COLLECTION MATHIZY

MATHS 2de

avec
450 exercices interactifs
pour s'entraîner

Des savoir-faire aux problèmes

Tout le programme en un
cahier

Ressources numériques

hachette-clic

Cahier numérique interactif

hachette
ÉDUCATION

Les indispensables pour bien démarrer

Je révise les points-clés du Collège
avec des **exercices interactifs**.

- **Calcul numérique** ▸ avant le chapitre 1
- **Calcul littéral** ▸ avant les chapitres 2, 3 et 4
- **Résolution d'équations** ▸ avant les chapitres 2, 3 et 4
- **Fonctions** ▸ avant les chapitres 5, 6, 7 et 8
- **Pourcentages et proportionnalité** ▸ avant les chapitres 13, 14 et 15
- **Géométrie** ▸ avant les chapitres 9, 10, 11 et 12

ou **hachette-clic.fr/22ma2000**

Je fais le bilan

Je m'entraîne sur tous les savoir-faire
avec des **exercices interactifs**.

Automatismes et calcul mental

Je valide mes réponses avec les **corrigés**.

QR-code et mini-lien dans chaque chapitre

COLLECTION MATHIZY

Cahier de MATHS 2de

Sous la direction de **Christophe Barnet**

Éric Barbazo

Benoît Lafargue

Sandrine Pollet

hachette
ÉDUCATION

Sommaire

Nombres et calculs

Fonctions

Géométrie

Statistiques et probabilités

Chapitre 1

Nombres entiers, nombres réels

1 Connaître les ensembles de nombres

- Un **nombre entier naturel** est un nombre entier positif (ou nul). L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- Un **nombre entier relatif** est un nombre entier positif ou négatif (ou nul). L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

1 Compléter par « est » ou « n'est pas ».

a. -2 .... un entier relatif.

b. $2{,}4$ .... un entier naturel.

c. 3 .... un entier relatif.

d. $\frac{3}{4}$ .... un entier naturel.

e. 0 .... un entier relatif.

2 Compléter avec le symbole $\in$ (appartient à) ou $\notin$ (n'appartient pas à).

a. 3 ...... $\mathbb{N}$ b. $3{,}4$ ...... $\mathbb{Z}$ c. -4 ...... $\mathbb{N}$

d. $\frac{3}{10}$ ...... $\mathbb{Z}$ e. -12 ...... $\mathbb{Z}$ f. $\frac{18}{2}$ ...... $\mathbb{N}$

g. 13 ...... $\mathbb{Z}$ h. $-\frac{13}{2}$ ...... $\mathbb{Z}$ i. $\frac{15}{5}$ ...... $\mathbb{Z}$

3 Vrai ou faux ?

a. La somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. V ☐ F ☐

b. La somme de deux entiers relatifs est un entier naturel. V ☐ F ☐

c. La différence entre deux entiers relatifs est un entier relatif. V ☐ F ☐

d. La différence entre deux entiers naturels est un entier naturel. V ☐ F ☐

- Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ ($a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$). Son écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

- Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un nombre entier relatif et q un nombre entier naturel non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- On considère une droite graduée. L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble des abscisses des points de cette droite. Il est noté $\mathbb{R}$.

4 Compléter par « est » ou « n'est pas ».

a. -2 .... un nombre rationnel.

b. $\frac{1}{3}$ .... un nombre décimal.

c. $\frac{3}{2}$ .... un nombre décimal.

d. $\frac{3}{4}$ .... un nombre réel.

5 Compléter avec le symbole $\in$ (appartient à) ou $\notin$ (n'appartient pas à).

a. 5 ...... $\mathbb{D}$ b. $-3{,}4$ ...... $\mathbb{D}$ c. $\sqrt{2}$ ...... $\mathbb{Q}$

d. $-\frac{7}{4}$ ...... $\mathbb{R}$ e. $\frac{9}{10}$ ...... $\mathbb{D}$ f. $1{,}5$ ...... $\mathbb{Q}$

g. $\frac{3}{4}$ ...... $\mathbb{D}$ h. $\sqrt{2}$ ...... $\mathbb{R}$ i. 3 ...... $\mathbb{R}$

6 Compléter le tableau par « Oui » ou « Non ».

appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-4					
$\frac{1}{3}$					
$\sqrt{3}$					
$\frac{3}{100}$					

7 MODE EXPERT ! Compléter avec le symbole $\subset$ (est inclus dans) ou $\not\subset$ (n'est pas inclus dans).

a. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{Z}$ b. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{N}$ c. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{R}$

d. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{D}$ e. $\mathbb{R}$ ...... $\mathbb{N}$ f. $\mathbb{Z}$ ...... $\mathbb{R}$

g. $\mathbb{R}$ ...... $\mathbb{D}$ h. $\mathbb{N}$ ...... $\mathbb{R}$ i. $\mathbb{D}$ ...... $\mathbb{Q}$

2 Déterminer des multiples et diviseurs

▸ a et b sont deux entiers naturels ($b \neq 0$). Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est déterminer les deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } r < b.$$

Les nombres q et r sont appelés respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de a par b. a et b s'appellent le **dividende** et le **diviseur** de cette division.

- Division euclidienne de 25 par 3 :
  $25 = 3 \times 8 + 1$, avec $1 < 3$.

8 Compléter les phrases suivantes.

a. La division euclidienne de 15 par 2 s'écrit :

$15 = 2 \times$ ...... + ... Le quotient de cette division euclidienne est ...... et le reste est ......

b. La division euclidienne de 32 par 3 s'écrit :

.... Le quotient de cette division euclidienne est ...... et le reste est ......

▸ Soient a et b deux nombres entiers relatifs (b non nul). S'il existe un entier relatif q tel que $a = bq$, on dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a ou que b **divise** a.

9 Vrai ou faux ?

a. 16 est divisible par 3. V ☐ F ☐

b. 18 est un multiple de 4. V ☐ F ☐

c. 9 divise 109. V ☐ F ☐

d. 13 486 est un multiple de 2. V ☐ F ☐

e. –3 est un diviseur de 321. V ☐ F ☐

10 Donner tous les diviseurs positifs de 36.

11 Donner tous les diviseurs de 34.

12 Donner tous les multiples de 7 compris entre 50 et 150.

13 Compléter le tableau suivant par « Oui » ou « Non ».

est un multiple de	2	3	5	9	10
243					
5 672					
2 433					
3 540					

▸ Un entier naturel a est **premier** s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

14 Parmi les nombres suivants, lesquels sont premiers ?

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 21 ; 23 ; 34 ; 37 ; 45 ; 47 ; 51

15 « La somme de deux nombres premiers est un nombre premier » : Vrai ou faux ?

▸ Tout nombre entier naturel s'écrit de **manière unique** (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de nombres premiers.

- $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

16 Entourer les égalités qui sont des décompositions en facteurs premiers correctes.

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ $\quad$ $216 = 2^2 \times 3^2 \times 6$

$3\,315 = 3 \times 5 \times 13 \times 17$ $\quad$ $3\,630 = 3 \times 11^2 \times 2 \times 5$

17 Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants.

a. 408 = ...

b. 3 465 = ...

c. 6 936 = ...

d. 7 644 = ...

e. 12 342 = ...

18 MODE EXPERT ! Combien y a-t-il de nombres premiers à deux chiffres dont la somme des chiffres vaut 8 ?

3 Caractériser les nombres pairs et impairs

Soit a un nombre entier relatif.
- a est **pair** si 2 est un diviseur de a, c'est-à-dire s'il existe un nombre entier relatif q tel que $a = 2q$.
- a est **impair** si 2 n'est pas un diviseur de a, c'est-à-dire s'il existe un nombre entier relatif q tel que $a = 2q + 1$.

19 Vrai ou faux ?

a. 2 est pair. V ☐ F ☐

b. 6 est impair. V ☐ F ☐

c. 217 est pair. V ☐ F ☐

d. 21 est impair. V ☐ F ☐

e. −16 est pair. V ☐ F ☐

f. 3 346 est impair. V ☐ F ☐

20 Donner tous les nombres pairs multiples de 3 compris entre 50 et 100.

21 Montrer que l'affirmation suivante est fausse en donnant un contre-exemple : « La somme de deux entiers impairs est un entier impair. »

22 Montrer que l'affirmation suivante est vraie : « La somme de deux entiers pairs est un entier pair. ». On pourra écrire le premier $2q$ et le second $2q'$, où q et q' sont des entiers relatifs.

23 Vrai ou Faux ? Justifier.

a. Pour tout nombre entier naturel n, $2n$ est un nombre pair.

b. Il existe un nombre entier naturel n tel que $3n$ soit un nombre impair.

c. Pour tout entier naturel n, $5n$ est un nombre impair.

d. Pour tout entier naturel n, $6n$ est un nombre pair.

24 Vrai ou faux ? Justifier.

« La somme de deux entiers impairs est un entier pair. »

25 MODE EXPERT ! Vrai ou faux ? Justifier.

1. « Le produit de 3 par un nombre impair est un nombre impair. »

2. « Le produit de deux entiers impairs est un entier impair. »

4 Calculer avec des fractions

▸ Tout nombre rationnel r a une **forme irréductible unique**, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b non nul tels que $r = \frac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur positif commun à a et à b soit 1.

• $\frac{42}{36} = \frac{7}{6}$

26 Donner la forme irréductible des nombres rationnels suivants.

a. $\frac{10}{6} =$ .... b. $\frac{12}{24} =$ .... c. $\frac{15}{35} =$ ....

d. $\frac{45}{21} =$ .... e. $\frac{63}{27} =$ .... f. $\frac{81}{48} =$ ....

▸ Pour additionner (ou soustraire) deux fractions :
- si elles n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur ;
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

27 Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

a. $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} =$ ....

b. $\frac{1}{3} - \frac{5}{6} =$ ....

c. $\frac{1}{10} + \frac{5}{3} =$ ....

d. $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} =$ ....

e. $2 + \frac{4}{3} =$ ....

▸ Pour multiplier deux fractions :
- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

28 Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} =$ .... b. $\frac{5}{7} \times \frac{2}{10} =$ ....

c. $\frac{35}{14} \times \frac{2}{7} =$ .... d. $2 \times \frac{3}{8} =$ ....

e. $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) =$ ....

▸ Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.
a, b, c et d désignent des nombres réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$
- $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$

29 Calculer et donner le résultat sous forme irréductible.

a. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} =$ .... b. $\dfrac{1}{\frac{3}{4}} =$ ....

c. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{7}} =$ .... d. $\dfrac{\frac{1}{3}}{4} =$ ....

30 Calculer et donner le résultat sous forme irréductible.

a. $\frac{7}{3} \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) =$ ....

b. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$ ....

c. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) =$ ....

d. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \frac{3}{4} =$ ....

31 MODE EXPERT ! Calculer et donner le résultat sous forme irréductible.

a. $\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) =$ ....

b. $\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \div \frac{10}{3}\right) \div \left(5 - \frac{3}{7}\right) =$ ....

▸ Pour calculer une fraction d'une grandeur, on multiplie la fraction par cette grandeur.

• Les deux tiers d'une bouteille de 75 cL représentent $\frac{2}{3} \times 75 \text{ cL} = 50 \text{ cL}$.

32 Léo a mangé les trois quarts d'une tablette de 200 g de chocolat. Quelle quantité de chocolat a-t-il mangée ?

5 Calculer avec des puissances

▸ Soient a un nombre réel non nul et n un entier strictement positif.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

▸ Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$

33 Vrai ou faux ?

a. $2^3 = 8$ V ☐ F ☐ b. $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ V ☐ F ☐

c. $3^0 = 3$ V ☐ F ☐ d. $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3}$ V ☐ F ☐

e. $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ V ☐ F ☐ f. $(-1)^2 = -1$ V ☐ F ☐

34 Calculer.

a. $2^4 =$ .... b. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 =$ .... c. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^0 =$ ....

d. $3^{-2} =$ .... e. $(-2)^3 =$ .... f. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} =$ ....

▸ Soient a un nombre réel non nul, et m et n deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

35 Vrai ou faux ?

a. $2^3 \times 2^5 = 2^8$ V ☐ F ☐

b. $3^4 \times 3^{-4} = 0$ V ☐ F ☐

c. $\dfrac{5^6}{5^4} = 5^{10}$ V ☐ F ☐

d. $\dfrac{3^7}{3^{-5}} = 3^{12}$ V ☐ F ☐

e. $\left((-4)^3\right)^2 = (-4)^5$ V ☐ F ☐

f. $(2^3)^{-5} = 2^{-15}$ V ☐ F ☐

36 Écrire les nombres suivants sous la forme a^n, où a est un nombre réel et n un entier relatif.

a. $2^3 \times 2^4 =$ .... b. $5^{-7} \times 5^6 =$ ....

c. $\dfrac{3^4}{3^9} =$ .... d. $\dfrac{4^6}{4^{-3}} =$ ....

e. $(7^3)^{-2} =$ .... f. $\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\right)^5 =$ ....

g. $(-2)^{-5} \times (-2)^2 =$ .... h. $\dfrac{(-7)^{-2}}{(-7)^{-4}} =$ ....

i. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-9} =$ .... j. $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 =$ ....

▸ Soient a et b deux nombres réels non nuls et m un entier relatif.

- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

37 Vrai ou faux ?

a. $2^4 \times 3^4 = 6^4$ V ☐ F ☐

b. $4^{-2} \times 3^{-2} = 12$ V ☐ F ☐

c. $\dfrac{2^4}{3^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ V ☐ F ☐

d. $\dfrac{6^2}{5^2} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2$ V ☐ F ☐

38 Écrire les nombres suivants sous la forme a^n, où a est un nombre réel et n un entier relatif.

a. $2^{-3} \times 3^{-3} =$ .... b. $\dfrac{(-2)^3}{7^3} =$ ....

c. $\dfrac{5^4}{3^4} =$ .... d. $(-3)^4 \times (-1)^4 =$ ....

▸ L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal non nul est $a \times 10^n$, où n est un nombre entier relatif et a est un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$ ou $-10 < a \leqslant -1$

- $3\,485 = 3{,}485 \times 10^3$

39 Entourer les nombres qui sont écrits en écriture scientifique.

a. 2×10^3 b. $0{,}4 \times 10^{-3}$

c. $-3{,}4 \times 10^{-6}$ d. $38{,}71 \times 10^5$

40 Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

a. $3\,786 =$ ....

b. $0{,}003 =$ ....

c. $35{,}698 =$ ....

d. $0{,}023\ 54 =$ ....

41 MODE EXPERT ! Calculer et donner le résultat en écriture scientifique.

a. $3{,}5 \times 10^{-2} + 5{,}2 \times 10^{-1}$

....

b. $32{,}56 \times 10^1 - 0{,}2 \times 10^3$

....

....

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

42 Donner la notation des ensembles suivants.

a. Ensemble des entiers naturels : ....

b. Ensemble des entiers relatifs : ....

c. Ensemble des nombres réels : ....

d. Ensemble des nombres rationnels : ....

e. Ensemble des nombres décimaux : ....

43 Vrai ou faux ?

a. 32 est un multiple de 6. V ☐ F ☐
b. 45 est un diviseur de 5. V ☐ F ☐
c. 123 est un multiple de 3. V ☐ F ☐
d. 134 est impair. V ☐ F ☐
e. 4 divise 44. V ☐ F ☐
f. 100 est un multiple de 10. V ☐ F ☐
g. 232 est pair. V ☐ F ☐

44 Parmi les nombres suivants, lesquels sont premiers ?
1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 10 ; 13 ; 17 ; 21 ; 23 ; 30

....

45 Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$ ....
b. $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$ ....
c. $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=$ ....
d. $\frac{3}{4}\div 3=$ ....

46 Vrai ou faux ?

a. $10^3\times 10^4=10^7$ V ☐ F ☐
b. $(3^4)^2=3^6$ V ☐ F ☐
c. $2^3\times 2^{-4}=2^{-12}$ V ☐ F ☐
d. $(2^3)^{-2}=2^{-6}$ V ☐ F ☐
e. $\frac{5^6}{5^3}=5^3$ V ☐ F ☐
f. $\frac{3^4}{3^{-2}}=3^2$ V ☐ F ☐

Parcours 2 MODE EXPERT !

47 Compléter par $\in$ ou $\notin$.

a. $\frac{1}{3}$ ..... $\mathbb{D}$
b. -2 ..... $\mathbb{N}$
c. $4,3$ ..... $\mathbb{Q}$
d. $\sqrt{2}$ ..... $\mathbb{Q}$
e. $-2,5$ ..... $\mathbb{R}$
f. $\frac{1}{4}$ ..... $\mathbb{D}$
g. $\sqrt{3}$ ..... $\mathbb{R}$
h. $\frac{12}{2}$ ..... $\mathbb{Z}$
i. $-3,7$ ..... $\mathbb{Z}$

48 Compléter par le mot « multiple » ou « diviseur ».

3 est un .... de 246. 639 est un .... de 9.

453 est un .... de 3. 5 est un .... de 125.

36 est un .... de 4.

49 Donner la liste des nombres premiers compris entre 1 et 30.

....

50 Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=$ ....
b. $\frac{4}{15}-\frac{2}{10}=$ ....
c. $\frac{6}{7}\times\frac{5}{2}=$ ....
d. $\frac{10}{9}\div\frac{5}{3}=$ ....
e. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 2=$ ....
f. $\frac{5}{4}\div 5-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=$ ....

51 Compléter les égalités suivantes par une puissance d'un nombre réel.

a. $10^3\times 10^2=$ ....
b. $\frac{2^4}{2^6}=$ ....
c. $3^5\times 3^{-3}=$ ....
d. $2^3\times 4^3=$ ....
e. $\frac{35^3}{7^3}=$ ....
f. $(2^3)^{-2}=$ ....
g. $\frac{3^2\times 3^5}{3^4}=$ ....
h. $\frac{2^{-5}\times 2^7}{2^{-3}}=$ ....

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

Corrigés des automatismes

ou
hachette-clic.fr/22ma2001

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

52 Rationnels et décimaux
Raisonner, calculer

Trouver un nombre décimal compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

53 Du chocolat
Raisonner, calculer

Jean rentre de l'école et mange $\frac{1}{4}$ d'une plaquette de chocolat.

Sa sœur, Gabrielle mange ensuite les $\frac{3}{4}$ de ce qu'il reste de la plaquette.

1. Quelle fraction de la plaquette reste-t-il ?

2. La plaquette pesait 200 grammes. Ils ont besoin de 30 g de chocolat pour un glaçage. Leur reste-t-il assez de chocolat pour leur recette ?

54 Le bus
Raisonner, calculer

257 élèves doivent faire une sortie scolaire. Les bus qui les transportent disposent de 55 places assises (sans compter le chauffeur). Il doit y avoir un accompagnant pour 20 élèves.

1. Combien faut-il réserver de bus ?

2. Combien de places libres restera-t-il ?

55 Les planètes
Calculer

Le tableau suivant donne les diamètres approximatifs de certaines planètes en km.

Mercure	$4{,}88 \times 10^3$
Terre	$1{,}28 \times 10^4$
Saturne	$1{,}16 \times 10^5$
Mars	$6{,}78 \times 10^3$
Neptune	$4{,}92 \times 10^4$
Jupiter	$1{,}40 \times 10^5$
Vénus	$1{,}21 \times 10^4$
Uranus	$5{,}07 \times 10^4$

Classer ces planètes de la plus grosse à la plus petite.

56 Produit de facteurs
Calculer

Voici deux décompositions en facteurs premiers :

$5\ 940 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$

$7\ 722 = 2 \times 3^3 \times 11 \times 13$

Donner la décomposition en facteurs premiers de $5\ 940 \times 7\ 722$.

57 Comparaison
Calculer

De 3×10^4 et 4×10^3, qui est le plus grand ?

58 Lycée
Calculer, raisonner

Dans un lycée, $\frac{7}{12}$ des élèves sont demi-pensionnaires et $\frac{1}{4}$ sont externes. Les autres élèves sont internes.

1. Quelle est la proportion d'élèves internes ?

2. Ce lycée compte 1 872 élèves. Donner les effectifs d'élèves de chaque catégorie.

59 Écriture scientifique
Calculer

Donner l'écriture scientifique de $\frac{4\times10^4\times9\times10^2}{3\times10^3}$.

60 Fraction irréductible
Calculer

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 16 500.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de 29 250.

3. En déduire la forme irréductible de $\frac{16\ 500}{29\ 250}$.

61 Des nombres parfaits
Calculer

Un entier naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs hormis lui-même. Montrer que 28 est un nombre parfait.

62 Fraction égales ?
Raisonner

Les nombres $\frac{3\ 154\ 255}{3\ 155\ 958}$ et $\frac{3\ 154\ 254}{3\ 155\ 957}$ sont-ils égaux ?

63 Des quotients et des restes
Chercher, raisonner, calculer

On choisit un nombre entier naturel. On effectue sa division euclidienne par 3 puis par 4. Le quotient est le même. Le reste de la première division est 2 et le reste de la seconde division est 1. Quel était le nombre de départ ?

64 Des puissances
Calculer

x est un nombre réel non nul. Écrire les nombres suivants sous la forme x^n, avec n un entier relatif.

a. $\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 =$

b. $\left(\frac{x^3}{x^{-4}}\right)^2 =$

c. $\frac{(x^5)^{-2}}{x^3\times x^{-4}} =$

Problèmes

65 Algo et Python

1. On souhaite écrire un programme permettant de compter le nombre de diviseurs positifs d'un entier naturel non nul. L'instruction a%b renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

Que renvoient les instructions suivantes ?

a. `10%2` : ....

b. `10%3` : ....

c. `10%7` : ....

2. L'instruction a==b teste si a est égal à b. Elle renvoie True si a est égal à b et False sinon.

Que renvoient les instructions suivantes ?

a. `2*3==6` : .... b. `2*10==19` : ....

3. Quelle instruction pourrait permettre de tester si un entier b est un diviseur d'un entier a ?

4. On a écrit ci-dessous une fonction en Python comptant le nombre de diviseurs positifs d'un entier naturel non nul (`range(1,n+1)` désigne tous les entiers de 1 à n).

```
1 def diviseurs(n):
2     compteur=0
3     for i in range(1,n+1):
4         if ...:
5             compteur=compteur+1
6         return(compteur)
```

a. Compléter les pointillés de la ligne 4.

b. Modifier cette fonction afin qu'elle renvoie True si l'entier n est premier et False sinon.

66 **Une égalité**
Calculer

x est un nombre différent de 1 et de −2.

Montrer que $\dfrac{3x^2+16x+8}{x^2+x-2} = \dfrac{5x+4}{x-1} - \dfrac{2x}{x+2}$.

67 **Un cadenas**
Raisonner, calculer

Un cadenas est formé de cinq rouleaux qui comportent chacun les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1. Combien de combinaisons sont possibles ?

2. Il faut deux secondes pour former une combinaison. Combien de temps faut-il pour essayer toutes les combinaisons ? Donner le résultat en heures, minutes et secondes.

68 **Pair ou impair ?**
Modéliser, raisonner

1. Le produit d'un nombre pair par un nombre impair est-il pair ou impair ?

2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(n+1)(n+2)$ est pair. On pourra d'abord étudier le cas où n est pair, puis le cas où n est impair.

69 Facteurs

Chercher, raisonner, calculer

Un facteur discute avec un professeur de mathématiques : « Quels âges ont vos trois filles ? »

« Le produit de leurs âges fait 36, et leur somme est le numéro de la maison d'en face. » répond le papa taquin. Le facteur réfléchit, puis dit « Vous n'oubliez pas quelque chose ? »

Ah si, dit le prof, vous avez raison j'ai oublié de préciser que l'ainée est blonde.

C'est bon, dit le facteur, je sais leurs âges alors !

Quels âges ont les trois filles ?

70 Dénombrer des nombres parfaits

Chercher, calculer

Un entier naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs hormis lui-même.

Combien y a-t-il de nombres parfaits inférieurs à 30 ?

71 Critère de divisibilité par 9

Raisonner, calculer, chercher

On considère un nombre N à trois chiffres dont le chiffre des unités est c, celui des dizaines b et celui des centaines est a.

1. a. Donner une expression de N en fonction de a, b et c.

b. Montrer que $N - (a + b + c)$ est un multiple de 9.

c. En déduire que N est un multiple de 9 si et seulement si $a + b + c$ est un multiple de 9.

2. Montrer que ce critère reste le même pour un nombre à quatre chiffres.

3. Montrer de la même manière le critère de divisibilité par 3 pour un nombre à trois chiffres.

72 La somme des chiffres

Raisonner

Combien y a-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres est égale à 6 ?

Démonstration

Raisonnement : implications et équivalences

P et Q désignent deux propositions, c'est-à-dire des affirmations qui sont soit vraies, soit fausses.
• Une **implication** s'écrit P $\Rightarrow$ Q (on lit « P implique Q »).
Cela signifie que si P est vraie, alors Q est vraie.
• Sa **réciproque** s'écrit Q $\Rightarrow$ P. Cela signifie que si Q est vraie, alors P est vraie.
Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse.
• Si P $\Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P, on dit que P et Q sont **équivalentes** et on écrit P $\Leftrightarrow$ Q.
On dit aussi que P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.
Exemple : L'implication « $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ » est vraie, car si n est un entier naturel, alors n est aussi un entier relatif. En revanche, sa réciproque, « $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathbb{N}$ », est fausse (par exemple, –3 appartient à $\mathbb{Z}$ mais il n'appartient pas à $\mathbb{N}$).

1. Soient a et b deux entiers relatifs. On veut démontrer que l'implication suivante est vraie :

« Si a et b sont pairs, alors $a + b$ est pair. »

a. Écrire cette implication à l'aide du symbole « $\Rightarrow$ ».

b. Démontrer cette implication.

2. a. Formuler la réciproque de l'implication précédente par une phrase, puis avec le symbole « $\Rightarrow$ ».

b. Donner un contre-exemple qui permet de prouver que cette implication réciproque est fausse.

Chapitre 2

Égalités et équations du 1er degré

1 Développer et réduire une expression

- Pour tous nombres réels a, b, c, d et k :
  - $k(a+b) = ka + kb$
  - $k(a-b) = ka - kb$
  - $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- **Développer** une expression, c'est la transformer en une somme ou une différence.
- **Réduire** une expression, c'est la simplifier au maximum.

1 Entourer les expressions qui sont sous forme développée.

a. $2(x+3)$ b. $3x - 1 + y$

c. $x^2 - 2x + x - 4$ d. $(x-2) - 2(x+3)$

e. $-4 + 3x^2$ f. $(3x-1)^2$

2 Développer les expressions suivantes.

a. $3(x+5) =$ ……

b. $-2(x+1) =$ ……

c. $5(2x-7) =$ ……

d. $(x+2)(y-3) =$ ……

e. $x(9-x) =$ ……

f. $(5c-1)(6d-1) =$ ……

3 Entourer les expressions qui sont sous forme développée et réduite.

a. $x(x-2)$ b. $-6x + 1$

c. $x^2 - x + 3x + 2$ d. $3(x-2) - (x+1)$

e. $5 - x^2$ f. $(x-2)^2$

4 Réduire les expressions suivantes.

a. $-3x + 1 + 8x - 3 =$ ……

b. $x - \frac{x}{2} =$ ……

c. $x^2 + 6 - (1 - x^2) =$ ……

d. $ab + 4b - 2ab + 9b =$ ……

e. $\frac{3y}{4} - \frac{y}{2} =$ ……

5 Développer et réduire les expressions suivantes.

a. $(2x-1) - (x+3)$ ……

b. $x(1-3x) + x^2$ ……

c. $(4x-1)(x-5)$ ……

d. $(5x-1) - 2(x+3)$ ……

e. $x(x-2) - (x+5)(x+1)$ ……

f. $(x-1)(x-2) + (x+5)(2x+1)$ ……

6 Tom et Faïda ont développé et réduit l'expression $E = (2x-5)(2x-3) - x(x+1)$.
Leur professeur leur dit qu'ils se sont tous trompés.

1. Souligner et corriger l'erreur de chaque élève.

Tom : $E = 2x^2 - 6x - 10x + 15 - x^2 - x = x^2 - 17x + 15$.

Faïda : $E = 4x^2 - 6x - 10x - 15 - x^2 - x = 3x^2 - 17x - 15$.

2. Donner la forme développée et réduite de E.

7 MODE EXPERT ! Développer et réduire.

1. $F = a(a+3)(4-a)$.

2. $G = \left(\frac{1}{4}x + 3\right)\left(-x + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{12}(x+1)$

2 Factoriser une expression

Factoriser une expression, c'est la transformer en un produit.
Pour tous nombres réels a, b et k :

$$\underbrace{ka+kb}_{\text{somme de } ka \text{ et } kb} = \underbrace{k(a+b)}_{\text{produit de } k \text{ par } (a+b)}$$

Le nombre k est un **facteur commun** aux deux termes de la somme $ka + kb$. On dit qu'on a factorisé la somme par k pour obtenir le produit.

