les instructions « avancer de 100 pixels, se tourner de 90° vers la gauche » sont exécutées quatre fois de suite grâce à la boucle while.

La fonction left() permet de tourner le curseur dans une direction, sans avancer.

b. Pour obtenir un hexagone régulier :

```
from turtle import *
i=0
while i<6:
    forward(100)
    left(60)
    i=i+1
```



Cette fois, la boucle est effectuée six fois et l'angle est 60°.

13 TRIANGLE RECTANGLE

Les nombres A, B et C doivent être saisis dans l'ordre croissant.

```
Si C2 = A2 + B2 alors
    Afficher « le triangle est rectangle »
Sinon
    Afficher « le triangle n'est pas rectangle »
```



Comme les nombres sont saisis dans l'ordre croissant, C est le plus grand côté. L'égalité de Pythagore à tester est donc $C^2 = A^2 + B^2$.

14 CELSIUS OU FAHRENHEIT ?

a.
$$T_C = \frac{T_F - 32}{1,8}$$

b.

```
Si C = 1 alors
    T2 ← 1,8T1 + 32
Sinon
    T2 ← (T1 - 32) / 1.8
```

c.

```

T1=float(input(«température à convertir ?»))
print(«1. Celsius --> Fahrenheit»)
print(«2. Fahrenheit --> Celsius»)
choix=int(input(«Choisissez 1 ou 2 selon la conversion voulue»))
if choix==1:
    T2=1.8*T1+32
else:
    T2=(T1-32)/1.8
print(«température convertie :»,T2)

```



La double égalité == est la réelle égalité mathématique.

La simple égalité = n'est pas l'égalité mathématique, c'est la façon d'affecter une valeur à une variable.

15 ÉCOLE DE MUSIQUE

1. a. Le nombre de parts pour cette famille est 3 (2 adultes qui comptent chacun pour une part, et les deux premiers enfants qui comptent pour 0,5 part chacun).

Leur quotient familial est $\frac{27\ 000}{3 \times 12} = 750$.

On utilise la formule qui correspond à ce quotient familial :

$$0,3(750 - 500) + 50 = 125.$$

Le tarif annuel à payer par cette famille est **125 euros**.

b. Cette famille peut compter 5 parts (les 3^{ème} et 4^{ème} enfants comptent pour une part chacun).

Leur quotient familial est $\frac{96\ 000}{5 \times 12} = 1\ 600$.

On utilise la formule qui correspond à ce quotient familial :

$$0,5(1600 - 1500) + 400 = 450.$$

Le tarif annuel à payer par cette famille est **450 euros**.

2. a.

<p>Fonction NbParts(P,E)</p> <p>Si $E \leq 2$</p> <p style="padding-left: 20px;">Renvoyer $P + 0,5E$</p> <p>Sinon</p> <p style="padding-left: 20px;">Renvoyer $P + E - 1$</p>
--



Sinon concerne les familles avec au moins trois enfants. Dans ce cas, on ajoute une part pour chaque parent et pour chaque enfant ($P + E$) mais on enlève 1 car les deux premiers enfants ne comptent que pour 0,5 part chacun.

b.

```

Fonction Tarif(QF)
Si QF ≤ 250
    Renvoyer 0
Sinon Si QF ≤ 500
    Renvoyer 0,2(QF-250)
Sinon Si ...
    ...
Sinon
    Renvoyer 650

```


 Certains cas n'ont pas été écrits, ils sont similaires au premier.

c.

```

Fonctions :
    NbParts(P,E)
    Tarif(QF)
QF prend la valeur R/NbParts(P,E)
Tarif(QF)

```

 R est le revenu mensuel (s'il est annuel, on prévoit une division par 12 dans le calcul de QF).

16 PIEDS ET POUCES

1. a. $6 \times 30,48 + 8 \times 2,54 \approx 203,2$. **LeBron James mesure environ 2,03 m.**

b. $\frac{160}{30,48} \approx 5,25$. La partie entière est 5, c'est le nombre de pieds à prendre en compte. Le nombre de cm restants est $160 - 30,48 \times 5 \approx 7,6$.

$$\frac{7,6}{2,54} \approx 3.$$

Natalie Portman mesure environ 5 pieds et 3 pouces.

2.

```

F ← entier immédiatement inférieur à  $\frac{T}{30,48}$ 
I ← entier le plus proche de  $\frac{T - 30,48F}{2,54}$ 

```

3.

```

T=int(input(«saisir votre taille en cm : »))
F=int(T/30.48)
I=round((T-30.48*F)/2.54,0)
print(«Votre taille est :»,F,«pieds et»,I,«pouces.»)

```

4.

```
F=int(input(«saisir le nombre de pieds : »))
I=int(input(«saisir le nombre de pouces : »))
T=round(30.48*F+2.54*I,0)
print(«Votre taille est :»,T,«cm.»)
```

17 LE RETOUR DE LA TORTUE

Dix carrés	5 cercles concentriques
<pre>from turtle import * def square(): i=0 while i<4: forward(10) left(90) i=i+1 for j in range(10): square() up() forward(20) down()</pre>	<pre>from turtle import * rayon=20 for i in range(5): up() right(90) forward(20) left(90) down() circle(rayon) rayon=rayon+20</pre>



Problème des 10 carrés

La fonction square() n'a pas d'argument, elle s'écrit avec des parenthèses vides. Elle a pour but de tracer un carré. Dans la boucle effectuée 10 fois, elle est appelée puis on se déplace de 20 pixels sans tracer pour se préparer au carré suivant.

Problème des 5 cercles

Une boucle est effectuée 5 fois. Le lecteur pourra tester le programme sans les 5 premières lignes de la boucle

20 points rouges

```
from turtle import *
from random import randint
setup(600,400) # fixe la taille de la fenêtre
for i in range(20):
    taille=randint(5,20)
    X=randint(-280,280) # tirage au sort des coordonnées
    Y=randint(-180,180) # 180 ou 280 pour ne pas être sur le bord de la fenêtre
    up()
    goto(X,Y)
    down()
    dot(taille,«red»)
```



Seule la fonction randint() du module random est importée.

Elle permet de tirer au sort un entier entre deux bornes à préciser en argument. La variable taille prend des valeurs entières entre 5 et 20.

Les dimensions de la fenêtre étant 600 par 400, les abscisses vont de -300 à 300, les ordonnées de -200 à 200.

On tire au sort des coordonnées X et Y pour chaque point rouge.

On se déplace sans tracer jusqu'à ce point et on utilise la fonction dot().

18 PROBLÈME DE COLLATZ

1. Le vol de 11 est : 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Le temps de vol de 11 est 14.

L'altitude maximale du vol de 11 est 52.

2.

```

U ← N
Tant que U est différent de 1
    Si U est pair alors
        U prend la valeur U/2
    Sinon
        U ← 3U + 1
    Afficher U
Fin Tant que
  
```

3. a.

```

N=int(input(«Valeur de N ?»))
while N!=1:
    if N%2==0:
        N=N//2
    else:
        N=3*N+1
    print(N)
  
```



N != 1 signifie N différent de 1.

If N%2==0 : signifie « Si N est pair »

La division par 2 est écrite ici avec //. La division N/2 est possible, mais donnerait des nombres réels comme 34.0.

Pour éviter cela, on utilise la division entière N//2.

b.

```

N=int(input(«Valeur de N ?»))
tempsdevol=0
while N!=1:
    if N%2==0:
        N=N//2
    else:
        N=3*N+1
    print(N)
    tempsdevol=tempsdevol+1
print(«Temps de vol :»,tempsdevol)
  
```



La variable tempsdevol est un compteur, initialisé à 0 avant la boucle.

Il est incrémenté d'une unité à chaque passage dans la boucle while.

c.

```

N=int(input(«Valeur de N ?»))
tempsdevol=0
altitudemax=N
while N!=1:
    if N%2==0:
        N=N//2
    else:
        N=3*N+1
    print(N)
    if N>altitudemax:
        altitudemax=N
    tempsdevol=tempsdevol+1
print(«Temps de vol :»,tempsdevol)
print(«Altitude maximale :»,altitudemax)

```



Une variable `altitudemax` stocke le maximum en cours. Elle est initialisée à la valeur `N`. À chaque nouvelle valeur de `N` calculée, on teste pour savoir si cette valeur devient la nouvelle altitude maximale.

Ce problème est dû au mathématicien allemand Lothar Collatz. Le fait que l'on obtienne toujours 1 au bout d'un certain nombre d'étapes de calcul n'a encore jamais été démontré.

19 QCM

Partie A.

1. Réponse c. ←

Par exemple, si une variable `A` prend la valeur 2, on note dans un algorithme $A \leftarrow 2$. La même instruction dans un programme Python s'écrit `A = 2`.

2. Réponse b. Affichage

Entrée, lecture et saisie sont synonymes.

On désigne par l'un de ces mots une instruction permettant à l'utilisateur de donner une information qui sera utilisée dans l'algorithme.

De même :

Sortie, écriture et affichage (affichage est donc l'intrus) sont synonymes.

On désigne par l'un de ces mots une instruction permettant à l'utilisateur de visualiser une information.

3. Réponse c. un test

Une boucle conditionnelle est une structure « Tant que ... ».

Une boucle itérative est une structure « Pour ... ».

Une affectation de variable consiste à modifier la valeur d'une variable.

Partie B.

1. Réponse d. `if A%2==0` :

Dans la réponse **a**, le `:` est oublié à la fin de la ligne.

Dans la réponse **b**, `//` donne le quotient de la division euclidienne, et non le reste.

Dans la réponse **c**, il manque un signe `=`.

2. Réponse c. $N=N+1$

Il s'agit d'une affectation de variable, il n'y a qu'un seul signe = et pas de : à la fin de la ligne.

3. Réponse a. def MATHS() :

Dans la réponse **b**, il manque les parenthèses vides.

Dans la réponse **c**, il manque : à la fin de la ligne.

Dans la réponse **d**, il manque def au début.

20 VALEURS DE VARIABLES

Algorithme 1. En sortie d'algorithme, C vaut **13**.

Algorithme 2. En sortie d'algorithme, N vaut **9**.



La variable N est initialisée à 1, ce qui permet d'effectuer une première boucle.

La valeur est augmentée d'une unité à chaque fois.

Quand N vaut 8, on effectue une dernière boucle ce qui donne à N la valeur 9.

21 DIVISION EUCLIDIENNE

a. $72 = 7 \times 10 + 2$.

Le quotient est 7, le reste est 2.

b. Le chiffre des dizaines de N est le quotient de la division euclidienne de N par 10.

Le chiffre des unités de N est le reste de la division euclidienne de N par 10.

c.

```
N=int(input("Saisir un entier N :"))
D=N//10
U=N%10
print(D,U,sep=" ; ")
```



Dans la fonction print(), sep indique le séparateur que l'on souhaite pour l'affichage. Ici, D et U sont séparés par un point-virgule.

22 NUIT ÉTOILÉE

a. Ces deux lignes permettent d'importer deux modules.

La première importe le module turtle. L'étoile signifie que toutes les fonctions de ce module sont disponibles.

Le seconde importe la fonction randint du module random.

b.

```
def star(L):
    i=0
    while i<5:
        forward(L)
        left(144)
        i=i+1
    hideturtle()
```



Voir le tracé d'un carré ou d'un hexagone à l'exercice 12.

Après avoir tracé un côté, on tourne le curseur d'un angle de mesure 144° ($180 - 36 = 144$).

La fonction `hideturtle()` cache le curseur. Elle est facultative.

c. Voici le programme complété, avec la fonction de la question 2 :

```

from turtle import *
from random import randint

def star(L):
    i=0
    while i<5:
        forward(L)
        left(144)
        i=i+1
        hideturtle()
# fonction qui trace une étoile à 5 branches de côté L

setup(800,600)
bgcolor(«darkblue»)
speed(0)
color(«white»)
# ouvre une fenêtre de largeur 800 et de hauteur 600
# fond bleu nuit
# vitesse de tracé la plus rapide
# couleur des étoiles

for i in range(50):
    X=randint(-400,400)
    Y=randint(-300,300)
    up()
    goto(X,Y)
    down()
    L=randint(2,25)
    star(L)
    hideturtle()
# Boucle pour tracer 50 étoiles
# Le curseur se déplace à une position aléatoire
# choix au hasard d'une taille pour l'étoile
# tracé de l'étoile

```

23 REMBOURSEMENT D'UN EMPRUNT

a. Après l'application du taux mensuel, le particulier doit 100 400 euros puisque $100\,000 \times 1,004 = 100\,400$.

Après remboursement de sa première mensualité, il doit encore 99 400 euros.

b.

Tant que $S > 0$
 $S \leftarrow 1,004S - M$

c. La dernière valeur calculée de S est négative. Pour retrouver l'avant-dernière valeur de S, qui est la dernière mensualité à payer, on ajoute M.

En sortie d'algorithme, on ajoute : **Afficher** $S + M$.

d. La somme totale remboursée à la banque se compte en ajoutant $N - 1$ mensualités de M euros et la dernière mensualité :

$$(N - 1) * M + M + S = NM + S$$

En sortie d'algorithme, on ajoute : **Afficher** $MN + S$.

e.

```

S=float(input(«Capital emprunté ? »))
M=float(input(«Mensualité ? »))
N=0
while S>0:
    N=N+1
    S=1.004*S-M
print(«Nombre de mensualités :»,N)
print(«Dernière mensualité :»,S+M)
print(«Somme totale à rembourser :»,M*N+S)

```

f. On obtient les affichages suivants :

Nombre de mensualités : **128**Dernière mensualité : **961,72**Somme totale remboursée à la banque : **127 961,72**

Le particulier a emprunté 100 000 euros à la banque et leur a remboursé 127 961,72 euros, au cours de 128 mois, soit environ 11 ans.
Le coût du crédit (les intérêts) est environ de 28 000 euros.

24 NOMBRE DE LANCERS

a. Les six variables A, B, C, D, E et F représentent les 6 faces du dé.

À chaque fois qu'une face apparaît, la variable correspondante prend la valeur 1. Tant que les faces ne sont pas toutes apparues au moins une fois, le produit ABCDEF vaut 0. Dès que c'est le cas, ce produit n'est plus nul et l'expérience est terminée.

La variable N compte le nombre de boucles nécessaires, c'est-à-dire le nombre de lancers nécessaires pour que toutes les faces apparaissent au moins une fois.

b.

```

N ← 0
Pour I de 1 à 1000
    A, B, C, D, E, F ← 0
    Tant que ABCDEF = 0
        Z ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
        Si Z = 1 alors A ← 1
        Si Z = 2 alors B ← 1
        Si Z = 3 alors C ← 1
        Si Z = 4 alors D ← 1
        Si Z = 5 alors E ← 1
        Si Z = 6 alors F ← 1
        N ← N + 1
    Fin Tant que
Fin Pour
Afficher N/1000

```



À chaque simulation, les variables A, B, C, D, E et F sont réinitialisées à 0. Le nombre de lancers N est cumulé lors des 1000 simulations. En sortie d'algorithme, une division par 1000 permet de calculer la moyenne.

c. Voici le programme en langage Python :

```

from random import randint
N=0
for i in range(1000):
    A,B,C,D,E,F=0,0,0,0,0,0
    while A*B*C*D*E*F==0:
        Z=randint(1,6)
        if Z==1:
            A=1
        elif Z==2:
            B=1
        elif Z==3:
            C=1
        elif Z==4:
            D=1
        elif Z==5:
            E=1
        else:
            F=1
        N=N+1
print(N/1000)

```



La quatrième ligne est une façon d'attribuer des valeurs à plusieurs variables. L'exécution du programme donne environ 14,7. C'est le nombre moyen de lancers d'un dé pour obtenir toutes les faces au moins une fois.

2 Ensembles de nombres

I INTERVALLES DE \mathbb{R}

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

1. Intervalle fermé et borné

L'ensemble de tous les nombres réels tels que $a \leq x \leq b$ est l'**intervalle** $[a; b]$



Un intervalle est un ensemble infini de nombres réels.

Ne pas confondre l'intervalle $[a; b]$ et l'ensemble $\{a; b\}$ formé des seuls éléments a et b .

2. Autres types d'intervalles

	Intervalles	Remarques	Représentation graphique	Ensemble des réels x tels que :
Intervalles bornés	$[a; b]$	Intervalle fermé		$a \leq x \leq b$
	$]a; b[$	Intervalle ouvert		$a < x < b$
	$[a; b[$	Intervalle fermé en a , ouvert en b		$a \leq x < b$
	$]a; b]$	Intervalle ouvert en a , fermé en b		$a < x \leq b$
Intervalles non bornés	$[a; +\infty[$	Avec $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert.		$x \geq a$
	$]a; +\infty[$			$x > a$
	$] -\infty; b]$			$x \leq b$
	$] -\infty; b[$			$x < b$
	$] -\infty; +\infty[$			$x \in \mathbb{R}$



Pour désigner un ensemble formé de réels appartenant à deux intervalles disjoints, on utilise le symbole de réunion \cup . Ainsi, $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ est l'ensemble des réels inférieurs à -1 ou supérieurs à 1 .

II VALEUR ABSOLUE

1. Valeur absolue d'un nombre réel

DÉFINITION : Soit a un nombre réel.

La **valeur absolue** de a , notée $|a|$, est la distance entre le réel a et 0.

Ainsi, $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

EXEMPLES : $|13| = 13$ et $|-7| = 7$

DÉFINITION : La **distance** entre les deux nombres réels a et b est $|a - b|$.

L'ordre des nombres n'a pas d'importance : $|a - b| = |b - a|$.

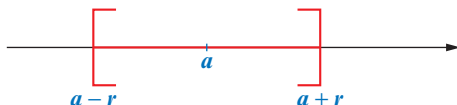
EXEMPLE : Soit x un nombre réel tel que $|x - 3| = 5$.

La distance entre x et 3 est égale à 5, donc $x = 8$ ou $x = -2$.

2. Intervalle centré

L'intervalle $[a - r; a + r]$ est **centré** en a , de **rayon** r .

Cet intervalle est l'ensemble des nombres réels tels que $|x - a| \leq r$.



EXEMPLE : L'ensemble des nombres réels tels que $|x - 18| \leq 12$ est l'intervalle $[18 - 12; 18 + 12]$ soit $[6; 30]$. C'est un intervalle centré en 18, de rayon 12.

III DÉCIMAUX ET RATIONNELS

1. Nombres décimaux

DÉFINITION : Un nombre a est **décimal** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a = \frac{k}{10^n}.$$

EXEMPLE : 12,3456 est décimal car il s'écrit $\frac{123456}{10^4}$.



Un nombre est décimal si, et seulement si, il a un nombre fini de décimales.

PROPRIÉTÉ :

Tout nombre réel peut être encadré par deux nombres décimaux à 10^{-n} près.

EXEMPLE :

$20\sqrt{3} \approx 34,641$, donc :

$34,64 < 20\sqrt{3} < 34,65$ est un encadrement de $20\sqrt{3}$ à 10^{-2} près.

$34,6 < 20\sqrt{3} < 34,7$ est un encadrement de $20\sqrt{3}$ à 10^{-1} près.

2. Nombres rationnels

DÉFINITION :

Un nombre a est **rationnel** s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a = \frac{p}{q}$.



Si p et q n'ont pas de diviseur commun, la fraction est dite irréductible.

Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

EXEMPLE : Les nombres $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Un nombre rationnel qui n'est pas décimal a un nombre infini de décimales.

EXEMPLE :

$\frac{1}{3} \approx 0,333\dots$ est un nombre rationnel, mais n'est pas décimal.

Remarque : Tout nombre décimal est rationnel.



Voir l'exercice 17 pour la démonstration.

III ARITHMETIQUE DES ENTIERS

1. Multiples et diviseurs

L'ensemble des entiers naturels est noté \mathbb{N} .

L'ensemble des entiers relatifs est noté \mathbb{Z} .

DÉFINITION :

Soit a et b deux nombres entiers relatifs.

On dit que b **est un multiple de** a (ou a est un diviseur de b), s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

EXEMPLE : 18 est un multiple de 3.

On dit aussi que 3 est un diviseur de 18, ou encore que 3 divise 18.

Les diviseurs dans \mathbb{Z} de 18 sont : $-18 ; -9 ; -6 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18$.

DÉFINITIONS :

Un nombre entier relatif n est **pair** s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.

Un nombre entier relatif n est **impair** s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$.

2. Nombres premiers

► Un entier naturel est **premier** s'il a exactement deux diviseurs dans \mathbb{N} : 1 et lui-même.



Pour la notion de nombre premier, seuls les diviseurs positifs sont envisagés.

EXEMPLES :

0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs.

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

2 est premier et c'est le seul nombre pair qui soit premier.

11 est premier car il n'a que deux diviseurs : 1 et 11.

12 n'est pas premier car il a d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 2 ; 3 ; 4 et 6.

► Liste des nombres premiers inférieurs à 30 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

MÉTHODE 1

Résoudre une équation du type $|x - a| = b$, où $b > 0$

→ Voir les exos 4, 5 et 23.

Étape 1. Traduire $|x - a|$ par la distance entre x et a .

Étape 2. Calculer les deux solutions qui sont $a + b$ et $a - b$.

Ces deux solutions sont les nombres situés à une distance a du nombre x .

Exo résolu

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $|x - 6| = 19$.

CORRIGÉ

Étape 1. $|x - 6| = 19$ signifie que la distance entre x et 6 est égale à 19.

Étape 2. Les deux solutions sont : $x = 6 + 19 = 25$ et $x = 6 - 19 = -13$.



Dans le cas d'une équation de la forme $|x + a| = b$, commencer par écrire $|x + a| = |x - (-a)|$.

MÉTHODE 2

Donner un encadrement d'un nombre réel

→ Voir les exos 9 et 26.

L'objectif est d'écrire un encadrement d'un nombre réel à 10^{-n} ($n \in \mathbb{N}$).

Étape 1. Afficher l'écriture décimale du nombre à encadrer sur l'écran de la calculatrice.

Étape 2. Écrire un encadrement avec n décimales.

Exo résolu

Donner un encadrement de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-3} près.

CORRIGÉ

Étape 1. La calculatrice affiche 1,644934067

Étape 2. $1,644 < \frac{\pi^2}{6} < 1,645$.



Une valeur approchée à 10^{-3} près est 1,645 car la quatrième décimale est un 9.
 Une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut est 1,644.
 Une valeur approchée à 10^{-3} près par excès est 1,645.

MÉTHODE 3

Démontrer avec des nombres pairs ou impairs

→ Voir les exos 12, 16, 19, 22 et 25.

Étape 1. Traduire l'hypothèse par une égalité. Si un nombre n est pair, on dit qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$.

Si un nombre n est impair, on dit qu'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Étape 2. Établir la conclusion voulue : si on veut prouver qu'un nombre A est pair, on l'écrit sous la forme $A = 2p$, en vérifiant que $p \in \mathbb{Z}$; si on veut prouver qu'un nombre A est impair, on l'écrit sous la forme $A = 2p + 1$, en vérifiant que $p \in \mathbb{Z}$.

Exo résolu

Montrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

CORRIGÉ

Étape 1. L'hypothèse porte sur deux nombres impairs :

Soit n et n' deux nombres impairs. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$, et il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n' = 2k' + 1$.

Étape 2. Après calcul du produit de ces nombres, on obtient :

$$nn' = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1.$$

On pose $p = 2kk' + k + k'$, de telle sorte que $nn' = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nn' est impair.

MÉTHODE 4

Montrer qu'un nombre entier est premier

→ Voir les exos 13, 21 et 24.

On souhaite prouver qu'un entier naturel N est premier.

Pour cela, on teste la divisibilité de N par tous les nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à \sqrt{N} .

Étape 1. Calculer \sqrt{N} , arrondir le résultat à l'entier près par défaut (on note M cet arrondi).

Étape 2. Vérifier que N n'est pas divisible par chaque nombre premier compris entre 2 et M .

Exo résolu

Le nombre 97 est-il premier ?

CORRIGÉ

Étape 1. $\sqrt{97} \approx 9,8$, on note $M = 9$.

Étape 2. On teste la divisibilité de 97 par tous les nombres premiers entre 2 et 9, c'est-à-dire 2 ; 3 ; 5 et 7.

97 n'est pas divisible par 2, car il est impair.

97 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3.

97 n'est pas divisible par 5, car le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5.

97 n'est pas divisible par 7, car $\frac{97}{7}$ n'est pas entier.

Comme 97 n'est pas divisible par chaque nombre premier compris entre 2 et $\sqrt{97}$, **il est premier.**



Pour mettre en évidence qu'un nombre N n'est pas premier, il suffit de vérifier qu'il est divisible par l'un des nombres premiers compris entre 2 et \sqrt{N} .

TESTER SES CONNAISSANCES


1 INTERVALLES ET ENCADREMENTS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 52

1. Écrire les intervalles auxquels appartient x dans les cas suivants.

a. $-2 \leq x < 1$ b. $x < 1$ c. $x \geq -4$

d. $-1 < x < 1$ e. $x \in \mathbb{R}^+$ f. $x \in \mathbb{R}^{+*}$

 \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs, et \mathbb{R}^{+*} désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

2. Écrire les encadrements pour un réel x qui appartient aux intervalles suivants :

a. $x \in [4; 12]$ b. $x \in]-\infty; -2]$ c. $x \in]-7; +\infty[$ d. $x \in]-1; 0]$

2 RÉUNION D'INTERVALLES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 52


1. Préciser la réunion $I \cup J$ des intervalles suivants.

a. $I = [-8; 1]$ et $J = [-1; 8]$.

b. $I =]-\infty; 0]$ et $J = [-1; +\infty[$.

2. a. Écrire sous forme d'un seul intervalle tous les nombres réels qui n'appartiennent pas à $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.


b. Écrire sous forme de réunion d'intervalles tous les nombres réels qui n'appartiennent pas à $[-5; 5]$.

 $I \cup J$ est un ensemble formé des nombres appartenant à I ou à J .

3 VALEUR ABSOLUE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 52

a. $|-2,5| =$ b. $|25| =$ c. $|0| =$ b. $|1 - \sqrt{2}| =$

 d. Trouver d'abord le signe du nombre $1 - \sqrt{2}$.

4 ÉQUATIONS AVEC UNE VALEUR ABSOLUE


★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 52

Résoudre les équations suivantes :

a. $|x - 5| = 10$ b. $|x + 4| = 25$ c. $|x - 3| = |x - 8|$

 c. La distance entre x et 3 est égale à la distance entre x et 8.


d. $|x + 20| = |x - 60|$

 Voir la méthode 1.

5 INTERVALLES ET VALEUR ABSOLUE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 53

- a. Écrire un intervalle I , ouvert, centré en 0 et de rayon 3
 b. Soit l'intervalle $I = [-20 ; 10]$. Quel est son centre ? son rayon ?
 Écrire cet intervalle sous forme d'une inégalité avec une valeur absolue.

 Une inégalité de la forme $|x - a| \leq b$ est attendue.

- c. Écrire l'ensemble des nombres réels x tels que $|x - 3| \leq 10$ sous forme d'intervalle.

6 NOMBRES DÉCIMAUX

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 53

Les nombres suivants sont-ils décimaux ?

$$123 ; -0,01 ; \frac{1}{5} ; -\frac{2}{3} ; \sqrt{2} ; \pi .$$

 Voir la définition du cours.

7 NOMBRES RATIONNELS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 53

Les nombres suivants sont-ils rationnels ?

$$123 ; -0,01 ; \frac{1}{5} ; -\frac{2}{3} ; \sqrt{2} ; \frac{\pi}{4} .$$

 Voir la définition du cours.

8 INCLUSION ET APPARTENANCE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 53

Compléter à l'aide des symboles suivants : inclusion \subset , ou appartenance \in , ou non-appartenance \notin .


- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a. • $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$ | • $\mathbb{D} \dots \mathbb{Q}$ | • $\mathbb{N} \dots \mathbb{R}$ |
| • $3 \dots \mathbb{Z}$ | • $100 \dots \mathbb{D}$ | • $-10^{10} \dots \mathbb{N}$ |
| • $\pi \dots \mathbb{D}$ | • $\sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$ | • $0,12121212 \dots \mathbb{Q}$ |
| • $\frac{1}{3} \dots \mathbb{Q}$ | • $\frac{7}{5} \dots \mathbb{D}$ | • $\frac{5}{7} \dots \mathbb{D}$ |

b. Soit I l'intervalle $[1 ; 4]$ et A l'ensemble $\{1;3\}$.

- | | | |
|---------------|-----------------|---------------|
| • $1 \dots I$ | • $2,5 \dots I$ | • $4 \dots I$ |
| • $3 \dots A$ | • $2 \dots A$ | • $A \dots I$ |

c. Soit J l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et B l'ensemble $\{2\}$.

- | | | |
|---------------|----------------|-----------------|
| • $0 \dots J$ | • $-5 \dots J$ | • $1,5 \dots J$ |
| • $2 \dots B$ | • $1 \dots B$ | • $B \dots J$ |

 Les symboles \in ou \notin s'utilisent pour l'appartenance ou non d'un nombre à un ensemble. Le symbole \subset s'utilise pour l'inclusion d'un ensemble dans un autre.

9 APPROXIMATIONS PAR DES DÉCIMAUX | ★ | ⌚ 5 min | ► P. 53 |

1. Encadrer les nombres suivants avec deux nombres décimaux.

a. $10\sqrt{2}$, à 10^{-1} près. b. $-\frac{4}{3}$, à 10^{-2} près. c. $\frac{\pi}{4}$, à 10^{-3} près.

2. Donner une valeur approchée de :

a. $\frac{1}{7}$, à 10^{-2} près par excès.

b. $\sqrt{3}$, à 10^{-3} près.

c. π , à 10^{-1} près par défaut.



Voir la méthode 2.

10 MULTIPLES | ★ | ⌚ 5 min | ► P. 53 |

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

Montrer que la somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a .



Raisonner dans le cas général, un multiple de a s'écrit ka , où $k \in \mathbb{Z}$.

11 NOMBRES AMIS | ★ | ⌚ 5 min | ► P. 54 |

Deux nombres entiers naturels sont **amis** si la somme des diviseurs stricts de l'un est égale à l'autre et réciproquement.

Vérifier que 220 et 284 sont amis.



Un diviseur strict d'un entier naturel est un diviseur positif autre que lui-même.
Par exemple, les diviseurs de 6 sont 1 ; 2 ; 3 et 6. Ses diviseurs stricts sont 1 ; 2 et 3.

12 PAIR ET IMPAIR | ★ | ⌚ 5 min | ► P. 54 |

Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.



Voir la méthode 3.

13 TEST DE PRIMALITÉ | ★ | ⌚ 5 min | ► P. 54 |

a. Le nombre 187 est-il premier ?

b. Le nombre 191 est-il premier ?



Voir la méthode 4.

S'ENTRAÎNER

14 RATIONNEL MAIS PAS DECIMAL

★★ | ⌚ 5 min | ► P. 54

Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

 Expliquer pourquoi la définition d'un nombre décimal ne s'applique pas à ce nombre.

15 APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$

★★ | ⌚ 5 min | ► P. 55

L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux ayant chacun N décimales, le nombre entier naturel N étant choisi par l'utilisateur.

a. Compléter cet algorithme :

```

A ← 1
Tant que  $|\sqrt{2} - A| > 10^{-N}$ 
Début de la boucle
A ← A + ...
Fin de la boucle
B ← ...
  
```

b. Si l'utilisateur choisit $N = 3$, quelles sont les valeurs des variables A et B à la fin de cet algorithme ?

 Voir la méthode 2.
L'initialisation ($A \leftarrow 1$) est ainsi choisie car $1 < \sqrt{2} < 2$.

16 SOMME DES NOMBRES IMPAIRS

★★ | ⌚ 10 min | ► P. 55

Soit n un entier naturel.

a. Calculer $(n+1)^2 - n^2$.


Le nombre obtenu est-il pair ou impair ?

b. Le résultat précédent permet d'affirmer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

Par exemple : $5 = 3^2 - 2^2$.

Faire de même avec 13, puis 21, puis 99.

c. Calculer $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2\,019$.

 Voir la méthode 3.
Remplacer chaque nombre impair de la somme par une différence de deux carrés positifs. Observer les simplifications, en déduire le résultat.

17 TOUS LES DÉCIMAUX SONT RATIONNELS | ★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 55

Montrer que tout nombre décimal est rationnel.

👍 Utiliser les définitions. Soit a un nombre décimal, justifier qu'il est nécessairement rationnel.

18 SOMME ET PRODUIT D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 56

a. Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est toujours un nombre impair.

b. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours un nombre pair.

👍 Voir la méthode 3.

19 CARRÉ D'UN NOMBRE IMPAIR | ★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 56

Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

👍 Voir la méthode 3.

20 LE MYSTÉRIEUX PGM | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 56

Soit a et b deux nombres entiers naturels, avec $a < b$.

Que fait l'algorithme suivant ?

```
A ← a
Tant que A ≤ b
Débit boucle
  A ← A + a
Fin boucle
PGM ← A - a
```

👍 L'objectif est d'expliquer ce que représente la variable PGM.

21 TEST DE PRIMALITÉ EN PYTHON | ★★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 56

a. Écrire une fonction `premier(n)` qui renvoie 1 si n est premier, 0 s'il ne l'est pas.


👍 Voir la méthode 4. Cette méthode doit cependant être adaptée. Au lieu de tester la divisibilité par les nombres premiers (ce qui serait trop difficile à programmer), on teste la divisibilité par 2 puis par les nombres impairs inférieurs ou égaux à \sqrt{n} .

- b. Insérer cette fonction dans un programme qui affiche la liste des nombres premiers jusqu'à 1000.
- c. Insérer cette fonction dans un programme qui demande un nombre entier à l'utilisateur et qui lui répond s'il est premier ou pas.

22 RÉEL MAIS PAS RATIONNEL ★★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 57

L'objectif est de prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour cela, on suppose qu'il est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q sans diviseur commun (la fraction est irréductible).

- a. Montrer que p^2 est pair.
b. En déduire que p est pair.

 On pourra utiliser le résultat de l'exercice 19.

- c. Montrer que q est pair.
d. Conclure.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

23 QCM ★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 57

Les trois questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

1. L'intervalle $[-1; 9]$ est l'ensemble des réels x tels que :
- a. $|x - 9| \leq -1$ b. $|x - 5| \leq 4$ c. $|x - 4| \leq 5$ d. $|x - 1| \leq 9$
2. $|3,14 - \pi| =$
- a. 0 b. $\pi - 3,14$ c. $3,14 - \pi$ d. 0,001 592 653 6
3. Sachant que $|x| = 3$, combien y a-t-il de possibilités pour le nombre x ?
- a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

24 259 ★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 57

259 est-il premier ?

25 CARRÉ D'UN NOMBRE PAIR ★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 58

Montrer que le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.

26 DEUX APPROXIMATIONS ★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 58

- a. Donner un encadrement de $\sqrt{1\,001}$ à 10^{-3} près.
- b. Donner une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ à 10^{-2} près.

27 VRAI OU FAUX ?

★ | ⌚ 10 min | ► P. 58

a. La diagonale d'un carré de côté 1 est un nombre rationnel.



Penser au théorème de Pythagore.

b. L'aire d'un disque de rayon 1 est un nombre rationnel.

c. Le volume d'une pyramide de base un carré de côté 2 et de hauteur 5 est un nombre rationnel.



Volume d'une pyramide : $\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3}$.

d. Le quotient de deux nombres premiers différents est un nombre rationnel non décimal.

28 NOMBRES PARFAITS

★★ | ⌚ 20 min | ► P. 58

Un nombre entier naturel est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts (autres que lui-même). Par exemple, 6 est parfait. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3 et leur somme est bien égale à 6.

1. a. Vérifier que 28 est parfait.

b. Euclide, au III^e siècle avant notre ère, écrit : « Lorsque la somme des puissances de 2 est un nombre premier, il suffit de multiplier cette somme par le dernier terme de cette somme pour obtenir un nombre parfait. »

Par exemple :

$1 + 2 = 3$; 3 est premier, donc $2 \times 3 = 6$ est parfait.

De même,

$1 + 2 + 4 = 7$; 7 est premier, donc $4 \times 7 = 28$ est parfait.

Procéder de même pour trouver le nombre parfait suivant.



Calculer les sommes de puissances de 2 suivantes, en commençant par $1 + 2 + 4 + 8$.

2. a. Compléter le programme ci-dessous d'une fonction `parfait(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie 1 si n est parfait, 0 sinon.

```
def parfait(n):
    S=1                                # Somme des diviseurs, initialisée à 1
    for i in range (2,n//2+1):         # i prend les valeurs de 2 à n/2 si n est pair, de 2 à
                                        # (n-1)/2 si n est impair
        if ... :                       # si n est divisible par i
            S= ...                     # on ajoute i à la somme des diviseurs
    if S==n:                           # si la somme des diviseurs est égale à n
        return ...
    else:
        return ...
```



$n/2$ est le quotient de la division euclidienne de n par 2.
Cette écriture dispense d'avoir à distinguer les cas pair et impair.

b. Insérer cette fonction dans un programme complet qui affiche la liste des entiers parfaits jusqu'à 10 000.

ALLER PLUS LOIN

29 DÉCOMPOSITION PRIMAIRE

★★★ | ⌚ 15 min | ► P. 59

Tout nombre entier naturel peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.

Par exemple, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers :
40 ; 117 ; 128 ; 540 ; 1 000.

2. Utiliser les décompositions de 504 et 540 pour :

a. mettre au même dénominateur $\frac{1}{504} + \frac{1}{540}$;

b. calculer le PGCD de 504 et 540.

30 DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

★★★ | ⌚ 30 min | ► P. 59

1. Chercher sur Internet les 50 premières décimales de π .

Peut-on observer une périodicité de ces décimales ?

2. Le théorème suivant confirme l'observation réalisée à la première question :
« Si un nombre est irrationnel, alors son développement décimal est illimité et non périodique. »

Compléter la contraposée de cette proposition :

« Si le développement décimal d'un nombre réel est ... ou illimité et ..., alors c'est un nombre ... »



Lorsqu'une proposition est de la forme : A implique B, sa **contraposée** est de la forme \bar{B} implique \bar{A} (la notation \bar{A} désigne la négation de A).

3. On examine quelques exemples pour les deux cas évoqués dans la contraposée ci-dessus.

a. Cas d'un développement décimal fini.

Vérifier que 123,987 est rationnel.

b. Cas d'un développement décimal illimité et périodique.

• Premier exemple :

Soit $r = 0,494949\dots$ les décimales 4 et 9 se répètent indéfiniment, on note $r = 0,\overline{49}$.

Calculer $100r$ puis vérifier que la différence $100r - r$ est un nombre entier.
En déduire que $r \in \mathbb{Q}$.

• Deuxième exemple :

Utiliser la même méthode avec $r = 0,\overline{142857}$.



Pour cet exemple, ne pas multiplier par 100, mais par une autre puissance de 10.

4. Dans cette question, on observe le développement décimal de quelques nombres rationnels.

a. Cas d'un dénominateur de la forme $2^x 5^y$ (x, y entiers naturels).

Vérifier que $\frac{213}{25}$, $\frac{51}{16}$ et $\frac{7}{40}$ sont décimaux.

b. Cas d'un dénominateur qui n'est ni divisible par 2, ni par 5.

Observer les développements décimaux de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{31}{11}$.


c. Cas d'un dénominateur qui est divisible par 2 ou par 5 (mais pas les deux, cas déjà traité au 4. a.).

Observer les développements décimaux de $\frac{1}{6}$, $\frac{89}{55}$.

CORRIGÉS


1 INTERVALLES ET ENCADREMENTS

1. a. $[-2; 1[$ b. $]-\infty; 1[$ c. $[-4; +\infty[$
 d. $]-1; 1[$ e. $[0; +\infty[$ f. $]0; +\infty[$
 2. a. $4 \leq x \leq 12$ b. $x \leq -2$ c. $x > -7$ d. $-1 < x \leq 0$

 Un crochet fermé vers une borne finie de l'intervalle correspond à une inégalité large, alors qu'un crochet ouvert correspond à une inégalité stricte.

2 RÉUNION D'INTERVALLES


1. a. $I \cup J = [-8; 8]$ b. $I \cup J =]-\infty; +\infty[$

 b. On peut aussi répondre : $I \cup J = \mathbb{R}$.

2. a. $]-1; 1[$ b. $]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$

3 VALEUR ABSOLUE

- a. $|-2,5| = 2,5$ b. $|25| = 25$
 c. $|0| = 0$ d. $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

 d. Comme $\sqrt{2} > 1$, le nombre $1 - \sqrt{2}$ est négatif. Sa valeur absolue est son opposé.

4 ÉQUATIONS AVEC UNE VALEUR ABSOLUE

a. La distance entre x et 5 est égale à 10.

Cette équation admet deux solutions :

$$x = -5 \text{ ou } x = 15.$$

b. $|x + 4| = 25$ s'écrit aussi $|x - (-4)| = 25$.

La distance entre x et -4 est égale à 25. Cette équation admet deux solutions :

$$x = -29 \text{ ou } x = 21.$$


c. On cherche un nombre qui est équidistant de 3 et de 8.

Il n'y a qu'une seule solution : **5,5**.

d. $|x + 20| = |x - 60|$ s'écrit aussi $|x - (-20)| = |x - 60|$.

On cherche un nombre qui est équidistant de -20 et de 60.

Il n'y a qu'une seule solution : **20**.

 c. et d. L'unique solution de $|x - a| = |x - b|$ est la moyenne des nombres a et b , c'est-à-dire $\frac{a+b}{2}$.

5 INTERVALLES ET VALEUR ABSOLUE

a.]-3 ; 3[.

b. Le centre de l'intervalle $[-10 ; 20]$ est 5, son rayon est 15. Cet intervalle est l'ensemble des réels tels que $|x - 5| \leq 15$.

👍 Avec l'intervalle ouvert $] -10 ; 20[$, le centre et le rayon ne sont pas modifiés, mais l'inégalité est stricte : $|x - 5| < 15$.

c. L'ensemble des nombres réels tels que $|x - 3| \leq 10$ est l'intervalle $[3 - 10 ; 3 + 10]$, soit $[-7 ; 13]$.**6 NOMBRES DÉCIMAUX**123 : oui ; -0,01 : oui ; $\frac{1}{5} = 0,2$: oui ; $-\frac{2}{3}$: non ; $\sqrt{2}$: non ; π : non**7 NOMBRES RATIONNELS**123 : oui ; -0,01 : oui ; $\frac{1}{5}$: oui ; $-\frac{2}{3}$: oui ; $\sqrt{2}$: non ; $\frac{\pi}{4}$: non**8 INCLUSION ET APPARTENANCE**

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a. • $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ | • $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ | • $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ |
| • $3 \in \mathbb{Z}$ | • $100 \in \mathbb{D}$ | • $-10^{10} \notin \mathbb{N}$ |
| • $\pi \notin \mathbb{D}$ | • $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ | • $0,12\ 121\ 212 \in \mathbb{Q}$ |
| • $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ | • $\frac{7}{5} \in \mathbb{D}$ | • $\frac{5}{7} \notin \mathbb{D}$ |
| b. • $1 \in \mathbb{I}$ | • $2,5 \in \mathbb{I}$ | • $4 \notin \mathbb{I}$ |
| • $3 \in \mathbb{A}$ | • $2 \notin \mathbb{A}$ | • $\mathbb{A} \subset \mathbb{I}$ |
| c. • $0 \in \mathbb{J}$ | • $-5 \notin \mathbb{J}$ | • $1,5 \in \mathbb{J}$ |
| • $2 \in \mathbb{B}$ | • $1 \notin \mathbb{B}$ | • $\mathbb{B} \subset \mathbb{J}$ |

👍 Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

9 APPROXIMATION PAR DES DÉCIMAUX

1. a. $14,1 < 10\sqrt{2} < 14,2$ b. $-1,34 < -\frac{4}{3} < -1,33$ c. $0,785 < \frac{\pi}{4} < 0,786$
 2. a. 0,15 b. 1,732 c. 3,1

10 MULTIPLES

On considère deux multiples de a , notés n et n' . Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = ka$ et il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n' = k'a$.

$$n + n' = ka + k'a = (k + k')a.$$

Comme $(k + k') \in \mathbb{Z}$, $(k + k')a$ est un multiple de a .

Ainsi, la somme de deux multiples de a est un multiple de a .

👍 Il est indispensable de vérifier que les facteurs sont entiers. Par exemple, si on trouve que $n = 2,5a$, il n'est pas question de conclure que n est un multiple de a .


11 NOMBRES AMIS

La somme des diviseurs stricts de 220 est :

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

La somme des diviseurs stricts de 284 est :

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

 Voir l'exercice 30 sur les nombres parfaits.

12 PAIR ET IMPAIR

Soient N et N' deux nombres impairs. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 2k + 1$ et il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $N' = 2k' + 1$. On effectue la somme :

$$N + N' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1).$$

On pose $P = k + k' + 1$, de telle sorte que $N + N' = 2P$, avec $P \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $N + N'$ est pair.

13 TEST DE PRIMALITÉ

a. $\sqrt{187} \approx 13,7$. On teste la divisibilité de 187 par tous les nombres premiers entre 2 et 13, c'est-à-dire 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

187 n'est pas divisible par 2, car il est impair.

187 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3.

187 n'est pas divisible par 5, car le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5.

187 n'est pas divisible par 7, car $\frac{187}{7}$ n'est pas entier.

187 est divisible par 11 : $187 = 11 \times 17$.

Ainsi, **187 n'est pas premier**.

b. $\sqrt{191} \approx 13,8$. On teste la divisibilité de 191 par tous les nombres premiers entre 2 et 13, c'est-à-dire 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

191 n'est pas divisible par 2, car il est impair.

191 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3.

191 n'est pas divisible par 5, car le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5.

191 n'est pas divisible par 7, car $\frac{191}{7}$ n'est pas entier.

191 n'est pas divisible par 11, car $\frac{191}{11}$ n'est pas entier.

191 n'est pas divisible par 13, car $\frac{191}{13}$ n'est pas entier.

Ainsi, **191 est premier**.

14 RATIONNEL MAIS PAS DÉCIMAL

On suppose que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Il existe deux entiers naturels n et k tels que $10^n \times \frac{1}{3} = k$, soit $10^n = 3k$, ce qui signifie que 10^n est divisible par 3.

Or ceci est inexact, car 10 n'est pas divisible par 3.

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est donc pas décimal.



Ceci est un raisonnement par l'absurde. Il consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut établir. Basé sur cette hypothèse, le raisonnement conduit à une contradiction. La supposition effectuée au début est donc fausse.

15 APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$

a.

```
A ← 1
Tant que  $|\sqrt{2} - A| > 10^{-N}$ 
Début de la boucle
A ← A + 10-N
Fin de la boucle
B ← A + 10-N
```

b. $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.



La valeur de la variable A en sortie de boucle est l'arrondi de $\sqrt{2}$ à 10^{-N} près par défaut. La variable B est calculée avec cette valeur, de telle sorte que finalement, $A < \sqrt{2} < B$.

16 SOMMES DES NOMBRES IMPAIRS

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Le résultat obtenu est toujours un nombre impair.



Le développement de $(n+1)^2$ est effectué en utilisant une identité remarquable. On peut aussi développer en écrivant : $(n+1)^2 = (n+1)(n+1)$.

b. $13 = 7^2 - 6^2$; $21 = 11^2 - 10^2$; $99 = 50^2 - 49^2$.

c. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2\,019$

$$= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (1\,010^2 - 1\,009^2)$$

$$= 1\,010^2 = \mathbf{1\,020\,100}$$



Les termes s'éliminent deux à deux : $1^2 - 1^2, 2^2 - 2^2, \dots$, il ne reste que $1\,010^2$.

17 TOUS LES DÉCIMAUX SONT RATIONNELS

Soit a un nombre décimal. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \frac{k}{10^n}$.
Comme k et 10^n sont deux entiers, le nombre a est rationnel.



Par exemple, 0,0003 est décimal ; il est aussi rationnel puisqu'il s'écrit $\frac{3}{10\,000}$.

La réciproque est fautive : un nombre rationnel n'est pas toujours décimal,

l'exemple le plus simple est $\frac{1}{3}$.

18 SOMME ET PRODUIT D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS

a. Soit n et $n+1$ deux entiers consécutifs. Leur somme est $n+n+1=2n+1$, c'est un nombre impair.

b. Avec deux nombres entiers consécutifs, l'un deux est pair, l'autre impair.

Celui qui est pair est noté $2k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Celui qui est impair est noté $2k'+1$, où $k' \in \mathbb{Z}$.

Le produit est $2k(2k'+1)=2p$, en notant $p=k(2k'+1) \in \mathbb{Z}$, ce qui achève de prouver que ce produit est pair.

19 CARRÉ D'UN NOMBRE IMPAIR

Soit N un nombre entier impair. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $N=2n+1$.

Alors $N^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$.

Comme n est un entier, il en est de même pour $K=2n^2+2n$.

Ainsi, $N^2=2K+1$, où $K \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que N^2 est impair.



Une démonstration similaire permet de traiter le cas des nombres pairs : voir l'exercice 25.

20 LE MYSTÉRIEUX PGM

L'algorithme calcule le plus grand multiple (ce qui élucide le mystère PGM) de a inférieur ou égal à b .

En effet, la variable A est initialisée à la valeur du nombre a . Ensuite, elle prend les valeurs des multiples consécutifs de a , jusqu'au dépassement de b .

Une fois sorti de la boucle, la dernière valeur calculée de A est le plus petit multiple de a strictement supérieur à b , il est nécessaire de retrancher a pour obtenir le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b .

21 TEST DE PRIMALITÉ EN PYTHON

a. et b.

```

from math import *           # import du module maths pour la fonction sqrt
def premier (n) :
    R=int(sqrt(n))           # sqrt est la fonction racine carrée
                              # int permet d'arrondir à l'entier par défaut
    if n==1 :                # cas particulier de 1
        return 0
    if n%2==0:               # cas particulier des nombres pairs
        if n==2:
            return 1
        else
            return 0
    for d in range (3,R+1,2): # d est un nombre impair entre 3 et R
        if n%d==0:           # si n est divisible par d
            return 0
    return 1
for i in range (1,1000):
    if premier(i)==1:
        print(i)

```

c. La boucle for est remplacée par :

```
n=int(input(" saisir une valeur de n ? "))
if premier(n)==1:
    print(n," est premier")
else:
    print(n," n'est pas premier")
```



range(d, f, p) est une liste de nombres entiers qui commence par d , finit par $f - 1$, par pas de p : ainsi, range(5,18,3) donne les valeurs 5,8,11,14 et 17.

22 RÉEL MAIS PAS RATIONNEL

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p et q étant sans diviseur commun.

a. On a $p = q\sqrt{2}$. En élevant au carré, il vient $p^2 = 2q^2$.

Comme $q \in \mathbb{Z}^*$, il en est de même pour q^2 . On a donc p^2 pair.

b. Si p était impair, son carré serait impair (voir l'exercice 19). Donc p ne peut pas être impair, il est pair.

c. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. En reprenant l'égalité $p^2 = 2q^2$, on obtient $(2k)^2 = 2q^2$, soit $4k^2 = 2q^2$, ou encore $q^2 = 2k^2$.

Là encore, on déduit que q^2 est pair et donc q est pair.

d. Ainsi, p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction $\frac{p}{q}$.

L'hypothèse initiale est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.



Comme dans l'exercice 14, ceci est un raisonnement par l'absurde.

23 QCM

1. Réponse c. $|x - 4| \leq 5$.

L'intervalle $[-1; 9]$ est centré en 4, son rayon est 5.

2. Réponse b. $\pi - 3,14$.

$3,14 - \pi < 0$, donc sa valeur absolue est égale à son opposé $\pi - 3,14$.

3. Réponse c. 2.

Les deux possibilités sont 3 et -3 .

24 259

$\sqrt{259} \approx 16,1$. On teste la divisibilité de 259 par tous les nombres premiers entre 2 et 16, c'est-à-dire 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

259 n'est pas divisible par 2, car il est impair.

259 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3.

259 n'est pas divisible par 5, car le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5.

259 est divisible par 7, car $259 = 7 \times 37$.

Ainsi, **259 n'est pas premier**.

25 CARRÉ D'UN NOMBRE PAIR

Soit N un nombre entier pair. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 2n$.

Alors $N^2 = (2n)^2 = 4n^2$.

Comme n est un entier, il en est de même pour $K = n^2$.

Ainsi, $N^2 = 4K$, où $K \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que N^2 est un multiple de 4.

26 DEUX APPROXIMATIONS

a. $31,638 < \sqrt{1\,001} < 31,639$, à 10^{-3} près.

b. Une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ à 10^{-2} près est **0,32**.

27 VRAI OU FAUX ?

a. **Faux.**

La diagonale d'un carré de côté 1 est $\sqrt{2}$, c'est un nombre irrationnel.

b. **Faux.**

L'aire d'un disque de rayon 1 est π , c'est un nombre irrationnel.

c. **Vrai.**

Le volume d'une pyramide de base un carré de côté 2 et de hauteur 5 est

$\frac{2^2 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$, c'est un nombre rationnel.

d. **Faux.**

Le quotient de deux nombres premiers différents est un quotient de nombres entiers, c'est donc un nombre rationnel.

Il peut être non décimal comme $\frac{5}{7}$ ou décimal comme $\frac{7}{5}$.

28 NOMBRES PARFAITS

1. a. Les diviseurs naturels stricts de 28 sont 1, 2, 4, 7 et 14.

Leur somme est égale à $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, donc 28 est parfait.

b. $1 + 2 + 4 + 8 = 15$; 15 n'est pas premier.


$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$; 31 est premier, donc $16 \times 31 = 496$ est parfait.

2. a. et b.

```

1 def parfait (n) :
2   S=1
3   for i in range(2,n//2+1) :
4     if n%i==0:
5       S=S+i
6   if S==n:
7     return 1
8   else:
9     return 0
10
11 for j in range(2,10000):
12   if parfait(j)==1:
13     print(j)

```

 a. La variable S permet de calculer la somme des diviseurs. Elle est initialisée à 1, car un entier naturel est toujours divisible par 1.

La boucle `for` permet d'ajouter à S chaque nouveau diviseur strict de n . On arrête la boucle quand i prend la valeur $n//2$ qui est le quotient de la division de n par 2.

b. Après exécution, on obtient 4 nombres parfaits inférieurs à 10000 :

6 ; 28 ; 496 et 8128.

Compléments

Les nombres parfaits connus sont tous pairs, mais il n'est toujours pas démontré qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs.

On ne sait pas non plus si le nombre de nombres parfaits est fini ou infini.

29 DÉCOMPOSITION PRIMAIRE

1. $40 = 2^3 \times 5$; $117 = 3^2 \times 13$; $128 = 2^7$; $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$; $1000 = 2^3 \times 5^3$

2. On a : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

$$\text{a. } \frac{1}{504} + \frac{1}{540} = \frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 7} + \frac{1}{2^2 \times 3^3 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7} + \frac{2 \times 7}{2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7} = \frac{29}{7\,560}$$

 Le résultat obtenu est nécessairement une fraction irréductible.

b. On prend dans les décompositions ce qui est en commun :

$$\text{PGCD}(504; 540) = 2^2 \times 3^2 = 36.$$

30 DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

1. Les 50 premières décimales de π sont :

$$\pi = 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510\dots$$


Le nombre de décimales est illimité, aucune régularité ne s'observe.

 Autre exemple

$$\sqrt{2} = 1,41435623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694\dots$$

Les nombres irrationnels ont un développement décimal illimité, sans période, sans régularité apparente.

2. « Si le développement décimal d'un nombre réel est fini ou illimité et périodique, alors c'est un nombre rationnel. »

 Une proposition et sa contraposée sont équivalentes, il suffit d'en prouver une seule. Par exemple la contraposée de la proposition : « si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair » est « si un nombre est impair, alors son carré est impair ».

3. a. $123,987 = \frac{123\,987}{1\,000}$, il s'agit bien d'un nombre rationnel.

 Dans un cas général d'un nombre d à n décimales, il suffit de l'écrire $\frac{d \times 10^n}{10^n}$ pour vérifier qu'il est rationnel.

$$\text{b. } 100r = 49,\overline{49}.$$

$$100r - r = 49,\overline{49} - 0,\overline{49} = 49 \in \mathbb{N}.$$

On a donc $99r = 49$, ce qui donne $r = \frac{49}{99} \in \mathbb{Q}$.

Avec $r = 0,\overline{142857}$ on multiplie par 10^6 car la période est composée de 6 chiffres.

Ainsi $1\,000\,000r = 142\,857,\overline{142\,857}$.

On obtient $999\,999r = 142\,857$ puis $r = \frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$.

$$4. \text{ a. } \frac{213}{25} = \frac{213 \times 4}{100} = \frac{852}{100} = 8,52.$$

$$\frac{51}{16} = \frac{51}{2^4} = \frac{51 \times 5^4}{10\,000} = \frac{31875}{10\,000} = 3,1875.$$

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$

Observation : ces nombres rationnels sont décimaux, leur développement décimal est fini.



Dans ce cas, il est toujours possible d'écrire une fraction avec une puissance de 10 au dénominateur. Le nombre rationnel est donc décimal.

$$\text{b. } \frac{1}{3} = 0,\overline{3}.$$

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}.$$

$$\frac{31}{11} = 2,\overline{81}.$$

Observation : ces nombres rationnels ne sont pas décimaux, leur développement décimal est illimité et périodique.

La période débute immédiatement après la virgule.

$$\text{c. } \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}.$$

$$\frac{89}{55} = 1,6\overline{18}.$$

Observation : ces nombres rationnels ne sont pas décimaux, leur développement décimal est illimité et périodique.

La période ne débute pas immédiatement après la virgule.

3

Calcul littéral

I RÈGLES DE CALCULS

1. Racines carrées

► Pour tout nombre réel positif a , on appelle racine carrée de a le nombre positif noté \sqrt{a} tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

► Pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$



Ne pas utiliser de règle similaire avec les additions ou les soustractions.
Par exemple, $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ n'est pas égal à $\sqrt{4+9}$.

► Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. Puissances

Soit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • $a^0 = 1$ • si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$ • $a^n \times b^n = (ab)^n$ • si $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$



Une expression contenant des puissances ne se simplifie pas toujours.
C'est le cas de ab^n , ou plus généralement de $a^m b^n$.
Notamment, $ab^n \neq (ab)^n$ et $a^m b^n \neq (ab)^{m+n}$.
Par exemple, 3×4^5 n'est pas égal à 12^5 .

3. Identités remarquables

Pour tous réels a et b ,

$$\bullet (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \bullet (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \bullet (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

EXEMPLES : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 ;$$

$$(4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9 ;$$

$$(7x-2)(7x+2) = 49x^2 - 4 .$$




Éviter la faute courante : le carré de $4x$ n'est pas $4x^2$, mais $16x^2$.

4. Inégalités


- ▶ Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

$$\bullet \text{ Si } c > 0, \text{ alors } ac < bc \text{ et } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$\bullet \text{ Si } c < 0, \text{ alors } ac > bc \text{ et } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

 La multiplication (ou la division) par un nombre négatif inverse l'ordre d'une inégalité.

- ▶ Soit a, b, c, d des nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$,
- On a $a + c < b + d$.
- Si, de plus, ces quatre nombres sont positifs : $ac < bd$.

 La soustraction ou le quotient membre à membre ne sont pas corrects. Voir la méthode 4.

II ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

1. Équations

- ▶ À chaque membre d'une équation, il est possible d'ajouter ou soustraire un même nombre. Il est aussi possible de multiplier ou diviser par un même nombre, si celui-ci n'est pas nul.
- ▶ En effectuant ces manipulations, on obtient des équations différentes qui ont les mêmes solutions. On dit qu'elles sont **équivalentes**. Entre deux équations équivalentes, on utilise le symbole \Leftrightarrow .

EXEMPLE :

$$5x + 3 = -x + 1 \Leftrightarrow 6x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

2. Inéquations

Les remarques ci-dessus s'appliquent aux inéquations, **mais le produit ou le quotient par un nombre négatif s'accompagne d'un changement d'ordre.**

EXEMPLES :

- Pas de changement d'ordre avec une division par un nombre positif :

$$3x - 2 < 8 \Leftrightarrow 3x < 10 \Leftrightarrow x < \frac{10}{3}.$$

- Changement d'ordre avec une division par un nombre négatif :

$$3 - 2x < -4 \Leftrightarrow -2x < -7 \Leftrightarrow x > \frac{-7}{-2} \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}.$$

MÉTHODE 1

Simplifier une racine carrée

→ Voir les exos 1, 12 et 34.

Étape 1. Décomposer le nombre en un produit contenant le plus grand carré possible.

Étape 2. Utiliser la règle de calcul : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Exo résolu

Simplifier $\sqrt{48}$.

CORRIGÉ

Étape 1. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$.

Étape 2. $\sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Ainsi, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.