8 Compléter chacune des égalités suivantes afin de factoriser l'expression de départ.

a. $4x + 8 = 4 \times$ ...... $+ 4 \times$ ...... $= 4($......$)$

b. $12 - 2x = 2 \times$ ...... $- 2 \times$ ...... $= 2 \times ($......$)$

c. $x^2 - 3x = x \times$ ...... $- x \times$ ...... $= x \times ($......$)$

d. $6x^2 + 18 =$ ...... $\times$ ...... $+$ ...... $\times$ ...... $=$ ...... $\times ($......$)$

e. $3xy - 6xz = 3x \times$ ...... $- 3x \times$ ...... $= 3x \times ($......$)$

f. $2x^2 - 5x =$ ...... $\times$ ...... $-$ ...... $\times$ ...... $=$ ...... $\times ($......$)$

g. $x^2 + x =$ ...... $\times$ ...... $+$ ...... $\times$ ...... $=$ ...... $\times ($......$)$

9 Factoriser les expressions suivantes.

a. $2x + 6 =$ ......

b. $7 - 7x =$ ......

c. $x^2 + 5x =$ ......

d. $x - x^2 =$ ......

e. $5x^2 - 10 =$ ......

f. $3ab - 2a =$ ......

10 Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont factorisées.

a. $3x^2 + 7$

b. $4x(5 + x)$

c. $8(x - 1)$

d. $x(x + 1) + 3$

e. $\pi R(R + h)$

f. $(x - 2)^2$

g. $a + ab$

h. $x[(x + 1) + x^2]$

11 Déterminer un facteur commun puis factoriser l'expression.

a. $x^2 + x(x - 5)$

b. $(x + 1)(x - 2) + (x + 1)(x + 13)$

c. $-2x^2 + 8x + 10$

d. $x^2 + x(3x + 1)$

e. $2\pi RH + 2\pi R^2$

12 MODE EXPERT ! Factoriser les expressions suivantes.

a. $xy^2 - x^2y$

b. $(7x - 1)(x - 2) - (x - 2)(5x + 9)$

c. $(x - 1)^2 + x - 1$

d. $x(2x + 4) + (x + 2)$

e. $(2x + 1)(3x - 6) + (4x - 8)(2x - 1)$

3 Utiliser des identités remarquables

▶ Soient a et b deux nombres réels.
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

13 Compléter les égalités suivantes afin de développer l'expression de départ.

a. $(x+6)^2 = \ldots^2 + 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2 = \ldots$

b. $(x-9)^2 = \ldots^2 - 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2 = \ldots$

c. $(x+11)(x-11) = \ldots^2 - \ldots^2 = \ldots$

d. $(5x-4)(5x+4) = (\ldots)^2 - \ldots^2 = \ldots x^2 - \ldots$

e. $(2x+\ldots)^2 = \ldots + 40x + 100$

f. $(\ldots - x)(\ldots + x) = 25 - \ldots^2$

14 Développer les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable.

a. $(x+2)^2 = \ldots$

b. $(x-3)^2 = \ldots$

c. $(x+7)(x-7) = \ldots$

d. $(2x-1)^2 = \ldots$

e. $(1-x)(1+x) = \ldots$

f. $(2+3x)^2 = \ldots$

g. $(-5x+3)^2 = \ldots$

h. $\left(4x+\sqrt{2}\right)\left(4x-\sqrt{2}\right) = \ldots$

15 Compléter les égalités suivantes afin de factoriser l'expression de départ :

a. $x^2 - 49 = x^2 - \ldots^2 = (x+\ldots)(x-\ldots)$

b. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2 = (x+\ldots)^2$

c. $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2 = (\ldots)^2$

d. $4x^2 - 12x + 9 = (\ldots)^2 - 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2$
$= (\ldots)^2$

e. $(x+1)^2 - 9 = (x+1)^2 - \ldots^2 = [(x+1)+\ldots][(x+1)-\ldots]$
$= (x+\ldots)(x-\ldots)$

f. $9x^2 + 30x + 25 = (\ldots)^2 + 2 \times \ldots \times \ldots + \ldots^2$
$= (\ldots)^2$

g. $x^2 - (3x-7)^2 = [x + (\ldots)][x - (\ldots)]$
$= (\ldots)(\ldots)$

16 Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable.

a. $x^2 - 16 = \ldots$

b. $x^2 + 2x + 1 = \ldots$

c. $x^2 - 10x + 25 = \ldots$

d. $x^2 - 7 = \ldots$

e. $4x^2 - 4x + 1 = \ldots$

f. $5 - 4x^2 = \ldots$

g. $9y^2 - 16x^2 = \ldots$

17 c est un nombre réel strictement positif. Donner, en fonction de c et sous forme développée, l'expression de l'aire d'un carré de côté $3c+2$.

18 Calculer mentalement, à l'aide d'une identité remarquable, le nombre $N = 1\,001^2 - 999^2$.

19 MODE EXPERT ! Dire si les expressions suivantes sont des différences ou des produits, puis factoriser les différences ou développer les produits.

a. $9x^2 - 17$

b. $\left(\frac{3}{4}x - 1\right)^2$

c. $4(x-3)^2 - 49$

4 Démontrer une égalité

▶ Pour démontrer qu'une égalité $A = B$ est vraie, on peut :
- transformer l'expression de A pour arriver à celle de B ;
- transformer l'expression de B pour arriver à celle de A.

20 Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout nombre réel x.

a. $\frac{10x+8}{2} = 5x + 4$

b. $(x-2)(x+3) - x^2 + 6 = x$

c. $x^2 + x + 1 = 1 + x(x+1)$

d. $(3x+1)^2 - 5 = 9x^2 + 6x - 4$

e. $x^2 - 2 = 2 + (x-2)(x+2)$

f. $\frac{3}{2}x + 1 - \frac{1}{4}x = \frac{5x+4}{4}$

21 Vrai ou Faux ?

a. Pour tout nombre réel x, $(x+3)^2 = x^2 + 9$.

b. Pour tout nombre réel x, $(1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$.

c. Pour tout nombre réel x, $x^2 + 2x - 5 = x(x+2) - 5$.

d. Pour tout nombre réel x, $\frac{12x-3}{3} = 4x - 3$.

e. Pour tout nombre réel x, $x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1$.

f. Pour tout nombre réel x, $(3 \times x)^2 = 3^2 + 6x + x^2$.

g. Pour tout nombre réel x différent de -1 et de 1 :

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

22 MODE EXPERT ! R et S étant deux nombres strictement positifs, démontrer que $\frac{1}{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)} = \frac{RS}{R+S}$.

▶ Pour démontrer qu'une égalité $A = B$ est vraie, on peut :
- transformer les expressions de A et de B pour arriver à une troisième expression C identique ;
- prouver que leur différence est égale à 0.

23 Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout nombre réel x.

a. $8 - 3(5x - 7) = 15(2 - x) - 1$

b. $(x-4)(x+2) - 5 = (x-1)^2 - 14$

24 MODE EXPERT ! Démontrer que $\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$.

5 Manipuler des égalités

> Soient a, b et c trois nombres réels, et d un réel non nul.
> - $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
> - $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$
> - $a = b \Leftrightarrow a \times d = b \times d$
> - $a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{d}$
>
> Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « **équivaut à** ».

25 x est un nombre réel.
Entourer les équivalences qui sont vraies.

a. $x + 11 = -2 \Leftrightarrow x = -9$

b. $x - 18 = 25 \Leftrightarrow x = 7$

c. $x = 4 \Leftrightarrow -3x = -12$

d. $3x = 5 \Leftrightarrow x = 2$

e. $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

26 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

b. $x + 1 = -3 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

c. $3x = 4 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

d. $2x = -9 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

e. $2x = -5 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

f. $-5x = 1 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

g. $-11x = -33 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

27 1. x et y sont des réels tels que $3x - 2y = 0$.
Exprimer y en fonction de x.

……………………………………………………

……………………………………………………

2. x, y sont des réels tels que $5x + 4y - 1 = 0$.
Exprimer x en fonction de y.

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3. a et b sont des réels tels que $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{7}$.
Exprimer a en fonction de b.

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

28 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $2x + 3 = 15 \Leftrightarrow 2x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

b. $-3x + 7 = 6x - 2 \Leftrightarrow -9x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

c. $\dfrac{x}{2} + x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{\ldots\ldots}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ldots\ldots}{2} = 1$
$\Leftrightarrow \ldots\ldots = 2 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

d. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \ldots\ldots = 3 \times 8 \Leftrightarrow 2x = \ldots\ldots$
$\Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

e. $\dfrac{x}{2} + 1 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

f. $\dfrac{2x}{5} = 6 \Leftrightarrow 2x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

g. $-6x - 7 = x \Leftrightarrow -6x \ldots\ldots = 7$
$\Leftrightarrow \ldots\ldots = 7 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

h. $\dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} \ldots\ldots = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{6} \ldots\ldots = 2$
$\Leftrightarrow \ldots\ldots = 2 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

29 MODE EXPERT ! $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon R, de périmètre P, et on note S l'aire du disque délimité par $\mathscr{C}$.

1. Exprimer R en fonction de P.

……………………………………………………

……………………………………………………

2. Exprimer R en fonction de S.

……………………………………………………

……………………………………………………

3. Exprimer S en fonction de P.

……………………………………………………

……………………………………………………

30 MODE EXPERT ! Compléter les équivalences suivantes.

a. x, y, p sont des réels et m est un réel non nul.

$y = mx + p \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

b. P, V, n, R et T sont des réels non nuls.

$PV = nRT \Leftrightarrow T = \ldots\ldots$

c. R, S, T et G sont des réels non nuls.

$\dfrac{R}{S} = \dfrac{T}{G} \Leftrightarrow G = \ldots\ldots$

d. x, y sont des réels et a est un réel différent de 1.

$x = ax + y \Leftrightarrow \ldots\ldots = y \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

6 Résoudre une équation du 1er degré

▶ Une **équation** d'inconnue x est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
▶ Une **solution** d'une équation d'inconnue x est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

31 Entourer les affirmations qui sont vraies.

a. 3 est solution de l'équation $x + 3 = 6$.

b. $-\frac{1}{2}$ est solution de l'équation $2x + 5 = 4$.

c. -1 est solution de l'équation $x^2 = 1$.

d. 0 est solution de l'équation $x - 5 = x + 1$.

e. $\frac{1}{4}$ est solution de l'équation $\frac{x}{2} = 2$.

f. -2 et 3 sont solutions de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.

▶ **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de tous les nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.
▶ On utilise les propriétés des égalités pour résoudre des équations.
▶ On utilise la notation des **ensembles** pour donner toutes les solutions (l'ensemble vide se note $\varnothing$).

32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions.

a. $-x + 3 = 5 \Leftrightarrow$

$\mathcal{S} = \{\ \ \}$

b. $6x - 19 = 5 \Leftrightarrow$

$\mathcal{S} = \{\ \ \}$

c. $7x - 5 = 10x - 2$

d. $\frac{x}{5} + 3 = \frac{1}{2}$

e. $\frac{x}{4} - 1 = x$

f. $3(x - 1) - 2x = x + 2$

33 Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 11x - 3$. Existe-t-il des nombres qui ont pour image $\frac{1}{4}$ par la fonction f ?

34 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions.

a. $10(x + 1) - \frac{5}{3}x = \frac{9}{2}$

b. $(x + 8)(x - 8) = (x - 16)(x + 4)$

c. $\frac{x + 1}{5} = \frac{3(x + 2)}{4}$

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

35 Développer.

a. $5(3-2x) =$ ……

b. $x(x+5) =$ ……

c. $(x+1)^2 =$ ……

36 Développer et réduire.

a. $(x+1)(x+5) =$ ……

b. $(x-2)(3x-1) =$ ……

c. $(x-9)^2 =$ ……

37 Factoriser.

a. $4x+6 =$ ……

b. $x^2-2x =$ ……

c. $x^2-16 =$ ……

38 Compléter.

a. $x=3 \Leftrightarrow x+5 =$ ……

b. $b=-4 \Leftrightarrow b-6 =$ ……

c. $2z=-10 \Leftrightarrow z =$ ……

39 Donner l'ensemble des solutions de chaque équation.

a. $2x-4=0$ $\mathcal{S} =$ ……

b. $6x=11$ $\mathcal{S} =$ ……

c. $-5x=20$ $\mathcal{S} =$ ……

40 Vrai ou faux ?

a. Si $T=3K+1$, alors $K=\dfrac{T-1}{3}$. ……

b. Si $v=\dfrac{d}{t}$, alors $d=\dfrac{v}{t}$. ……

Parcours 2 MODE EXPERT !

41 Développer.

a. $2x(3-8x) =$ ……

b. $(2x+1)^2 =$ ……

42 Développer et réduire.

a. $(4x-3)(4x+3) =$ ……

b. $(2x+1)(4-5x) =$ ……

c. $(3x-1)^2 =$ ……

43 Factoriser.

a. $3xy+6x^2 =$ ……

b. $4x^2-4x+1 =$ ……

c. $x^2-15 =$ ……

44 Compléter.

a. $3x=7 \Leftrightarrow 9x =$ ……

b. $2b=-9 \Leftrightarrow 2b+3 =$ ……

c. $\dfrac{y}{2}=-5 \Leftrightarrow y =$ ……

d. $\dfrac{2}{3}z=1 \Leftrightarrow z =$ ……

45 Donner l'ensemble des solutions de chaque équation.

a. $3x-4=x+1$ $\mathcal{S} =$ ……

b. $\dfrac{x}{4}-2=1$ $\mathcal{S} =$ ……

c. $6x+\dfrac{1}{2}=1$ $\mathcal{S} =$ ……

46 Vrai ou faux ?

a. Si $P=RI^2$, alors $I=\left(\dfrac{P}{R}\right)^2$. ……

b. Si $P=2\pi r$, alors $r=\dfrac{2P}{\pi}$. ……

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 6.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2002

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

47 Ça va, ça vient…
Modéliser, calculer, raisonner

Entre 2019 et 2020, la facture annuelle de gaz d'Arthur a baissé de 10 % pour atteindre 1 305 €. En 2021, cette facture est passée à 1 827 € !

1. Quelle était le montant de la facture de gaz d'Arthur en 2019 ?

2. Quel est le pourcentage d'augmentation de la facture entre 2020 et 2021 ?

48 Solides
Calculer

1. Un cône de hauteur h et de rayon r a pour volume V. Exprimer h en fonction de V et de r.

2. Une pyramide de hauteur h et dont la base est un carré de côté c a pour volume V.
Exprimer c en fonction de h et V.

49 L'IMC
Calculer

L'IMC (indice de masse corporelle) I d'une personne est égal au quotient de sa masse m en kilogrammes par le carré de sa taille T en mètres : $I = \frac{m}{T^2}$

1. Calculer l'IMC, arrondi au dixième, d'une personne pesant 65 kg et mesurant 1,70 m.

2. Exprimer m en fonction de I et de T.

3. Déterminer la taille d'une personne ayant un IMC égal à 25 et pesant 81 kg.

50 Location de voiture
Modéliser, calculer

Frédéric loue sa voiture à la journée sur Internet selon deux formules possibles :

- Formule A : un forfait de 50 € et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Formule B : 0,80 € par kilomètre parcouru.

Martine fait ses calculs et lui dit que, pour le trajet qu'elle doit effectuer, le prix sera le même. Combien de kilomètres Martine envisage-t-elle de parcourir ?

Problèmes

51 Expressions égales
Raisonner, calculer

1. Montrer que, pour tout réel x,
$$x^2 + 4x - 9 = (x - 1)(x + 2) + 3x - 7.$$

2. Montrer que, pour tout réel x,
$$(2x - 3)(x + 5) - 3x + 14 = 2(x + 1)^2 - 3.$$

3. Montrer que, pour tout réel x,
$$(x + 3)^2 + 4 = x^2 + 6x + 13.$$

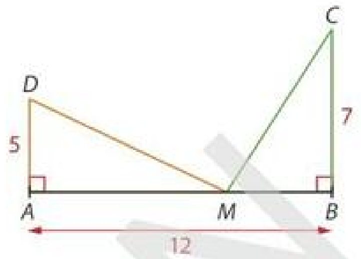
52 À l'oral
Calculer, modéliser, raisonner

Darius a obtenu les notes suivantes en anglais ce trimestre :
- 12 coefficient 3 ;
- 9 coefficient 2 ;
- 18 coefficient 1.

Sa professeure lui dit que sa moyenne va monter à 13 car la note d'oral qu'elle va lui mettre, coefficient 1, est excellente. Quelle est cette note ?

53 Des triangles rectangles
Calculer

Sur la figure ci-dessous, l'unité de longueur est le centimètre. $[AB]$ est un segment de longueur 12, et M est un point de ce segment.
Les triangles ADM et BCM ont la même aire.



Déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$.

54 Des nombres qui se suivent…
Modéliser, calculer

Quatre nombres entiers consécutifs ont pour somme 215 770. Quels sont ces nombres ?

55 Périmètre et aire d'un carré

Modéliser, calculer

Un carré a une aire égale à A. On note P son périmètre.

1. Exprimer P en fonction de A.

2. Exprimer A en fonction de P.

56 Un algorithme

Raisonner, calculer

On donne l'algorithme suivant en langage naturel.

$y \leftarrow x+6$
$y \leftarrow xy$
$z \leftarrow y+9$

1. Quelle valeur la variable z contient-elle si on donne à x :

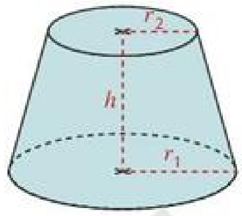
a. la valeur 7 ?

b. la valeur 12 ?

2. Prouver que si x prend n'importe quelle valeur dans l'ensemble $\mathbb{N}$, alors la variable z contient le carré d'un entier naturel.

57 Algo et Python

Une entreprise fabrique des flacons qui ont la forme d'un tronc de cône.



Le flacon doit contenir 100 mL de parfum, sa hauteur h est 6 cm et le rayon de la grande base est $r_1 = 3$ cm.

1. a. Le volume d'un tronc de cône est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right).$$

Compléter le script de la fonction ci-dessous qui prend les rayons r_1 et r_2 et la hauteur h comme arguments et qui renvoie le volume V.

```
from math import pi
def volume_flacon (…,…,…):
return(…)
```

b. Calculer `volume_flacon(3,0,6)`. Interpréter le résultat. En quoi est-ce un cas particulier ?

2. a. On souhaite déterminer une valeur de r_2 à 0,01 cm près telle que le flacon contienne 100 mL. En Python, pour exécuter une ou des instructions tant qu'une condition est vraie, on utilise une boucle « while ».

Compléter le script de la fonction ci-dessous, qui utilise la fonction `volume_flacon` précédente, afin qu'elle apporte une réponse à ce problème.

```
def rayon_supérieur():
r2=…
while volume_flacon(…)<100:
r2=r2+…
return…
```

b. Quelle valeur renvoie `rayon_supérieur()` ? Interpréter ce résultat.

58 Simplifier l'inverse
Raisonner, calculer

1. Développer $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$.

2. En déduire une valeur de l'inverse de $\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

3. Quel est l'inverse de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$?

59 Un programme de calcul
Modéliser, calculer

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre ;
- le multiplier par -8 ;
- ajouter 41 au résultat ;
- multiplier le résultat obtenu par 5 ;
- ajouter 82 au résultat.

1. Comment choisir le nombre de départ pour que le résultat soit 807 ?

2. Est-il possible de choisir un nombre de départ pour obtenir ce même nombre comme résultat du programme ?

60 Une fonction sous toutes ses formes
Raisonner, calculer

On pose, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$$

2. Calculer $f(3)$ en utilisant la forme la plus adaptée.

3. Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

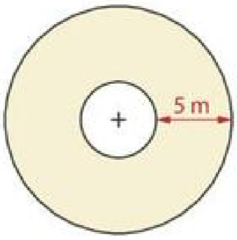
61 Équations et fractions
Calculer

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{x}{7} + \frac{3x+1}{14} = \frac{1}{28}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{4-x}{5} - \frac{5x+11}{10} = \frac{19}{15}$.

62 Le haras
Calculer, représenter

Héloïse possède un haras et souhaite concevoir pour ses chevaux un manège qui a la forme d'une couronne circulaire de 5 mètres de largeur. La couronne est la partie située entre le petit cercle de rayon r et le grand cercle de rayon R.



1. Exprimer l'aire de la couronne en fonction de r et R. Factoriser au maximum son expression.

2. Sachant qu'Héloïse veut que l'aire de la couronne soit de 150 m^2, calculer r et R.

63 Des impairs carrés
Chercher, raisonner, calculer

1. x étant un réel, développer $(x+1)^2 - x^2$.

2. En déduire que tout nombre entier impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

3. Écrire 7 et 19 comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

64 Le Grand Oral
Calculer, modéliser

Aurélie a passé son Grand Oral pour obtenir son baccalauréat. Avant cette épreuve qui comptait pour 10 %, sa moyenne sur l'ensemble des autres notes était de 11,7. Elle a obtenu finalement la mention « Assez bien » avec une moyenne de 12,03.

Combien Aurélie a-t-elle eu au Grand Oral ?

65 À trottinette…
Calculer, raisonner, modéliser

Chris se déplace entre chez elle et son travail à trottinette. Elle roule en moyenne à 15 km/h sur la première moitié de ce trajet.

1. Si v est sa vitesse sur la seconde moitié du trajet et V sa vitesse moyenne globale, justifier que $V = \dfrac{30v}{v+15}$.

2. Elle souhaite parcourir, le matin, les 5 km qui séparent son domicile de son travail en 15 minutes.

a. Quelle est alors sa vitesse moyenne ?

b. Quelle doit-être sa vitesse v sur la seconde moitié de son trajet pour atteindre cet objectif ?

Démonstration

Démo de cours

Pour tous les nombres réels a et b, on a :
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1. Soient a et b deux nombres réels.

a. Écrire $(a+b)^2$ sous la forme d'un produit.

b. Développer et réduire l'expression obtenue.

c. Conclure.

2. Montrer de la même manière la seconde égalité.

Chapitre

3 Inégalités et inéquations du 1er degré

1 Utiliser des intervalles et la valeur absolue

▸ Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.
- L'**intervalle** $[a\,;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$. Son **amplitude** est $b-a$.
- L'intervalle $[a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.
- L'intervalle $]-\infty\,;a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.
- Pour exclure une borne d'un intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur.
Par exemple, l'intervalle $]a\,;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$.
- $]-\infty\,;+\infty[$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1 Compléter les phrases suivantes.

a. L'ensemble des nombres réels x tels que $-2 \leqslant x \leqslant 3$ est l'intervalle ....

b. L'intervalle $]7\,;9{,}5]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que ....

2 Compléter le tableau suivant.

Inégalité	Intervalle
$-5 < x \leqslant 8$	$]-5\,;8]$
$2{,}5 \leqslant x < 10$	....
....	$]-5{,}5\,;-5]$
$x < 3$	....
$x \geqslant 5$	....
....	$\left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\right]$
....	$\left[-3\,;\frac{4}{9}\right]$

3 Compléter par $\in$ (appartient à) ou $\notin$ (n'appartient pas à).

a. 2 .... $]-4\,;+\infty[$ b. -2 .... $[4\,;+\infty[$

c. 3,4 .... $]3{,}5\,;+\infty[$ d. -7 .... $[-7\,;+\infty[$

e. $-2{,}5$ .... $[-2{,}7\,;3]$ f. 5 .... $]5\,;+\infty]$

▸ Soit x un nombre réel.
On appelle **valeur absolue de x**, et on note $|x|$, le nombre réel égal à $\begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.
- $|2| = 2\,;|-3| = 3$

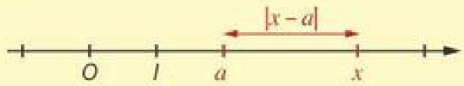
4 Compléter les égalités en exprimant les nombres donnés sans la notation de la valeur absolue.

a. $|14{,}5| =$ .... b. $|-7{,}8| =$ ....

c. $|8-3{,}5| =$ .... d. $|2{,}8-3| =$ ....

e. $|\sqrt{2}-1| =$ .... f. $|1-\sqrt{3}| =$ ....

▸ Soient a, x et r des nombres réels tels que $r > 0$.
- On appelle **distance entre les nombres a et x** le nombre $|x-a|$. Cette distance est aussi égale à $|a-x|$.



- $x \in [a-r\,;a+r]$ si et seulement si $|x-a| \leqslant r$.

5 1. Dans chaque cas, donner la distance entre les deux nombres proposés.

a. -3 et -7 ....

b. 2 et 7,3 ....

c. $-3{,}4$ et 0,7 ....

2. Traduire les inégalités suivantes à l'aide d'un intervalle.

a. $|x-2{,}5| \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow x \in$ ....

b. $|x-0{,}4| \leqslant 1{,}2 \Leftrightarrow x \in$ ....

c. $|x+3| \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in$ ....

6 MODE EXPERT ! Compléter par $\subset$ (est inclus dans) ou $\not\subset$ (n'est pas inclus dans).

a. $[2\,;3[$ .... $]-4\,;+\infty[$ b. $[3\,;3{,}5]$ .... $[3{,}2\,;4]$

2 Encadrer ou arrondir un nombre

▶ Soient x un nombre réel et n un nombre entier naturel.
Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}$.
Cet encadrement est l'**encadrement décimal** de x à 10^{-n} près.

- $0{,}333 \leqslant \frac{1}{3} < 0{,}334$ est l'encadrement décimal de $\frac{1}{3}$ à 10^{-3} près.

7 Parmi les encadrements suivants, entourer ceux qui sont des encadrements décimaux du nombre proposé à 10^{-2} près.

a. $1{,}3 \leqslant \frac{4}{3} < 1{,}34$

b. $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15$

c. $0{,}33 \leqslant \frac{1}{3} < 0{,}35$

d. $3{,}333 \leqslant \frac{10}{3} < 3{,}334$

e. $-0{,}34 \leqslant -\frac{1}{3} < -0{,}33$

f. $0{,}66 \leqslant \frac{2}{3} < 0{,}67$

g. $-0{,}637 \leqslant -\frac{7}{11} < -0{,}636$

h. $1{,}4 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}5$

8 Donner l'encadrement décimal de :

a. $2{,}139$ à 10^{-2} près : ....

b. $5{,}876$ à 10^{-1} près : ....

c. $\frac{4}{7}$ à 10^{-2} près : ....

d. $\frac{14}{11}$ à 10^{-1} près : ....

e. $-\frac{2}{3}$ à 10^{-2} près : ....

f. $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près : ....

g. $3\sqrt{3}$ à 10^{-3} près : ....

h. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 10^{-1} près : ....

i. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ à 10^{-1} près : ....

9 MODE EXPERT ! Soit $A = \frac{-2\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^{10}}$.

Donner l'encadrement décimal de A à 10^{-5} près.

....

▶ L'**arrondi** de x à 10^{-n} près est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ ou $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x lorsqu'il existe.
Par convention, lorsque x est à égale distance de $\frac{a}{10^n}$ et de $\frac{a+1}{10^n}$, l'arrondi de x à 10^{-n} près est $\frac{a+1}{10^n}$.

- $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ et $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$ sont des arrondis à 10^{-3} près.

10 Parmi les valeurs approchées suivantes, entourer celles qui sont l'arrondi à 10^{-2} près du nombre proposé.

a. $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$

b. $\pi \approx 3{,}14$

c. $\frac{1}{3} \approx 3{,}34$

d. $\frac{10}{3} \approx 3{,}333$

e. $-\frac{1}{3} \approx -0{,}33$

f. $\frac{2}{3} \approx 0{,}66$

g. $-\frac{7}{11} \approx -0{,}636$

h. $\sqrt{2} \approx 1{,}42$

11 Pour chacun des cas suivants, donner l'arrondi du nombre x à 10^{-n} près.

a. $x = \frac{4}{7}$; $n = 2$ ....

b. $x = \frac{14}{11}$; $n = 1$ ....

c. $x = -\frac{2}{3}$; $n = 2$ ....

d. $x = \sqrt{2}$; $n = 2$ ....

e. $x = 3\sqrt{3}$; $n = 3$ ....

f. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $n = 1$ ....

g. $x = -\sqrt{3}$; $n = 1$ ....

h. $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $n = 1$ ....

12 MODE EXPERT ! Soit $A = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} - 3\right)}{\frac{2}{3} + \sqrt{2}}$.

1. Donner l'encadrement décimal du nombre A à 10^{-3} près.

....

2. Peut-on en déduire l'arrondi du nombre A à 10^{-3} près ?

....

....

3. En déduire l'arrondi du nombre A à 10^{-2} près.

....