La décomposition de 48 n'est pas unique, on pourrait aussi écrire $48 = 24 \times 2$ ou $48 = 12 \times 4$ ou $48 = 8 \times 6$. C'est celle qui comporte le plus grand carré (ici, 16) qui doit être choisie.

MÉTHODE 2

Factoriser en utilisant la troisième identité remarquable

→ Voir les exos 6, 9, 19, 25 et 35.

Étape 1. Reconnaître une expression de la forme $a^2 - b^2$, en identifiant précisément a et b .

Étape 2. Écrire le produit $(a - b)(a + b)$.

Étape 3. Simplifier les expressions dans les parenthèses.

Exo résolu

Factoriser $(3x + 7)^2 - (x + 3)^2$.

CORRIGÉ

Étape 1. Il s'agit bien d'une différence de deux carrés avec $a = 3x + 7$ et $b = x + 3$.

Étape 2. La factorisation s'écrit ainsi :

$$((3x + 7) - (x + 3))((3x + 7) + (x + 3)).$$

Étape 3. Chaque terme est simplifié :

$$(3x + 7 - x - 3)(3x + 7 + x + 3) = (2x + 4)(4x + 10).$$



Attention à ne pas commettre de faute de signe lors de la simplification de la différence $a - b$ dans le premier facteur.

MÉTHODE 3**Comparer deux expressions algébriques**

→ Voir les exos 8, 20, 21, 22, 36, 37 et 40.

Étape 1. Calculer la différence des deux expressions.

Étape 2. Étudier le signe de cette différence.

Étape 3. Conclure selon le signe obtenu.

Exo résolu

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer $\frac{n+8}{n+2}$ et $\frac{n+9}{n+3}$.

CORRIGÉ

Étape 1.

$$\begin{aligned} \frac{n+8}{n+2} - \frac{n+9}{n+3} &= \frac{(n+8)(n+3) - (n+9)(n+2)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2 + 11n + 24 - (n^2 + 11n + 18)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0$ car $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$.

Étape 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+8}{n+2} - \frac{n+9}{n+3} > 0$ ce qui signifie que :

$$\frac{n+8}{n+2} > \frac{n+9}{n+3}.$$



Avec des expressions positives, au lieu de faire la différence, il est possible de calculer le quotient et comparer ce quotient avec 1.

MÉTHODE 4**Encadrer une différence**

→ Voir les exos 7, 23, 32 et 34.

On connaît un encadrement de x et de y , on demande celui de $x - y$.

Étape 1. Écrire un encadrement de l'opposé de y .

Étape 2. Obtenir par somme un encadrement de $x + (-y)$.

Exo résolu

Soit x et y deux nombres réels tels que $91 \leq x \leq 95$ et $27 \leq y \leq 30$.

Encadrer la différence de $x - y$.

CORRIGÉ

Étape 1. $27 \leq y \leq 30$, donc $-30 \leq -y \leq -27$.

Étape 2. Comme $x - y = x + (-y)$, on obtient :

$$91 + (-30) \leq x + (-y) \leq 95 + (-27)$$

ce qui donne $61 \leq x - y \leq 68$.

MÉTHODE 5**Faire un tableau de signes**

→ Voir les exos 11, 26 et 27.

Un tableau de signes permet l'étude du signe d'une expression factorisée en un produit de facteurs du premier degré.

Étape 1. Déterminer les éventuelles racines de chaque facteur.

Étape 2. Construire un tableau en prévoyant une ligne pour la variable, une ligne par facteur, et une ligne pour le produit.

On place un 0 sur les lignes des facteurs pour localiser chaque racine.

Étape 3. Remplir les lignes pour chaque facteur avec les signes + ou -, puis utiliser la règle des signes pour la ligne du produit.

Exo résolu

Établir le tableau de signes du produit $A(x) = (3x - 1)(x - 4)$.

CORRIGÉ

Étape 1. Le facteur $3x - 1$ s'annule en $\frac{1}{3}$. Le facteur $x - 4$ s'annule en 4.

Étape 2. Comme il y a 2 facteurs, on prévoit un tableau avec 4 lignes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	4	$+\infty$
$3x - 1$		0		
$x - 4$			0	
$(3x - 1)(x - 4)$		0	0	

Étape 3. Tableau rempli avec les signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	4	$+\infty$
$3x - 1$		-	0	+
$x - 4$		-	0	+
$(3x - 1)(x - 4)$		+	0	-



Avec un quotient, la méthode est la même, mais une double barre sur la ligne du résultat indique que la division est impossible pour les racines du dénominateur.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 CALCULS AVEC DES RACINES CARRÉES

★ | ⌚ 15 min | ► P. 77


1. Calculer (ou simplifier) :

a. $\sqrt{3} \times \sqrt{7} =$ b. $\sqrt{5} \times \sqrt{125} =$ c. $\sqrt{6^4} =$

d. $\sqrt{16} + \sqrt{4} =$ e. $\frac{3}{\sqrt{3}} =$ f. $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{30}} =$


2. Simplifier :

a. $\sqrt{8} =$ b. $\sqrt{12} =$ c. $\sqrt{50} =$ d. $\sqrt{350} \times \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{42}} =$

 Voir la méthode 1.

3. Simplifier en éliminant toute racine carrée au dénominateur :


a. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ b. $\frac{\sqrt{3} + 3}{3\sqrt{3}}$ c. $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$

 a. Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$.
c. Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3} - 1$.

2 UTILISATION DE LA PROPRIÉTÉ $\sqrt{a^2} = |a|$

★ | ⌚ 5 min | ► P. 77

a. $\sqrt{(3 - \pi)^2} =$ b. $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} =$

 Cet exercice se fait sans calculatrice. Il s'agit d'utiliser correctement la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$.

3 SIMPLIFIER DES RACINES CARRÉES

★ | ⌚ 5 min | ► P. 77

Soit a un nombre réel strictement positif.

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ b. $\frac{\sqrt{a}}{a}$ c. $(\sqrt{a})^{2000}$

4 QCM SUR LES PUISSANCES

★ | ⌚ 10 min | ► P. 78

Les questions sont indépendantes. À chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a^n)^0 + (a^0)^n =$

a. a^{2n} b. a c. 2 d. n

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8 + 2 \times 8^n =$

a. 10×8^n b. $8 + 16^n$ c. 24^n d. $8(1 + 2 \times 8^{n-1})$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 2^n =$
 a. 4^n b. 2^{n+1} c. 2^{2n} d. 22^n
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9 \times 3^{-n} =$
 a. 3^{n-2} b. 3^{n+2} c. 3^{2-n} d. 3^{2+n}
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a^2)^{n+1} =$
 a. $a^2(a^n)^2$ b. a^{n+3} c. a^{2n+1} d. $a^n \times a^n$

5 DÉVELOPPER AVEC DES IDENTITÉS REMARQUABLES

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 78


- a. $(x-6)^2 =$ b. $(6x-1)^2 =$ c. $\left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 =$
 d. $\left(4 + \frac{1}{2}x\right)^2 =$ e. $(5x+9)(5x-9) =$ f. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right) =$

 b. Le carré de $6x$ est $36x^2$. f. Le carré de $\frac{2}{3}x$ est $\frac{4}{9}x^2$.

6 FACTORISER AVEC DES IDENTITÉS REMARQUABLES

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 78

- a. $x^2 - 10x + 25 =$ b. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9} =$ c. $9x^2 - 4 =$
 d. $1 - 100x^2 =$ e. $\frac{25}{16}x^2 - \frac{16}{25} =$

 e. $\frac{25}{16}x^2$ est le carré de $\frac{5}{4}x$. Voir la méthode 2.


7 ENCADREMENTS

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 78


Soit x et y deux nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 4$ et $5 \leq y \leq 7$.

Encadrer :

- a. Le produit par un nombre positif : $2x$.
 b. Le produit par un nombre négatif : $-3y$.
 c. La somme : $x + y$.
 d. Le produit : xy .
 e. La différence : $x - y$.

 e. Voir la méthode 4. On pourra écrire : $x - y = x + (-y)$.
Encadrer $-y$ puis faire une somme comme au c.

f. Le quotient : $\frac{x}{y}$.

 On pourra écrire : $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$. Encadrer $\frac{1}{y}$ puis faire un produit comme au d.

8 COMPARER DEUX EXPRESSIONS

★★ | ⌚ 10 min | ► P. 79

Soit a et b deux nombres réels.

Comparer le carré de leur moyenne et la moyenne de leurs carrés.

👍 Cela revient à comparer $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ et $\frac{a^2+b^2}{2}$. Voir la méthode 3.

9 ÉQUATIONS

★ | ⌚ 15 min | ► P. 79

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a. $1 - 5(4x - 7) = -3(1 - 2x)$

b. $(3x - 2)(2x - 3) = 0$

👍 b. Utiliser le théorème du produit nul : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

c. $(3x - 1)(2x - 1) = 1$

d. $(x + 1)^2 - 3(x + 1) = 0$

e. $4x^2 + 6x = x(2x + 3)$

f. $(3x - 1)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

👍 e. Factoriser par $2x$ le membre de gauche.
f. Voir la méthode 2.

10 INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

★ | ⌚ 10 min | ► P. 80

a. $5x < 0$

b. $-5x < 1$

c. $4x - 5 \leq 0$

d. $-3x + 7 > 0$

e. $6x + 1 \geq 9x - 14$

f. $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} < 2x - \frac{7}{6}$

👍 À chaque division par un nombre strictement négatif, l'ordre est changé.

11 TABLEAUX DE SIGNES

★ | ⌚ 15 min | ► P. 80

Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

a. $(4x - 1)(2x + 1)$

b. $(-2x + 3)(x - 2)$

c. $\frac{2x + 5}{x - 3}$

👍 Voir la méthode 5.

S'ENTRAÎNER

12 RACINE CARRÉE D'UN PRODUIT

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 81

Soit a et b deux nombres réels positifs.

On souhaite démontrer que :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} .$$

On pose $R = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $S = \sqrt{ab}$.

- Calculer R^2 et S^2 .
- En déduire que $R = S$.



L'exercice 13 utilise les mêmes idées.

13 L'INÉGALITÉ
TRIANGULAIRE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 81

Soit a et b deux nombres réels positifs. On souhaite démontrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ de deux manières différentes.

1. Première méthode

On pose $R = \sqrt{a+b}$ et $S = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- Calculer R^2 et S^2 et justifier que $R^2 \leq S^2$.
- En déduire que $R \leq S$.

2. Seconde méthode

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

Calculer l'hypoténuse BC et conclure.

14 NOMBRE DE CHIFFRES
D'UN GRAND NOMBRE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 81

1. De quelle puissance de 10 le nombre 2^{10} est-il proche ?

2. En déduire un ordre de grandeur de 2^{2020} .

3. a. Le plus grand nombre premier connu (en 2019) est $2^{82\ 589\ 933} - 1$.

En utilisant à nouveau l'approximation constatée à la question a., estimer le nombre de chiffres de ce nombre.

b. On admet qu'une page de traitement de texte au format A4 peut contenir 6630 chiffres (avec des marges étroites et une police assez petite).

En imprimant ce nombre sur des feuilles blanches, au recto et au verso, combien de ramettes de 500 feuilles sont nécessaires ?

15 PREMIÈRE PUISSANCE | ALGORITHMIQUE ★★ ⌚ 10 min ▶ P. 82

a. Quelles sont les valeurs des variables P et N à la sortie de l'algorithme suivant lorsque $A = 5$ et $S = 10000$?

```

P ← 1
N ← 0
Tant que P < S
Début de la boucle
P ← P*A
N ← N + 1
Fin de la boucle

```

b. Expliquer ce que fait cet algorithme dans un cas général, pour des valeurs données de A et de S, toutes deux strictement supérieures à 1.

👍 A et S sont deux « variables » au sens d'un algorithme mais qui sont ici constantes, car elles ne sont jamais modifiées.
L'énoncé impose $S > 1$ pour que la condition de la boucle soit vérifiée au moins une fois, et $A > 1$ pour que la variable P prenne des valeurs croissantes et puisse atteindre le seuil S.

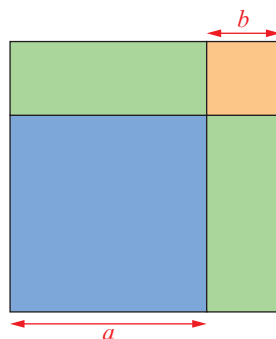
16 UN CARRÉ REMARQUABLE ★ ⌚ 5 min ▶ P. 82

Soit a et b deux réels strictement positifs.

La figure ci-contre est formée de deux carrés, l'un de côté a (en bleu), l'autre de côté b (en orange), et de deux rectangles de dimensions identiques (en vert).

Calculer l'aire totale de cette figure de deux façons différentes.

Que retrouve-t-on ?

**17 FACTORISER $a^2 - b^2$** ★ ⌚ 10 min ▶ P. 82

À chaque fois, factoriser pour obtenir un produit de deux facteurs du premier degré :

$$A(x) = (x + 3)^2 - 4$$

$$B(x) = (2x - 5)^2 - 9x^2$$

$$C(x) = (9x + 10)^2 - (4x + 7)^2$$

$$D(x) = \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

👍 Utiliser la troisième identité remarquable. Voir la méthode 2.

18 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (1)

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 83

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

👍 Voir la méthode 3. Calculer la différence $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$ et prouver que l'expression obtenue est toujours positive.

19 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (2)

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 83

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que $\frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}$.

Dans quels cas a-t-on égalité ?

👍 Voir la méthode 3. Calculer la différence $\frac{a+b}{4} - \frac{ab}{a+b}$ et prouver que l'expression obtenue est toujours positive.

20 PETIT CHATON TOUT MIGNON

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 83

Un pèse-personne indique la masse à 100 grammes près. Une petite fille veut peser son chat : elle le prend dans ses bras, monte sur la balance et lit 31,6 kg. Puis, elle se pèse seule et lit 28,4 kg.

Donner un encadrement du poids du chat.

21 ÉQUATIONS AVEC UN QUOTIENT

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 83

a. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: $\frac{3x-2}{x+2} = 2$.

👍 Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$: $\frac{x+10}{x+3} = \frac{x+1}{x-1}$.

👍 Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

22 INÉQUATIONS, TABLEAUX DE SIGNES

★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 84

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $4x^2 + 7x < 0$

b. $(x^2 + 1)(4x + 3) > 0$

c. $-4\left(5x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{7}{4}\right) \leq 0$

d. $(2x - 1)^2 - 4(2x - 1)(1 - x) \leq 0$

e. $3x(x - 5)(2x + 5) \geq 0$



Voir méthode 5 pour les tableaux de signes.

- a. Factoriser par x , puis faire un tableau de signes.
- b. Comme $x^2 + 1$ est toujours positif, le tableau de signes n'est pas indispensable.
- d. Factoriser par $2x - 1$, puis faire un tableau de signes.

23 PROBLÈME AGRAIRE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 85

Un champ de forme rectangulaire a une aire de 1 hectare et un périmètre de 410 m. Quelles sont ses dimensions ?



1 ha = 10 000 m².

On note x et y ses dimensions, exprimées en mètres.

- a. Montrer que $y = 205 - x$.
- b. En déduire que x est une solution de l'équation $x(205 - x) = 10000$.
- c. Montrer que cette équation équivaut à :

$$\left(x - \frac{205}{2}\right)^2 = \frac{2025}{4}.$$



Développer le membre de gauche.

- d. Résoudre cette dernière équation et conclure.

24 NAVETTE FLUVIALE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 86

Une navette fluviale effectue un trajet aller et retour entre deux points A et B, distants de 3,5 km. Le trajet aller de A vers B s'effectue dans le sens du courant. Celui-ci a une vitesse de 4 km·h⁻¹.

Le bateau effectue le trajet retour contre le courant plus lentement, avec 3 minutes de plus. L'objectif est de calculer les vitesses du bateau à l'aller et au retour.

On note V la vitesse propre du bateau (la vitesse qu'il a lorsqu'il n'y a pas de courant ou de vent), exprimée en km·h⁻¹.

- a. Montrer que :

$$\frac{3,5}{V - 4} - \frac{3,5}{V + 4} = 0,05.$$



3 min = 0,05 h.

- b. Résoudre cette équation et conclure.



Mettre au même dénominateur : $(V - 4)(V + 4)$. Ce produit sera ensuite développé pour ensuite obtenir la valeur de V^2 .

25 UN FROID SIBÉRIEN

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 86

On note la C la température en degrés Celsius et F la température en degrés Fahrenheit. F est une fonction affine de C de telle sorte que :

$$F = 1,8C + 32.$$

À l'aide d'une résolution d'inéquation, déterminer l'intervalle de températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est supérieure à la mesure en degrés Fahrenheit.

👍 La température minimale est d'environ -273 °C.
Tenir compte de cette donnée pour écrire l'intervalle.

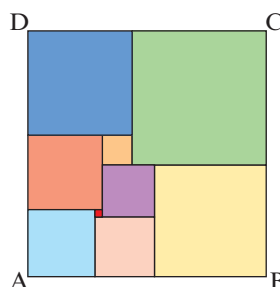
26 LES 9 CARRÉS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 86

Le quadrilatère ABCD est formé de 9 carrés.

Le petit carré rouge a pour côté 1.

Quelles sont les dimensions du quadrilatère ABCD ?



👍 Poser x le côté d'un carré proche du carré rouge.
Donner les dimensions des autres carrés en fonction de x . Le dernier carré fournit une équation.

27 CANETTE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 86

a. On note R le rayon du disque de base et H la hauteur d'un cylindre.

Exprimer H en fonction de R et de son volume V .

b. Une canette de forme cylindrique contient 33 cL de liquide.

Une mesure du diamètre D du disque de base donne : $65 < D < 66$ (en mm).

Déterminer un encadrement de la hauteur (en mm) de cette canette.

👍 Éviter la faute courante : le carré de $4x$ n'est pas $4x^2$, mais $16x^2$.
Commencer par convertir 33 cL en cm^3 .

28 ÉLECTRICITÉ

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 87

1. En électricité, la tension U (en Volts) et l'intensité I (en Ampère) sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est la résistance R , qui s'exprime en Ohm.

a. Sachant que 1 Ohm = 1 Volt par Ampère, exprimer U en fonction de R et de I .

👍 U et I sont proportionnels, on peut hésiter entre $U = RI$ et $I = RU$.

- b. Exprimer I en fonction de R et de U .
 c. Exprimer R en fonction de U et de I .
2. La puissance P est le produit de la tension et de l'intensité.
 Elle s'exprime en Watts.
- a. Exprimer P en fonction de R et I .
 b. L'énergie électrique est le produit de la puissance par la durée d'utilisation.
 Une ampoule LED basse consommation a une puissance de 5W.
 On la laisse allumée en permanence pendant un an.
 Sachant que $1 \text{ kW}\cdot\text{h}^{-1}$ est facturé 15 centimes, quel est le coût d'utilisation de cette ampoule ?



Commencer par calculer le nombre d'heures dans une année.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

29 QCM

★ ⌚ 15 min | ► P. 87

Les questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

1. $\sqrt{20} =$

a. $2\sqrt{5}$

b. $2\sqrt{10}$

c. $10\sqrt{2}$

d. $5\sqrt{4}$



Voir la méthode 1.

2. $\sqrt{(\pi^2 - 10)^2} =$

a. $\pi - \sqrt{10}$

b. $\pi^2 - 10$

c. $10 - \pi^2$

d. 0

3. $1001^2 - 999^2 =$

a. 2

b. 4

c. 1000

d. 4000

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 + 4 \times 0,1^n$

a. $= 10 \times 0,1^n$

b. $= 6 + 0,4^n$

c. $= 6,4^n$

d. > 6

5. Soit x et y deux nombres réels tels que $20 < x < 30$ et $5 < y < 10$.

Un encadrement de $x - y$ est :

a. $15 < x - y < 20$

b. $10 < x - y < 25$

c. $25 < x - y < 40$

d. $-15 < x - y < 20$



Voir la méthode 4.

30 CALCUL LITTÉRAL

★★ ⌚ 15 min ▶ P. 88

Les quatre questions sont indépendantes.

a. Factoriser $(5x + 8)^2 - (3x - 5)^2$.

👍 Voir la méthode 2.

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(2x + 1)^2 + 10x - 1 = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'équation : $\frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{4}$.

👍 Procéder comme à l'exercice 24. question c.

d. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $-4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) \geq 0$.

👍 Faire un tableau de signes. Voir la méthode 5.

31 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (3)

★★ ⌚ 15 min ▶ P. 88

Soit a un réel strictement positif. Comparer $a + \frac{1}{a}$ avec 2.

Dans quels cas a-t-on égalité ?

👍 Voir méthode 3 et les exercices 20 et 21.

Calculer la différence $a + \frac{1}{a} - 2$, puis réduire au même dénominateur.

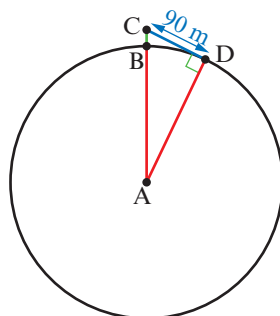
32 LA PLANÈTE MINUS

★★ ⌚ 15 min ▶ P. 89

Le capitaine Quark vient de découvrir une minuscule planète dans le système solaire. Il décide de la nommer Minus et se fait une fierté d'en être le premier explorateur.

Comme il souhaite calculer son rayon, il pose un viseur laser sur un trépied haut de 1,50 m et pointe sur un objet à l'horizon. Il trouve 90 m.

Quel est le rayon de la planète ?



👍 Sur la figure, A est le centre de la planète. $BC = 1,50$ m et $CD = 90$ m. De plus, (CD) est tangente au cercle. Noter R le rayon de telle sorte que $AB = AD = R$. Le théorème de Pythagore donne l'équation du problème. La résoudre à l'aide d'une identité remarquable.

33 CHUTE LIBRE

★★ | ⌚ 25 min | ▶ P. 89

Soit d la distance parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale en chute libre (dans le vide) après un temps de chute t .

1. On sait que $d = \frac{1}{2}gt^2$, où g est une constante égale à 9,81.
 - a. Exprimer g en fonction de d et t .
 - b. Si on exprime d en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et t en s, dans quelle unité s'exprime g ?
 - c. Calculer la distance parcourue après 4 secondes, arrondie à 0,1 m près.
 - d. Exprimer t en fonction de d .
 - e. Quel est le temps de chute d'un objet lâché d'une hauteur de 300 m ? Arrondir à 0,1 s.
2. On sait aussi que la vitesse v de l'objet est $v = gt$.
 - a. Quelle est la vitesse après 4s, arrondie à 0,1 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ près.
 - b. Que peut-on dire de v et de t ?
3. a. Montrer que $v^2 = 2dg$, puis exprimer v en fonction de d .
 - b. Quelle est la vitesse atteinte après 20 m de chute libre ?
 - c. Exprimer d en fonction de v .
 - d. Après quelle distance de chute la vitesse de 100 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ est-elle atteinte ?

ALLER PLUS LOIN**34 MOYENNE ARITHMÉTIQUE VERSUS MOYENNE GÉOMÉTRIQUE**

★★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 90

Soit a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Dans quels cas a-t-on égalité ?


 Voir la méthode 3, s'inspirer des exercices 18 et 19.

35 CUBE D'UNE SOMME

★★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 90

1. Soit a et b deux nombres réels. Développer $(a+b)^3$.
2. a. En déduire le développement de $(x+1)^3$.
b. À l'aide de ce développement, indiquer comment calculer 11^3 .
3. Quels sont les plus grands entiers consécutifs tels que la différence de leurs cubes est inférieure à 100 000 ?

Indication : on pourra montrer que $(x+1)^3 - x^3 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

 Calculer $(x+1)^3 - x^3$ puis vérifier l'égalité de l'indication ci-dessus, en développant le terme de droite. Ensuite résoudre l'inéquation $(x+1)^3 - x^3 < 100\,000$.

CORRIGÉS

1 CALCULS AVEC DES RACINES CARRÉES

1. a. $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{21}$.

b. $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5} \times \sqrt{5 \times 25} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{25} = 5 \times 5 = 25$.

c. $\sqrt{6^4} = 6^2 = 36$. d. $\sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$.


e. $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. f. $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{42}{30}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$.

2. a. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

b. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

c. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

d. $\sqrt{350} \times \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{42}} = \sqrt{7 \times 50} \times \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{7}\sqrt{6}}$
 $= \sqrt{7} \times \sqrt{50} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = 5\sqrt{2} \times 4 = 20\sqrt{2}$.

 Pour bien simplifier des racines carrées, la connaissance des carrés parfaits jusqu'à $12^2 = 144$ est un avantage.


3. a. $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

b. $\frac{\sqrt{3} + 3}{3\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}$.

c. $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$
 $= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

2 UTILISATION DE LA PROPRIÉTÉ $\sqrt{a^2} = |a|$


a. $\sqrt{(3 - \pi)^2} = |3 - \pi| = \pi - 3$, car $3 - \pi < 0$.

 b. Lorsque a est négatif, $|a| = -a$. L'opposé de $3 - \pi$ est $-3 + \pi$ ou $\pi - 3$.

b. $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$, car $2 - \sqrt{3} > 0$.

3 SIMPLIFIER DES RACINES CARRÉES

a. $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ b. $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ c. $(\sqrt{a})^{2000} = (\sqrt{a})^{2 \times 1000} = a^{1000}$

 a. $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ car $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.


b. Ce résultat s'utilise en trigonométrie avec $a = 2$. En effet, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est la valeur exacte de $\cos(45^\circ)$ et de $\sin(45^\circ)$.

4 QCM AVEC LES PUISSANCES

1. Réponse c. $(a^n)^0 + (a^0)^n = 1 + 1^n = 1 + 1 = 2$.
2. Réponse d. $8 + 2 \times 8^n = 8(1 + 2 \times 8^{n-1})$.
3. Réponse b. $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
4. Réponse c. $9 \times 3^{-n} = 3^2 \times 3^{-n} = 3^{2-n}$.
5. Réponse a. $(a^2)^{n+1} = a^{2n+2} = a^2 a^{2n} = a^2 (a^n)^2$.


5 DÉVELOPPER AVEC DES IDENTITÉS REMARQUABLES

- a. $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$
- b. $(6x-1)^2 = 36x^2 - 12x + 1$
- c. $\left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 = 4x^2 + x + \frac{1}{16}$
- d. $\left(4 + \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 16$
- e. $(5x+9)(5x-9) = 25x^2 - 81$
- f. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{4}$

 Ordonner les termes par puissance décroissante : d'abord le terme avec x^2 , puis le terme avec x puis le terme constant.

6 FACTORISER AVEC DES IDENTITÉS REMARQUABLES

- a. $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$
- b. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)^2$
- c. $9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$
- d. $1 - 100x^2 = (1-10x)(1+10x)$
- e. $\frac{25}{16}x^2 - \frac{16}{25} = \left(\frac{5}{4}x - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{4}x + \frac{4}{5}\right)$

 Bien observer ce qu'il se passe avec le coefficient de x^2 . Par exemple, $9x^2$ devient $3x$ dans l'expression factorisée.

7 ENCADREMENTS

- a. $2 \times 3 \leq 2x \leq 2 \times 4$, soit $6 \leq 2x \leq 8$.
- b. $-3 \times 5 \geq -3y \geq -3 \times 7$, soit $-21 \leq -3y \leq -15$.
- c. $3 + 5 \leq x + y \leq 4 + 7$, soit $8 \leq x + y \leq 11$.
- d. $3 \times 5 \leq xy \leq 4 \times 7$, soit $15 \leq xy \leq 28$.
- e. Soustraire, c'est ajouter l'opposé : on remplace la soustraction $x - y$ par l'addition $x + (-y)$. On commence donc par encadrer $-y$: $-7 \leq -y \leq -5$. Ainsi, $3 - 7 \leq x - y \leq 4 - 5$, soit $-4 \leq x - y \leq -1$.
- f. Diviser, c'est multiplier par l'inverse : on remplace la division $\frac{x}{y}$ par la multiplication $x \times \frac{1}{y}$.

On commence donc par encadrer $\frac{1}{y}$: $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$.

Ainsi, $3 \times \frac{1}{7} \leq \frac{x}{y} \leq 4 \times \frac{1}{5}$, soit $\frac{3}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{4}{5}$.

8 COMPARER DEUX EXPRESSIONS

Calcul de la différence des deux quantités :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2}{4} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est clairement positif.

On en déduit que $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, c'est-à-dire que **la moyenne des carrés est supérieure au carré de la moyenne**.



Ce résultat est valable pour tous les réels a et b , même négatifs.

9 ÉQUATIONS

a. $1 - 5(4x - 7) = -3(1 - 2x) \Leftrightarrow 1 - 20x + 35 = -3 + 6x$
 $\Leftrightarrow -26x = -39$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

b. $(3x - 2)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ ou $2x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right\}.$$

c. $(3x - 1)(2x - 1) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 3x - 2x + 1 = 1$
 $\Leftrightarrow 6x^2 - 5x = 0$
 $\Leftrightarrow x(6x - 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $6x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{5}{6}$

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{5}{6} \right\}.$$

d. $(x+1)^2 - 3(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)((x+1) - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $x-2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$

$$\mathcal{S} = \{-1; 2\}.$$

e. $4x^2 + 6x = x(2x + 3) \Leftrightarrow 2x(2x + 3) - x(2x + 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x(2x + 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{3}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2}; 0 \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{f. } (3x-1)^2 - (2x+5)^2 = 0 &\Leftrightarrow ((3x+1) - (2x+5))((3x+1) + (2x+5)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-4)(5x+6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x-4 = 0 \text{ ou } 5x+6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -\frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{6}{5}; 4 \right\}.$$

10 INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

a. $5x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

b. $-5x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$


c. $4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 4x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$

d. $-3x + 7 > 0 \Leftrightarrow -3x > -7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$

e. $6x + 1 \geq 9x - 14 \Leftrightarrow -3x \geq -15 \Leftrightarrow x \leq 5$

f. $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} < 2x - \frac{7}{6} \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x < -\frac{5}{6} \Leftrightarrow x > \frac{-\frac{5}{6}}{-\frac{7}{3}}$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{6} \times \frac{3}{7} \Leftrightarrow x > \frac{5}{14}$$

 **b. d. e. f.** La division par un nombre négatif a changé l'ordre.

11 TABLEAUX DE SIGNES

a. $4x - 1$ s'annule en $\frac{1}{4}$, $2x + 1$ s'annule en $-\frac{1}{2}$.


x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$4x - 1$	-	-	0	+	
$2x + 1$	-	0	+	+	
$(4x - 1)(2x + 1)$	+	0	-	0	+

b. $-2x + 3$ s'annule en $\frac{3}{2}$, $x - 2$ s'annule en 2.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$	
$-2x + 3$	+	0	-	-	
$x - 2$	-	-	0	+	
$(-2x + 3)(x - 2)$	-	0	+	0	-

c. $2x + 5$ s'annule en $-\frac{5}{2}$, $x - 3$ s'annule en 3.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$2x + 5$	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	0	+
$\frac{2x + 5}{x - 3}$	+	0	-	+


 Le tableau de signes de $\frac{2x+5}{x-3}$ est le même que celui de $(2x+5)(x-3)$, à la double barre près.

12 RACINE CARRÉE D'UN PRODUIT

a. $R^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = ab$.

$S^2 = (\sqrt{ab})^2 = \sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = ab$.

b. R et S sont deux nombres positifs ayant le même carré ($R^2 = S^2$), ils sont donc égaux.

 $R^2 = S^2 \Leftrightarrow R = S$ ou $R = -S$: l'égalité des carrés signifie que les nombres sont égaux ou opposés. C'est pourquoi le fait de préciser qu'ils sont tous deux positifs assure leur égalité.

13 L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

1. Première méthode

a. $R^2 = (\sqrt{a+b})^2 = a+b$.

$S^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.

Comme $2\sqrt{ab} \geq 0$, on a $a+b \leq a+2\sqrt{ab}+b$, c'est-à-dire $R^2 \leq S^2$.

b. R et S sont deux nombres positifs, ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés. Comme $R^2 \leq S^2$, on déduit $R \leq S$.


2. Seconde méthode

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a+b$, d'où

$BC = \sqrt{a+b}$.

L'inégalité triangulaire $BC \leq AB + AC$ permet de conclure.

 Bien remarquer que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{9} + \sqrt{4} \neq \sqrt{13}$. Avec le calcul littéral, éviter une faute comme $\sqrt{x^2+1} \neq x+1$.

14 NOMBRE DE CHIFFRES D'UN GRAND NOMBRE

1. $2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000 = 10^3$.

2. $2^{2020} = 2^{10 \times 202} \approx (10^3)^{202} = 10^{606}$.

Un ordre de grandeur de 2^{2020} est 10^{606} (1 suivi de 606 zéros)

3. a. $2^{82\,589\,933} \approx 2^{10 \times 8\,258\,993} \approx (10^3)^{8\,258\,993} = 10^{24\,776\,979}$.

Le nombre de chiffres de ce nombre premier est environ 24 800 000.



Il n'est pas utile d'être plus précis dans l'arrondi final. Dès le début, 1024 a été arrondi à 1000, le résultat final n'est donc pas précis.

Le nombre exact de décimales est 24 862 048.

Pour plus d'informations à ce sujet, voir <https://www.mersenne.org>.

b. $\frac{24\,800\,000}{2 \times 6630} \approx 1870$.

1 870 feuilles sont nécessaires, il faut donc prévoir 4 ramettes de papier pour imprimer ce nombre.

15 ALGORITHME ET CALCUL DES PREMIÈRES PUISSANCES

a.

P	1	5	25	125	625	3 125	15 625
N	0	1	2	3	4	5	6
$P < S$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

En sortie d'algorithme, N vaut 6 et P vaut 15 625.

b. Cet algorithme calcule la première puissance de A qui dépasse un seuil donné, à savoir ici S .

Dans l'exemple précédent, $5^6 = 15\,625$ est la première puissance de 5 qui dépasse 10 000.

16 UN CARRÉ REMARQUABLE

L'aire du carré bleu est a^2 . L'aire du carré orange est b^2 .

L'aire d'un rectangle vert est ab .

La somme des quatre aires est donc : $a^2 + b^2 + 2ab$.

En considérant que cette somme d'aires est aussi l'aire d'un carré de côté $a + b$, on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, et on retrouve la première identité remarquable.

17 FACTORISER $a^2 - b^2$

$$A(x) = (x + 3)^2 - 2^2 = (x + 3 - 2)(x + 3 + 2) = (x + 1)(x + 5).$$

$$B(x) = (2x - 5)^2 - (3x)^2 = (2x - 5 - 3x)(2x - 5 + 3x) = (-x - 5)(5x - 5).$$

$$C(x) = (9x + 10 + 4x + 7)(9x + 10 - 4x - 7) = (13x + 17)(5x + 3).$$

$$D(x) = \left(3x + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}\right) \left(3x + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{4}\right) = \left(4x + \frac{1}{4}\right) \left(2x + \frac{3}{4}\right).$$



Pour une factorisation complète, le calcul de $B(x)$ est poursuivi ainsi :

$$B(x) = -5(x + 5)(x - 1).$$

On a factorisé -1 dans le premier terme $(-x - 5)$, et 5 dans le second terme $(5x - 5)$. C'est ainsi que les deux facteurs -1 et 5, multipliés ensemble, donnent le nombre -5 dans le résultat final.

18 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (1)

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} - \frac{2ab}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Le produit au dénominateur est positif. Le carré au dénominateur est également positif. Le quotient est donc positif.

Finalement $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$

19 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (2)

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\frac{a+b}{4} - \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4(a+b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

On a $a+b > 0$. Comme le carré au numérateur est positif, le quotient est aussi positif. Finalement :

$$\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}.$$

L'égalité a lieu lorsque $\frac{(a-b)^2}{4(a+b)} = 0$, c'est-à-dire quand $a = b$.

20 PETIT CHATON TOUT MIGNON

On note M le poids de la petite fille et du chat et m le poids de la petite fille seule, de sorte que $31,5 \leq M \leq 31,7$ et $28,3 \leq m \leq 28,5$.

Le poids du chat seul est $M - m$.

On commence par un encadrement de $-m$: $-28,5 \leq -m \leq -28,3$.

Par somme, on obtient : $31,5 + (-28,5) \leq M - m \leq 31,7 + (-28,3)$, soit $3,0 \leq M - m \leq 3,4$

Le poids du chat est compris entre 3 kg et 3,4 kg.

21 ÉQUATIONS AVEC QUOTIENTS

a. Pour tout x différent de -2 :

$$\frac{3x-2}{x+2} = 2 \Leftrightarrow 3x-2 = 2(x+2) \Leftrightarrow x = 6.$$

$$\mathcal{S} = \{6\}.$$

b. Pour tout x différent de -1 et de 0 ,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}.$$

L'équation équivaut à :

$$2x+1 = 2x(x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = 2x^2+2x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$


$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

c. Pour tout x différent de -3 et de 1 ,

$$\begin{aligned}\frac{x+10}{x+3} = \frac{x+1}{x-1} &\Leftrightarrow (x+10)(x-1) = (x+3)(x+1) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x - 10 = x^2 + 4x + 3 \\ &\Leftrightarrow 5x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{5} \right\}.$$

 a. et b. Avec une forme $\frac{A}{B} = C$, on a souvent intérêt à écrire $A = BC$ pour éliminer toute fraction.

c. Dans le même but, avec une forme $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, on écrit $AD = BC$.

22 INÉQUATIONS, TABLEAUX DE SIGNES

a. $4x^2 + 7x < 0 \Leftrightarrow x(4x + 7) < 0$.

x s'annule en 0 et $4x + 7$ s'annule en $-\frac{7}{4}$.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	0	$+\infty$		
x		-	-	0	+	
$4x + 7$		-	0	+	+	
$x(4x + 7)$		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions est $\left] -\frac{7}{4}; 0 \right[$.

b. $(x^2 + 1)(4x + 3) > 0 \Leftrightarrow 4x + 3 > 0$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$.

$$4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$$

L'ensemble des solutions est $\left] -\frac{3}{4}; +\infty \right[$.

c. $-4\left(5x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{7}{4}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(5x - \frac{1}{2}\right)(-4x + 7) \leq 0$

$5x - \frac{1}{2}$ s'annule en $\frac{1}{10}$, $-4x + 7$ s'annule en $\frac{7}{4}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$		
$5x - \frac{1}{2}$		-	0	+	+	
$x - 3$		+	+	0	-	
$\left(5x - \frac{1}{2}\right)(-4x + 7)$		-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions est $\left] -\infty; \frac{1}{10} \right] \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty \right)$.

$$d. (2x - 1)^2 - 4(2x - 1)(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)((2x - 1) - 4(1 - x)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(6x - 5) \leq 0$$

$2x - 1$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et $6x - 5$ s'annule en $\frac{5}{6}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
$2x - 1$		-	0	+
$6x - 5$		-	-	0
$(2x - 1)(6x - 5)$		+	0	-

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right]$.

e. $3x$ s'annule en 0, $x - 5$ s'annule en 5 et $2x + 5$ s'annule en $-\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	0	5	$+\infty$
$3x$		-	0	+	+
$x - 5$		-	-	0	+
$2x - 5$		-	0	+	+
$3x(x - 5)(2x + 5)$		-	0	+	0

L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup \left[5; +\infty\right[$.

23 PROBLÈME AGRAIRE

a. $2(x + y) = 410 \Leftrightarrow x + y = 205 \Leftrightarrow y = 205 - x$.

b. 1 hectare, c'est 10 000 m².

$xy = 10\,000$, donc $x(205 - x) = 10\,000$.

c. $\left(x - \frac{205}{2}\right)^2 - \frac{2\,025}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 205x + \frac{42\,025}{4} - \frac{2\,025}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 205x + 10\,000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(205 - x) = 10\,000$$

d. $\left(x - \frac{205}{2}\right)^2 - \frac{2\,025}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{205}{2}\right)^2 = \frac{2\,025}{4}$


$$\Leftrightarrow x - \frac{205}{2} = \sqrt{\frac{2\,025}{4}} \text{ ou } x - \frac{205}{2} = -\sqrt{\frac{2\,025}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{205}{2} + \frac{45}{2} = 125 \text{ ou } x = \frac{205}{2} - \frac{45}{2} = 80$$

Dans le premier cas, on trouve $y = 80$.

Dans le second cas, on trouve $y = 125$.

La longueur du champ est 125 m, sa largeur 80 m.

 Lorsque $A > 0$, $x^2 = A \Leftrightarrow x = \sqrt{A}$ ou $x = -\sqrt{A}$.

24 NAVETTE FLUVIALE

a. Sa vitesse est $V + 4$ à l'aller et $V - 4$ au retour.

Le temps du trajet aller est $\frac{3,5}{V+4}$, celui du trajet retour est $\frac{3,5}{V-4}$.

Comme la différence des temps de trajets est de 3 min (soit 0,05 h), on peut

écrire $\frac{3,5}{V-4} - \frac{3,5}{V+4} = 0,05$.

$$\text{b. } \frac{1}{V-4} - \frac{1}{V+4} = \frac{0,05}{3,5} \Leftrightarrow \frac{V+4 - (V-4)}{(V+4)(V-4)} = \frac{1}{70}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{V^2 - 16} = \frac{1}{70}$$

$$\Leftrightarrow V^2 - 16 = 560$$

$$\Leftrightarrow V^2 = 576 \Leftrightarrow V = \sqrt{576} = 24.$$

La vitesse propre du bateau est $24 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$

Sa vitesse à l'aller est de $28 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, sa vitesse au retour de $20 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

25 UN FROID SIBÉRIEN

$$C > 1,8C + 32 \Leftrightarrow C - 1,8C > 32$$

$$\Leftrightarrow -0,8C > 32$$

$$\Leftrightarrow C < \frac{32}{-0,8} \Leftrightarrow C < -40$$

L'intervalle de températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est supérieure à la mesure en degrés Fahrenheit est $]-273; -40[$.



L'intervalle de températures pour lesquelles la mesure, en degrés Celsius, est inférieure à la mesure, en degrés Fahrenheit, est $]-40; +\infty[$.

Il n'y a pas de température maximale.

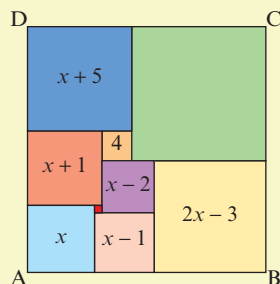
26 LES 9 CARRÉS

En donnant au carré inférieur gauche un côté x , on trouve peu à peu les côtés des autres carrés.

En arrivant au dernier carré (supérieur droit), on s'aperçoit que son côté vertical est $x + 9$, son côté horizontal $3x - 9$.

L'équation du problème est donc $x + 9 = 3x - 9$ qui équivaut à $x = 9$.

Par conséquent, $AB = 32$ et $BC = 33$.

**27 CANETTE**

a. Le volume d'un cylindre est $V = \pi R^2 H$,

$$\text{d'où } H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

b. $33 \text{ cL} = 330\,000 \text{ mm}^3$.

En divisant par 2 le diamètre, on encadre le rayon : $32,5 < R < 33$.

En élevant au carré : $32,5^2 < R^2 < 33^2$.

En multipliant par π : $\pi \times 32,5^2 < \pi R^2 < \pi \times 33^2$.

Les inverses sont ordonnés dans le sens contraire :

$$\frac{1}{\pi \times 33^2} < \frac{1}{\pi \times R^2} < \frac{1}{\pi \times 32,5^2}.$$

En multipliant par 330 000 : $\frac{330\,000}{\pi \times 33^2} < H < \frac{330\,000}{\pi \times 32,5^2}$.

L'encadrement obtenu est finalement : $96 < H < 100$ (en mm).



En réalité, comme le liquide ne monte pas tout en haut de la canette et que la forme n'est pas tout à fait cylindrique, la hauteur réelle d'une canette classique est de 115 mm.

28 ÉLECTRICITÉ

1. a. U et I sont proportionnels, avec R comme coefficient de proportionnalité. On a donc $U = RI$ ou $I = RU$.

Sans rien connaître des lois de l'électricité, on devine qu'il s'agit de $U = RI$,

car dans ce cas, $R = \frac{U}{I}$ s'exprime bien en Volt par Ampère.

b. $I = \frac{U}{R}$ **c.** $R = \frac{U}{I}$

2. a. $P = UI = RI \times I = RI^2$.

b. On note E l'énergie de sorte que $E = Pt$.

La durée est : $t = 365 \times 24 = 8\,760$ h.

La puissance est : $P = 0,005$ kW.

Donc l'énergie consommée est : $E = 8760 \times 0,005 = 43,8$ kW·h.

Le coût d'utilisation est donc $43,8 \times 0,15 = 6,57$ €.



L'énergie s'exprime ici en kW.h (et non en kW·h⁻¹) : le point désigne le produit effectué entre la puissance et la durée d'utilisation.

29 QCM

1. Réponse a.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

2. Réponse c.

$$\sqrt{(\pi^2 - 10)^2} = |\pi^2 - 10| = 10 - \pi^2 \text{ car } \pi^2 - 10 < 0.$$

3. Réponse d.

$$1001^2 - 999^2 = (1\,001 - 999)(1\,001 + 999) = 2 \times 2\,000 = 4\,000$$

4. Réponse d.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 + 4 \times 0,1^n > 6$, car $4 \times 0,1^n > 0$.

5. Réponse b.

$20 < x < 30$ et $-10 < -y < -5$.

Par somme, $10 < x - y < 25$.

30 CALCUL LITTÉRAL

$$\text{a. } (5x+8)^2 - (3x-5)^2 = (5x+8+3x-5)(5x+8-3x+5) \\ = (8x+3)(2x+13).$$

$$\text{b. } (2x+1)^2 + 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 + 10x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 14x = 0 \\ \Leftrightarrow 2x(2x+7) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 2x+7 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{2}; 0 \right\}.$$

c. Pour tout x différent de -1 ,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{4} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow x+1 = 2 \text{ ou } x+1 = -2 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3$$

$$\mathcal{S} = \{-3; 1\}$$

$$\text{d. } -4\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (-2x+4)\left(x+\frac{2}{3}\right) \geq 0$$

$-2x+4$ s'annule en 2 , $x+\frac{2}{3}$ s'annule en $-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$-2x+4$	+	+	0	-
$x+\frac{2}{3}$	-	0	+	+
$(-2x+4)\left(x+\frac{2}{3}\right)$	-	0	+	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

31 DÉMONTRER UNE INÉGALITÉ (3)

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Le dénominateur est $a > 0$, le numérateur est un carré positif, donc le quotient est aussi positif.

Finalement,

$$a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

L'égalité a lieu lorsque $\frac{(a-1)^2}{a} = 0$, c'est-à-dire quand $a = 1$.

32 LA PLANÈTE MINUS

Comme (CD) est tangente au cercle, le triangle ADC est rectangle en D.

Le théorème de Pythagore fournit l'équation du problème :

$$(R + 1,5)^2 - R^2 = 90^2 \Leftrightarrow R^2 + 3R + 2,25 - R^2 = 8100$$

$$\Leftrightarrow 3R = 8097,75$$

$$\Leftrightarrow R = 2699,25$$

Le rayon de la planète est environ 2 700 m.

33 CHUTE LIBRE

1. a. $d = \frac{1}{2}gt^2$, donc $2d = gt^2$ et $g = \frac{2d}{t^2}$.

b. g est le quotient d'une distance par un temps au carré, on l'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

c. $\frac{1}{2} \times 9,81 \times 4^2 \approx 78,5$.

La distance parcourue après 4 secondes est environ 78,5 m.

d. $2d = gt^2$, donc $t^2 = \frac{2d}{g}$ et $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$.

e. $\sqrt{\frac{2 \times 300}{9,81}} \approx 7,8$.

Le temps de chute est environ 7,8 secondes.

2. a. $9,81 \times 4 = 39,24$.

La vitesse après 4 secondes est environ $39,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b. La vitesse et le temps de chute sont proportionnels.

3. a. $v^2 = g^2 t^2 = g^2 \frac{2d}{g} = 2dg$, d'où $v = \sqrt{2gd}$.

b. $\sqrt{2 \times 9,81 \times 20} \approx 19,8$.

La vitesse atteinte après 20 m de chute libre est environ $19,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

c. On sait que $v^2 = 2dg$, donc $d = \frac{v^2}{2g}$.

d. $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, c'est environ $27,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$\frac{27,8^2}{2 \times 9,81} \approx 39,3$$

La vitesse de $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ est atteinte après 39,3 m de chute environ.



Ces lois de la chute libre sont correctes dans le vide. Sinon, la résistance de l'air doit être prise en compte et produit des formules plus compliquées.

34 MOYENNE ARITHMÉTIQUE VERSUS MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

L'inégalité demandée équivaut à $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Le carré du membre de gauche est $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Le carré du membre de droite est $(2\sqrt{ab})^2 = 4ab$.

Calculons la différences des carrés :

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 .$$

Cette différence est un carré, elle est toujours positive, donc

$$(a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 .$$

Comme les nombres $a + b$ et $2\sqrt{ab}$ sont positifs, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Ainsi, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, ce qui équivaut à $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Il y a égalité lorsque $(a - b)^2 = 0$, c'est-à-dire quand $a = b$.



Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique des nombres a et b .

Le nombre \sqrt{ab} est la moyenne géométrique des nombres a et b .

35 CUBE D'UNE SOMME

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. a. Avec $a = x$ et $b = 1$: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

b. $11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 1\,000 + 300 + 30 + 1 = 1\,331$.

3. Soit x et $x + 1$ deux entiers consécutifs. Calculons la différence de leurs cubes : $(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.

$$\begin{aligned} 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &= 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

L'inéquation du problème équivaut successivement à :

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} < 100\,000$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{133\,333}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{133\,333}}{2} \quad (\text{car } x + \frac{1}{2} \text{ est positif})$$

$$x < \frac{\sqrt{133\,333} - 1}{2}$$

Les deux entiers cherchés sont donc 182 et 183.

4

Généralités sur
les fonctions

I PREMIÈRES NOTIONS

1. Définitions

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} .

► On définit une fonction f sur D , si à chaque nombre réel x de l'ensemble D , on associe un unique réel noté $f(x)$.

D est l'**ensemble de définition** de la fonction f .

👍 D est parfois l'ensemble des toutes les valeurs pour lesquelles le calcul d'une image est possible, ou alors c'est un ensemble plus restreint choisi d'après le contexte.

► Cette association se note : $x \mapsto f(x)$ et on dit que $f(x)$ est l'**image** de x .

► Les éventuelles solutions dans D de l'équation $f(x) = a$ sont les **antécédents** de a .

👍 Tout réel $x \in D$ a une unique image. Mais un nombre donné peut ne pas avoir d'antécédent, ou bien en avoir un ou plusieurs, ou même une infinité.

EXEMPLE :

Soit f la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur \mathbb{R} .

L'image de 3 est $f(3) = 3^2 = 9$.

Comme $f(-3) = (-3)^2 = 9$, 9 a deux antécédents : 3 et -3 .

Un nombre strictement négatif comme -2 n'a pas d'antécédent par f .

2. Courbe représentative

On se place dans un repère du plan.

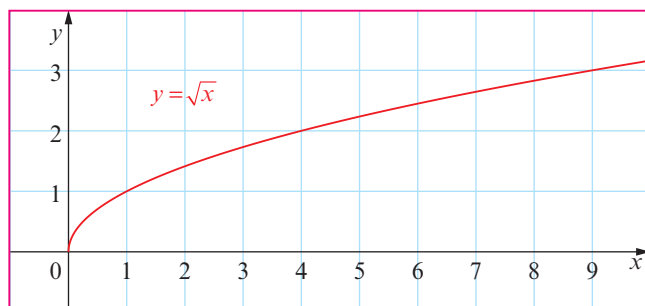
Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

► La **courbe représentative** de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où $x \in D$.

👍 On dit qu'une équation de cette courbe est $y = f(x)$.

EXEMPLE :

La courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x; \sqrt{x})$, où $x \in [0; +\infty[$.



Le point de coordonnées $(4; 2)$ appartient à cette courbe, car $\sqrt{4} = 2$.

3. Fonctions paires, fonctions impaires

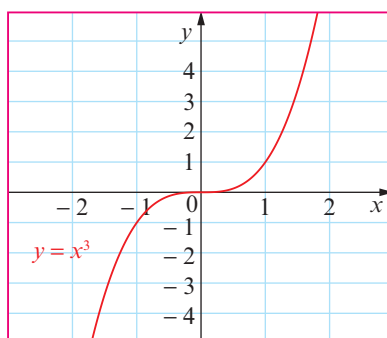
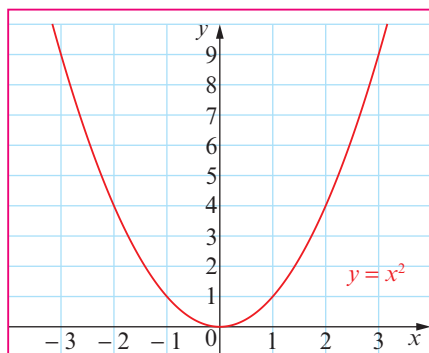
Soit f définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0.

- Une fonction f est **paire** lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

👍 La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

EXEMPLES : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est paire.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3$ est impaire.



II VARIATIONS D'UNE FONCTION

1. Sens de variation

- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I signifie que pour tous nombres a et b éléments de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.
- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I signifie que pour tous nombres a et b éléments de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$.

👍

- Une fonction croissante **conserve l'ordre** : des nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.
- Une fonction décroissante **inverse l'ordre** : des nombres et leurs images sont rangés dans des ordres contraires.

► Le sens de variation d'une fonction peut se présenter avec un **tableau de variations**.

EXEMPLE :

Ici, la fonction f est définie sur l'intervalle $[-1 ; 8]$.

La fonction est croissante sur $[-1 ; 5]$ et décroissante sur $[5 ; 8]$.

x	-1	5	8
$f(x)$	-6	2	0

2. Extremum d'une fonction

Soit f définie sur un intervalle I .

► Une fonction f admet un **maximum** en a sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

► Une fonction f admet un **minimum** en a sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

EXEMPLE :

Le tableau de variations ci-dessus permet d'observer que, sur l'intervalle $[-1 ; 8]$:

– La fonction f admet un maximum en 5.

Ce maximum est 2.

– La fonction f admet un minimum en -1 .

Ce minimum est -6 .

MÉTHODE 1**Étudier la parité d'une fonction**

→ Voir les exos 6, 7 et 20.

Étape 1. Vérifier que la fonction est définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0.

Étape 2. Calculer $f(-x)$.

Étape 3. Si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$, alors f est paire.
Si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

Exo résolu

Étudier la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x(x^2 + 1).$$

CORRIGÉ

Étape 1. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0.

Étape 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -x((-x)^2 + 1) = -x(x^2 + 1) = -f(x).$$

Étape 3. La fonction est impaire.



Ne pas penser que les fonctions sont soit paires soit impaires. La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires.

MÉTHODE 2**Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$**

→ Voir les exos 4, 8 et 18.

Étape 1. Placer ou visualiser le nombre k sur l'axe des ordonnées.

Tracer ou imaginer la droite d'équation $y = k$.

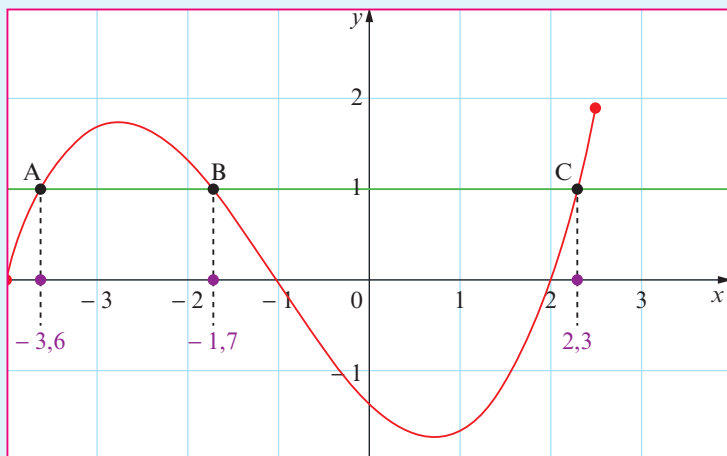
Étape 2. Les solutions sont les abscisses des **points d'intersection** de la courbe avec la droite.



Les solutions sont les antécédents de k .

Exercice résolu

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-4 ; 2,5]$.

**CORRIGÉ**

Étape 1. On place le nombre 1 sur l'axe des ordonnées, la droite d'équation $y = 1$ est tracée.

Étape 2. Les solutions sont les abscisses des points A, B et C : $-3,6$, $-1,7$ et $2,3$ (environ). On note l'ensemble des solutions S de la façon suivante :

$$\mathcal{S} = \{-3,6 ; -1,7 ; 2,3\}$$

MÉTHODE 3**Résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) < k$, où $k \in \mathbb{R}$**

→ Voir les exos 4, 8 et 18.

Étape 1. Placer ou visualiser le nombre k sur l'axe des ordonnées. Tracer ou imaginer la droite d'équation $y = k$.

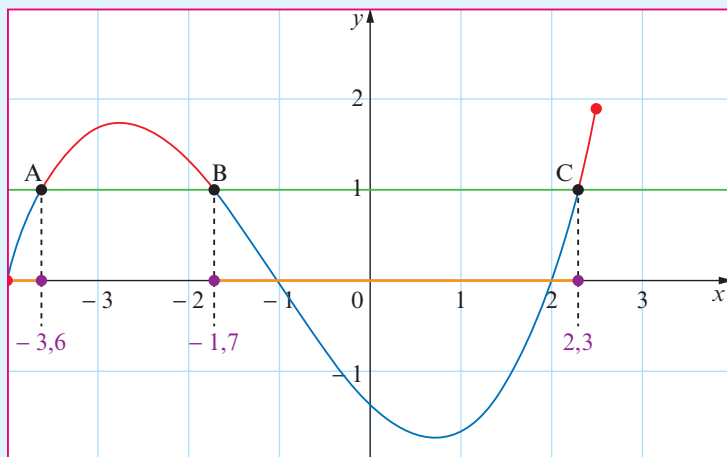
Étape 2. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite.



Ce sont aussi les abscisses des points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k .

Exo résolu

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < 1$ dans l'intervalle $[-4 ; 2,5]$.

**CORRIGÉ**

Étape 1. On place le nombre 1 sur l'axe des ordonnées, la droite d'équation $y = 1$ est tracée.

Étape 2. Les solutions sont les abscisses des points représentés en bleu : de -4 à $-3,6$, puis de $-1,7$ à $2,3$ (environ).

On note l'ensemble des solutions \mathcal{S} avec des intervalles :

$$\mathcal{S} = [-4 ; -3,6[\cup]-1,7 ; 2,3[$$



La méthode est la même avec une inéquation du type $f(x) > k$.

Si les inégalités sont larges ($f(x) \leq k$ ou $f(x) \geq k$), la méthode ne change pas, seuls les crochets des intervalles sont parfois modifiés.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 LE BON VOCABULAIRE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 112

On sait que $f(2) = -1$. Quelles sont les bonnes interprétations ?

- a. -1 a pour image 2 .
- b. -1 est l'image de 2 .
- c. 2 est un antécédent de -1 .
- d. 2 a pour antécédent -1 .
- e. 2 est une solution de l'équation $f(x) = -1$.
- f. Le point M de coordonnées $(2 ; -1)$ est sur la courbe représentative de f .
- g. Le point de la courbe d'ordonnée 2 a pour abscisse -1 .

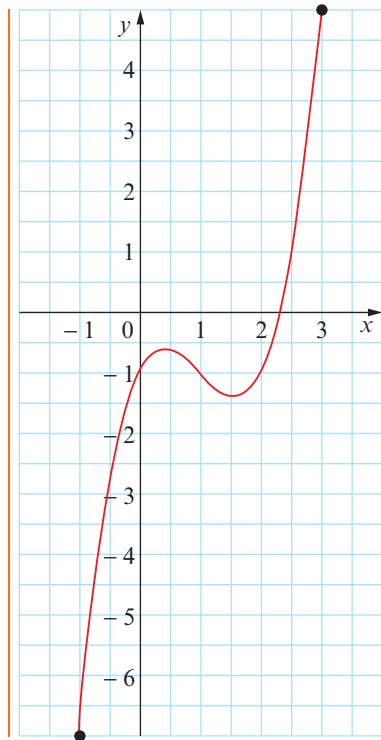
2 VRAI OU FAUX ?

★ ⌚ 5 min ▶ P. 112

Le graphique ci-contre représente une fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a. -1 a pour image 1 .
- b. -2 est l'image de 1 .
- c. 3 a pour image 5 .
- d. -7 est l'image de -1 .
- e. -1 est un antécédent de 0 .
- f. -1 a trois antécédents.
- g. 1 a deux images.
- h. Si $x \in [0 ; 2]$, alors son image appartient à $[-2 ; 0]$.