3 Manipuler des inégalités

> Soient a, b et c trois nombres réels.
> - $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
> - $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$

13 x est un nombre réel.
Les équivalences suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $x - 7 > -2 \Leftrightarrow x > -9$ V ☐ F ☐

b. $x + 8 < 5 \Leftrightarrow x < -3$ V ☐ F ☐

c. $x - 6 \leqslant -4 \Leftrightarrow x \geqslant 2$ V ☐ F ☐

d. $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3$ V ☐ F ☐

14 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $x - 2 > 3 \Leftrightarrow x > \ldots\ldots$

b. $x + 4 > -3 \Leftrightarrow x \ldots\ldots -7$

c. $3x - 2 \leqslant 4 \Leftrightarrow \ldots\ldots \leqslant 6$

15 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $-4x - 1 < x \Leftrightarrow -4x < \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots < 1$

b. $2x - 2 \leqslant x + 7 \Leftrightarrow 2x \ldots\ldots \leqslant 7 + 2 \Leftrightarrow \ldots\ldots \leqslant 9$

c. $3x + 7 > -2x + 1 \Leftrightarrow 3x \ldots\ldots > 1 - 7$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots > -6$

> Soient a, b et c trois nombres réels tels que $c \neq 0$.
> - Si $c > 0$:
>
> $a < b \Leftrightarrow a \times c < b \times c$ et $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
> - Si $c < 0$:
>
> $a < b \Leftrightarrow a \times c > b \times c$ et $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

16 x est un nombre réel.
Les équivalences suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$ V ☐ F ☐

b. $-3x < 12 \Leftrightarrow x < -4$ V ☐ F ☐

c. $\frac{1}{5}x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 20$ V ☐ F ☐

d. $7x \leqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{7}$ V ☐ F ☐

e. $-11x \leqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{11}{4}$ V ☐ F ☐

f. $-\frac{x}{2} > -1 \Leftrightarrow x < 2$ V ☐ F ☐

g. $\frac{3x}{5} \leqslant -21 \Leftrightarrow x \leqslant -35$ V ☐ F ☐

17 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $2x > 8 \Leftrightarrow x > \ldots\ldots$

b. $-3x \leqslant -3 \Leftrightarrow x \geqslant \ldots\ldots$

c. $\frac{1}{5}x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant \ldots\ldots$

d. $-\frac{x}{7} < -2 \Leftrightarrow x > \ldots\ldots$

e. $\frac{3}{4}x \leqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant \ldots\ldots$

f. $\frac{-2x}{5} \geqslant 7 \Leftrightarrow x \leqslant \ldots\ldots$

18 x est un nombre réel.
Compléter les équivalences suivantes.

a. $2x > 3 \Leftrightarrow x \ldots\ldots \frac{3}{2}$

b. $-3x \geqslant 6 \Leftrightarrow x \ldots\ldots -2$

c. $\frac{1}{5}x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \ldots\ldots 20$

d. $-\frac{3}{2}x < 7 \Leftrightarrow x \ldots\ldots -\frac{14}{3}$

e. $\frac{4x}{5} \leqslant -6 \Leftrightarrow x \ldots\ldots -\frac{15}{2}$

f. $\frac{-3x}{4} \leqslant 9 \Leftrightarrow x \ldots\ldots -12$

> Soient a, b, c et d quatre nombres réels.
> Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

19 x et y sont des nombres réels.
Compléter les implications suivantes.

a. $x > 3$ et $y > 5 \Rightarrow x + y > \ldots\ldots$

b. $x < -2$ et $y < 7 \Rightarrow x + y < \ldots\ldots$

c. $x - y > 2$ et $y > -2 \Rightarrow x > \ldots\ldots$

d. $-2x + 3y < -6$ et $2x < 4 \Rightarrow 3y < \ldots\ldots$

e. $-2x + 1 < 3$ et $3x + 7 < 2 \Rightarrow x + 8 < \ldots\ldots$

20 MODE EXPERT ! x et y sont des nombres réels.

« Si $2 < x < 3$ et $-1 < y < 5$, alors $-3 \leqslant x - y \leqslant 4$. »

Vrai ou faux ? Justifier.

....

....

....

....

....

4 Résoudre des inéquations du 1er degré

- Une **inéquation d'inconnue x** est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
- Une solution d'une inéquation d'inconnue x est une valeur de x pour laquelle l'inégalité est vraie.
  - 2 est solution de l'inéquation $3 + x < 10$ car $3 + 2 < 10$.

21 Vrai ou faux ?

a. 3 est solution de $x+3<4$. V ☐ F ☐

b. -2 est solution de $2x-5 \geqslant 6$. V ☐ F ☐

c. -1 est solution de $-3x+7>1$. V ☐ F ☐

d. -5 est solution de $3x-5 \leqslant 7x-4$. V ☐ F ☐

e. $-7{,}3$ est solution de $x<7(x+1)$. V ☐ F ☐

f. 1 est solution de $-3(x+1) \geqslant -6$. V ☐ F ☐

22 Compléter par « est solution de » ou « n'est pas solution de ».

a. $\frac{1}{3}$ .... $x+\frac{2}{3}<-2$.

b. $\sqrt{2}$ .... $x^2 \geqslant 1$.

c. $\frac{3}{4}$ .... $4x+7>9$.

d. -5 .... $3x-5 \leqslant 2x+3$.

e. 8,8 .... $-x<-2(x-1)$.

f. $-\frac{2}{3}$ .... $-2(2x-7) \geqslant 5x+3$.

- **Résoudre dans $\mathbb{R}$** une inéquation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.
- Pour résoudre des inéquations, on utilise les propriétés des **inégalités**. Pour décrire l'ensemble des solutions, on utilise des **intervalles**.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $2x+3 \leqslant 5 \Leftrightarrow$ ....

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =$ ....

b. $-5x+9<-7$ ....

c. $\frac{1}{3}x-5 \leqslant 2$ ....

d. $-\frac{x}{5}+3 \leqslant -\frac{8}{5}$ ....

e. $\frac{3x}{4}-1>\frac{2}{3}$ ....

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $2(x+1) \leqslant 5x-7$

b. $-3(2x-5)<5(-x+4)$

c. $(x+1)(x-1) \leqslant x^2-3x+4$

d. $3(-2x+3) > 2(5-3x)$

25 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ la double inéquation $-3 \leqslant \frac{2}{3}x+7<9$.

5 Comparer deux quantités

« **Comparer deux quantités** » signifie déterminer laquelle de ces deux quantités est la plus grande ou si elles sont égales.

26 Sans aucun calcul, comparer $2+\frac{1}{4}$ et $2,5+\frac{1}{3}$.

27 Soit x un réel strictement positif.
Comparer $-2x$ et $-3x$.

28 Soit x un réel strictement négatif.
Comparer $5x+6$ et $2x+7$.

29 MODE EXPERT ! Soit x un réel.
On souhaite comparer $-3(x^2+1)$ et $-4(x^2+2)$.

1. Montrer que $-3(x^2+1) > -4(x^2+1)$.

2. Montrer que $-4(x^2+1) > -4(x^2+2)$.

3. Conclure.

Pour **comparer deux quantités A et B**, on peut étudier le signe de leur différence : $A > B \Leftrightarrow A-B>0$.

30 Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$(x+2)^2 > 4x.$$

31 Soit x un réel. Comparer $(x+1)^2$ et $2x-1$.

Pour **comparer deux quantités A et B strictement positives**, on peut comparer leur quotient avec 1 :
$A > B \Leftrightarrow \frac{A}{B} > 1$.

32 Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0,5\times 2^n < 3\times 2^{n+1}.$$

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

33 Compléter.

a. Si $x>2$, alors $x+3$ ……

b. Si $x\leqslant -2$, alors $x+5$ ……

c. Si $x<-1$, alors $2x$ ……

d. Si $x\geqslant 5$, alors $-3x$ ……

34 Compléter.

a. L'encadrement décimal de 3,187 à 10^{-1} près est :

……

b. L'encadrement décimal de 5,256 à 10^{-2} près est :

……

c. L'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-3} près est ……

d. L'arrondi de $-\sqrt{2}$ à 10^{-2} près est ……

35 Compléter avec une valeur numérique.

a. $|2{,}5| =$ ……

b. $|-3{,}4| =$ ……

c. $|2{,}3+6{,}7| =$ ……

d. $|3{,}4-5{,}5| =$ ……

36 On donne des inéquations. Compléter.

a. $x+3>0$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

b. $x-2\leqslant 5$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

c. $6x<12$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

d. $-5x>20$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

37 Vrai ou faux ?

a. La distance entre 3,5 et 4,7 est 1,2. ……

b. La distance entre −5,7 et 2,3 est 3,4. ……

c. La distance entre −3,4 et −2,3 est 5,7. ……

Parcours 2

MODE EXPERT !

38 Compléter.

a. Si $x\leqslant -1$, alors $x-\frac{2}{5}$ ……

b. Si $x<\frac{1}{2}$, alors $3x$ ……

c. Si $x\geqslant -2$, alors $-3x$ ……

39 Compléter.

a. L'encadrement décimal de $\sqrt{2}$ à 10^{-1} près est :

……

b. L'encadrement décimal de $2\sqrt{7}$ à 10^{-3} près est :

……

c. L'encadrement décimal de $-\sqrt{3}$ à 10^{-2} près est :

……

d. L'arrondi de $-\frac{2\sqrt{11}}{2+\sqrt{3}}$ à 10^{-2} près est :

……

40 Compléter par une valeur exacte.

a. $|-\sqrt{2}| =$ ……

b. $|\pi| =$ ……

c. $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right| =$ ……

d. $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right| =$ ……

41 On donne des inéquations. Compléter.

a. $x-\frac{3}{4}>0$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

b. $x+\frac{2}{7}\leqslant 1$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

c. $\frac{1}{3}x<-5$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

d. $-\frac{3x}{4}>12$ $\quad\mathcal{S} =$ ……

42 Vrai ou faux ?

a. La distance entre $-\frac{1}{7}$ et $\frac{2}{21}$ est $\frac{5}{21}$. ……

b. La distance entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{4}$. ……

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2003

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

43 Abonnement
Raisonner, modéliser, calculer

Une salle de cinéma propose deux possibilités :

- chaque entrée coûte 7,50 € ;
- on paie un abonnement à l'année de 30 € et chaque entrée coûte alors 5,50 €.

Déterminer à partir de combien de séances dans l'année il vaut mieux s'abonner.

44 Poids du cartable
Raisonner, modéliser, calculer

Romane, qui pèse 48 kg, a un cartable pesant 2 kg. Chacun de ses manuels scolaires pèse entre 500 g et 750 g.

1. Romane doit mettre 6 manuels dans son cartable. Donner un encadrement du poids de son cartable.

2. Respecte-t-elle alors la recommandation des professionnels de santé de ne pas dépasser, pour son cartable, 10 % de son propre poids ?

45 À l'échelle
Raisonner, calculer

Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{300}$, Angélique mesure un bâtiment de son école, de forme rectangulaire. Elle trouve une largeur comprise entre 6,8 cm et 6,9 cm et une longueur comprise entre 10,4 cm et 10,5 cm.

1. Déterminer un encadrement des dimensions réelles de l'école d'Angélique.

2. Déterminer un encadrement du périmètre réel de son école.

46 Une moyenne
Calculer, modéliser, raisonner

Mehdi a eu 13 et 11 à ses deux premiers devoirs de mathématiques.
Quelle note minimale doit-il avoir au troisième et dernier devoir pour obtenir au moins 14 de moyenne ?

47 Proposition de salaire
Raisonner, modéliser, calculer

On propose à un commercial le choix entre deux types de salaire.

- **Proposition 1** : une partie fixe de 1 500 € et une partie égale à 10 % du montant de ses ventes mensuelles ;
- **Proposition 2** : 30 % du montant de ses ventes mensuelles.

À partir de quel montant de ventes mensuelles a-t-il intérêt à choisir la seconde proposition ?

48 Longueur d'un cercle
Calculer, raisonner

1. Donner l'encadrement décimal à 10^{-3} près de π.

2. En déduire l'encadrement décimal à 10^{-1} près de la longueur d'un cercle de rayon 4 cm.

49 Longueur inconnue
Calculer, raisonner

Le périmètre d'un rectangle est inférieur à 50 cm et sa longueur vaut le double de sa largeur.

Quelle largeur peut-il avoir ?

50 Comparaison
Raisonner, calculer

Soit n un entier naturel.

Montrer que $1\,000 \times 1{,}02^{n} > 500 \times 1{,}02^{n+1}$.

51 Un programme de calcul
Calculer, raisonner

Voici un programme de calcul :

- choisir un nombre,
- le multiplier par -5,
- puis ajouter 3 au résultat.

Dans quel ensemble choisir le nombre de départ pour obtenir un résultat positif ou nul ?

52 Une fonction
Raisonner, calculer

On pose, pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = (x-1)(x+3) = (x+1)^2 - 4.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant -4$.

53 Algo et Python

Un bowling propose trois tarifs différents.

- un paiement à la partie ;
- une carte d'abonnement annuel payante permettant de payer la partie moins cher ;
- un pass annuel permettant de jouer autant de parties que l'on veut.

Solène voudrait écrire une fonction qui lui indiquerait quelle formule choisir selon le nombre de parties que l'on prévoit dans l'année. Elle a commencé par les trois fonctions ci-contre.

```python
def tarif_1(x):
    return (7*x)
def tarif_2(x):
    return(50+5*x)
def tarif_3(x):
    return(250)
```

1. À l'aide de ces trois fonctions, décrire chacun des trois tarifs.

2. Son professeur lui indique qu'il faut maintenant créer une quatrième fonction permettant de déterminer quel tarif est le plus intéressant. Il lui propose la structure suivante.

```python
def tarif(x):
    if tarif_1(x)<tarif_2(x):
        if tarif_1(x)<tarif_3(x):
            return("tarif 1")
        else:
            return("...")
    else:
        if tarif_2(x)<tarif_3(x):
            return("...")
        else:
            return("...")
```

Compléter cette fonction afin qu'elle renvoie le tarif le plus intéressant selon la valeur de x.

3. À l'aide de cette fonction, déterminer le tarif le plus intéressant selon le nombre de parties envisagées à l'année.

54 Le nombre d'or

Raisonner, calculer

Le nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé « nombre d'or ».

1. Donner l'encadrement décimal à 10^{-3} près de $\sqrt{5}$ puis de ϕ.

2. On sait que le nombre ϕ vérifie l'égalité $\phi^2 = \phi + 1$. En déduire l'encadrement décimal de ϕ^2 à 10^{-3} près.

55 D'un encadrement à un arrondi…

Chercher, raisonner, calculer

Sacha possède une ficelle dont la longueur est comprise entre 3,28 m et 3,29 m.

1. Donner un encadrement à 0,01 près, en mètres, du diamètre du cercle que Sacha peut fabriquer avec sa ficelle.

2. Donner l'arrondi à 0,01 près, en mètres, du rayon de ce cercle.

56 Association

Chercher, communiquer, calculer

Associer chaque problème à une inéquation parmi celles proposées en précisant ce que désigne l'inconnue, puis le résoudre.

Problèmes :

① On cherche un nombre tel que le produit par 3 de la somme de ce nombre et de 4 soit strictement supérieur à 7.

② On cherche un nombre dont le produit par 4 augmenté de 7 est strictement inférieur à 3.

③ On cherche la hauteur d'un parallélépipède rectangle dont la largeur vaut 3 cm, longueur 4 cm et le volume est strictement supérieur à 7 cm^3.

④ On cherche un nombre dont la somme avec 3, multipliée par 4, est strictement inférieure à 7.

⑤ On cherche la hauteur d'un cylindre dont l'aire de la base vaut $\frac{3}{4}$ dm^2 et dont le volume est strictement inférieur à 7 dm^3.

⑥ On cherche des nombres dont le produit par $\frac{3}{4}$ diminué de 7 est strictement positif.

Inéquations :

ⓐ $4x + 7 < 3$ ⓑ $4(x + 3) - 7 < 0$ ⓒ $\frac{3}{4}x > 7$

ⓓ $\frac{3}{4}x < 7$ ⓔ $12x > 7$ ⓕ $3(x + 4) - 7 > 0$

57 À égalité

Chercher, calculer

Montrer que $\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$.

58 Comparaison

Chercher, calculer

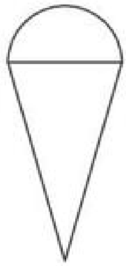
On pose $A = \dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$ et $B = \dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$.

Comparer A et B.

59 Cône de glace

Chercher, communiquer, calculer, raisonner

On considère le solide ci-contre composé d'une demi-boule et d'un cône de révolution. La hauteur totale de ce solide mesure 9 cm et le diamètre de la boule 4 cm.



1. Donner l'encadrement décimal à 10^{-2} près de π.

2. En déduire un encadrement du volume de ce solide.

3. Peut-on en déduire l'encadrement décimal du volume de ce solide à 10^{-1} près ?

Démonstration

Raisonnement : le contre-exemple

Pour démontrer qu'une proposition mathématique est fausse, on peut utiliser un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple qui montre qu'elle est fausse au moins dans un des cas.

1. « a, b, c et d sont quatre nombres réels. Si $a < b$ et $c < d$ alors $a - c < b - d$. »
Montrer que cette proposition est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

2. « a, b, c et d sont quatre nombres réels strictement positifs. Si $a < b$ et $c < d$ alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. »
Montrer que cette proposition est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

Chapitre 4

Compléments sur les équations et inéquations

1 Résoudre des équations produits

▸ Un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un au moins de ces deux nombres est nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

- $(x-1)(x+6) = 0$
  $\Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $x+6 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -6$
  donc $\mathscr{S} = \{1\,;-6\}$.

1 Entourer la ou les affirmations qui sont vraies.

a. 3 est solution de l'équation $(x+3)(x-1) = 0$.

b. 0 est solution de l'équation $x(x+1) = 0$.

c. -1 est solution de l'équation $(x+1)(x-1) = 5$.

d. 1 et 2 sont solutions de l'équation $(x-1)(x+2) = 0$.

e. 2 et $-1{,}5$ sont solutions de l'équation $(x-2)(2x+3)$.

2 Parmi les expressions suivantes, entourer celle ou celles qui sont des produits.

a. $2x+4$

b. $-5x$

c. $3(x-4)$

d. x^2-9

e. $(x+3)(x-2)$

f. $x(x-7)$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $(x-6)(x+5) = 0$

b. $(2x-4)(3x-9) = 0$

c. $x(x+8) = 0$

4 1. Factoriser $2(x-1) - x(x-1)$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $2(x-1) - x(x-1) = 0$.

5 1. Factoriser $(x-3)^2 - 7(x-3)$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(x-3)^2 - 7(x-3)$.

6 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-7)^2 - 16 = 0$.

2 Résoudre des équations quotients

- Le quotient $\frac{A}{B}$ n'existe que si $B \neq 0$.
- Si $B \neq 0$, $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
  - On veut résoudre $\frac{2x-1}{3x-6} = 0$.
    $3x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq 6 \Leftrightarrow x \neq 2$
    Si $x \neq 2$, $\frac{2x-1}{3x-6} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
    Comme $\frac{1}{2} \neq 2$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

7 Entourer la ou les affirmations qui sont vraies.

a. 1 est solution de $\frac{1}{x-2} = 0$.

b. 1 est solution de l'équation $\frac{x}{x-1} = 0$.

c. 0 est solution de l'équation $\frac{x}{x+3} = 0$.

d. 2 est solution de l'équation $\frac{x+3}{x+5} = 0$.

e. −4 est solution de l'équation $\frac{2x+8}{x} = 0$.

f. 3 est solution de l'équation $\frac{x-3}{x+1} = 0$.

g. 1 est solution de l'équation $\frac{x-1}{2x-2} = 0$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\frac{x-1}{x+2} = 0$

b. $\frac{2x+6}{x-4} = 0$

c. $\frac{5x-15}{x-3} = 0$

- Si $B \neq 0$, $\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \Leftrightarrow A = C$.
- Si $B \neq 0$ et $D \neq 0$, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{7}{x-3}$

b. $\frac{7x+2}{2x-10} = \frac{4}{3}$

c. $\frac{7x-3}{7x-7} = \frac{3x+5}{3x-3}$

10 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2.$$

3 Résoudre des inéquations produits

Pour **étudier le signe d'un produit** $A(x) \times B(x)$, on étudie séparément le signe de $A(x)$ et de $B(x)$. On résume ces résultats dans un tableau de signes.

- On veut étudier le signe de $(x-1)(x+2)$.
  $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-1)(x+2) \geqslant 0$, qui est la réunion des intervalles $]-\infty\,;2]$ et $[1\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{S} =]-\infty\,;2] \cup [1\,;+\infty[$.

11 Entourer les affirmations qui sont vraies.

a. 3 est solution de l'inéquation $(x+3)(x-1) > 0$.

b. -2 est solution de l'inéquation $x(x+1) \leqslant 0$.

c. -1 est solution de l'inéquation $(x+1)(x-1) \geqslant 0$.

12 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-10)(x+7) > 0$.

1. a. Résoudre l'inéquation $2x-10 \geqslant 0$.

b. Résoudre l'inéquation $x+7 \geqslant 0$.

2. Compléter le tableau de signes suivant à l'aide des résolutions précédentes.

x	$-\infty$ .... $+\infty$		
Signe de $2x-10$	......	......	......
Signe de $x+7$	......	......	......
Signe de $(2x-1)(x+7)$	......	......	......

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(2x-10)(x+7) > 0$.

4. À l'aide du même tableau, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-10)(x+7) \leqslant 0$.

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $(4x-1)(-2x+4) \leqslant 0$

b. $(-x+9)(-5x-3) < 0$

c. $2x(x+3) > 0$

Pour résoudre certaines inéquations, on peut se ramener à l'étude du signe d'un produit.

14 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \geqslant 36$.

4 Résoudre des inéquations quotients

▸ Pour **étudier le signe d'un quotient** $\frac{A(x)}{B(x)}$, on étudie séparément le signe de $A(x)$ et de $B(x)$. On résume ces résultats dans un tableau de signes.

▸ Le quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ n'existe que si $B(x) \neq 0$. On symbolise la ou les « valeurs interdites » par une double barre dans le tableau de signes.

- On veut étudier le signe de $\frac{x-1}{x+2}$.

$x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\frac{x-1}{x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

15 Entourer la ou les affirmations qui sont vraies.

a. 3 est solution de l'inéquation $\frac{2x-3}{x-4} > 0$.

b. -2 est solution de l'inéquation $\frac{x}{5x-2} \geqslant 0$.

c. -1 est solution de l'inéquation $\frac{3-x}{2x-1} < 0$.

16 On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{2x+12}{x-5} \geqslant 0.$$

1. Compléter : $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq$ ……

2. a. Résoudre l'inéquation $2x+12 \geqslant 0$.

b. Résoudre l'inéquation $x-5 \geqslant 0$.

3. Compléter le tableau de signes suivant à l'aide des résolutions précédentes.

x	$-\infty$ …… …… $+\infty$		
Signe de $2x+12$	……	……	……
Signe de $x-5$	……	……	……
Signe de $\frac{2x+12}{x-5}$	……	……	……

4. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de :

a. l'inéquation $\frac{2x+12}{x-5} \geqslant 0$;

b. l'inéquation $\frac{2x+12}{x-5} \leqslant 0$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $\frac{1-x}{x-8} \geqslant 0$

b. $\frac{2x-2}{5x-20} \geqslant 0$

c. $\frac{x^2}{3x-9} \leqslant 0$

▸ Pour résoudre certaines inéquations, on peut se ramener à l'étude du signe d'un quotient.

18 MODE EXPERT ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{4}{x} \geqslant 2$.

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

19 Compléter.

a. $(x-3)(x-2)=0$: $\mathcal{S}=$ ……

b. $x(x+5)=0$: $\mathcal{S}=$ ……

c. $\dfrac{x-4}{x-1}=0$: $\mathcal{S}=$ ……

d. $\dfrac{x+6}{x}=0$: $\mathcal{S}=$ ……

20 a. Factoriser $5x-x^2$.

……

b. En déduire l'ensemble des solutions de $5x-x^2=0$.

……

21 a. Compléter le tableau.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Signe de $10-2x$		……		……	0	……	
Signe de $5x-10$		……	0	……		……	
Signe de $(10-2x)(5x-10)$		……	0	……	0	……	

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(10-2x)(5x-10)\geqslant 0$.

……

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(10-2x)(5x-10)<0$.

……

Parcours 2

MODE EXPERT !

22 Compléter.

a. $(2x-5)(x-4)=0$: $\mathcal{S}=$ ……

b. $x(3x+1)=0$: $\mathcal{S}=$ ……

c. $\dfrac{5x-35}{7x-56}=0$: $\mathcal{S}=$ ……

d. $\dfrac{6}{x-3}=0$: $\mathcal{S}=$ ……

23 a. Factoriser $25-x^2$.

……

b. En déduire l'ensemble des solutions de $25-x^2=0$.

……

24 a. Compléter le tableau.

x	$-\infty$	……	……	$+\infty$
Signe de $7-6x$	……	……	……	
Signe de $3-2x$	……	……	……	
Signe de $\dfrac{7-6x}{3-2x}$	……	……	……	

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{7-6x}{3-2x}\geqslant 0$.

……

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{7-6x}{3-2x}<0$.

……

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 4.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2004

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

25 Une équation du second degré
Calculer

On veut résoudre l'équation $x^2+2x=0$.

1. Factoriser x^2+2x.

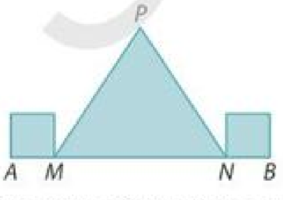
2. En déduire la ou les solutions de l'équation $x^2+2x=0$.

26 Trottinette
Modéliser, calculer

Sandy doit parcourir 2 km en trottinette. Sachant que la vitesse de sa trottinette est limitée à 25 km/h, combien de temps mettra-t-elle au minimum ?

27 Logo
Représenter, modéliser, calculer

Le logo d'une entreprise a la forme ci-après. Il est formé de deux carrés identiques et d'un triangle isocèle dont la hauteur issue de P est le triple du côté des carrés.



Le segment $[AB]$ mesure 12 cm et on souhaite que l'aire du logo soit égale à 32 cm².

1. On note x la longueur AM en cm.

a. À quel intervalle x appartient-il ?

b. Calculer MN en fonction de x.

c. En déduire l'aire du triangle MPN en fonction de x.

d. Montrer que l'aire du logo est égale à $-x^2+18x$.

2. a. Montrer que l'aire du logo peut s'écrire $81-(x-9)^2$.

b. Montrer qu'une équation modélisant le problème est $(x-9)^2-49=0$.

c. Factoriser $(x-9)^2-49$ à l'aide d'une identité remarquable.

d. En déduire la résolution de l'équation de la question b.

e. Conclure.

28 Une autre équation du second degré
Calculer

On veut résoudre l'équation $x^2+4x-5=0$.

1. Développer $(x-1)(x+5)$.

2. En déduire les solutions de l'équation $x^2+4x-5=0$.

29 Carré ou cube ?
Raisonner, modéliser, calculer

On souhaite savoir si l'affirmation suivante est vraie : « Le cube d'un nombre réel positif est toujours plus grand que son carré ».

Soit x un nombre réel positif.

1. Quelle inéquation faut-il résoudre pour trouver les réels x dont le cube est plus grand que le carré ?

2. Montrer que cette inéquation est équivalente à $x^2(x-1)>0$.

3. Résoudre cette inéquation.

4. Conclure.

30 Encore du second degré !
Calculer

1. On cherche à résoudre l'équation $x^2-2x-15=0$.

a. Développer $(x-1)^2-16$.

b. Factoriser $(x-1)^2-16$.

c. En déduire la ou les solutions de l'équation $x^2-2x-15=0$.

2. Résoudre l'inéquation $x^2-2x-15\leqslant 0$.

31 Terrain à modifier
Raisonner, calculer, modéliser

Un terrain rectangulaire mesure 12 m sur 8 m. Afin de créer un chemin d'accès, on souhaite diminuer sa largeur et augmenter sa longueur en conservant la même surface.

1. Quelle est l'aire du terrain initiale ?

2. On diminue la largeur de x mètres ($x<8$) et on augmente la longueur de y mètres.

a. Justifier que $(12+y)(8-x)=96$.

b. En déduire que $y=\dfrac{96}{8-x}-12$.

3. On ne peut pas augmenter la longueur de plus de 3 m à cause d'un mur. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

32 Projectile
Calculer, représenter

Lors du lancer d'un projectile, on modélise sa hauteur, en mètres, en fonction du temps, en secondes, par la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(t) = -0{,}25t^2 + 2t + 5.$$

1. Quelle est la hauteur du projectile à l'instant initial ?

2. a. Démontrer, que, pour tout t supérieur ou égal à 0, $h(t) = \dfrac{(10-t)(t+2)}{4}$.

b. Au bout de combien de temps le projectile retombe-t-il au sol ?

3. On souhaite savoir si la hauteur du projectile dépasse 8 m et si oui, à quel ou quels moments.

a. Un logiciel de calcul formel donne $h(t) - 8 = \dfrac{(6-t)(t-2)}{4}$. Vérifier ce résultat.

b. En déduire la résolution de l'inéquation $h(t) - 8 > 0$.

c. Conclure.

33 Vrai ou faux ?
Raisonner, modéliser, calculer

On souhaite savoir si l'affirmation suivante est vraie : « La somme d'un réel strictement positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à 2. »

Soit x un nombre réel strictement positif.

1. Quelle inéquation faut-il résoudre pour trouver les réels x strictement positifs dont la somme avec son inverse est supérieure ou égale à 2 ?

2. Montrer que cette inéquation est équivalente à $\dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$.

3. Résoudre cette inéquation.

4. Conclure.

Problèmes

34 Algo et Python

Soit k un nombre entier naturel. On considère l'équation :

$$x^3 = 49x.$$

1. On a écrit en Python la fonction suivante, dans laquelle l'instruction « `x**3==49*x` » renvoie « `True` » si l'égalité testée est vraie et « `False` » sinon.

```
def test_equation(x):
    return(x**3==49*x)
```

Expliquer les résultats obtenus ci-dessous.

```
>>> test_equation(3)
False
>>> test_equation(7)
True
```

2. On a ensuite écrit la fonction suivante.

```
def equation():
    for x in range(-1000,1000):
        if test_equation(x):
            print(x)
```

Que signifient les résultats obtenus ci-dessous ?

```
>>> equation()
-7
0
7
```

35 Carrément plus petit !

Modéliser, calculer

Trouver l'ensemble des nombres réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.

36 La meilleure forme

Calculer, raisonner

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)^2 - (x+6)^2.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 3x^2 - 24x - 27.$$

b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3(x-9)(x+1)$.

c. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3(x-4)^2 - 75$.

2. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

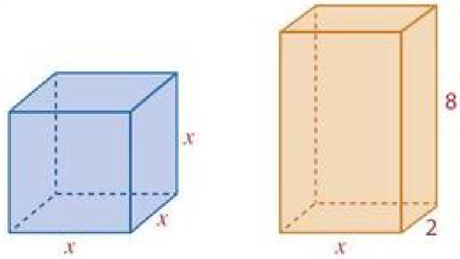
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = -27$.

c. Déterminer les antécédents de -75.

37 Des boîtes

Modéliser, calculer

On souhaite construire deux boîtes, la première cubique et la seconde parallélépipédique de même largeur comme ci-après.



Est-il possible de choisir x de telle sorte que la boîte cubique ait une contenance supérieure à l'autre boîte ?

38 Des équations du second degré

Calculer, raisonner

1. On souhaite résoudre l'équation $x^2 + 6x = 1$.

a. Montrer que $x^2 + 6x$ est le début du développement de $(x+3)^2$.

b. En déduire que cette équation est équivalente à $(x+3)^2 - 10 = 0$.

c. En utilisant une factorisation, résoudre cette équation.

2. En utilisant une méthode analogue, résoudre :

a. $x^2 - 8x = -9$ b. $4x^2 + 4x = 10$

39 Faire du bénéfice

Calculer, raisonner

Une entreprise fabrique des paniers. Elle peut en fabriquer jusqu'à 80 par jour. Le coût de production en euros (matières premières, local, salaires…) de x paniers est donné par $C(x) = x^2 - 50x + 1\,000$. Chaque panier est ensuite vendu 20 € pièce.

1. Quelle est la recette $R(x)$ de l'entreprise pour x paniers fabriqués et vendus ?

2. Quel est alors le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise pour x paniers fabriqués et vendus ?

3. a. Montrer que $B(x) = (x-20)(50-x)$.

b. Déterminer le nombre de paniers à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

40 Ça se complique…

Calculer

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $(2-3x)(5x-7) - 25x^2 + 49 > 0$

b. $\dfrac{7-7x}{5x-4} \leqslant \dfrac{x-1}{5-2x}$.

Démonstration

Démo de cours

Soient deux nombres réels A et B. On a $A \times B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$.

1. Montrer l'implication $(A = 0 \text{ ou } B = 0) \Rightarrow A \times B = 0$.

2. Réciproquement, on suppose que $A \times B = 0$. On veut montrer que l'un au moins des deux nombres est nul.

a. Traiter le cas $A = 0$.

b. Traiter le cas $A \neq 0$.

c. Qu'a-t-on démontré alors ?

3. Conclure.

Chapitre 5

Fonctions affines

1 Reconnaître une fonction linéaire ou affine

Une fonction **affine** est une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels fixés.

- $f(x) = 3x - 4$ ($m = 3$ et $p = -4$)

Cas particuliers :

- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$. On dit que la fonction est **linéaire**.
- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$. On dit que la fonction est **constante**.

1 On donne, dans chaque cas ci-dessous, une valeur de m et de p. Écrire une expression de la fonction affine.

a. $m = 2$; $p = -5$. $f(x) =$ ……

b. $m = \frac{1}{8}$; $p = 3$. $g(x) =$ ……

c. $m = 0$; $p = -2$. $h(x) =$ ……

d. $m = 32$; $p = 0$. $r(x) =$ ……

2 Pour les fonctions affines dont les expressions sont données ci-dessous, préciser les valeurs de m et p.

a. $f(x) = 3x + 4$ $m =$ …… $p =$ ……

b. $g(x) = -2x + \frac{5}{2}$ $m =$ …… $p =$ ……

c. $r(x) = 4x$ $m =$ …… $p =$ ……

d. $t(x) = -7$ $m =$ …… $p =$ ……

3 Indiquer dans le tableau suivant si la fonction f est constante, affine et/ou linéaire.

$f(x) = \dots$	Constante	Linéaire	Affine
$2x$			
$-x + 4$			
$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$			
$\frac{3}{7}$			
$x^2 + 2$			

4 Thomas dit à Margot :
« Je ne comprends pas pourquoi la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{3x+1}{4}$ est une fonction affine ».
Margot lui répond :
« C'est facile, regarde :

$$\frac{3x+1}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Donc $m = \frac{3}{4}$ et $p = \frac{1}{4}$ ».

Compléter à la manière de Margot les calculs suivants.

a. $f(x) = \frac{-5x+2}{7} =$ …… $+$ …… $=$ …… $x +$ ……
Donc $m =$ …… et $p =$ ……

b. $g(x) = \frac{7x-3}{2} =$ …… $-$ …… $=$ …… $x -$ ……
Donc $m =$ …… et $p =$ ……

c. $h(x) = \frac{4+2x}{2} =$ …… $+$ …… $=$ …… $+$ ……
Donc $m =$ …… et $p =$ ……

d. $h(x) = \frac{10x-5}{5} =$ …… $-$ …… $=$ …… $-$ ……
Donc $m =$ …… et $p =$ ……

5 Pour les fonctions affines dont les expressions sont données ci-dessous, préciser les valeurs de m et p.

a. $f(x) = \frac{5x}{2} - 3$ $m = \frac{5}{2}$ $p =$ ……

b. $g(x) = \frac{x+3}{2}$ $m =$ …… $p =$ ……

c. $h(x) = \frac{8-3x}{5}$ $m =$ …… $p =$ ……

d. $r(x) = \frac{13}{2}$ $m =$ …… $p =$ ……

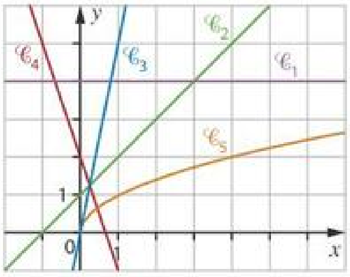
6 MODE EXPERT ! Parmi les fonctions suivantes, entourer celles qui sont des fonctions affines.

- $x \mapsto -3x + 1$
- $x \mapsto x^2 + 1$
- $x \mapsto \sqrt{2}x - 1$
- $x \mapsto \sqrt{2x} - 1$
- $x \mapsto \frac{-5x+4}{9}$
- $x \mapsto (x+1)(x-2) - x^2$
- $x \mapsto \frac{2x+1}{x}$
- $x \mapsto 3 - \frac{1}{2}x$

2 Représenter une fonction affine

▸ La **représentation graphique** d'une fonction affine est une **droite**.
Cas particuliers :
- Une fonction linéaire est représentée par une **droite passant par l'origine** du repère.
- Une fonction constante est représentée par une **droite parallèle à l'axe des abscisses**.

7 Indiquer dans le tableau suivant si la courbe est celle d'une fonction constante, affine et/ou linéaire.



Courbe	Constante	Linéaire	Affine
$\mathscr{C}_1$			
$\mathscr{C}_2$			
$\mathscr{C}_3$			
$\mathscr{C}_4$			
$\mathscr{C}_5$			

▸ Soient une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ et d sa courbe représentative.
- m est le **coefficient directeur** (ou pente) de la droite d ;
- p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite d.

8 Compléter le tableau suivant.

$f(x) = \ldots$	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$2x + 6$	....	....
$-4x + 3$	....	....
$-2x$	....	....
7	....	....
....	-2	$\frac{3}{4}$
....	$-\frac{1}{2}$	0

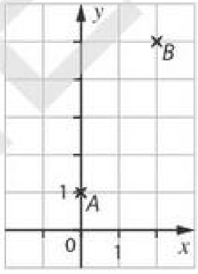
▸ Pour **représenter une fonction affine**, on calcule les images de deux nombres réels quelconques a et b par la fonction f et on place dans un repère les points de coordonnées $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$. La droite (AB) est alors la représentation graphique de la fonction f.

9 On considère la fonction affine f définie pour tout nombre réel par $f(x) = 2x + 1$.

1. Compléter le tableau suivant.

x	0	2
$f(x)$	....	....

2. Tracer la droite représentant la fonction f.



10 Soient $f : x \mapsto 4 - x$ et $g : x \mapsto 2x - 1$. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans le même repère.

....

....

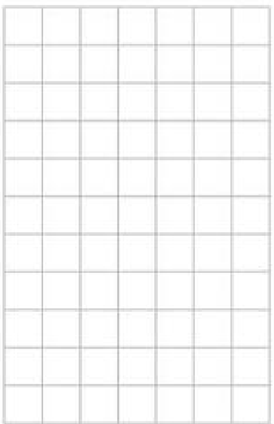
....

....

....

....

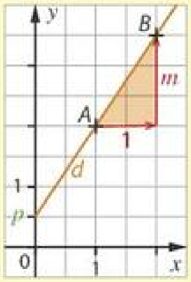
....



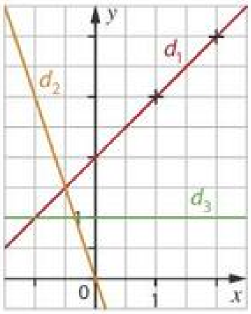
3 Déterminer l'expression d'une fonction affine

▶ Soient une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ et d sa courbe représentative.
Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points distincts de d.

- $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
- $p = y_A - m \times x_A$. C'est l'image de 0 par la fonction f.



11 Pour chacune des droites représentées ci-dessous, lire les valeurs du coefficient directeur m et de l'ordonnée à l'origine p, puis en déduire une expression de la fonction f représentée par cette droite.



Droite	m	p	$f(x) = \ldots$
d_1			
d_2			
d_3			

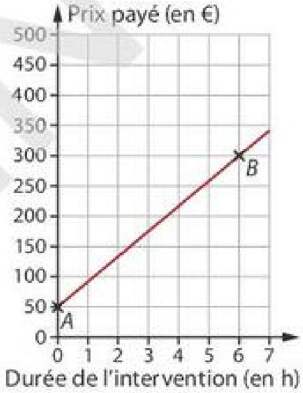
12 La droite d représentant une fonction affine f passe par les points $A(-2\ ;\ -5)$ et $B(3\ ;\ 10)$.
L'ordonnée à l'origine de d est $p = 1$.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

13 La droite d représentant une fonction affine f passe par les points $A(4\ ;\ 6)$ et $B(-2\ ;\ 4)$.

1. Calculer le coefficient directeur m de d.
2. Calculer l'ordonnée à l'origine p.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

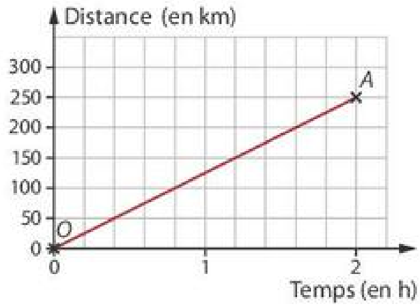
14 Aïcha dit à Yoan : « Pour calculer l'expression d'une fonction linéaire f, c'est très simple. Il suffit de connaître les coordonnées d'un point de la droite qui représente f car cette droite passe toujours par l'origine du repère ».
En suivant la méthode d'Aïcha, déterminer une expression de la fonction linéaire dont la représentation graphique passe par le point $A(6\ ;-3)$.

15 Un électricien facture ses interventions selon le graphique ci-dessous. Il y intègre le coût de son déplacement chez le client et celui du temps passé.



1. Quel est le prix de son déplacement ?
2. Calculer le coefficient directeur de la droite représentée ci-dessus.
3. En déduire une expression de la fonction affine f représentée.

16 MODE EXPERT ! Léo a représenté ci-dessous un trajet qu'il a effectué en voiture.



1. Déterminer une expression de la fonction qui représente son parcours.
2. Interpréter la valeur du coefficient directeur dans le contexte de l'exercice.

4 Déterminer les variations d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors la fonction f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, alors la fonction f est **constante**.

17 Compléter avec les mots : nul • positif • négatif • croissante • décroissante • constante.

a. La fonction $f : x \mapsto -2x + 3$ est …………… sur $\mathbb{R}$ car m est …………… .

b. La fonction $g : x \mapsto \frac{3}{2}x - 5$ est …………… sur $\mathbb{R}$ car m est …………… .

c. La fonction $h : x \mapsto 8$ est …………… car m est …………… .

d. La fonction $i : x \mapsto -5 + 3x$ est …………… sur $\mathbb{R}$ car m est …………… .

18 Pour chaque fonction affine définie ci-dessous, donner la valeur de m et en déduire ses variations en justifiant.

a. $f(x) = -\frac{1}{5}x$ $m =$ ……
…………, donc f est …………… sur $\mathbb{R}$.

b. $g(x) = \frac{x+3}{2}$ $m =$ ……

c. $h(x) = \frac{3-2x}{2}$ $m =$ ……

d. $t(x) = \sqrt{2}(x-1)$ $m =$ ……

19 Associer à chaque fonction donnée son sens de variation.

$f(x) = -2x + 1$ •

$g(x) = 3 - 4x$ • • Croissante

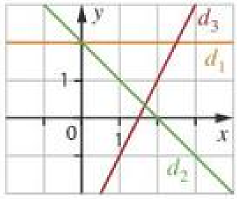
$h(x) = \frac{1}{2}x + 4$ • • Décroissante

$k(x) = -\frac{x}{2}$ •

$l(x) = -2 + x$ •

20 Associer à chaque fonction la droite qui la représente dans le repère ci-dessous.

- $f(x) = -x + 2$
- $g(x) = 2x - 3$
- $h(x) = 2$



21 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Si f est une fonction affine croissante dont l'ordonnée à l'origine est 1, on peut avoir $f(2) = 0$.

b. Si g est une fonction affine décroissante dont l'ordonnée à l'origine est 3, on peut avoir $g(2) = 0$.

22 MODE EXPERT ! Je suis une fonction affine f décroissante. Mon coefficient directeur est un entier relatif appartenant à $[-2 ; 2]$ et mon ordonnée à l'origine est 5. Enfin, $f(3) = 2$. Quelle est mon expression ?

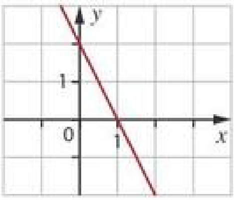
5 Déterminer le signe d'une fonction affine

- On appelle **racine** d'une fonction f un réel a tel que $f(a) = 0$.
- Si f est une fonction affine non constante, alors f a une unique racine, qu'on peut déterminer en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

Le point de coordonnées $(a\ ;\ 0)$ est le **point d'intersection** de la droite représentant la fonction f avec l'axe des abscisses.

23 Soit $f : x \mapsto 2x - 4$. Montrer que $a = 2$ est la racine de la fonction f.

24 Déterminer graphiquement la racine de la fonction affine f représentée ci-dessous.



25 Soit $f : x \mapsto -4x + 12$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. En déduire la racine de la fonction f.

26 Soit $g : x \mapsto -\frac{1}{3}x - 2$.

Déterminer la racine de la fonction g.

- Déterminer le **signe d'une fonction affine** revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 0$.
- Pour déterminer le signe d'une fonction affine, on résout l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$, et on rassemble les résultats dans un tableau de signes.

En notant a la racine de f, on a :

• si $m > 0$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	

• si $m < 0$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	

27 Soit $f : x \mapsto 4x - 20$.

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
2. Dresser le tableau de signes de f.

x	
Signe de $f(x)$	

28 Soit $g : x \mapsto -3x + 18$. Dresser le tableau de signes de g.

x	
Signe de $g(x)$	

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

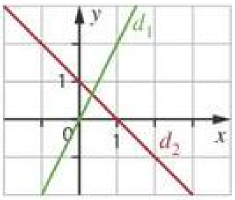
29 Compléter les phrases avec « affine » ou « linéaire ».

a. La fonction $f : x \mapsto 2x - 7$ est une fonction ....

b. La fonction $h : x \mapsto -\frac{1}{3}x$ est une fonction ....

c. La fonction $t : x \mapsto -\frac{1}{4}x + 9$ est une fonction ....

30 Les droites ci-dessous représentent-elles des fonctions linéaires ?



....

31 Compléter les phrases avec les mots « croissante », « décroissante » ou « constante » pour chaque fonction définie ci-dessous.

a. $f(x) = -4$. f est ....

b. $g(x) = -2x + 1$. g est .... sur $\mathbb{R}$.

c. $h(x) = 6 - 3x$. h est .... sur $\mathbb{R}$.

32 Une fonction affine f a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	

Quel est le signe de $f(3)$?

....

Parcours 2

MODE EXPERT !

33 Compléter les phrases avec « affine » ou « linéaire ».

a. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{3}$ est une fonction ....

b. La fonction $g : x \mapsto \frac{2 - x}{5}$ est une fonction ....

c. La fonction $h : x \mapsto -\sqrt{2}x$ est une fonction ....

d. La fonction $t : x \mapsto \frac{\sqrt{3}x + 4}{2}$ est une fonction ....

34 Donner la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de la droite représentant la fonction affine définie par $f(x) = \sqrt{7}x - \frac{1}{3}$.

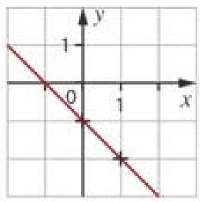
....

....

35 Donner le sens de variation de la fonction affine $f : x \mapsto 5 - 4x$.

....

36 Lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine sur la représentation graphique de la fonction affine ci-dessous.



....

37 Une fonction affine f a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	

Quel est le sens de variation de f ?

....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

ou

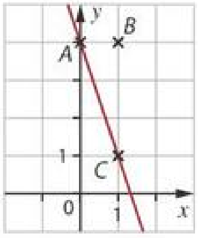
hachette-clic.fr/22ma2005

Problèmes

ceinture jaune · ceinture verte · ceinture noire

38 Lecture graphique
Communiquer

On considère une fonction affine f dont la droite d qui la représente est tracée ci-dessous.



1. En utilisant les points A, B et C, expliquer comment lire le coefficient directeur de d.

2. Expliquer comment déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine.

3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

39 L'augmentation des prix
Calculer

Les articles d'un magasin vont subir une augmentation de 5 %. À tout prix x (exprimé en €), on associe le nouveau prix $f(x)$ (exprimé en €) après augmentation de 5 %

1. Montrer que $f(x) = 1{,}05x$.

2. Quel est le nouveau prix d'un article vendu initialement 50 € ?

40 Le cinéma
Modéliser, calculer

Un cinéma propose une carte de fidélité mensuelle. On paye 15,90 € d'abonnement par mois puis 6 € par séance.

1. Un abonné assiste à x séances en un mois.

On note $f(x)$ les prix en euros qu'il doit payer pour ce mois. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. Combien l'abonné va-t-il payer s'il assiste à 4 séances ?

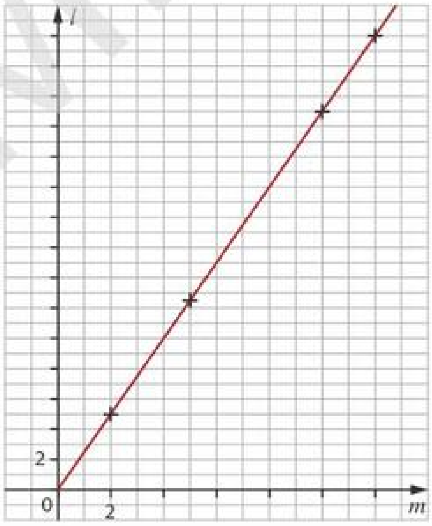
41 Le ressort
Modéliser, représenter

On étudie l'allongement d'un ressort en fonction d'une masse suspendue au ressort.

On a relevé dans un tableau les résultats suivants.

Masse m (g)	2	5	10	12
Allongement l (cm)	5	12,5	25	30

1. Placer dans le repère ci-dessous les points de coordonnées $(m\ ;\ l)$ du tableau précédent.



2. L'allongement du ressort semble-t-il être une fonction linéaire de la masse ? Justifier.

3. En déduire alors une expression de l en fonction de m.

42 Les coefficients
Raisonner, calculer

Une fonction affine f a pour représentation graphique une droite d qui passe par les points $A(-2\ ;\ -18)$ et $B(3\ ;\ 7)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite d.

2. Laetitia veut calculer l'ordonnée à l'origine p de la droite d. Pour cela, elle pose $f(x)=5x+p$ puis elle raisonne ainsi :

« Comme la droite d passe par le point $A(-2\,;-18)$, je remplace x par -2 et $f(x)$ par -18, puis je résous l'équation d'inconnue p. »

Déterminer la valeur de p en suivant le raisonnement de Laetitia.

3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

43 L'emprunt

Raisonner, calculer

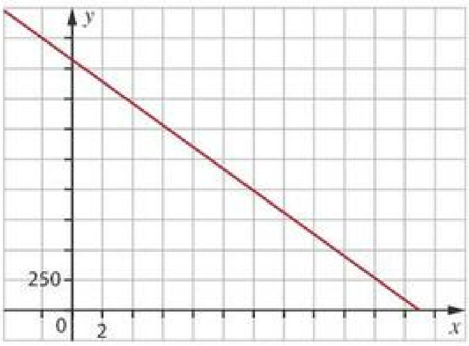
Un étudiant emprunte 2 070 € à son banquier à taux 0 (il ne rembourse que le capital emprunté, sans payer d'intérêt). Il doit rembourser 90 € par mois. On note x le nombre de mois écoulés depuis la date de l'emprunt et par $f(x)$ la somme qui lui reste à rembourser au bout des x mois.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

3. Quelle somme restera-t-il à rembourser à l'étudiant au bout de 16 mois ?

4. On a tracé la fonction f dans le repère ci-dessous.



Lire graphiquement le nombre de mois qu'il faut à l'étudiant pour rembourser entièrement son prêt.

5. Vérifier par le calcul le résultat précédent.

44 Algo et Python

Une patinoire propose un abonnement à l'année. On paie un forfait de 15 € puis chaque entrée à la patinoire coute 4 €.

On a écrit la fonction Python ci-dessous.

```
def prix(x):
    return 15+4*x
```

On note x le nombre d'entrées à la patinoire en une année et $f(x)$ le prix (en €) payé à la fin de l'année.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. La patinoire décide de faire une remise de 5 % à ses clients. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle renvoie le prix payé par un abonné au bout d'un an.

3. La patinoire décide de faire une offre supplémentaire à ses abonnés les plus fidèles : après 10 entrées, l'accès à la patinoire est gratuit et illimité le reste de l'année.

a. Combien payera un client qui vient plus de 10 fois à la patinoire ?

b. Compléter la fonction pour qu'elle renvoie le prix payé par un abonné selon son nombre d'entrées.

```
def prix(x):
    if ............ :
        return ............
    else:
        return ............
```

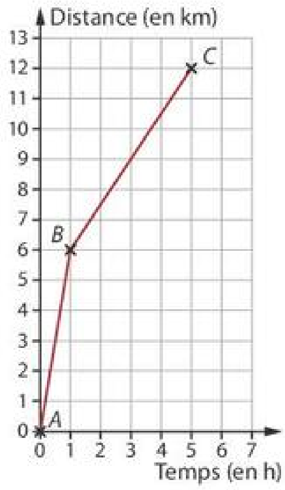
c. Modifier la fonction précédente pour que, si le nombre d'entrées est supérieur à 10, elle renvoie le prix moyen payé par entrée.

```
def prix(x):
    if ............ :
        return ............
    else:
        return ............
```

45 L'athlète
Raisonner, communiquer

Un coureur de trail effectue un parcours en montagne qui comporte deux parties : l'une en pente douce, l'autre avec des dénivelés importants.

On a représenté ci-dessous la distance parcourue par le coureur en fonction du temps.



On note $B(1\,;6)$ et $C(5\,;12)$.

1. Quelle distance a parcouru le coureur au bout d'une heure ?

2. On note $g(x)$ la distance (en km) parcourue par le coureur en fonction du temps x (en h) entre 1 h et 5 h après son départ. La fonction g a pour représentation graphique le segment $[BC]$. Le coefficient directeur de cette représentation graphique est la vitesse moyenne du coureur. Calculer cette vitesse moyenne.

3. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

4. Calculer la distance parcourue par le coureur 3 heures après son départ.

46 Mauvais signes
Calculer, raisonner

Soient $f : x \mapsto \dfrac{-3x-1}{5}$ et d la représentation graphique de f.

1. Donner le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p de d.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f ? Justifier.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4. En déduire le tableau de signes de $f(x)$.

47 Panne sèche
Calculer, raisonner

Une voiture roule à la vitesse moyenne de 100 km·h^{-1}. Sa consommation de carburant est de 7,5 L pour 100 km. Au départ, le réservoir contient 60 litres de carburant.

1. Définir la fonction f qui, au nombre x de kilomètres parcourus, associe le nombre de litres restant dans le réservoir.

2. Calculer le nombre de litres restant au bout de 350 km parcourus.

3. Combien de kilomètres peut parcourir la voiture avec un plein d'essence ? Combien de temps a-t-elle alors roulé ?

48 Les images
Raisonner, communiquer

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

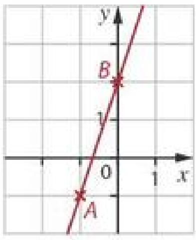
$$f(x) = -2x + 1.$$

1. Quel est le sens de variation de la fonction f ?

2. Dans quel intervalle se trouvent les images par f des réels appartenant à l'intervalle $[-1 ; 4]$? Donner l'intervalle le plus petit possible.

49 La grande image
Raisonner, calculer

On considère la fonction affine f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Les points A et B ont pour coordonnées $A(-1 ; -1)$ et $B(0 ; 2)$.
Quelle est l'image du nombre 255 par la fonction f ?

50 Les livres de poche
Raisonner, modéliser

Un éditeur publie des livres de poche. Les frais de création s'élèvent à 15 000 €. L'impression de chaque livre coute 2,50 €. Chaque livre est vendu 7,50 €.
On suppose que l'éditeur vend tous les livres qu'il fabrique. Pour quels nombres de livres fabriqués l'éditeur réalise-t-il des bénéfices ?

51 L'équation
Raisonner, modéliser

On veut résoudre l'équation $2x^2 - 4x - 6 = 0$.

1. Montrer que $2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8$.

2. En déduire que l'équation s'écrit sous la forme :
$$2(x-1)^2 - 8 = 0.$$

3. On pose $X = x - 1$.
Montrer que l'équation devient $X^2 = 4$.

4. Résoudre l'équation $X^2 = 4$.

5. En déduire les solutions de l'équation :
$$2x^2 - 4x - 6 = 0.$$

Démonstration

Démo de cours

Soit f une fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = mx + p$ et d sa représentation graphique dans un repère. Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts de d. On a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

1. Exprimer y_A en fonction de x_A et y_B en fonction de x_B.

2. Calculer $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Chapitre 6

Fonctions carré et cube

1 Connaître la fonction carré

▸ La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1 Calculer l'image des nombres réels donnés par la fonction carré.

a. $f(2) =$ .... b. $f(-3) =$ ....

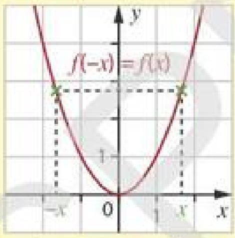
c. $f(0) =$ .... d. $f(-5) =$ ....