3 À PARTIR D'UNE EXPRESSION ALGÈBRE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 112

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- a. Calculer $f(3)$.
- b. Le point A de coordonnées $(1 ; 1)$ appartient-il à la courbe de f ?

Calculer $f(1)$.

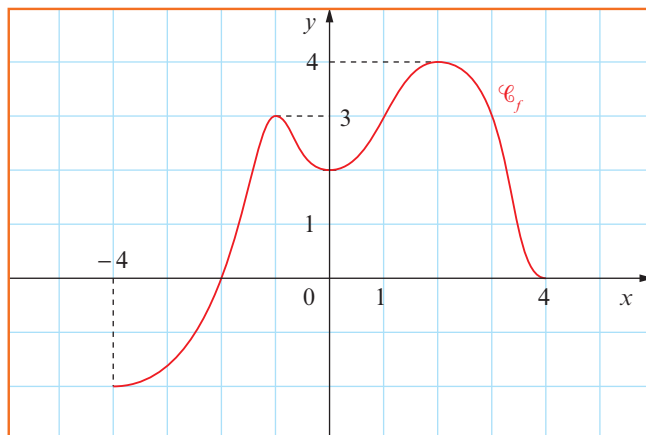
- c. Déterminer les éventuels antécédents de -1 par f .

Résoudre l'équation $f(x) = -1$.

4 À PARTIR D'UNE COURBE

★ 5 min ▶ P. 112

Le graphique ci-dessous représente une fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.



- Que vaut $f(1)$?
- Résoudre dans $[-4 ; 4]$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = -3$.
- Résoudre dans $[-4 ; 4]$ les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) > 3$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Préciser le minimum de f sur $[-1 ; 3]$ et le maximum de f sur $[-4 ; 0]$.



Voir les méthodes 2 et 3.

Le minimum et le maximum sont des valeurs lues sur l'axe des ordonnées.

5 À PARTIR D'UN TABLEAU DE VARIATIONS

★ 5 min ▶ P. 113

On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations :

x	-6	0	3	8
$f(x)$	5	-2	3	0

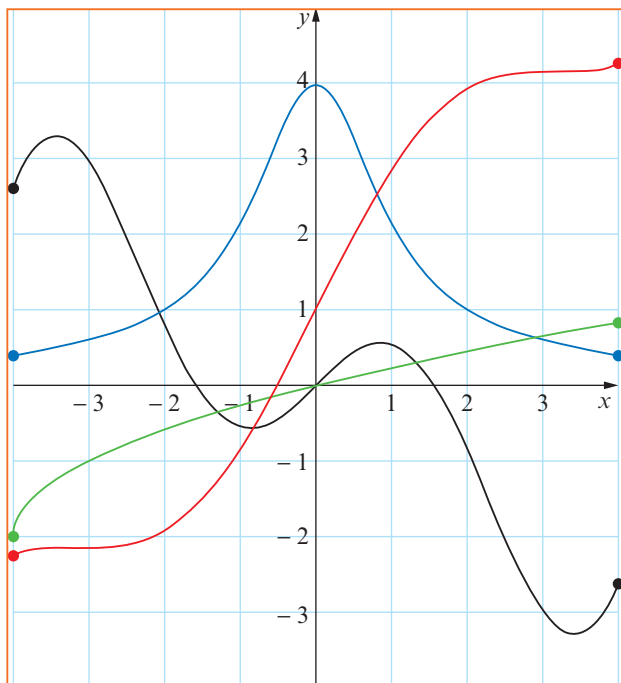
- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Que peut-on dire de l'image de -2 ?
- Comparer $f(0)$ et $f(2)$.
- Donner le minimum et le maximum de f sur $[-6 ; 8]$.
- Indiquer le nombre de solutions des équations $f(x) = 0$, $f(x) = 3,5$ et $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[-6 ; 8]$.

6 UNE PAIRE DE SYMÉTRIES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 113

Les courbes sont tracées sur l'intervalle $[-4 ; 4]$, qui est symétrique par rapport à 0.

Parmi les quatre courbes suivantes, trouver celle qui représente une fonction paire et celle qui représente une fonction impaire.



👍 Penser aux symétries.

7 PAIRE OU IMPAIRE ?

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 113

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 1} \text{ et } g(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}.$$

- Montrer que f est paire.
- Montrer que g est impaire.

👍 Voir la méthode 1.

S'ENTRAÎNER

8 LECTURES GRAPHIQUES

★ ⌚ 10 min ▶ P. 113

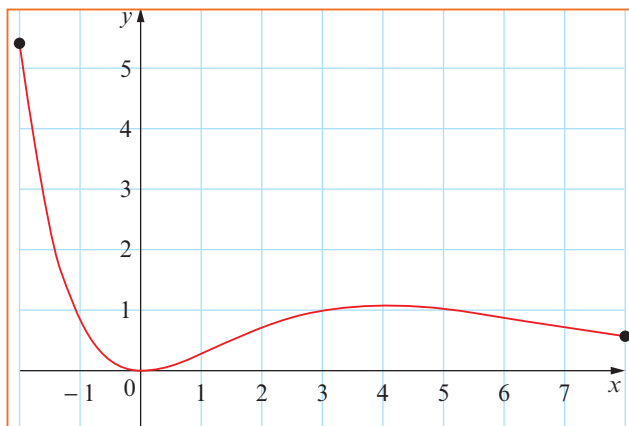
Soit f une fonction définie et représentée ci-dessous sur $[-2 ; 8]$.

a. Tracer sur ce graphique la droite représentant la fonction affine g définie

par $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{9}{5}$.

b. Déterminer graphiquement les solutions dans $[-2 ; 8]$:

- de l'équation $f(x) = g(x)$
- de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.



a. Voir méthode 1 du chapitre 8 si nécessaire.

b. Dans le premier cas, on donne les abscisses d'éventuels points d'intersection entre la courbe et la droite. Dans le deuxième cas, on répond à l'aide d'une réunion d'intervalles. Voir les méthodes 2 et 3.

9 DIX QUESTIONS SUR UN TABLEAU DE VARIATIONS

★ ⌚ 10 min ▶ P. 114

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-4 ; 7]$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

x	-4	2	7
$f(x)$	0	-2	5

a. $f(0) = -4$. b. $f(2,01) < 0$. c. $f(-3) > f(-2)$.

d. Si $x \in [-4 ; 2]$, alors $f(x) \in [-2 ; 0]$. e. Si $x \in [-4 ; 2]$, alors $f(x) \leq 0$.

f. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $[-4 ; 7]$.

g. Le minimum de f sur $[-4 ; 7]$ est 2.

On suppose pour les questions h. à j. que $f(4) = 0$.

h. $f(0) = f(6)$. i. Si $f(x) \in]0 ; 5]$, alors $x \in]2 ; 7]$.

j. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4 ; 2]$.

10 MAXIMUM

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 114

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+2}$.

a. Calculer $f(1)$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 = -2 \frac{(x-1)^2}{x^2+2}$.

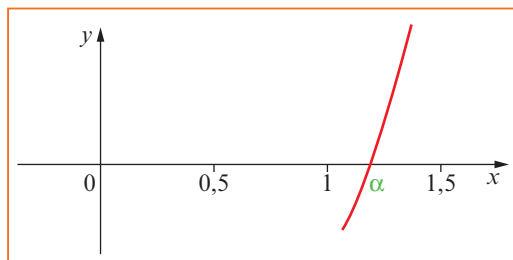
c. En déduire que f admet un maximum sur \mathbb{R} .

👍 Étudier le signe de $f(x) - 2$.

11 ALGORITHME DE DICHOTOMIE

★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 114

Soit f une fonction définie, strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que f change de signe, c'est-à-dire qu'elle admet une unique racine α sur cet intervalle.



👍 On appelle racine d'une fonction une solution de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, c'est l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Sur la figure ci-dessus, α est une racine de la fonction représentée, sa valeur approchée est 1,2.

L'objectif est de trouver une valeur approchée de cette racine à l'aide d'un algorithme utilisant une méthode de dichotomie.

On procède ainsi à partir d'un intervalle $[a; b]$ qui contient α :

On calcule la moyenne de a et de b puis son image $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ont le même signe, alors α n'est pas entre a et $\frac{a+b}{2}$, elle est donc entre $\frac{a+b}{2}$ et b , ce qui fait réduire l'intervalle de recherche à $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ n'ont pas le même signe, c'est le contraire.

On recommence jusqu'à obtenir un intervalle de largeur inférieure à une précision définie à l'avance. Cet intervalle fournit alors un encadrement de la racine.


1. Compléter l'algorithme suivant.

Les variables A et B sont initialisés aux valeurs des bornes de l'intervalle étudié. La précision voulue est 10^{-p} , où p est un entier naturel choisi.

```
Tant que  $B - A > 10^{-p}$ 
Début boucle
     $M \leftarrow \dots$ 
    Si  $f(A)$  et  $f(M)$  sont du même signe alors
         $\dots \leftarrow M$ 
    Sinon
         $\dots \leftarrow \dots$ 
    Fin Si
Fin boucle
```

2. a. Compléter le tableau suivant avec les valeurs successives des différentes variables. Dans cette question, $f(x) = x^3 + 3x - 45$ sur l'intervalle $[3 ; 4]$. La précision voulue est 10^{-1} .

A	3				
B	4				
$B - A > 10^{-1}$	Oui				
M					


 Quatre étapes ont été nécessaires pour obtenir $B - A < 10^{-1}$: les valeurs successives de $B - A$ sont 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,0625.

b. Donner un encadrement de la racine à 10^{-1} près.

3. a. Compléter le programme en langage Python. On utilise à nouveau $f(x) = x^3 + 3x - 45$ sur l'intervalle $[3 ; 4]$, mais avec une précision de 10^{-5} .

```
def f(x):
    return ...
A=float(input("Borne inférieure de l'intervalle a ?"))
B= ...
while ...
    ...
    if f(A)*f(M)>=0 :
        ...
    else :
        ...
print(A,B)
```

b. Combien d'étapes ont été nécessaires ?

 Soit on prévoit le nombre de divisions par 2 nécessaires pour obtenir $B - A < 10^{-5}$, soit on inclut un compteur d'étapes dans le programme.

12 ALGORITHME D'APPROXIMATION D'UN EXTREMUM

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 115

On considère une fonction f , définie sur un intervalle $[A; B]$.
Voici un algorithme qui concerne cette fonction :

```

max ← f(A)
Tant que A < B
Début boucle
    Si f(A) > max alors
        max ← f(A)
    Fin Si
A ← A + 0,01
Fin boucle

```

- Expliquer ce que fait cet algorithme.
- Ajouter une instruction pour que l'algorithme permette d'obtenir en quelle valeur le maximum est atteint.
- Convertir cet algorithme en langage Python et le tester sur la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$, sur l'intervalle $[1; 4]$.



S'inspirer du programme de l'exercice précédent pour les saisies et les affichages.

13 TRAJECTOIRE PARABOLIQUE

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 116

Un enfant souhaite lancer une balle de tennis le plus loin possible.
La trajectoire de la balle est représentée ci-dessous par la fonction f qui donne la hauteur de la balle en fonction de la distance parcourue.
Les longueurs s'expriment en mètres.



- Répondre à l'aide de lectures graphiques :
 - De quelle hauteur s'est effectué le lancer ?
 - À quelle distance a-t-il réussi à lancer la balle ?

c. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

2. On donne :

$$f(x) = -0,028x^2 + 0,57x + 1,5.$$

a. Résoudre l'équation $f(x) = 1,5$.

Interpréter le résultat obtenu.

b. On admet que la courbe admet une symétrie axiale par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Déterminer la position de la balle lorsqu'elle est à son altitude maximale (arrondir au cm près les résultats).



On demande de trouver par le calcul les coordonnées du point pour lequel l'ordonnée est maximale. Utiliser la symétrie et le résultat de la question 2.a.

14 LA BONNE COURBE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 116

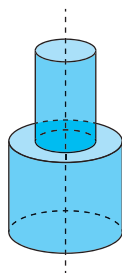
Les cinq récipients ci-dessous ont la même hauteur et la même contenance.

Ils sont remplis en utilisant un même robinet au débit constant.

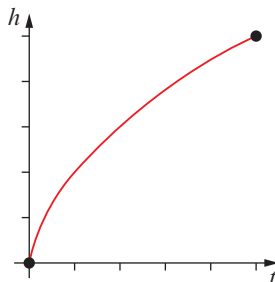
Les cinq graphiques représentent la hauteur d'eau dans un récipient en fonction du temps écoulé depuis le début du remplissage.

Associer la bonne courbe à chaque récipient.

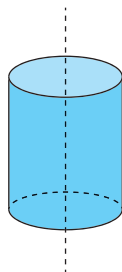
1



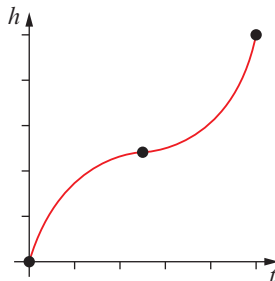
A



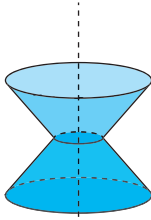
2



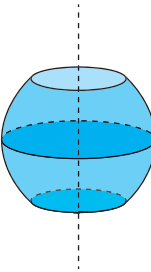
B



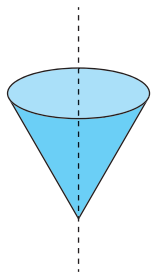
3



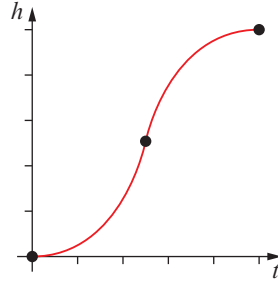
4



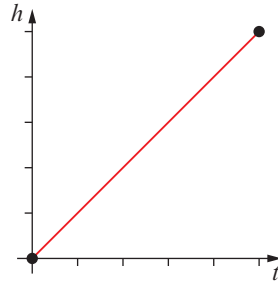
5



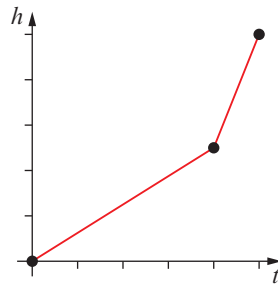
C



D



E

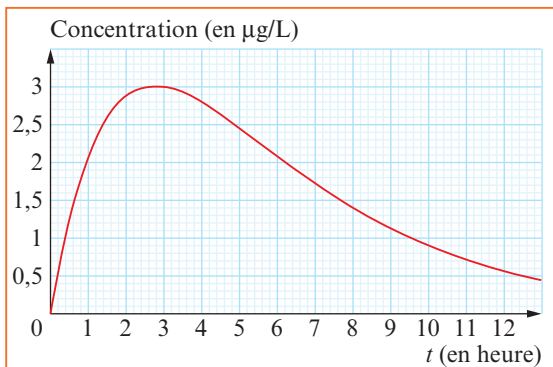


15 PHARMACOCINÉTIQUE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 116

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son absorption par voie orale dans l'organisme, en mesurant sa concentration sanguine au cours du temps. On note $f(t)$ la concentration du médicament, exprimée en $\mu\text{g/L}$, après t heures après l'ingestion.

La courbe représentative de f est la suivante :



- Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
- Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? Quelle est la concentration maximale ?
- On considère que le médicament est actif lorsque la concentration est supérieure à $2 \mu\text{g/L}$. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

16 VOLUME MAXIMAL

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 116

À l'aide d'une feuille cartonnée carrée de côté 36 cm , on souhaite fabriquer une boîte. Pour cela, on enlève à chaque coin un carré de côté x , puis on relève les bords.

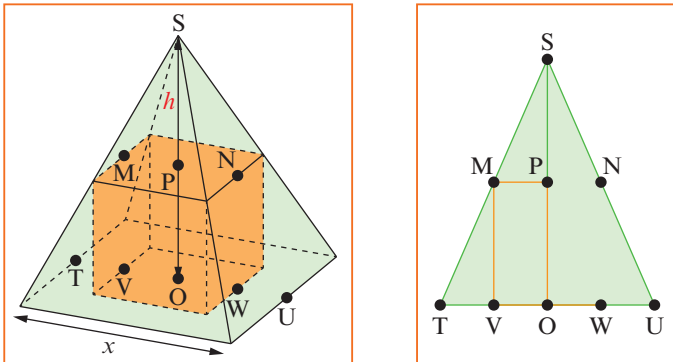
- Quelles sont les dimensions de cette boîte si on choisit $x = 4 \text{ cm}$?
- On note $V(x)$ le volume, en cm^3 . Préciser le domaine de définition de la fonction V , puis exprimer $V(x)$ en fonction de x .
- Tracer la courbe de cette fonction sur une calculatrice. Donner la valeur de x pour que le volume soit maximal. Quel est ce volume maximal ?

17 UN CUBE DANS UNE PYRAMIDE

★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 117

Un cube de côté 4 cm est inscrit dans une pyramide carrée à base carrée. L'objectif de ce problème est de trouver les dimensions de la pyramide pour que son volume soit minimal.

On note h la hauteur de la pyramide et x le côté de la base carrée.



La figure de droite est une coupe dans le plan (STU).

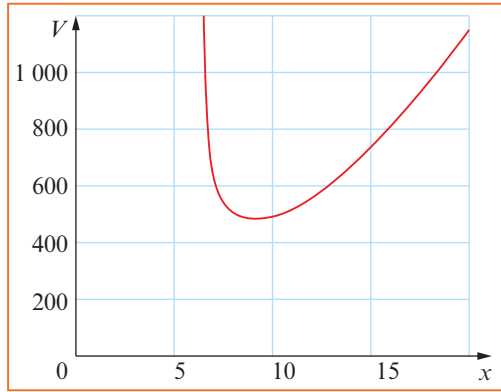
- À quel intervalle appartient x ?
- À l'aide du théorème de Thalès, montrer que $h = \frac{6x}{x-6}$

👍 Sur la figure de droite, on a $h = SO$ et $x = TU$. De plus, $MN = MV = VW = 6$.

- En déduire que le volume de la pyramide en fonction de x s'écrit :

$$V(x) = \frac{2x^3}{x-6}.$$

2. La fonction V a été représentée ci-dessous.
Répondre au problème posé à partir de lectures graphiques.



3. a. Calculer $V(9)$.
b. Montrer que pour tout $x > 6$, $V(x) - V(9) = 2 \frac{(x-9)^2(x+18)}{x-6}$.



Calculer $V(x) - V(9)$ en réduisant au même dénominateur.

Ensuite, développer le numérateur $(x-9)^2(x+18)$ du membre de droite.

- c. Étudier le signe $\frac{(x-9)^2(x+18)}{x-6}$ sur $]6; +\infty[$.
d. Répondre au problème posé en utilisant les résultats de la question 3.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

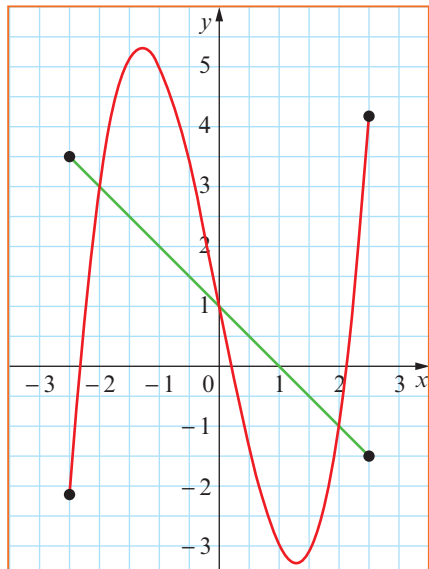
18 QCM

★★ ⌚ 10 min ▶ P. 118

Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

Soit les fonctions f et g , définies sur $\left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$, représentées ci-contre.

1. L'image de -1 par f est :
a. 0 b. 0,4 c. 1 d. 5
2. Dans $\left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$, l'équation $f(x) = 2$ admet :
a. aucune solution
b. une solution
c. deux solutions
d. trois solutions.



3. Si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in$:

- a. $[0 ; 1]$ b. $[-3 ; 1]$ c. $[0 ; 0,2]$ d. $[-2,2 ; 2,2]$

4. Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont :

- a. $]1 ; 2,5]$ b. $[-2,5 ; -2[\cup]0 ; 2[$
 c. $] -2 ; 0[\cup]2 ; 2,5]$ d. $[-2 ; 3[\cup]1 ; -1[$

5. L'expression de $f(x)$ est :

- a. $x^3 + 3x^2 + 1$ b. $x^3 + 3x^2 + x - 1$
 c. $x^3 - 5x + 1$ d. $-x^3 - 4x + 1$

19 TABLEAU DE VARIATIONS

★ | ⌚ 5 min | ► P. 118

Voici le tableau de variations d'une fonction f .

x	0	2	6	8
$f(x)$	1	6	3	5

- Préciser l'ensemble de définition de f .
- Donner l'image de 6.
- Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition ?
- Quel est le minimum de f sur $[3 ; 8]$?
- Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.
- Compléter la phrase suivante :

La fonction f est sur $[2 ; 6]$, donc $6 \dots f(3) \dots f(6)$.

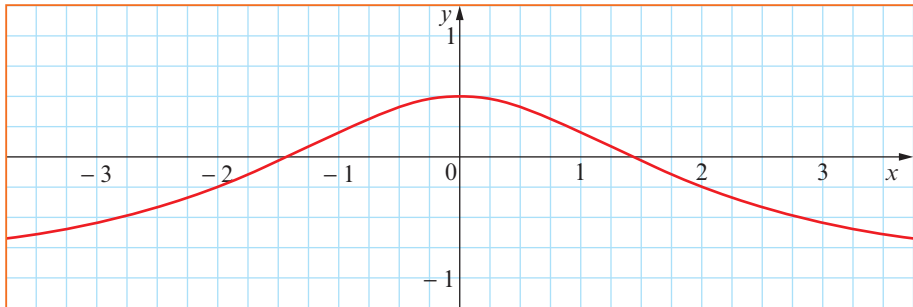
20 PROBLÈME DE SYNTHÈSE

★★ | ⌚ 25 min | ► P. 118

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .



- Montrer que f est paire.
- Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

3. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geq -\frac{1}{4}$.

4. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -1 + \frac{6}{x^2 + 4}.$$

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > -1$.

5. Il semble que f admette un maximum en 0, dont la valeur est $\frac{1}{2}$.

L'objectif de cette question est de justifier cette conjecture.

a. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \frac{1}{2}$.

b. Donner le signe du résultat obtenu et conclure.

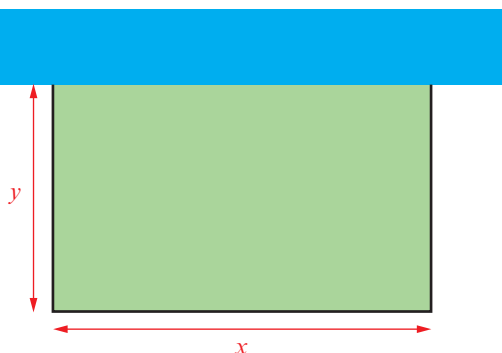
21 L'ENCLOS

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 119

À l'aide d'un rouleau de grillage de 50 m, on souhaite réaliser une clôture autour d'un terrain rectangulaire qui longe une rivière (trois côtés seront donc clôturés).

L'objectif est d'obtenir la plus grande aire possible.

Les longueurs x et y sont exprimées en mètres.



1. Quelle est l'aire obtenue si $x = 10$ m ?

2. On note $A(x)$ l'aire du terrain clôturé, exprimée en m^2 , en fonction de x .

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction A ?

b. Montrer que :

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 25x.$$

👍 Exprimer y en fonction de x pour commencer.

3. À l'aide de la calculatrice, visualiser le maximum et conclure.

ALLER PLUS LOIN

22 ALGORITHME DE CALCUL DE LA LONGUEUR D'UNE PORTION DE PARABOLE

★★★ | 🕒 30 min | ▶ P. 119

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$, et on note P sa courbe dans un repère orthonormé.

Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1.

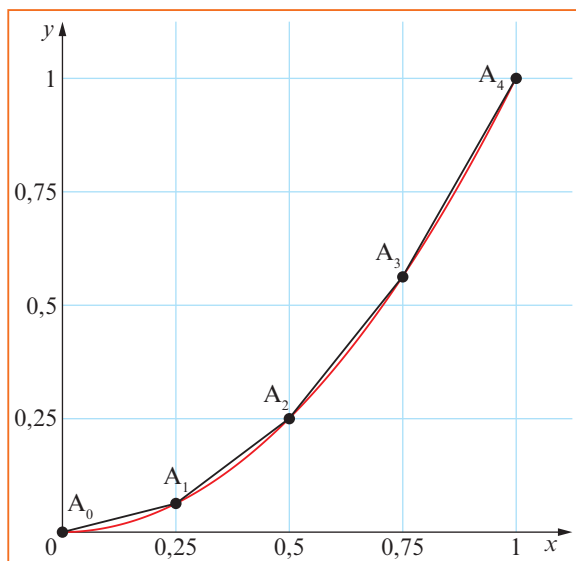
L'objectif est d'obtenir une valeur approchée de la longueur de la courbe P . Pour cela, on prend une subdivision régulière de l'intervalle avec des points A_0, \dots, A_n sur la courbe, dont les abscisses x_0, x_1, \dots, x_n sont calculées régulièrement entre 0 et 1.

Les notations sont choisies de telle sorte que A est le point A_0 , et B le point A_n .

Une approximation de la longueur de la courbe est la longueur de la ligne brisée ainsi obtenue en reliant les points consécutifs de cette subdivision.

Ci-dessous, un exemple avec $n = 4$.


La longueur de la courbe (rouge) est proche de la longueur de la ligne brisée (noire).



1. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
- a. Exprimer x_k en fonction de k et de n .

b. Montrer que :

$$A_k A_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{2k+1}{n}\right)^2}.$$


 Le calcul de la question 1.b. est très difficile. Il est possible de traiter les questions 2. et 3. sans avoir fait cette question.

2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la longueur de la ligne brisée :

```
Longueur = ...  
Pour K allant de ... à ...  
    M =  $\frac{1}{N} \sqrt{1 + \left(\frac{2K+1}{N}\right)^2}$   
    Longueur = ...  
Fin Pour
```

3. Programmer cet algorithme en langage Python et donner une approximation de la longueur de la courbe.

On prendra $N = 100$.

 Pour la racine carrée, c'est la fonction sqrt qu'il faut au préalable importer dans le module math.


23 RECHERCHE

★★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 120

On reprend les données de l'exercice 10.

La fonction f admet-elle un minimum sur \mathbb{R} ?

Pour quelle valeur est-il atteint et quelle est sa valeur ?

 On peut commencer par visualiser la courbe sur une calculatrice, puis s'inspirer des techniques abordées dans l'exercice 10 pour mettre en évidence le maximum.

CORRIGÉS


1 LE BON VOCABULAIRE

Les bonnes interprétations de $f(2) = -1$ sont :

- b. -1 est l'image de 2.
- c. 2 est un antécédent de -1 .
- e. 2 est une solution de l'équation $f(x) = -1$.
- f. Le point M de coordonnées (2 ; -1) est sur la courbe représentative de f .

2 VRAI OU FAUX

- a. Faux. b. Faux. c. Vrai. d. Vrai.
- e. Faux. f. Vrai. g. Faux. h. Vrai.

 g. On répond sans regarder le graphique. Avec une fonction, l'image est unique.

3 À PARTIR D'UNE EXPRESSION ALGÈBRIQUE

- a. $f(3) = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{6}{10} = 0,6$.
- b. $f(1) = 1$, donc le point A de coordonnées (1 ; 1) appartient à \mathcal{C} .
- c. $f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = -1 \Leftrightarrow 2x = -x^2 - 1$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$


En conclusion, -1 n'a qu'un seul antécédent par f , et c'est lui-même.

4 À PARTIR D'UNE COURBE

- a. $f(1) = 3$.
- b. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{-2 ; 4\}$.
 -3 n'a pas d'antécédent, donc l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution.
- c. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $[-4 ; -2[$.
 L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 3$ est $]1 ; 3[$.
- d.

x	-4	-1	0	2	4
f(x)	-2	3	2	4	0

- e. Le minimum de f sur $[-1 ; 3]$ est 2 et le maximum de f sur $[-4 ; 0]$ est 3.


 À la seule vue du tableau de variations, le minimum de f sur $[-1 ; 3]$ ne peut pas être précisé car l'image de 3 n'est pas indiquée.

5 À PARTIR D'UN TABLEAU DE VARIATIONS

- a. L'ensemble de définition de f est $[-6 ; 8]$.
 b. L'image de -2 est comprise entre -2 et 5 .
 c. Sur $[0 ; 2]$, f est croissante, donc $f(0) < f(2)$.
 d. Le minimum de f sur $[-6 ; 8]$ est -2 .
 Le maximum de f sur $[-6 ; 8]$ est 5 .
 e. $f(x) = 0$: 3 solutions. $f(x) = 3,5$: 1 solution. $f(x) = 8$: aucune solution.

6 UNE PAIRE DE SYMÉTRIES

La courbe bleue représente une fonction paire car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe noire représente une fonction impaire car elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.

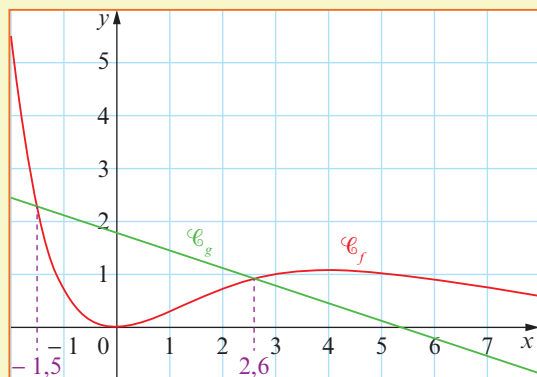
 Les deux autres courbes représentent des fonctions ni paires ni impaires.

7 PAIRE OU IMPAIRE ?

- a. f est définie sur \mathbb{R} , ensemble symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{8}{(-x)^2 + 1} = \frac{8}{x^2 + 1} = f(x)$, donc f est paire.
 b. g est définie sur \mathbb{R} , ensemble symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{8(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{8x}{x^2 + 1} = -g(x)$, donc g est impaire.

8 LECTURES GRAPHIQUES

- a. $g(0) = 1,8$ et $g(3) = 0,8$. On place les points $(0 ; 1,8)$ et $(3 ; 0,8)$, puis on trace la droite.



- b. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{-1,5 ; 2,6\}$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses pour lesquelles la courbe est située au-dessus de la droite.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[-2 ; -1,5] \cup [2,6 ; 8]$.

 L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $[-2 ; -1,5[\cup]2,6 ; 8]$.

9 10 QUESTIONS SUR UN TABLEAU DE VARIATIONS

- a. **Faux.** C'est $f(-4) = 0$.
- b. **Faux.** On ne peut pas l'affirmer.
- c. **Vrai.** La fonction f est décroissante sur $[-3 ; -2]$.
- d. **Vrai.**
- e. **Vrai.**
- f. **Vrai.** -4 est une solution et une deuxième solution se situe entre 2 et 7 .
- g. **Faux.** Le minimum de f sur $[-4 ; 7]$ est -2 .
- h. **Faux.** $f(0) < 0$ et $f(6) > 0$.
- i. **Faux.** Si $f(x) \in]0 ; 5]$, alors $x \in]4 ; 7]$.
- j. **Faux.** $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4 ; 4]$.

10 MAXIMUM

a. $f(1) = \frac{4 \times 1 + 2}{1^2 + 2} = 2$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{4x + 2}{x^2 + 2} - 2 = \frac{4x + 2 - 2(x^2 + 2)}{x^2 + 2} \\ &= -2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2} = -2 \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2}. \end{aligned}$$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$, donc $-2 \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 0$.

Par conséquent, $f(x) - 2 \leq 0$ ce qui équivaut à $f(x) \leq 2$.

Comme $f(1) = 2$, on en déduit que f admet un maximum sur \mathbb{R} en 1 , et que ce maximum est égal à 2 .

11 ALGORITHME DE DICHOTOMIE

1.

Tant que $B - A > 10^{-p}$
 Début boucle
 $M \leftarrow \frac{A+B}{2}$
 Si $f(A)$ et $f(M)$ sont du même signe alors
 $A \leftarrow M$
 Sinon
 $B \leftarrow M$
 Fin Si
 Fin boucle


2. a.

A	3	3	3,25	3,25	3,25
B	4	3,5	3,5	3,375	3,3125
$B - A > 10^{-1}$	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
M	3,5	3,25	3,375	3,3125	

b. $3,25 < \alpha < 3,3125$.

3. a.

```
def f(x):
    return x**3+3*x-45
A=float(input("Borne inférieure de l'intervalle A ?"))
B=float(input("Borne inférieure de l'intervalle B ?"))
while B-A>10**(-5)
    M=(A+B)/2
    if f(A)*f(M)>=0 :
        A=M
    else :
        B=M
print(A,B)
```

 En exécutant ce programme, on obtient $3,276374 < \alpha < 3,276383$.

b. En rajoutant un compteur d'étapes dans le programme, on observe que 17 étapes sont nécessaires pour obtenir l'encadrement voulu de α .

Ce compteur N est initialisé à la valeur 0 avant la boucle. Il est incrémenté de 1 unité à chaque fois que la boucle est parcourue. À la fin, on affiche sa valeur.

```
N=0
while ...:
    ...
    N=N+1
print(A, B, N)
```

 **Autre méthode**

À chaque étape, $B - A$ est divisé par 2.

Il suffit de trouver le premier entier naturel n tel que $\frac{1}{2^n} < 10^{-5}$.

Quelques essais à la calculatrice montrent que $n = 17$.

12 ALGORITHME D'APPROXIMATION D'UN EXTREMUM

a. Cet algorithme permet d'obtenir une valeur approchée au centième près du maximum de f sur l'intervalle $[A ; B]$.

b. Il suffit d'ajouter la ligne $X_{max} \leftarrow A$, juste avant le « Fin Si ».

c.

```
def f(x):
    return -x**3+4*x**2+x-4
A=float(input("Borne inférieure de l'intervalle A ?"))
B=float(input("Borne inférieure de l'intervalle B ?"))
max=f(A)
while A<B:
    if f(A)>max :
        max=f(A)
        xmax=A
    A=A+0.01
print("abscisse du maximum :",xmax, "valeur du maximum :",max)
```

On obtient un maximum proche de 8,21, atteint à l'abscisse 2,79 environ.

13 TRAJECTOIRE PARABOLIQUE

1. a. L'ordonnée du point d'abscisse 0 est 1,5 : le lancer s'effectue d'une hauteur de 1 m 50.

b. La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 22,7 environ : il a lancé sa balle 22 m 70 plus loin.

c. Le maximum de f est 4,4 environ : la hauteur maximale atteinte par la balle est 4 m 40.

2. a.

$$\begin{aligned} -0,028x^2 + 0,57x + 1,5 = 1,5 &\Leftrightarrow -0,028x^2 + 0,57x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(-0,028x + 0,57) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,57}{0,028} \approx 20,36. \end{aligned}$$

La balle se retrouve à une altitude de 1,5 m après une distance horizontale de 20,36 m environ.

b. Les points de coordonnées (0 ; 1,5) et (20,36 ; 1,5) sont symétriques par rapport à cet axe.

L'abscisse du point d'ordonnée maximale est donc $\frac{20,36}{2} = 10,18$.

L'ordonnée est l'image de 10,18 : $f(10,18) \approx 4,40$.

À son altitude maximale, les coordonnées de la balle sont **(10,18 ; 4,40)**.



Un projectile qui n'est pas propulsé verticalement suit une trajectoire parabolique, c'est-à-dire que la fonction qui la décrit est une fonction du second degré. Ces fonctions sont étudiées en détail en classe de Première.

14 LA BONNE COURBE

1-E ; 2-D ; 3-C ; 4-B ; 5-A

15 PHARMACOCINÉTIQUE

a.

x	0	2,75	$+\infty$
$f(x)$	0	3	0

b. La concentration est maximale au bout de 2 h 45 min environ, et à ce moment, elle vaut environ 3 $\mu\text{g/L}$.

c. La concentration dépasse 2 $\mu\text{g/L}$ entre 1 h et 6 h 15 min environ après l'ingestion du médicament.

Celui-ci est actif pendant 5 h 15 min environ.

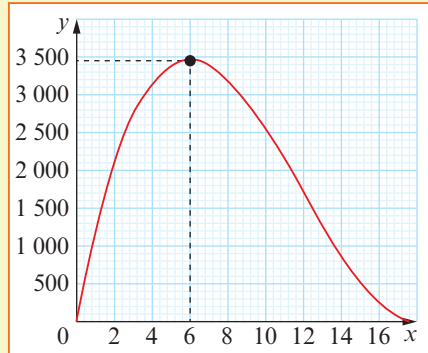
16 VOLUME MAXIMAL

a. La base est un carré de côté 28 cm, la hauteur des bords est de 4 cm.

b. La fonction V est définie sur l'intervalle $]0 ; 18[$ et $V(x) = x(36 - 2x)^2$.

c. Le volume maximal est atteint lorsque $x = 6$.

Le volume maximal est alors $V(6) = 6(36 - 2 \times 6)^2 = 3\,456 \text{ cm}^3$.



17 UN CUBE DANS UNE PYRAMIDE

1. a. Le côté de la pyramide est strictement supérieur au côté du cube, donc $x \in]6; +\infty[$.

b. T, V, O et T, M, S sont alignés dans cet ordre et (VM)//(OS), ce qui justifie l'utilisation du théorème de Thalès :

$$\frac{OS}{VM} = \frac{OT}{VT}$$

D'où $\frac{h}{6} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 3}$, ce qui donne $h = \frac{\frac{6x}{2}}{\frac{x-6}{2}} = \frac{6x}{x-6}$.

c. Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur :

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3}x^2 \frac{6x}{x-6} = \frac{2x^3}{x-6}.$$

2. Le maximum de V semble atteint pour $x = 9$. Ainsi, le volume de la pyramide est minimal lorsque la pyramide a une base carrée de 9 cm de côté.

Sa hauteur est alors 18 cm. Avec ces dimensions, le volume est 486 cm³.

3. a. $V(9) = 486$.

b.

$$(x-9)^2(x+18) = (x^2 - 18x + 81)(x+18) = x^3 - 18x^2 + 81x + 18x^2 - 324x + 1458 = x^3 - 243x + 1458.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } V(x) - V(9) &= \frac{2x^3}{x-6} - 486 = \frac{2x^3 - 486(x-6)}{x-6} \\ &= \frac{2x^3 - 486x + 2916}{x-6} = 2 \frac{x^3 - 243x + 1458}{x-6} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc bien } V(x) - V(9) = 2 \frac{(x-9)^2(x+18)}{x-6}.$$

c. Sur l'intervalle $]6; +\infty[$, on a $(x-9)^2 \geq 0$, $x-6 > 0$, et $x+18 > 0$.

On en déduit que $\frac{(x-9)^2(x+18)}{x-6}$ est toujours positif sur cet intervalle.

d. Par conséquent, pour tout $x \in]6; +\infty[$, $V(x) \geq V(9)$.

Ainsi, la fonction V admet un minimum pour $x = 9$, ce minimum est $V(9) = 486$.

Ces calculs confirment la lecture graphique effectuée à la question 2.

18 QCM

- Réponse d.** Le point de coordonnées $(-1; 5)$ appartient à la courbe.
- Réponse d.** Trois points appartenant à cette courbe ont une ordonnée égale à 2.
- Réponse b.** Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction est décroissante, les images sont comprises entre -3 et 1.
- Réponse b.** La courbe de f est au-dessous de celle de g lorsque x appartient à $[-2, 5; -2[$ puis à $]0; 2[$.
- Réponse c.** Seule cette expression est compatible avec $f(-1) = 5$.

19 TABLEAU DE VARIATIONS

- L'ensemble de définition de f est $[0; 8]$.
- L'image de 6 est 3.
- Le maximum de f sur $[0; 8]$ est 6.
- Le minimum de f sur $[3; 8]$ est 3.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ est 2.
- La fonction f est **décroissante** sur $[2; 6]$, donc $6 > f(3) > f(6)$.


20 PROBLÈME DE SYNTHÈSE

1. f est définie sur \mathbb{R} , qui est un ensemble symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{-(-x)^2 + 2}{(-x)^2 + 4} = \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} = f(x)$, donc f est paire.

$$2. \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2.$$


Dans $[0; +\infty[$, $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

 Dans \mathbb{R} , il y a deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

$$3. \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2 + 2 \geq -\frac{1}{4}(x^2 + 4), \text{ car } x^2 + 4 > 0.$$

$$-x^2 + 2 \geq -\frac{1}{4}(x^2 + 4) \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$$

Dans $[0; +\infty[$, $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

 Dans \mathbb{R} , l'ensemble des solutions de $x^2 \leq 4$ est $[-2; 2]$.

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + 1 = \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} + 1 = \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} + \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4} = \frac{6}{x^2 + 4}.$$

On en déduit que $f(x) = -1 + \frac{6}{x^2 + 4}$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{6}{x^2 + 4} > 0$, donc $f(x) > -1$.

5. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 + 2}{x^2 + 4} - \frac{1}{2} = \frac{-2x^2 + 4}{2(x^2 + 4)} - \frac{x^2 + 4}{2(x^2 + 4)} = \frac{-3x^2}{2(x^2 + 4)}.$$

b. $\frac{-3x^2}{2(x^2+4)} \leq 0$, donc $f(x) - \frac{1}{2} \leq 0$ ce qui équivaut à $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Comme $f(0) = \frac{1}{2}$, on déduit que f admet un maximum en 0, et ce maximum est $\frac{1}{2}$.

 Prouver $f(x) \leq \frac{1}{2}$ ne suffit pas, il faut vérifier que $\frac{1}{2}$ est atteint en calculant l'image de 0.

21 L'ENCLOS

1. Si $x = 10$ m, alors $y = 20$ m et l'aire est égale à **200 m²**.

2. a. La fonction A est définie sur l'intervalle $]0 ; 50[$.

b. $A(x) = xy = x\left(\frac{50-x}{2}\right) = \frac{50x-x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 25x$.

3. À l'aide de la calculatrice, on trace la courbe de cette fonction.

On lit que la fonction A est maximale pour $x = 25$ m.

Les dimensions de l'enclos sont alors $x = 25$ et $y = 12,5$, l'aire maximale est **312,5 m²**.

22 ALGORITHME DE CALCUL DE LA LONGUEUR D'UNE PORTION DE PARABOLE

1. a. $x_k = \frac{k}{n}$.

b. Tout d'abord, $A_k A_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$

La différence des abscisses est :

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}.$$

La différence des ordonnées est :

$$y_{k+1} - y_k = x_{k+1}^2 - x_k^2 = (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k) = \frac{1}{n} \times \frac{2k+1}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A_k A_{k+1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{2k+1}{n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{2k+1}{n}\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{2k+1}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

2. Voici l'algorithme complété :

Longueur = 0

Pour K allant de 0 à $N - 1$

$$M = \frac{1}{N} \sqrt{1 + \left(\frac{2k+1}{n}\right)^2}$$

Longueur = Longueur + M

Fin Pour

3. Voici le programme en langage Python :

```
from math import sqrt
# la fonction racine carrée fait partie du module math
LONGUEUR=0
N=100
for K in range(N) : # la boucle est effectuée N fois
# le compteur de boucle K prend les valeurs 0, 1, ... jusqu'à N-1.
    M=sqrt(1+((2*K+1)/N)**2)/N
    LONGUEUR=LONGUEUR+M
print(LONGUEUR)
```

À l'exécution de ce programme, on constate que la longueur de la courbe est environ 1,479.

23 RECHERCHE

La courbe étant tracée, on observe un minimum en -2 .

Ce minimum est $f(-2) = -1$.

Pour le prouver (conformément à la méthode étudiée à l'exercice 10), on montre que la différence $f(x) - (-1)$ est toujours positive :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + 1 = \frac{4x + 2}{x^2 + 2} + 1 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2} = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 2}.$$

Cette quantité est clairement positive (un carré étant toujours positif), donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(-2)$, ce qui prouve bien que f admet un minimum en -2 et que ce minimum est égal à -1 .

5 Fonctions de référence

I LES FONCTIONS AFFINES $x \mapsto ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$ ET $b \in \mathbb{R}$)

1. Généralités

- ▶ Leur ensemble de définition est \mathbb{R} .
- ▶ La représentation graphique est une droite d'équation $y = ax + b$.
 a est le coefficient directeur ; b l'ordonnée à l'origine.

PROPRIÉTÉ :

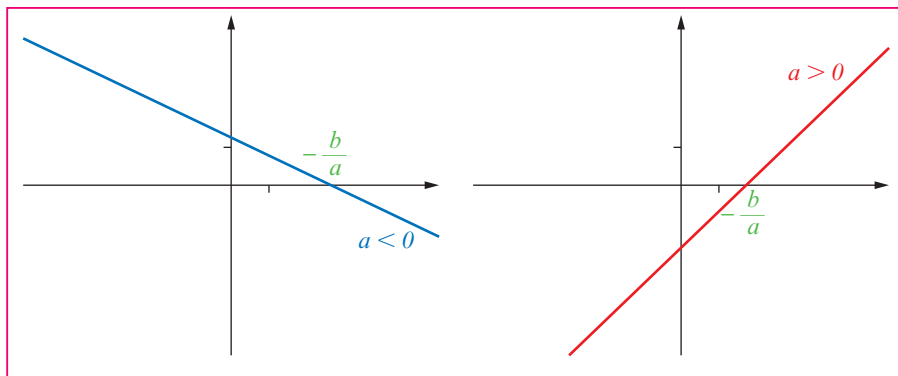
L'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement de la variable.
Ainsi, pour tous réels distincts x_1 et x_2 :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. Signes et variations

PROPRIÉTÉ :

- Si $a > 0$, elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$, elle est strictement décroissante sur \mathbb{R} .



- ▶ La fonction $f(x) = ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$.
- ▶ Tableau de signes :

• $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

• $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

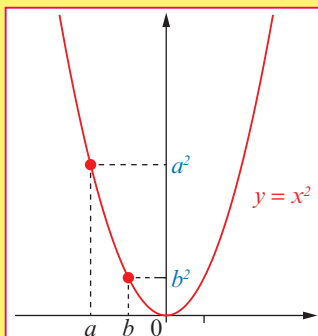
II LA FONCTION CARRÉ $x \mapsto x^2$

1. Généralités

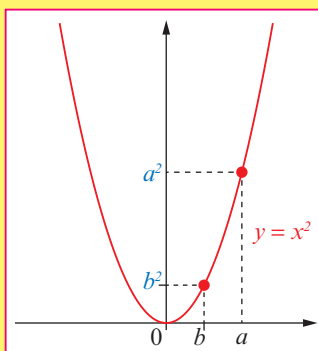
- ▶ Son ensemble de définition est \mathbb{R} .
- ▶ Elle est paire.
- ▶ Elle est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty [$.



- Deux nombres négatifs et leurs carrés ne sont pas rangés dans le même ordre :
si $a < b < 0$, alors $a^2 > b^2$.



- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre :
si $0 < a < b$, alors $a^2 < b^2$.



2. Résolution d'équations et d'inéquations

- ▶ Résolution dans \mathbb{R} de l'équation : $x^2 = a$.

Si $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Si $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Si $a < 0$ l'équation n'a pas de solution.

- ▶ Résolution d'inéquations :

$$x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 \geq 36 \Leftrightarrow x \geq 6 \text{ ou } x \leq -6$$

III LA FONCTION CUBE $x \mapsto x^3$

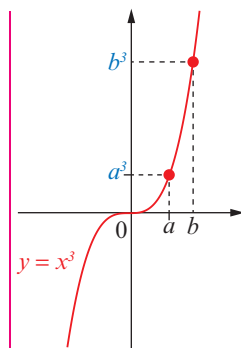
1. Généralités

- ▶ Son ensemble de définition est \mathbb{R} .
- ▶ Elle est impaire.
- ▶ Elle est croissante sur \mathbb{R} .



Deux nombres et leurs cubes sont rangés dans le même ordre :

$$\text{Si } a < b, \text{ alors } a^3 < b^3.$$



2. Résolution d'équations et d'inéquations

- ▶ Résolution dans \mathbb{R} de l'équation : $x^3 = a$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$$



Le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ est la racine cubique de a .

C'est l'unique antécédent de a par la fonction cube.

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$, car $2^3 = 8$ et $\sqrt[3]{-27} = -3$, car $(-3)^3 = -27$.

- ▶ Résolution dans \mathbb{R} d'inéquations.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x^3 \leq a \Leftrightarrow x \in]-\infty; \sqrt[3]{a}] \text{ et } x^3 \geq a \Leftrightarrow x \in [\sqrt[3]{a}; +\infty[$$

EXEMPLES :

$$x^3 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ et } x^3 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

IV LA FONCTION RACINE CARRÉE $x \mapsto \sqrt{x}$

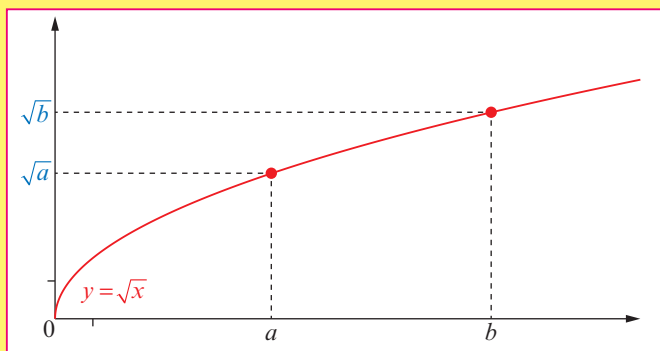
1. Généralités

- ▶ Son ensemble de définition est $[0; +\infty[$.
- ▶ Elle est croissante sur $[0; +\infty[$.



Deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre :

$$\text{si } 0 \leq a < b, \text{ alors } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$



2. Résolution d'équations et d'inéquations

► Résolution de l'équation : $\sqrt{x} = a$.

Si $a \geq 0$: $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$.

Si $a < 0$: l'équation $\sqrt{x} = a$ n'a pas de solution.

► Résolution dans $[0; +\infty[$ d'inéquations.

Pour tout $a > 0$:

$$\sqrt{x} \leq a \Leftrightarrow x \in [0; a^2] \text{ et } \sqrt{x} \geq a \Leftrightarrow x \in [a^2; +\infty[$$

EXEMPLES :

$$\sqrt{x} \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 100 \text{ et } \sqrt{x} \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 25.$$

V LA FONCTION INVERSE $x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Généralités

► Son ensemble de définition est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

► Elle est impaire.

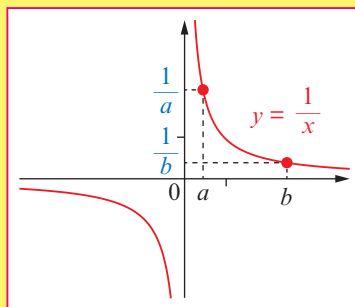
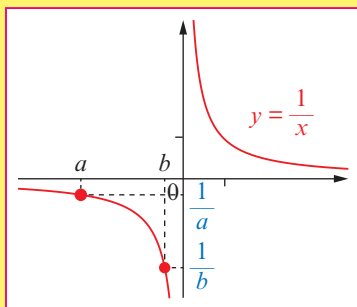
► Elle est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$.



Deux nombres de mêmes signes et leurs inverses ne sont pas rangés dans le même ordre :

• si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

• si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.



2. Résolution d'équations et d'inéquations

► Résolution dans \mathbb{R}^* de l'équation : $\frac{1}{x} = a$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:

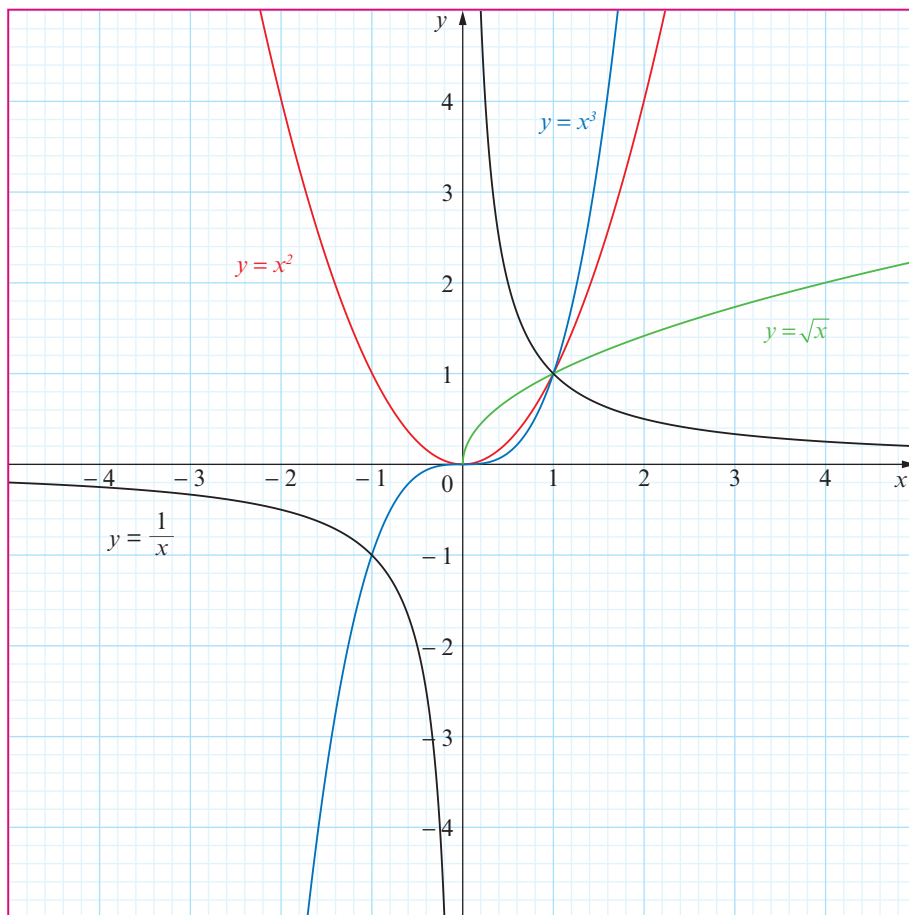
$$\frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$$


L'équation $\frac{1}{x} = 0$ n'a pas de solution.

EXEMPLE : $\frac{1}{x} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -0,75$.

VI COURBES

Voici les courbes de 4 fonctions de référence étudiées dans les paragraphes précédents.



👍 Voir l'exercice 15 pour comparer x ; x^2 ; x^3 ; \sqrt{x} ; $\frac{1}{x}$.

MÉTHODE 1**Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux images**

→ Voir les exos 2, 3 et 13.

À partir de la donnée de deux images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on détermine l'expression de la fonction affine sous la forme $f(x) = ax + b$.

Étape 1. Calculer le coefficient $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Étape 2. Calculer le coefficient $b = f(x_1) - ax_1$.

👍 Ou $b = f(x_2) - ax_2$, au choix.

Exo résolu

Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que :

$$f(5) = 8 \text{ et } f(12) = 92.$$

CORRIGÉ

Étape 1. $a = \frac{f(12) - f(5)}{12 - 5} = \frac{92 - 8}{12 - 5} = \frac{84}{7} = 12$

Étape 2. $b = f(5) - a \times 5 = 8 - 12 \times 5 = 8 - 60 = -52$

Donc $f(x) = 12x - 52$

👍 À l'étape 2, il est possible d'utiliser l'autre image.

$$b = f(12) - a \times 12 = 92 - 12 \times 12 = 92 - 144 = -52$$

MÉTHODE 2**Résoudre une inéquation en utilisant la courbe de la fonction inverse**

→ Voir les exos 4, 11, 12 et 26.

L'objectif est de résoudre une inéquation de la forme $\frac{1}{x} < a$ ou $\frac{1}{x} > a$.

Étape 1. Placer a sur l'axe des ordonnées, visualiser son antécédent.

Étape 2. Visualiser l'intervalle de solutions dont une borne est l'antécédent de a .

Exo résolu

Résoudre dans l'inéquation $\frac{1}{x} > 0,2$.

CORRIGÉ

Étape 1. On place 0,2 sur l'axe des ordonnées et on visualise son antécédent : 5 (5 et 0,2 sont inverses l'un de l'autre).



Étape 2. L'ensemble des solutions dans $]0; +\infty[$ de l'inéquation $\frac{1}{x} > 0,2$ est $]0; 5[$.



L'ensemble des solutions dans $]0; +\infty[$ de l'inéquation $\frac{1}{x} < 0,2$ est $]5; +\infty[$.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 NOTIONS DE BASE POUR LES FONCTIONS AFFINES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 139

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -2x + 7$.

- Calculer l'image de -2 .
- Déterminer l'antécédent de -25 par f .
- Donner le sens de variation de f .
- Donner le signe de f .

2 CALCUL D'UNE IMAGE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 139

Une fonction affine f est telle que $f(10) = 40$ et $f(30) = 65$.
Calculer $f(1000)$.



Voir la méthode 1.

3 AFFINE OU PAS ?

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 139

On donne $f(-21) = 45$, $f(9) = 59$ et $f(27) = 69$, la fonction f est-elle affine ?



Voir la méthode 1.

4 VRAI OU FAUX ?

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 140

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq x^2 \leq 9$.
- Si $-2 \leq x \leq 5$, alors $-8 \leq x^3 \leq 125$.
- Si $1 \leq x \leq 25$, alors $1 \leq \sqrt{x} \leq 5$.
- Si $x \geq 10$, alors $\frac{1}{x} \geq 0,1$.



Voir la méthode 2.

2. Énoncer les réciproques des propositions aux questions 1. a, b, c.
Dire sans justifier si elles sont vraies ou fausses.

5 INTERVALLES ET FONCTION CARRÉ

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 140

Donner l'intervalle auquel appartient x^2 dans les cas suivants :

- $x \in]-\infty ; 0]$
- $x \in]-3 ; 1]$
- $x \in]-2 ; +\infty[$
- $x \in [-8 ; -2[$

6 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION CARRÉ

★ ⌚ 5 min ▶ P. 140

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a. $x^2 = 36$ b. $x^2 = 1$ c. $x^2 = 0$

d. $x^2 = -16$ e. $x^2 = 7$ f. $x^2 = \frac{25}{4}$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $x^2 \leq 4$ b. $x^2 > 9$ c. $2 < x^2 \leq 16$

d. $x^2 \leq 0$ e. $x^2 < -1$ f. $x^2 > -4$

7 INTERVALLES ET FONCTION CUBE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 140

Donner l'intervalle auquel appartient x^3 dans les cas suivants :

a. $x \in]-\infty; 0]$ b. $x \in]-3; 1]$

c. $x \in]-2; +\infty[$ d. $x \in [-8; -2[$

8 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION CUBE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 140

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a. $x^3 = 27$ b. $x^3 = 1$ c. $x^3 = 0$

d. $x^3 = -8$ e. $x^3 = 7$ f. $x^3 = -\frac{1}{64}$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $x^3 \leq 64$ b. $x^3 > 1$ c. $8 < x^3 \leq 1000$

d. $x^3 \leq 0$ e. $x^3 < -1$ f. $x^3 > -125$

9 INTERVALLES ET FONCTION RACINE CARRÉE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 141

Donner l'intervalle auquel appartient \sqrt{x} dans les cas suivants :

a. $x \in [0; +\infty[$ b. $x \in [1; 9]$

c. $x \in [8; 12[$ d. $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{9}{16}\right[$

10 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION RACINE CARRÉE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 141

1. Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

a. $\sqrt{x} = 7$ b. $\sqrt{x} = 1$ c. $\sqrt{x} = 0$

d. $\sqrt{x} = -8$ e. $\sqrt{x} = 0,1$ f. $\sqrt{x} = \frac{4}{11}$

2. Résoudre dans $[0; +\infty[$ les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{x} \leq 12$ b. $\sqrt{x} > \frac{3}{2}$ c. $10 < \sqrt{x} \leq 100$

d. $\sqrt{x} \leq 0$ e. $\sqrt{x} < -2$ f. $\sqrt{x} > -3$

11 INTERVALLES ET FONCTION INVERSE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 141

Donner l'intervalle auquel appartient $\frac{1}{x}$ dans les cas suivants :

a. $x \in]-\infty; 0[$ b. $x \in]-3; -1]$

c. $x \in]1; +\infty[$ d. $x \in \left[\frac{1}{4}; 4\right[$



Voir la méthode 2.