2 Calculer l'image des nombres réels donnés par la fonction carré.

a. $f(0{,}5) =$ .... b. $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ ....

c. $f(\sqrt{3}) =$ .... d. $f(-\sqrt{5}) =$ ....

▸ Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$ soit $f(-x) = f(x)$: x et $-x$ ont la même image. On dit que la fonction carré est une fonction **paire**.



▸ La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

3 On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = x^2 - 2$.
Compléter les calculs ci-dessous pour démontrer que la fonction f est paire.

$f(-x) = (\ \ \ \ )^2 - 2 =$ .... $-2 =$ ....

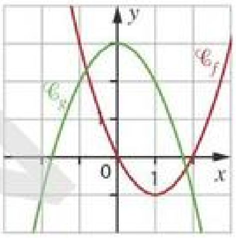
....

4 Montrer que la fonction g définie, pour tout réel x, par $g(x) = -x^2 + 4$ est paire.

....

....

5 Parmi les fonctions f et g représentées ci-contre, l'une des deux est paire. Laquelle ? Justifier.



....

....

....

▸ La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty\,;0]$ et **croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

6 Compléter chaque phrase avec le mot croissante ou décroissante.

a. Sur l'intervalle $[-6\,;-2]$, la fonction carré est ....

b. Sur l'intervalle $[3\,;7]$, la fonction carré est ....

c. Sur l'intervalle $[1\,;20]$, la fonction carré est ....

7 MODE EXPERT ! 1. Calculer les images des réels $-3\sqrt{3}$ et $-5\sqrt{2}$ par la fonction carré.

....

....

....

2. En utilisant le sens de variation de la fonction carré sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, comparer les nombres $-3\sqrt{3}$ et $-5\sqrt{2}$ sans utiliser de calculatrice.

....

....

....

....

2 Résoudre une équation du type $x^2 = a$

- L'équation $x^2 = a$ admet :
  - deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ lorsque $a>0$;
  - une unique solution égale à 0 lorsque $a = 0$;
  - aucune solution lorsque $a<0$.

8 Compléter les phrases en précisant si l'équation proposée admet zéro, une ou deux solutions et en justifiant.

a. L'équation $x^2 = -6$ ……

b. L'équation $x^2 = 7$ ……

c. L'équation $x^2 = -0,5$ ……

d. L'équation $x^2 = \frac{14}{3}$ ……

9 Compléter le tableau en précisant le signe de a et les valeurs des solutions lorsqu'elles existent. Si l'équation n'admet pas de solution, écrire ∅.

Équation	Signe de a	Solutions
$x^2 = -9$		
$x^2 = 16$		
$x^2 = 12$		
$x^2 = -\frac{5}{2}$		
$x^2 = 1$		

10 Résoudre les équations. Écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\mathcal{S} = \{\ldots\}$. Si l'équation n'admet pas de solution, écrire $\mathcal{S} = \varnothing$.

a. $x^2 = 9$ ……

b. $x^2 = -5$ ……

c. $x^2 = 8$ ……

d. $x^2 = 0$ ……

e. $x^2 = 81$ ……

11 Compléter les résolutions d'équations suivantes.

a. $3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 =$ …… $\mathcal{S} =$ ……

b. $5x^2 = 40 \Leftrightarrow x^2 =$ …… $\mathcal{S} =$ ……

c. $-4x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 =$ …… $\mathcal{S} =$ ……

d. $-8x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 =$ …… $\mathcal{S} =$ ……

12 Résoudre les équations suivantes.

a. $2x^2 - 8 = 0$

b. $-5x^2 + 30 = 0$

c. $3x^2 + 9 = 0$

13 La célèbre formule d'Einstein $E = mc^2$ relie l'énergie E d'un électron (en joules), sa masse m (en kg) et la vitesse c de la lumière (en m/s).
Sachant que l'énergie d'un électron est de $0,81 \times 10^{-13}$ J et sa masse est 9×10^{-31} kg, retrouver la vitesse de la lumière.

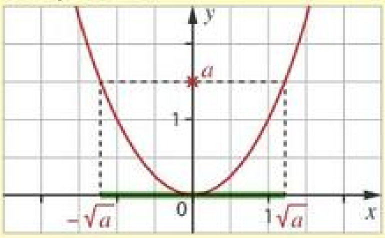
14 MODE EXPERT ! Marius veut résoudre l'équation :

$$(2x+1)^2 - 9 = 0.$$

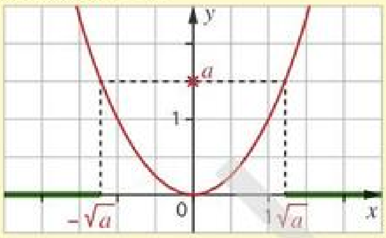
Maelle lui dit : « Tu poses $X = 2x + 1$, tu trouves X puis, ensuite, tu trouves x ».
En suivant les explications de Maelle, déterminer les solutions de l'équation $(2x+1)^2 - 9 = 0$.

3 Résoudre une inéquation du type $x^2 \leqslant a$

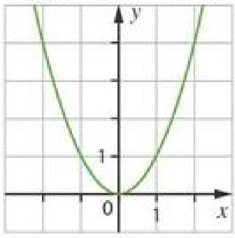
- L'inéquation $x^2 \leqslant a$ admet comme ensemble de solutions :
  - $\mathcal{S} = [-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}]$ lorsque $a>0$;
  - $\mathcal{S} = \{0\}$ lorsque $a = 0$;
  - $\mathcal{S} = \varnothing$ lorsque $a<0$.



- L'inéquation $x^2 \geqslant a$ admet comme ensemble de solutions :
  - $\mathcal{S} =]-\infty\,;-\sqrt{a}\,]\cup[\sqrt{a}\,;+\infty[$ lorsque $a>0$;
  - $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ lorsque $a \leqslant 0$.



15 1. Sur le graphique, représenter en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 4$.



2. Écrire l'ensemble de solutions sous la forme d'un intervalle.

16 Compléter les résolutions suivantes.

a. $2x^2 \leqslant 32 \Leftrightarrow x^2 \leqslant$ ...... $\Leftrightarrow x^2 \leqslant$ ......

$\mathcal{S} =$ ......

b. $6x^2 \leqslant 72 \Leftrightarrow x^2 \leqslant$ ...... $\Leftrightarrow x^2 \leqslant$ ......

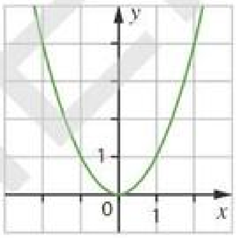
$\mathcal{S} =$ ......

17 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $4x^2 + 40 \leqslant 0$.

b. $6x^2 - 4 \leqslant 26$.

18 1. Sur le graphique ci-dessous, représenter en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 1$.



2. Écrire l'ensemble de solutions sous la forme d'une réunion d'intervalles.

19 Compléter les résolutions suivantes.

a. $7x^2 \geqslant 28 \Leftrightarrow x^2 \geqslant$ ...... $\Leftrightarrow x^2 \geqslant$ ......

$\mathcal{S} =$ ......

b. $3x^2 \geqslant -18 \Leftrightarrow x^2 \geqslant$ ...... $\Leftrightarrow x^2 \geqslant$ ......

$\mathcal{S} =$ ......

20 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $-5x^2 \leqslant -15$.

b. $8x^2 - 12 > 28$.

4 Connaître la fonction cube

▸ La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

21 Calculer l'image des nombres réels donnés par la fonction cube.

a. $f(3) =$ ……………

b. $f(-2) =$ ……………

c. $f(-1) =$ ……………

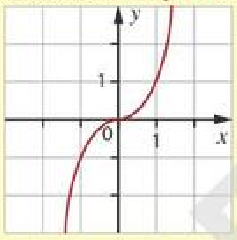
22 Calculer l'image des nombres réels donnés par la fonction cube.

a. $f(0{,}2) =$ ……………

b. $f(-1{,}5) =$ ……………

c. $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ ……………

▸ Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$ soit $f(-x) = -f(x)$: x et $-x$ ont des images opposées. On dit que la fonction cube est une fonction **impaire**.



▸ La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.

23 On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = 2x^3$.
Compléter les calculs ci-dessous pour démontrer que la fonction f est impaire.

$f(-x) = 2(\ldots\ldots)^3$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

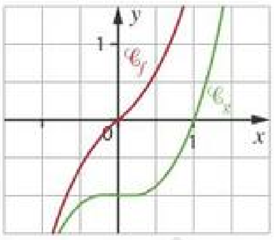
……………………………………………

24 On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 3x^3 + x$.
Compléter les calculs ci-dessous pour démontrer que la fonction g est impaire.

$g(x) = 3(\ldots\ldots)^3 + (\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

……………………………………………

25 Parmi les fonctions f et g représentées ci-dessous, l'une des deux est impaire. Laquelle ? Justifier.



……………………………………………

……………………………………………

▸ La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ ↗ $+\infty$
Variations de f	↗

26 Compléter les phrases suivantes comme dans l'exemple.
Exemple : La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $1{,}25 \leqslant 2{,}1$ donc $1{,}25^3 \leqslant 2{,}1^3$.

1. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $5{,}2 \leqslant 8{,}1$ donc …………………… .

2. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1{,}4 \leqslant -0{,}4$ donc …………………… .

3. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et …………… donc $0{,}3^3 \leqslant 1^3$.

27 Léa gonfle un ballon de baudruche qui a la forme d'une sphère. Le volume du ballon dépend de la quantité d'air que Léa y injecte.

1. On note r le rayon du ballon. Quel est le volume V du ballon en fonction de r ?

……………………………………………

2. Compléter le tableau suivant. Arrondir au centième.

r	6	7	8	8,5
V	……	……	……	……

3. Que dire du volume lorsque le rayon augmente ? Justifier.

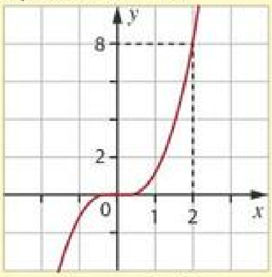
……………………………………………

……………………………………………

5 Résoudre une équation ou une inéquation avec la fonction cube

▸ Pour résoudre une équation du type $x^3 = a$, on utilise la courbe représentative de la fonction cube. On trouve souvent une valeur approchée de la solution.

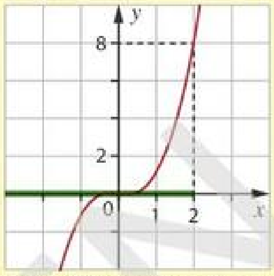
- Résoudre l'équation $x^3 = 8$.



L'équation a une unique solution, $x = 2$.
$\mathcal{S} = \{2\}$.

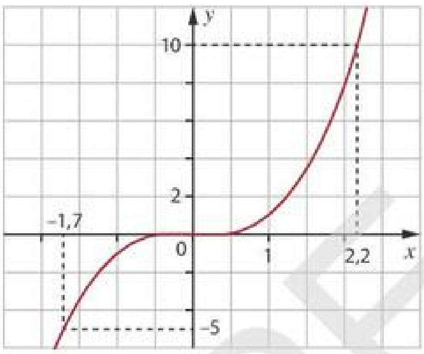
▸ Pour résoudre une inéquation du type $x^3 \leqslant a$ ou $x^3 \geqslant a$, on utilise la courbe représentative de la fonction cube. On trouve souvent un intervalle dont une borne est une valeur approchée.

- Résoudre l'inéquation $x^3 \leqslant 8$.



Tous les nombres inférieurs ou égaux à 2 sont solutions de l'inéquation.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\,;2]$.

28 En utilisant le graphique de la fonction cube ci-dessous, déterminer une valeur approchée de la solution des équations suivantes. Donner une valeur approchée au dixième.



a. $x^3 = 10$.

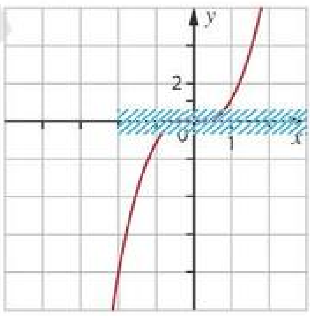
b. $x^3 = -5$.

29 Montrer que –4 est solution de l'équation $x^3 = -64$.

30 MODE EXPERT ! **1.** Résoudre l'équation $X^3 = 27$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(x-2)^3 = 27$.

31 En utilisant le graphique de la fonction cube ci-dessous, déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.



a. $x^3 \leqslant 1$

b. $x^3 \geqslant -8$

32 Montrer que –2,5 appartient à l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 \leqslant -1$.

33 MODE EXPERT ! **1.** Résoudre l'équation $x^3 = 125$.

2. En déduire la solution de l'équation $x^3 = \frac{1}{125}$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 \leqslant \frac{1}{125}$.

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

34 Calculer.

a. $10^2 =$ .... b. $(-7)^2 =$ ....

c. $0^2 =$ .... d. $1^2 =$ ....

35 Compléter la phrase avec les mots « croissante » ou « décroissante ».

Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction carré est ....

36 Résoudre les équations.

a. $x^2 = 9$: .... b. $x^2 = 64$: ....

c. $x^2 = 0$: .... d. $x^2 = 1$: ....

e. $x^2 = -5$: ....

37 Compléter la phrase.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 1$ est ....

38 Calculer.

a. $2^3 =$ .... b. $(-1)^3 =$ ....

39 Compléter la phrase avec les mots « croissante » ou « décroissante ».

Sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, la fonction cube est ....

40 Montrer que -3 est solution de l'équation $x^3 = -27$.

....

Parcours 2 MODE EXPERT !

41 Calculer.

a. $2{,}5^2 =$ .... b. $(-1{,}5)^2 =$ ....

c. $0{,}1^2 =$ .... d. $\sqrt{7}^2 =$ ....

e. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 =$ ....

42 Compléter la phrase avec les mots « croissante » ou « décroissante ».

Sur $[-5\,;-1[$, la fonction carré est ....

43 Résoudre les équations.

a. $x^2 = 10$: ....

b. $x^2 = 0{,}64$: ....

c. $x^2 = \dfrac{1}{4}$: ....

44 Compléter la phrase.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 1$ est $\mathcal{S} =$ ....

45 Calculer.

a. $5^3 =$ .... b. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 =$ ....

46 Compléter la phrase avec les mots « croissante » ou « décroissante ».

Sur l'intervalle $]-10\,;10]$, la fonction cube est ....

47 Résoudre les équations.

a. $x^3 = 8$: .... b. $x^3 = -1$: ....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

ou hachette-clic.fr/22ma2006

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

48 Des images
Calculer

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = 3x^2 + 2$.

Compléter les calculs suivants.

a. $f(4) =$ ……… b. $f(-2) =$ ………

c. $f(0) =$ ……… d. $f(-0{,}5) =$ ………

e. $f(\sqrt{5}) =$ ……… f. $f(-\sqrt{3}) =$ ………

49 Le carré
Calculer

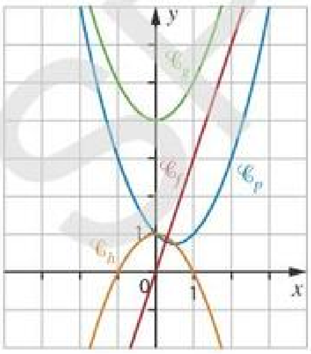
On considère le carré de côté a ci-dessous.

Calculer l'aire de ce carré dans chacun des cas suivants.

1. $a = 3$ cm $\mathscr{A} =$ ……… .
2. $a = 4{,}5$ cm $\mathscr{A} =$ ……… .
3. $a = 7$ cm $\mathscr{A} =$ ……… .

50 Les courbes
Chercher

Parmi les courbes ci-dessous, déterminer celles qui semblent représenter une fonction paire. Justifier.



51 Le débat
Communiquer

Alice dit :
« Pour démontrer que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -3x^2 + 4$ est paire, je dois remplacer x par $-x$ dans l'expression.
Je trouve donc $f(-x) = 3x^2 + 4$ car un nombre négatif multiplié par un nombre négatif donne un résultat positif.
La fonction n'est donc pas paire ».
Alice a-t-elle raison ?

52 L'énergie cinétique
Calculer, communiquer

L'énergie cinétique E (exprimée en joules) d'un objet en mouvement en fonction de sa masse m (exprimée en kg) et sa vitesse v (exprimée en mètres par seconde, qu'on note $m \cdot s^{-1}$) est donnée par l'expression :

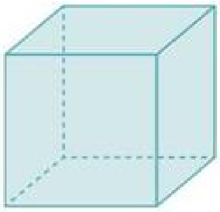
$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

1. Calculer l'énergie cinétique d'un objet de masse 10 kg lancé à la vitesse de 6 $m \cdot s^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $5x^2 = 720$.

3. Quelle est la vitesse d'un objet de masse 10 kg et dont l'énergie cinétique est égale à 720 joules ?

53 Le cube
Calculer



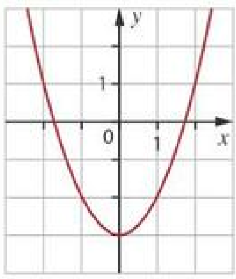
Le cube ci-contre a une arête de longueur a exprimée en cm.

Calculer le volume du cube dans les cas suivants.

1. $a = 3$ cm $\qquad \mathcal{V} =$ ....
2. $a = 1{,}5$ cm $\qquad \mathcal{V} =$ ....
3. $a = 5{,}2$ cm $\qquad \mathcal{V} =$ ....

54 La parabole
Calculer, raisonner

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 3$. La courbe représentative de f est tracée ci-dessous.



1. Que peut-on conjecturer sur la parité de la fonction f ?

2. Démontrer la conjecture précédente.

55 Fonction impaire
Calculer, communiquer

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :
$$f(x) = 4x^3.$$

1. Démontrer que la fonction f est impaire.

2. Sans calcul, expliquer pourquoi $f(250) + f(-250) = 0$.

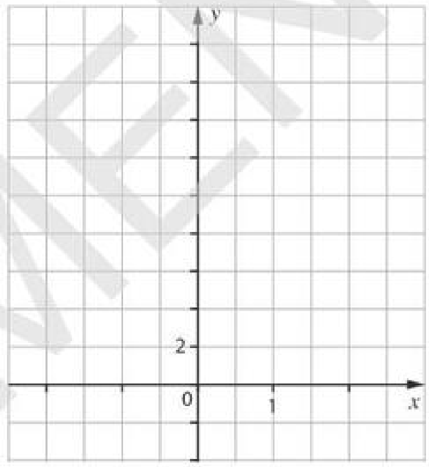
56 Boules de Noël
Calculer, modéliser

Une entreprise fabrique des décorations de Noël en forme de demi-boule de rayon x (exprimé en cm).

1. Exprimer en fonction de x le volume $V(x)$ d'une décoration de Noël.

2. Pour ses calculs, l'entreprise prend 3,14 pour valeur approchée de π. On a donc $V(x) = \dfrac{6{,}28}{3}x^3$.

Tracer ci-dessous la courbe représentative de la fonction V.



3. En utilisant le graphique ci-dessus, déterminer une valeur approchée du rayon d'une boule de Noël dont le volume est 17 cm^3.

57 Plus grand ou plus petit ?
Raisonner

On veut comparer les nombres $\sqrt{3}^{\,3}$ et $\sqrt{5}^{\,3}$.

1. Rappeler les variations de la fonction cube sur $[0\,;+\infty[$.

2. Comparer les nombres $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

3. En déduire, en justifiant la réponse, une comparaison des nombres $\sqrt{3}^{\,3}$ et $\sqrt{5}^{\,3}$.

58 **Algo et Python**

On appelle *énergie potentielle élastique d'un ressort* le nombre E_p qui dépend de l'allongement ou du raccourcissement du ressort, noté x, et de la constante de raideur k du ressort.

E_p est exprimé en joules, x est exprimé en mètres et k en newtons par mètre $(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1})$.

On a l'expression de E_p suivante :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

1. Compléter la fonction Python suivante, d'arguments x et k, pour qu'elle renvoie l'énergie potentielle élastique d'un ressort.

```
def energie_p(__,__)
    return ________
```

2. Quelle instruction peut-on écrire dans la console Python pour déterminer l'énergie potentielle élastique d'un ressort d'allongement $x = 0,3$ mètre et de constante de raideur $k = 70\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$?

3. Quel résultat trouve-t-on ?

4. Léo a écrit la fonction suivante.

```
def seuil(x,k):
    while energie_p(x,k)<50:
        x=x+0.1
    return x
```

Léo a ensuite obtenu le résultat suivant dans la console.

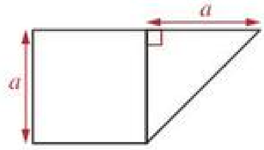
```
>>> seuil(0.3,70)
1.2
```

Expliquer à quoi correspond ce résultat.

59 **Le jardin**

Calculer, communiquer

Un jardin, représenté ci-dessous, est constitué par un carré de côté a (exprimé en mètres) et un triangle rectangle isocèle.



1. Exprimer l'aire du jardin, notée $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

2. Quelle doit être la valeur exacte de a pour que le jardin ait une aire égale à 600 m² ?

60 **Le cylindre**

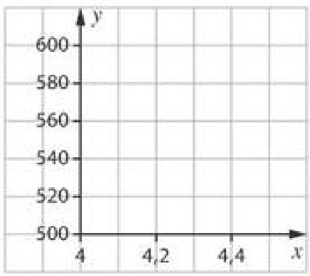
Calculer, communiquer

Une entreprise fabrique des cylindres en métal de hauteur 10 cm. Pour être déclarés conformes à la fabrication, les cylindres doivent avoir un rayon compris entre 4,2 cm et 4,3 cm. Sinon, ils sont mis au rebut.

1. On note $\mathscr{V}$ le volume du cylindre et r son rayon. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de r.

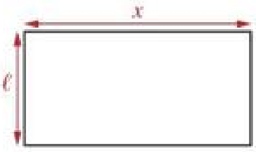
2. Écrire un encadrement de r et en déduire un encadrement du volume des cylindres.

3. Vérifier graphiquement ce résultat en traçant la courbe représentative de la fonction $\mathscr{V}$ en fonction de r sur l'intervalle [4 ; 4,5].



61 Le rectangle
Raisonner, calculer

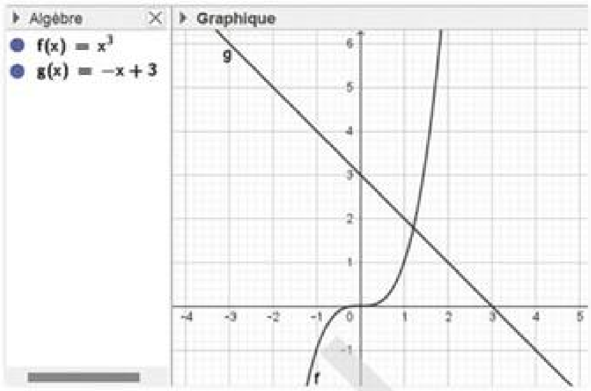
On considère le rectangle ci-contre de périmètre 20 cm.



1. Exprimer l en fonction de x.
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle en fonction de x est $\mathscr{A}(x) = -x^2 + 10x$.
3. On cherche la ou les valeurs de x telles que l'aire du rectangle soit égale à 9 cm^2.
Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $-(x-5)^2 + 25 = 9$.
4. On pose $X = x - 5$.
Résoudre l'équation $-X^2 + 25 = 9$.
5. En déduire la ou les valeurs de x qui répondent au problème.

62 L'équation
Raisonner, modéliser

Léo a tracé avec un logiciel de géométrie les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3$ et $g(x) = -x + 3$.



Montrer qu'on peut en déduire une valeur approchée de la ou des solutions de l'équation $x^3 + x - 3 = 0$.

63 Une comparaison
Raisonner, calculer

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$
2. En utilisant le résultat de la question 1., montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, $x^3 \leqslant x^2$.
3. En utilisant le résultat de la question 1., montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $x^3 \geqslant x^2$.

Démonstration

Démo de cours

Raisonnement par contre-exemple
Pour démontrer qu'une proposition mathématique est fausse, on peut utiliser un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple qui montre qu'elle est fausse au moins dans un cas.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - x$.
On veut démontrer que la fonction f n'est pas une fonction paire.

1. Rappeler la définition d'une fonction paire.

....

2. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$.

....

....

3. Que peut-on en conclure ?

....

Chapitre 7

Fonctions racine carrée et inverse

1 Calculer avec des racines carrées

La **racine carrée** d'un nombre réel positif a est l'unique réel positif dont le carré vaut a.
La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$. On a $\sqrt{a} \geqslant 0$.

1 Compléter selon le modèle suivant.

$\sqrt{9} = 3$ car 3 est positif et $3^2 = 9$.

a. $\sqrt{16} =$ ...... car ......

b. $\sqrt{36} =$ ...... car ......

c. $\sqrt{81} =$ ...... car ......

d. $\sqrt{100} =$ ...... car ......

2 Relier les nombres égaux.

$\sqrt{49}$ •	• -12
	• 1
$\sqrt{144}$ •	• -7
	• -1
$\sqrt{1}$ •	• -5
	• 5
$\sqrt{25}$ •	• 7

3 Simplifier au maximum les calculs suivants.

a. $3\sqrt{16} - 5\sqrt{64} =$ ......

b. $-2\sqrt{9} + 3\sqrt{36} =$ ......

c. $4\sqrt{49} - 2\sqrt{100} =$ ......

4 Simplifier au maximum les calculs suivants.

a. $\sqrt{5}^2 + \sqrt{6}^2 =$ ......

b. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} =$ ......

c. $-4\sqrt{11} + 5\sqrt{11} + 2\sqrt{11} =$ ......

d. $6\sqrt{2} - 3\sqrt{4} + 2\sqrt{2} =$ ......

e. $-\sqrt{1} + 3\sqrt{1} - \sqrt{0} + 4\sqrt{1} =$ ......

Pour tous réels a et b positifs :

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

Pour tout réel a :

$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

5 Calculer sans utiliser de calculatrice.

a. $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{} \times \sqrt{} =$ ......

b. $\sqrt{16 \times 25} =$ ......

c. $\sqrt{3 \times 27} =$ ......

d. $\sqrt{2 \times 32} =$ ......

e. $\sqrt{17^2} =$ ......

f. $\sqrt{(-35)^2} =$ ......

6 Écrire sous la forme d'un nombre rationnel.

a. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} =$ ...... b. $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} =$ ......

c. $\frac{2\sqrt{144}}{\sqrt{16}} =$ ...... d. $\frac{\sqrt{81}}{3\sqrt{1}} =$ ......

7 Écrire sous la forme d'un nombre rationnel.

a. $\sqrt{\frac{100}{9}} =$ ...... b. $\sqrt{\frac{64}{9}} =$ ......

c. $5\sqrt{\frac{25}{81}} =$ ...... d. $4\sqrt{\frac{36}{16}} =$ ......

8 MODE EXPERT ! Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times \ldots} = \sqrt{\ldots} \times \sqrt{\ldots} = \ldots\sqrt{\ldots}$

b. $\sqrt{48} = \sqrt{\ldots \times \ldots} =$ ......

c. $\sqrt{72} =$ ......

d. $\sqrt{75} =$ ......

e. $\sqrt{500} =$ ......

f. $\sqrt{1300} =$ ......

g. $\sqrt{567} =$ ......

2 Connaître la fonction racine carrée

▸ La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

9 Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	......	......	......	......	......

10 Compléter le tableau de valeurs suivant.
Arrondir au dixième les valeurs de $\sqrt{x}$.

x	$\frac{1}{2}$	2	5	10	30
$\sqrt{x}$	......	......	......	......	......

11 Compléter avec les mots « image » ou « antécédent ».

a. $\sqrt{5}$ est l'.................. de 5 par la fonction racine carrée.

b. $\sqrt{7}$ est l'.................. de 7 par la fonction racine carrée.

c. 22 est l'.................. de $\sqrt{22}$ par la fonction racine carrée.

d. 6 est l'.................. de 36 par la fonction racine carrée.

e. 16 est l'.................. de 4 par la fonction racine carrée.

12 On considère la fonction f définie pour tout réel positif par $f(x)=\sqrt{x}$.
Compléter avec les expressions « la valeur exacte » ou « une valeur approchée ».

a. 10 est .... de $f(100)$.

b. $\sqrt{7}$ est .... de $f(7)$.

c. 3,3 est .... de $f(11)$.

d. 0 est .... de $f(0)$.

e. 1,41421 est .... de $f(2)$.

13 On considère la fonction f définie pour tout réel positif par $f(x)=2\sqrt{x}-3$.
Donner la valeur exacte des images des réels donnés.

$f(1)=$ ....

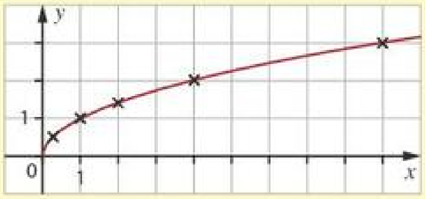
$f(3)=$ ....

$f(9)=$ ....

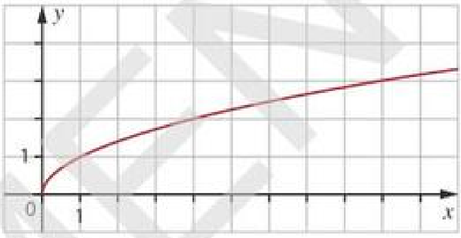
$f(5)=$ ....

$f(0)=$ ....

▸ La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$.



14 1. Placer sur le graphique ci-dessous les images des réels 2 ; 3 ; 5 ; 10 par la fonction racine carrée.



2. Compléter en utilisant les symboles $\leqslant$ ou $\geqslant$.

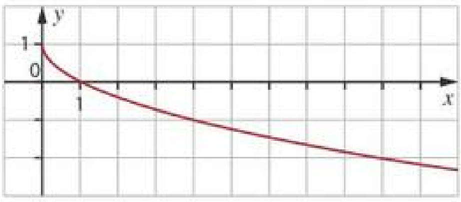
a. $2\leqslant 3$, donc $\sqrt{2}$ .... $\sqrt{3}$.

b. $5\geqslant 2$, donc $\sqrt{5}$ .... $\sqrt{2}$.

c. $2\leqslant 10$, donc $\sqrt{2}$ .... $\sqrt{10}$.

d. $10\geqslant 3$, donc $\sqrt{10}$ .... $\sqrt{3}$.

15 On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x)=1-\sqrt{x}$, dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.



1. Placer sur le graphique ci-dessus l'image des nombres 2 et 5 par la fonction f.

2. En utilisant le graphique, indiquer quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

....

....

3. Comparer les nombres réels $1-\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{5}$ sans faire de calcul.

....

....

....

....

3 Résoudre une équation ou une inéquation avec la fonction racine carrée

Soit k un nombre réel.
Pour tout réel x positif ou nul, l'équation $\sqrt{x} = k$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = \{k^2\}$ si $k \geqslant 0$;
$\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.

16 Résoudre les équations suivantes en donnant l'ensemble des solutions.

a. $\sqrt{x} = -7$ ....

b. $\sqrt{x} = 2$ ....

c. $\sqrt{x} = 10$ ....

d. $\sqrt{x} = 0$ ....

e. $\sqrt{x} = -\frac{1}{3}$ ....

f. $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ ....

17 Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions.

a. $2\sqrt{x} = 8$

b. $3\sqrt{x} - 2 = 13$

18 MODE EXPERT ! Tom doit résoudre l'équation $\sqrt{x-1} = 5$. Voici sa résolution :
« On pose $X = x - 1$.
$\sqrt{x-1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{X} = 5 \Leftrightarrow X = 25$
$\Leftrightarrow x - 1 = 25 \Leftrightarrow x = 26$
$\mathcal{S} = \{26\}$. »
À la manière de Tom, résoudre l'équation $2\sqrt{x+3} = 12$.

Soit k un nombre réel.
- Pour tout réel x positif ou nul, l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant k$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = [0\,;k^2]$ si $k \geqslant 0$;
$\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.
- Pour tout réel x positif ou nul, l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant k$ a pour ensemble de solution :
$\mathcal{S} = [k^2\,;+\infty[$ si $k \geqslant 0$;
$\mathcal{S} = [0\,;+\infty[$ si $k < 0$.

19 Donner l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x} \geqslant 3$ ....

b. $\sqrt{x} \leqslant 1$ ....

c. $\sqrt{x} \geqslant -6$ ....

d. $\sqrt{x} \leqslant -2$ ....

20 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $3\sqrt{x} - 2 \leqslant 7$

b. $-4\sqrt{x} + 5 \leqslant -11$

21 MODE EXPERT ! Lilia doit résoudre l'inéquation $\sqrt{2x+1} \leqslant 5$. Voici sa résolution :
« On pose $X = 2x + 1$
$\sqrt{2x+1} \leqslant 5 \Leftrightarrow \sqrt{X} \leqslant 5 \Leftrightarrow 0 \leqslant X \leqslant 25$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant 2x + 1 \leqslant 25 \Leftrightarrow -1 \leqslant 2x \leqslant 24$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 12$
$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}\,;12\right]$. »
À la manière de Lilia, résoudre l'inéquation $\sqrt{x-3} \geqslant 7$.

4 Connaître la fonction inverse

- La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

0 n'a pas d'image par la fonction inverse.

- Le produit d'un nombre réel x non nul par son inverse est égal à 1 : $x \times \dfrac{1}{x} = 1$.

L'inverse de $\dfrac{1}{x}$ est x.

22 Compléter les phrases avec le nombre manquant.

a. L'inverse de 4 est …

b. L'inverse de -8 est …

c. L'inverse de $\dfrac{1}{5}$ est …

d. L'inverse de $\sqrt{3}$ est …

23 Mathilde dit à Isman : « L'inverse de -7 est $-\dfrac{1}{7}$ ». Isman lui répond « Non, tu te trompes, l'inverse de -7 est $\dfrac{1}{-7}$ ». Qui a raison ?

24 Donner la valeur écrite sous forme décimale de l'inverse des nombres suivants.

a. L'inverse de 0,25 est …

b. L'inverse de 0,01 est …

c. L'inverse de 8 est …

d. L'inverse de 2 000 est …

25 Calculer les images des nombres a suivants par la fonction inverse. Donner la valeur exacte et éventuellement une valeur approchée au millième.

a. $a = 1$

b. $a = -17$

c. $a = 6$

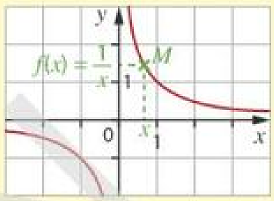
d. $a = -50$

26 MODE EXPERT ! Montrer que l'inverse de $\sqrt{2} - 1$ est $\sqrt{2} + 1$.

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine O du repère. C'est une **hyperbole**.



27 Compléter les phrases suivantes avec le symbole $\leqslant$ ou $\geqslant$.

a. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\sqrt{5} \leqslant 8$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ … $\dfrac{1}{8}$.

b. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $-3 \leqslant -1$, donc $-\dfrac{1}{3}$ … -1.

c. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $5 \geqslant 2$, donc $\dfrac{1}{5}$ … $\dfrac{1}{2}$.

d. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $-\sqrt{5} \geqslant -\sqrt{10}$, donc $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ … $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

28 En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\dfrac{1}{x}$ dans les cas suivants.

a. $x \in [2\,;4]$. La fonction inverse est décroissante sur $[2\,;4]$ donc $\dfrac{1}{x} \in$ …

b. $x \in [-5\,;-1]$. La fonction inverse est … donc $\dfrac{1}{x} \in$ …

c. $x \in [100\,;1\,000]$. …

29 MODE EXPERT ! Montrer que, si $x \geqslant 1$, alors $\dfrac{1}{x} \leqslant x$.

5 Résoudre une équation ou une inéquation avec la fonction inverse

▸ Pour tout nombre réel $a \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x} = a$ admet une unique solution $x = \dfrac{1}{a}$.
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{a}\right\}$

30 Donner, sans calcul, l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} = 3$

b. $\dfrac{1}{x} = -5$

c. $\dfrac{1}{x} = 1$

d. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{7}$

e. $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{3}$

31 Résoudre les équations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} + 2 = 5$

b. $\dfrac{1}{x} - 7 = -15$

c. $-\dfrac{1}{x} + 4 = \dfrac{1}{3}$

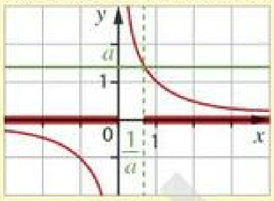
▸ Un quotient est nul si et seulement si :
- son numérateur est nul ;
- et son dénominateur est non nul.

32 Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{D}$ donné.

a. $\dfrac{x-3}{x+1} = 0$ $\qquad \mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$

b. $\dfrac{2x-1}{x-2} = 0$ $\qquad \mathcal{D} =]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$

▸ Pour tout nombre réel $a \neq 0$, l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leqslant a$ admet une infinité de solutions. On peut les déterminer graphiquement à l'aide de la courbe représentative de la fonction inverse.



L'ensemble des solutions peut s'écrire à l'aide d'**intervalles**.

33 En utilisant la courbe de la fonction inverse, donner l'ensemble de solutions des inéquations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$

b. $\dfrac{1}{x} \geqslant 5$

c. $\dfrac{1}{x} \geqslant -3$

d. $\dfrac{1}{x} < -2$

34 En utilisant la courbe de la fonction inverse, résoudre les inéquations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} + 4 \leqslant 8$

b. $\dfrac{1}{x} - 3 \geqslant \dfrac{1}{2}$

c. $\dfrac{2}{x} + 2 \leqslant 1$

35 MODE EXPERT ! Résoudre l'inéquation $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{4}$.

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

36 Donner la valeur exacte.

a. $\sqrt{36} =$ .... b. $\sqrt{16} =$ ....

c. $\sqrt{100} =$ .... d. $\sqrt{64} =$ ....

37 Simplifier au maximum.

a. $\sqrt{3} \times \sqrt{12} =$ ....

b. $\sqrt{5} \times \sqrt{12{,}8} =$ ....

c. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$ ....

38 Donner l'ensemble de solutions des équations suivantes.

a. $\sqrt{x} = 6$ ....

b. $\sqrt{x} = -1$ ....

39 Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x} \geqslant 3$ ....

b. $\sqrt{x} \leqslant 2$ ....

40 Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} = 2$ ....

b. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3}$ ....

41 Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} \leqslant 6$ ....

b. $\dfrac{1}{x} \geqslant 3$ ....

Parcours 2

MODE EXPERT !

42 Donner la valeur exacte.

a. $3\sqrt{25} =$ .... b. $\sqrt{144} =$ ....

c. $\sqrt{400} =$ .... d. $-5\sqrt{36} =$ ....

43 Simplifier au maximum.

a. $\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{1}{2}} =$ ....

b. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{15} =$ ....

c. $\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$ ....

44 Donner l'ensemble de solutions des équations suivantes.

a. $5\sqrt{x} = 10$ ....

b. $-4\sqrt{x} = 3$ ....

45 Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{1}{6}$ ....

b. $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{4}$ ....

46 Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} + 1 = 3$ ....

b. $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1}{2}$ ....

47 Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a. $\dfrac{1}{x} + 2 \leqslant 4$ ....

b. $-\dfrac{1}{x} \geqslant -3$ ....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

ou hachette-clic.fr/22ma2007

Problèmes

ceinture jaune   ceinture verte   ceinture noire

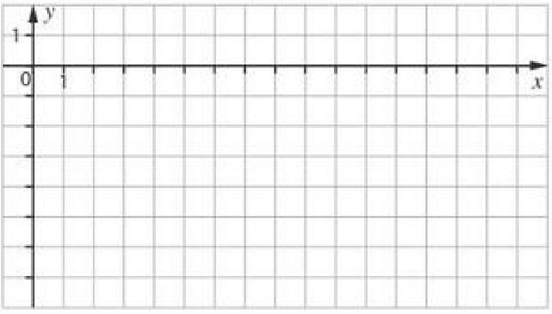
48 Une fonction racine
Calculer

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	4	9	16
$f(x)$	......	......	......	......	......

2. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0;16]$.



49 La vitesse
Calculer, raisonner

Une voiture parcourt une distance $d = 120$ km à vitesse constante. La vitesse de la voiture, notée V (en km · h⁻¹), s'exprime en fonction du temps t (en h) par la formule :

$$V = \frac{120}{t}.$$

1. Quelle est la vitesse de la voiture si elle met 2 h pour parcourir la distance d ?

2. Quelle est la vitesse de la voiture si elle met 1 h 30 min pour parcourir la distance d ?

3. Quel temps met la voiture pour parcourir la distance d si elle roule à 90 km $\cdot$ h^{-1} ?

50 Vrai ou faux ?
Raisonner, communiquer

Pour chaque proposition ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier avec une définition ou une propriété du cours.

1. La fonction inverse est définie pour tout réel x.

2. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; +\infty[$.

3. La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

51 Le micro-ondes
Calculer, raisonner

Pour chauffer une quantité d'eau dans un four à micro-ondes, la puissance nécessaire P (exprimée en watts) est donnée par la formule $P = \frac{293\ 000}{d}$, où d est la durée de chauffage (exprimée en secondes).

1. Quelle est la puissance nécessaire pour chauffer l'eau pendant 3 minutes ? Arrondir au watt près.

2. Compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir au watt près.

d (en s)	180	240	300	360	540
P (en W)	......	......	......	......	......

3. En utilisant le tableau précédent, déterminer la durée de chauffage de l'eau, en minutes, lorsque la puissance utilisée est de 814 watts.

4. Déterminer la durée de chauffage de l'eau (en secondes) pour une puissance $P = 1\ 465$ watts.

52 Le club
Raisonner, calculer

Un club organise une sortie pour ses adhérents.

Le nombre de personnes participant à la sortie est un nombre x compris entre 1 et 40.

Le transporteur facture un coût fixe de 200 € auquel s'ajoute 10 € par personne.

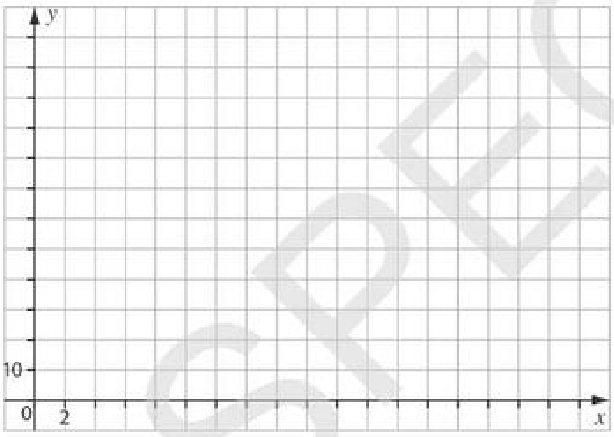
On note $C(x)$ le coût total du transport par personne (exprimé en €).

1. Expliquer pourquoi $C(x) = \frac{200}{x} + 10$.

2. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	1	4	10	20	40
$C(x)$					

3. Représenter la fonction C dans le repère ci-dessous.



4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 20$.

5. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

53 Le tsunami
Calculer, modéliser

La vitesse d'un tsunami dépend de la profondeur de l'océan dans lequel il se propage. Cette vitesse v (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) se calcule par la formule :

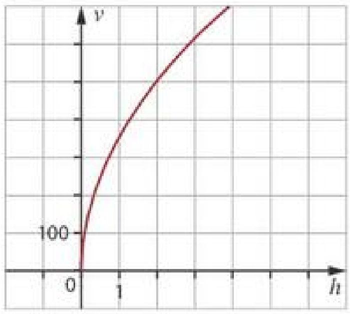
$$v = 870\sqrt{\frac{h}{6}},$$

où h est la profondeur de l'océan (en km).

1. Quelle est la vitesse d'un tsunami qui se propage dans un océan de 6 km de profondeur ?

2. Quelle est la profondeur de l'océan lorsque $v = 1000\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$? Arrondir au km près.

3. On a tracé la fonction v dans le repère ci-dessous.



Déterminer l'intervalle des profondeurs telles que la vitesse v soit inférieure ou égale à $500\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

54 Algo et Python

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

1. Compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie les valeurs de $f(x)$ pour un nombre x donné en argument.

```
def f(x):
    return ........................
```

2. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la plus petite valeur entière de x pour laquelle $f(x) \leqslant 0{,}0001$.

```
def seuil():
    x=0
    while ........................:
        x=x+1
    return ........................
```

3. Sofiane a obtenu l'affichage ci-contre dans la console. Interpréter ce résultat.

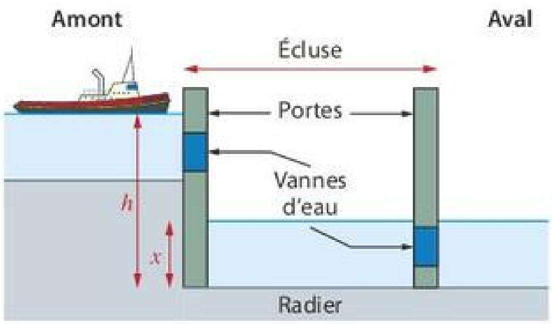
```
>>> seuil()
9999
```

4. Soit m un réel strictement positif. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la plus petite valeur entière de x pour laquelle $f(x) \leqslant m$.

55 L'écluse

Modéliser, raisonner

Lorsqu'un bateau se présente en amont d'une écluse, il faut faire monter le niveau de l'eau afin que le bateau puisse rejoindre l'aval de l'écluse (voir figure ci-après).



On note h (en mètres) la hauteur du niveau de l'eau en amont de l'écluse et x la hauteur (en mètres) du niveau de l'eau dans l'écluse. Ces hauteurs sont mesurées à partir du fond de l'écluse appelé le radier.

Un bateau se présente lorsque $h=5{,}2$ m et $x=2{,}1$ m. À cet instant, on ouvre les vannes pour remplir l'écluse.

La vitesse v d'écoulement de l'eau (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) versée par les vannes a pour expression :

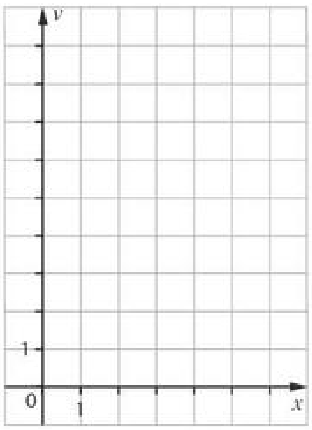
$$v=\sqrt{2g(h-x)},$$

où $g=9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

1. Calculer la vitesse de l'eau au moment où le bateau se présente en amont de l'écluse. Arrondir au dixième.

2. Pour quelle valeur de x la vitesse d'écoulement de l'eau est-elle nulle ?

3. a. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $x \mapsto v(x)$, avec $h=5{,}2$ m.



b. Déterminer graphiquement la hauteur x de l'eau dans l'écluse lorsque $v=5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

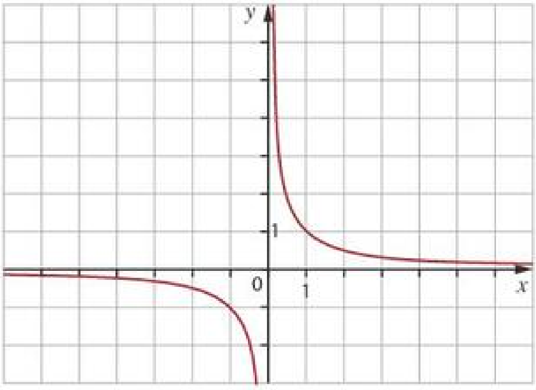
c. Retrouver ce résultat par le calcul.

56 On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x}$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x)=3+\dfrac{1}{x}$.

2. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction inverse.

Tracer sur le graphique la courbe de la fonction f en expliquant la démarche.



57 On considère la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x)=2\sqrt{4x}-1$.

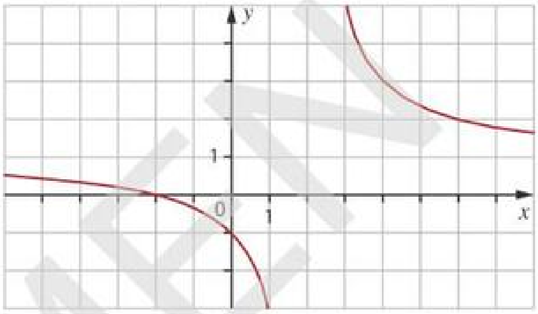
1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

2. Déterminer graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de 5 par la fonction f.

3. Retrouver ce résultat par le calcul.

58 On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 2$, par $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$.

On a représenté la courbe représentative de la fonction f ci-dessous.



1. Conjecturer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

2. a. Résoudre l'inéquation $x+2>0$.

b. Résoudre l'inéquation $x-2>0$.

c. À l'aide des questions précédentes, retrouver le résultat de la question 1.

Démonstration

Démo de cours

Soient a et b deux réels positifs.
$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

1. Rappeler ce que signifie $\sqrt{a\times b}$ en utilisant la définition de la racine carrée.

2. a. Calculer le carré du nombre $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

b. Quel est le signe de $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$?

c. Conclure.

Chapitre

8 Compléments sur les fonctions

1 Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe

▶ Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
La **courbe représentative** de f est l'ensemble des points $M(x\,;f(x))$ pour tout $x \in I$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
$f(1) = 2$ donc le point $A(1\,;2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

1 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction f ? Justifier.

a. $A(-1\,;-3)$:

b. $B(1\,;2)$:

c. $C(-2\,;-3)$:

2 On considère la fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -3x + 4$.

1. Quelle est la nature de la courbe représentative de f ?

2. Le point $A(250\,;-746)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

3. a. Résoudre l'équation $f(x) = 10$.

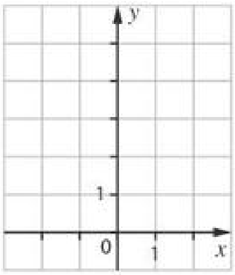
b. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3 On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = x^2 + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Compléter le tableau suivant.

x	-2	-1	0	$0,5$	$1,5$
$f(x)$					

2. Placer les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ du tableau précédent dans le repère ci-contre puis tracer la courbe représentative de la fonction f.



4 1. Soit f la fonction inverse. Exprimer $f(x)$ en fonction de x. Quelle est la nature de la courbe représentative de la fonction f ?

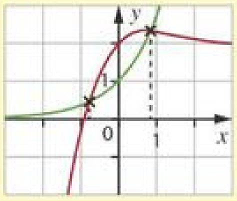
2. Soit A le point de la courbe représentative de la fonction inverse d'abscisse 10. Déterminer l'ordonnée de A.

3. Soit B le point de la courbe représentative de la fonction inverse d'ordonnée 4. Déterminer l'abscisse de B.

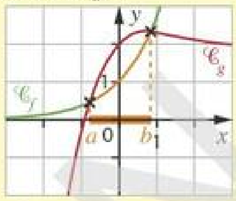
5 MODE EXPERT ! Soit f la fonction définie pour tout $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Montrer que la courbe représentative de f ne comporte aucun point d'ordonnée 1.

2 Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ ou une inéquation du type $f(x) < g(x)$

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I.
Résoudre l'**équation $f(x) = g(x)$** revient à trouver tous les nombres réels x de I qui ont la même image par f et par g, c'est-à-dire les abscisses de tous les points d'intersection entre les courbes représentatives de f et de g.

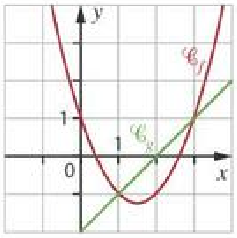


Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. Résoudre l'**inéquation $f(x) < g(x)$** revient à trouver tous les nombres réels x de I dont l'image par f est strictement inférieure à l'image par g, c'est-à-dire les abscisses de tous les points de la courbe représentative de f qui sont au-dessous des points de la courbe de g.



6 On a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-1 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ et } g(x) = x - 2.$$



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Vérifier par le calcul que les valeurs trouvées sont bien des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

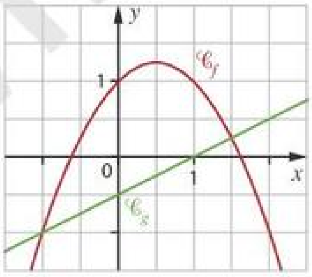
7 Soient f et g les fonctions définies pour tout réel x positif par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ et $g(x) = 3\sqrt{x} + 2$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives des fonctions f et g ?

8 On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = -x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



9 Soient f et g deux fonctions définies pour tout réel x par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -4x + 5$.

1. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < g(x)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g ?

3 Reconnaître une fonction paire ou impaire

▸ Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine O du repère. Soit f une fonction définie sur I.
La fonction f est **paire** lorsque, pour tout réel x de I, on a :

$$f(-x) = f(x).$$

La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

10 Entourer les intervalles qui sont symétriques par rapport à O.

a. $[-5\,;5]$ b. $[-7\,;3]$ c. $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

d. $]-10\,;10[$ e. $]-\infty\,;+\infty[$ f. $]0\,;+\infty]$

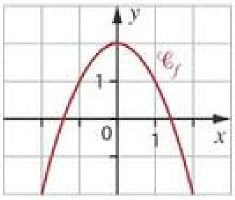
11 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^2+4$.

1. L'ensemble de définition de f est-il symétrique par rapport à O ?

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$.

3. Qu'en déduit-on pour la fonction f et sa courbe représentative ?

12 On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à $[-2\,;2]$ par $f(x)=-x^2+2$ et dont la courbe représentative a été tracée ci-contre.



1. La fonction f semble-elle être paire ?

2. Démontrer que f est paire.

▸ Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine O du repère. Soit f une fonction définie sur I.
La fonction f est **impaire** lorsque, pour tout réel x de I, on a :

$$f(-x) = -f(x).$$

La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

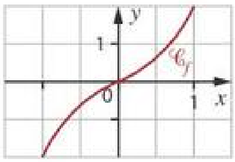
13 On considère la fonction f définie, pour tout réel x non nul, par $f(x)=\frac{1}{x}+x$.

1. Calculer $-f(x)$.

2. Calculer $f(-x)$.

3. Qu'en conclut-on pour la fonction f ?

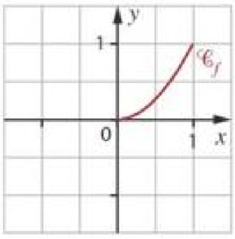
14 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^3+x$.
On a tracé ci-contre la courbe représentative de f.



1. La fonction semble-t-elle impaire ?

2. Démontrer que f est impaire.

15 MODE EXPERT ! On considère une fonction f définie sur $[-1\,;1]$ et impaire.



1. Compléter ci-contre la courbe représentative de f.

2. Pour $x\in[0\,;1]$, l'expression de $f(x)$ est $f(x)=x^2$. Quelle est l'expression de $f(x)$ pour $x\in[-1\,;0]$?

4 Construire et exploiter un tableau de variations

▸ Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- f est **croissante** sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.

On peut résumer les variations d'une fonction dans un **tableau de variations**.

16 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	-3		5
Variations de f	-5	$\nearrow$	2

1. Quel est le sens de variation de f sur $[-3\,;5]$?

2. Compléter.

$f(-3) =$ ……

$f(5) =$ ……

17 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-7\,;8]$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	-7		0		8
Variations de f	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1. Quel est le sens de variation de f sur $[-7\,;8]$?

2. Compléter.

$f(8) =$ ……

$f(0) =$ ……

18 On considère une fonction f décroissante sur $[-2\,;4]$ et croissante sur $[4\,;7]$.

On sait que : $f(-2) = 5$; $f(4) = -5$ et $f(7) = 1$.

Dresser le tableau de variations de f sur $[-2\,;7]$.

		$\searrow$		$\nearrow$	

19 On considère une fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	8	$\searrow$	

1. Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty\,;+\infty[$?

2. Compéter les phrases suivantes.

a. f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et $-5 \leqslant -3$,

donc $f(-5)$ …… $f(-3)$.

b. f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et $-7 \leqslant -2$,

donc …… .

c. f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et $4 \leqslant 6$,

donc …… .

d. f est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et $-1 \leqslant 0$,

donc …… .

e. f est …… et $1 \leqslant 5$,

donc $f(1) \geqslant f(5)$.

20 MODE EXPERT ! On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	-5		1		2		5
Variations de f	-6	$\nearrow$	……	$\nearrow$	……	$\nearrow$	3

On sait de plus que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1{,}5$.

1. Compléter sur le tableau précédent les valeurs manquantes.

2. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de la solution a de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.

5 Déterminer un extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

▸ Le **maximum d'une fonction** f, s'il existe, est la plus grande valeur des images $f(x)$ pour tout réel x appartenant à I.

x	a		α		b
Variations de f			$f(\alpha)$		
	$f(a)$	↗		↘	$f(b)$

On dit que $f(\alpha)$ est le maximum de f et qu'il est atteint en α.

▸ Le **minimum d'une fonction** f, s'il existe, est la plus petite valeur des images $f(x)$ pour tout réel x appartenant à I.

x	a		α		b
Variations de f	$f(a)$	↘		↗	$f(b)$
			$f(\alpha)$		

On dit que $f(\alpha)$ est le minimum de f et qu'il est atteint en α.

▸ Lorsqu'une fonction admet un minimum ou un maximum, on dit qu'elle admet un **extremum**.

21 On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-2		0		4
Variations de f			1		
	-3	↗		↘	0

Compléter les phrases suivantes.

a. f admet .... comme maximum ; ce maximum est atteint en ....

b. f admet .... comme minimum ; ce minimum est atteint en ....

22 On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-4		0		6
Variations de f	5	↘		↗	1
			-1		

Déterminer les extremums de f et les réels en lesquels ils sont atteints.