12 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION INVERSE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 141

1. Résoudre dans \mathbb{R}^* les équations suivantes :

a. $\frac{1}{x} = 6$ b. $\frac{1}{x} = 1$ c. $\frac{1}{x} = 0$

d. $\frac{1}{x} = -9$ e. $\frac{1}{x} = 0,01$ f. $\frac{1}{x} = -\frac{8}{7}$

2. Résoudre dans \mathbb{R}^* les inéquations suivantes :

a. $\frac{1}{x} \leq -4$ b. $\frac{1}{x} \geq \frac{4}{5}$ c. $1 < \frac{1}{x} \leq 10$

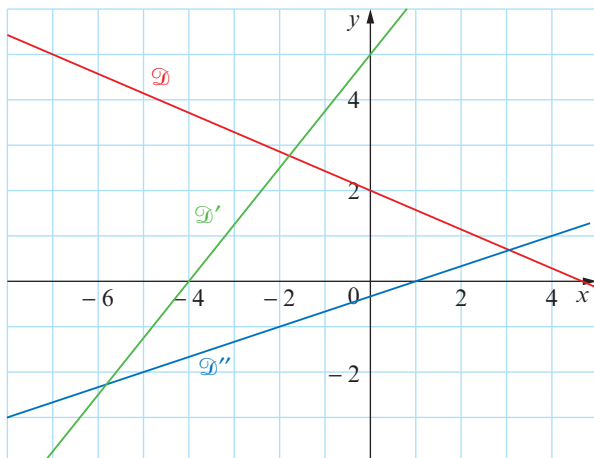
d. $\frac{1}{x} \leq 0$ e. $\frac{1}{x} < -\frac{4}{3}$ f. $\frac{1}{x} > -5$



Voir la méthode 2.

S'ENTRAÎNER**13 FONCTION AFFINE ET DROITE**

★★ ⌚ 10 min ▶ P. 141



Donner (sans justifier) l'expression de la fonction affine représentée par chaque droite.



Utiliser des points à coordonnées entières.

La droite \mathcal{D} passe par les points de coordonnées $(-7;5)$ et $(0;2)$.

La droite \mathcal{D}' passe par les points de coordonnées $(-4;0)$ et $(0;5)$.

La droite \mathcal{D}'' passe par les points de coordonnées $(-5;-2)$ et $(1;0)$.

Voir la méthode 1.

14 LE BON ORDRE (1)

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 142

- Étudier le signe de $x^2 - x$, pour $x \geq 0$.
- Étudier le signe de $x^3 - x^2$, pour $x \geq 0$.
- En déduire l'ordre des nombres x, x^2, x^3 .



a. et b. Factoriser les expressions. Un tableau de signes est envisageable, mais ce n'est pas obligatoire.

15 LE BON ORDRE (2)

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 142

Ci-dessous sont représentées les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ranger les nombres $x; x^2; x^3; \sqrt{x}; \frac{1}{x}$ en distinguant plusieurs cas si besoin.



Les courbes ne sont pas légendées, c'est volontaire, à vous de les reconnaître.


16 VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 142

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. a. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
Calculer $f(b) - f(a)$.
- b. En déduire que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

 Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

- c. Quel est le sens de variation de f sur $] -\infty; 0]$?

 Utiliser le fait que f est paire.


17 VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 142

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- a. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

- b. En déduire que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

 Étudier le signe du quotient obtenu à la première question.

18 VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 143


On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. a. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
Calculer $f(b) - f(a)$.
- b. En déduire que f est décroissante sur $] 0; +\infty[$.

 Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

- c. Quel est le sens de variation de f sur $] -\infty; 0[$?

 Utiliser le fait que f est impaire.

19 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 143

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a. $(x - 3)^2 = 49$

b. $(5x - 2)^2 = 0$

c. $(4 - 3x)^2 = -9$

d. $3(x - 1)^2 - 4 = 2$

e. $\left(\frac{7}{4}x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{144}$

f. $(x - 4)(x + 4) = 105$

g. $(x - 3)^3 = 8$

h. $2(x - 3)^3 = -128$

i. $\sqrt{x^2 + 100} = 26$

j. $\frac{1}{x^2 + 1} = 0,8$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle précisé :

a. $\sqrt{x + 12} = 7$ dans $[-12; +\infty[$.

b. $\sqrt{10 - 2x} = 4$ dans $]-\infty; 5]$.

20 CELSIUS ET FAHRENHEIT

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 144

Pour mesurer une température, nous utilisons le degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$), mais il est aussi possible d'utiliser le degré Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). La correspondance entre les deux se fait au moyen d'une fonction affine.

1. a. Sachant que l'eau gèle à 32°F et bout à 212°F , déterminer la formule permettant de donner la température en degrés Fahrenheit, en connaissant la température en degrés Celsius.



On note F et C les températures en degrés Fahrenheit et en degrés Celsius. L'expression à trouver est de la forme $F = aC + b$.

b. Quand la température augmente de 10°C , quelle est l'augmentation en $^{\circ}\text{F}$?



Utiliser la propriété des fonctions affines : « l'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement de la variable. »

c. S'il fait -20°C , donner la température en degrés Fahrenheit.

d. Il y a une température qui a la même mesure en degrés Celsius et en degrés Fahrenheit.

Déterminer laquelle à l'aide d'une résolution d'équation.



Résoudre l'équation $aC + b = C$ avec les coefficients trouvés à la question 1. a.

2. a. Déterminer la formule permettant de donner la température en degrés Celsius, en connaissant la température en degrés Fahrenheit.

b. Un livre de Ray Bradbury s'intitule *Fahrenheit 451*.

Quelle température, en $^{\circ}\text{C}$, cela donne-t-il ? Arrondir à l'unité près.

3. Représenter la première fonction affine, en plaçant les degrés Celsius en abscisse et les degrés Fahrenheit en ordonnée.

21 DILATATION THERMIQUE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 145

Un laboratoire étudie la dilatation d'une tige en acier. Les mesures effectuées donnent les résultats suivants :

Température (°C)	0	50	100	200	400
Longueur (cm)	50	50,03	50,06	50,12	50,24

À quelle température faut-il porter la tige pour que sa longueur soit égale à 50,15 cm ?

22 LE BAIN

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 145


Jessica souhaite se peser mais n'a pas de balance dans sa salle de bains. Pour cela, elle va utiliser sa baignoire.

1. Premier bain : la phase de modélisation.

Lors du remplissage, Jessica mesure la hauteur d'eau toutes les minutes :

Durée t (en min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
hauteur d'eau $h(t)$ (en cm)	0	9	12,5	15,5	18	20,2	22	23,8	25,5	27

- Remplir une ligne avec les valeurs de $h^2(t)$.
- Pour chaque valeur de t , placer un point de coordonnées $(t; h^2(t))$ dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour une minute, en ordonnée 1 cm pour 100 cm²). Qu'observe-t-on ?
- En déduire une expression de $h(t)$.

 Trouver d'abord une expression de $h^2(t)$.


2. Deuxième bain : la pesée

Lors du premier bain, Jessica a trouvé que la hauteur d'eau dans sa baignoire en cm est, après t minutes, $h(t) = 9\sqrt{t}$.

D'autre part, le débit du robinet est de 14 L/min.

Après 5 minutes de remplissage, Jessica s'immerge complètement dans son bain et observe que le niveau d'eau est alors de 26,5 cm.

Jessica peut alors enfin calculer son poids. Combien trouve-t-elle ?

 On admet que la densité du corps humain est égale à 1, c'est-à-dire qu'un litre pèse 1 kg.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

23 QCM

★★ ⌚ 10 min ▶ P. 146

Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

1. Parmi les fonctions « carré », « cube », « racine carrée » et « inverse », combien sont croissantes sur $]0; +\infty[$?

- a. 0 b. 1 c. 3 d. 4

2. Le minimum de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[2; 5]$ est :

- a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{2}$ c. 0 d. 2

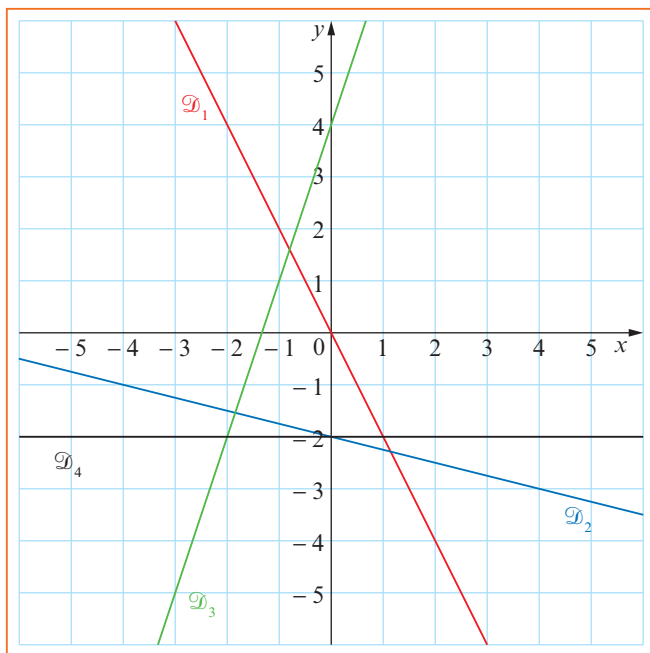
3. Si $x \in]-3; 1]$, alors :

- a. $x^2 \in]-9; 1]$ b. $x^2 \in [1; 9[$ c. $x^2 \in [1; 9]$ d. $x^2 \in [0; 9[$

24 LECTURE GRAPHIQUE

★★ ⌚ 5 min ▶ P. 146

Donner (sans justifier) l'expression de la fonction affine représentée par chaque droite.



Utiliser des points à coordonnées entières.

La droite (\mathcal{D}_1) passe par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(2; -4)$.

La droite (\mathcal{D}_2) passe par les points de coordonnées $(0; -2)$ et $(4; -3)$.

La droite (\mathcal{D}_3) passe par les points de coordonnées $(-2; -2)$ et $(0; 4)$.

25 UN VASE EXTRAORDINAIRE

★★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 147

Un vase est formé de deux cylindres coaxiaux, le premier de rayon 10 cm, le second de rayon 5 cm. Leur hauteur est de 30 cm chacun.

À $t = 0$, le remplissage commence à l'aide d'un robinet dont le débit constant est 5 L/min.

Soit h la fonction qui, à l'instant t (en min), associe la hauteur d'eau $h(t)$ (en cm) dans le vase.

1. a. Soit T_1 le temps de remplissage de la première partie du vase. Calculer T_1 .

b. Déterminer l'expression de $h(t)$ lorsque $t \in [0; T_1]$.

2. a. Soit T_2 le temps de remplissage de la deuxième partie du vase. Calculer T_2 .

b. Tracer la représentation graphique de h sur l'intervalle $[0; T_1 + T_2]$.

c. Déterminer l'expression de $h(t)$ lorsque $t \in [T_1; T_1 + T_2]$.



Le remplissage se faisant à débit constant, les fonctions utilisées sont affines. Le volume d'un cylindre de hauteur H et de base un disque de rayon R est $\pi R^2 H$.

26 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 148

a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(x - 2)^2 = \frac{1}{4}$.

b. Résoudre l'inéquation $3x^2 - 1 \geq 11$.

c. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $\frac{1}{x} > 0,1$



Voir la méthode 2.

27 RANGEMENT

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 148

Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1.

a. Sans justifier, ranger par ordre croissant les nombres x , x^2 , x^3 et \sqrt{x} .

b. En déduire le rangement par ordre croissant des quatre nombres :

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

28 MUSIQUE

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 148

La tension T d'une corde de guitare s'exprime en Newton (N).

Lorsqu'elle est jouée, cette corde émet un son caractérisé par sa fréquence, exprimée en Hertz (Hz).

On suppose que la fonction qui donne la fréquence selon la tension T est définie par :

$$f(T) = 20\sqrt{T}.$$

Voici le tableau des fréquences de quelques notes :

Note	Do_2	Mi_2	Sol_2	La_2	Do_3	Mi_3	Sol_3	La_3
Fréquence en Hz	131	165	196	220	262	330	392	440

- Calculer la tension qui permet de jouer un La_3 .
- Déterminer la note jouée si la tension est 272 N.
- Quelle fréquence peut-on attribuer au $Ré_3$?

On admettra que les fréquences du do_3 , du $ré_3$ et du mi_3 sont en progression linéaire.

 Cette hypothèse permet de simplifier les calculs, car la réalité est plus compliquée. L'erreur commise est faible.

- Sachant qu'une corde casse à partir d'une tension de 900 N, trouver la note la plus haute que l'on peut jouer.

 Observer comment évoluent les fréquences d'une octave à l'autre.

ALLER PLUS LOIN

29 VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 149

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

- Montrer que la fonction f est impaire.
- a. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.


Montrer que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)(b^2 + ab + a^2).$$

- En déduire que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

 Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

- Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$?

 Utiliser le fait que f est impaire.

30 FONCTIONS RÉCIPROQUES

★★★

🕒 15 min

▶ P. 149

Soit f la fonction carré et g la fonction racine carrée, toutes deux définies sur $[0; +\infty[$. On note \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$, \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes qui représentent les deux fonctions dans un repère orthonormé.

- Calculer $g(f(5))$ et $f(g(5))$.
- Que peut-on dire des coordonnées de deux points symétriques par rapport à \mathcal{D} ?
- Prouver que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont symétriques par rapport à \mathcal{D} .



Commencer par montrer que si un point M appartient à \mathcal{C}_f , alors son symétrique par rapport à \mathcal{D} appartient à \mathcal{C}_g .

31 FONCTION VALEUR ABSOLUE

★★

🕒 10 min

▶ P. 150

- Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = |x|$, sur l'intervalle $[-5; 5]$.
- À l'aide de la courbe obtenue, résoudre les équations et les inéquations suivantes:
 - $|x| = 3$
 - $|x| < 3$
 - $|x| \geq 3$
 - $|x| = -3$


CORRIGÉS

1 NOTIONS DE BASE POUR LES FONCTIONS AFFINES

a. $f(-2) = -2 \times (-2) + 7 = 11$.

b. $-2x + 7 = -25 \Leftrightarrow -2x = -25 - 7 \Leftrightarrow -2x = -32 \Leftrightarrow x = 16$.

L'antécédent de -25 par f est **16**.

 Cela se dit aussi $f(16) = -25$: l'image de 16 est -25 .

c. La fonction f est **décroissante** sur \mathbb{R} .

d. La fonction f s'annule en $\frac{7}{2}$.

Si $x \in]-\infty; \frac{7}{2}]$, $f(x) \geq 0$.

Si $x \in [\frac{7}{2}; +\infty[$, $f(x) \leq 0$.


2 CALCUL D'UNE IMAGE

$$a = \frac{f(30) - f(10)}{30 - 10} = \frac{65 - 40}{20} = 1,25.$$

$$b = f(10) - 1,25 \times 10 = 40 - 12,5 = 27,5.$$

La fonction affine est définie par $f(x) = 1,25x + 27,5$.

$$f(1\,000) = 1,25 \times 1\,000 + 27,5 = \mathbf{1\,277,5}.$$

 **Autre méthode**

L'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement de la variable, donc

$$\frac{f(1\,000) - f(10)}{1\,000 - 10} = \frac{f(30) - f(10)}{30 - 10}.$$


Cela s'écrit $\frac{f(1\,000) - 40}{990} = \frac{65 - 40}{20}$, soit $\frac{f(1\,000) - 40}{990} = 1,25$.

On en déduit $f(1\,000) = 1,25 \times 990 + 40 = 1\,277,5$.

3 AFFINE OU PAS ?

$$\frac{f(9) - f(-21)}{9 - (-21)} = \frac{59 - 45}{30} = \frac{7}{15} \text{ et } \frac{f(27) - f(9)}{27 - 9} = \frac{69 - 59}{18} = \frac{5}{9}.$$

L'accroissement des images n'est pas proportionnel à l'accroissement de la variable, la fonction n'est pas affine.

 Conformément à l'exercice précédent, il est possible de trouver l'expression d'une fonction affine à partir des deux premières images et de calculer si la troisième image est compatible avec cette expression.

4 VRAI OU FAUX ?

1. a. **Vrai.**

En effet, $0^2 = 0$, $3^2 = 9$, et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

b. **Vrai.**

En effet, $(-2)^3 = -8$, $5^3 = 125$, et la fonction cube est croissante sur \mathbb{R} .

c. **Vrai.**

En effet, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{25} = 5$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

d. **Faux.**

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

2. a. Proposition réciproque : Si $0 \leq x^2 \leq 9$, alors $0 \leq x \leq 3$.

Cette réciproque est **fausse**.



Une proposition correcte est :

$$\text{si } 0 \leq x^2 \leq 9, \text{ alors } -3 \leq x \leq 3.$$

b. Proposition réciproque : Si $-8 \leq x^3 \leq 125$, alors $-2 \leq x \leq 5$.

Cette réciproque est **vraie**.

c. Proposition réciproque : Si $1 \leq \sqrt{x} \leq 5$, alors $1 \leq x \leq 25$.

Cette réciproque est **vraie**.

5 INTERVALLES ET FONCTION CARRÉ

a. $x^2 \in [0; +\infty[$ b. $x^2 \in [0; 9[$ c. $x^2 \in [0; +\infty[$ d. $x^2 \in]4; 64]$

6 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION CARRÉ

1. a. $x = 6$ ou $x = -6$

b. $x = 1$ ou $x = -1$

c. $x = 0$

d. pas de solution

e. $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

f. $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

2. a. $x \in [-2; 2]$

b. $x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

c. $x \in [-4; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; 4]$

d. $x = 0$

e. pas de solution

f. $x \in \mathbb{R}$



1. d. et 2. e. Un carré ne peut pas être négatif

2. f. L'inégalité est vraie pour tout nombre réel.

7 INTERVALLES ET FONCTION CUBE

a. $x^3 \in]-\infty; 0]$

b. $x^3 \in]-27; 1]$

c. $x^3 \in]-8; +\infty[$

d. $x^3 \in [-512; -8[$

8 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION CUBE

1. a. $x = 3$

b. $x = 1$

c. $x = 0$

d. $x = -2$

e. $x = \sqrt[3]{7}$

f. $x = -\frac{1}{4}$

2. a. $x \in]-\infty; 4]$ b. $x \in]1; +\infty[$ c. $x \in]2; 10]$
 d. $x \in]-\infty; 0]$ e. $x \in]-\infty; -1[$ f. $x \in]-5; +\infty[$

9 INTERVALLES ET FONCTION RACINE CARRÉE

- a. $\sqrt{x} \in [0; +\infty[$ b. $\sqrt{x} \in]1; 3]$
 c. $\sqrt{x} \in [2\sqrt{2}; 2\sqrt{3}[$ d. $\sqrt{x} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$

10 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION RACINE CARRÉE

1. a. $x = 49$ b. $x = 1$ c. $x = 0$
 d. pas de solution e. $x = 0,01$ f. $x = \frac{16}{121}$
 2. a. $x \in [0; 144]$ b. $x \in \left]\frac{9}{4}; +\infty\right[$ c. $x \in]100; 10\,000]$
 d. $x = 0$ e. pas de solution f. $x \in \mathbb{R}$

11 INTERVALLES ET FONCTION INVERSE

- a. $\frac{1}{x} \in]-\infty; 0[$ b. $\frac{1}{x} \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right[$ c. $\frac{1}{x} \in]0; 1[$ d. $\frac{1}{x} \in \left]\frac{1}{4}; 4\right]$

12 RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS AVEC LA FONCTION INVERSE

1. a. $x = \frac{1}{6}$ b. $x = 1$ c. pas de solution
 d. $x = -\frac{1}{9}$ e. $x = 100$ f. $x = -\frac{7}{8}$
 2. a. $x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right[$ b. $x \in \left]0; \frac{5}{4}\right]$ c. $x \in \left[\frac{1}{10}; 1\right[$
 d. $x \in]-\infty; 0]$ e. $x \in \left]-\frac{3}{4}; 0\right[$ f. $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right[\cup]0; +\infty[$

13 FONCTION AFFINE ET DROITE

Droite \mathcal{D} : $f(x) = -\frac{3}{7}x + 2$.

Droite \mathcal{D}' : $f(x) = \frac{5}{4}x + 5$.

Droite \mathcal{D}'' : $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

 Bien vérifier le signe du coefficient directeur.

14 LE BON ORDRE (1)

a. Pour tout $x \geq 0$, $x^2 - x = x(x - 1)$.

Comme $x \geq 0$, le signe de $x^2 - x$ est celui de $x - 1$.

Si $x \in [0; 1]$, alors $x - 1 \leq 0$ et $x^2 - x \leq 0$.

Si $x \in [1; +\infty[$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x^2 - x \geq 0$.

b. Pour tout $x \geq 0$, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Comme $x^2 \geq 0$, le signe de $x^3 - x^2$ est celui de $x - 1$.

Si $x \in [0; 1]$, alors $x - 1 \leq 0$ et $x^3 - x^2 \leq 0$.

Si $x \in [1; +\infty[$, alors $x - 1 \geq 0$ et $x^3 - x^2 \geq 0$.

c. Si $x \in [0; 1]$:

$x^2 - x \leq 0$ équivaut à $x^2 \leq x$ et $x^3 - x^2 \leq 0$ équivaut à $x^3 \leq x^2$.

Par conséquent, $x^3 \leq x^2 \leq x$.

Si $x \in [1; +\infty[$:

$x^2 - x \geq 0$ équivaut à $x \leq x^2$ et $x^3 - x^2 \geq 0$ équivaut à $x^2 \leq x^3$.

Par conséquent, $x \leq x^2 \leq x^3$.

15 LE BON ORDRE (2)

Si $x \in]0; 1[$, $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.

Le point de coordonnées $(1; 1)$ est un point commun aux cinq courbes, donc si $x = 1$, les cinq nombres ont la même valeur.

Si $x \in]1; +\infty[$, $\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.

16 VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

1. La fonction f est définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

La fonction f est donc paire.

2. a. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

b. Comme $a < b$, on a $b - a > 0$.

Les nombres a et b sont tous deux positifs, donc $b + a > 0$.

Le produit $(b - a)(b + a)$ est donc positif.

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$ ou encore $f(a) < f(b)$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

c. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

17 VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

a. Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

b. Comme $a < b$, on a $b - a > 0$.

Les nombres a et b sont tous deux positifs, donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Le quotient $\frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ est donc positif.

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$ ou encore $f(a) < f(b)$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

18 VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

1. La fonction f est définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

2. a. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

b. Comme $a < b$, on a $a - b < 0$.

Les nombres a et b sont tous deux positifs, donc $ab > 0$.

Le quotient $\frac{a-b}{ab}$ est donc négatif.

Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$ ou encore $f(a) > f(b)$.

On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

c. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine, donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

19 RÉOLUTIONS D'ÉQUATIONS

1. a. $(x-3)^2 = 49 \Leftrightarrow x-3 = 7$ ou $x-3 = -7$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } x = -4$$

b. $(5x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x-2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

c. Pas de solution.

d. $3(x-1)^2 - 4 = 2 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2}$$

e. $\left(\frac{7}{4}x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{144} \Leftrightarrow \frac{7}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$ ou $\frac{7}{4}x - \frac{2}{3} = -\frac{7}{12}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x = \frac{5}{4} \text{ ou } \frac{7}{4}x = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{7} \text{ ou } x = \frac{1}{21}$$

$$\text{f. } (x-4)(x+4) = 105 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 105 \Leftrightarrow x^2 = 121 \\ \Leftrightarrow x = 11 \text{ ou } x = -11$$

$$\text{g. } (x-3)^3 = 8 \Leftrightarrow x-3 = \sqrt[3]{8} \\ \Leftrightarrow x-3 = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{h. } 2(x+5)^3 = -128 \Leftrightarrow (x+5)^3 = -64 \\ \Leftrightarrow x+5 = -4 \\ \Leftrightarrow x = -9$$

$$\text{i. } \sqrt{x^2+100} = 26 \Leftrightarrow x^2+100 = 676 \\ \Leftrightarrow x^2 = 576 \\ \Leftrightarrow x = 24 \text{ ou } x = -24$$

$$\text{j. } \frac{1}{x^2+1} = 0,8 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow x^2+1 = \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{2. a. } \sqrt{x+12} = 7 \Leftrightarrow x+12 = 49 \\ \Leftrightarrow x = 37$$

$$\text{b. } \sqrt{10-2x} = 4 \Leftrightarrow 10-2x = 16 \\ \Leftrightarrow -2x = 6 \\ \Leftrightarrow x = -3$$

20 CELSIUS ET FAHRENHEIT

1. a. On cherche une expression de la forme $F = aC + b$.

L'eau gèle à 0°C et à 32°F , donc $32 = a \times 0 + b$, ce qui donne $b = 32$.

L'eau bout à 100°C et à 212°F , donc $212 = a \times 100 + 32$, ce qui donne $a = 1,8$.

Par conséquent, $F = 1,8C + 32$.

b. On utilise la propriété :

L'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Le coefficient de proportionnalité est ici $a = 1,8$.

Si la variable augmente de 10°C , les images augmentent de 18°F .

$$\text{c. } F = 1,8 \times (-20) + 32 = -4.$$

S'il fait -20°C , la température est de -4°F .

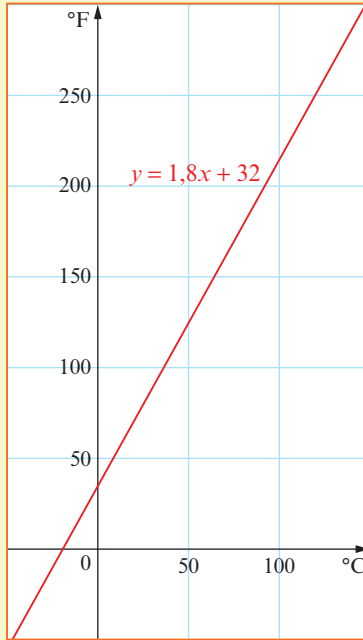
$$\text{d. } C = F \Leftrightarrow C = 1,8C + 32 \\ \Leftrightarrow -0,8C = 32 \Leftrightarrow C = -40$$

Une température de -40°C correspond à -40°F .

$$\text{2. a. } F = \frac{9}{5}C + 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}C = F - 32 \\ \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32) \\ \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}.$$

b. $C = \frac{5}{9}(451 - 32) \approx 233^{\circ}\text{F}.$

3.



21 DILATATION THERMIQUE

Tout d'abord, on constate que l'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement de la variable (à chaque fois que la température augmente de 50°C , la longueur de la tige augmente de $0,03\text{ cm}$).

La température est donc fonction affine de la longueur de la tige.

Puisque la longueur est de $50,12\text{ cm}$ à 200°C , elle est de $50,15\text{ cm}$ à 250°C .

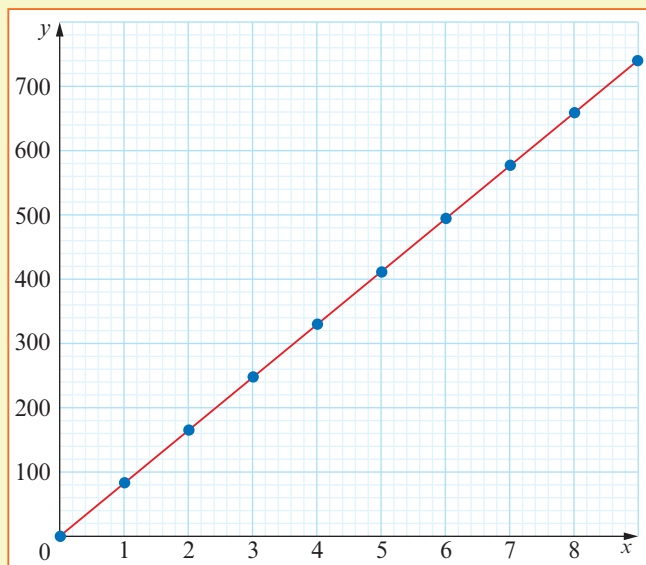
22 LE BAIN

1. Première partie

a.

t (en min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(t)$ (en cm)	0	9	12,5	15,5	18	20,2	22	23,8	25,5	27
$h^2(t)$ (en cm^2)	0	81	156,25	240,25	324	408,04	484	566,44	650,35	729

b. On observe que les points sont à peu près alignés, et que la droite qui les relie passe par le point O origine du repère.



c. On en déduit que t et $h^2(t)$ sont proportionnels.

Le coefficient de proportionnalité est aussi le coefficient directeur de la droite, égal à 81, d'après les coordonnées du point d'abscisse 1.

Ainsi, $h^2(t) = 81t$, ce qui conduit à $h(t) = 9\sqrt{t}$.

2. Deuxième partie

$$9\sqrt{t} = 26,5 \Leftrightarrow \sqrt{t} = \frac{26,5}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 8,67.$$

Comme Jessica est entrée dans son bain après 5 minutes de remplissage, son volume équivaut à un écoulement d'eau pendant 3,67 minutes. Le débit de sa baignoire étant égal à 14 L/min, son volume est environ égal à 51 L.

Elle pèse donc environ 51 kg.

23 QCM

1. Réponse c.

Les fonctions « carré », « cube », et « racine carrée » sont croissantes sur $]0; +\infty[$, mais la fonction « inverse » est décroissante sur cet intervalle.

2. Réponse a.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[2; 5]$ son minimum est l'image de 5.

3. Réponse d.

La plus petite image est 0, puisque 0 appartient à $]-3; 1]$.

24 LECTURE GRAPHIQUE

Droite \mathcal{D}_1 : $f(x) = -2x$

Droite \mathcal{D}_2 : $f(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

Droite \mathcal{D}_3 : $f(x) = 3x + 4$

Droite \mathcal{D}_4 : $f(x) = -2$

25 UN VASE EXTRAORDINAIRE

1. a. Le volume (en cm^3) de la première partie du vase est $\pi \times 10^2 \times 30 = 3\,000\pi$. Comme le volume d'un litre d'eau est 1 dm^3 , il faut 3π L d'eau pour remplir cette première partie du vase.

Avec un débit de 5 L/min , cela prend $T_1 = \frac{3\pi}{5}$ min (soit environ 1 min 53 s).

b. La fonction h est linéaire car $h(0) = 0$.

Comme $h(T_1) = 30$, le coefficient directeur est $\frac{30}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{50}{\pi}$.

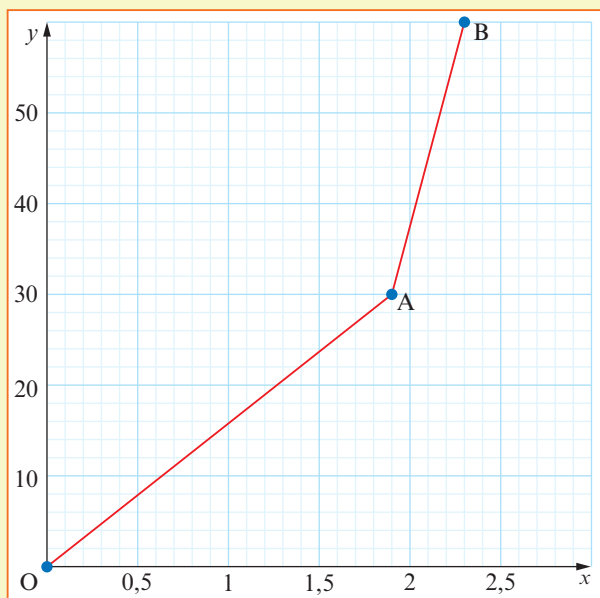
Ainsi, sur $[0; T_1]$, $h(t) = \frac{50}{\pi}t$.

2. a. Le volume (en cm^3) de la deuxième partie du vase est $\pi \times 5^2 \times 30 = 750\pi$.

En raisonnant comme dans la question **1.a.**, on trouve $T_2 = \frac{3\pi}{20}$ min (soit environ 28 s).

 Le volume est 4 fois plus petit car le rayon est 2 fois plus petit.

b. On place les points $A(T_1; 30)$ et $B(T_1 + T_2; 60)$, puis on trace les segments $[OA]$ et $[AB]$.



c. Le coefficient directeur du second segment est 4 fois supérieur, donc sur l'intervalle $[T_1; T_1 + T_2]$, $h(t) = \frac{200}{\pi}t + p$ où p s'obtient avec $h(T_1) = 30$.

Le calcul donne $\frac{200}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} + p = 30$, soit $p = -90$.

Sur l'intervalle $[T_1; T_1 + T_2]$, $h(t) = \frac{200}{\pi}t - 90$.

 On dit que h est une fonction affine par morceaux.

26 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS


a. $(x-2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x-2 = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

b. $3x^2 - 1 \geq 11 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 12$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2.$$

 Prendre garde à ne pas conclure $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$ ou $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$ ou $x \geq -2$ qui sont deux erreurs fréquentes.

c. $\frac{1}{x} > 0,1 \Leftrightarrow x \in]0; 10[$

 Le mieux est de raisonner avec la courbe de la fonction inverse.

27 RANGEMENT

a. Pour tout $x > 1$: $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.

b. Les inverses sont rangés dans l'ordre contraire :

$$\frac{1}{x^3} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

28 MUSIQUE

a. La fréquence correspondante est 440 Hz.

$$20\sqrt{T} = 440 \Leftrightarrow \sqrt{T} = 22$$

$$\Leftrightarrow T = 484.$$

La tension à appliquer sur cette corde est de **484 N**.

b. $20\sqrt{272} \approx 330$.

Une fréquence de 330 Hz correspond au Mi_3 .

c. Selon l'hypothèse de linéarité, la fréquence du $Ré_3$ est la moyenne des fréquences

du Do_3 et du Mi_3 : $\frac{262 + 330}{2} = 296$.


La fréquence retenue pour le $Ré_3$ est 296 Hz.

d. $20\sqrt{900} = 600$.

La fréquence qui correspond à cette tension est de 600 Hz.

Selon le tableau, les fréquences doublent à chaque octave. Comme on a obtenu une fréquence de 296 Hz pour le $Ré_3$, la fréquence du $Ré_4$ sera 592 Hz.

C'est donc la note la plus aigüe qu'il est possible de produire avec cette corde.

 c. et d. En réalité, les progressions des fréquences ne sont pas linéaires, la fréquence réelle du $Ré_3$ est proche de 294 Hz. Cette approximation ne fait pas commettre d'erreur à la dernière question, puisque la fréquence du $Ré_4$ est proche de 587 Hz et celle du $Ré\#_4$ 622 Hz.

29 VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

1. La fonction f est définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

La fonction f est donc impaire.

$$\begin{aligned} 2. a. (b-a)(b^2+ab+a^2) &= b^3 + ab^2 + ba^2 - ab^2 - a^2b - a^3 \\ &= b^3 - a^3 \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

b. Comme $a < b$, on a $b - a > 0$.

Les nombres a et b sont tous deux positifs, donc $b^2 + ab + a^2 > 0$.

Le produit $(b-a)(b^2+ab+a^2)$ est donc positif.

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$ ou encore $f(a) < f(b)$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

c. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine, donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$.



En réunissant les deux intervalles, la fonction est croissante sur \mathbb{R} .

30 FONCTIONS RÉCIPROQUES

$$a. g(f(5)) = g(5^2) = g(25) = \sqrt{25} = 5.$$

$$f(g(5)) = f(\sqrt{5}) = \sqrt{5^2} = 5.$$

b. Leurs coordonnées sont échangées : $M(a; b)$ et $M'(b; a)$ sont symétriques par rapport à \mathcal{D} .

c. On note \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$.

Soit $M(x; x^2)$ un point de \mathcal{C}_f .

Son symétrique M' par rapport à \mathcal{D} a pour coordonnées $M'(x^2; x)$.

Or, comme $x \geq 0$,

on a $\sqrt{x^2} = x$ et $M'(x^2; \sqrt{x^2})$ appartient à \mathcal{C}_g .

Réciproquement, si un point $M(x; \sqrt{x})$ appartient à \mathcal{C}_g , alors son symétrique M' a pour coordonnées $(\sqrt{x}; x)$ ou $(\sqrt{x}; (\sqrt{x})^2)$, ce qui montre que M' appartient à \mathcal{C}_f .



Dans les deux cas, en appliquant sur un nombre positif les deux fonctions successivement, on trouve le nombre initial : ainsi, pour tout $x \geq 0$,

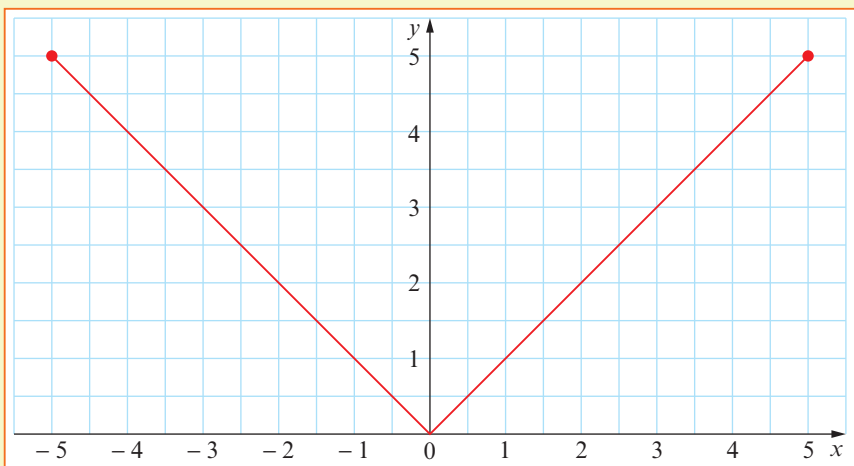
$$g(f(x)) = x \text{ et } f(g(x)) = x.$$

On dit que ces deux fonctions sont réciproques.

Leurs courbes sont symétriques par rapport à \mathcal{D} .

31 FONCTION VALEUR ABSOLUE

1.



2. **a.** $x = 3$ ou $x = -3$ **b.** $x \in]-3; 3[$ **c.** $x \in [-5; -3] \cup [3; 5]$
d. Cette équation n'a pas de solution.

6 Vecteurs

I NOTION DE VECTEUR

1. Définition

La translation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** \overrightarrow{AB} .

► Un vecteur est représenté par une flèche et possède trois caractéristiques :

Sa direction, son sens et sa norme.

► Pour un vecteur \overrightarrow{AB} :

- la direction est celle de la droite (AB),
- le sens est celui de A vers B,
- la norme, notée $|\overrightarrow{AB}|$, est la distance AB.

► La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur \overrightarrow{AA} .

Ce vecteur est appelé **vecteur nul**. On le note $\vec{0}$.

2. Vecteurs égaux, vecteurs opposés

► Deux vecteurs égaux ont la même direction, le même sens, la même longueur.

Sur la figure ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

THÉORÈME :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Éventuellement, le parallélogramme est aplati avec des points alignés.

► Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BA} sont **opposés**.

Deux vecteurs **opposés** ont la même direction, la même longueur, mais **pas le même sens**.

EXEMPLE :

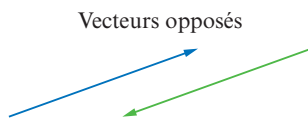
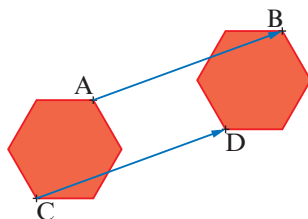
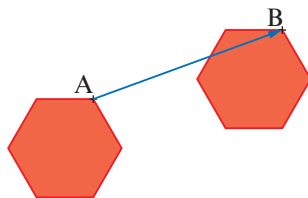
Soit I le milieu d'un segment [AB].

Les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{BI} sont opposés.

3. Somme de vecteurs

La **somme de deux vecteurs** \vec{u} et \vec{v} est le vecteur associé à la translation obtenue en enchaînant les translations de vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

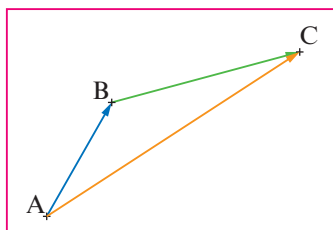
On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



► Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



II COORDONNÉES D'UN VECTEUR

1. Base orthonormée

► Si \vec{i} et \vec{j} sont deux vecteurs orthogonaux (leurs directions sont perpendiculaires) de norme 1, ils forment une **base orthonormée**, notée (\vec{i}, \vec{j}) .

► Tout vecteur \vec{u} s'écrit dans cette base : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, où les nombres réels x et y forment le couple de **coordonnées du vecteur** \vec{u} .

On note $\vec{u}(x; y)$.

► La **norme** du vecteur \vec{u} de coordonnées $(x; y)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EXEMPLE :

Si $\vec{u}(2; 5)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

► Si $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont les coordonnées de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , alors les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y')$.

EXEMPLE :

Si $\vec{u}(2; 5)$ et $\vec{v}(4; -2)$, alors les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(6; 3)$.

2. Repère orthonormé

► Un **repère orthonormé** du plan est formé d'un point appelé origine et d'une base orthonormée.

Si O est l'origine et (\vec{i}, \vec{j}) la base orthonormée, le repère est noté $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PROPRIÉTÉ :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont :

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

EXEMPLE :

Si A(-2; 2) et B(5; 6), alors les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(7; 4)$.



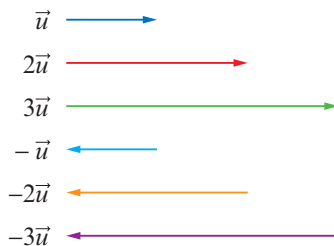
On parle de base pour les coordonnées d'un vecteur et de repère pour les coordonnées d'un point.

2. Produit d'un vecteur par un nombre réel

► Soit k un nombre réel.

Le produit d'un vecteur \vec{u} par k est un vecteur de même direction noté $k\vec{u}$.

- Si $k > 0$, \vec{u} et $k\vec{u}$ ont le même sens.
- Si $k < 0$, ils sont de sens contraires.
- La norme de $k\vec{u}$ est celle de \vec{u} multipliée par $|k|$.



PROPRIÉTÉ :

Si $(x ; y)$ sont les coordonnées d'un vecteur \vec{u} , alors les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx ; ky)$.

Avec $k = -1$, on obtient les coordonnées du vecteur opposé $-\vec{u}$ qui sont $(-x ; -y)$.

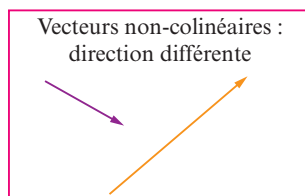
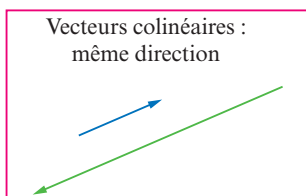
EXEMPLE :

Si $\vec{u}(2 ; 5)$, alors les coordonnées de $-4\vec{u}$ sont : $(-8 ; -20)$.

III VECTEURS COLINÉAIRES

► Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** lorsqu'ils ont **la même direction**.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.



► On note $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ les coordonnées de deux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' .

On appelle **déterminant** de ces deux vecteurs le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{u}')$, égal à :

$$xy' - x'y$$

PROPRIÉTÉ :

- Deux vecteurs sont **colinéaires** si, et seulement si leur **déterminant est nul**.
- Trois points **A, B et C** sont **alignés** si, et seulement si les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} sont **colinéaires**.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si les vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} sont **colinéaires**.

MÉTHODE 1**Construire une somme de vecteurs**

→ Voir les exos 3, 8 et 21.

Étape 1. On dessine un représentant du vecteur \vec{v} (même direction, même sens, même longueur) à l'extrémité du vecteur \vec{u} .

Étape 2.

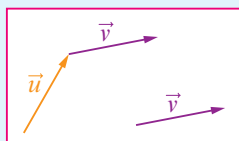
On dessine le vecteur somme en partant de l'origine de \vec{u} jusqu'à l'extrémité du représentant de \vec{v} .

Exo résolu

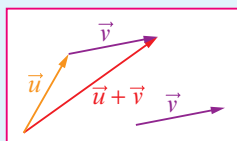
Construire le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

**CORRIGÉ**

Étape 1.



Étape 2.



Il est aussi possible de déplacer le premier vecteur et de placer son extrémité à l'origine du second vecteur.

MÉTHODE 2**Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non, à l'aide de leurs coordonnées**

→ Voir les exos 11 et 13.

Étape 1. Calculer le déterminant des deux vecteurs.

Étape 2. Si le déterminant est nul, les vecteurs sont colinéaires. Si le déterminant est non nul, ils ne le sont pas.

Exo résolu

On donne les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{9}{8}; -\frac{3}{4}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{w}(-13; 8)$.

- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont-ils colinéaires ?

CORRIGÉ**Étape 1.**

$$\text{a. } \det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{9}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{9}{16} + \frac{9}{16} = 0.$$

$$\text{b. } \det(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{9}{8} \times 8 - \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-13) = 9 - \frac{39}{4} = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Étape 2.

a. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

b. $\det(\vec{u}, \vec{w}) \neq 0$, donc \vec{u} et \vec{w} ne sont pas colinéaires.



Avec des coordonnées plus simples, on peut directement constater que l'un est multiple de l'autre. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}(-12; 4)$ et $\vec{v}(3; -1)$ sont colinéaires puisque l'on constate aisément que $\vec{u} = -4\vec{v}$.

MÉTHODE 3**Trouver les coordonnées d'un point**

→ Voir les exos 9, 10, 15, 16 et 24.

Étape 1. Choisir des inconnues pour les coordonnées du point cherché.

Étape 2. Traduire l'égalité vectorielle en une équation pour les abscisses et une équation pour les ordonnées.

Étape 3. Résoudre les équations.

Exo résolu

On considère les points : A(-2 ; 2), B(5 ; 6), et C(4 ; 1).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.

CORRIGÉ

Étape 1. On pose D (x_D ; y_D).

Étape 2. ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BA} sont (-7 ; -4).

Celles de \overrightarrow{CD} sont ($x_D - 4$; $y_D - 1$).

L'égalité de vecteurs se traduit par $x_D - 4 = -7$ pour les abscisses et par $y_D - 1 = -4$ pour les ordonnées.

Étape 3. L'équation $x_D - 4 = -7$ équivaut à $x_D = -3$.

L'équation $y_D - 1 = -4$ équivaut à $y_D = -3$.

Les coordonnées du point D sont $(-3; -3)$.



Une rédaction avec une résolution simultanée des deux équations s'écrit :

$$\begin{cases} x_D - 4 = -7 \\ y_D - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 - 7 \\ y_D = 1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = -3 \end{cases}$$

MÉTHODE 4

Justifier l'alignement de trois points A, B et C

→ Voir les exos 12, 14, 15, 16 et 24.

Étape 1. Calculer les coordonnées des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} .

Étape 2. Prouver que ces deux vecteurs sont colinéaires.

Exo résolu

Vérifier que les points : $A(-1; -7)$, $B(0; -4)$, et $C(8; 20)$ sont alignés.

CORRIGÉ

Étape 1. Les coordonnées du vecteur \overline{AB} sont $(1; 3)$.

Celles de \overline{AC} sont $(9; 27)$.

Étape 2. On constate que $\overline{AC} = 9\overline{AB}$.

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.



Une méthode similaire est utilisable pour justifier le parallélisme de deux droites.

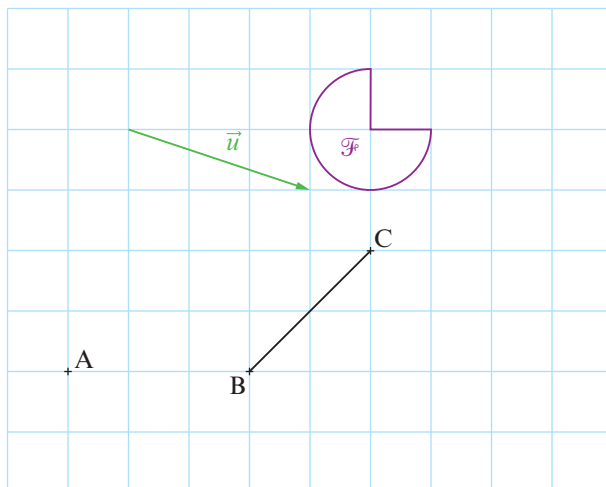
TESTER SES CONNAISSANCES

Dans tous les exercices, on utilise une base orthonormée et on se place dans un repère orthonormé.

1 TRANSLATIONS ET VECTEURS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 166

Dessiner l'image du point A, du segment [BC] et de la figure \mathcal{F} par la translation de vecteur \vec{u} .



👍 Pour [BC], placer d'abord les images de B et de C.

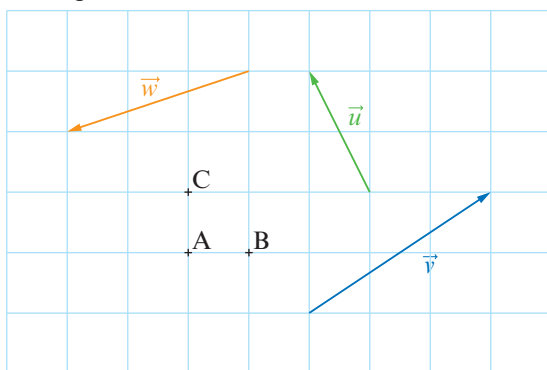
2 PLACEMENT DE POINTS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 166

Placer le point Z tel que $\overrightarrow{AZ} = \vec{u}$.

Placer le point Y tel que $\overrightarrow{BY} = \vec{v}$.

Placer le point X tel que $\overrightarrow{XC} = \vec{w}$.

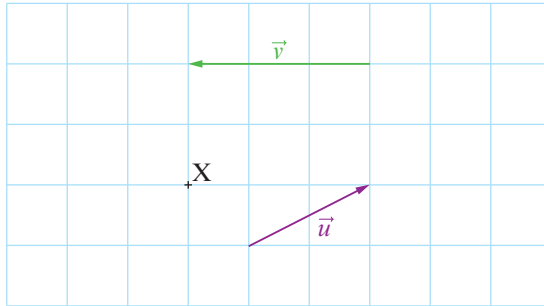


👍 Pour le point C, attention à l'ordre des points, c'est le vecteur \overrightarrow{XC} et non \overrightarrow{CX} .

3 SOMME DE VECTEURS

★ ⌚ 5 min ▶ P. 166

Construire le point Y tel que $\overrightarrow{XY} = \vec{u} + \vec{v}$ puis le point Z tel que $\overrightarrow{XZ} = \vec{u} - \vec{v}$.

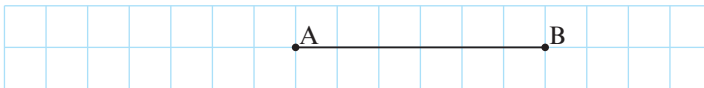


Voir la méthode 1.

Pour $\vec{u} - \vec{v}$, faire la somme de \vec{u} et de $-\vec{v}$.

4 AVEC UN SEGMENT

★ ⌚ 10 min ▶ P. 167



Placer le point L tel que $\overrightarrow{LB} = 2\overrightarrow{AB}$.

Placer le point N tel que $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Placer le point R tel que $\overrightarrow{RB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Placer le point S tel que $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \vec{0}$.

Placer le point T tel que $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$.



Pour N, on peut utiliser $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Pour R, on peut utiliser $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

5 RELATION DE CHASLES

★ ⌚ 5 min ▶ P. 167

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

b. $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{PO}$

c. $\overrightarrow{FG} - (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB})$



Respecter les règles opératoires, commencer par les parenthèses.

Pour les soustractions, les transformer en additions avec le vecteur opposé.

6 VECTEURS COLINÉAIRES

★ ⌚ 5 min ▶ P. 167

Soit A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.
Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

7 COORDONNÉES ET OPÉRATIONS

★ ⌚ 5 min ▶ P. 167

On donne : $\vec{u}(5; -2)$ et $\vec{v}(2; -3)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs : $-\vec{v}$; $\vec{u} + \vec{v}$; $3\vec{u} - 7\vec{v}$.
- Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

8 LECTURE GRAPHIQUE

★ ⌚ 10 min ▶ P. 167

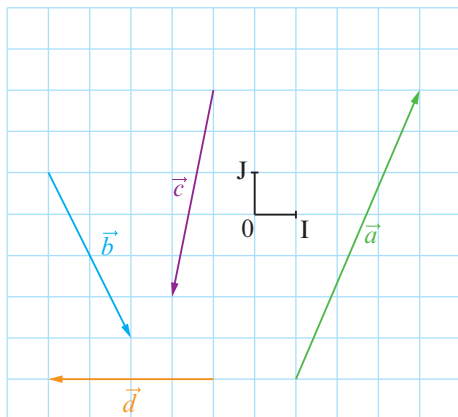
- Lire les coordonnées des vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
- Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}(4; -1)$, puis du vecteur $\vec{v}(-2; 5)$.

👍 Plusieurs emplacements sont possibles pour tracer ces deux vecteurs.

- Construire le vecteur $\vec{e} = \vec{a} + \vec{d}$.

👍 Voir la méthode 1.

- Calculer $\|\vec{d}\|$, puis $\|\vec{a}\|$.



9 PARALLÉLOGRAMMES

★ ⌚ 10 min ▶ P. 168

- On considère les points A $(-2; 1)$; B $(1; 6)$; C $(3; 3)$ et D $(0; -2)$.
Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Déterminer les coordonnées du point Z, sachant que CZBD est un parallélogramme.

👍 Voir la méthode 3.

10 COORDONNÉES À TROUVER

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 168

On donne : A (-5 ; 1) , B (-4 ; 3) et C (0 ; 7).

- Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overline{BA} = \frac{3}{4}\overline{AG}$.
- Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overline{AH} = 3\overline{BH}$.
- Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = \vec{0}$.



Voir la méthode 3.

11 COLINÉAIRES OU PAS ?

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 169

Dans chaque cas, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?

- $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-3; -5)$
- $\vec{u}\left(\frac{20}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ et $\vec{v}\left(-12; \frac{27}{20}\right)$
- $\vec{u}\left(-\frac{12}{5}; 0\right)$ et $\vec{v}\left(0; \frac{5}{3}\right)$
- $\vec{u}(-3,4; 0)$ et $\vec{v}(5,25; 0)$



Voir la méthode 2.

12 ALIGNÉS OU PAS ?

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 169

On donne A (4 ; 1) , B (-2 ; 4) , C (1 ; -6) et D (12 ; -3).

- Les points A, B et C sont-ils alignés ?
- Les points A, B et D sont-ils alignés ?



Voir la méthode 4.

S'ENTRAÎNER**13 UTILISATION DE LA COLINÉARITÉ**

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 170

Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points M et N tels que : $2\overline{BM} = \overline{AB}$ et $\overline{AN} = 3\overline{AD}$

- Montrer que $\overline{CM} = \overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{AB}$.
- Montrer que $\overline{NC} = 2\overline{DA} + \overline{DC}$.
- En déduire que les points M, N et C sont alignés.

Justifier que \overline{CM} et \overline{NC} sont colinéaires.

14 AVEC DES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX | ★★ | ⌚ 20 min | ► P. 170 |


Dans cet exercice, on construira une figure qui sera complétée au long de l'énoncé.

Dans un repère orthonormé $(K; \vec{i}, \vec{j})$, on définit les points L et N par $\overrightarrow{KL} = 5\vec{i}$ et $\overrightarrow{KN} = 5\vec{j}$.

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que KLMN soit un carré.
2. Soit P un point situé à l'intérieur du carré KLMN tel que KLP est un triangle équilatéral.
 - a. Donner les coordonnées du point H, milieu de [KL].
 - b. Calculer la longueur HP.

 Raisonner dans le triangle rectangle KHP.


- c. En déduire que $\overrightarrow{KP} = 2,5\vec{i} + 2,5\sqrt{3}\vec{j}$.
- d. Quelles sont les coordonnées de P ?
3. Soit T un point situé à l'extérieur du carré KLMN tel que LMT est un triangle équilatéral. Donner sans justifier les coordonnées de T.
4. Montrer que les points N, P et T sont alignés.

 Voir la méthode 4.

15 PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT | ★★ | ⌚ 20 min | ► P. 171 |

On donne les points : A (2 ; 5) , B (4 ; -2) , C(-5 ; 1) et D (-1 ; 6).

- a. Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

 Voir la méthode 4.


- b. On considère les points E milieu du segment [BC] et F tel que :

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Déterminer les coordonnées de ces deux points.

 Calculer les coordonnées de \overrightarrow{BA} , de \overrightarrow{BC} puis de $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

- c. Démontrer que les points A, F et E sont alignés.

 Voir la méthode 4.

- d. Déterminer les coordonnées du point G, situé à l'intersection de la droite (CD) et de l'axe des ordonnées.

 Les points C, D et G sont alignés. Utiliser un déterminant et le fait que G a une abscisse nulle.

16 UN POINT TRÈS PARTICULIER | ★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 171

On donne les points : $A(1 ; 1)$, $B(-3 ; 4)$ et $C(-5 ; -2)$.


a. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

 Voir la méthode 3.


b. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que les points A, P et I sont alignés.

 Observer l'ordonnée des point A, P et I .

c. Soit J le milieu de $[AC]$. Montrer que les points B, P et J sont alignés.


 Voir la méthode 4.

d. Qu'en déduit-on pour P dans le triangle ABC ?

 La déduction se fait à partir des alignements de A, P, I et B, P, J .


17 POINT D'UN PARALLÉLOGRAMME | ★★★ | ⌚ 25 min | ▶ P. 172

Écrire un algorithme qui détermine les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme, les trois premiers points étant donnés.

 On donne trois points A, B et C , on cherche les coordonnées de D tel que $ABCD$ est un parallélogramme, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

18 IF ... ELSE | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 172

Écrire un programme en langage Python qui permet de savoir si deux vecteurs dont on saisit les coordonnées sont colinéaires ou pas.

 Utiliser la notion de déterminant.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

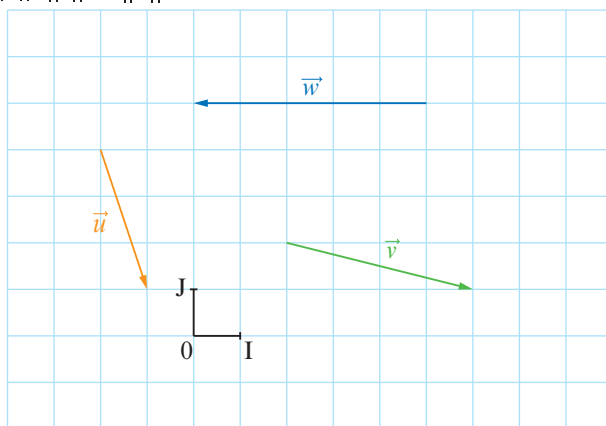
19 LECTURE DE COORDONNÉES

★★ | ⌚ 10 min | ► P. 173

- Lire les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} dans la base (\vec{OI}, \vec{OJ}) .
- Tracer un représentant du vecteur $\vec{t}(3; 1)$.
- Placer le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

👍 Voir la méthode 1.

- Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.



20 QCM


★★ | ⌚ 5 min | ► P. 173

Les quatre questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

- I, J, K, et L sont quatre points du plan tels que $\vec{IJ} = \vec{KL}$.
 - IJKL est un parallélogramme.
 - [IK] et [JL] ont le même milieu.
 - L'image de J par la translation de vecteur \vec{IK} est L.
 - K est le symétrique de J par rapport à (IL).
- Soit X et Y deux points de milieu Z. Le point P tel que $\vec{XP} = -3\vec{YP}$ est :
 - Le milieu de [XZ].
 - Le symétrique de Z par rapport à X.
 - Le milieu de [YZ].
 - Le symétrique de Z par rapport à Y.
- U et K sont deux points distincts du plan. L'ensemble des points R du plan tels que \vec{RU} et \vec{UK} sont colinéaires et de sens contraires est :
 - La droite (UK).
 - Le segment [UK].
 - La droite (UK) privée du segment [UK].
 - La demi-droite [UK].

4. A et B sont deux points distincts. La seule affirmation qui traduit le fait que I est **nécessairement** le milieu du segment [AB] est :

- a. $IA = IB$. b. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$. c. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. d. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

 Le mot « nécessairement » est crucial. Il signifie que la seule possibilité pour I est d'être le milieu du segment.

21 SANS LES COORDONNÉES

| ★ | ⌚ 5 min | ► P. 173 |

Soit ABC un triangle quelconque. On note K le milieu du segment [BC].

Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK}$.


22 LISA

| ★★ | ⌚ 25 min | ► P. 174 |

Dans un repère orthonormé $(Z; \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY})$, on donne :

I (6 ; 4), S (-4 ; -4) et A (-2 ; 10).

a. Calculer les coordonnées du point L tel que LISA soit un parallélogramme.

 Voir la méthode 3.

b. Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{ZX} + 6\overrightarrow{ZY}$.

 Dans le repère $(Z; \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY})$, les vecteurs \overrightarrow{ZX} et \overrightarrow{ZY} ont des coordonnées simples.

c. Soit R le symétrique de G par rapport au milieu U de [LI].

Montrer que GIRL est un rectangle.

 Montrer d'abord que GIRL est un parallélogramme.

d. Soit T le point de coordonnées (0 ; 33) et H le milieu de [AU].

On admet que les coordonnées de H sont (2,5 ; 10,5).

La droite (TH) coupe l'axe des abscisses en B. Calculer les coordonnées de B.

 Les points R, L et T sont alignés, utiliser un déterminant et le fait que l'ordonnée de T est nulle.

e. Le quadrilatère TUBA est-il un losange ?

23 ORTHOGONALITÉ

| ★★ | ⌚ 10 min | ► P. 175 |

On rappelle que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leurs directions sont perpendiculaires. On admet que deux vecteurs de coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont orthogonaux si, et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Écrire un programme en langage Python qui détermine si deux vecteurs sont orthogonaux ou pas.

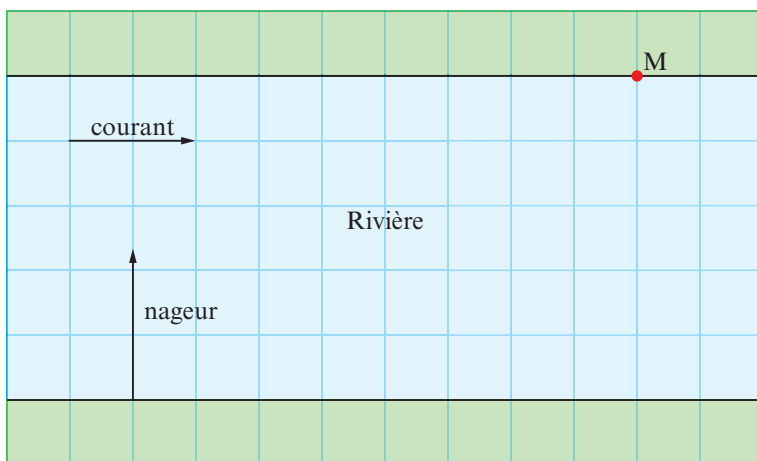
 Écrire d'abord les quatre lignes de saisie et utiliser un test comme dans l'exercice 17.

ALLER PLUS LOIN

24 TRAVERSÉE DE RIVIÈRE

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 175

Un nageur veut traverser la rivière pour arriver au point M. Le courant le fait dévier régulièrement. D'où doit-il partir ?



👍 Voir la méthode 1.

25 LIEU GÉOMÉTRIQUE

★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 175

M est un point sur le côté $[CD]$ d'un parallélogramme $ABCD$, distinct de C et D.

I est le milieu de $[AB]$ et G est le centre de gravité du triangle AMB .

On pose $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$, avec x un nombre réel.

a. À quel intervalle appartient x ?

b. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des points M et G, en fonction de x .

👍 On se place ici dans un repère qui n'est pas orthonormé. Dans ce cas, il n'est pas possible d'effectuer des calculs de distances et de normes, mais toutes les autres formules ou méthodes sont utilisables.

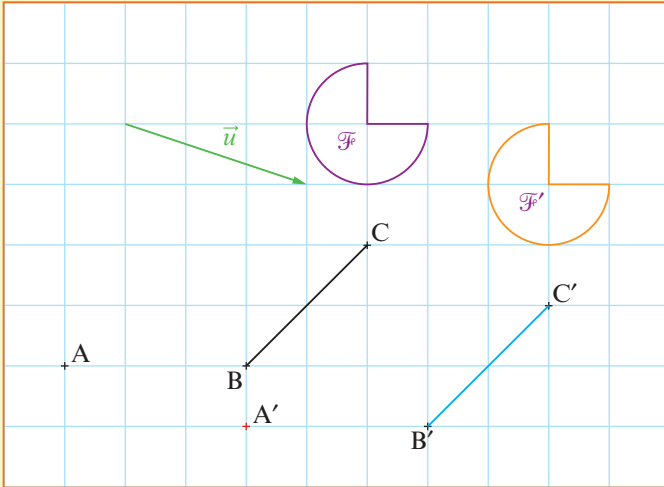
Pour M, on pourra montrer que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Pour G, se référer à l'exercice 16 qui précise la position d'un centre de gravité sur une médiane.

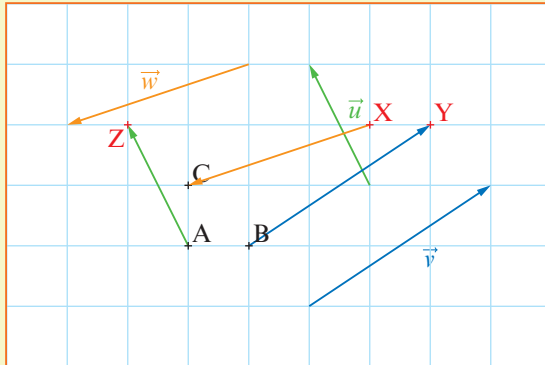
c. Montrer que, lorsque M décrit le segment $[DC]$, G décrit un segment qui lui est parallèle et dont on précisera les extrémités.

CORRIGÉS

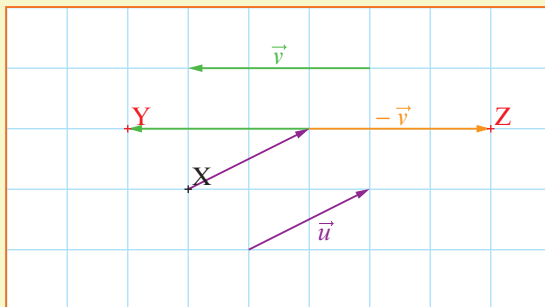
1 TRANSLATIONS ET VECTEURS



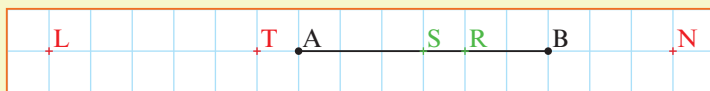
2 PLACEMENT DE POINTS



3 SOMME DE VECTEURS



4 AVEC UN SEGMENT



👍 Pour S, l'égalité $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \vec{0}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, ce qui permet de voir que S est le milieu de [AB].

5 RELATION DE CHASLES

- a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
 b. $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{IO}$.
 c. $\overrightarrow{FG} - (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG})$
 $= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AG}$
 $= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$.

👍 Les règles de priorité usuelles doivent être appliquées. Toujours transformer une soustraction en une addition de l'opposé.
 Attention à la relation de Chasles qui ne s'utilise pas avec une soustraction.
 Par exemple, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ n'est pas égal à \overrightarrow{AC} .

6 VECTEURS COLINÉAIRES

Comme $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.
 Si les quatre points sont alignés, le quadrilatère n'existe pas (ou est aplati).
 Si les points ne sont pas alignés, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Le quadrilatère ABCD est donc un trapèze.

👍 La colinéarité de deux vecteurs permet de mettre en évidence un alignement de trois points ou le parallélisme de deux droites.

7 COORDONNÉES ET OPÉRATIONS

- a. Coordonnées de $-\vec{v}$: $(-2; 3)$.
 Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$: $(7; -5)$.
 Coordonnées de $3\vec{u} - 7\vec{v}$:

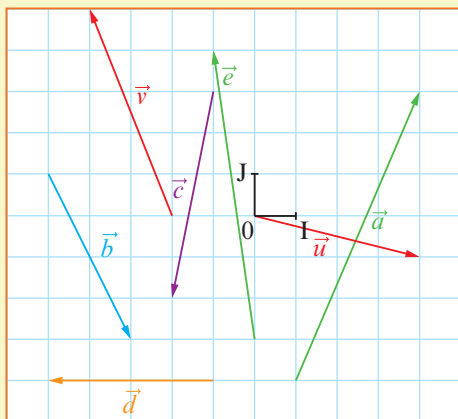
$$(3 \times 5 - 7 \times 2; 3 \times (-2) - 7 \times (-3)), \text{ soit } (1; 15).$$

- b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$.

8 LECTURES GRAPHIQUES

- a. Coordonnées de \vec{a} : $(3; 7)$.
 Coordonnées de \vec{b} : $(2; -4)$.
 Coordonnées de \vec{c} : $(-1; -5)$.
 Coordonnées de \vec{d} : $(-4; 0)$.

b. et c.



 Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{e} peuvent être tracés à d'autres endroits.

$$d. \|\vec{d}\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ et } \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

9 PARALLÉLOGRAMMES

a. On a $\overline{AB}(3; 5)$ et $\overline{DC}(3; 5)$.

Comme $\overline{AB} = \overline{DC}$, ABCD est un parallélogramme.

b. On pose $Z(x; y)$.

CZBD est un parallélogramme, donc $\overline{CZ} = \overline{DB}$.

On a $\overline{DB}(1; 8)$, donc $x - 3 = 1$ et $y - 3 = 8$.

On obtient $x = 4$ et $y = 11$. Les coordonnées de Z sont donc **(4 ; 11)**.

10 COORDONNÉES À TROUVER

a. L'égalité peut aussi s'écrire $\overline{AG} = \frac{4}{3}\overline{BA}$.

On a $\overline{BA}(-1; -2)$ d'où $\frac{4}{3}\overline{BA}\left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

En posant $G(x_G; y_G)$, il vient :

$$x_G + 5 = -\frac{4}{3} \text{ et } y_G - 1 = -\frac{8}{3}, \text{ ce qui donne } x_G = -\frac{19}{3} \text{ et } y_G = -\frac{5}{3}.$$

Les coordonnées de G sont $\left(-\frac{19}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

b. On pose $H(x_H; y_H)$.

$$\overline{AH} = 3\overline{BH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 5 = 3(x_H + 4) \\ y_H - 1 = 3(y_H - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 5 = 3x_H + 12 \\ y_H - 1 = 3y_H - 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_H = -7 \\ 2y_H = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{7}{2} \\ y_H = 4 \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont $\left(-\frac{7}{2}; 4\right)$.

c. On pose $K(x_K; y_K)$.

$$\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x_K - 4 - x_K + 0 - x_K = 0 \\ 1 - y_K + 3 - y_K + 7 - y_K = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_K = -9 \\ 3y_K = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -3 \\ y_K = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de K sont $\left(-3; \frac{11}{3}\right)$.



K est le centre de gravité du triangle ABC .
Voir l'exercice 16 pour approfondir ce thème.

11 COLINÉAIRES OU PAS ?

a. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-5) - 3 \times (-3) = -1 \neq 0$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.



Pour justifier que deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la méthode du déterminant est conseillée.

b. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{20}{3} \times \frac{27}{20} - \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-12) = 9 - 9 = 0$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.



On a $\vec{v} = -\frac{9}{5}\vec{u}$.

c. L'ordonnée de \vec{u} est nulle mais celle de \vec{v} ne l'est pas.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

d. Les ordonnées sont nulles, donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.



Ici, les valeurs des abscisses n'ont pas d'importance.

12 ALIGNÉS OU PAS ?

a. On a $\overline{AB}(-2 - 4; 4 - 1)$, soit $\overline{AB}(-6; 3)$.

On a $\overline{AC}(1 - 4; -6 - 1)$, soit $\overline{AC}(-3; -7)$.

$$\det(\overline{AB}, \overline{AC}) = (-6) \times (-7) - 3 \times (-3) = 51 \neq 0.$$

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. On a $\overline{AD}(12 - 4; -3 - 1)$, soit $\overline{AD}(8; -4)$.

$$\det(\overline{AB}, \overline{AD}) = (-6) \times (-4) - 3 \times 8 = 24 - 24 = 0.$$

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AD} sont colinéaires, donc les points A , B et D sont alignés.

Autre façon de rédiger :

On constate que $3\overline{AD} = -4\overline{AB}$ ou encore $\overline{AD} = -\frac{4}{3}\overline{AB}$, ce qui permet de conclure que les vecteurs \overline{AB} et \overline{AD} sont colinéaires.

13 UTILISATION DE LA COLINÉARITÉ

a. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

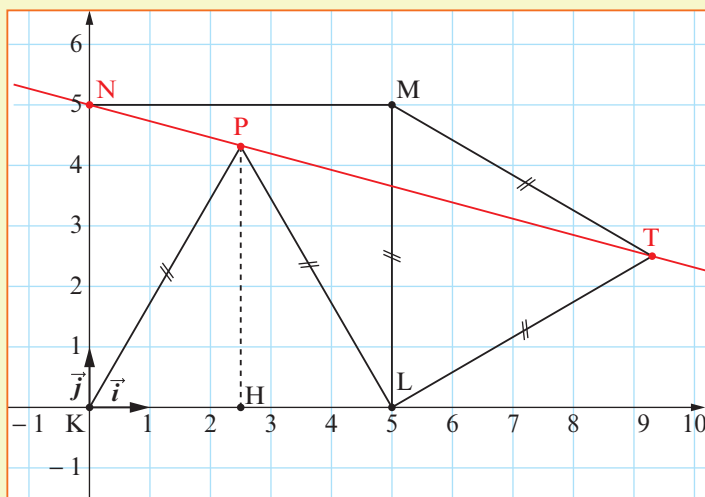
b. $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

c. ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CM}$.

On a montré $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{CM}$, ce qui signifie que les vecteurs \overrightarrow{NC} et \overrightarrow{CM} sont colinéaires : les points M, N et C sont donc alignés.

14 AVEC DES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX



1. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$. Les coordonnées de M sont $(5; 5)$.

2. a. Coordonnées de H : $(2, 5; 0)$.

b. Comme KLP est un triangle équilatéral, H est le pied de la hauteur issue de P. Le triangle KHP est rectangle en H et une mesure de l'angle \widehat{PKH} est 60° .

On a $\tan(60^\circ) = \frac{HP}{KH} = \frac{HP}{2,5}$, donc :

$$HP = 2,5 \tan(60^\circ) = 2,5\sqrt{3}.$$

 On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore.

c. $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HP} = 2,5\vec{i} + 2,5\sqrt{3}\vec{j}$.

d. Les coordonnées de P sont $(2, 5; 2,5\sqrt{3})$.

3. Les coordonnées de T sont $(5 + 2,5\sqrt{3}; 2,5)$.

4. On a : $\overrightarrow{NP}(2,5; 2,5\sqrt{3} - 5)$ et $\overrightarrow{NT}(5 + 2,5\sqrt{3}; -2,5)$.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NT}) &= 2,5 \times (-2,5) - (2,5\sqrt{3} - 5)(2,5\sqrt{3} + 5) \\ &= -6,25 - (6,25 \times 3 - 25) \\ &= -6,25 - 18,75 + 25 = 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs \overrightarrow{NP} et \overrightarrow{NT} sont colinéaires, donc les points N, P et T sont alignés.

15 PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

a. $\overrightarrow{BC}(-9; 3)$ et $\overrightarrow{AD}(-3; 1)$.

Comme $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AD}$, les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires, ce qui signifie que **les droites (BC) et (AD) sont parallèles.**

 On peut aussi utiliser le déterminant.

b. Coordonnées de E : $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BA}(-2; 7)$ et $\overrightarrow{BC}(-9; 3)$,

donc $\overrightarrow{BF}\left(\frac{1}{2} \times (-2) + \frac{1}{4} \times (-9); \frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{4} \times 3\right)$.

Finalement, $\overrightarrow{BF}\left(-\frac{13}{4}; \frac{17}{4}\right)$.

Ainsi, $x_F - 4 = -\frac{13}{4}$ et $y_F - (-2) = \frac{17}{4}$, ce qui donne $x_F = \frac{3}{4}$ et $y_F = \frac{9}{4}$.

c. $\overrightarrow{AF}\left(-\frac{5}{4}; -\frac{11}{4}\right)$ et $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AF}$, les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AF} sont colinéaires, ce qui signifie que **les points A, E et F sont alignés.**

 On peut aussi utiliser le déterminant.

d. Le point G est situé sur l'axe des ordonnées, son abscisse vaut 0, on note y_G son ordonnée.

Les points C, D et G sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}(4; 5)$ et $\overrightarrow{CG}(5; y_G - 1)$ sont colinéaires.

Leur déterminant est égal à 0, ce qui s'écrit :

$$\det(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG}) = 4(y_G - 1) - 5 \times 5 = 0.$$

Ceci équivaut successivement à :

$$4(y_G - 1) - 25 = 0.$$

$$4y_G - 4 - 25 = 0.$$

$$4y_G = 29.$$

$$y_G = \frac{29}{4}.$$

16 UN POINT TRÈS PARTICULIER

a. On pose P(x; y).

D'une part, on a :

$$x - 1 + x - (-3) + x - (-5) = 0 \text{ ce qui équivaut à } 3x + 7 = 0, \text{ soit } x = -\frac{7}{3}.$$

D'autre part, on a :

$$y - 1 + y - 4 + y - (-2) = 0 \text{ ce qui équivaut à } 3y - 3 = 0, \text{ soit } y = 1.$$

Les coordonnées de P sont donc $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$.

b. Les coordonnées de I sont $(-4; 1)$.

Les points A, P et I ont la même ordonnée (égale à 1), donc ils sont alignés.

c. Les coordonnées de J sont $(-2; -0,5)$.

$$\overrightarrow{BP}\left(\frac{2}{3}; -3\right), \text{ et } \overrightarrow{BJ}(1; -4,5).$$

On constate que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$, ce qui signifie que les vecteurs \overrightarrow{BP} et \overrightarrow{BJ} sont colinéaires. **Les points B, P et J sont donc alignés.**

d. Le point P est à l'intersection des droites (AI) et (BJ) qui sont deux médianes du triangle ABC.

C'est donc le centre de gravité de ce triangle.



Le centre de gravité est le point d'intersection des trois médianes.

Sur chaque segment qui relie un sommet au milieu du côté opposé, il est situé aux deux-tiers en partant du sommet.

17 POINT D'UN PARALLÉLOGRAMME

On note $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ les coordonnées des trois points donnés.

Comme ABCD est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, d'où :

$$x_B - x_A = x_D - x_C \text{ et } y_B - y_A = y_D - y_C.$$

Ainsi, $x_D = x_B - x_A + x_C$ et $y_D = y_B - y_A + y_C$.

On peut maintenant écrire l'algorithme :

```
Saisir  $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ 
 $x_D \leftarrow x_B - x_A + x_C$ 
 $y_D \leftarrow y_B - y_A + y_C$ 
Afficher  $x_D$  et  $y_D$ 
```

18 IF ... ELSE

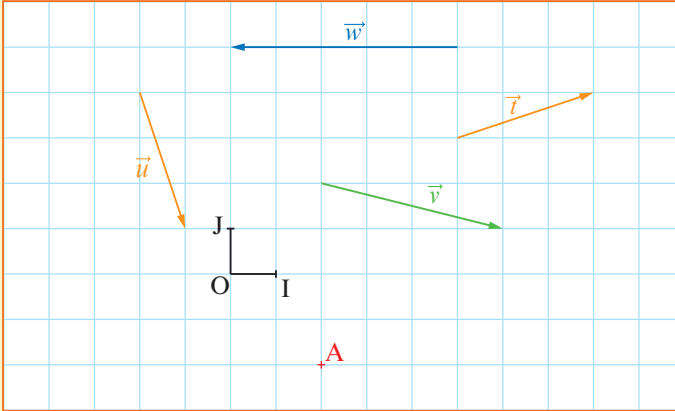
```
# Saisie des coordonnées des deux vecteurs
X1=int(input("Saisir l'abscisse du premier vecteur"))
X2=int(input("Saisir l'abscisse du second vecteur"))
Y1=int(input("Saisir l'ordonnée du premier vecteur"))
Y2=int(input("Saisir l'ordonnée du second vecteur"))
# Calcul du déterminant
DET=X1*Y2-X2*Y1
# Conclusion selon que le déterminant est nul ou pas
if DET==0:
    print("les vecteurs sont colinéaires")
else:
    print("les vecteurs ne sont pas colinéaires")
```



À la suite de else, aucune condition n'est précisée.

19 LECTURE DE COORDONNÉES

- a. $\vec{u}(1; -3)$; $\vec{v}(4; -1)$; $\vec{w}(-5; 0)$.
b.



- c. Le point A peut être placé graphiquement.
On peut aussi calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$. On obtient $(2; -2)$.
Ce sont aussi les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

d. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.
 $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

20 QCM

1. Réponse c.

2. Réponse b.

$\overline{XP} = -3\overline{YP} = -3\overline{YX} - 3\overline{XP}$ (relation de Chasles).

D'où $4\overline{XP} = -3\overline{YX}$ ou encore $\overline{XP} = \frac{3}{4}\overline{XY}$.

3. Réponse d.

\overline{RU} et \overline{UK} sont colinéaires donc R appartient à la droite (UK).

Comme \overline{RU} et \overline{KU} sont du même sens, R se situe sur la demi-droite [UK].

4. Réponse c.

a. I est sur la médiatrice de [AB].

b. C'est la relation de Chasles, vraie pour tout point I du plan.

d. Cette égalité est fautive. On pourrait par exemple écrire $\overline{IA} = \overline{BI}$.

21 SANS LES COORDONNÉES

Comme K est le milieu de [BC], on a $\overline{KB} = \overline{CK}$.

On utilise la relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AK} + \overline{KB} + \overline{AK} + \overline{KC}$.

On remplace \overline{KB} par \overline{CK} :

$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AK} + \overline{CK} + \overline{AK} + \overline{CK} = 2\overline{AK}$ car $\overline{CK} + \overline{CK} = \vec{0}$.

22 LISA

a. Les coordonnées de L sont notées $(x; y)$.

On a : $\overrightarrow{LI}(6-x; 4-y)$ et $\overrightarrow{AS}(-2; -14)$.

Comme LISA est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{AS}$.

D'une part, $6-x = -2$ ce qui donne $x = 8$.

D'autre part, $4-y = -14$ ce qui donne $y = 18$.

Les coordonnées de L sont (8 ; 18).

b. Les coordonnées de G sont notées $(x; y)$.

On a : $\overrightarrow{AG}(x - (-2); y - 10)$.

Or, $\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{ZX} + 6\overrightarrow{ZY}$ donc les coordonnées de \overrightarrow{AG} sont $(4; 6)$.

D'une part, $x + 2 = 4$ équivaut à $x = 2$.

D'autre part, $y - 10 = 6$ équivaut à $y = 16$.

Les coordonnées de G sont (2 ; 16).



L'égalité $\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{ZX} + 6\overrightarrow{ZY}$ permet d'écrire immédiatement $\overrightarrow{AG}(4; 6)$ car la base est $(\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY})$.

c. Soit U le milieu de [LI]. Comme R est le symétrique de G par rapport à U, le point U est aussi le milieu de [GR].

Les diagonales du quadrilatère GIRL se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Les coordonnées de U sont (7 ; 11).

On a $\overrightarrow{GU}(5; -5)$ et $\overrightarrow{UL}(1; 7)$.

$$\|\overrightarrow{GU}\| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} \text{ et } \|\overrightarrow{UL}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}.$$

Comme $GU = UL$, on a aussi $GR = LI$. Les diagonales du parallélogramme GIRL étant de même longueur, **c'est un rectangle.**



Il est nécessaire de commencer par prouver que GIRL est un parallélogramme. En effet, un quadrilatère ayant des diagonales de même longueur n'est pas toujours un rectangle.

d. Les points T, H et B sont alignés, donc les vecteurs \overrightarrow{TH} et \overrightarrow{TB} sont colinéaires. On écrit que le déterminant de ces deux vecteurs est nul, en posant $B(x_B; 0)$.

On a $\overrightarrow{TH}(2,5; -22,5)$ et $\overrightarrow{TB}(x_B; -33)$.

$$\det(\overrightarrow{TH}, \overrightarrow{TB}) = 2,5 \times (-33) - (-22,5) \times x_B = 0.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$-82,5 + 22,5x_B = 0$$

$$22,5x_B = 82,5$$

$$22,5x_B = \frac{82,5}{22,5} = \frac{11}{3}$$

Les coordonnées de B sont $\left(\frac{11}{3}; 0\right)$.

e. On a $\overrightarrow{TU}(7; -22)$ et $\overrightarrow{AB}\left(\frac{17}{3}; -10\right)$. Comme $\overrightarrow{TU} \neq \overrightarrow{AB}$, le quadrilatère TUBA n'est pas un parallélogramme et il ne peut pas être un losange.

23 ORTHOGONALITÉ

```

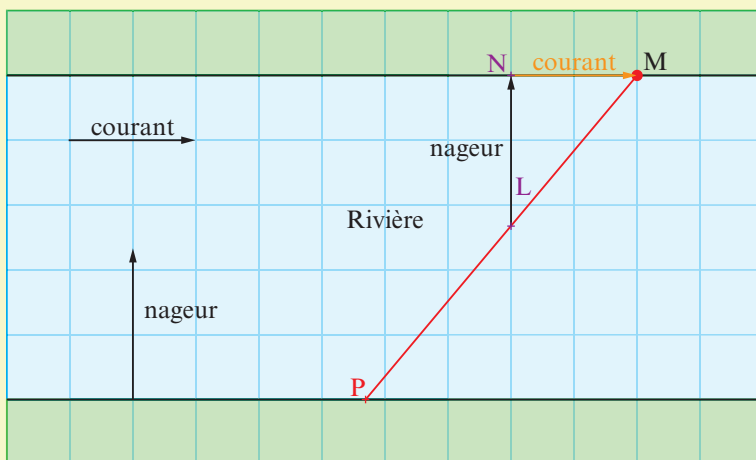
X1=float(input("abscisse premier vecteur ?"))
Y1=float(input("ordonnée premier vecteur ?"))
X2=float(input("abscisse second vecteur ?"))
Y2=float(input("ordonnée second vecteur ?"))
if X1*X2-Y1*Y2==0:
    print("les vecteurs sont orthogonaux")
else:
    print("les vecteurs ne sont pas orthogonaux")

```

24 TRAVERSÉE DE RIVIÈRE

La vitesse propre du nageur et la vitesse du courant sont représentées par deux vecteurs. La vitesse effective du nageur est représentée par le vecteur somme des deux précédents.

On dessine ces deux vecteurs de manière que leur somme ait pour extrémité le point M. En traçant la droite (ML), on obtient le point P qui doit être le point de départ du nageur.



25 LIEU GÉOMÉTRIQUE

a. $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$ et M est sur le côté [CD], on a donc $x \in]0; 1[$.

b. On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Les coordonnées de M sont $(x; 1)$.

👍 En règle générale, dans une base (\vec{i}, \vec{j}) , si $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, alors les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont $(a; b)$.

On a G centre de gravité de AMB et I milieu de [AB], donc $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.



Le centre de gravité se situe sur [IM] aux deux-tiers en partant de M ou au tiers en partant de I (voir l'exercice 16).

On a aussi $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, d'où $\overrightarrow{IM}\left(x - \frac{1}{2}; 1\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right); \frac{1}{3}\right)$.

Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG}$ les coordonnées de \overrightarrow{AG} sont :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right); 0 + \frac{1}{3}, \text{ soit } \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Les coordonnées de G sont : $\left(\frac{1}{3}(x + 1); \frac{1}{3}\right)$.

c. L'ordonnée de G est constante, égale à $\frac{1}{3}$. Cela signifie que pour tout $x \in]0; 1[$,

G est sur une droite parallèle au segment [DC].

Avec $x \in]0; 1[$, on déduit que l'abscisse de G, appartient à $\left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[$.

Ainsi, G décrit le segment [EF], où E et F sont les points de coordonnées $E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

et $F\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

7 Géométrie

I CALCULS DANS UN REPÈRE

On se place dans le plan muni d'un repère.

On donne $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

1. Milieu d'un segment

► Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

EXEMPLE : Avec $A(4; -5)$ et $B(-1; 3)$:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-1)}{2} = 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1.$$

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(1,5; -1)$.

2. Distance entre deux points

► Dans un repère orthonormé, la distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE :

Avec $A(4; -5)$ et $B(-1; 3)$:

$$AB = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (3 - (-5))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}.$$

II PROJETÉ ORTHOGONAL ET TRIANGLE RECTANGLE

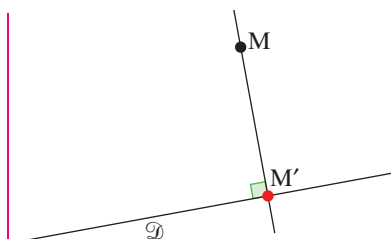
1. Projeté orthogonal

Soit \mathcal{D} une droite et M un point n'appartenant pas à cette droite.

► On appelle **projeté orthogonal** du point M sur la droite \mathcal{D} le point M' appartenant à la droite \mathcal{D} tel que les droites (MM') et \mathcal{D} sont perpendiculaires.

PROPRIÉTÉ :

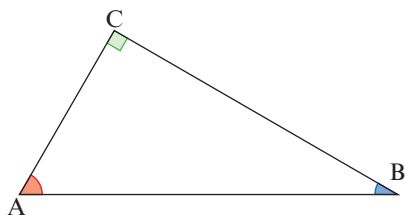
Le projeté orthogonal de M est le point de \mathcal{D} le plus proche de M .



Voir l'exercice 8 pour la démonstration de cette propriété.

La distance MM' est alors appelée distance du point M à la droite \mathcal{D} .

2. Trigonométrie dans un triangle rectangle



Dans un triangle ABC rectangle en C, il y a deux angles aigus \widehat{BAC} et \widehat{ABC} complémentaires.

\widehat{BAC} est noté \widehat{A} .

\widehat{ABC} est noté \widehat{B} .

On dispose des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \cos(\widehat{A}) &= \frac{AC}{AB} & \bullet \sin(\widehat{A}) &= \frac{BC}{AB} & \bullet \tan(\widehat{A}) &= \frac{BC}{AC} \\ \bullet \cos(\widehat{B}) &= \frac{BC}{AB} & \bullet \sin(\widehat{B}) &= \frac{AC}{AB} & \bullet \tan(\widehat{B}) &= \frac{AC}{BC} \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ :

Cosinus : $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$; Sinus : $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$; Tangente : $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$



Le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de l'angle aigu complémentaire.
Le cosinus et le sinus d'un angle sont toujours compris entre 0 et 1.

PROPRIÉTÉ :

Pour tout angle aigu \widehat{A} :

$$\cos^2(\widehat{A}) + \sin^2(\widehat{A}) = 1$$



$\cos^2(\widehat{A})$ est le carré de $\cos(\widehat{A})$, c'est-à-dire $\cos(\widehat{A}) \times \cos(\widehat{A})$.
Voir l'exercice 9 pour la démonstration de cette égalité.

Valeurs remarquables :

Mesure de l'angle en degrés	0	30	45	60	90
Valeur du cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Valeur du sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

MÉTHODE 1

Utiliser les coordonnées du milieu
pour caractériser un parallélogramme

→ Voir les exos 1, 13 et 15.

Dans un repère du plan, trois points A, B et C sont donnés.

Il s'agit de trouver les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.

Étape 1. Identifier les diagonales, calculer les coordonnées du milieu du segment [AC].**Étape 2.** Poser $D(x_D; y_D)$ et calculer les coordonnées du milieu de [BD].**Étape 3.** Déterminer les coordonnées de D en utilisant la propriété : « Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. »

Exo résolu

On donne $A(1; 4)$, $B(-3; 1)$ et $C(4; -6)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.

CORRIGÉ

Étape 1. Les diagonales du quadrilatère ABCD sont [AC] et [BD].

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Les coordonnées du milieu de [AC] sont : $\left(\frac{5}{2}; -1\right)$.**Étape 2.** On pose $D(x_D; y_D)$.

Les coordonnées du milieu de [BD] sont :

$$\frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-3 + x_D}{2} \text{ et } \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1 + y_D}{2}.$$

Étape 3. ABCD est un parallélogramme, donc :

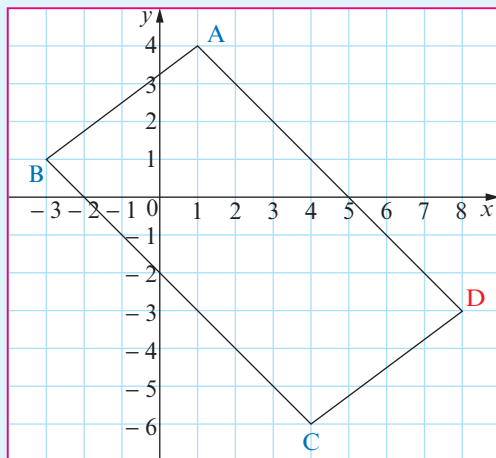
$$\frac{-3 + x_D}{2} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{1 + y_D}{2} = -1.$$

On obtient :

$$x_D = 8 \text{ et } y_D = -3.$$

Les coordonnées de D sont $(8; -3)$.

La figure sert à visualiser les calculs à effectuer et à vérifier le résultat obtenu. Une méthode utilisant l'égalité des vecteurs \vec{AB} et \vec{DC} est présentée au chapitre 6.



MÉTHODE 2**Tester si un triangle est rectangle**

→ Voir les exos 2, 7, 13, 14, 15 et 26.

Étape 1. Calculer les carrés des trois longueurs du triangle à l'aide de la formule de la distance (cours, paragraphe I.2).

Étape 2. Comparer le carré du plus grand côté et la somme des deux autres carrés.

Étape 3. Conclure : s'il y a égalité, le triangle est rectangle.

Exo résolu

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-12 ; -7)$, $B(-10 ; -1)$ et $C(2 ; -5)$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

CORRIGÉ

Étape 1. Calculs des carrés des longueurs :

$$AB^2 = (-10 - (-12))^2 + (-1 - (-7))^2 = (2)^2 + (6)^2 = 40.$$

$$AC^2 = (2 - (-12))^2 + (-5 - (-7))^2 = (14)^2 + (2)^2 = 200.$$

$$BC^2 = (2 - (-10))^2 + (-5 - (-1))^2 = (12)^2 + (-4)^2 = 160.$$

Étape 2. On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Étape 3. Le triangle est donc rectangle en B.



Dans cette méthode, il est inutile d'utiliser la racine carrée de la formule de la distance.

TESTER SES CONNAISSANCES

Si besoin, on se place dans un repère orthonormé.

1 PARALLÉLOGRAMME

★ ⌚ 5 min ▶ P. 191

On donne les points $C(-2; 1)$, $E(1; 6)$, $N(3; 3)$ et $T(0; -2)$.

a. Montrer que $[CN]$ et $[TE]$ ont le même milieu.

Qu'en déduit-on pour le quadrilatère CENT ?

b. Soit Q le point de coordonnées $(4; -2)$. Déterminer les coordonnées du point I tel que CINQ est un parallélogramme.



Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.
Voir la méthode 1.

2 NATURE D'UN TRIANGLE

★ ⌚ 10 min ▶ P. 191

On donne les points $A(1; 4)$, $B(6; 2)$ et $C(-1; -1)$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?



Calculer AB, AC et BC. Voir la méthode 2.

3 LOGIQUE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 191

1. a. La proposition : « Si ABCD est un carré, alors il a quatre côtés égaux » est-elle vraie ?

b. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

2. a. La proposition : « Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle » est-elle vraie ?

b. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

4 SYMÉTRIE CENTRALE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 192

Écrire un algorithme qui donne les coordonnées du symétrique d'un point A par rapport à un point B.



On suppose que les saisies sont faites et on note X_A, Y_A, X_B, Y_B les coordonnées des deux points.

5 APPARTENANCE À UN CERCLE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 192

On donne les points $Y(3; 10)$ et $X(8; -2)$.

Le point Y appartient-il au cercle de centre X et de rayon 13 ?



Calculer la distance XY.

6 TANGENTE À UN CERCLE

★ ⌚ 5 min | ► P. 192 |

Soit \mathcal{C} un cercle de centre K et de rayon 4.

Soit A et B deux points de \mathcal{C} tels que $\widehat{AOB} = 45^\circ$.

La tangente \mathcal{D} à \mathcal{C} en A coupe (KB) en P .

- Quelle est la nature du triangle KAP ?
- Calculer AP .



La tangente à un cercle de centre K en un point A est la droite perpendiculaire à (KA) passant par A .

7 CERCLE CIRCONSCRIT À UN TRIANGLE RECTANGLE

★ ⌚ 5 min | ► P. 193 |

On donne les points $A(-3 ; -1)$, $B(-2 ; 2)$ et $C(3 ; -3)$.

- Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .



Voir la méthode 2.

- Calculer les coordonnées du point H , centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Calculer le rayon de ce cercle.



Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le milieu de l'hypoténuse.

8 PROJETÉ ORTHOGONAL

| DÉMO | ★ ⌚ 5 min | ► P. 193 |

Soit \mathcal{D} une droite du plan et M un point n'appartenant pas à \mathcal{D} . On note H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} et N un point distinct de H sur \mathcal{D} .

- Faire une figure.
- Quelle est la nature du triangle MHN ?
- Démontrer que H est le point de \mathcal{D} le plus proche de M .



Utiliser un argument très simple dans le triangle MHN .

9 TRIGONOMÉTRIE

| DÉMO | ★ ⌚ 15 min | ► P. 194 |

Soit ABC un triangle rectangle en A . On note \widehat{B} l'angle \widehat{ABC} .

- Compléter : $\cos(\widehat{B}) = \frac{\dots}{BC}$ et $\sin(\widehat{B}) = \frac{\dots}{\dots}$
- Montrer que : $\cos^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{B}) = 1$.



Utiliser le théorème de Pythagore.

10 L'AVION PREND LA TANGENTE | ★ | ⌚ 15 min | ► P. 194 |

Un aviateur se déplace en ligne droite à une altitude de 3500 m et à une vitesse constante. Il aperçoit un clocher à 50° au-dessous de son plan horizontal.

Il passe au-dessus de ce clocher 20 secondes après.

Quelle est la vitesse de l'avion, en km/h (arrondir à l'unité près) ?



La hauteur du clocher est négligée. Faire une figure.

Calculer d'abord la distance parcourue par l'avion en 20 secondes.

S'ENTRAÎNER**11 POINT DE CONCOURS DES MÉDIATRICES** | ★ | ⌚ 15 min | ► P. 195 |

Soit ABC un triangle quelconque.

a. Expliquer pourquoi les médiatrices de [AB] et [AC] sont sécantes.

b. On note I leur point d'intersection. Montrer que $IB = IC$.

c. Que peut-on conclure pour I ?

12 POINT DE CONCOURS DES HAUTEURS | ★★ | ⌚ 15 min | ► P. 195 |

Soit ABC un triangle quelconque.

a. Construire les hauteurs de ce triangle.

Construire la parallèle à (AB) passant par C, la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (BC) passant par A.

Ces parallèles se coupent en D, E et F, de telle sorte que A appartient à (EF), B à (FD) et C à (DE).

b. Montrer que A est le milieu de [EF].

On admet qu'un même raisonnement permet de prouver que B est le milieu de [DE] et C le milieu de [DE].

c. Que peut-on dire des hauteurs du triangle ABC dans le triangle DEF ?

d. Conclure.



Voir l'exercice 11.

13 UN BEAU RECTANGLE | ★★ | ⌚ 15 min | ► P. 196 |


On donne les points $J(10 ; 3)$, $O(4 ; 0)$ et $L(2 ; 4)$.

a. Déterminer les coordonnées du point I tel que le quadrilatère JOLI est un parallélogramme.




Voir la méthode 1.

b. Montrer que JOLI est un rectangle.

 Pour l'angle droit, voir la méthode 2... Ou bien penser à une propriété des diagonales d'un rectangle.


14 UN LOSANGE SILENCIEUX | ★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 196 |

On donne les points C (-3,5 ; 4) , H (2,5 ; 4,5) , U (6,5 ; 0) et T (0,5 ; -0,5).
Montrer que le quadrilatère CHUT est un losange.

 Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

15 LE CARRÉ SE MET EN BOULE | ★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 196 |

On donne les points B(-2 ; 6), O(-3 ; 8), U(-5 ; 7) et L(-4 ; 5).
Démontrer que BOUL est un carré.

 Voir la méthode 1. Pour l'angle droit, voir la méthode 2... Ou bien penser à une propriété des diagonales.

16 AIRE D'UN TRIANGLE ISOCÈLE | ★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 197 |

On donne les points A(-4 ; 3), B(3 ; 2) et C(1 ; -2).

- Montrer que ABC est un triangle isocèle en A.
- Calculer les coordonnées de H, milieu du segment [BC].
- Justifier que la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC.

 Utiliser des arguments de géométrie, sans aucun calcul supplémentaire.


- Calculer AH, puis l'aire du triangle ABC.

 Pour l'aire, utiliser : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

17 AIRE D'UN TRIANGLE | ★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 197 |

On donne les points A(7 ; -2), B(1 ; 10), C(-5 ; 2) et D(-2 ; 1).

- Montrer que les points A, C et D sont alignés.
- Montrer que (BD) est une hauteur du triangle ABC.

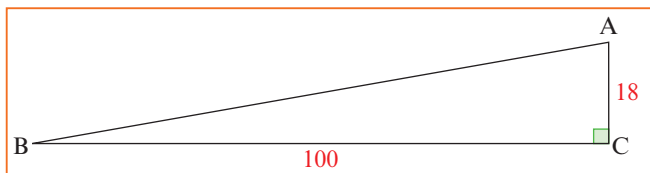
 On peut montrer que ABD est un triangle rectangle en D.

- Calculer l'aire du triangle ABC.

18 ÉTAPE DE MONTAGNE

★ | ⌚ 15 min | ► P. 198

En juillet 2016, les coureurs du Tour de France ont terminé une étape de montagne à l'altiport de Peyragudes, dans les Pyrénées. La pente de la dernière ligne droite (que l'on suppose rectiligne) avant l'arrivée était de 18 %.



👍 La pente, exprimée à l'aide d'un pourcentage, est le rapport du dénivelé (la différence d'altitude) par la distance horizontale parcourue.
Une pente de 18 % signifie que l'on augmente l'altitude de 18 m lorsque la distance horizontale est de 100 m.

- Calculer une mesure de l'angle fait par cette route avec l'horizontale. Arrondir au dixième de degré près.
- En effectuant, à tort, ce calcul avec la distance réelle parcourue (en prenant $AB = 100$), on commet une erreur.
 - Calculer une mesure de l'angle \widehat{CBA} dans ce cas.
 - Calculer le pourcentage de l'erreur commise.

19 CALCULS DE VOLUMES

★★ | ⌚ 20 min | ► P. 198

- Un pièce métallique en forme de cône a pour hauteur 6 cm. La valeur exacte de son volume, en cm^3 , est 8π . Calculer le rayon du disque de base.

👍 Le volume d'un cône de hauteur h et de rayon de base r est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

- On suppose que la Terre est de forme sphérique, de rayon 6 370 km.
 - Calculer son volume en m^3 .

👍 Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.

- Sachant que la densité moyenne est de $5\,500 \text{ kg/m}^3$, calculer la masse de la Terre en kg.
 - Le rayon de Jupiter est environ 11 fois plus grand que celui de la Terre. Que peut-on dire de son volume, comparé à celui de la Terre ?
- Une conduite d'évacuation des eaux usées est en forme de cylindre droit. La valeur exacte de son aire latérale est 9π , en m^2 . Celle de son volume, en m^3 , est $2,025\pi$. Calculer le rayon du disque de base du cylindre.

👍 Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base r est $\pi r^2 h$. Pour trouver l'aire latérale, imaginer le patron du cylindre : une fois déplié, celui-ci est en forme de rectangle (ne pas compter l'aire des disques de base).

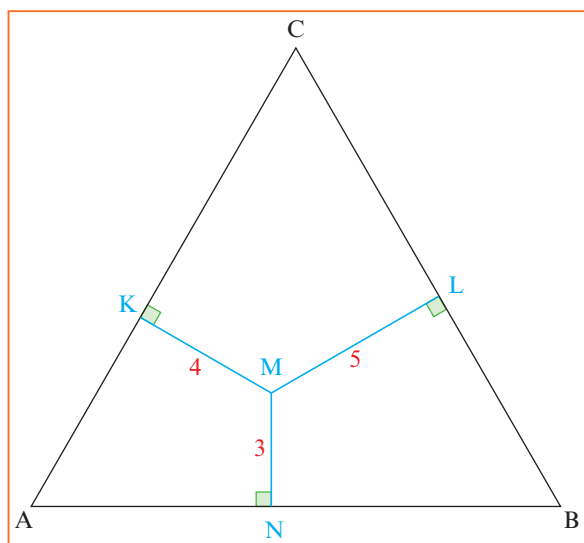
4. La pyramide de Kheops a une base carrée d'environ 232 m de côté. Son volume est égal à 2 619 435 m³. Calculer sa hauteur.

👍 Le volume d'une pyramide de hauteur h et de base \mathcal{B} est $\frac{1}{3} \mathcal{B} h$.

20 TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

★★★ | ⌚ 15 min | ► P. 199

ABC est un triangle équilatéral. Le point M se situe à 3 cm du côté [AB], à 4 cm du côté [AC], à 5 cm du côté [BC]. Déterminer la longueur des côtés du triangle.



👍 Poser $x = AB = AC = BC$, puis écrire une équation portant sur des aires.

Rappel : l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

21 OPTIMISATION

★★ | ⌚ 30 min | ► P. 199

On considère le triangle ABC rectangle en C, tel que $CA = 15$ et $CB = 8$. M est un point du segment [AB]. N est le projeté orthogonal de M sur [CA], P le projeté orthogonal de M sur [CB]. L'objectif est de trouver la position du point M pour laquelle la distance NP est minimale et calculer cette distance minimale.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure.
Préciser la distance minimale NP.

👍 Réaliser la figure en choisissant (CA) horizontale et (CB) verticale.

2. a. Montrer que $NP = CM$.

b. Quelle est la position du point M sur le segment [AB] pour laquelle la distance CM est minimale ?

👍 Voir l'exercice 8.

3. Dans cette question, M est le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. Montrer que les triangles CAB et MCB sont semblables.

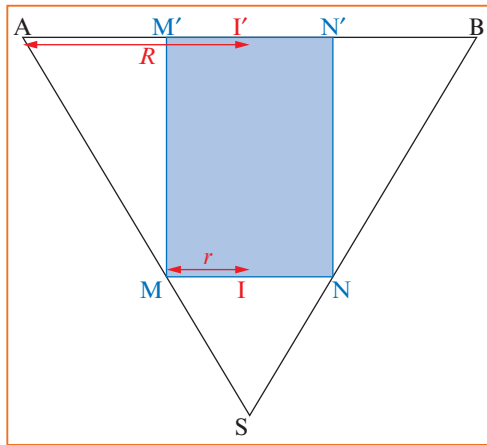
b. En déduire CM.

22 CYLINDRE INSCRIT DANS UN CÔNE | ★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 200

L'objectif du problème est de déterminer le volume maximal d'un cylindre inscrit dans un cône.

On considère un cône de hauteur $h = SI'$ et de rayon $R = I'A$.

On note $r = IM$ le rayon du cylindre et $x = SI$ la distance entre le sommet du cône et le centre de la base la plus proche de ce sommet.



1. Exprimer r en fonction de x , R et h .

👍 Utiliser le théorème de Thalès ou des triangles semblables.

2. Montrer que le volume du cylindre est :

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} (hx^2 - x^3).$$

👍 Le volume d'un cylindre est le produit de l'aire du disque de base par sa hauteur.

3. Dans cette question, on prend $h = 10$ et $R = 6$.

a. Calculer V en fonction de x .

b. Le volume est maximal lorsque la quantité $10x^2 - x^3$ est maximale.

On utilise un tableur pour déterminer une valeur approchée de la valeur de x qui permet d'obtenir ce volume maximal. Les valeurs de x sont écrites dans la colonne A, celles de $10x^2 - x^3$ dans la colonne B.


Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B1 ?
Quelle formule doit-on saisir dans la cellule A2 pour obtenir, par recopie vers le bas jusqu'à la cellule A999, les valeurs de x jusqu'à 9,99, espacées de 0,01 ?

Une fois la feuille de calcul complétée jusqu'à la ligne 999, rechercher la valeur de x arrondie au centième près qui permet d'obtenir un volume maximal.

c. En réalité, la valeur exacte est $x = \frac{20}{3}$.

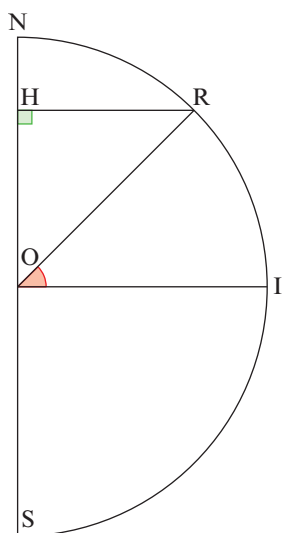
Calculer la valeur exacte du volume maximal, puis le pourcentage du volume occupé par le cylindre de volume maximal dans le cône.

	A	B
1	0,01	0,000999
2	0,02	0,003992
3	0,03	0,008973
4	0,04	0,015936
5	0,05	0,024875
6	0,06	0,035784
7	0,07	0,048657
8	0,08	0,063488
9	0,09	0,080271
10	0,01	0,099
11	0,11	0,119669
12	0,12	0,142272
13	0,13	0,166803
14	0,14	0,193256
15	0,15	0,221625
16	0,16	0,251904

 Le volume du cône est le tiers du produit de l'aire du disque de base par sa hauteur.

23 LONGUEUR D'UN PARALLÈLE

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 200



On suppose que la sphère terrestre a un rayon de 6 400 km.

1. Calculer la longueur d'un méridien, arrondir à la centaine de km près.

2. Les coordonnées approximatives de la ville de Rome sont (42° N ; $12,5^\circ$ E).

Sur la figure ci-contre, N et S représentent les pôles Nord et Sud, O le centre de la Terre, R la ville de Rome.

I est le point d'intersection entre le méridien qui passe par Rome et l'Equateur.

De plus, H est le projeté orthogonal de R sur (ON).

a. Préciser la mesure en degrés de l'angle \widehat{IOR} .

b. Calculer HR.

c. En déduire la longueur du $42^{\text{ème}}$ parallèle.

Arrondir à la centaine de km près.



2. a. Est-ce la latitude ou la longitude ?

2. b. Utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle OHR.

PRÉPARER UN CONTRÔLE

24 QCM

★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 201

Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

Partie 1. Pour les trois premières questions, on considère trois points dans un repère orthonormé : A (-12 ; -8), B (-8 ; 20) et C (16 ; -4).

1. Le triangle ABC est :

a. isocèle b. rectangle c. isocèle rectangle d. quelconque

2. Les coordonnées du point Z, milieu de [BC] sont :

a. (10 ; 2) b. (12 ; -12) c. (4 ; 8) d. (8 ; 16)

3. L'aire du triangle ABC est :

a. $160\sqrt{2}$ b. $200\sqrt{3}$ c. 480 d. 384

Partie 2. Les questions 4 et 5 sont indépendantes.

4. Avec un compte-goutte normalisé, il faut 20 gouttes pour 1 mL d'eau.

Quel est le diamètre d'une goutte d'eau (supposée de forme sphérique) ?

a. 2,3 mm b. 4,6 mm c. 6,9 mm d. 9,2 mm



Utiliser la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ pour le volume d'une boule de rayon R .

5. Si $\cos(\widehat{A}) = 0,8$, alors $\sin(\widehat{A}) = \dots$

a. 0,2 b. 0,4 c. 0,9 d. 0,6



Utiliser la formule $\cos^2(\widehat{A}) + \sin^2(\widehat{A}) = 1$.

25 UN CUBE CARRÉ

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 201

On donne les points C(1 ; -2), U(7 ; -5) et B(10 ; 1).

Soit A le milieu de [CB] et E le symétrique de U par rapport à A.

Montrer que le quadrilatère CUBE est un carré.



Commencer par calculer les coordonnées de A. Il est préférable de raisonner avec les diagonales plutôt qu'avec les côtés.

26 LE RAYON SECRET

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 202

On donne les points $Y(-1,5; 2)$ et $Z(5; 0)$.

Calculer la valeur exacte du rayon du cercle de diamètre $[YZ]$, puis en donner une valeur approchée à 0,1 près.

27 UN PEU DE LOGIQUE

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 202

a. Les diagonales d'un quadrilatère mesurent 3 cm et 5 cm.

Est-ce un rectangle ?

b. Un quadrilatère a des diagonales de même longueur.

Est-ce un rectangle ?

c. Un quadrilatère a 3 angles droits.

Ses diagonales sont-elles de la même longueur ?

28 TRIANGLE INSCRIT D'AIRE MINIMALE

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 203

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ et $BC = 5$.

On place les points E , F et G sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$ de telle façon que $AE = BF = DG = x$, où $x \in]0; 5[$.

1. Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

Créer un curseur pour faire varier x dans l'intervalle $]0; 5[$.

Quelle valeur de x (arrondie à 0,01 près) permet d'obtenir un triangle EFG d'aire minimale ?

2. a. Montrer que l'aire du triangle EFG est : $A(x) = x^2 - 6x + 17,5$.



Le calcul direct de l'aire du triangle est trop difficile, on l'obtient en ôtant de l'aire du rectangle trois aires de figures simples à calculer.

L'aire du trapèze se trouve facilement par des considérations de symétrie.

b. Vérifier que : $A(x) = (x - 3)^2 + 8,5$.



Développer l'expression proposée.

c. En déduire la valeur de x pour laquelle EFG a une aire minimale.

ALLER PLUS LOIN**29 RACINE CARRÉE DE 39**

★★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 204

On donne un segment de longueur 1.

Construire un segment de longueur $\sqrt{39}$.



Aucune mesure n'est autorisée. La construction se fait au moyen d'une règle sans graduation, d'une équerre ou d'un compas...Penser au théorème de Pythagore !

CORRIGÉS

1 PARALLÉLOGRAMME

a. $\frac{x_C + x_N}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{y_C + y_N}{2} = 2$.

Les coordonnées du milieu de [CN] sont : $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

$$\frac{x_E + x_T}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{y_E + y_T}{2} = 2.$$

Les coordonnées du milieu de [ET] sont : $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Les diagonales du quadrilatère CENT se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

b. Les diagonales du parallélogramme CINQ sont [CN] et [QI].

On sait que les coordonnées du milieu de [CN] sont : $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

On pose $I(x_I; y_I)$. Les coordonnées du milieu de [QI] sont :

$$\frac{x_Q + x_I}{2} = \frac{4 + x_I}{2} \text{ et } \frac{y_Q + y_I}{2} = \frac{-2 + y_I}{2}.$$

CINQ est un parallélogramme, donc $\frac{4 + x_I}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-2 + y_I}{2} = 2$.

On obtient $x_I = -3$ et $y_I = 6$.

Les coordonnées de I sont **(-3 ; 6)**.

2 NATURE D'UN TRIANGLE

$$AB^2 = (6 - 1)^2 + (2 - 4)^2 = 29$$

$$AC^2 = (-1 - 1)^2 + (-1 - 4)^2 = 29$$

$$BC^2 = (-1 - 6)^2 + (-1 - 2)^2 = 58$$

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle est donc rectangle en A.

De plus, $AB = AC$, il est aussi isocèle.



Si l'énoncé ne le demande pas précisément, il n'est pas nécessaire d'utiliser la racine carrée de la formule, puisque le but de cette méthode est de comparer les carrés.

3 LOGIQUE

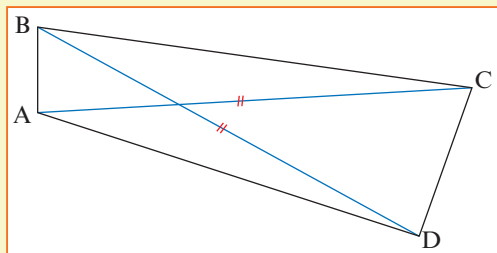
1. a. La proposition est vraie.

b. Réciproque : « Si un quadrilatère a quatre côtés égaux, alors c'est un carré ». Cette réciproque est fautive, cela pourrait être un losange.

2. a. La proposition est fautive.

Le quadrilatère peut être quelconque.

Sur la figure page suivante, le quadrilatère ABCD a ses diagonales de même longueur, mais n'est pas un rectangle.



b. Réciproque : « Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur. »

Cette réciproque est vraie.

4 SYMÉTRIE CENTRALE

On note C le symétrique de A par rapport à B. B est le milieu de [AC],

d'où $\frac{x_A + x_C}{2} = x_B$, ce qui donne $x_C = 2x_B - x_A$.

De même, $y_C = 2y_B - y_A$.

L'algorithme est donc réduit aux deux lignes d'affectation :

$$\begin{aligned} X_C &\leftarrow 2X_B - X_A \\ Y_C &\leftarrow 2Y_B - Y_A \end{aligned}$$

À la fin de l'algorithme, une ligne d'affichage est facultative.
On peut écrire : « Afficher X_c et Y_c ».

5 APPARTENANCE À UN CERCLE

$$XY^2 = (8 - 3)^2 + (10 - (-2))^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$$

Par conséquent, $XY = \sqrt{169} = 13$.

Cette distance est égale au rayon du cercle, on peut donc conclure que **Y appartient au cercle de centre X et de rayon 13.**

À l'intérieur des carrés, l'ordre des soustractions n'a pas d'importance.
Par exemple, $(8 - 3)^2 = 5^2 = 25$ et $(3 - 8)^2 = (-5)^2 = 25$.
Si on trouve $XY < 13$, le point Y appartient au disque de centre X et de rayon 13.

6 TANGENTE À UN CERCLE

a. Par définition, cette tangente est perpendiculaire à (AK).

Le triangle KAP est un triangle rectangle.

b. Comme KAP est un triangle rectangle en A, on a

$$\tan(\widehat{AKP}) = \frac{AP}{AK}.$$

Or, $\tan(\widehat{AKP}) = \tan(45^\circ) = 1$, donc $\frac{AP}{AK} = 1$, ce qui donne **AP = AK = 4.**

On a utilisé une formule de trigonométrie $\tan(\widehat{AKP}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AP}{AK}$.

7 CERCLE CIRCONSCRIT À UN TRIANGLE RECTANGLE

a. $AB^2 = (-2 - (-3))^2 + (2 - (-1))^2 = 10.$

$AC^2 = (3 - (-3))^2 + (-3 - (-1))^2 = 40.$

$BC^2 = (3 - (-2))^2 + (-3 - 2)^2 = 50.$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A .

b. Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse. H est le milieu de $[BC]$.

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = 0,5 \text{ et } \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + (-3)}{2} = -0,5.$$

H a pour coordonnées $(0,5; -0,5)$.

Le rayon est HB et :

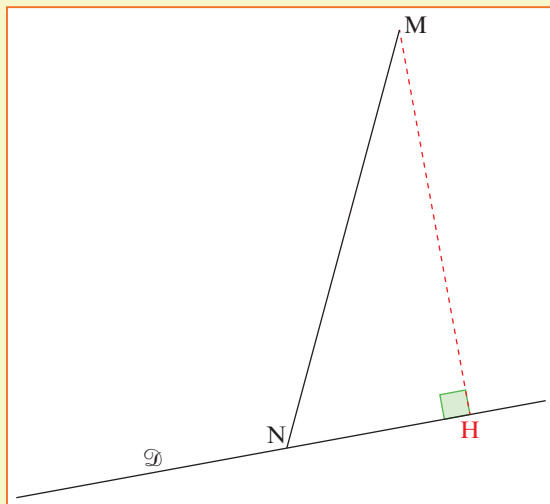
$$HB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{50} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

👍 Le rayon est égal à la moitié de l'hypoténuse BC :

$$BC = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

8 PROJETÉ ORTHOGONAL

a.



b. C'est un triangle rectangle en H .

c. Pour tout point N situé sur \mathcal{D} , distinct de H , le triangle MNH est rectangle en H et l'hypoténuse MN est strictement supérieure au côté MH .

On en déduit que le point de \mathcal{D} le plus proche de M est son projeté orthogonal H .

9 TRIGONOMÉTRIE

a. $\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$ et $\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC}$.

b. En élevant au carré : $\cos^2(\widehat{B}) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$ et $\sin^2(\widehat{B}) = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\cos^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{B}) &= \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.\end{aligned}$$

👍 On a utilisé en fin de calcul l'égalité de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

10 L'AVION PREND LA TANGENTE

Sur la figure, le point A désigne l'avion qui se déplace dans la direction indiquée par la flèche. Le point C désigne le clocher.

Le point S est à la verticale de A, de telle sorte que ASC est un triangle rectangle en S.

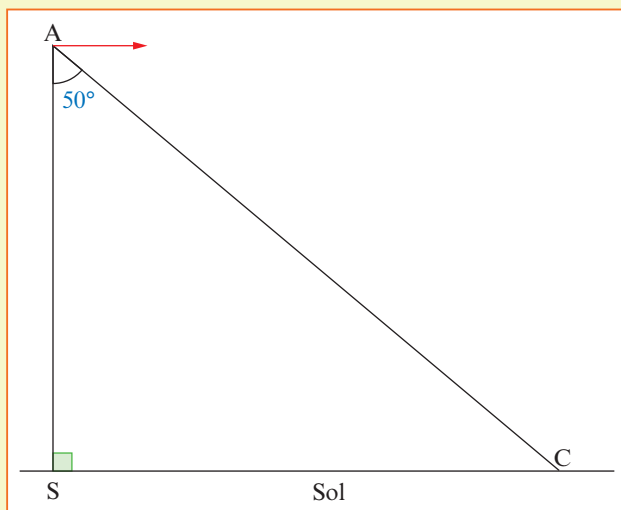
AS et une mesure de l'angle \widehat{SAC} étant connues, on peut calculer la distance SC :

$$\tan(50^\circ) = \frac{SC}{AS} = \frac{SC}{3\,500}, \text{ d'où } SC = 3\,500 \times \tan(50^\circ) \approx 4\,171.$$

La vitesse V de l'avion peut maintenant être calculée :

$$V = \frac{SC}{20} \approx 208,6.$$

La vitesse de l'avion est de 208,6 m/s, soit environ 751 km/h.