23 On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		1		5
Variations de f					1
		↘	0	↗	

1. La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui, en quelle valeur est-il atteint ?

2. Déduire de la question **1**, le signe de $f(x)$ pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;5]$.

24 On considère une fonction f vérifiant :

- f est définie sur $[-8\,;1]$.
- $f(-8) = -1$
- f admet un maximum atteint en -4 qui vaut 3.
- f admet un minimum atteint en 0 qui vaut -5.
- f s'annule en 1.
- f est croissante sur $[-8\,;-4]$ et sur $[0\,;1]$.
- f est décroissante sur $[-4\,;0]$.

Dresser le tableau de variations de f.

25 MODE EXPERT ! On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

1. Calculer $f(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 + 4$.

3. Quel est le signe de $(x-1)^2$ pour tout réel x ?

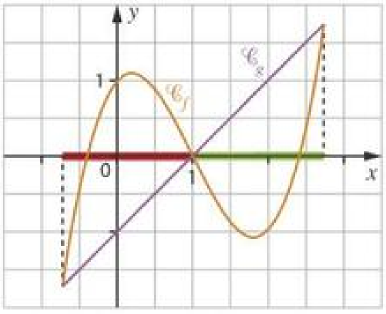
4. En déduire que f admet un minimum.

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

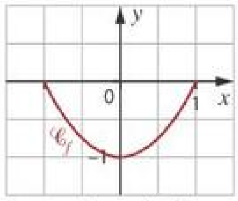
26 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 1$. Le point $A(0\ ;\ 1)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

27 On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est-il tracé en rouge ou en vert ?

28 On considère la fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



f semble-t-elle paire ou impaire ?

29 On considère la fonction f dont le tableau de variations est le suivant.

x	−3	−2	2	4	5
Variations de f	0 ↗	2 ↘	−2 ↗	3 ↘	2

La fonction f admet-elle un minimum ?

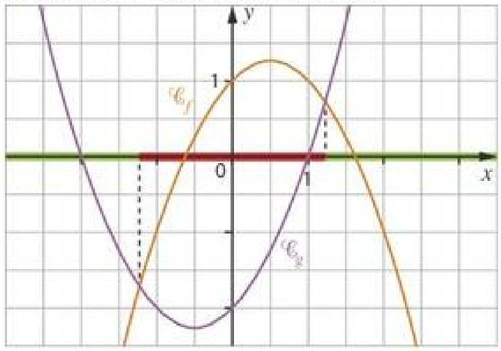
Parcours 2 MODE EXPERT !

30 Déterminer l'ordonnée du point A d'abscisse 2 qui appartient à la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x^2 + 4$.

31 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 3$. f est-elle paire ou impaire ?

32 f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Comparer $f(1)$ et $f(2)$.

33 On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est-il tracé en rouge ou en vert ?

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

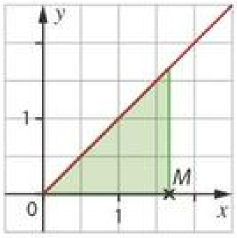
ou hachette-clic.fr/22ma2008

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

34 Le triangle
Raisonner, communiquer

On considère la droite d'équation $y = x$ et un point $M(x\ ;\ 0)$, mobile sur l'axe des abscisses, avec x variant de 0 à $+\infty$.



On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle vert.

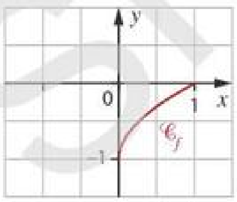
1. Quel est le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$?

2. Sans calcul, comparer l'aire du triangle lorsque $x = 3$ et $x = 4$. Justifier.

35 Une fonction paire
Modéliser, raisonner

On a tracé ci-dessous une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$. On sait de plus que la fonction f est paire.

1. Compléter la courbe de f.



2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-1\ ;\ 1]$.

3. Que peut-on dire du signe de $f(x)$?

4. Encadrer $f(0{,}5)$ entre deux entiers consécutifs.

36 Le coronavirus
Raisonner, communiquer

Lors de l'épidémie de coronavirus, on a établi le graphique ci-dessous qui montre la fonction *taux d'incidence*, c'est-à-dire le nombre de cas positifs par semaine pour 100 000 habitants entre mai 2020 et novembre 2021.

1. Quel est le sens de variation de cette fonction entre les mois d'avril 2021 et juillet 2021 ?

2. Cette fonction admet-elle un maximum ? Si oui, quelle est sa valeur approximative ?

3. Cette fonction admet-elle un minimum durant l'année 2021 ? Si oui quand est-il atteint ?

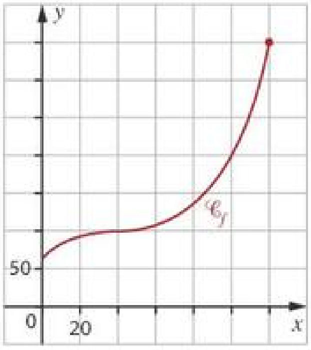
37 Les bonnets de Noël

Raisonner, calculer, communiquer

Une entreprise fabrique chaque jour des bonnets de Noël.

Le service comptabilité a déterminé la fonction f qui représente le coût (en euros) de fabrication de x bonnets (x compris entre 0 et 120).

Il a également tracé la courbe représentative de la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. En utilisant le graphique, déterminer le coût de fabrication de 40 bonnets.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 120]$?

3. L'entreprise vend les bonnets au prix de 2,50 € pièce. On note g la fonction recette pour x bonnets vendus. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

4. Représenter la fonction g sur le graphique précédent. On notera $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

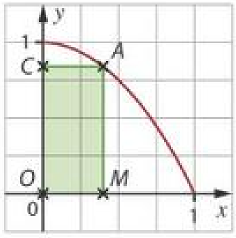
6. Interpréter le résultat précédent.

38 Le rectangle variable

Calculer, raisonner

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = -x^2 + 1$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



On considère un point M variable, d'abscisse x appartenant à $[0\ ;\ 1]$.

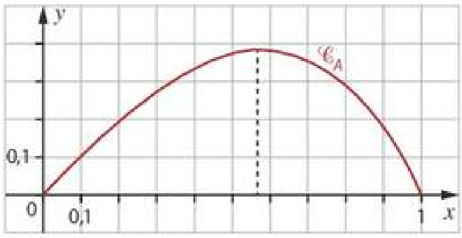
On construit le rectangle $OMAC$ comme sur la figure ci-dessous, où le point A a la même abscisse que le point M.

1. Quelles sont les coordonnées du point M ?

2. Quelles sont les coordonnées du point A ?

3. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle $OMAC$. Calculer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

4. On a tracé la fonction $\mathscr{A}$ dans le repère ci-dessous.



a. Déterminer graphiquement le sens de variation de $\mathscr{A}$ et dresser son tableau de variations.

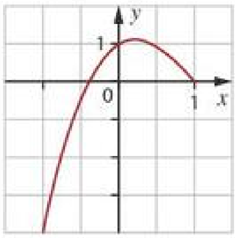
b. L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle $OMAC$ admet-elle un maximum ? En quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

39 Algo et Python

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



1. On conjecture graphiquement que la fonction f admet un maximum M atteint en un réel a. Déterminer deux entiers consécutifs qui encadrent le réel a.

2. Écrire une fonction Python qui renvoie les valeurs de $f(x)$ pour un réel x entré en argument.

```
def f(x):
    ........................................
```

3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée au centième du maximum de la fonction sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

```
def Max():
    M=f(0)
    x=........
    for k in range(100):
        x=x+1/100
        y=f(x)
        if y>M:
            ........................
    return M
```

4. Écrire les fonctions précédentes dans un éditeur et déterminer une valeur approchée du maximum de f sur $[0\,;\,1]$.

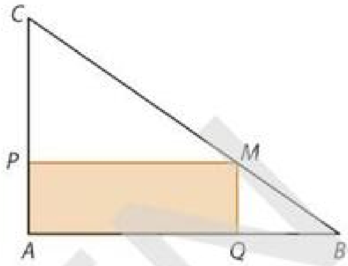
5. Comment peut-on modifier la fonction Max pour trouver une valeur approchée de maximum au millième ?

40 Rectangle variable

Communiquer, calculer

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 10$ cm et $AC = 7$ cm.

Soit M un point mobile entre B et C. On construit le rectangle $AQMP$ comme sur la figure ci-dessous.



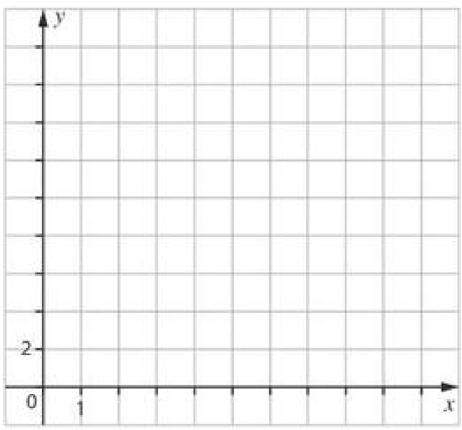
On pose $x = AQ$. x est exprimé en cm.

1. Exprimer MQ en fonction de AC, BQ et BA.

2. En déduire l'expression de MQ en fonction de x.

3. En déduire l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle $AQMP$ en fonction de x.

4. Tracer la courbe représentative de la fonction $\mathscr{A}$, puis déterminer graphiquement les valeurs de x telles que l'aire du rectangle $AQMP$ soit supérieure ou égale à 6 cm^2.



41 Ni paire ni impaire
Calculer, raisonner

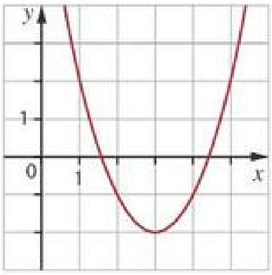
On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de -1 et de 1 par $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$.
Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

42 Affine ou linéaire ?
Calculer, raisonner

Montrer que si une fonction affine f est impaire, alors f est linéaire.

43 Parabole
Calculer, raisonner

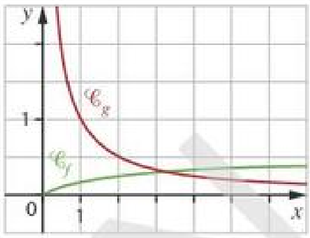
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^2-6x+7$. On a tracé la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



1. Conjecturer graphiquement le minimum de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)+2=(x-3)^2$.
3. En déduire la valeur exacte du minimum de la fonction f.
4. En quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

44 Intersection de courbes
Calculer, raisonner

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2x+4}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.
On a tracé leur courbe représentative dans un repère.



1. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=g(x)$.
2. Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$$
3. Montrer que $x^2-2x-4=(x-1)^2-5$.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution de l'équation $f(x)=g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

45 Drôles de fonctions
Chercher, raisonner, communiquer

Vrai ou Faux ? Justifier (on pourra justifier avec un graphique).

1. Si une fonction f admet un maximum, alors elle n'admet pas de minimum.
2. Si une fonction est définie et décroissante sur $\mathbb{R}$, alors il existe au moins une valeur de x telle que $f(x)<0$.
3. Une fonction peut admettre un maximum atteint en deux réels distincts.

Démonstration

Raisonnement : le contre-exemple

Pour démontrer qu'une propriété mathématique est fausse, on peut utiliser un contre-exemple, c'est-à-dire donner un exemple qui contredit la propriété.

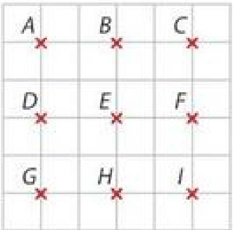
On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x)=x^2-3x$.
Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Chapitre 9 Vecteurs

1 Représenter des vecteurs

▸ Deux vecteurs non nuls sont **égaux** s'ils ont **même direction**, **même sens** et **même norme**.

1 Sur un quadrillage régulier, on a placé neuf points comme ci-dessous.

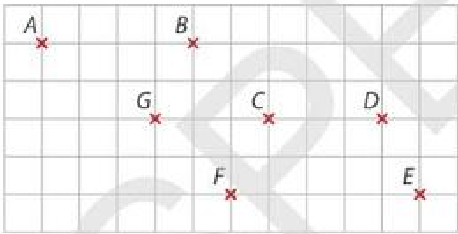


Compléter les égalités suivantes.

a. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{F\ldots\ldots}$ b. $\overrightarrow{C\ldots\ldots} = \overrightarrow{HG}$ c. $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{\ldots\ldots D}$

d. $\overrightarrow{\ldots\ldots E} = \overrightarrow{BD}$ e. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{A\ldots\ldots}$ f. $\overrightarrow{C\ldots\ldots} = \overrightarrow{FG}$

2 Sur un quadrillage régulier, on a placé sept points comme ci-dessous.



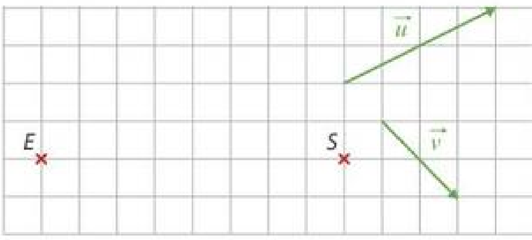
Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .... b. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CG}$ ....

c. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CF}$ .... d. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ ....

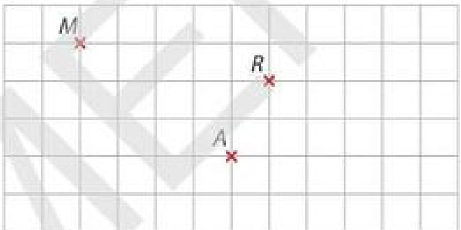
e. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CG}$ .... f. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ ....

3 Sur la figure suivante réalisée sur un quadrillage régulier, construire le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ et le point R tel que $\overrightarrow{RS} = \vec{v}$.



▸ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

4 1. Sur la figure suivante réalisée sur un quadrillage régulier, construire le point T tel que $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{MA}$.

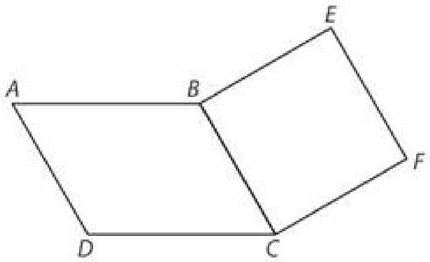


2. Quelle est la nature du quadrilatère $MRTA$?

....

....

5 Sur la figure suivante, $ABCD$ est un parallélogramme et $BEFC$ est un carré.



Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .... b. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ....

c. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BF}$ .... d. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ ....

e. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ .... f. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$ ....

6 MODE EXPERT ! R, S, T et U sont quatre points tels que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$. Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse.

a. $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{SU}$ .... b. $TU = SR$ ....

c. $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{TS}$ .... d. $(SU) // (RT)$ ....

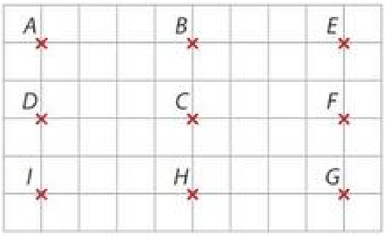
e. $(RU) // (TS)$ .... f. $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RT}$ ....

g. $UTRS$ est un parallélogramme. ....

2 Construire la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel

> Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur associé à l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

7 Sur un quadrillage régulier, on a placé neuf points comme ci-dessous.



Compléter les égalités suivantes.

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A\ldots}$

b. $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{H\ldots}$

c. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{D\ldots}$

d. $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{D\ldots}$

e. $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{\ldots G}$

f. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{\ldots D}$

8 Sur le quadrillage régulier ci-dessous, construire le représentant d'origine A et le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

> Pour trois points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
> C'est la **relation de Chasles**.

9 Compléter par des noms de points les égalités suivantes.

a. $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{R\ldots}$

b. $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{\ldots I}$

c. $\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{DK}$

d. $\overrightarrow{\ldots B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

e. $\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{F\ldots}=\overrightarrow{IV}$

f. $\overrightarrow{\ldots G}+\overrightarrow{GL}=\overrightarrow{E\ldots}$

> Pour un réel k et un vecteur $\vec{u}$ non nuls, le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
> - la même direction que $\vec{u}$;
> - le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $k<0$;
> - pour norme $|k|\times\|\vec{u}\|$.

10 Sur la droite graduée ci-dessous, on a placé cinq points.

Compléter les égalités suivantes par des nombres réels.

a. $\overrightarrow{BC}=\ldots\overrightarrow{BA}$

b. $\overrightarrow{AB}=\ldots\overrightarrow{AC}$

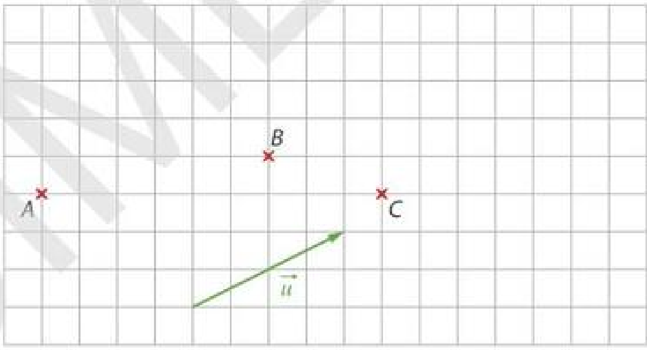
c. $\overrightarrow{DE}=\ldots\overrightarrow{DC}$

d. $\overrightarrow{BD}=\ldots\overrightarrow{AC}$

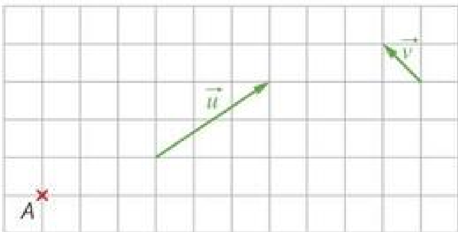
e. $\overrightarrow{CE}=\ldots\overrightarrow{AC}$

f. $\overrightarrow{EC}=\ldots\overrightarrow{CD}$

11 Sur le quadrillage régulier ci-dessous, construire le représentant d'origine A du vecteur $2\vec{u}$, le représentant d'origine B du vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$ et le représentant d'origine C du vecteur $1{,}5\vec{u}$.



12 Sur le quadrillage régulier ci-dessous, construire le représentant d'origine A du vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$.



13 MODE EXPERT ! Sur la figure ci-dessous, placer le point D tel que $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$.

3 Manipuler des expressions vectorielles

▸ Pour tous réels k et k', $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$.
• $2\vec{u}+3\vec{u}=5\vec{u}$

14 Réduire les expressions suivantes.

a. $4\vec{u}+5\vec{u}=$ ……

b. $2\vec{u}-7\vec{u}=$ ……

c. $2\vec{u}+2\vec{v}+6\vec{u}-3\vec{u}=$ ……

d. $0{,}5\vec{v}+3\vec{u}-4\vec{v}+6{,}5\vec{u}=$ ……

▸ Pour tous réels k et k', $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$.
• $2(3\vec{u})=(2\times3)\vec{u}=6\vec{u}$

15 Réduire les expressions suivantes.

a. $4(2\vec{u})=$ ……

b. $-3(5\vec{v})=$ ……

c. $7(-2\vec{u})=$ ……

d. $-4(-3\vec{v})=$ ……

▸ Pour tous réels k et k', $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k'\vec{v}$.
• $2(\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}$

16 Développer les expressions suivantes.

a. $4(\vec{u}+\vec{v})=$ ……

b. $2(\vec{u}-\vec{w})=$ ……

c. $-5(\vec{u}-\vec{v})=$ ……

17 Développer les expressions suivantes.

a. $2(3\vec{u}+\vec{v})=$ ……

b. $5(7\vec{u}+4\vec{v})=$ ……

c. $4(-2\vec{u}+3\vec{w})=$ ……

d. $-2(\vec{w}+4\vec{v})=$ ……

18 Développer puis réduire les expressions suivantes.

a. $3(\vec{u}+\vec{v})-5(\vec{u}-\vec{v})$

= ……

b. $4(3\vec{u}+6\vec{v})+3(2\vec{u}-7\vec{v})$

= ……

19 MODE EXPERT ! Réduire les expressions suivantes.

a. $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{u}+6\vec{v}\right)-\frac{1}{3}(4\vec{u}-3\vec{v})$

= ……

b. $\frac{3}{4}(3\vec{u}-5\vec{v})+\frac{1}{2}\left(5\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$

= ……

……

▸ S'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, alors $\vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}$.
• Si $\vec{v}=\frac{2}{3}\vec{u}$ alors $\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{v}$

20 Dans chaque cas, exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$.

a. $\vec{v}=\frac{4}{3}\vec{u}$ $\vec{u}=$ ……

b. $\vec{v}=3\vec{u}$ $\vec{u}=$ ……

c. $\vec{v}=-\frac{1}{7}\vec{u}$ $\vec{u}=$ ……

▸ Pour simplifier des expressions vectorielles, on peut utiliser la relation de Chasles.
• $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$

21 A, B et C sont trois points du plan. Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles.

a. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=$ ……

b. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}=$ ……

c. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}=$ ……

22 ABC est un triangle. L est le point défini par $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
En écrivant que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, exprimer $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

……

……

23 MODE EXPERT ! 1. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ en sachant que $2\vec{v}-\frac{3}{4}\vec{u}=\vec{0}$.

……

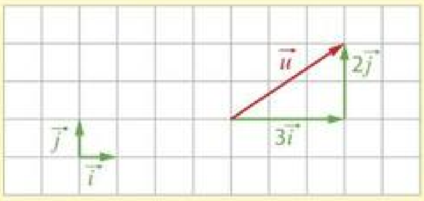
2. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en sachant que $4\overrightarrow{AM}+5\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

……

3. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sachant que $2\vec{u}-3\vec{v}+5\vec{w}=\vec{0}$.

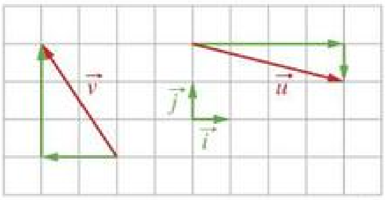
……

4 Connaître les coordonnées d'un vecteur

- On appelle **base orthonormée du plan** un couple de vecteurs dont les directions sont perpendiculaires et qui ont pour norme 1.
Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x\ ;\ y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

24 On a tracé des vecteurs sur un quadrillage régulier. On considère la base orthonormée du plan $(\vec{i}, \vec{j})$.

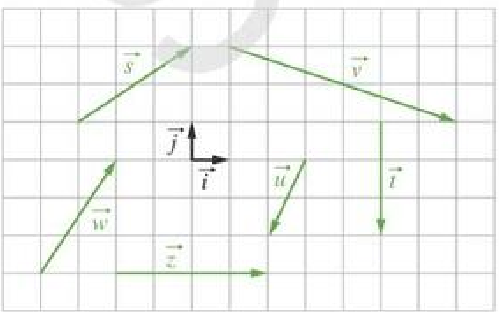


Compléter les phrases suivantes.

a. On a $\vec{u}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$, donc le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées .... dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b. On a $\vec{v}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$, donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées .... dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

25 Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



a. $\vec{u}$ .... **b.** $\vec{v}$ ....

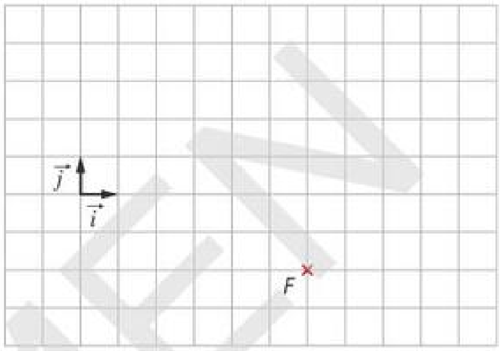
c. $\vec{w}$ .... **d.** $\vec{z}$ ....

e. $\vec{t}$ .... **f.** $\vec{s}$ ....

26 Tracer le représentant d'origine F de chacun des vecteurs suivants, dont les coordonnées sont données dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

d. $\vec{z}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e.** $\vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **f.** $\vec{s}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$



27 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan.

1. Pour chacun des vecteurs suivants, donner ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

a. $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ....

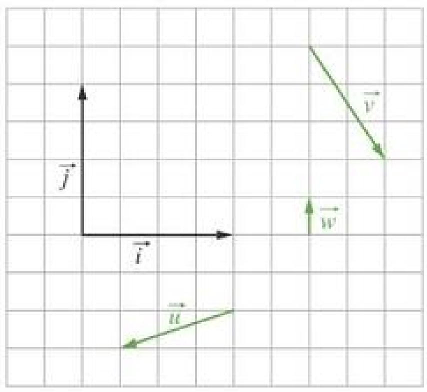
b. $\vec{v} = -5\vec{i} - 4\vec{j}$ ....

2. Pour chacun des vecteurs suivants, compléter les égalités par des nombres réels.

a. $\vec{s}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{s}$ = ... $\vec{i}$ + ... $\vec{j}$

b. $\vec{t}\begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ $\vec{t}$ = ... $\vec{j}$ + ... $\vec{i}$

28 MODE EXPERT ! Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



a. $\vec{u}$ .... **b.** $\vec{v}$ .... **c.** $\vec{w}$ ....

5 Calculer avec les coordonnées de vecteurs

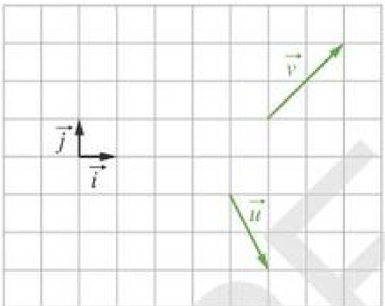
Dans toute cette page, on se place dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
- Si k est un réel et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

29 Compléter le tableau suivant.

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u}+\vec{v}$	$5\vec{u}$	$-2\vec{v}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$			

30 Compléter les phrases à l'aide de la figure.



a. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

b. Le vecteur $3\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

c. Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

d. Le vecteur $-4\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

31 On a $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Compléter.

a. $\vec{u}+2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

b. $-5\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

c. $2\vec{u}+3\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

d. $-4\vec{u}-6\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

e. $-3\vec{u}+4\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

32 MODE EXPERT ! On a $\vec{u}=\frac{1}{4}\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}$ et $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}$.

Déterminer les coordonnées de $\frac{1}{3}\vec{u}-3\vec{v}$.

$\frac{1}{3}\vec{u}-3\vec{v}=$ ....

....

....

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors la **norme** du vecteur $\vec{u}$ vaut $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

33 Calculer la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\|\vec{u}\|=$ ....

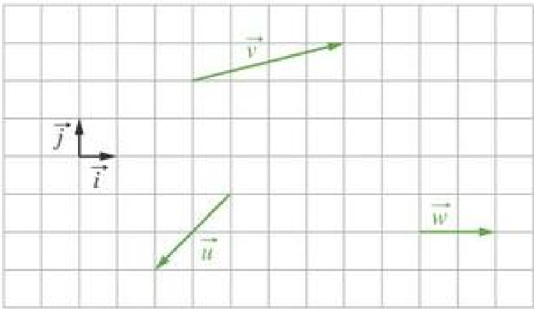
$\|\vec{v}\|=$ ....

$\|\vec{w}\|=$ ....

$\|\vec{t}\|=$ ....

$\|\vec{s}\|=$ ....

34 Compléter les égalités à l'aide de la figure.



a. $\|\vec{u}\|=$ ....

b. $\|\vec{v}\|=$ ....

c. $\|\vec{w}\|=$ ....

35 MODE EXPERT ! On a $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. Calculer la norme de $\vec{u}$.

....

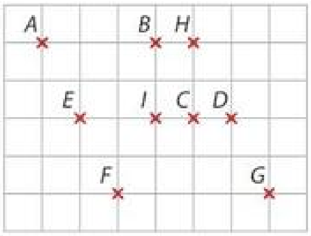
2. Que vaut la norme de $6\vec{u}$?

....

6 Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires

▸ On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

36 Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs proposés sont colinéaires ou non.



a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ....

b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ ....

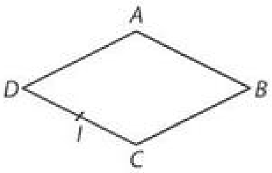
c. $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$ ....

d. $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IE}$ ....

e. $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{FE}$ ....

f. $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{BC}$ ....

37 *ABCD* est un losange et *I* est le milieu de [*CD*].



Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs proposés sont colinéaires ou non.

a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ....

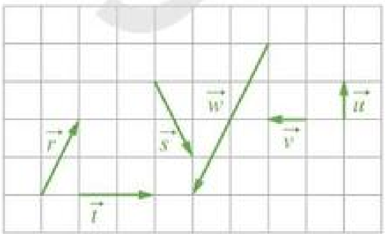
b. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ....

c. $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ....

d. $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IC}$ ....

▸ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

38 1. Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs proposés sont colinéaires ou non.



a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ....

b. $\vec{v}$ et $\vec{t}$ ....

c. $\vec{r}$ et $\vec{s}$ ....

d. $\vec{s}$ et $\vec{t}$ ....

e. $\vec{w}$ et $\vec{r}$ ....

f. $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ....