👍 Il y a 3 600 secondes en une heure. De plus 1 km = 1000 m. Ainsi, pour convertir une vitesse de m/s à km/h, on multiplie par 3,6.

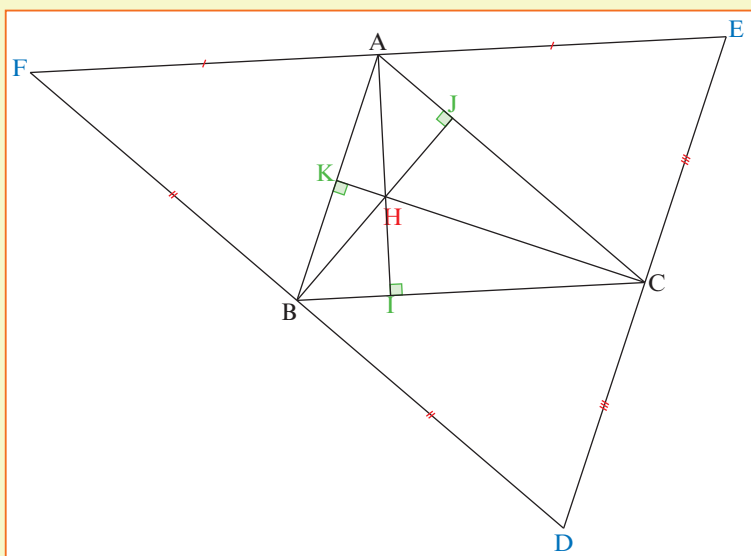
11 POINT DE CONCOURS DES MÉDIATRICES

- a. Dans un triangle, deux côtés ne sont pas parallèles, donc les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ sont sécantes.
- b. Comme I appartient à la médiatrice de $[AB]$, on a $IA = IB$.
Comme I appartient à la médiatrice de $[AC]$, on a $IA = IC$.
On en déduit que $IB = IC$.
- c. Puisque $IB = IC$, le point I appartient à la médiatrice de $[BC]$.
Les trois médiatrices sont donc concourantes en I .

👍 Le fait que $IA = IB = IC$ montre aussi que I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

12 POINT DE CONCOURS DES HAUTEURS

a.



- b. Les quadrilatères $AFBC$ et $AECB$ sont des parallélogrammes, on a donc $AF = BC = AE$, ce qui prouve que **A est le milieu de $[EF]$** .
- c. La hauteur (AI) est perpendiculaire à (BC) .
Comme (BC) et (EF) sont parallèles, cette hauteur est perpendiculaire à (EF) .
La droite (AI) est donc la médiatrice du segment $[EF]$.
De même, on prouve que (BJ) est la médiatrice du segment $[FD]$ et que (CK) est la médiatrice du segment $[DE]$.
Les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle DEF .
- d. Comme les médiatrices d'un triangle sont concourantes, on en déduit que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

👍 Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. Voir l'exercice 11 pour la démonstration.
Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un point appelé orthocentre du triangle (H sur la figure).

13 UN BEAU RECTANGLE

a. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Les coordonnées du milieu de [JL] sont (6 ; 3,5).

C'est aussi le milieu de [OI], donc :

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = 6 \text{ et } \frac{y_0 + y_1}{2} = 3,5, \text{ ce qui donne } x_1 = 8 \text{ et } y_1 = 7.$$

b. $OI^2 = (8 - 4)^2 + (7 - 0)^2 = 65$ et $JL^2 = (10 - 2)^2 + (4 - 3)^2 = 65$.

Ainsi, $JL = OI = \sqrt{65}$.

Les diagonales sont de même longueur, donc JOLI est un rectangle.



Bien souvent, caractériser la nature d'un quadrilatère se fait plus facilement avec les diagonales qu'avec les côtés.

14 UN LOSANGE SILENCIEUX

Les coordonnées du milieu de [CU] sont (1,5 ; 2).

Les coordonnées du milieu de [HT] sont (1,5 ; 2).

Les diagonales du quadrilatère CHUT se coupent en leur milieu, que l'on note K, c'est donc un parallélogramme.

$$CK^2 = (1,5 - (-3,5))^2 + (2 - 4)^2 = 29$$

$$HK^2 = (1,5 - 2,5)^2 + (2 - 4,5)^2 = 7,25$$

$$CH^2 = (2,5 - (-3,5))^2 + (4,5 - 4)^2 = 36,25.$$

On constate que $CH^2 = CK^2 + HK^2$, ce qui permet de conclure que le triangle CKH est rectangle en K.

En d'autres termes, les diagonales se coupent selon un angle droit.

Ainsi, CHUT est un losange.

15 LE CARRÉ SE MET EN BOULE

Les coordonnées du milieu de [BU] sont (-3,5 ; 6,5).

Les coordonnées du milieu de [OL] sont (-3,5 ; 6,5).

Les diagonales du quadrilatère BOUL se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme. Notons E le milieu de [BU] et de [OL].

$$EL^2 = (-3,5 - (-4))^2 + (6,5 - 5)^2 = 0,5^2 + 1,5^2 = 2,5$$

$$EU^2 = (-3,5 - (-5))^2 + (6,5 - 7)^2 = 1,5^2 + (-0,5)^2 = 2,5$$

$$LU^2 = (-4 - (-5))^2 + (5 - 7)^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

Comme $LU^2 = EL^2 + EU^2$, le triangle ELU est rectangle en E.

Comme $EL = EU = \sqrt{2,5}$, le triangle ELU est isocèle en E.

Finalement, les diagonales [OL] et [BU] sont de même longueur et se coupent perpendiculairement, ce qui montre que BOUL est un carré.



On peut aussi montrer que les quatre côtés ont la même longueur et que deux côtés consécutifs forment un angle droit.

16 AIRE D'UN TRIANGLE ISOCÈLE


$$a. AB = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}.$$

$$AC = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}.$$

AB = AC, donc ABC est isocèle en A.

$$b. H(2; 0).$$

c. H étant le milieu de [AB], la droite (AH) est la médiane issue de A du triangle ABC. Ce triangle étant isocèle en A, cette médiane est aussi la hauteur issue de A.


 Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane, une médiatrice et une bissectrice.

$$d. AH = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}.$$

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AH \times BC}{2}$.

$$BC = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}.$$

$$L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AH \times BC}{2} = \frac{\sqrt{45} \times \sqrt{20}}{2} = 15$.$$

 Avec un triangle équilatéral, on procède de la même façon.
Avec un triangle rectangle, l'aire est égale à la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit. Avec un triangle quelconque, aucune méthode n'est à connaître.

17 AIRE D'UN TRIANGLE

$$a. \text{ Le coefficient directeur de (AC) est } \frac{2 - (-2)}{-5 - 7} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Le coefficient directeur de (AD) est } \frac{1 - (-2)}{-2 - 7} = -\frac{1}{3}.$$

Comme les coefficients directeurs de (AC) et (AD) sont identiques, les points A, C et D sont donc alignés.

b. Dans le but d'utiliser le théorème de Pythagore, on calcule les carrés des trois longueurs AB, AD, et BD.

Pour cela, on commence par les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(-6; 12)$ et $\overrightarrow{BD}(-3; -9)$.

$$AB^2 = (-6)^2 + 12^2 = 180.$$

$$AD^2 = (-9)^2 + 3^2 = 90.$$

$$BD^2 = (-3)^2 + (-9)^2 = 90.$$

$$\text{On a donc } AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

D'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en D.

Les droites (AC) et (BD) étant perpendiculaires, (BD) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

c. La hauteur (BD) est associée à la base [AC]. Calculons la longueur AC :

$$AC = \sqrt{(-12)^2 + 4^2} = \sqrt{160}.$$

$$L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AC \times BD}{2} = \frac{\sqrt{160} \times \sqrt{90}}{2} = 60$.$$

18 ÉTAPE DE MONTAGNE

$$1. \tan(\widehat{CBA}) = \frac{CA}{CB} = \frac{18}{100} = 0,18.$$

La calculatrice donne $\widehat{CAB} \approx 10,2^\circ$.

$$2. a. \sin(\widehat{CBA}) = \frac{CA}{BA} = \frac{18}{100} = 0,18.$$

La calculatrice donne $\widehat{CAB} \approx 10,4^\circ$.

b. On calcule le rapport $\frac{10,4 - 10,2}{10,2} \approx 0,0196$, ce qui donne une erreur commise d'environ **2 %**.



Cette erreur est donc sans grande conséquence : en effet, si l'angle est petit, les deux distances BA et BC sont proches et l'erreur commise est faible.

19 CALCULS DE VOLUMES

$$1. \frac{1}{3}\pi r^2 \times 6 = 8\pi \text{ équivaut à } r^2 = 4.$$

Comme r est positif, on obtient $r = 2$.

Le rayon du disque de base est donc 2 cm.

2. a. Calcul du volume :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 6\,371\,000^3 \approx 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3.$$

b. Calcul de la masse de la planète Terre :

$$1,083 \times 10^{21} \times 5500 \approx 5,96 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

c. Le volume de Jupiter est **11³ fois plus grand que celui de la Terre** (soit 1331 fois plus grand).

3. Le patron du cylindre est en forme de rectangle.

Les dimensions de ce rectangle sont h et $2\pi r$. L'aire latérale est donc $2\pi rh$.

$$2\pi rh = 9\pi \text{ et } \pi r^2 h = 2,025\pi.$$

En divisant membre à membre : $\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{2,025\pi}{9\pi}$ qui se simplifie ainsi :

$$\frac{r}{2} = \frac{2,025}{9} \text{ d'où } r = 0,45.$$

Le rayon du disque de base du cylindre est donc 0,45 m.

$$4. \frac{1}{3} \times 232^2 \times h = V, \text{ d'où } h = \frac{3V}{232^2} \approx 146.$$

La hauteur de la pyramide de Kheops est environ 146 m.



Avec ce genre d'exercices autour des calculs d'aires ou de volumes, s'efforcer de garder des valeurs exactes jusqu'à l'application numérique finale. Notamment, ne pas remplacer π par 3,14 en début d'exercice.

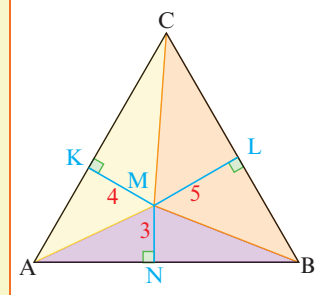
20 TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

La somme des aires des triangles AMB, AMC, BMC est égale à l'aire totale du triangle ABC.

$$\text{Aire du triangle AMB} : \frac{3x}{2}.$$

$$\text{Aire du triangle AMC} : \frac{4x}{2} = 2x.$$

$$\text{Aire du triangle BMC} : \frac{5x}{2}.$$



Leur somme est $6x$. L'aire du triangle équilatéral ABC est $x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

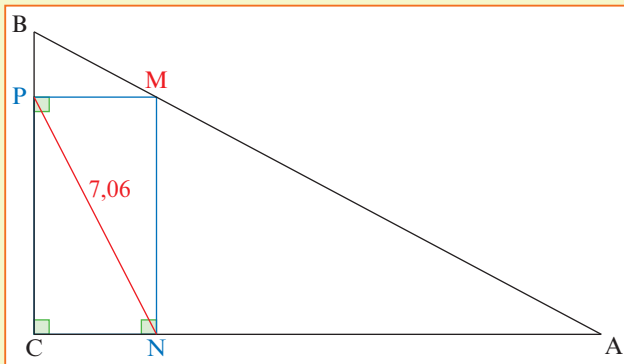
L'équation du problème est $x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 6x$. En divisant par x , on obtient :

$$x \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \Leftrightarrow x = 6 \times \frac{4}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \approx 13,9.$$

La longueur des trois côtés du triangle est environ 13,9 cm.

21 OPTIMISATION

1.



En déplaçant le point M mobile sur le segment [AB], on trouve une distance minimale d'environ 7,06, valeur arrondie à 0,01 près.

2. a. CNMP est un rectangle puisque, par définition, il a trois angles droits. Ses diagonales sont donc de même longueur : $NP = CM$.

b. La distance CM est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

3. a. Les deux triangles CAB et MCB ont deux angles en commun : $\widehat{CMB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ et $\widehat{MBC} = \widehat{CBA}$. Ils sont donc semblables.

b. On a donc : $\frac{MB}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{BC}{BA}$, soit $\frac{CM}{15} = \frac{8}{17}$, d'où $CM = \frac{8 \times 15}{17} \approx 7,06$.

👍 Le premier rapport est inutile. Dans le troisième rapport, on calcule $AB = 17$ avec le théorème de Pythagore dans le triangle CAB.

22 CYLINDRE INSCRIT DANS UN CÔNE

1. Les droites (I'A) et (IM) sont parallèles. Les points S, I, I' et S, M, A sont alignés dans cet ordre. D'après le théorème de Thalès, $\frac{r}{R} = \frac{x}{h}$, d'où $r = \frac{xR}{h}$.

$$2. V = \pi r^2 (h - x) = \pi \left(\frac{xR}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2}{h^2} (hx^2 - x^3).$$

3. a. Avec $h = 10$ et $R = 6$, le volume est :

$$V = 0,36\pi(10x^2 - x^3)$$

b. Dans la cellule B1, la formule à saisir est :

$$=10*A1^2-A1^3$$

Dans la cellule A2, la formule à saisir est :

$$=A1+0,01$$

664	6,64	148,141056
665	6,65	148,145375
666	6,66	148,147704
667	6,67	148,148037
668	6,68	148,146368
669	6,69	148,142691
670	6,7	148,137


Le volume est maximal lorsque $x = 6,67$ (arrondi à 0,01 près) et le volume maximal correspondant est environ **148,15**.

c. Avec la formule du volume de la question 3. a.,

$$V = 0,36\pi \left(10 \left(\frac{20}{3} \right)^2 - \left(\frac{20}{3} \right)^3 \right) = 0,36\pi \left(\frac{4\,000}{9} - \frac{8\,000}{27} \right) = \frac{160}{3}\pi.$$

Le volume du cône est $\frac{\pi \times 6^2 \times 10}{3} = 120\pi$. Le rapport des volumes est égal à

$$\frac{\frac{160}{3}\pi}{120\pi} = \frac{4}{9}, \text{ soit un pourcentage d'occupation d'environ } 44\%.$$


 La recherche du maximum est ici abordée à l'aide d'un tableur car l'étude théorique ne peut être envisagée qu'à partir de la classe de Première.

Le résultat final signifie que le pourcentage d'occupation maximal par un cylindre est de 44 % environ. Ce résultat se généralise à n'importe quelles valeurs de h et R , et pas seulement pour le cas particulier étudié dans la question 3.

23 LONGUEUR D'UN PARALLÈLE

1. Un méridien est un demi-cercle de rayon 6 400 km.

De plus, $\pi \times 6\,400 \approx 20\,100$. **La longueur d'un méridien est environ 20 100 km.**

 Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$. Le demi-périmètre est πr .

2. a. La mesure de cet angle est 42° . Il s'agit de la latitude.

b. (OI) et (HR) étant parallèles, on a $\widehat{ORH} = 42^\circ$.

Dans le triangle OHR, rectangle en H :

$$\cos(42^\circ) = \frac{HR}{OR}, \text{ d'où } HR = 6\,400 \times \cos(42^\circ) \approx 4\,756,13.$$

c. HR est le rayon du $42^{\text{ème}}$ parallèle, son périmètre est : $2 \times \pi \times HR \approx 29\,900$.

La longueur du $42^{\text{ème}}$ parallèle est environ 29 900 km.

 $\widehat{IO\hat{R}}$ et \widehat{ORH} sont des angles alternes-internes et ont donc la même mesure.

24 QCM**1. Réponse a.**

$$AB^2 = (-8 - (-12))^2 + (20 - (-8))^2 = (4)^2 + (28)^2 = 800.$$

De même, on trouve $AC^2 = 800$ et $BC^2 = 1\,152$.

On a donc $AB = AC$, le triangle est isocèle en A mais pas équilatéral.

De plus, comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, le triangle n'est pas rectangle.

2. Réponse c.

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-8 + 16}{2} = 4 \text{ et } \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{20 + (-4)}{2} = 8.$$

3. Réponse d.

Le triangle est isocèle en A, donc la hauteur issue de A est aussi la médiane (AZ).

L'aire de ABC est $\frac{AZ \times BC}{2}$.

$$BC = \sqrt{(16 - (-8))^2 + (-4 - 20)^2} = \sqrt{(24)^2 + (-24)^2} = \sqrt{1152} = 24\sqrt{2}.$$

$$AZ = \sqrt{(4 - (-12))^2 + (-8 - 8)^2} = \sqrt{(16)^2 + (-16)^2} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}.$$

$$\frac{AZ \times BC}{2} = \frac{16\sqrt{2} \times 24\sqrt{2}}{2} = 384.$$

4. Réponse b.


$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6}.$$

La réponse attendue s'exprime en mm, et 1 mL = 1 000 mm³.

$$\text{Ainsi, } 20 \times \frac{\pi D^3}{6} = 1\,000$$

$$\text{ce qui s'écrit } D^3 = \frac{300}{\pi} \approx 95,5.$$

La seule réponse qui convienne est 4,6 mm ($4,6^3 \approx 97$).

 À partir de $D^3 = \frac{300}{\pi}$, on peut continuer par $D = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}$.

Ce nombre est la racine cubique de $\frac{300}{\pi}$.

La calculatrice donne environ 4,6.

5. Réponse d.

$$0,8^2 + 0,6^2 = 0,64 + 0,36 = 1.$$

25 UN CUBE CARRÉ

Comme E est le symétrique de U par rapport à A, le point A est le milieu de [UE].

Les diagonales [CB] et [UE] se coupent en leur milieu A, donc le quadrilatère CUBE est un parallélogramme.

Les coordonnées de A sont $\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$$CA^2 = \left(\frac{11}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - (-2)\right)^2 = 22,5 \text{ et } UA^2 = \left(\frac{11}{2} - 7\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - (-5)\right)^2 = 22,5.$$

On constate que $CA^2 = UA^2$ d'où $CA = UA$. Les diagonales sont donc de même longueur, ce qui permet de savoir que **CUBE est un rectangle**.

$$CU^2 = (7 - 1)^2 + (-5 - (-2))^2 = 45$$

Cette fois, on constate que $CU^2 = CA^2 + UA^2$, ce qui permet de conclure que le triangle **CAU est rectangle en A**.

En d'autres termes, les diagonales se coupent selon un angle droit.

Ainsi, **CUBE est un carré**.



- Une autre méthode consiste à calculer les coordonnées de E, puis les longueurs CB et UE, avant de finir par prouver que les diagonales sont perpendiculaires.
- On peut aussi montrer l'égalité des longueurs des quatre côtés, ce qui prouve que l'on a affaire à un losange. La mise en évidence d'un angle droit à l'aide du théorème de Pythagore permet de conclure.

26 LE RAYON SECRET

Soit X le centre du cercle. Les coordonnées de X, milieu de [YZ] sont (1,75 ; 1).

Le rayon est égal à la distance XY.

$$XY^2 = (1,75 - (-1,5))^2 + (1 - 2)^2 = 11,5625$$

$$XY = \sqrt{11,5625} \approx 3,4.$$

Le rayon du cercle est environ 3,4.



Un calcul avec des fractions s'écrit :

$$XY^2 = \left(\frac{7}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (1-2)^2 = \frac{185}{16} \text{ d'où } XY = \sqrt{\frac{185}{16}} = \frac{\sqrt{185}}{4} \approx 3,4.$$

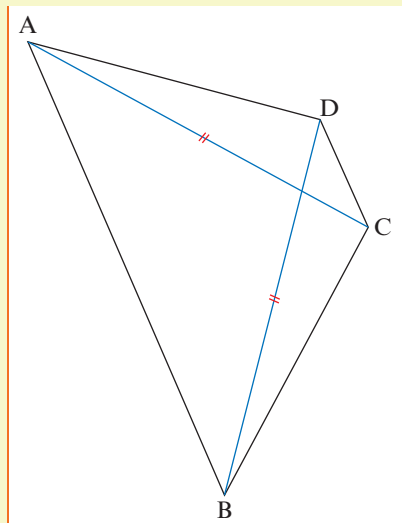
27 UN PEU DE LOGIQUE

a. Non, car dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur.

b. Non, ce quadrilatère pourrait ne pas être un parallélogramme.

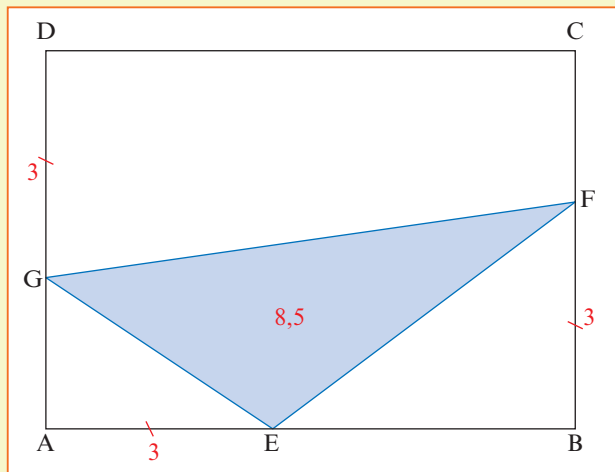
Ci-contre, ABCD a des diagonales de même longueur, mais ABCD n'est pas un rectangle.

c. Oui, si un quadrilatère a trois angles droits, le quatrième angle est nécessairement droit. Ainsi, c'est un rectangle et ses diagonales ont la même longueur.



28 TRIANGLE INSCRIT D'AIRE MINIMALE

1. En faisant varier la quantité x à l'aide du curseur, il semble que le minimum soit atteint pour $x = 3$. L'aire minimale pour le triangle EFG est alors 8,5.



2. a. Le trapèze FCDG a des bases de longueurs x et $5 - x$.
F et G sont symétriques par rapport au centre du rectangle ABCD.
L'aire de ce trapèze est donc égale à la moitié de l'aire du rectangle, soit 17,5.
Ainsi, la somme des aires des triangles AEG, EFG et EBF est égale à 17,5.
Cela permet d'obtenir :

$$A(x) = 17,5 - \frac{x(5-x)}{2} - \frac{x(7-x)}{2}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{35 - 5x + x^2 - 7x + x^2}{2} \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 35}{2} \\ &= x^2 - 6x + \frac{35}{2} \end{aligned}$$

b. $(x-3)^2 + 8,5 = x^2 - 6x + 9 + 8,5 = x^2 - 6x + 17,5 = A(x)$

c. $A(3) = 8,5$ et pour tout $x \in]0; 5[$, $A(x) \geq 8,5$.

La fonction A est donc minimale pour $x = 3$, l'aire minimale étant égale à 8,5.

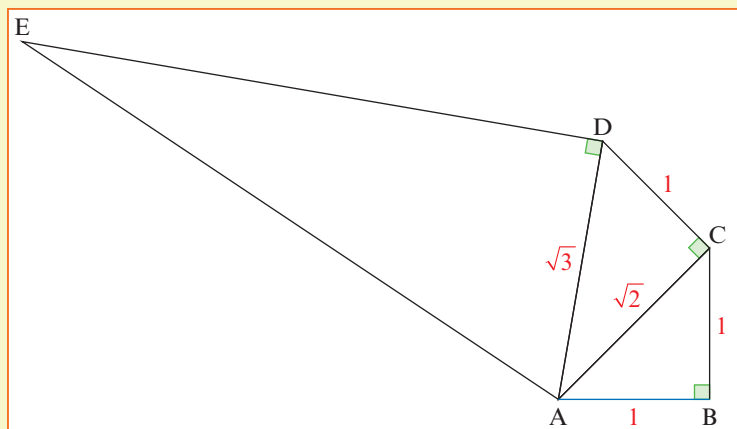
👍 $(x-3)^2$ est un carré, il est toujours positif et s'annule pour $x = 3$.

29 CONSTRUCTION D'UN IRRATIONNEL

Le théorème de Pythagore permet d'obtenir $\sqrt{39}$ si l'on peut écrire 39 comme une somme de deux carrés. Avec des constructions successives, il suffit même de trouver une somme de carrés qui donne 39.

Une solution est : $39 = 36 + 1 + 1 + 1$.

D'où la construction :



Construction

On part de $AB = 1$, on construit C avec un angle droit et $BC = 1$.

D'où $AC = \sqrt{2}$.

Puis on construit D avec un angle droit et $CD = 1$.

D'où $AD = \sqrt{3}$.

Enfin, on construit E avec un angle droit et $DE = 6$ (sans mesurer, en reportant au compas six fois la longueur du segment [AB]).

On obtient $AE = \sqrt{39}$.

8 Équations de droites

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I ÉQUATIONS DE DROITES

1. Vecteur directeur d'une droite

Soit \mathcal{D} une droite du plan. Si A et B sont deux points distincts de cette droite, on dit que \overline{AB} est un **vecteur directeur** de \mathcal{D} .

Tout vecteur colinéaire à \overline{AB} est aussi un vecteur directeur de \mathcal{D} .

2. Équations cartésiennes

Soit \mathcal{D} une droite du plan. Une équation de cette droite est une égalité vérifiée par les coordonnées $(x; y)$ des points de \mathcal{D} .

PROPRIÉTÉ :

- Toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas tous les deux nuls. Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées $(-b; a)$.
- Réciproquement, l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$ (où a et b ne sont pas tous les deux nuls) est une droite de vecteur directeur $(-b; a)$.



La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Réciproquement, une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation d'une fonction affine.

3. Équation réduite

Soit \mathcal{D} une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

► Une équation cartésienne de \mathcal{D} peut s'écrire sous la forme réduite $y = mx + p$, où m et p sont deux réels :

m est le coefficient directeur ou pente, p est l'ordonnée à l'origine.

► Si A et B sont deux points de cette droite de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors la **pente** m de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- ▶ L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point de \mathcal{D} d'abscisse 0.
- ▶ Un vecteur directeur d'une telle droite a pour coordonnées $(1; m)$.



Si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est de la forme $x = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur d'une telle droite est le vecteur \vec{j} de coordonnées $(0; 1)$.

II DROITES PARALLÈLES, DROITES SECANTS

1. Droites parallèles

PROPRIÉTÉ :

Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' , non parallèles à l'axe des ordonnées, sont **parallèles** si, et seulement si elles ont le **même coefficient directeur**.

EXEMPLE :

Les droites d'équations $y = -2x - 5$ et $y = -2x + 7$ sont parallèles.



Trois points A, B et C, d'abscisses différentes, sont alignés si, et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

2. Droites sécantes

On considère deux droites, non parallèles à l'axe des ordonnées, d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, avec $m \neq m'$.

Ces droites sont sécantes et le couple de coordonnées de leur point d'intersection est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

3. Système linéaire de deux équations à deux inconnues

On considère le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, a', b', c, c' sont des réels donnés et $(x; y)$ le couple d'inconnues.

Ce type de système a 0, 1 ou une infinité de solutions.

MÉTHODE 1**Tracer une droite d'équation $y = mx + p$**

→ Voir les exos 2, 14 et 19.

Étape 1. Choisir deux abscisses x_1 et x_2 .**Étape 2.** Calculer les ordonnées correspondantes y_1 et y_2 .**Étape 3.** Placer les points M_1 et M_2 de coordonnées $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, puis tracer la droite (M_1M_2) .**Exo résolu**Tracer la droite d'équation $y = -2x + 3$.**CORRIGÉ****Étape 1.** Choix de deux abscisses $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.**Étape 2.** Calculs des ordonnées :

$$y_1 = -2 \times 0 + 3 = 3 \text{ et } y_2 = -2 \times 2 + 3 = -1.$$

Étape 3. On place les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(2; -1)$ et on trace la droite.**MÉTHODE 2****Déterminer l'équation réduite d'une droite**

→ Voir les exos 5, 11, 12, 13, 22 et 24.

On donne deux points A et B d'abscisses différentes et on cherche une équation de la droite (AB).

Étape 1. Calculer le coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Étape 2. Calculer l'ordonnée à l'origine p , en utilisant les coordonnées du point A :

$$p = y_A - mx_A.$$

Étape 3. Écrire l'équation réduite $y = mx + p$.**Exo résolu**

Déterminer une équation de la droite (AB), sachant que A(-8;18) et B(4;-12).

CORRIGÉ

Étape 1. Calcul du coefficient directeur :

$$m = \frac{-12 - 18}{4 - (-8)} = \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}.$$

Étape 2. Calcul de l'ordonnée à l'origine :

$$p = 18 - \left(-\frac{5}{2}\right) \times (-8) = -2.$$

Étape 3. Une équation de la droite (AB) est $y = -\frac{5}{2}x - 2$.



Si les points A et B ont la même abscisse a , alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et une équation de cette droite est $x = a$.

MÉTHODE 3

Caractériser l'alignement de trois points à l'aide des coefficients directeurs

→ Voir les exos 7 et 25.

On se demande si trois points A, B et C sont alignés.

Étape 1. Calculer les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC).

Étape 2. Si les coefficients directeurs sont les mêmes, les points sont alignés. S'ils sont différents, ils ne sont pas alignés.

Exo résolu

Les points A(-2 ; 4), B(1 ; 13) et C(7 ; 29) sont-ils alignés ?

CORRIGÉ

Étape 1. Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{13 - 4}{1 - (-2)} = 3$.

Le coefficient directeur de (AC) est $\frac{29 - 4}{7 - (-2)} = \frac{25}{9}$.

Étape 2. Les coefficients directeurs sont différents, donc les points ne sont pas alignés.



Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité des vecteurs. Voir la méthode 4 du chapitre 6.

MÉTHODE 4

Trouver le point d'intersection de deux droites sécantes

→ Voir les exos 8, 12, 13 et 26.

Étape 1. Si besoin, écrire l'équation réduite des droites.

Étape 2. Résoudre le système avec les deux équations de droite.

Étape 3. L'unique solution du système est le couple de coordonnées du point d'intersection.

Exo résolu

Trouver les coordonnées du point d'intersection des deux droites d'équations $2x + y - 9 = 0$ et $y = 3x + 5$.

CORRIGÉ

Étape 1. La première équation n'est pas sous forme réduite :


$$2x + y - 9 = 0 \text{ équivaut à } y = -2x + 9.$$

$$\text{Étape 2. } \begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 9 = 3x + 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x = -4 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{37}{5} \end{cases}$$

 Sur la deuxième ligne, on laisse l'une des équations qui permettra de calculer y à la fin.

Le symbole d'équivalence est à utiliser entre chaque système.

Étape 3. Les coordonnées du point d'intersection sont $\left(\frac{4}{5}; \frac{37}{5}\right)$.

TESTER SES CONNAISSANCES

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé du plan.

1 DROITE OU PAS ?

★ 5 min ▶ P. 220

Les équations suivantes sont-elles des équations de droites ?

- a. $-2x - 5y = -2$
- b. $x^2 = 2x + 4$
- c. $x = 3y - 1$
- d. $2x = \sqrt{2}y$
- e. $5y = 4 - x$
- f. $x = y$
- g. $4xy = 1$
- h. $y = -0,01$
- i. $x = \pi$
- j. $xy = 0$

👍 Ce sont des équations de droites si les équations peuvent être écrites sous la forme $ax + by + c = 0$.

2 TRACÉ DE DROITES

★ 5 min ▶ P. 220

Tracer les droites suivantes :

\mathcal{D}_1 d'équation $y = 4x - 7$

\mathcal{D}_2 d'équation $2x + 3y - 6 = 0$

\mathcal{D}_3 d'équation $y = -4$

\mathcal{D}_4 d'équation $x = 5$

👍 Voir la méthode 1.

3 LECTURE GRAPHIQUE

★ 5 min ▶ P. 220

- a. Donner un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 .
En déduire une équation cartésienne de \mathcal{D}_1 .

👍 La pente de \mathcal{D}_1 est positive.

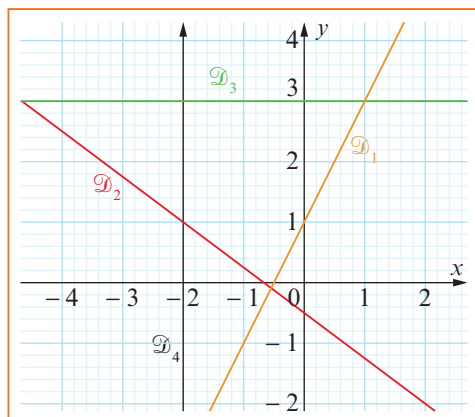
- b. Donner la pente de \mathcal{D}_2 . En déduire l'équation réduite de \mathcal{D}_2 .

👍 La pente de \mathcal{D}_2 est négative.

- c. Donner une équation de \mathcal{D}_3 et de \mathcal{D}_4 .

La pente de \mathcal{D}_3 est nulle.

La droite \mathcal{D}_4 est parallèle à l'axe des ordonnées, elle n'a pas de pente.



4 CALCULS DIVERS

★ 10 min | P. 221

1. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = -3x + 12$.
- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de \mathcal{D} .
 - Quelle est la pente de \mathcal{D} ?
 - Trouver les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D} avec l'axe des ordonnées.
 - Trouver les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D} avec l'axe des abscisses.

👍 Résoudre l'équation $-3x + 12 = 0$.

- Trouver l'ordonnée du point de \mathcal{D} d'abscisse -4 .
- Trouver l'abscisse du point de \mathcal{D} d'ordonnée -6 .

👍 Résoudre l'équation $-3x + 12 = -6$.

- Les points $A(-1; 4)$ et $B(-10; 42)$ sont-ils sur la droite \mathcal{D} ?
2. Répondre aux questions **a.**, **b.**, **c.** et **d.** avec la droite \mathcal{D}' , d'équation $4x - 5y = 6$.

5 ÉQUATIONS DE DROITES

★ 10 min | P. 221

On donne les points $R(-3; 1)$, $S(-1; 3)$ et $T(-1; 8)$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (RS) .
- Déterminer une équation de la droite (ST) .
- Déterminer l'équation réduite de la droite passant par R et de pente -2 .
- Déterminer l'équation réduite de la droite passant par S et de vecteur directeur \overrightarrow{RT} .

👍 Voir la méthode 2.

6 PARALLÈLES OU PAS ?

★ ⌚ 5 min ▶ P. 222

Parmi les droites ci-dessous dont on donne une équation, lesquelles sont parallèles ?

$\mathcal{D}_1 : y = 0,5x - 2$

$\mathcal{D}_2 : -x + y = 1$

$\mathcal{D}_3 : y = 5$

$\mathcal{D}_4 : y = -x + 4$

$\mathcal{D}_5 : x + y + 5 = 0$

$\mathcal{D}_6 : -x + 2y - 1 = 0$

$\mathcal{D}_7 : x = -4$

$\mathcal{D}_8 : y = x$

$\mathcal{D}_9 : x = 7$

$\mathcal{D}_{10} : y = 0$



Voir le paragraphe II.1. du cours.

7 ALIGNÉS OU PAS ?

★ ⌚ 5 min ▶ P. 222

Les points R(-25 ; 10), S(0 ; 30) et T(75 ; 90) sont-ils alignés ?



Voir la méthode 3.

8 POINT D'INTERSECTION

★ ⌚ 10 min ▶ P. 222

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' dans les cas suivants :

a. \mathcal{D} d'équation $y = -x + 3$

\mathcal{D}' d'équation $y = -4x + 9$

b. \mathcal{D} d'équation $-6x + 3y = 1$

\mathcal{D}' d'équation $-4x + 9y = 7$

c. \mathcal{D} d'équation $y = -2$

\mathcal{D}' d'équation $y = 4x + 10$

d. \mathcal{D} d'équation $x = -4$

\mathcal{D}' d'équation $y = -x + 1$



Voir la méthode 4.

9 SOLUTION D'UN SYSTÈME

★ ⌚ 10 min ▶ P. 223

On considère le système suivant d'inconnues $(x ; y)$:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

a. Vérifier que le couple (3 ; 1) est une solution du système.

b. Le système suivant est-il équivalent au premier ?

$$\begin{cases} 6x = 22 - 4y \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

S'ENTRAÎNER

10 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 223

Soit \mathcal{D} une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$, passant par un point A $(x_A; y_A)$.

a. Soit M $(x; y)$ un point de \mathcal{D} . Justifier que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$.

👍 Aucun calcul n'est attendu.

b. Calculer $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ en fonction des coordonnées de \vec{u} et de A.

c. Montrer qu'une équation de la droite (AB) s'écrit $ax + by + c = 0$.

Donner les coefficients a , b et c en fonction des coordonnées de \vec{u} et de A.

👍 Développer l'expression obtenue à la question précédente.

11 AUTOUR DU PARALLÉLISME | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 223

Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites d'équations respectives :

$$y = 0,125x + 0,75 \text{ et } x - 8y - 8 = 0.$$

a. Ces deux droites sont-elles parallèles ?

👍 Commencer par écrire la deuxième équation sous forme réduite.

b. Donner l'équation réduite de la droite parallèle à \mathcal{D} , passant par B $(-4; 1)$.

👍 Commencer par trouver la pente de \mathcal{D} .

12 UN PEU DE TOUT... | ★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 224

On donne, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points A $(2; 0)$, B $(0; 5)$, C $(5; 0)$ et D $(0; 2)$.

a. Déterminer les coordonnées du point T, milieu du segment [AB].

b. Déterminer une équation de la droite (OT).

c. Déterminer une équation de la droite (CD).

👍 Voir la méthode 2.

d. Calculer les coordonnées du point d'intersection K de (OT) et (CD).

👍 Voir la méthode 4.

e. Montrer que OKD est un triangle rectangle en K.

👍 Pensez à utiliser le théorème de Pythagore.

f. Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OAB est la hauteur issue de O dans le triangle OCD.

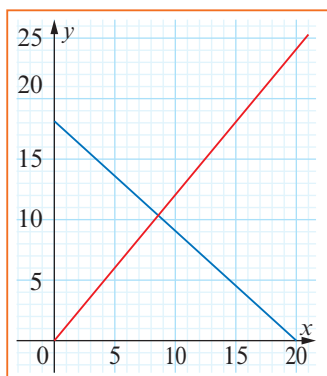
13 L'OFFRE ET LA DEMANDE

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 225

L'offre est la quantité de biens qu'une entreprise est prête à vendre à un prix donné.

La demande est la quantité de biens que les consommateurs sont prêts à acheter pour un prix donné.

Lors du lancement d'un article sur le marché, une étude a permis d'obtenir les courbes d'offre et demande, représentées ci-dessous. En abscisse, les quantités s'expriment en millier d'objets. En ordonnée, les prix sont en euros.



1. a. Déterminer les équations réduites de chaque droite, en précisant celle qui représente l'offre et celle qui représente la demande.

👍 Voir la méthode 2.

b. On suppose que le prix est de 6 €.

Déterminer graphiquement la quantité approximative d'articles que l'entreprise peut proposer sur le marché et la quantité approximative d'articles que les consommateurs sont prêts à acheter.

2. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte par les producteurs est égale à la quantité demandée par les consommateurs.

Déterminer ce prix d'équilibre et la quantité correspondante :

a. graphiquement,

b. par le calcul.

👍 Lire les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
Voir la méthode 4.

14 TRAFIC

★★★ | ⌚ 50 min | ▶ P. 226

Deux villes A et B sont distantes de 500 km, reliées par une autoroute. On considère que les trajets se font à **vitesse constante**.

👍 Dans tout le problème, les trajets s'effectuent à **vitesse constante**. Cela signifie que les distances parcourues sont proportionnelles aux temps de trajet. En d'autres termes, les fonctions sont affines et les courbes à tracer sont des droites.

1. Un camion part de A vers B à midi et roule à une vitesse moyenne de $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On note $d_C(t)$ la distance entre le camion et la ville A, en km, en fonction du temps écoulé depuis son départ, en heure.

a. Donner l'expression de $d_C(t)$.

b. Tracer la représentation graphique de cette fonction. Les unités graphiques sont : 2 cm pour 1 h en abscisse et 2 cm pour 100 km en ordonnée.

c. Lire graphiquement la durée du trajet.

Retrouver le résultat par le calcul.

2. À midi, une voiture part de B et roule en direction de A à la vitesse moyenne de $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On note $d_V(t)$ la distance entre la voiture et la ville A, en km, en fonction du temps écoulé depuis midi, en heure.

a. Donner l'expression de $d_V(t)$.

b. Tracer la représentation graphique de cette fonction (sur le graphique précédent).

c. Lire graphiquement la durée du trajet.

Retrouver le résultat par le calcul.

d. Lire graphiquement l'heure à laquelle la voiture et le camion se croisent, et à quelle distance de A s'effectue ce croisement.

👍 Lire les coordonnées d'un point d'intersection de deux droites.

Retrouver ces résultats par le calcul.

3. À 13h, une moto part de A en direction de B à la vitesse de $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

On note $d_M(t)$ la distance entre la moto et la ville A en km, en fonction du temps écoulé depuis midi, en h. Cette fonction est définie à partir de $t = 1$ puisque le départ de la moto a lieu à 13h.

a. Donner l'expression de $d_M(t)$.


👍 Les deux premières courbes passent par l'origine car la voiture et le camion partent à midi ($t = 0$). Comme la moto part à 13h, la droite correspondante ne passe pas par l'origine.

b. Tracer la représentation graphique de cette fonction sur le graphique précédent.

c. Lire graphiquement la durée du trajet.


Retrouver le résultat par le calcul.

d. Lire graphiquement l'heure à laquelle la moto et la voiture se croisent, et à quelle distance de A s'effectue ce croisement.

 Lire les coordonnées d'un point d'intersection de deux droites.

Retrouver ces résultats par le calcul.

e. Lire graphiquement l'heure à laquelle la moto dépasse le camion, et à quelle distance de A s'effectue ce dépassement.

 Lire les coordonnées d'un point d'intersection de deux droites.

Retrouver ces résultats par le calcul.

15 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 228


Résoudre les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 24x + 6y = 23 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 7x - 4y = -13 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ -5x + 7,5y = 5 \end{cases}$$


-  a. Multiplier les membres de la première équation par 2 puis isoler $6y$.
 b. Isoler y dans la deuxième équation, puis reporter l'expression trouvée dans la première.
 c. Multiplier les membres de la première équation par -2 puis observer une impossibilité.
 d. Multiplier les membres la première équation par $2,5$ puis conclure.

16 PROGRAMMATION PYTHON

★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 229

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$.

1. a. Rappeler les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

 \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB).

b. On note $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (AB).

Préciser les valeurs de a et b en fonction des coordonnées de A et B.

c. En utilisant les coordonnées de A, calculer la valeur de c en fonction des coordonnées de A et B.

2. Écrire un programme en langage Python qui demande les coordonnées de deux points A et B, et qui affiche une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ de la droite (AB).

 Pour les coordonnées des deux points A et B, utiliser les variables X1,X2,Y1,Y2.

17 POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES ★★ ⌚ 20 min ▶ P. 229

On considère deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées, définies par leurs équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

Écrire un algorithme qui étudie l'intersection de ces deux droites.



Envisager trois cas : droites confondues, droites strictement parallèles et droites sécantes. Dans ce dernier cas, donner les coordonnées du point d'intersection.

PRÉPARER UN CONTRÔLE**18 QCM** ★ ⌚ 5 min ▶ P. 230

Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

1. L'équation réduite de \mathcal{D}_1 est :

a. $y = -\frac{4}{3}x - 2$

b. $y = \frac{3}{4}x - 2$

c. $y = -\frac{4}{3}x + 2$

d. $y = \frac{4}{3}x - 2$

2. Une équation de \mathcal{D}_2 est :

a. $y = -2$ b. $x = -2$

c. $x = 2$ d. $y = x - 2$

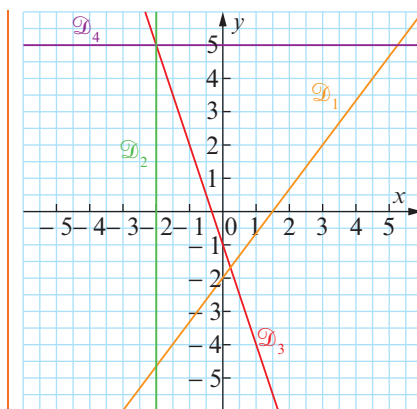
3. Une équation de la droite parallèle à \mathcal{D}_3 , passant par le point de coordonnées $(1 ; 5)$ est :

a. $y = -3x + 8$ b. $y = 5$

c. $y = 3x + 2$ d. $y = -3x + 5$

4. La pente de \mathcal{D}_4 est :

a. infinie b. 5 c. 0 d. $\frac{1}{5}$

**19 TRIO D'ÉQUATIONS** ★ ⌚ 10 min ▶ P. 230

On donne les points $W(-5 ; 2)$, $H(0 ; -7)$ et $K(10 ; -7)$.

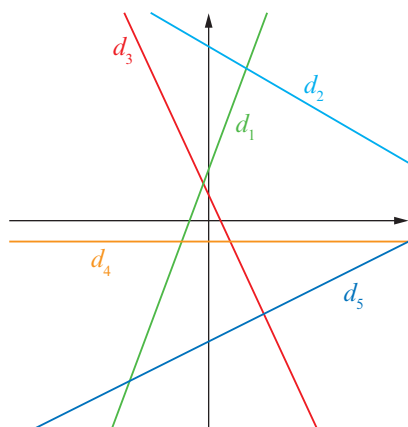
a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (WH).

b. Déterminer une équation de la droite (HK).

c. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par H et de vecteur directeur \overrightarrow{WK} .

20 LE BON ORDRE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 230



a. Ranger par ordre croissant les pentes des cinq droites (notées m_1, m_2, m_3, m_4, m_5).

b. Ranger par ordre croissant les ordonnées à l'origine des cinq droites (notées p_1, p_2, p_3, p_4, p_5).

21 MÉDIANE

★ ⌚ 10 min ▶ P. 230

Dans un repère d'origine O, on donne les points A(10 ; 0) et B(0 ; 4). Déterminer une équation de la médiane issue de O dans le triangle OAB.

22 ALIGNÉS OU PAS ?

★ ⌚ 10 min ▶ P. 231

Les points A(100 ; 52), B(-200 ; -173) et C(40 ; 7) sont-ils alignés ?

23 CERCLE CIRCONSCRIT

★★ ⌚ 15 min ▶ P. 231

On donne les points M(-4 ; 1), N(0 ; 5), P(1 ; -1) et A(0 ; 1).

1. a. Calculer les coordonnées du point Z, milieu du segment [MN].

b. Montrer que $AM = AN$.

c. En déduire que l'équation réduite de la médiatrice du segment [MN] est :

$$y = -x + 1.$$

2. On admet que l'équation réduite de la médiatrice du segment [NP] est :

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{23}{12}.$$

Déterminer les coordonnées du point K, centre du cercle circonscrit au triangle MNP.



K est le point de concours des médiatrices du triangle MNP.

ALLER PLUS LOIN

24 VOYAGE EN TRAIN

★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 232

Un train parcourt un trajet de longueur D (en km) en un certain temps T (en h), à une vitesse V (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).


Si la vitesse de ce train est augmentée de $30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, la durée du trajet est réduite de 1 heure.

Si la vitesse est diminuée de $30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, la durée du trajet est augmentée de 2 heures.

a. Montrer que :

$$\begin{cases} 30T - V - 30 = 0 \\ -30T + 2V - 60 = 0 \end{cases}$$

b. Résoudre ce système et conclure en donnant V , D et T .

 Utiliser la formule $D = VT$ où D est la distance parcourue, en km, T le temps de parcours, en heures, et V la vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

CORRIGÉS

1 DROITE OU PAS ?

- a. $-2x - 5y = -2$ équivaut à $-2x - 5y + 2 = 0$: c'est une droite.
 b. Non, il y a le terme x^2 .
 c. $x = 3y - 1$ équivaut à $x - 3y + 1 = 0$: c'est une droite.
 d. $2x = \sqrt{2}y$ équivaut à $2x - \sqrt{2}y = 0$: c'est une droite.
 e. $5y = 4 - x$ équivaut à $x + 5y - 4 = 0$: c'est une droite.
 f. $x = y$ équivaut à $x - y = 0$: c'est une droite.
 g. Non, on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une équation de droite.
 h. Oui, c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
 i. Oui, c'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
 j. $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $y = 0$: il s'agit de la réunion de deux droites.

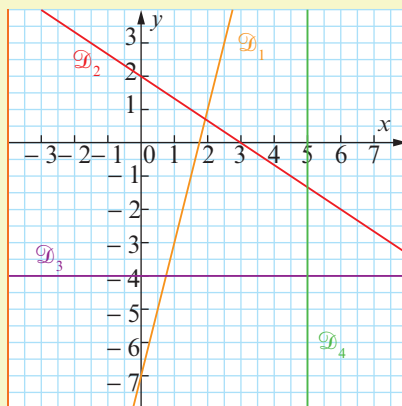
2 TRACÉ DE DROITES

La droite \mathcal{D}_1 passe par les points de coordonnées $(0 ; -7)$ et $(2 ; 1)$.

La droite \mathcal{D}_2 passe par les points de coordonnées $(0 ; 2)$ et $(3 ; 0)$.



La méthode 2 est à utiliser pour les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 seulement. Les deux autres se tracent immédiatement car elles sont parallèles aux axes du repère.



3 LECTURE GRAPHIQUE

a. Un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 a pour coordonnées $(1 ; 2)$. Une équation cartésienne de \mathcal{D}_1 s'écrit $-2x + y + c = 0$. La droite passe par le point $(0 ; 1)$, donc $c = -1$.

Une équation cartésienne de \mathcal{D}_1 est : $-2x + y - 1 = 0$.

b. La droite \mathcal{D}_2 passe par les points de coordonnées $(-2 ; 1)$ et $(2 ; -2)$. La pente est égale à $\frac{-2 - 1}{2 - (-2)} = -\frac{3}{4}$. L'équation réduite de (d_2) s'écrit $y = -\frac{3}{4}x + p$.

En utilisant le point de coordonnées $(2 ; -2)$, on trouve $p = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de \mathcal{D}_2 est : $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

c. La droite \mathcal{D}_3 est parallèle à l'axe des abscisses, sa pente est nulle, une équation de \mathcal{D}_3 est : $y = 3$.

La droite \mathcal{D}_4 est parallèle à l'axe des ordonnées, une équation de \mathcal{D}_4 est : $x = -2$.


4 CALCULS DIVERS

1. a. Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $(1; -3)$.
 b. La pente est -3 .
 c. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont $(0; 12)$.
 d. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(4; 0)$.
 e. L'ordonnée du point d'abscisse -4 est 24 .
 f. L'abscisse du point d'ordonnée -6 est 6 .
 g. **A n'appartient pas à \mathcal{D}** car $y_A \neq -3x_A + 12$.
B appartient à \mathcal{D} car $y_B = -3x_B + 12$.
 2. a. Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $(5; 4)$.
 b. La pente est $\frac{4}{5}$.
 c. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont $(0; -\frac{6}{5})$.
 d. Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(\frac{3}{2}; 0)$.

5 ÉQUATIONS DE DROITES

- a. Comme $\overline{RS}(2; 2)$, un vecteur directeur de cette droite est $(1; 1)$.
 Une équation de (RS) s'écrit $-x + y + c = 0$.
 En utilisant les coordonnées de R : $3 + 1 + c = 0$ d'où $c = -4$.
Une équation de la droite (RS) est : $-x + y - 4 = 0$.
 b. Les points S et T ayant la même abscisse, la droite (ST) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = -1$.
 c. L'équation réduite est : $y = -2x + p$.
 Le calcul de p se fait en utilisant les coordonnées de R :

$$1 = -2 \times (-3) + p, \text{ d'où } p = -5.$$
L'équation réduite est : $y = -2x - 5$.
 d. Comme $\overline{RT}(2; 7)$, la pente de cette droite est $\frac{7}{2}$.

 Si un vecteur directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(a; b)$, la pente est $\frac{b}{a}$.

- L'équation réduite est : $y = \frac{7}{2}x + p$. En utilisant les coordonnées de S :

$$3 = -\frac{7}{2} + p \text{ d'où } p = \frac{13}{2}.$$
L'équation réduite est : $y = \frac{7}{2}x + \frac{13}{2}$.

6 PARALLÈLES OU PAS ?

Les droites \mathcal{D}_7 et \mathcal{D}_9 sont **parallèles** car toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées. Les droites \mathcal{D}_3 et \mathcal{D}_{10} sont **parallèles** car toutes deux parallèles à l'axe des abscisses. Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_6 sont **parallèles** car toutes deux ont un coefficient directeur de 0,5. Les droites \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_8 sont **parallèles** car toutes deux ont un coefficient directeur de 1. Les droites \mathcal{D}_4 et \mathcal{D}_5 sont **parallèles** car toutes deux ont un coefficient directeur de -1 .



Si nécessaire, on écrit les équations cartésiennes sous forme réduite.

Par exemple, pour \mathcal{D}_5 : $x + y + 5 = 0$ équivaut à $y = -x - 5$.

7 ALIGNÉS OU PAS ?

Le coefficient directeur de (RS) est $\frac{30 - 10}{0 - (-25)} = \frac{4}{5}$.

Le coefficient directeur de (RT) est $\frac{90 - 10}{75 - (-25)} = \frac{4}{5}$.

Les coefficients directeurs sont identiques, donc les points R, S et T sont alignés.



Dans le chapitre sur les vecteurs (voir page XXX), une autre méthode est étudiée, elle consiste à montrer que les vecteurs \overrightarrow{RS} et \overrightarrow{RT} sont colinéaires.

8 POINT D'INTERSECTION

$$\text{a. } \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -4x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = -4x + 9 \\ y = -4x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ y = -4x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4x + 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(2 ; 1)$.

b. L'équation $-6x + 3y = 1$ équivaut à $y = 2x + \frac{1}{3}$.

L'équation $-4x + 9y = 7$ équivaut à $y = \frac{4}{9}x + \frac{7}{9}$.

$$\begin{cases} y = 2x + \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{9}x + \frac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}x + \frac{7}{9} \\ y = 2x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{4}{9}x = \frac{7}{9} - \frac{1}{3} \\ y = 2x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{9}x = \frac{4}{9} \\ y = 2x + \frac{1}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{19}{21} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $\left(\frac{2}{7}; \frac{19}{21}\right)$.

$$c. \begin{cases} y = 4x + 10 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 4x + 10 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(-3; -2)$.

$$d. \begin{cases} y = -x + 1 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -4 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(-4; 5)$.

9 SOLUTION D'UN SYSTÈME

a. En remplaçant x par 3 et y par 1, les deux égalités sont vérifiées. Le couple $(3; 1)$ est donc une solution de ce système.

b. La première équation $6x = 22 - 4y$ équivaut à $6x + 4y = 22$.

En divisant par 2, elle est équivalente à $3x + 2y = 11$.

La seconde équation $y = 2x - 5$ équivaut à $2x - y = 5$.

Ainsi, les deux systèmes sont équivalents.



Deux équations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

10 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

a. Pour tout point $M(x; y)$ appartenant à \mathcal{D} , les vecteurs \vec{u} et \overline{AM} sont colinéaires, ce qui signifie que leur déterminant est nul : $\det(\vec{u}, \overline{AM}) = 0$.

b. Les coordonnées de \overline{AM} sont $(x - x_A; y - y_A)$. On en déduit :

$$\det(\vec{u}, \overline{AM}) = \alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A).$$

c. $\det(\vec{u}, \overline{AM}) = 0$ s'écrit $\alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A) = 0$ ou encore après développement $-\beta x + \alpha y + (\beta x_A - \alpha y_A) = 0$.

En posant $a = -\beta$ et $b = \alpha$ et $c = \beta x_A - \alpha y_A$, on obtient la forme $ax + by + c = 0$.

11 AUTOUR DU PARALLÉLISME

a. La deuxième équation équivaut à $y = \frac{1}{8}x - 1$.

Les deux droites ont le même coefficient directeur, égal à $\frac{1}{8}$, donc elles sont parallèles.

b. Comme deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, l'équation réduite de \mathcal{D} est $y = \frac{1}{8}x + p$.

Comme \mathcal{D} passe par B, on a $1 = \frac{1}{8} \times (-4) + p$, ce qui donne $p = \frac{3}{2}$.

Par conséquent, l'équation est $y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$.

12 UN PEU DE TOUT

a. Les coordonnées de T sont $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

b. La droite (OT) passe par O, donc l'ordonnée à l'origine est 0. Les coordonnées de T indiquent que le coefficient directeur est $\frac{5}{2}$.

L'équation réduite de la droite (OT) est $y = \frac{5}{2}x$.

c. Le coefficient directeur de la droite (CD) est $\frac{2-0}{0-5} = -\frac{2}{5}$.

Les coordonnées de D indiquent que l'ordonnée à l'origine est 2.

L'équation réduite de la droite (CD) est $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

d. Les coordonnées $(x; y)$ de K vérifient le système
$$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ y = -\frac{2}{5}x + 2 \end{cases}$$

Il est équivalent à
$$\begin{cases} \frac{5}{2}x = -\frac{2}{5}x + 2 \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{29}{10}x = 2 \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{29} \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases}$$

Les coordonnées de K sont $\left(\frac{20}{29}; \frac{50}{29}\right)$.

e. Le calcul des distances OK, OD et DK donne :

$$OD = 2, \quad OK^2 = \frac{100}{29} \quad \text{et} \quad DK^2 = \frac{16}{29}.$$

$$\text{Ainsi, } OK^2 + DK^2 = \frac{100}{29} + \frac{16}{29} = \frac{116}{29} = 4 \quad \text{et} \quad OD^2 = 4.$$

D'après le théorème de Pythagore, le triangle OKD est rectangle en K.



Pour tester si un triangle est rectangle ou non, on calcule directement et séparément les carrés des longueurs des côtés.

f. La médiane issue de O dans le triangle OAB passe par O et par T, milieu de [AB], c'est donc la droite (OT).

La hauteur issue de O dans le triangle OCD passe par O et est perpendiculaire à (CD). Comme le triangle OKD est rectangle en K, les droites (OT) et (CD) sont perpendiculaires et la hauteur issue de O dans le triangle OCD est la droite (OT).

13 L'OFFRE ET LA DEMANDE

1. a. La première droite (en rouge) passe par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(20; 24)$. L'équation réduite de cette droite est $y = \frac{24}{20}x$, soit $y = 1,2x$.

La deuxième droite (en bleu) passe par les points de coordonnées $(0; 18)$ et $(20; 0)$.

L'équation réduite de cette droite est $y = \frac{0-18}{20-0}x + 18$, soit $y = -0,9x + 18$.

L'offre des producteurs est une fonction croissante du prix : plus le prix est élevé, plus les quantités offertes sont importantes.

La fonction d'offre est représentée par la droite rouge.

La demande des consommateurs est une fonction décroissante du prix : plus le prix est élevé, plus les quantités demandées sont faibles.

La fonction de demande est représentée par la droite bleue.

b. Si le prix est de 6 euros, l'entreprise peut proposer environ 5 000 articles sur le marché.

À ce prix, la demande des consommateurs est un peu supérieure à 13 000 articles.



L'abscisse du point de la droite rouge ayant pour ordonnée 6 est 5.

L'abscisse du point de la droite bleue ayant pour ordonnée 6 est un peu supérieure à 13.

2. a. Les coordonnées approximatives du point d'intersection des deux droites sont $(8,5; 10,5)$. Le prix d'équilibre est environ **10,5 euros**, la quantité d'équilibre est environ **8 500 articles**.

b. Par le calcul, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = -0,9x + 18 \\ y = 1,2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,2x = -0,9x + 18 \\ y = 1,2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,1x = 18 \\ y = 1,2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{2,1} = \frac{60}{7} \\ y = 1,2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{60}{7} \\ y = \frac{72}{7} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $\left(\frac{60}{7}; \frac{72}{7}\right)$. **Le prix d'équilibre est donc de 10,29 euros, la quantité d'équilibre est environ 8 571 articles.**

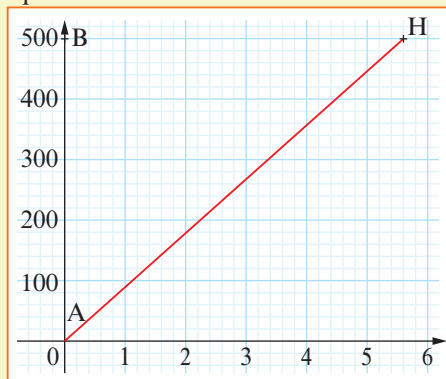


Avec ces exercices d'application à un domaine concret, il est recommandé de donner une solution mathématique (les coordonnées du point d'intersection avec des valeurs exactes fractionnaires) puis de donner une réponse concrète approximative avec les bonnes unités.

14 TRAFIC

1. a. La formule habituelle reliant vitesse V , distance D et temps T s'écrit $D = VT$. Avec les notations de cette question, on obtient $d_c(t) = 90t$.

b. Le tracé est fait jusqu'à l'ordonnée 500.



c. L'abscisse du point H est environ 5,6.

La durée du trajet du camion est environ 5 h 36 min. Pour retrouver ce résultat

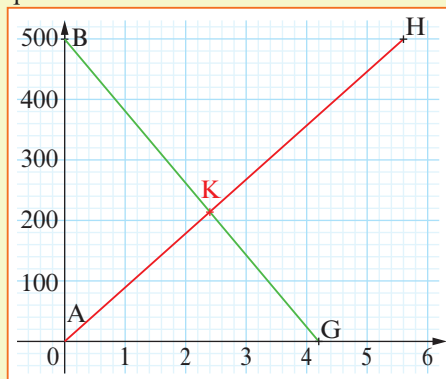
par le calcul : $t = \frac{500}{90} = \frac{50}{9}$.

Cela fait $\frac{50}{9} \times 60 = \frac{1000}{3} \approx 333,3$ min, **soit 5 h 33 min et 20 s exactement**.

2. a. Cette fois, la voiture part de B, à 500 km de A. L'ordonnée à l'origine est donc 500. Toutes les heures, la voiture se rapproche du point A de 120 km.

On en déduit que $d_v(t) = 500 - 120t$.

b. Le tracé se fait jusqu'à l'ordonnée 0.



c. L'abscisse du point G est environ 4,2. La durée du trajet de la voiture est environ 4 h 12 min. Pour retrouver ce résultat par le calcul : $t = \frac{500}{120} = \frac{25}{6}$.

Cela fait $\frac{25}{6} \times 60 = 250$ min, **soit 4 h 10 min exactement**.

d. L'abscisse du point K est environ 2,4. Son ordonnée est environ 220.

La voiture et le camion se croisent 2h 24 min environ après leur départ, à environ 220 km de la ville A.

Pour retrouver ce résultat par le calcul : on résout l'équation $90t = 500 - 120t$ qui

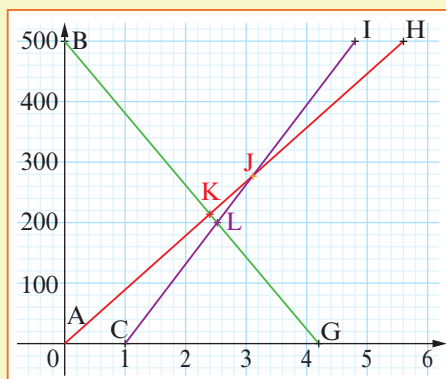
équivalent à $210t = 500$, soit $t = \frac{500}{210} = \frac{50}{21}$.

Cela fait $\frac{50}{21} \times 60 = \frac{1000}{7} \approx 142,86$ min, soit 2 h 22 min 51 s environ.

La distance se calcule ainsi : $90 \times \frac{50}{21} = \frac{1500}{7} \approx \mathbf{214,29}$ km.

3. a. Comme la moto parcourt 130 km en une heure, on peut imaginer qu'elle est à 130 km du point A à midi. Ainsi, l'ordonnée à l'origine est -130 . Toutes les heures, la moto s'éloigne du point A de 130 km. On a donc $d_M(t) = 130t - 130$.

b. C'est le segment [CI] qui représente cette troisième fonction.



c. L'abscisse du point I est environ 4,8. La durée du trajet de la moto est environ 3 h 48 min (la moto est partie 1h après).

Pour retrouver ce résultat par le calcul : $\frac{500}{130} = \frac{50}{13}$.

Cela fait $\frac{50}{13} \times 60 = \frac{3000}{13} \approx 230,77$ min, soit **3 h 50 min 46 s environ**.

d. L'abscisse du point L est environ 2,5. Son ordonnée est environ 200. La voiture et la moto se croisent 2 h 30 min environ après le départ de la voiture (ou 1 h 30 min après le départ de la moto), à environ 200 km de la ville A.

Pour retrouver ce résultat par le calcul : on résout l'équation $130t - 130 = 500 - 120t$ qui équivaut à $250t = 630$, soit $t = \frac{630}{250} = \frac{63}{25} = 2,52$.

Cela fait $2,52 \times 60 = 151,2$ min, soit 2h 31min 12s exactement.

La distance se calcule ainsi : $130 \times 2,52 - 130 = \mathbf{197,6}$ km.

e. L'abscisse du point J est environ 3,2. Son ordonnée est environ 290. La voiture et la moto se croisent 3 h 12 min environ après le départ du camion (ou 2h 12 min après le départ de la moto), à environ 290 km de la ville A.

Pour retrouver ce résultat par le calcul : on résout l'équation $130t - 130 = 90t$ qui équivaut à $40t = 130$ soit $t = \frac{130}{40} = \frac{13}{4} = 3,25$. Cela fait 3h 15min exactement.

La distance se calcule ainsi : $90 \times 3,25 = \mathbf{292,5}$ km.



Pour une conversion plus facile, la multiplication du nombre d'heures par 60 permet d'obtenir le nombre de minutes.

15 SYSTÈMES

a. Les termes $3y$ et $6y$ présents dans les deux équations conduisent à multiplier les membres de la première équation par 2. Ensuite, on exprime $6y$ de deux façons différentes, ce qui mène à une équation à une inconnue x .

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 24x + 6y = 23 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 2 \\ 24x + 6y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 4x + 2 \\ 6y = -24x + 23 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = -24x + 23 \\ 3y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x = 21 \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution est le couple $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

b. Cette fois, on isole y dans la deuxième équation, puis on le remplace dans la première par l'expression obtenue.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x - 4y = -13 \\ 2x + y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y = -13 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4(-2x + 3) = -13 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 12 = -13 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{15} \\ y = -2x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{15} \\ y = \frac{47}{15} \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution est le couple $\left(-\frac{1}{15}; \frac{47}{15}\right)$.

c. En multipliant par -2 les deux membres de la première équation :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -4 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$$

On constate que les deux équations sont incompatibles, donc **le système n'a pas de solution**.

d. En multipliant par 2,5 les deux membres de la première équation :

$$\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ -5x + 7,5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7,5y = 5 \\ -5x + 7,5y = 5 \end{cases}$$


On constate que les deux équations sont identiques, donc **le système a une infinité de solutions** : tous les couples $(x; y)$ tels que $-2x + 3y = 2$.



Les cas a. et b. conduisent à l'existence d'une unique solution. Les cas c. et d. sont similaires. Dans les deux cas, les membres de gauche des deux équations sont proportionnels. Tout dépend alors du membre de droite.

16 PYTHON

1. a. Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
 b. On cherche une équation cartésienne de (AB) de la forme $ax + by + c = 0$.
 On a : $a = y_B - y_A$ et $b = -(x_B - x_A) = x_A - x_B$.


 Le cours nous indique qu'à partir d'une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur a pour coordonnées $(-b ; a)$. Ici, on effectue le cheminement inverse : à partir d'un vecteur directeur, de coordonnées $(\alpha ; \beta)$, on écrit une équation cartésienne : $\beta x - \alpha y + c = 0$.

- c. Le coefficient c s'obtient avec les coordonnées de A :

$$ax_A + by_A + c = 0 \text{ d'où } c = -ax_A - by_A.$$

2. Programme en langage Python :

```
X1=float(input("abscisse de A"))
Y1=float(input("ordonnée de A"))
X2=float(input("abscisse de B"))
Y2=float(input("ordonnée de B"))
print("Coordonnées de A : (",X1," ; ",Y1,")")
print("Coordonnées de B : (",X2," ; ",Y2,")")
a=Y2-Y1
b=X1-X2
c=a*X1-b*Y1
print("Une équation cartésienne de la droite (AB) est :")
print(a,"X + ",b,"Y + ",c," = 0")
```

 À noter que l'équation obtenue n'est pas toujours simplifiée. Par exemple, avec A(1 ; 3) et B(4 ; 9), le programme donne l'équation $6x - 3y + 3 = 0$ qui est équivalente à $2x - y + 1 = 0$ (en divisant les coefficients par 3).

17 POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

Si les droites ont le même coefficient directeur, elles sont strictement parallèles ou confondues. Sinon, elles sont sécantes et l'abscisse de leur point d'intersection vérifie l'équation $ax + b = a'x + b'$. La résolution de cette équation se fait de la façon suivante :

$$ax + b = a'x + b' \Leftrightarrow (a - a')x = b' - b \Leftrightarrow x = \frac{b' - b}{a - a'}$$

Voici donc l'algorithme correspondant :

```
Si a = a' alors
  si b = b' alors
    afficher « droites confondues »
  sinon
    afficher « droites strictement parallèles »
sinon
  x ← (b' - b) / (a - a')
  y ← ax + b
  afficher « droites sécantes, coordonnées du point d'intersection : »
  afficher x et y
```

18 QCM

1. Réponse d. L'ordonnée à l'origine est -2 .

 On lit l'ordonnée du point d'intersection de \mathcal{D}_1 et de l'axe des ordonnées.

La droite \mathcal{D}_1 passe par le point $A(1,5 ; 0)$, donc $m = \frac{0 - (-2)}{1,5 - 0} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$.

2. Réponse b. \mathcal{D}_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, l'abscisse commune des tous ses points est -2 , donc une équation de \mathcal{D}_2 est $x = -2$.


 Une droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = c$

3. Réponse a.

La droite \mathcal{D}_3 passe par les points $A(-2 ; 5)$ et $B(1 ; -4)$. Son coefficient directeur est

$$m = \frac{-4 - 5}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Une droite parallèle à \mathcal{D}_3 a une équation de la forme $y = -3x + p$. Cette parallèle passe par le point de coordonnées $(1 ; 5)$, donc $5 = -3 + p$, soit $p = 8$.

 La droite \mathcal{D}_3 et sa parallèle ont le même coefficient directeur.

4. Réponse c.

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur nul.

19 TRIO D'ÉQUATIONS

a. Un vecteur directeur de la droite (WH) est $\overline{WH}(5 ; -9)$.

Une équation de (WH) s'écrit $9x + 5y + c = 0$.

En utilisant les coordonnées de H : $0 - 35 + c = 0$ d'où $c = 35$.

Une équation cartésienne de la droite (RS) est : $9x + 5y + 35 = 0$.

b. Les points H et K ayant la même ordonnée, la droite (HK) est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation $y = -7$.

c. Comme $\overline{WK}(15 ; -9)$, la pente de cette droite est $-\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}$.

La droite passe par H, donc $p = -7$.

L'équation réduite est : $y = -\frac{3}{5}x - 7$.

20 LE BON ORDRE

a. $m_3 < m_2 < m_4 < m_5 < m_1$. **b.** $p_5 < p_4 < p_3 < p_1 < p_2$.

21 MÉDIANE

On note I le milieu du segment [AB]. Ses coordonnées sont $(5 ; 2)$.

La médiane issue de O dans le triangle OAB est la droite (OI).

Son ordonnée à l'origine est 0 puisqu'elle passe par O.

Son coefficient directeur est $\frac{y_I - y_O}{x_I - x_O} = \frac{2 - 0}{5 - 0} = \frac{2}{5}$.

Une équation de (OI) est $y = \frac{2}{5}x$.

22 ALIGNÉS OU PAS ?

Coefficient directeur de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-173 - 52}{-200 - 100} = \frac{-225}{-300} = \frac{3}{4}.$$

Coefficient directeur de la droite (AC) :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{7 - 52}{40 - 100} = \frac{-45}{-60} = \frac{3}{4}.$$

Les droites (AB) et (AC) ayant le même coefficient directeur, **les points A, B et C sont alignés.**

23 CERCLE CIRCONSCRIT

1. a. $Z\left(\frac{-4+0}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (-2; 3).$

b. Les points A et M ont la même ordonnée, donc AM est la différence de leurs abscisses, ce qui donne **AM = 4.**

Les points A et N ont la même abscisse, donc AN est la différence de leurs ordonnées, ce qui donne **AN = 4.**

Par conséquent, on a bien AM = AN.

c. Comme Z est le milieu de [MN], Z appartient à la médiatrice de [MN].

Comme AM = AN, le point A appartient aussi à la médiatrice de [MN].

Cette médiatrice est donc la droite (AZ).

Le coefficient directeur de la droite (AZ) est égal à $\frac{3-1}{-2-0} = -1.$

Son ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point A, c'est-à-dire 1.

Par conséquent, une équation de la médiatrice du segment [MN] est : **$y = -x + 1.$**



Une autre idée consiste à tester les coordonnées de A et Z dans l'équation $y = -x + 1.$

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle MNP est le point d'intersection de ses médiatrices.

Ses coordonnées vérifient les équations $y = -x + 1$ et $y = \frac{1}{6}x + \frac{23}{12}.$

L'abscisse de ce point est une solution de l'équation :

$$\frac{1}{6}x + \frac{23}{12} = -x + 1 \text{ qui équivaut à } x + \frac{1}{6}x = 1 - \frac{23}{12}, \text{ puis à } \frac{7}{6}x = -\frac{11}{12} \text{ et}$$

$$\text{enfin à } x = -\frac{11}{14}.$$

On calcule maintenant l'ordonnée du point : $y = -\left(-\frac{11}{14}\right) + 1 = \frac{25}{14}.$

Les coordonnées du point K, centre du cercle circonscrit au triangle MNP sont

$$\left(-\frac{11}{14}; \frac{25}{14}\right).$$

24 VOYAGE EN TRAIN

On note V la vitesse habituelle du train en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, D la distance parcourue en km et T le temps de parcours en heures. On a bien entendu $D = VT$.

a. La première information s'écrit $D = (V + 30)(T - 1)$.

On en déduit $(V + 30)(T - 1) = VT$.

En développant, $VT + 30T - V - 30 = VT$, ou encore $30T - V - 30 = 0$.

La deuxième information s'écrit $D = (V - 30)(T + 2)$.

On en déduit $(V - 30)(T + 2) = VT$.

En développant, $VT - 30T + 2V - 60 = VT$, ou encore $-30T + 2V - 60 = 0$

On a bien obtenu le système :

$$\begin{cases} 30T - V - 30 = 0 \\ -30T + 2V - 60 = 0 \end{cases}$$

b. Ce système équivaut à :

$$\begin{aligned} \begin{cases} V = 30T - 30 \\ 2V = 30T + 60 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} V = 30T - 30 \\ V = 15T + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30T - 30 = 15T + 30 \\ V = 15T + 30 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 15T = 60 \\ V = 15T + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 4 \\ V = 90 \end{cases} \end{aligned}$$

La durée du trajet est de 4 heures, la vitesse habituelle du train est de $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

La longueur du trajet est donc de 360 km.

9

Statistiques

I POURCENTAGES

1. Pourcentage de pourcentage

DÉFINITIONS :

- ▶ Calculer a % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{a}{100}$.
- ▶ Calculer b % de a % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{b}{100} \times \frac{a}{100}$.

EXEMPLE :

10 % de la population mondiale sont des européens et 9 % des européens sont français.

Comme $0,09 \times 0,10 = 0,009$, la population française représente 0,9 % de la population mondiale.

2. Évolutions

DÉFINITIONS :

Soit V_i la valeur initiale d'une quantité variable et V_f sa valeur finale.

La **variation absolue** est $V_f - V_i$, la **variation relative** est $\frac{V_f - V_i}{V_i}$.

Cette dernière s'exprime en pourcentage (%).

EXEMPLE :

La population de la ville de Bordeaux était de 210 196 en 1999 et 249 712 en 2015.

L'augmentation absolue est 39 516 habitants.

Comme $\frac{39\,516}{210\,196} \approx 0,188$, l'augmentation relative est environ 18,8 %.

- ▶ Une **augmentation de t %** se traduit par une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$.
- ▶ Une **diminution de t %** se traduit par une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

Les nombres $1 \pm \frac{t}{100}$ sont les **coefficients multiplicateurs** associés aux évolutions.

EXEMPLES :

- Une augmentation de 10 % se traduit par une multiplication par 1,1.
- Une diminution de 10 % se traduit par une multiplication par 0,9.

3. Évolutions successives

PROPRIÉTÉ :

Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient entre eux.



Voir la méthode 1.

Remarque : Lorsqu'une quantité a subi une évolution, l'**évolution réciproque** permet de revenir à la valeur initiale. Le coefficient multiplicateur de l'évolution et de son évolution réciproque sont inverses l'un de l'autre.

EXEMPLE : Les nombres $\frac{4}{5} = 0,8$ et $\frac{5}{4} = 1,25$ sont inverses l'un de l'autre.

Ainsi une diminution de 20 % et une augmentation de 25 % sont des évolutions réciproques.

II INDICATEURS DE POSITION

1. Moyenne

DÉFINITIONS :

On considère N nombres réels x_1, x_2, \dots, x_N .

- La **moyenne arithmétique** de ces nombres est $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$.
- Lorsque les nombres x_1, x_2, \dots, x_k sont associés à des effectifs n_1, n_2, \dots, n_k , on calcule une **moyenne pondérée** $\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}$, où N est l'effectif total.

EXEMPLE :

Voici les résultats obtenus par les concurrents du dernier US Open de golf à Pebble Beach, sur le fameux trou n° 7, un « par 3 » de 96 m :

Nombre de coups	2	3	4	5	6	7
Nombre de joueurs	61	268	84	26	6	1

La moyenne de coups joués sur ce trou est donc :

$$\frac{61 \times 2 + 268 \times 3 + 84 \times 4 + 26 \times 5 + 6 \times 6 + 1 \times 7}{446} \approx 3,22.$$

Remarque : Lorsque les nombres x_1, x_2, \dots, x_k sont associés à des fréquences f_1, f_2, \dots, f_k , la moyenne pondérée est $f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$.

EXEMPLE :

L'exemple précédent est repris, mais les pourcentages prennent la place des effectifs.

Nombre de coups	2	3	4	5	6	7
Nombre de joueurs	13,68 %	60,09 %	18,83 %	5,83 %	1,34 %	0,22 %

On obtient :

$$0,1368 \times 2 + 0,6009 \times 3 + 0,1883 \times 4 + 0,0583 \times 5 + 0,0134 \times 6 + 0,0022 \times 7 \approx 3,22.$$

PROPRIÉTÉ : LINÉARITÉ DE LA MOYENNE

On considère une série de nombres x_1, x_2, \dots, x_N , de moyenne M .

Soit a et b deux nombres réels.

La moyenne des nombres $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_N + b$ est $aM + b$.

EXEMPLE :

Si les nombres sont doublés, il en est de même pour la moyenne.

Si on ajoute 3 à chaque nombre, la moyenne est augmentée de 3.

2. Médiane

DÉFINITION :

Soit S une série statistique quantitative formée de N nombres rangés par ordre croissant.

Si N est impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$.

Si N est pair, la médiane est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.



Voir la méthode 2.

EXEMPLES :

• Avec la série $1 - 5 - 10 - 20 - 100$:

$N = 5$ est impair, la médiane est le 3^e nombre : $M = 10$.

• Avec la série $1 - 5 - 10 - 20 - 100 - 1\,000$:

$N = 6$ est pair, la médiane est la moyenne du 3^e et du 4^e nombre : $M = 15$.

3. Quartiles

DÉFINITIONS :

• Le **premier quartile**, noté Q_1 , est le plus petit élément des valeurs de la série tel qu'au moins 25 % des valeurs lui sont inférieures ou égales.

• Le **troisième quartile**, noté Q_3 , est le plus petit élément des valeurs de la série tel qu'au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures ou égales.



Voir la méthode 2.

EXEMPLES :

• Avec la série $1 - 5 - 10 - 20 - 100$:

Comme $N = 5$, on a $N/4 = 1,25$ et $3N/4 = 3,75$.

Le premier quartile est la 2^e valeur de la série, le troisième quartile est la 4^e valeur de la série : $Q_1 = 5$ et $Q_3 = 20$.

• Avec la série $1 - 5 - 10 - 20 - 100 - 1000$:

Comme $N = 6$, on a $N/4 = 1,5$ et $3N/4 = 4,5$.

Le premier quartile est la 2^e valeur de la série, le troisième quartile est la 5^e valeur de la série : $Q_1 = 5$ et $Q_3 = 100$.

III INDICATEURS DE DISPERSION

1. Écart interquartiles

DÉFINITIONS :

- L'écart interquartiles est le nombre $Q_3 - Q_1$.
- L'intervalle interquartiles est $[Q_1 ; Q_3]$.

EXEMPLE :

Avec la série 1 – 5 – 10 – 20 – 100 – 1 000 :

$Q_1 = 5$ et $Q_3 = 100$.

L'écart interquartiles est 95, l'intervalle interquartiles est $[5 ; 100]$.



L'écart interquartiles est un indicateur de dispersion associé à la médiane.

2. Écart-type

DÉFINITION :

L'écart-type est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

EXEMPLE :

Avec la série 5 – 10 – 15 – 25 – 45 :

La moyenne est 20.

Les écarts à la moyenne sont 15 – 10 – 5 – 5 – 25.

Leurs carrés sont : 225 – 100 – 25 – 25 – 625.

La moyenne de ces carrés est 200.

L'écart-type est $\sqrt{200}$.



L'écart-type est un indicateur de dispersion associé à la moyenne.
Voir la méthode 3.

MÉTHODE 1**Calculer un taux d'évolution global**

→ Voir les exos 6, 11, 12 et 25.

Étape 1. Déterminer les coefficients multiplicateurs de chaque évolution successive.

Étape 2. Multiplier ces coefficients multiplicateurs.

Étape 3. Donner l'évolution globale correspondant à ce produit.

Exo résolu

Le prix d'un article subit une hausse de 10 %. Un peu plus tard, il est baissé de 20 %. Enfin, une nouvelle baisse de 30 % est appliquée. Quelle est l'évolution globale ?

CORRIGÉ

Étape 1. Une augmentation de 10 % se traduit par une multiplication par 1,1. Les diminutions de 20 % et 30 % se traduisent par des multiplications par 0,8 et 0,7.

Étape 2. $1,1 \times 0,8 \times 0,7 = 0,616$.

Étape 3. Une multiplication par 0,616 se traduit par une diminution de 38,4 %.

En pratique, on multiplie 0,616 par 100 puis on cherche le complément à 100 :

$$0,616 \times 100 = 61,6 \text{ puis } 100 - 61,6 = 38,4.$$

MÉTHODE 2**Déterminer la médiane et les quartiles**

→ Voir les exos 7, 8, 16, 25 et 28.

Étape 1. Classer les valeurs dans l'ordre croissant.
Compter le nombre de valeurs.

Étape 2. Selon la parité de l'effectif total, trouver la médiane.

Étape 3. Calculer 25 % et 75 % de l'effectif total puis arrondir à l'entier immédiatement supérieur ou égal, ce qui donne les rangs des quartiles.

Exo résolu

Les tailles, en cm, d'un groupe d'enfants sont :

$$94 - 92 - 98 - 87 - 95 - 96 - 101 - 99 - 89 - 91 - 95 - 92 - 97 - 99 - 95.$$

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.

CORRIGÉ

Étape 1. Les données sont classées par ordre croissant :

87 – 89 – 91 – 92 – 92 – 94 – 95 – 95 – 95 – 96 – 97 – 98 – 99 – 99 – 101.

L'effectif total est 15.

Étape 2. Cet effectif total est impair, ainsi la médiane est la 8^e valeur.

La médiane est 95.

Étape 3. 25 % de l'effectif total, c'est 3,75.

L'entier immédiatement supérieur ou égal est 4.

Ainsi le premier quartile est la 4^e valeur.

$Q_1 = 92$.

75% de l'effectif total, c'est 11,25.

L'entier immédiatement supérieur ou égal est 12.

Ainsi le troisième quartile est la 12^e valeur.

$Q_3 = 98$.



La médiane n'est pas toujours une valeur de la série.

Les quartiles Q_1 et Q_3 sont toujours des valeurs de la série.

MÉTHODE 3**Calculer un écart-type**

→ Voir les exos 7, 8, 17, 18, 25 et 28

Étape 1. Calculer la moyenne.

Étape 2. Calculer les écarts à la moyenne, puis leurs carrés.

Étape 3. Calculer la moyenne de ces carrés.

Étape 4. L'écart-type est la racine carrée du résultat obtenu.

Exo résolu

Calculer l'écart-type de la série :

3 – 5 – 8 – 10 – 12 – 13 – 15 – 16 – 18 – 20.

CORRIGÉ

Étape 1. L'effectif total de cette série est 10, sa moyenne est 12.

Étape 2. Les écarts à la moyenne sont 9 – 7 – 4 – 2 – 0 – 1 – 3 – 4 – 6 – 8 et leurs carrés sont 81 – 49 – 16 – 4 – 0 – 1 – 9 – 16 – 36 – 64.

Étape 3. La moyenne de ces carrés est 27,6.

Étape 4. L'écart-type est $\sqrt{27,6}$, soit environ 5,25.



Un tableau permet de présenter les résultats clairement. Voir l'exercice 8.


MÉTHODE 4

Utiliser un tableur

→ Voir l'exo 19.

Étape 1. Les fonctions sont présentées avec des parenthèses vides. Entre ces parenthèses, on écrit la première et la dernière cellule séparées par « : ». Moyenne pondérée : SOMMEPROD(). Cette fonction calcule une somme de produits effectués sur deux lignes ou deux colonnes à spécifier entre les parenthèses. Il suffira ensuite de diviser par la somme des coefficients, en utilisant la fonction SOMME().

Étape 2. Écart-type : ECARTYPEP() ou ECARTYPE.P().

 Utiliser MOYENNE() pour une simple moyenne sans effectifs. La médiane s'obtient avec la fonction MEDIANE(). L'usage de la fonction QUARTILE() est risqué car les résultats obtenus ne sont pas toujours en accord avec la définition donnée en classe de seconde.

Exo résolu

On reprend l'exemple du rappel de cours, paragraphe 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	coups	2	3	4	5	6	7		moyenne:
2	joueurs	61	268	84	26	6	1		

CORRIGÉ

Étape 1. Calcul de la moyenne.

Dans la cellule I2 :

$$= (B1*B2 + C1*C2 + D1*D2 + E1*E2 + F1*F2 + G1*G2) / \text{SOMME}(B2 : G2)$$


ou

$$= \text{SOMMEPROD}(B1 : G1; B2 : G2) / \text{SOMME}(B2 : G2)$$

Étape 2. Calcul de l'écart-type.

Tout d'abord, on remplit deux lignes supplémentaires. Saisir la formule =B1-\$I\$2 dans la cellule B3 puis = B3^2 dans B4 et recopier vers la droite. Enfin, saisir le calcul de l'écart-type dans la case I4 avec la formule =RACINE(MOYENNE(B4 : G4)).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	coups	2	3	4	5	6	7		moyenne:
2	joueurs	61	268	84	26	6	1		3,22
3	écart moy	-1,22	-0,22	0,78	1,78	2,78	3,78		écart-type :
4	carrés	1,48	0,05	0,61	3,18	7,74	16,31		0,82

 Sans le symbole \$ avant I et 2, la recopie est fautive. La fonction ECARTYPEP() est utilisable avec une matrice de valeurs. Avec des effectifs ou des fréquences, on procède comme ci-dessus.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 PEYRAGUDES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 250

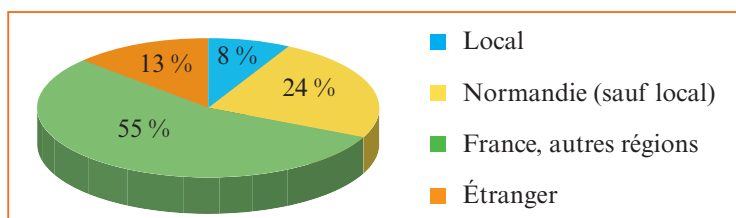
Dans la station de ski de Peyragudes, dans les Pyrénées, on compte 52 pistes. 54 % des pistes sont faciles (vertes ou bleues) et 21 % des pistes faciles sont vertes. De plus, il y a cinq fois moins de pistes noires que de pistes rouges. Trouver le nombre de pistes de chaque couleur.

👍 Dans les stations de ski, on attribue une couleur à chaque piste selon sa difficulté : verte pour très facile, bleue pour facile, rouge pour moyenne, noire pour difficile.

2 CAMEMBERTS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 250

Une société qui fabrique des camemberts en Normandie publie ses chiffres de vente :



👍 Ce type de représentation est un diagramme circulaire.

1. a. Quelle est la part de camemberts vendus dans toute la Normandie ?
- b. Quelle est la part du marché local par rapport au marché de la Normandie ?
2. Sachant que la société a produit cette année 127 500 camemberts, combien en a-t-elle vendu à l'étranger ?

3 POURCENTAGE DE POURCENTAGE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 250

Dans un lycée, on compte 60 % de filles. Parmi elles, 25 % ont choisi une LV1 qui n'est pas l'anglais. Quel est le pourcentage de filles ayant choisi la LV1 anglais dans ce lycée ?

👍 Parmi les 60 % de filles, 75 % d'entre elles ont choisi l'anglais.

4 VARIATION ABSOLUE ET RELATIVE

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 250

Année	2000	2015	Prévision 2030
Population mondiale (en milliard d'habitants)	6,13	7,35	8,50

Source : INED

- Quelle est la variation absolue entre 2000 et 2015 ? La variation relative ?
- Quelle est la variation absolue entre 2015 et 2030 ? La variation relative ?
- Quelle est la variation absolue entre 2000 et 2030 ? La variation relative ?

 Pour la question **c.** faire le lien avec les questions précédentes.

5 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

★ | ⌚ 5 min | ► P. 251


Le prix d'une voiture d'occasion est diminué trois fois de suite de 10 %.
Quel est le pourcentage de diminution global ?

 Le prix de cette voiture est multiplié trois fois de suite par un même nombre.
Voir la méthode 1.

6 ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

★ | ⌚ 5 min | ► P. 251

Quelle diminution permet de compenser une augmentation de 60 % ?

 Deux évolutions qui se compensent sont dites réciproques. Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre.
Voir la méthode 1.

7 ORCHESTRE

★ | ⌚ 10 min | ► P. 251

Voici les âges des membres d'un orchestre, rangés par ordre croissant :
19 – 21 – 23 – 28 – 30 – 30 – 31 – 35 – 36 – 43 – 45 – 47 – 48 – 51 – 52 – 55 –
60 – 61 – 61 – 64.

- Calculer la moyenne, puis l'écart-type.
- Déterminer la médiane, puis les quartiles et l'écart interquartiles.
- Donner les valeurs de ces paramètres dix ans plus tard, en supposant que la composition de l'orchestre ne change pas.

 Voir les méthodes 2 et 3.

8 PRIX D'UNE BAGUETTE DE PAIN


★ | ⌚ 15 min | ► P. 251

On a relevé le prix de vente d'une baguette de 250g dans les 64 boulangeries d'une ville :

Prix (en €)	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
Effectifs	4	22	20	10	5	2	1

- Calculer le prix moyen d'une baguette de pain dans cette ville :
 - en rédigeant avec l'opération complète ;
 - à l'aide de la calculatrice.

2. Calculer l'écart-type de cette série.

 Voir les méthodes 2 et 3 pour l'écart-type, la médiane et les quartiles.

3. Déterminer la médiane et les quartiles, puis calculer l'écart interquartiles. Arrondir les résultats à 1 centime près.

 **Utilisation d'une calculatrice**

- Dans le menu STAT, saisir les valeurs dans la colonne L1, les éventuels effectifs ou fréquences dans L2.
- Dans CALC, sélectionner 1-Var pour accéder aux caractéristiques de la série : \bar{x} est la moyenne, σx est l'écart-type et Méd est la médiane.


9 MOYENNE AVEC DES FRÉQUENCES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 253

Dans une classe de Seconde, on demande aux élèves le temps moyen consacré à leurs devoirs chaque soir de la semaine :

- 10 % des élèves répondent 0 heure ;
- 20 % répondent 30 minutes ;
- 40 % répondent 1 heure ;
- 20 % répondent 1 heure 30 minutes ;
- 10 % répondent 2 heures.

Calculer le temps moyen de travail quotidien des élèves de cette classe.

 C'est une moyenne à calculer avec des fréquences.

S'ENTRAÎNER

10 100 % DE POURCENTAGES


★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 253

Dans tous les cas, arrondir les résultats avec une décimale.

1. a. Un champion d'échecs analyse ses résultats depuis quelques années.


Il constate qu'il a gagné 52,7 % de ses parties, en a perdu 9,4 % et a fait partie nulle les autres fois. De plus, il avait les blancs lors de 58,1 % de ses gains.

En supposant qu'il a joué autant de parties avec les blancs qu'avec les noirs, quel est son taux de parties gagnées avec les noirs ?

 58,1 % de 44,7 % sont les parties gagnées avec les blancs.


b. Lors d'une élection, le taux de participation est de 60 %. Le vainqueur de l'élection est élu car il a eu la majorité des voix exprimées. Pourtant, seulement 31,2 % des électeurs inscrits ont voté pour lui.

Quel est son résultat à l'élection ?

 Ce score $x\%$ est tel que $x\%$ de 60% est égal à $31,2\%$.

c. On étudie la répartition des sources d'énergie qui produisent de l'électricité en France. $12,5\%$ de la production totale, soit 44% de la production d'origine non nucléaire est d'origine hydroélectrique.

Quelle est la part de la production d'électricité d'origine nucléaire en France ?

 Chercher le pourcentage $x\%$ de la production non nucléaire, tel que 44% de $x\%$ est égal à $12,5\%$.

2. Daphné achète une bouteille de soda à l'orange sanguine. Sur l'étiquette, elle lit que celle-ci contient 74% d'eau. Parmi le reste, il y a 45% de jus de fruits. Parmi ces jus de fruits, il y a 50% d'orange sanguine.


Quelle est la proportion de l'orange sanguine dans cette bouteille de soda ?

11 INTÉRÊTS COMPOSÉS

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 253

Une personne voudrait placer une somme de 1000 euros sur un livret rémunéré au taux annuel de 2% .

1. Quelle somme sera disponible sur ce livret cinq ans plus tard ?

 Utiliser un coefficient multiplicateur 5 fois de suite.

2. a. Combien d'années sont nécessaires pour doubler son capital initial ?

 Faire différents essais pour le nombre d'années.

b. Ce nombre d'années serait-il différent avec un autre capital initial ?

3. Finalement, cette personne place une somme sur un autre livret rémunéré et s'aperçoit qu'en deux ans, ses intérêts se montent à 60,9 euros.

Quel est le taux annuel d'intérêts de ce livret ?

 Écrire une équation d'inconnue le coefficient multiplicateur associé au taux d'intérêts cherché.

12 PRÉVISIONS


★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 254

Le tableau ci-dessous donne la population en France, en millions d'habitants.

Année	1999	2019
Population	60,15	66,99

1. Calculer l'augmentation absolue, puis l'augmentation relative de la population française entre 1999 et 2019.

2. Calculer le taux d'accroissement décennal moyen entre 1999 et 2019.

 On note C_D le coefficient multiplicateur décennal moyen et M le coefficient multiplicateur associée à l'augmentation entre 1999 et 2009.
On a $C_D^2 = M$. Calculer M puis C_D et conclure.

3. En déduire une estimation de la population en 1989.
4. À partir de 2019, on suppose que la population augmente de 1,75 % tous les dix ans.
- a. Calculer la population en 2029.
- b. Un prévisionniste pense que la population en France sera d'environ 80 millions en 2100.
Qu'en pensez-vous ?

 Calculer la population en 2099 (8 décennies après 2019).


13 MOYENNE DE MOYENNES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 254

Voici les notes d'un élève de seconde lors de son année scolaire en mathématiques :

Trimestre 1	15 – 17
Trimestre 2	8 – 12 – 12 – 13 – 15
Trimestre 3	11 – 15 – 16

- a. Calculer ses moyennes trimestrielles.
- b. Il souhaite maintenant effectuer sa moyenne annuelle.
Doit-il calculer la moyenne des trois moyennes trimestrielles ou la moyenne globale de toutes les notes obtenues ?

 Faire les deux calculs, puis conclure.

14 MOYENNE PONDÉRÉE


★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 255

Lors d'un trimestre, un élève a eu quatre notes : trois notes à coefficient 1 et une note à coefficient 2.


Sa moyenne actuelle est de 10,4.

Quelle note lui faut-il, au cinquième et dernier devoir, pour être certain de finir le trimestre avec au moins 10 de moyenne :

- a. si le coefficient du cinquième devoir est 1 ?

 Le total des coefficients est 6, il doit obtenir au moins 60 points.

- b. si le coefficient du cinquième devoir est 2 ?

 Le total des coefficients est 7, il doit obtenir au moins 70 points.

15 INÉGALITÉ SALARIALE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 255

Dans un groupe mixte de 90 personnes, la moyenne globale des salaires est de 1 891 euros. La moyenne des salaires des hommes est de 1 940 euros, la moyenne des salaires des femmes est de 1 850 euros.

Quel est le nombre d'hommes et le nombre de femmes dans ce groupe ?



Noter x le nombre de femmes. Le nombre d'hommes est alors $90 - x$.

16 UN DEUX TROIS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 256

On considère cinq séries différentes de 100 nombres.

Chacun des nombres peut être 1, 2 ou 3.

Les nombres sont classés par ordre croissant.

Répondre aux questions suivantes en justifiant rapidement.

• Série A : la moyenne est 3.

Que peut-on dire de cette série ?

• Série B : l'étendue est 1 et la moyenne est strictement supérieure à 2.

Que peut-on dire de cette série ?

• Série C : la médiane est 1,5.

Combien y a-t-il de fois le nombre 1 ?

• Série D : la moyenne est 2, la série contient 30 fois le nombre 1.

Combien y a-t-il de fois le nombre 3 ?

• Série E : la médiane est 3.

Quel est le plus grand écart-type possible ?



Série C : Les nombres de rangs 50 et 51 sont 1 et 2.

Série D : si la moyenne est 2, que peut-on dire du nombre de « 1 » et du nombre de « 3 » ?

Série E : On doit avoir le maximum de 1 tout en ayant une médiane de 3.

Trouver avec quelles valeurs on détermine la médiane.

17 CALCUL MENTAL

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 256

Calculer rapidement et sans calculatrice :

a. la moyenne des séries suivantes :

Série 1 : 1 ; 19 ; 10 ; 5 ; 15.

Série 2 : 1 004 ; 991 ; 1 003 ; 1 008 ; 995.

Série 3 : 42 ; 45 ; 44 ; 37 ; 35.

Série 4 : 1,70 ; 1,67 ; 1,54 ; 1,58 ; 1,63.

b. L'écart-type de la série suivante :

Série 5 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.



Série 1 : on peut imaginer qu'il s'agit de notes sur 20.
 Série 2 : observer les écarts par rapport à 1000.
 Série 3 : observer les écarts par rapport à 40.
 Série 4 : Ces nombres pourraient être des tailles, on peut ne considérer leurs parties décimales et observer les écarts par rapport à 60.
 Série 5 : la moyenne est 3.

18 PÉRÉQUATION

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 257

Un professeur a noté des candidats à un concours et obtenu une moyenne M et un écart-type σ . Afin de modifier ces deux paramètres, une méthode consiste à changer toutes les notes, en remplaçant une note N par une nouvelle note $aN + b$, où a et b sont deux nombres à déterminer.

a. Rappeler comment est modifiée la moyenne M .

On admet que l'écart-type devient égal à $|a|\sigma$.

b. Le professeur constate que $M = 8$ et $\sigma = 4$. La nouvelle moyenne doit être 10, le nouvel écart-type doit être 3. Déterminer les nombres a et b .



$|a| \times 4 = 3$ permet de trouver a .

c. Calculer les nouvelles notes des étudiants qui ont eu initialement les notes suivantes : 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20.

19 BAC

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 257

Afin d'estimer sa note finale au baccalauréat, un élève prépare une feuille de calcul dans un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Matière	Français écrit	Français oral	Philosophie	Grand oral	Spécialité 1	Spécialité 2	Épreuves communes	Notes sur bulletin		
3	Coefficient	5	5	8	10	16	16	30	10		
4	Note										

1. Quelle formule doit-il écrire dans la cellule K4 pour calculer sa moyenne finale au bac ?



Voir la méthode 4. Le total des coefficients est 100.

2. a. Cet élève fait un essai avec les notes suivantes : 12 en français à l'écrit, 16 en français à l'oral, 8 en philosophie, 15 au grand oral, 10 et 14 pour les spécialités, 10 pour les épreuves communes et 11 pour la note sur les bulletins. Quel est son résultat au bac avec cette série de notes ?

b. Combien modifier la note des épreuves communes pour décrocher la mention AB ?



La mention AB s'obtient avec une moyenne générale de 12.

20 QUARTILES ET PYTHON

★★ ⌚ 5 min | ▶ P. 257

On donne le programme suivant écrit en langage Python :

```
from math import *
N=int(input("saisir l'effectif total"))
R=ceil(N/4)
S=ceil(3*N/4)
print(R)
print(S)
```

- a. À l'exécution du programme, l'utilisateur saisit $N = 35$.
Quelles sont les valeurs affichées ?
- b. Que fait cet algorithme ? (la réponse devra faire intervenir la notion de quartile).

 La ligne « from math import * » permet d'importer des fonctions mathématiques, ici on utilise la fonction `ceil()` qui permet d'arrondir à l'entier supérieur ou égal.

PRÉPARER UN CONTRÔLE**21** QCM

★ ⌚ 20 min | ▶ P. 257

Pour chacune des questions, une seule proposition est exacte.

1. 70 % du montant d'une consultation médicale est remboursée par la Sécurité Sociale. Puis une mutuelle rembourse 80 % du montant restant.
Quel pourcentage du prix de la consultation un patient doit-il payer ?
a. 6 % b. 14 % c. 24 % d. 56 %
2. La variation absolue est 10, la variation relative est 10 %.
La valeur initiale est :
a. 1 b. 10 c. 100 d. 1 000
3. Trois augmentations successives de 10 %, 20 % et 30 % reviennent à une augmentation globale de :
a. 60 % b. 93 % c. 36 % d. 71,6 %
4. L'évolution réciproque d'une diminution de 50 % est une augmentation de :
a. 50 % b. 200 % c. 25 % d. 100 %

Pour les questions 5 à 8, on considère la série des 10 premiers carrés parfaits :

$1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 64 - 81 - 100.$

5. La médiane de la série est :
a. 5,5 b. 25 c. 30,5 d. 36

6. Le premier quartile de la série est :

- a. 3 b. 4 c. 9 d. 25

7. Le troisième quartile de la série est :

- a. 8 b. 49 c. 64 d. 75

8. L'écart-type est environ :

- a. 32,4 b. 34,9 c. 38,5 d. 1 046,5

22 RAP

★★ ⌚ 5 min ▶ P. 258

Le diffuseur de musique Onzeur publie ses chiffres annuels : 48% de la musique écoutée en France est du rap, dont 65 % de rap français.

- a. Quelle est la proportion du rap français dans les écoutes selon ce diffuseur ?
b. Le rappeur Vlad affirme qu'à lui seul, il totalise 5 % des écoutes en France. Calculer la part des écoutes de ce rappeur par rapport au rap français.

23 ÂGE MOYEN

★★ ⌚ 5 min ▶ P. 258

Dans un groupe de 120 personnes, la moyenne globale des âges est de 28 ans. La moyenne des âges des 50 hommes est de 33 ans.

Calculer la moyenne des âges des femmes.

24 CINÉMA

★★ ⌚ 20 min ▶ P. 258

Lors d'un sondage, on a posé la question : « Combien de fois allez-vous au cinéma par mois ? ».

Voici les pourcentages de réponses obtenues :

Nombre de séances/mois	0	1	2	3	4	5
Pourcentage	40 %	25 %	18 %	10 %	5 %	2 %

1. a. Calculer le nombre de séances moyen par mois.
b. Calculer l'écart-type.
2. Déterminer la médiane, les quartiles et l'écart interquartiles.

25 MÉDIANE ET PYTHON

★ ⌚ 5 min ▶ P. 259

Compléter le programme suivant écrit en langage Python pour qu'il donne le rang de la médiane d'une série quantitative rangée par ordre croissant.

```
N=int(input("saisir l'effectif total"))
if N%2==0 :
    print("la médiane est la moyenne des nombres de rangs", ..., "et", ...)
else:
    print("la médiane est...)
```



if N % 2 == 0 : signifie « Si N est pair ».

ALLER PLUS LOIN

26 DÉCILES

★★★ | ⌚ 20 min | ▶ P. 260

Le revenu disponible d'un ménage comprend les revenus divers, les revenus financiers, les prestations sociales, nets des impôts et taxes. Si l'on ordonne ces revenus disponibles, les déciles (au nombre de 9, de D_1 à D_9) partagent la population en 10 tranches d'effectifs égaux.

Source : INSEE. Répartition des revenus en France (2013)

a. Que peut-on dire de D_5 ?

b. On note R le rapport interdéciles, défini par le quotient $R = \frac{D_9}{D_1}$. Il permet

de mettre en évidence l'écart entre le revenu plancher des 10 % des ménages les plus aisés et le revenu plafond des 10 % des ménages les plus modestes.

Sachant que $D_1 = 13\,580$ euros et $R = 4,6583$, quel est le revenu disponible minimum des 10 % des ménages les plus aisés ?

c. On donne aussi $D_2 = 17\,340$ euros et $D_8 = 49\,190$ euros. La médiane est 29 540 euros. Tracer la courbe des fréquences cumulées qui représente la répartition des revenus disponibles et lire graphiquement les quartiles.



En abscisse, indiquer le revenu disponible, graduer de 0 à 80 000 euros.

En ordonnée, indiquer les pourcentages de 0 à 100 %.

Q_1 est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 25 %.

27 BEAU GESTE

★★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 260

Dans une classe de 35 élèves, le professeur décide d'ajouter un point aux sept copies les plus faibles. Comment est modifiée la moyenne de la classe ?



Noter m la moyenne initiale et calculer la nouvelle moyenne en fonction de m .

28 SALAIRE MOYEN ET SALAIRE MÉDIAN

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 260

Comparer le salaire médian et le salaire moyen d'une entreprise.



Aucun calcul n'est à prévoir, on envisage plutôt le cas d'une grosse entreprise.

29 ÉCART-TYPE MAXIMAL

★★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 260

Dans une classe de 30 élèves, un professeur annonce une moyenne de 10 et un écart-type maximal. Qu'en déduit-on ?



Imaginer les notes possibles des élèves pour obtenir un écart-type maximal.

Calculer cet écart-type.

CORRIGÉS

1 PEYRAGUDES

54% de 52, c'est environ 28 : **il y a 28 pistes vertes ou bleues.**

21% de 28, c'est environ 6 : **il y a 6 pistes vertes et 22 pistes bleues.**

Il reste 24 pistes rouges ou noires.

Comme il y a 5 fois moins de pistes noires que de pistes rouges, une piste sur 6 est noire : **il y a 4 pistes noires et 20 pistes rouges.**

**Autre méthode**

On note R et N le nombre de pistes rouges et noires.

On a $R + N = 24$ et $R = 5N$.

On déduit $5N + N = 24$, soit $6N = 24$, d'où $N = 4$ puis $R = 20$.

2 CAMEMBERTS

1. a. 32 % (8 % localement ajoutés aux 24 % vendus dans le reste de la région)

b. Le marché local représente 8 % du total et le marché de la Normandie représente 32 % du total.

Le marché local a une part de **25 %** du marché de la Normandie.

2. $127\,500 \times \frac{13}{100} = 16\,575$.

La société a vendu **16 575** camemberts à l'étranger.

3 POURCENTAGE DE POURCENTAGE

Parmi les 60 % de filles dans ce lycée, 75% ont choisi l'anglais en LV1.

Comme $0,75 \times 0,60 = 0,45$, le pourcentage de filles ayant choisi la LV1 anglais dans ce lycée est donc **45 %**.



Faire les opérations avec des nombres décimaux, puis écrire le résultat avec des %.

4 VARIATION RELATIVE ET ABSOLUE

a. La variation absolue entre 2000 et 2015 est 1,22 milliards d'habitants.

La variation relative est $\frac{1,22}{6,13} \approx 0,20$, soit **20 %**.

b. La variation absolue entre 2015 et 2030 est 1,15 milliards d'habitants.

La variation relative est $\frac{1,15}{7,35} \approx 0,16$, soit **16 %**.

c. La variation absolue entre 2000 et 2030 est 2,37 milliards d'habitants.

C'est la somme des variations absolues trouvées aux questions précédentes.

La variation relative est $\frac{2,37}{6,13} \approx 0,39$, soit **39 %**.



- La variation relative globale s'obtient à partir des deux premières variations relatives en utilisant les coefficients multiplicateurs :
 - L'augmentation de 20 % entre 2000 et 2015 se traduit par une multiplication par 1,20.
 - L'augmentation de 16 % entre 2015 et 2030 se traduit par une multiplication par 1,16.
 - $1,20 \times 1,16 \approx 1,39$.
- Le coefficient 1,39 correspond à une hausse de 39 %.

5 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

Une diminution de 10 % se traduit par une multiplication par 0,9.
Comme cette diminution a lieu trois fois de suite, le coefficient multiplicateur global est $0,9^3 = 0,729$.
Il correspond à une diminution de **27,1 %**.



Pour trouver facilement la diminution, en %, on calcule le complément à 100 du coefficient multiplicateur multiplié par 100.
Ici, cela donne : $0,729 \times 100 = 72,9$ et le complément à 100 est 27,1.

6 ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Une augmentation de 60 % se traduit par une multiplication par 1,6.
Le coefficient multiplicateur inverse est $\frac{1}{1,6} = 0,625$.
Il correspond à une diminution de **37,5 %**.



On procède de la même façon avec une diminution.

7 ORCHESTRE

a. La moyenne est **42 ans**.
Les écarts à la moyenne sont :
23 – 21 – 19 – 14 – 12 – 12 – 11 – 7 – 6 – 1 – 3 – 5 – 6 – 9 – 10 – 13 – 18 – 19 – 19 – 22.
Leurs carrés sont :
529 – 441 – 361 – 196 – 144 – 144 – 121 – 49 – 36 – 1 – 9 – 25 – 36 – 81 – 100 – 169 – 324 – 361 – 361 – 484.
La moyenne de ces carrés est : 198,6 et $\sqrt{198,6} \approx 14,1$.
L'écart-type est environ 14,1 ans.



L'écart-type est un indicateur de dispersion, il s'exprime ici en années.

b. Les valeurs sont déjà classées par ordre croissant.
L'effectif total est 20, c'est un nombre pair. Ainsi, la médiane est la moyenne de la 10^e et de la 11^e valeur.
La médiane est 44.
25 % de l'effectif total, c'est 5. Le premier quartile est la 5^e valeur : $Q_1 = 30$.

75 % de l'effectif total, c'est 15.

Le troisième quartile est la 15^e valeur : $Q_3 = 52$.

$$Q_3 - Q_1 = 52 - 30 = 22.$$

L'écart interquartiles est **22 ans**.



L'âge médian est 44 ans.

Les quartiles et l'écart interquartiles s'expriment aussi en années.

c. La moyenne augmente de 10 ans, elle sera égale à 52 ans.

L'écart-type n'est pas modifié.

La médiane et les quartiles augmentent aussi de 10 ans.

L'intervalle interquartile n'est pas modifié.



• Les paramètres de position (moyenne, médiane quartiles) sont modifiés.

• Les paramètres de dispersion (écart-type, intervalle interquartiles) ne sont pas modifiés.

8 PRIX D'UNE BAGUETTE DE PAIN

$$1. a. \frac{4 \times 0,80 + 22 \times 0,85 + 20 \times 0,90 + 10 \times 0,95 + 5 \times 1,00 + 2 \times 1,05 + 1 \times 1,10}{64} = 0,90.$$

Le prix moyen d'une baguette de pain dans cette ville est **90 centimes**.

b. On saisit les prix la colonne L1, les effectifs dans la colonne L2.

Dans CALC, on lit $\bar{x} = 0,90$.

2.

Prix (en €)	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
Effectifs	4	22	20	10	5	2	1
Ecart à la moyenne (en centimes)	10	5	0	5	10	15	20
Carrés des écarts	100	25	0	25	100	225	400

$$\frac{4 \times 100 + 22 \times 25 + 20 \times 0 + 10 \times 25 + 5 \times 100 + 2 \times 225 + 1 \times 400}{64} \approx 39,84.$$

$$\sqrt{39,84} \approx 6,3.$$

L'écart-type est de **6,3 centimes environ**.

3. L'effectif total est $N = 64$.

La médiane est la moyenne des valeurs de rangs 32 et 33.

Ces deux valeurs sont dans la 3^e colonne, donc la médiane est **0,90 €**.

25 % de 64, c'est 16.

La 16^e valeur est dans la 2^e colonne :

$$Q_1 = 0,85 \text{ €}.$$

75 % de 64, c'est 48. La 48^e valeur est dans la 4^e colonne :

$$Q_3 = 0,95 \text{ €}.$$

L'écart interquartiles est **0,10 €**.



Attention :

Les quartiles donnés par les calculatrices ne sont pas toujours en accord avec la définition donnée en classe de Seconde.

9 MOYENNE AVEC DES FRÉQUENCES

Les pourcentages donnés sont en fait des fréquences (0,1 pour 10 %, 0,2 pour 20 %, ...) pour chacune des modalités qui sont ici le nombre d'heures de travail quotidien. La moyenne est donc $0,1 \times 0 + 0,2 \times 30 + 0,4 \times 60 + 0,2 \times 90 + 0,1 \times 120 = 60$. Le temps de travail quotidien moyen des élèves de cette classe est donc de 60 minutes, soit **1 heure**.



C'est une moyenne calculée avec des fréquences, il n'y a pas de division à faire. Attention à éventuellement convertir les données afin qu'elles soient toutes dans la même unité. Le calcul peut aussi être fait avec des heures :

$$0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 + 0,4 \times 1 + 0,2 \times 1,5 + 0,1 \times 2 = 1$$

Avec une calculatrice, il convient de saisir les valeurs décimales et non les pourcentages dans la colonne L2.

10 100 % DE POURCENTAGES

1. a. Puisqu'il avait les blancs lors de 58,1 % de ses gains, il avait les noirs lors de 41,9 % de ses gains.

$$0,419 \times 0,527 \approx 0,221.$$

22,1% des parties de ce joueur sont des parties gagnées avec les noirs.

En supposant qu'il a joué 50 % de ses parties avec les noirs, son taux de réussite avec les noirs est donc $\frac{22,1}{50} = 0,442$, soit **44,2 %**.

b. On note x % le score du vainqueur de l'élection.

$$\frac{x}{100} \times 0,6 = 0,312 \text{ donne } x = \frac{31,2}{0,6} = 52.$$

Le candidat a gagné l'élection avec 52 % des suffrages exprimés.

c. On note x % le pourcentage que représente la production d'électricité d'origine non nucléaire.

$$0,44 \times \frac{x}{100} = 0,125 \text{ donne } x = \frac{12,5}{0,44} \approx 28,4.$$

Comme les sources d'énergie autres que le nucléaire représentent 28,4 %, on conclut que **71,6 % de la production d'électricité en France provient des centrales nucléaires**.

2. Comme $0,5 \times 0,45 \times 0,26 = 0,0585 \approx 0,06$, Daphné constate qu'il y a **6 % de jus d'orange sanguine dans ce soda**.

11 INTÉRÊTS COMPOSÉS

1. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation du capital est 1,02. Cette augmentation a lieu cinq années de suite.

Le capital initial est donc multiplié par $1,02^5$: $1\,000 \times 1,02^5 \approx 1\,104,08$.

Le capital disponible après cinq ans est environ **1 104,08 euros**.


2. a. On cherche un nombre d'années n tel que pour la première fois, $1\,000 \times 1,02^n > 2\,000$. En divisant par 1 000, cela revient à $1,02^n > 2$.

En effectuant plusieurs essais à la calculatrice (ou avec un tableur),

on constate que $1\,000 \times 1,02^{35} < 2$ et $1\,000 \times 1,02^{36} > 2$.

Il faut donc attendre 36 ans pour doubler ce capital initial.

b. On a vu que le problème se ramène à $1,02^n > 2$.
Ainsi, quel que soit le capital initial, il faut toujours 36 ans pour le doubler.

 La résolution de l'inéquation $1,02^n > 2$ est possible avec la fonction \ln étudiée en terminale. En attendant, on se contente d'une résolution approchée avec la calculatrice.

3. Cette fois, le coefficient multiplicateur est inconnu, notons le C .
L'équation du problème est : $1\,000 \times C^2 = 1\,060,9$.
Après une division par 1 000, on obtient $C^2 = 1,0609$ puis $C = \sqrt{1,0609} = 1,03$.
Ce coefficient multiplicateur est associé à une augmentation de 3%.
Le taux d'intérêts de ce livret est donc de 3 %.

12 PRÉVISIONS

1. L'augmentation absolue est **6,84 millions d'habitants**.

L'augmentation relative est $\frac{6,84}{60,15} \approx 0,1137$, soit environ **11,37 %**.

2. Le coefficient multiplicateur global (sur deux décennies) est :

$$M = \frac{66,99}{60,15} \approx 1,1137.$$

$C_D^2 \approx 1,1137$ d'où $C_D \approx \sqrt{1,1137} \approx 1,0553$.

Le taux d'accroissement décennal moyen est donc environ **5,53 %**.

3. On suppose que ce taux d'accroissement décennal moyen s'applique entre 1989 et 1999 :

$$\frac{60,15}{1,0553} \approx 57,00.$$

La population en 1989 était de **57 millions d'habitants**.

4. a. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 1,75 % est 1,0175.
 $66,99 \times 1,0175 = 68,16$.


Selon cette hypothèse, la population en 2028 sera de **68,16 millions d'habitants**.

b. Toujours selon cette hypothèse, pour calculer la population en 2098, soit huit décennies plus tard, on utilise ce coefficient multiplicateur huit fois de suite :

$$66,99 \times 1,0175^8 = 76,96.$$

En 2100, cette population serait un peu supérieure à 77 millions.

Ainsi, le modèle du prévisionniste est différent de l'hypothèse selon laquelle la population augmente de 1,75 % tous les dix ans.

 Il est possible d'utiliser un exposant non entier pour estimer la population en 2100, soit 8 décennies après 2019 :

$$66,99 \times 1,0175^8 \approx 77.$$

13 MOYENNE DE MOYENNES

a. Moyenne du 1er trimestre : **16**.

Moyenne du 2ème trimestre : **12**.

Moyenne du 3ème trimestre : **14**.

b. La moyenne des 3 moyennes trimestrielles est $\frac{16+12+14}{3} = 14$.

La moyenne de toutes les notes obtenues pendant l'année est :

$$\frac{21 \times 6 + 5 \times 12 + 3 \times 14}{10} = \frac{134}{10} = 13,4.$$

Il a donc intérêt à faire la moyenne des 3 moyennes trimestrielles.



Ce n'est pas toujours le cas, cela dépend du nombre de notes dans chaque trimestre. La moyenne globale de 13,4 est obtenue comme si on attribuait un coefficient 2 au 1^{er} trimestre, un coefficient 5 au 2^e trimestre et un coefficient 3 au 3^e trimestre.

14 MOYENNE PONDÉRÉE

La somme des coefficients des quatre premiers devoirs est 5, donc il a déjà obtenu 52 points. ($5 \times 10,4 = 52$).

a. Pour obtenir une moyenne de 10 après le dernier devoir, il faut 60 points. Comme il en a déjà obtenu 52, **une note de 8 au moins au dernier devoir est nécessaire.**

b. Pour obtenir une moyenne de 10 après le dernier devoir, il faut 70 points. Comme il en a déjà obtenu 52, 18 points au moins sont nécessaires au dernier devoir. Le coefficient du dernier devoir étant 2, **la note requise pour terminer le trimestre avec une moyenne de 10 est 9.**



Autre méthode

L'exercice peut être traité d'une manière plus technique avec une résolution d'équation. On note x la note du dernier devoir qui permet d'obtenir une moyenne trimestrielle de 10.

• Pour la question a. :

$$\frac{5 \times 10,4 + x}{6} = 10 \text{ qui équivaut à } 52 + x = 60, \text{ soit } x = 8.$$

• Pour la question b. :

$$\frac{5 \times 10,4 + 2x}{7} = 10 \text{ qui équivaut à } 52 + 2x = 70, \text{ soit } 2x = 18 \text{ et } x = 9.$$

15 INÉGALITÉ SALARIALE

Soit x le nombre de femmes dans ce groupe. Le nombre d'hommes est $90 - x$.

La masse salariale (somme des salaires distribués) globale est, en euros, 90×1891 .

La masse salariale pour les hommes est $(90 - x) \times 1940$, alors que pour les femmes, c'est $x \times 1850$.

On obtient donc l'équation :

$$1850x + 1940(90 - x) = 90 \times 1891$$

$$\Leftrightarrow 1850x + 90 \times 1940 - 1940x = 90 \times 1891$$

$$\Leftrightarrow -90x = 90 \times 1891 - 90 \times 1940$$

$$\Leftrightarrow -x = 1891 - 1940$$

$$\Leftrightarrow x = 49$$

Le groupe est composé de 49 femmes et 41 hommes.

16 UN, DEUX, TROIS

- Série A : la série est composée exclusivement de 3. En effet, s'il n'y avait qu'un seul 1 ou 2, la moyenne serait strictement inférieure à 3.
- Série B : si l'étendue est 1, la série est composée avec des 1 et des 2, ou alors avec des 2 et des 3. Puisque la moyenne est strictement supérieure à 2, c'est qu'il n'y a que des 2 et des 3 dans cette série.
- Série C : nécessairement, le 50^e nombre est un 1, le 51^e est un 2. Les 49 premiers sont aussi des 1, il y a donc 50 fois le nombre 1.
- Série D : comme la moyenne est 2, Le nombre de 1 et le nombre de 3 sont identiques. Le nombre 3 est présent 30 fois.
- Série E : avec 100 nombres écrits dans l'ordre croissant, la médiane est la moyenne du 50^e et du 51^e. Si cette médiane est égale à 3, cela signifie que le 50^e nombre est un 3. Afin de rendre l'écart-type maximal, on prend les 49 premiers nombres égaux à 1.

La moyenne est $\frac{49 \times 1 + 51 \times 3}{100} = 2,02$.

Pour les écarts à la moyenne, il y a 49 fois 1,02 et 51 fois 0,98.

La moyenne des carrés est $\frac{49 \times 1,02^2 + 51 \times 0,98^2}{100} = 99,96$.

Enfin, l'écart-type est $\sqrt{99,96} \approx 10$.

17 CALCUL MENTAL

a. • Série 1.

En observant les écarts par rapport à 10, les valeurs 1 et 19 se compensent, ainsi que 5 et 15.

La moyenne est donc égale à 10.

• Série 2.

En observant les écarts par rapport à 1000, on obtient 4 ; -9 ; 3 ; 8 ; -5, dont la somme est 1.

La moyenne est donc égale à $1\ 000 + \frac{1}{5} = 1\ 000,2$.

• Série 3.

En observant les écarts par rapport à 40, on obtient 2 ; 5 ; 4 ; -3 ; -5, dont la somme est 3.

La moyenne est donc égale à $40 + \frac{3}{5} = 40,6$.

• Série 4.

On ne retient que les parties décimales 70 ; 67 ; 54 ; 58 ; 63.

En observant les écarts par rapport à 60, on obtient 10 ; 7 ; -6 ; -2 ; 3, dont la somme est 12.

La moyenne des parties décimales est donc égale à $60 + \frac{12}{5} = 62,4$.

La moyenne de la série est 1,624.

b. • Série 5.

La moyenne est 3. Les écarts à la moyenne sont 2 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2.

Leurs carrés sont 4 ; 1 ; 0 ; 1 ; 4. La somme de ces carrés est 10, leur moyenne est 2.

Finalement, l'écart-type est $\sqrt{2}$.

18 PÉRÉQUATION


a. Chaque note est multipliée par a puis augmentée de b . La moyenne subit les mêmes opérations (propriétés de linéarité, voir cours, paragraphe 1), elle devient $aM + b$.

b. $|a| \times 4 = 3$, donc $|a| = \frac{3}{4} = 0,75$ et $a = 0,75$.

De plus, $8a + b = 10$ équivaut à $8 \times 0,75 + b = 10$ ce qui donne $b = 10 - 6 = 4$.

c. En conclusion, chaque note N est remplacée par $0,75N + 4$.

Ancienne note	0	4	8	12	16	20
Nouvelle note	4	7	10	13	16	19

 En pratique, cela permet d'atténuer l'effet d'un correcteur trop sévère ou trop indulgent dans un concours qui emploie plusieurs examinateurs.


19 BAC

1. Première possibilité avec des opérations :

$$= (B3 * (B4 + C4) + D3 * D4 + E3 * E4 + F3 * (F4 + G4) + H3 * H4 + I3 * I4) / 100.$$

Deuxième possibilité avec une fonction :

$$= \text{SOMMEPROD}(B3:I3;B4:I4)/100.$$

 La fonction SOMMEPROD est adaptée au calcul de moyennes pondérées. Elle effectue une somme de produits.

2. a. Il obtient une moyenne de **11,48**.

 C'est le moment d'utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice.

b. Son nombre de points, avant division par le total des coefficients, est 1 148. Pour obtenir la mention AB, 1200 points sont nécessaires.

Ainsi, il lui manque 52 points.

Le coefficient des épreuves communes est 30 ; une note de 12 lui permettrait d'obtenir 60 points supplémentaires, ce qui suffirait pour décrocher la mention AB.

20 QUARTILES ET PYTHON

a. L'affichage est : **R = 9 et S = 27**.

b. À partir d'un effectif N , ce programme calcule et affiche les rangs correspondants aux quartiles : R pour Q_1 et S pour Q_3 .

Par exemple, s'il y a 35 valeurs classés par ordre croissant, le premier quartile sera la 9^e valeur, le troisième quartile sera la 27^e valeur.

21 QCM

1. **Réponse a.** La mutuelle rembourse 80 % des 30 % restants, soit 24 % du montant total de la consultation. Ajoutés aux 70 % remboursés par la Sécurité Sociale, cela donne un remboursement de 94 %, il reste donc 6 % à la charge du patient.

2. **Réponse c.** Avec une valeur initiale de 100 et une valeur finale de 110, on a bien une variation absolue de 10 et une variation relative de 10 %.

3. Réponse d.

Les coefficients multiplicateurs sont 1,1 ; 1,2 et 1,3. Leur produit est 1,716.

4. Réponse d.

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 50 % est 0,5. Son inverse est 2. Ce coefficient correspond à une augmentation de 100 %.

5. Réponse c.

L'effectif total est 10 qui est pair. La médiane est la moyenne des nombres de rangs 5 et 6, c'est-à-dire 25 et 36. Ainsi, la médiane est 30,5.

6. Réponse c.

25 % de 10, c'est 2,5. Le premier quartile est la valeur de rang 3, c'est-à-dire 9.

7. Réponse c.

75 % de 10, c'est 7,5. Le troisième quartile est la valeur de rang 8, c'est-à-dire 64.

8. Réponse a. Vérifier avec les fonctions statistiques d'une calculatrice.**22 RAP**

a. $0,65 \times 0,48 = 0,312$.

Le rap français représente 31,2% des écoutes.

b. On note x % le pourcentage cherché.

$$\frac{x}{100} \times 0,312 = 0,05 \text{ équivaut à } x = \frac{5}{0,312} \approx 16.$$

16 % du rap français écouté en France concerne Vlad.

23 ÂGE MOYEN

Soit x l'âge moyen des femmes.

$$\frac{50 \times 33 + 70x}{120} = 28 \text{ équivaut à } 1650 + 70x = 3360, \text{ soit } 70x = 1710,$$

$$\text{puis } x = \frac{171}{7} \approx 24,43.$$

La partie décimale 0,43 correspond à un nombre de mois égal à $0,43 \times 12 = 5,2$. Par conséquent, l'âge moyen des femmes est environ 24 ans et 5 mois.



Cet exercice est proche de l'exercice 13.

24 CINÉMA

1. a. Le nombre moyen de séances est :

$$0,4 \times 0 + 0,25 \times 1 + 0,18 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,05 \times 4 + 0,02 \times 5 = 1,21.$$

b. Calcul de l'écart-type :

Nombre de séances/mois	0	1	2	3	4	5
Écart	1,21	0,21	0,79	1,79	2,79	3,79
Carré de l'écart	1,4641	0,0441	0,6241	3,2041	7,7841	14,3641
Fréquence	40 %	25 %	18 %	10 %	5 %	2 %

$$\sqrt{0,4 \times 1,4641 + 0,25 \times 0,0441 + 0,18 \times 0,6241 + 0,1 \times 3,2041 + 0,05 \times 7,7841 + 0,02 \times 14,3641} \approx 1,306.$$

L'écart-type vaut environ 1,3.

2. • 50 % des gens interrogés vont au cinéma au plus une fois par mois et 50 % y vont au moins une fois par mois. **La médiane est donc 1.**

• 25 % des gens ne vont jamais au cinéma, donc $Q_1 = 0$.

• 75 % des gens vont au cinéma au plus deux fois, donc $Q_3 = 2$.

25 MÉDIANE ET PYTHON

```
N=int(input("saisir l'effectif total"))
if N%2==0 :
    print("la médiane est la moyenne des nombres de rangs", N//2, "et", N//2+1)
else:
    print("la médiane est le nombre de rang", (N+1)//2)
```



Voilà l'exercice 19 pour un exercice similaire sur les quartiles.

26 DÉCILES

a. D_5 est la médiane, c'est le revenu disponible médian qui partage la population des ménages en deux parties égales.

b. Comme $D_1 = 13\,580$ et $R = 4,6583$ on obtient $D_9 = 13\,580 \times 4,6583 \approx 63\,260$.
Le revenu disponible minimum des 10 % des ménages les plus aisés est 63 260 euros.

c. L'abscisse porte le revenu disponible en milliers d'euros.

• On a placé les points :

(13,58 ; 10) pour D_1

(17,34 ; 20) pour D_2

(29,54 ; 50) pour D_5

(49,19 ; 80) pour D_8

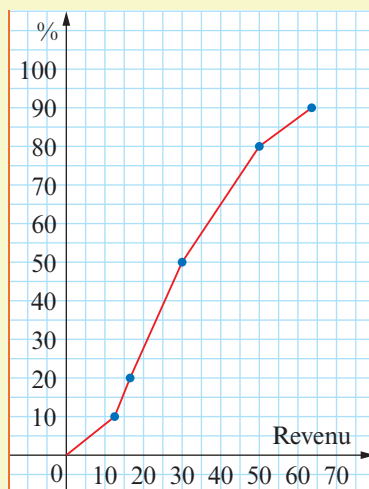
(63,26 ; 90) pour D_9 .

• L'abscisse du point d'ordonnée 25 est environ 19,5 :

le premier quartile est environ 19 500 euros.

• L'abscisse du point d'ordonnée 75 est environ 46 :

le troisième quartile est environ 46 000 euros.



La représentation s'arrête au 9^e décile, faute d'information suffisante.

Pour imaginer le dernier segment et le point d'ordonnée 100%, il faut une estimation du revenu disponible le plus élevé en France ... qui est très loin à droite sur l'axe des abscisses.

27 BEAU GESTE

Soit m la moyenne initiale.

Le nombre de points total (obtenu en ajoutant toutes les notes) est $35m$.

En ajoutant un point aux sept copies les plus faibles, ce total devient $35m + 7$.

En divisant par 35, la nouvelle moyenne est :

$$\frac{35m + 7}{35} = m + \frac{1}{5}.$$

La moyenne est donc augmentée de 0,2 point.



En pratique, il suffit d'ajouter l'augmentation de 7 points relative à 35 élèves, soit

$$\frac{7}{35} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

28 SALAIRE MOYEN ET SALAIRE MÉDIAN

On peut considérer qu'il y a beaucoup de salaires faibles ou moyens, alors qu'il y a, relativement, peu de salaires très importants. Contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas sensible aux valeurs extrêmes que sont ces revenus importants. Ainsi, le salaire moyen est supérieur au salaire médian.



En France en 2018, le salaire moyen est environ 2 250 euros, alors que le salaire médian est environ 1 800 euros (source : INSEE).

29 ÉCART-TYPE MAXIMAL

Un écart-type maximal est obtenu lorsque les écarts à la moyenne sont les plus grands possibles. Pour assurer une moyenne de 10, le nombre de 0 et de 20 doit être identique. Ainsi, 15 notes 0 et 15 notes 20 remplissent les conditions voulues. Dans ce cas, l'écart-type est facile à calculer : toutes les notes ont un écart de 10 par rapport à la moyenne, l'écart-type est 10.



On peut s'en convaincre en utilisant la définition de l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{30 \times 10^2}{30}} = \sqrt{10^2} = 10.$$

10 Probabilités

I EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

► On appelle **expérience aléatoire** une situation dont le résultat est imprévisible, dû au hasard.

► L'**univers** Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles.

Chacun des éléments de Ω est appelé **éventualité** ou **issue**.

EXEMPLE :

On lance un dé à six faces et on observe le nombre sur la face de dessus : il s'agit d'une expérience aléatoire.

Son univers est composé de six éventualités : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

II PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

1. Notion d'événement

► Un **événement** est une partie de Ω (c'est un sous-ensemble de l'univers).

Dire qu'une éventualité x réalise l'événement A signifie que $x \in A$.

► Un **événement élémentaire** est une partie de l'univers formée d'un seul élément.

2. Notion de probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω . Si on répète un grand nombre de fois cette expérience, la fréquence d'une éventualité s'approche d'un nombre que l'on appelle **probabilité de cette éventualité**.

Ainsi, à chaque éventualité, on associe sa probabilité qui est un nombre compris entre 0 et 1.

PROPRIÉTÉS :

- La somme des probabilités de toutes les éventualités est égale à 1.
- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.



La probabilité d'un événement impossible est 0, la probabilité d'un événement certain est 1.

3. Situation d'équiprobabilité

Lorsque toutes les éventualités ont la même probabilité, on dit qu'on a une **situation d'équiprobabilité**.

PROPRIÉTÉS :

- Si l'univers est formé de n issues, la probabilité d'une issue est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A constitué de k éventualités est égale à :

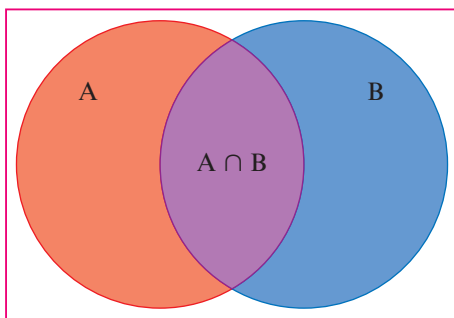
$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

EXEMPLE :

On considère l'expérience consistant à lancer un dé à six faces et l'événement A : « obtenir un nombre premier ». On a $A = \{2 ; 3 ; 5\}$ qui est formé de trois éventualités. Puisque l'univers est formé de six éventualités, $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

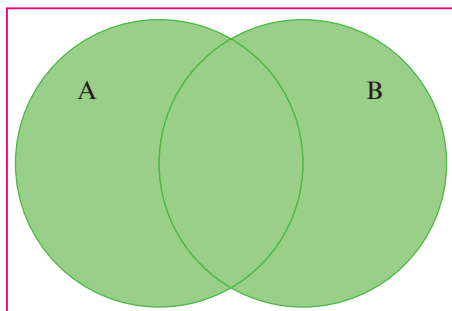
III CALCULS DE PROBABILITÉS**1. Intersection et réunion de deux événements**

► **L'intersection de deux événements A et B** d'un univers Ω est l'événement : « A et B », noté $A \cap B$, constitué des éventualités qui appartiennent simultanément à A et à B .



Un tel diagramme qui représente des événements avec des courbes fermées est un diagramme de Venn.

► **La réunion de deux événements A et B** d'un univers Ω est l'événement « A ou B », noté $A \cup B$, constitué des éventualités qui appartiennent à A ou à B .



Il ne s'agit pas du « ou » exclusif : ce sont les éventualités qui appartiennent à A ou à B ou aux deux.

EXEMPLE :

On considère l'expérience consistant à lancer un dé à six faces et les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir au moins 5 ».

On a $A = \{2 ; 4 ; 6\}$; $B = \{5 ; 6\}$

L'intersection est $A \cap B = \{6\}$

La réunion est $A \cup B = \{2 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

PROPRIÉTÉS :

Si A et B sont deux événements quelconques d'un univers Ω , alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Événements incompatibles

DÉFINITION

Deux événements A et B d'un univers Ω sont **incompatibles** si leur intersection est vide, c'est-à-dire si aucun résultat ne les réalise en même temps.

Dans ce cas, on note $A \cap B = \emptyset$.

EXEMPLE :

On considère l'expérience consistant à lancer un dé à six faces.

Les événements A : « obtenir un multiple de 4 » et

B : « obtenir au moins 5 » sont incompatibles.



Si deux événements A et B sont incompatibles, la formule du paragraphe précédent devient $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Événement contraire

DÉFINITION :

L'**événement contraire** d'un événement A est noté \bar{A} , il est constitué de toutes les éventualités qui ne sont pas dans A .

EXEMPLE :

On considère l'expérience consistant à lancer un dé à six faces. L'événement contraire de A : « obtenir au moins 5 » est \bar{A} : « obtenir au plus 4 ».

PROPRIÉTÉS :

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

MÉTHODE 1**Utiliser un arbre pour dénombrer**

→ Voir les exos 11, 13, et 18.

Étape 1. Dessiner un arbre, chaque branche représente une possibilité. Dans le cas de répétitions, décider si le tirage est sans remise ou avec remise.

Étape 2. Compter les chemins qui permettent de répondre à la question posée.

Exo résolu

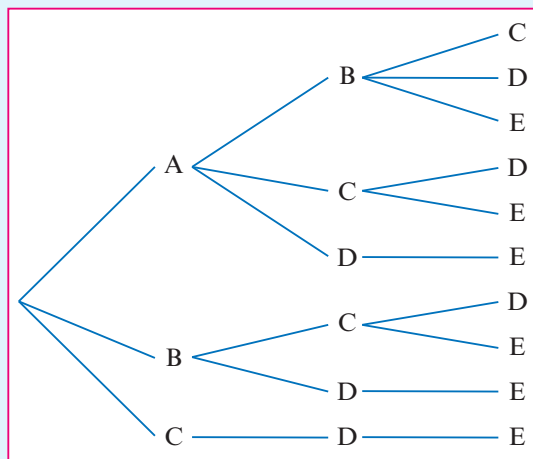
On demande à un étudiant d'effectuer trois vœux d'options, à choisir sans les ordonner dans une liste de 5 options.

Combien a-t-il de possibilités ?

CORRIGÉ

Étape 1. On dessine l'arbre en choisissant des notations simples. Ici, les options sont représentées par une lettre de A à E.

C'est un tirage sans remise puisqu'une option ne peut être choisie qu'une seule fois. On veille aussi à ne pas faire de répétitions : par exemple, les choix ABC et BAC sont les mêmes.



Étape 2. Il y a dix chemins sur cet arbre.

L'étudiant a 10 choix de trois vœux non ordonnés.



Si le choix est ordonné, il y a plus de possibilités. L'étudiant a 5 choix pour son vœu 1, 4 choix pour son vœu 2 et 3 choix pour son vœu 3.

Au total, il a 60 choix de trois vœux ordonnés.

MÉTHODE 2

Utiliser un tableau pour le calcul de probabilités

→ Voir les exos 10, 14, 15, et 22.

Étape 1. Traduire les données sous forme d'un tableau à double entrée.

Étape 2. Compléter le tableau, notamment les totaux pour chaque ligne et chaque colonne.

Étape 3. Calculer la probabilité demandée à l'aide d'une fraction.

Exo résolu

Une usine fabrique des écrans pour ordinateurs.

Elle dispose pour cela de trois unités de fabrication différentes A, B et C qui produisent respectivement 30 %, 45 % et 25 % de la production totale.

Les probabilités qu'un écran soit sans défaut à la sortie des unités de production sont 0,99 pour l'unité A, 0,95 pour l'unité B et 0,90 pour l'unité C. Calculer la probabilité qu'un écran sortant de l'usine soit défectueux.

CORRIGÉ

Étape 1. Les données sont traduites dans le tableau suivant.

Pour le total, on choisit 10 000, mais tout autre total est possible pourvu que les calculs soient pratiques.

Exemple de calcul : pour l'unité de fabrication A, 99 % des 3000 écrans sont sans défaut, soit 2 970 écrans.

	A	B	C	Total
Sans défaut	2 970	4 225	2 250	
Défectueux				
Total	3 000	4 500	2 500	10 000

Étape 2. Le tableau est complété :

	A	B	C	Total
Sans défaut	2 970	4 225	2 250	9 495
Défectueux	30	225	250	505
Total	3 000	4 500	2 500	10 000

Étape 3. 505 écrans sont défectueux au total : la probabilité qu'un écran sortant de l'usine soit défectueux est de :

$$\frac{505}{10\,000} = 0,0505.$$

MÉTHODE 3**Utiliser la formule qui relie l'intersection et la réunion**

→ Voir les exos 8, 15, et 17.

Étape 1. Identifier les événements décrits dans l'énoncé.

Étape 2. Selon le contexte, choisir la réunion \cup si c'est le mot « ou », l'intersection si c'est le mot « et ».

Étape 3. Appliquer la formule :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Exo résolu

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Calculer la probabilité de tirer un valet ou un carreau.

CORRIGÉ

Étape 1. On note V l'événement : « obtenir un valet » et C l'événement : « obtenir un carreau ».

Dans un jeu, il y a quatre valets, ce qui donne $P(V) = \frac{4}{32}$,

et huit carreaux, ce qui donne $P(C) = \frac{8}{32}$.

Étape 2. On cherche la probabilité de tirer un valet ou un carreau, c'est-à-dire la probabilité de l'événement $V \cup C$.

La probabilité de tirer un valet et un carreau, c'est-à-dire de tirer le valet de carreau est :

$$P(V \cap C) = \frac{1}{32}.$$

Étape 3. On obtient :

$$\begin{aligned} P(V \cup C) &= P(V) + P(C) - P(V \cap C) \\ &= \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

La probabilité de tirer un valet ou un carreau est $\frac{11}{32}$.

MÉTHODE 4

Utiliser l'événement contraire

→ Voir les exos 13 et 15

Lors de la recherche d'une probabilité d'un événement, il est parfois plus simple de trouver d'abord la probabilité de l'événement contraire.

C'est le cas lorsque l'énoncé contient « au moins » ou « au plus ».

Étape 1. Expliciter cet événement contraire.

Étape 2. Calculer la probabilité de l'événement contraire.

Étape 3. Appliquer la formule :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Exo résolu

On lance un dé trois fois de suite.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un « 6 ».

CORRIGÉ

Étape 1. On cherche la probabilité de l'événement A : « obtenir au moins une fois 6 ». L'événement contraire est \bar{A} : « ne pas obtenir le 6 ».

Étape 2. À l'aide d'un arbre, on trouve que :

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Étape 3. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois 6 en lançant trois fois un dé est $\frac{91}{216}$.

TESTER SES CONNAISSANCES

1 CONTRAIRES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 277

Décrire à l'aide d'une phrase, les événements contraires des événements suivants.

A : « Toutes les fleurs dans ce vase sont rouges. »

B : « Le temps est chaud et orageux. »

C : « Au moins un arbre de ce jardin est un cerisier. »

D : « Les élèves de cette classe ont 15 ans ou 16 ans. »

2 VRAI OU FAUX ?

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 277

On lance un dé non truqué à six faces et on observe le nombre sur la face supérieure.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. L'événement : « obtenir un nombre inférieur ou égal à six » est certain.

b. Les événements I : « obtenir un nombre impair » et Q : « obtenir un multiple de quatre » sont incompatibles.



Se demander si l'intersection de I et Q est vide ou non.

c. L'événement contraire de I est l'événement D : « obtenir un multiple de deux. »

d. La réunion des événements D et Q est $\{4\}$.



Ne pas confondre intersection et réunion, voir les rappels de cours.

3 JEU DE CARTES

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 277

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements :

A : « On obtient un As. »

B : « On obtient une dame. »

C : « On obtient un trèfle. »

a. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

Et les événements B et C ?

b. Décrire par une phrase sans utiliser de négation, l'événement contraire de l'événement C.

c. Proposer un événement D incompatible avec l'événement C.

4 ALGORITHME MONOLIGNE


★ ⌚ 5 min ▶ P. 277

L'algorithme suivant simule une expérience aléatoire :

$N \leftarrow$ entier aléatoire entre 0 et 3

Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

Combien y a-t-il d'éventualités ?

 Imaginer toutes les valeurs possibles qui peuvent être affichées en sortie.

5 MÉTÉO

★ ⌚ 5 min ▶ P. 277

Un marin consulte la météo du jour, un matin à 8 h . Il apprend que pour cette matinée, jusqu'à 12 h , les probabilités de pluie sont de 25 %.

Choisir la meilleure interprétation de cette information.

- Il va pleuvoir sur un quart de la zone concernée par les prévisions.
- Il va pleuvoir pendant une heure ce matin.
- 25 bateaux sur 100 qui sortiront en mer seront sous la pluie.
- Si la même prévision était faite pour une année, il pleuvrait environ 90 jours.

6 LOGIQUE


★ ⌚ 5 min ▶ P. 277

On considère deux événements A et B d'un même univers.

Voici une proposition :

« Si A et B ont la même probabilité, alors ils sont égaux. »

- Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?
- Écrire la proposition réciproque. Est-elle vraie ou fausse ?

 Cette réciproque prendra la forme suivante à compléter : « Si A et B..., alors... »

7 ÉVÉNEMENTS INCOMPATIBLES

★ ⌚ 5 min ▶ P. 278

A et B sont deux événements incompatibles d'un univers Ω .

On donne $P(A) = 0,2$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

- Calculer $P(\bar{A})$, $P(B)$ et $P(\bar{B})$
- Calculer $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.


 A et B incompatibles, donc l'intersection de A et B est vide.

8 LA DAME DE PIQUE

★ ⌚ 5 min ▶ P. 278

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

- un pique
- une dame
- la dame de pique
- une dame ou un pique.

 d. Dénombrer les cartes possibles ou utiliser la méthode 3.

9 JE VOUS AI APPORTÉ DES BONBONS

★ | ⌚ 5 min | ▶ P. 278

Un sac contient des bonbons au citron, à l'orange et à la fraise.
Trois bonbons sur huit sont au citron, deux bonbons sur sept sont à l'orange.
On prend un bonbon au hasard dans ce sac.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un bonbon au citron ou à l'orange ?
- En déduire la probabilité d'obtenir un bonbon à la fraise.


10 DO YOU SPEAK ENGLISH ?

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 279


Un standard téléphonique chargé de fournir des renseignements par téléphone emploie 80 % de standardistes titulaires et 20 % d'intérimaires.
70 % des intérimaires et 15 % des titulaires sont bilingues français-anglais.
Un interlocuteur anglais appelle ce standard.

- Recopier et compléter le tableau suivant :

	Titulaires	Intérimaires	Total
Bilingue			
Non bilingue			
Total			100

 Voir la méthode 2.


- Calculer la probabilité :
 - qu'un intérimaire parlant anglais lui réponde.
 - qu'un titulaire parlant anglais lui réponde.
 - qu'une personne parlant anglais lui réponde.
- La personne qui répond parle l'anglais.
Quelle est la probabilité que ce soit un intérimaire ?

 Écrire une fraction avec le total de la ligne « Bilingue » au dénominateur.

11 PILE OU FACE ?

★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 279

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite. Réaliser un arbre décrivant la situation.
Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois « PILE ».


 Voir la méthode 1.

S'ENTRAÎNER

12 CHAUSSETTES SURPRISE

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 280

Un tiroir contient quatre paires de chaussettes noires et trois paires blanches. Il y a donc en vrac dans ce tiroir huit chaussettes noires et six blanches. Dans le noir, on prend au hasard deux chaussettes. Calculer la probabilité que les deux chaussettes aient la même couleur.

 Faire un arbre de dénombrement. Voir la méthode 1.

13 JEU DE LA BOULE

★★ | ⌚ 15 min | ▶ P. 280


Au casino, la boule est un jeu de roulette à 9 numéros. Les numéros 1, 4, 6 et 9 sont rouges. Les numéros 2, 3, 7 et 8 sont noirs. Le 5 n'a pas de couleur.

1. On joue une fois à ce jeu. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a. un numéro pair et rouge ;
- b. un numéro pair ou rouge.

2. On joue désormais trois parties de ce jeu. Le résultat d'une telle expérience aléatoire est une suite de trois numéros, comme par exemple 7,1,5 ou 8,8,2.

- a. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 5.

 Commencer par calculer la probabilité de ne jamais obtenir le numéro 5 : voir la méthode 4.

14 EPS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 281

Les professeurs d'EPS d'un lycée proposent au choix une activité à leurs élèves. Le tableau suivant montre la répartition des choix :

Activité sportive	Gymnastique	Natation	Volley
Filles	70	40	90
Garçons	20	60	70

1. On prend un élève au hasard. Calculer les probabilités des événements :

- a. A : « l'élève a choisi l'activité gymnastique. »
- b. B : « l'élève est une fille. »
- c. C : « l'élève est une fille et a choisi l'activité gymnastique. »

2. On prend une fille au hasard.

Calculer la probabilité de l'événement D : « l'élève a choisi l'activité gymnastique. »


3. On prend un élève ayant choisi l'activité gymnastique.
Calculer la probabilité de l'événement E : « l'élève est une fille. »

 Voir la méthode 2.

15 LES ADEPTES DU « NI NI » ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 281

Un sondage révèle que parmi les abonnés d'un journal, 38 % lisent régulièrement la page « Télévision », 65 % lisent la page « Sports », 23 % lisent les deux. On interroge l'un de ces abonnés au hasard.

Calculer la probabilité que cet abonné ne lise ni la page « Télévision » ni la page « Sports ».


 « Ni l'un ni l'autre » est le contraire de « au moins l'un des deux » : voir les méthodes 3 et 4.

16 DALTONIENS ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 281

On considère une population composée de 52 % d'hommes et de 48 % de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de 0,05 et qu'une femme soit daltonienne de 0,0025.

a. Compléter le tableau suivant avec une population de 10 000 personnes :

	Daltonien	Total
Femmes		
Hommes		
Total		10 000


 Commencer par les cases de la colonne Total.

b. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit daltonienne ?

17 UN BEAU CADEAU ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 281

Obélix a une réserve de menhirs bien fournie. Un menhir sur deux est en granite et 30 % des menhirs ont été taillés. Un menhir sur cinq est en granite et a été taillé. Obélix souhaite offrir un menhir à Falbala et prend un menhir au hasard dans sa réserve.

Calculer la probabilité qu'il offre à Falbala un menhir qui est soit taillé, soit en granite.

 Voir la méthode 3.

18 AVEC DEUX DÉES : SOMME DES POINTS | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 282 |

On lance deux dés à six faces, non truqués, et on effectue la somme des points obtenus.

- Préciser l'univers de cette expérience aléatoire.
- Compléter le tableau des résultats suivant :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				7		
4						
5						
6						12

- Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 6.
- Calculer la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 6.



Utiliser des fractions avec 36 au dénominateur, puisque le tableau contient 36 cases.

19 LE JEU DU DUC DE TOSCANNE | ★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 282 |

Au XVII^e siècle, le duc de Toscane jouait à un jeu qui consistait à lancer trois dés et à totaliser les points obtenus. En jouant très souvent à ce jeu, il avait constaté que la somme 10 était obtenue plus souvent que la somme 9.

Pourtant, il avait aussi observé que 9 et 10 se décomposent tous deux de six façons différentes comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.

Le but de l'exercice est d'expliquer (comme le fit à l'époque Galilée, précepteur du duc de Toscane) ce paradoxe.

- Écrire les six différentes décompositions de 9 et 10 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.
- À l'aide d'un tableur, simuler 5 000 lancers de trois dés.

Compter le nombre de fois où l'on obtient une somme égale à 9 et le nombre de fois où l'on obtient une somme égale à 10.

- En supposant qu'un lancer de trois dés revient à lancer un dé trois fois de suite, déterminer les probabilités d'obtenir un total de 9 et un total de 10.



b. Utiliser la formule = ALEA.ENTRE.BORNES (1 ; 6) pour simuler le lancer d'un dé.
c. Dénombrer les manières de trouver une somme donnée, en tenant compte de l'ordre. Par exemple, $9 = 5 + 2 + 2 = 2 + 5 + 2 = 2 + 2 + 5$.

20 AVEC DEUX DÉES : PRODUIT DES POINTS | ★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 284

On lance deux dés et on effectue le produit des nombres obtenus sur les faces supérieures.

a. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il effectue ce produit 1 000 fois et qu'il calcule la moyenne M des résultats obtenus.

```

S ← 0
Pour I de 1 à 1000
  A ← nombre aléatoire entre 1 et 6
  B ← nombre aléatoire entre 1 et 6
  P ← ...
  S ← ...
Fin Pour
M ← ...

```

b. L'algorithme a été modifié de la façon suivante.

Expliquer ce que fait cet algorithme.

De quelle probabilité F est-elle une approximation ?

Traitement

```

N ← 0
Pour I de 1 à 1000
  A ← nombre aléatoire entre 1 et 6
  B ← nombre aléatoire entre 1 et 6
  P ← AB
  Si P > 10 alors
    N ← N + 1
  Fin Si
Fin Pour
F ←  $\frac{N}{1000}$ 

```

PRÉPARER UN CONTRÔLE

21 QCM

★★ | ⌚ 10 min | ► P. 284

Les trois questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, une et une seule proposition est exacte.

1. L'événement contraire de l'événement : « Sur cette table, toutes les bouteilles sont pleines » est :

- a. « Sur cette table, toutes les bouteilles sont vides. »
- b. « Sur cette table, il y a au moins une bouteille vide. »
- c. « Sous la table, les bouteilles sont entamées. »
- d. « Sur cette table, au moins une bouteille est entamée. »

2. Un jeune couple prévoit d'avoir trois enfants.

Pour chaque enfant, on suppose que la probabilité d'avoir une fille est égale à la probabilité d'avoir un garçon.

La probabilité que ce couple ait au moins deux filles est :

- a. $\frac{1}{4}$
- b. $\frac{1}{3}$
- c. $\frac{1}{2}$
- d. $\frac{2}{3}$

3. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée cinq fois de suite et on obtient à chaque fois « face ».

Au sixième lancer, la probabilité d'obtenir « pile » est :

- a. 0,5
- b. $\frac{1}{2^6}$
- c. supérieure à 0,5
- d. 1

22 COPIEURS !

★★ | ⌚ 20 min | ► P. 285

Une société produisant un article de luxe doit lutter contre un marché de contrefaçons. Elle met au point un test afin de déterminer si un article est un original ou une copie.

On dira que le test est positif si l'article est une copie.

Voici quelques résultats :

- 2 % des articles sont des copies.
- Le test est positif pour 90 % des copies.
- Le test est négatif pour 96 % des originaux.

1. Compléter le tableau suivant pour un total de 10 000 articles.

	Copie	Original	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			10 000

2. Un article est testé au hasard. On suppose que les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité que :

- a. cet article soit un original ;
- b. le test soit positif sachant que l'article est un original ;
- c. l'article soit un original et que le test soit positif ;

- d. le test soit positif ;
- e. l'article soit un original lorsque le test est positif ;
- f. l'article soit une copie lorsque le test est négatif.

23 AVEC TROIS DÉS

★★ | ⌚ 10 min | ▶ P. 285

On lance trois dés et on effectue le produit des nombres obtenus sur les faces supérieures.

- a. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il effectue ce produit 10 000 fois et qu'il compte le nombre de fois où ce produit est supérieur ou égal à 100.

```

N ← 0
Pour I de 1 à ...
  A, B et C ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
  P ← ...
  Si ... alors
    N ← ...
  Fin Si
Fin Pour
  
```

- b. Après avoir programmé cet algorithme, on trouve $N = 1068$. Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement : « obtenir un produit supérieur ou égal à 100 » ?

ALLER PLUS LOIN

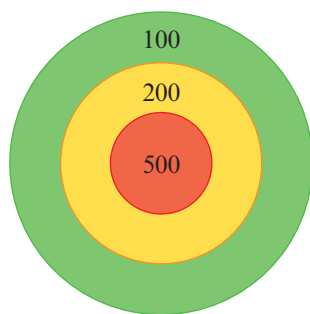
24 CONCOURS DE FLÉCHETTES

★★★ | ⌚ 30 min | ▶ P. 000

On suppose qu'un lanceur de fléchettes atteint toujours sa cible et que la probabilité de toucher l'une des trois zones est proportionnelle à son aire. Les zones sont délimitées par des cercles de rayons 5, 10, et 15 cm.

Le nombre de points obtenu quand il touche une zone est indiqué sur la figure ci-dessous.

- a. Calculer les probabilités de toucher chaque zone.



👍 Commencer par calculer les aires de chaque zone, puis faire le total des trois aires.

- b. Une partie consiste à lancer trois fléchettes, les trois lancers étant supposés indépendants.

Quelle est la probabilité d'obtenir plus de 1 000 points lors d'une partie ?

👍 Faire un arbre en ne détaillant que les chemins qui font obtenir au moins 1 000 points.

CORRIGÉS

1 CONTRAIRES

\bar{A} : « Au moins une fleur dans ce vase n'est pas rouge. »

\bar{B} : « Le temps n'est pas chaud ou n'est pas orageux. »

\bar{C} : « Il n'y a pas de cerisier dans ce jardin. »

\bar{D} : « Au moins un élève de cette classe n'a ni 15 ans ni 16 ans. »

2 VRAI OU FAUX ?


a. **Vrai.** Sa probabilité est égale à 1.

b. **Vrai.** I contient les éventualités 1, 3, 5 alors que Q contient l'éventualité 4.

 Leur intersection est vide, ils sont incompatibles.

c. **Vrai.** D est l'événement : « obtenir un nombre pair » et on a bien $\bar{I} = D$.

d. **Faux.** $D \cup M = \{2 ; 4 ; 6\}$.

 C'est l'intersection de D et M qui est {4}.

3 JEU DE CARTES

a. Les événements A et B sont incompatibles car aucune carte ne peut être à la fois un As et une dame.

Les événements B et C ne sont pas incompatibles car ils contiennent tous deux la dame de trèfle.

b. \bar{C} : « On obtient un cœur, un carreau ou un pique. »

c. D : « On obtient un pique » est incompatible avec C.

4 ALGORITHME MONOLIGNE


L'univers est $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, il contient 4 éventualités.

5 MÉTÉO

Réponse d. 90 jours correspondent à un quart d'une année environ.

6 LOGIQUE

a. **Faux.** Avec l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé, les événements $\{1 ; 3 ; 5\}$ et $\{2 ; 4 ; 6\}$ ont la même probabilité égale à 0,5, mais ils sont différents.

 Pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire de donner un exemple pour lequel la proposition n'est pas vérifiée.

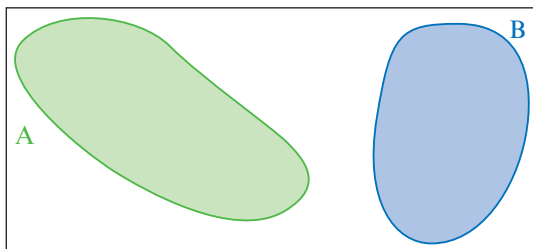
b. La proposition réciproque : « Si A et B sont égaux, alors ils ont la même probabilité » est vraie. En effet, si $A = B$, alors $P(A) = P(B)$.

 Pour prouver qu'une affirmation est vraie, un exemple ne suffit pas, il faut une démonstration.

7 ÉVÉNEMENTS INCOMPATIBLES

- a. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$. A et B sont incompatibles, donc $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,2 = 0,5$ et donc $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,5$.
- b. On a $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

👍 Ce résultat se retrouve avec un diagramme de Venn. Le grand rectangle ci-dessous représente l'univers Ω . A et B sont incompatibles, leur intersection est vide. On constate que $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$, donc $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\Omega) = 1$.



On obtient donc :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,8 + 0,5 - 1 = 0,3.$$

8 LA DAME DE PIQUE

On suppose que les tirages possibles sont équiprobables.

- a. 8 cartes sur 32 sont des piques, donc la probabilité de tirer un pique est $\frac{1}{4}$.
- b. 4 cartes sur 32 sont des dames, donc la probabilité de tirer une dame est $\frac{1}{8}$.
- c. La probabilité de tirer la dame de pique est $\frac{1}{32}$.
- d. La probabilité de tirer une dame ou un pique est $\frac{11}{32}$ (4 dames et 8 piques, mais la dame de pique ne doit être comptée qu'une seule fois).

👍 On peut aussi utiliser la méthode 3 : la probabilité de tirer une dame ou un pique est $\frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

9 JE VOUS AI APPORTÉ DES BONBONS

On suppose que les tirages de bonbons sont équiprobables.

- a. Les événements : « obtenir un bonbon au citron » et : « obtenir un bonbon à l'orange » étant incompatibles, la probabilité d'obtenir un bonbon au citron ou à l'orange est la somme des probabilités d'obtenir un bonbon au citron et d'obtenir un bonbon à l'orange : $\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{37}{56}$.
- b. Ainsi, la probabilité d'obtenir un bonbon à la fraise est égale à $1 - \frac{37}{56} = \frac{19}{56}$.

10 DO YOU SPEAK ENGLISH ?

1. Utilisons un tableau pour décrire la situation.

	Titulaires	Intérimaires	Total
Bilingue	12	14	26
Non bilingue	68	6	74
Total	80	20	100

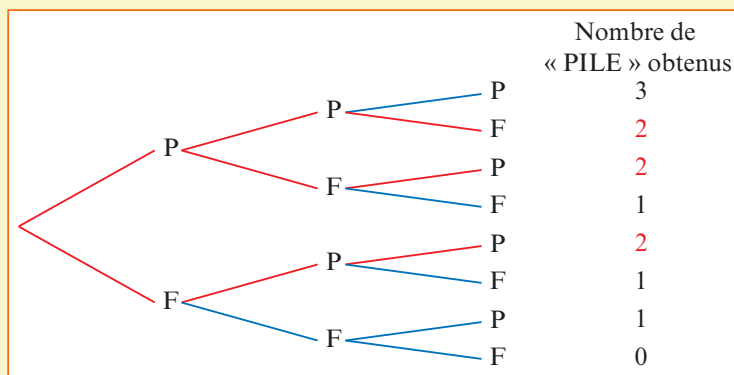
2. a. La probabilité qu'un intérimaire parlant anglais réponde est égale à $\frac{14}{100} = 0,14$.

b. La probabilité qu'un titulaire parlant anglais lui réponde est égale à $\frac{12}{100} = 0,12$.

c. La probabilité qu'une personne parlant anglais lui réponde est égale à $\frac{26}{100} = 0,26$.

3. Sachant que la personne qui répond parle l'anglais, la probabilité que ce soit un intérimaire est égale à $\frac{14}{26} = \frac{7}{13} \approx 0,54$.

11 PILE OU FACE ?



Parmi les huit chemins possibles, trois permettent d'obtenir exactement deux fois « PILE ».

Chaque branche porte la probabilité $\frac{1}{2}$, chaque chemin a une probabilité :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir deux fois « PILE » est égale à $\frac{3}{8}$.

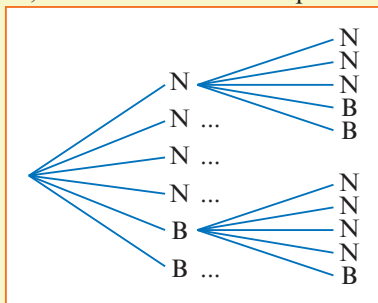


Si on note X_i ($i = 0$ ou 1 ou 2 ou 3) l'événement : « Obtenir exactement i fois PILE »,

on constate que $P(X_0) = \frac{1}{8}$; $P(X_1) = \frac{3}{8}$; $P(X_2) = \frac{3}{8}$; $P(X_3) = \frac{1}{8}$.

12 CHAUSSETTES SURPRISE

D'après l'arbre ci-dessous, le nombre de chemins possibles est $6 \times 5 = 30$.



Le nombre de chemins qui correspondent au tirage de deux chaussettes noires est $4 \times 3 = 12$.

Le nombre de chemins qui correspondent au tirage de deux chaussettes blanches est 2.

Ainsi la probabilité que les deux chaussettes soient de la même couleur est :

$$\frac{12 + 2}{30} = \frac{7}{15}$$

13 JEU DE LA BOULE

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. a. Seuls les numéros 4 et 6 sont à la fois pairs et rouges.

La probabilité d'obtenir

un numéro pair et rouge est égale à $\frac{2}{9}$.

b. Les numéros 1, 2, 4, 6, 8 et 9 sont soit pairs soit rouges.

La probabilité d'obtenir

un numéro pair ou rouge est égale à $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2. a. Il y a 9 possibilités par tirage, donc $9^3 = 729$ résultats possibles.

b. Cherchons tout d'abord la probabilité de ne jamais obtenir le numéro 5.

 On cherche la probabilité de l'événement contraire, comme souvent lorsque l'énoncé contient « au moins ».


Il y a 8 façons de ne pas obtenir le numéro 5 lors d'une partie, donc $8^3 = 512$ résultats ne contenant pas le numéro 5.

La probabilité de ne jamais obtenir le

numéro 5 est égale à $\frac{8^3}{9^3} = \frac{512}{729}$,

donc la probabilité d'obtenir au moins une fois le

numéro 5 est égale à $1 - \frac{512}{729} = \frac{217}{729}$.

 Pour visualiser la situation, imaginer un arbre qui contient 9 branches par génération et 3 générations. Voir la méthode 1.

14 EPS

On ajoute une ligne et une colonne de totaux :

Activité sportive	Gymnastique	Natation	Volley	Total
Filles	70	40	90	200
Garçons	20	60	70	150
Total	90	100	160	350

$$1. a. P(A) = \frac{90}{350} = \frac{9}{35} \quad b. P(B) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7} \quad c. P(C) = \frac{70}{350} = \frac{1}{5}$$

$$2. P(D) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}.$$

$$3. P(E) = \frac{70}{90} = \frac{7}{9}.$$

15 LES ADEPTES DU « NI NI »

On suppose que les tirages des abonnés pour le sondage sont équiprobables.
On note les événements T : « l'abonné lit la page Télévision » et S : « l'abonné lit la page Sports ».

Les données se traduisent par :

$$P(T) = 0,38, P(S) = 0,65 \text{ et } P(T \cap S) = 0,23.$$



La probabilité demandée est $P(\overline{T \cup S})$, on calcule d'abord la probabilité de l'événement contraire $P(T \cup S)$.

On cherche la probabilité qu'un abonné lise au moins une des deux pages, c'est-à-dire $P(T \cup S)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(T \cup S) &= P(T) + P(S) - P(T \cap S) \\ &= 0,38 + 0,65 - 0,23 = 0,8 \end{aligned}$$

On trouve donc $P(\overline{T \cup S}) = 1 - P(T \cup S) = 0,2$.

La probabilité qu'un abonné ne lise ni la page télévision ni la page sports est **0,2**.

16 DALTONIENS

a. On complète le tableau.

	Daltonien	Total
Femmes	120	4 800
Hommes	260	5 200
Total	380	10 000

b. La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit daltonienne est $\frac{380}{10\,000} = \mathbf{0,038}$.

17 UN BEAU CADEAU

Les événements suivants sont utilisés :

G : « le menhir est en granite »

T : « le menhir a été taillé »

D'après les données : $P(G) = 0,5$; $P(T) = 0,3$ et $P(G \cap T) = 0,2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(G \cup T) &= P(G) + P(T) - P(G \cap T) \\ &= 0,5 + 0,3 - 0,2 = 0,6. \end{aligned}$$

La probabilité qu'Obélix offre à Falbala un menhir taillé ou en granite est de 0,6.



La question étant posée par une phrase, on ne se contente pas des formules et du résultat, mais on donne une conclusion rédigée.

18 AVEC DEUX DÉS : SOMME DES POINTS

a. L'univers est $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$, il est constitué de onze éventualités.

b.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

c. Parmi les 36 cases du tableau, on observe la présence du 6 cinq fois.

Ainsi, la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 est $\frac{5}{36}$.

d. Parmi les 36 cases du tableau, on observe la présence d'un nombre supérieur ou égal à 6 vingt-six fois. Ainsi, la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 6 est $\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.



À la place d'un tableau, un arbre de dénombrement est utilisable. Voir la méthode 1.

19 LE JEU DU DUC DE TOSCANE

a. Liste des six décompositions possibles de 9 :

$$6 + 2 + 1 ; 5 + 3 + 1 ; 5 + 2 + 2 ; 4 + 4 + 1 ; 4 + 3 + 2 ; 3 + 3 + 3$$

Liste des six décompositions possibles de 10 :

$$6 + 3 + 1 ; 6 + 2 + 2 ; 5 + 4 + 1 ; 5 + 3 + 2 ; 4 + 4 + 2 ; 4 + 3 + 3$$

b. On copie la formule = ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) dans trois colonnes et 5 000 lignes pour simuler 5 000 lancers de trois dés.

Les totaux possibles vont de 3 à 18. La colonne G donne les fréquences pour chaque total possible.



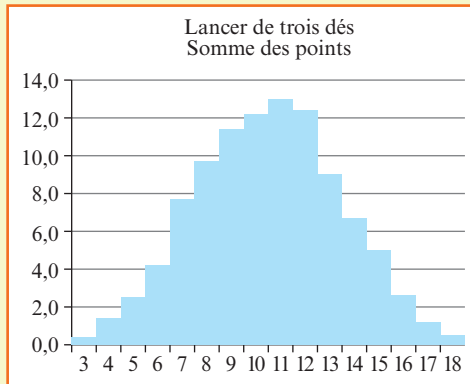
Par exemple, pour calculer la fréquence du 3 dans la cellule F2, on peut utiliser la formule :

$$= 100 * \text{NB.SI}(\text{D}\$2 : \text{D}\$5001 ; 3) / 5000.$$

- 100* au début permet d'écrire le résultat sous forme d'un pourcentage ;
- la fonction NB.SI permet de compter le nombre de cellules qui contiennent le nombre 3 dans la plage D2 : D5001 ;
- le symbole \$ permet de recopier cette formule sans modifier la plage utilisée.

Voici une copie d'écran du haut de la feuille de calcul :
(les résultats varient légèrement d'une simulation à une autre).

	A	B	C	D	E	F	G
1	1 ^{er} dé	2 ^e dé	3 ^e dé	Total des trois dés		Total	Fréquence (en %)
2	6	6	3	15		3	0,4
3	6	3	1	10		4	1,3
4	4	5	3	12		5	2,8
5	1	6	3	10		6	4,2
6	4	5	2	11		7	7,7
7	2	2	1	5		8	9,7
8	4	4	2	10		9	11,4
9	1	2	2	5		10	12,2
10	4	6	2	12		11	13,0
11	3	5	4	12		12	12,4
12	1	2	2	5		13	9,0
13	1	5	4	10		14	6,7
14	6	6	5	17		15	5,0
15	4	2	5	11		16	2,6
16	1	3	5	9		17	1,2
17	3	5	6	14		18	0,5
18	2	2	2	6			



c. Chaque résultat est un triplet composé de nombres de 1 à 6. À chaque lancer d'un dé, il y a six possibilités, ce qui donne au total $6^3 = 216$ triplets équiprobables.

La décomposition de 9 en $6 + 2 + 1$ est obtenue six fois avec les triplets :

$$(1,2,6) ; (1,6,2) ; (2,1,6) ; (2,6,1) ; (6,1,2) ; (6,2,1) .$$

De même pour les décompositions $5 + 3 + 1$ et $4 + 3 + 2$.

La décomposition de 9 en $5 + 2 + 2$ est obtenue trois fois avec les triplets :

$$(2,2,5) ; (2,5,2) ; (5,2,2) .$$

De même pour la décomposition $4 + 4 + 1$.


La décomposition de 9 en $3 + 3 + 3$ est obtenue une fois avec le triplet $(3, 3, 3)$.

Au total, la décomposition de 9 a été obtenue 25 fois.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 9 est égale à $\frac{25}{216} \approx 0,116$.

Avec un raisonnement identique, on obtient 27 fois une décomposition de 10.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 10 est égale à $\frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0,125$.

 Les fréquences observées lors de la simulation ont donné 11,4 % pour le 9 et 12,2 % pour le 10, valeurs qui approchent les probabilités théoriques trouvées ci-dessus.


Les six décompositions du 9 et du 10 ne sont pas équiprobables.

Par exemple, la décomposition $3 + 3 + 3$ est moins probable que la décomposition $4 + 3 + 2$, c'est ce qui explique les différences observées.

20 AVEC DEUX DÉS : PRODUIT DES POINTS

a.

```
S ← 0
Pour I de 1 à 1000
  A et B ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
  P ← AB
  S ← S + P
Fin Pour
M ← S/1000
```

 S est la somme de tous les produits obtenus.

M est la moyenne, obtenue en divisant par le nombre de calculs effectués.

b. L'algorithme modifié compte le nombre de fois où le produit obtenu est strictement supérieur à 10. L'affichage de F donne une valeur approchée de la probabilité d'obtenir un produit strictement supérieur à 10, en lançant deux dés.

 À l'aide d'un tableau à 36 cases similaire à celui de l'exercice 18, on peut calculer cette probabilité.

Le lecteur curieux vérifiera qu'on trouve $\frac{17}{36}$.


21 QCM

1. Réponse d.

2. Réponse c. On se réfère à l'arbre de choix de l'exercice 15.

La probabilité cherchée est la même qu'obtenir au moins deux fois « PILE ».

Il y a quatre chemins sur huit qui correspondent à la situation, donc la probabilité d'avoir au moins deux filles est $\frac{1}{2}$.

 Ici, il n'était pas avantageux d'utiliser l'événement contraire.

3. Réponse a. À chaque lancer, la probabilité ne change pas, elle est de 0,5.

22 COPIEURS !

	Copie	Original	Total
Test positif	180	382	572
Test négatif	20	9 408	9 428
Total	200	9 800	10 000

2. a La probabilité que cet article soit un original est égale à :

$$\frac{9\,800}{10\,000} = \mathbf{0,98}.$$

b. Le test étant négatif pour 96 % des originaux, la probabilité que le test soit positif sachant que l'article est un original est égale à 0,04.

c. La probabilité que l'article soit un original et que le test soit positif est égale à :

$$\frac{392}{10\,000} = \mathbf{0,0392}.$$

d. La probabilité que le test soit positif est égale à :

$$\frac{572}{10\,000} = \mathbf{0,0572}.$$

e. La probabilité que l'article soit un original lorsque le test est positif est :

$$\frac{392}{572} = \frac{\mathbf{98}}{\mathbf{143}}.$$



Le test n'est pas très efficace, les faux positifs sont trop nombreux.

f. La probabilité que l'article soit une copie lorsque le test est négatif est :

$$\frac{20}{9\,428} = \frac{5}{2\,453} \approx \mathbf{0,002}.$$



De ce côté-là, le test est très bon, il n'y a presque pas de faux négatifs.

23 AVEC TROIS DÉS

a.

N ← 0
 Pour I de 1 à **10 000**
 A, B et C ← nombre entier
 aléatoire entre 1 et 6
 P ← **ABC**
 Si **P ≥ 100** alors
 N ← **N + 1**
 Fin Si
 Fin Pour

b. La fréquence d'obtention d'un produit supérieur ou égal à 100 est :

$$\frac{1\,068}{10\,000} = 0,1068.$$

Ainsi, la probabilité de l'événement :
 « obtenir un produit supérieur ou égal à 100 » est proche de cette fréquence.



Cette conclusion est acceptable dès que le nombre de simulations est grand.

24 CONCOURS DE FLÉCHETTES

a. Calculs des aires (en cm^2) :

$$\text{Zone « 500 » : } 5^2\pi = 25\pi ;$$

$$\text{Zone « 200 » : } 10^2\pi - 5^2\pi = 75\pi ;$$

$$\text{Zone « 100 » : } 15^2\pi - 10^2\pi = 125\pi .$$

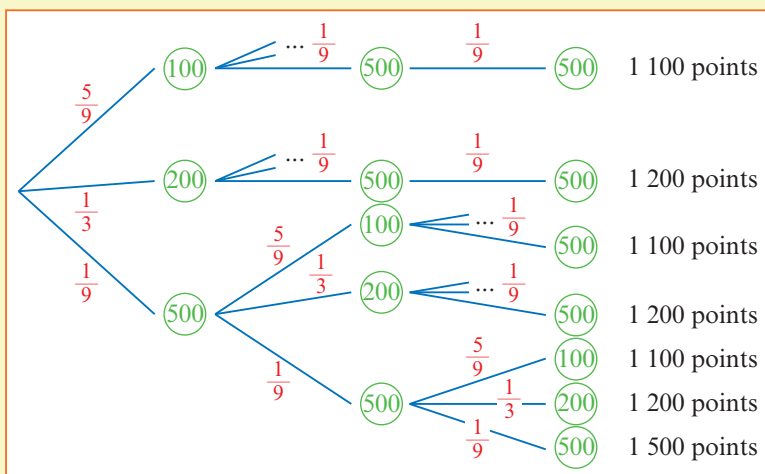
La somme des trois aires est 225π .


 Ne pas prendre de valeur approchée et utiliser des valeurs exactes.

$$\text{Calculs des probabilités : Zone « 500 » : } \frac{25\pi}{225\pi} = \frac{1}{9} ;$$

$$\text{Zone « 200 » : } \frac{75\pi}{225\pi} = \frac{1}{3} ; \text{ Zone « 100 » : } 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9} .$$

b. On réalise un arbre pour décrire la situation :



 Les chemins permettant d'obtenir plus de 1 000 points sont indiqués sur l'arbre. On multiplie les probabilités sur les différentes branches pour un chemin donné. Par exemple, la probabilité de faire 1100 points en touchant dans cet ordre les

$$\text{zones 100, 500, 500 est égale à : } \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} .$$

En ajoutant les probabilités ainsi calculées des différents chemins permettant d'obtenir au moins 1 000 points, on obtient :

$$\frac{5}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$$

La probabilité d'obtenir plus de 1 000 points lors d'une partie est égale à :

$$\frac{25}{729} \approx \mathbf{0,034} .$$

A, B

affine	121
algorithme	7
antécédent	91
base orthonormée	152
boucle conditionnelle	9
boucle itérative	9

C

carré	122
coefficient multiplicateur	233
coordonnées d'un vecteur	152
coordonnées du milieu d'un segment	177
cosinus	178
courbe représentative	91
croissance d'une fonction	92
cube	123

D

décimal	38
décroissance d'une fonction	92
déterminant	153
distance	177
diviseur	39

E

écart interquartile	236
écart-type	236
ensemble de définition	91
équation	62
équation de droite	205
équation réduite	205
équiprobabilité	261
événement	261
événement contraire	263

événements incompatibles	263
éventualité	261
évolution réciproque	234
expérience aléatoire	261
extremum	93

F

fonction affine	121
fonction carré	122
fonction cube	123
fonction inverse	124
fonction racine carrée	123
fonction valeur absolue	38

I

identités remarquables	61
image	91
impair	39
incompatibilité	263
inéquation	62
instructions	7
interquartiles	236
intersection	262
intervalle centré	38
intervalle fermé	37
intervalle ouvert	37
issue	261

M

maximum	93
médiane	235
minimum	93
module	10
moyenne arithmétique	234
moyenne pondérée	234
multiple	39

N

nombre décimal	38
nombre impair	39
nombre pair	39
nombre premier	39
nombre rationnel	38
norme d'un vecteur	151

P

pair	39
pente d'une droite	205
pourcentage	233
projeté orthogonal	177
puissances	61

Q, R

quartiles	235
rationnel	38
racine carrée	61
repère orthonormé	152
réunion d'événements	262

S, T, U

sinus	178
tangente	178
test	7
translation	151
univers	261

V

valeur absolue	38
variables	7
variations absolues	233
variations d'une fonction	92
variations relatives	233
vecteurs colinéaires	153
vecteur directeur	205
vecteurs opposés	151

100% EXOS

Maths

2^{de}

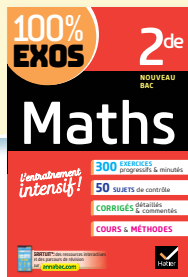
Pour un entraînement intensif sur mesure !

COURS & MÉTHODES	<ul style="list-style-type: none">● Le cours résumé facile à mémoriser● Des méthodes pour gagner en efficacité
EXERCICES & SUJETS	<ul style="list-style-type: none">● Des exercices progressifs avec 3 niveaux de difficulté● Des sujets de contrôle pour préparer ses devoirs sur table● Des exercices pour aller plus loin et préparer son entrée en 1^{re}
CORRIGÉS	<ul style="list-style-type: none">● Tous les corrigés détaillés et commentés● Avec des conseils d'enseignants

LA COLLECTION 100 % EXOS AU LYCÉE

Seconde NOUVEAU BAC

- Maths 2^{de}
- Physique-Chimie 2^{de}
- SVT 2^{de}



Première NOUVEAU BAC

- Maths 1^{re}
- Physique-Chimie 1^{re}
- SVT 1^{re}



Terminale

- Maths T^{le} S spécifique
- Maths T^{le} S spécifique & spécialité
- Maths T^{le} ES/L
- Physique-Chimie T^{le} S
- SVT T^{le} S

*Selon les conditions précisées sur annabac.com