2. Compléter.

a. $\vec{v} =$ .... $\vec{t}$

b. $\vec{w} =$ .... $\vec{r}$

39 Dans une base orthonormée du plan, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Dans toute la suite cette page, on se place dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

▸ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On appelle **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

40 Dans chaque cas, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

▸ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

41 Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

42 MODE EXPERT ! Soient m un réel et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4+m\\m\end{pmatrix}$.

Déterminer la ou les valeurs de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Automatismes et calcul mental

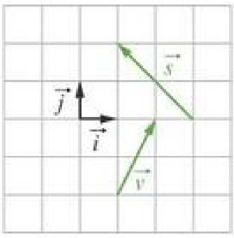
Parcours 1

On se place dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

43 *ABCD* est un parallélogramme. Compléter.

On a donc $\overrightarrow{AB} =$ ....

44 Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{s}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

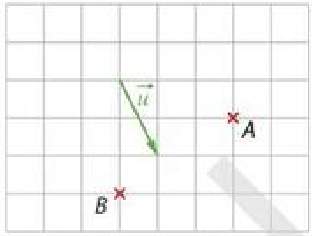


$\vec{v}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

45 Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| =$ ....

46 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Des vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, lesquels sont colinéaires à $\vec{u}$? ....

47 Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \vec{u}$ et le point R tel que $\overrightarrow{BR} = -2\vec{u}$.



48 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors :

- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$
- $2\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$
- $-3\vec{v}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

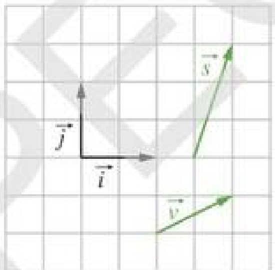
Parcours 2 MODE EXPERT !

On se place dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

49 $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{MH}$. Compléter.

On a donc .... qui est un parallélogramme.

50 Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{s}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

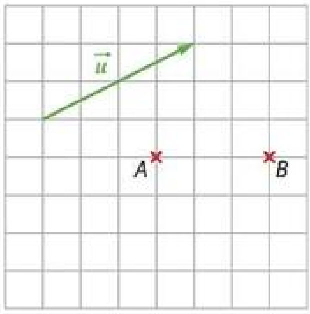


$\vec{v}\begin{pmatrix} \dots \\ \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} \dots \\ \end{pmatrix}$

51 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Compléter.

- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} \dots \\ \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} \dots \\ \end{pmatrix}$
- $-6\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$
- $-6\vec{u} - 12\vec{v}\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

52 Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{u}$ et le point R tel que $\overrightarrow{BR} = -\frac{3}{2}\vec{u}$.



53 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$. Des vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 24 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lesquels sont colinéaires à $\vec{u}$?

....

54 Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| =$ ....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 6.

Exercices interactifs

ou

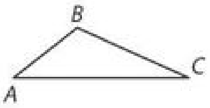
hachette-clic.fr/22ma2009

Problèmes

ceinture jaune · ceinture verte · ceinture noire

55 Un quadrilatère particulier
Représenter, calculer

1. Sur la figure suivante, placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$ et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{CB}$.



2. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{EA}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

4. En déduire la nature du quadrilatère $BDAE$.

56 Un parallélogramme
Représenter, raisonner

1. Sur la figure suivante, construire les points B, C et D, images respectives de A par les translations de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v}$.

2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

57 Deux ou trois parallélogrammes
Raisonner

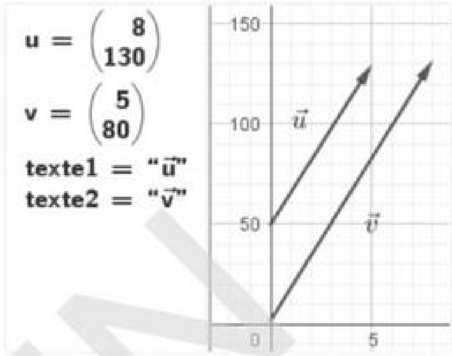
$ABCD$ et $BCFE$ sont deux parallélogrammes.

1. Réaliser une figure.

2. Montrer que $AEFD$ est un parallélogramme.

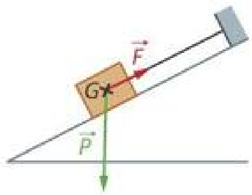
58 Directions
Représenter, calculer

On a tracé deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec un logiciel de géométrie. Ont-ils la même direction ?



59 Plan incliné
Représenter, raisonner

Sur un plan incliné, un objet est immobile et soumis à trois forces représentées par des vecteurs en son centre de gravité G : la tension $\vec{F}$ du fil qui le retient, son poids $\vec{P}$ et une force de réaction du plan incliné $\vec{R}$.



Le but est de représenter la force de réaction du support incliné sur l'objet. Comme celui-ci est immobile, les lois physiques permettent d'écrire la relation vectorielle :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}.$$

1. On pose $\vec{S} = \vec{F} + \vec{P}$. Construire sur la figure le représentant du vecteur $\vec{S}$ d'origine G.

2. Démontrer que $\vec{R} = -\vec{S}$.

3. Tracer alors sur la figure le représentant du vecteur $\vec{R}$ d'origine G, c'est-à-dire la force de réaction du support incliné.

Problèmes

60 Une médiatrice
Raisonner, calculer

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-4\,;0)$, B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-6\end{pmatrix}$ et C, image de A par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$.

2. Calculer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

3. En déduire que A appartient à la médiatrice de $[BC]$.

61 Un paramètre
Représenter, calculer, raisonner

Dans une base orthonormée, on donne les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans chaque cas, déterminer s'il existe une valeur de m telle que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient la même direction.

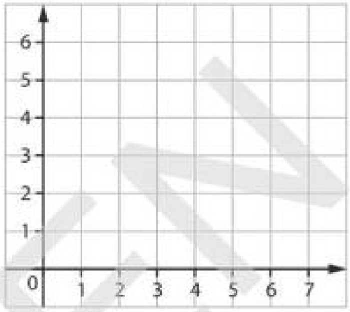
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\5\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2m+1\end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\m\end{pmatrix}$.

62 Nature d'un triangle
Représenter, calculer, raisonner

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer :
- le point A de coordonnées $(3\,;3)$;
- le point B, image de A par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$;
- le point C, image de A par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.



2. Conjecturer la nature du triangle ABC.

3. a. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b. En déduire les longueurs AB et AC.

4. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

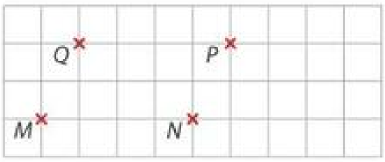
b. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire la longueur BC.

5. Valider ou invalider la conjecture faite à la question 2.

63 À partir d'un parallélogramme
Représenter, calculer, raisonner

On considère le parallélogramme $MNPQ$ suivant.



1. Placer le point R tel que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$.

2. Compléter les égalités suivantes par des nombres réels.

a. $\overrightarrow{MP} = \ldots\overrightarrow{MN} + \ldots\overrightarrow{MQ}$. b. $\overrightarrow{QN} = \ldots\overrightarrow{MN} - \ldots\overrightarrow{MQ}$.

3. En déduire une expression de $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$.

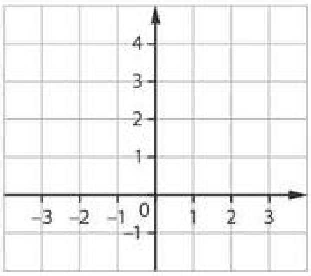
4. En déduire que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MR}$.

5. Que peut-on en déduire pour le point R ?

64 Une droite particulière
Représenter, calculer, raisonner

1. a. Dans le repère orthonormé suivant, placer :
- le point A de coordonnées $(2 ; 3)$;
- le point B, image de A par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ de coordonnées $(-2 ; -1)$;
- le point C, image de A par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$;
- le point D, image de B par la translation de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Tracer la droite (CD).



b. Émettre une conjecture concernant la droite (CD).

2. a. Calculer $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.

b. En déduire les longueurs AC et BD.

3. a. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire la longueur BC.

d. Que peut-on en déduire pour le point C par rapport au segment $[AB]$?

4. a. Calculer de la même manière la longueur AD.

b. Que peut-on en déduire pour le point D ?

5. Valider ou invalider la conjecture faite à la question 1.b.

65 Tous dans la même direction
Calculer

Dans une base orthonormée du plan, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $-\vec{u} + 4\vec{v}$ et $-\vec{u} + 2\vec{w}$ ont la même direction.

66 Algo et Python

1. a. On a écrit une fonction en Python.

```
def p(k,xu,yu): #k est un réel, u est un vecteur (xu;yu)"
    return (k*xu,k*yu)
```

Expliquer le rôle de cette fonction.

b. Que renvoie `p(5,3,4)`?

c. Tester dans la console les instructions suivantes. Que représentent les résultats renvoyés ?

- `p(5,3,4)[0]`:
- `p(5,3,4)[1]`:

2. a. Écrire une fonction `s` qui prend en argument `xu`, `yu`, `xv` et `yv` représentant les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et qui renvoie les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

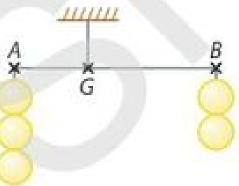
b. Que renvoie `s(1,2,3,4)` ?

c. Tester dans la console les instructions suivantes. Que représentent les résultats renvoyés ?

- `s(1,2,3,4)[0]` :
- `s(1,2,3,4)[1]` :

67 Le lustre

Calculer



Un lustre suspendu au plafond est constitué d'une barre $[AB]$ de longueur 1 mètre, à laquelle sont accrochées trois boules de 100 grammes en A et deux boules de 100 grammes en B. Pour être en équilibre, le point d'accroche G est tel que $3\,\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. On cherche la longueur AG.

1. Sachant que $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$, montrer que :

$$5\,\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

2. Exprimer alors $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. En déduire la longueur AG.

68 Triangle particulier

Représenter, calculer, raisonner

Dans un repère orthonormé, on a le point A de coordonnées $(1\,;\,2)$, et les points B et C images respectives de A par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b. En déduire les longueurs AB et AC.

2. a. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b. En déduire la longueur BC.

3. Conclure quant à la nature du triangle ABC.

69 Invariant
Raisonner, calculer, chercher

On considère :

- un quadrilatère quelconque *ABCD* ;
- le quadrilatère *MNPQ*, où *M*, *N*, *P* et *Q* sont les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*].

1. a. Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

b. Faire varier les points *A*, *B*, *C* et *D*. Que peut-on conjecturer ?

2. a. Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

b. En remarquant que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}$, montrer que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. De la même manière, montrer que $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

4. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$?

5. Conclure par rapport à la conjecture émise à la question 1.

70 Relation
Chercher, calculer

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs suivants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} ; \vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il existe un unique nombre réel a tel que $\vec{u}=3\vec{v}+a\vec{w}$.

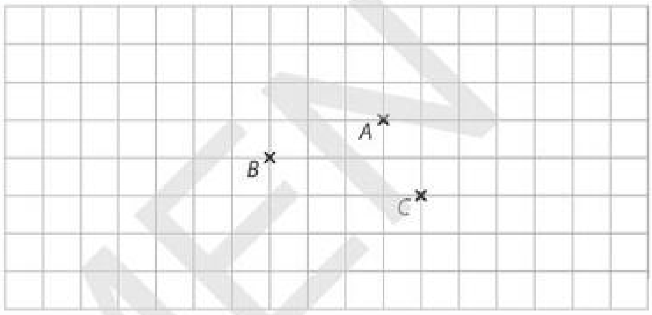
71 Point à construire
Raisonner, calculer, représenter

Soient *A*, *B* et *C* trois points du plan.

On souhaite construire le point *G* défini par la relation : $2\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1. En remarquant que $\overrightarrow{GB}$ peut s'écrire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{GC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

2. Construire le point *G* sur la figure ci-dessous.



72 Nature d'un triangle
Raisonner, calculer, chercher

Dans un repère orthonormé, on donne *A*(–1 ; 1) et les points *B*, *C* et *D*, images respectives de *A* par les translations de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.

1. Montrer que *ABCD* est un parallélogramme.

2. a. Déterminer les longueurs *AB*, *AC* et *BC*.

b. En déduire la nature du triangle *ABC*.

3. Quelle est la nature exacte du quadrilatère *ABCD* ?

Démonstration

Démo de cours

On se place dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

1. En utilisant la définition des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, traduire les données $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par des égalités vectorielles.

....

2. a. Que peut-on déduire comme égalité vectorielle pour le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$?

....

b. Transformer cette expression et en déduire les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

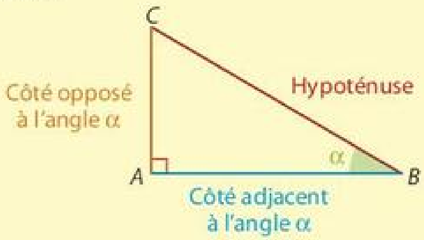
....

Chapitre 10

Problèmes de géométrie plane

1 Utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle

◗ Soit ABC un triangle rectangle en A. On note α l'angle $\widehat{ABC}$.



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté oppposé à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}$$

1 MNP est un triangle rectangle en M tel que $MN = 6$ cm et $NP = 10$ cm.
Donner l'arrondi à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$.

2 BUT est un triangle rectangle en B tel que $BU = 5$ cm et $BT = 6$ cm.
Donner l'arrondi à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{TUB}$.

3 FGH est un triangle rectangle en F tel que $HG = 9$ cm et $\widehat{FHG} = 43°$.
Donner l'arrondi en centimètre à 0,01 près de la longueur FH.

4 IJK est un triangle rectangle en J tel que $JK = 8$ cm et $\widehat{JIK} = 75°$.

1. Calculer l'arrondi au millimètre de la longueur IK.

2. Calculer l'arrondi au millimètre de la longueur IJ.

◗ Soient ABC un triangle rectangle en A et α un angle aigu de ce triangle. On a :
- $0 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$;
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

5 ABC est un triangle rectangle en A tel que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = 0{,}6$. Calculer $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

6 MODE EXPERT ! DEF est un triangle rectangle en D tel que $\sin\left(\widehat{DEF}\right) = \frac{12}{13}$. Calculer $\cos\left(\widehat{DEF}\right)$.

2 Calculer les coordonnées d'un vecteur et du milieu d'un segment

▶ Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

7 Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(0\,;2)$ et $B(5\,;1)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base associée.

8 Dans un repère orthonormé du plan, on a $F(-1\,;6)$ et $L(7\,;-2)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FL}$ dans la base associée.

9 Dans un repère orthonormé du plan, on a $T(2\,;-5)$ et $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point U.

10 Dans un repère orthonormé du plan, on a $P(-7\,;4)$ et $\overrightarrow{VP}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point V.

11 Dans un repère orthonormé du plan, on a $C(-2\,;7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$

▶ Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.
Le point I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

12 Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(-2\,;9)$ et $B(6\,;-1)$. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

13 Dans un repère orthonormé du plan, on a $E(7\,;-5)$ et $F(-8\,;-2)$. Calculer les coordonnées du milieu J du segment $[EF]$.

14 Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(-1\,;2)$, $B(6\,;-5)$, $C(-2\,;7)$ et $D(-9\,;14)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.

15 MODE EXPERT ! Dans un repère orthonormé du plan, on a $G(-5\,;3)$ et $H(-9\,;4)$. Calculer les coordonnées du point K tel que H soit le milieu du segment $[GK]$.

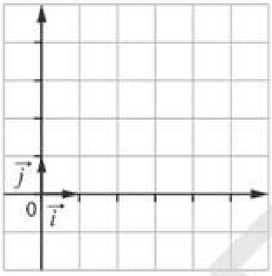
3 Calculer la distance entre deux points

▸ Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(y_B\,;y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.
On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

16 Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(3\,;5)$ et $B(8\,;17)$. Calculer la distance AB.

17 Dans un repère orthonormé du plan, on a $C(7\,;-5)$ et $D(-8\,;2)$. Calculer la distance CD.

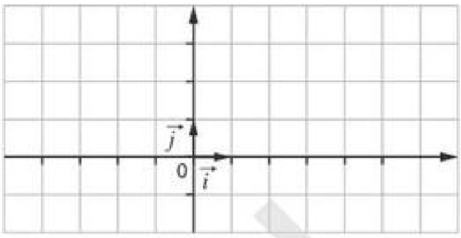
18 **1.** Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ suivant, tracer le triangle RST tel que $R(1\,;4)$, $S(5\,;1)$ et $T(1\,;-1)$ et conjecturer sa nature.



2. Valider ou invalider la conjecture précédente.

19 Dans un repère orthonormé, on a $I(8\,;2)$, $J(11\,;6)$ et $K(12\,;4)$. Montrer que le triangle IJK est rectangle.

20 **1.** Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ suivant, tracer le quadrilatère $MARE$ tel que $M(-4\,;1)$, $A(1\,;3)$, $R(6\,;1)$ et $E(1\,;-1)$ et conjecturer sa nature.



2. Valider ou invalider la conjecture précédente.

21 MODE EXPERT ! Dans un repère orthonormé, on a $M(-1\,;1)$, $N(-7\,;1)$ et $P\left(-4\,;1-3\sqrt{3}\right)$.
Quelle est la nature du triangle MNP ?

22 MODE EXPERT ! Dans un repère orthonormé, on a $A(4\,;1)$, $B(1\,;-1)$ et $C(6\,;-2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

4 Démontrer un parallélisme ou un alignement

> Soient A, B, C et D quatre points distincts.
> Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

23 Dans un repère orthonormé, on a $A(-1\,;3)$, $B(11\,;7)$, $C(-3\,;2)$ et $D(3\,;4)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

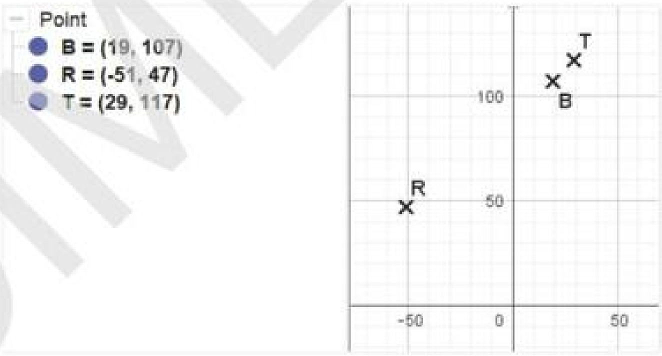
24 Dans un repère orthonormé, on a $R(-2\,;4)$, $S(6\,;-2)$, $T(-3\,;-1)$ et $U(-15\,;8)$.
Les droites (RS) et (TU) sont-elles parallèles ?

> Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

25 Dans un repère orthonormé, on a $A(-1\,;-5)$, $B(1\,;-2)$, et $C(-7\,;-14)$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

26 Dans un repère orthonormé, on a $E(-2\,;-5)$, $F(4\,;-1)$ et $G(7\,;2)$
Les points E, F et G sont-ils alignés ?

27 MODE EXPERT ! On a placé trois points dans un repère orthonormé.

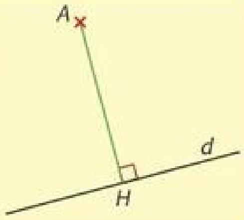


1. Les points R, T et B sont-ils alignés ?

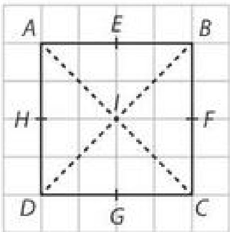
2. Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la droite (RB) et de l'axe des abscisses.

5 Connaître le projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soient A un point et d une droite du plan. On appelle **projeté orthogonal** de A sur d :
- le point A si $A \in d$;
- le point H de d tel que $(AH) \perp d$ si $A \notin d$.

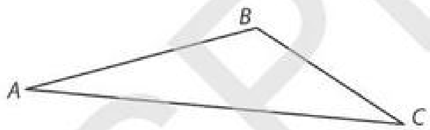


28 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de centre I et E, F, G et H sont les milieux de ses côtés.
Compléter le tableau suivant.

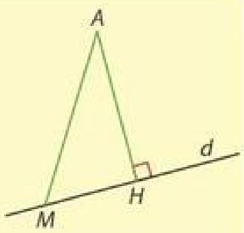


Point	Droite	Projeté orthogonal du point sur la droite
A	(DC)	
B		I
I	(AB)	
F	(EG)	
C	(CB)	
D	(EG)	

29 Sur la figure suivante, construire le point H, projeté orthogonal de B sur (AC) et le point K, projeté orthogonal de C sur (AB).

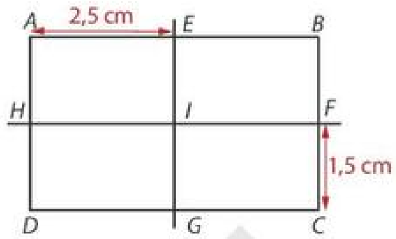


Soient A un point et d une droite du plan.
Le projeté orthogonal H de A sur d est le point de la droite d le plus proche du point A. La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d**.



30 On considère le triangle ABC ci-contre.
Déterminer la distance du point A à la droite (BC).

31 Sur la figure suivante, $ABCD$ est un rectangle dont on a tracé les axes de symétrie.



1. Déterminer, sans justifier, la distance du point F à la droite (EG).

2. Déterminer, sans justifier, la distance du point A à la droite (DC).

32 1. Tracer un segment $[RS]$ mesurant 3 cm et un point T à 2 cm de la droite (RS).

2. Calculer l'aire du triangle RST.

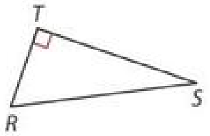
33 MODE EXPERT ! Le triangle GEF est tel que $GE = 3$ cm, $GF = 4$ cm et $EF = 5$ cm. Déterminer la distance du point F à la droite (EG).

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\ \vec{j})$ du plan.

34 Compléter le tableau suivant.



	$\widehat{RST}$	$\widehat{SRT}$
cos	$\dfrac{ST}{RS}$	....
sin	....	....
tan	....	....

35 Compéter.

a. Si $T(2\,;-3)$ et $U(-1\,;4)$, alors $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \end{pmatrix}$

b. Si $F(-1\,;4)$ et $G(2\,;8)$, alors $FG =$ ....

36 Dans le triangle RST de l'exercice 34 :

a. le projeté orthogonal de R sur (TS) est ....

b. la distance du point S à la droite (RT) est ....

37 Compléter les phrases.

b. Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$, alors les droites (AB) et (CD) sont ....

a. Si $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{10} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OR}\begin{pmatrix} -1 \\ 30 \end{pmatrix}$, alors les points O, P et R sont ....

Parcours 2 MODE EXPERT !

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\ \vec{j})$ du plan.

38 Vrai ou faux ?

$RT = RS \times \cos\left(\widehat{SRT}\right)$ ....

$ST = RT \times \tan\left(\widehat{STR}\right)$ ....

$RS = \dfrac{\sin\left(\widehat{SRT}\right)}{ST}$ ....

39 Compléter.

a. Si $G\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{5}\right)$ et $H\left(-\frac{5}{6}\,;\ -\frac{1}{10}\right)$, alors $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

b. Si $T\left(1\,;-\frac{1}{4}\right)$ et $U\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$, alors $SU =$ ....

c. Si $M\left(\frac{3}{2}\,;\frac{7}{3}\right)$ et $N\left(1\,;-\frac{1}{3}\right)$ alors le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées ....

40 Dans un carré $IJKL$ de côté 4 cm et de centre O :

a. le projeté orthogonal de J sur (IK) est ....

b. la distance du point K à la droite (JL) est .... cm.

41 Compléter les phrases.

a. Si $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors les droites (RS) et (UV) ....

b. Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$, alors les points A, B et C ....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2010

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

42 Un triangle rectangle particulier

Calculer, raisonner

RST est un triangle rectangle en S tel que $TR = 7$ et $RS = 3{,}5$.
Donner la mesure de l'angle $\widehat{RTS}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.

43 Distance dans un triangle rectangle

Calculer, raisonner

Le triangle GEF est rectangle en F tel que $GE = 13$ et $EF = 5$.
Déterminer la distance du point G à la droite (EF).

44 Deux aires pour un triangle

Calculer, raisonner

POL est un triangle rectangle en L tel que $LP = 12$ et $LO = 5$.

1. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle POL.
2. Calculer PO.
3. H est le projeté orthogonal de L sur la droite (PO). Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de LH.
4. En déduire la distance du point L à droite (PO).

45 Médiatrice et projeté orthogonal

Calculer, raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;3)$, $B(5\,;0)$ et $C(4\,;2)$.

1. Démontrer que C appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB).

46 Avec un cercle

Calculer, raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne le point $A(6\,;4)$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 5.

1. Prouver que le point $B(9\,;0)$ appartient à $\mathscr{C}$.
2. Soit $D(13\,;3)$. La droite (DB) est-elle perpendiculaire au rayon $[AB]$ de $\mathscr{C}$?

47 Un parallélogramme particulier

Calculer, raisonner, représenter

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3 ; -1)$, $B(11 ; 3)$ et $C(9 ; 7)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Calculer AC et BD. En déduire la nature du parallélogramme $ABCD$.

3. Calculer l'aire de $ABCD$.

4. Démontrer que $ABCD$ n'est pas un carré.

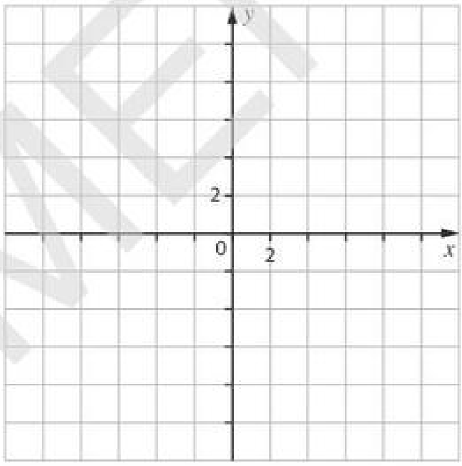
48 Voitures télécommandées

Représenter, raisonner, communiquer

On dispose de deux voitures télécommandées équipées d'un feutre qui trace leur trajectoire au sol. On se munit d'un repère orthonormé. Les deux voitures circulent sur un terrain carré dont les sommets sont $A(-10 ; 10)$, $B(-10 ; -10)$, $C(10 ; -10)$ et $D(10 ; 10)$. L'unité de longueur est le décimètre.

- En 20 secondes, la voiture 1 démarre du point A et suit une trajectoire rectiligne jusqu'au point $E(-3 ; -10)$.
- En 15 secondes, la voiture 2 démarre du point $F(2 ; 10)$ et suit une trajectoire rectiligne jusqu'au point C.

1. Représenter le trajet des voitures dans le repère orthonormé ci-dessous.



2. Les lignes tracées au sol par les deux voitures sont-elles parallèles ?

3. Quelle est la voiture la plus rapide ?

49 Alignement
Calculer, raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;2)$, $B(6\,;-2)$ et $C(4\,;6)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu D du segment $[BC]$.

2. E et F sont les points définis par les relations vectorielles $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Déterminer les coordonnées des points E et F.

3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

50 Algo et Python

On se place dans un repère orthonormé.

Anaëlle souhaite créer une fonction qui, pour trois points A, B et C donnés par leurs coordonnées, renvoie les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. Compléter la fonction ci-dessous.

```
1 def para(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
2     xD=..........
3     yD=..........
4     return(..........)
```

2. Anaëlle crée ensuite une autre fonction pour calculer le périmètre d'un parallélogramme $ABCD$ à partir des coordonnées des trois premiers sommets A, B et C.

```
7  def perim(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
8      xD=para(xA,yA,xB,yB,xC,yC)[0]
9      yD=para(xA,yA,xB,yB,xC,yC)[1]
10     l1=sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
11     l2=sqrt((xC-xB)**2+(yC-yB)**2)
12     l3=sqrt((xD-xC)**2+(yD-yC)**2)
13     l4=sqrt((xA-xD)**2+(yA-yD)**2)
14     return (l1+l2+l3+l4)
```

Indiquer ce que permettent de calculer les lignes 10 à 13.

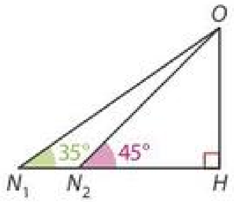
51 Une expression constante
Calculer

$A(x)=(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$, où x est la mesure d'un angle aigu, en degrés.

Montrer que $A(x)$ ne dépend pas de x.

52 Navigation
Calculer, raisonner, représenter

Un bateau navigue de N_1 à N_2 et doit passer à plus de 2 kilomètres d'un obstacle rocheux O. En N_1, le capitaine mesure un angle de 35° avec O, alors qu'en N_2, cet angle est de 45°. On a $N_1N_2 = 1$ km.



1. Démontrer que $N_2H = OH$.

2. Exprimer N_1H en fonction de OH et de la mesure de l'angle $\widehat{HN_1O}$.

3. Le bateau, en poursuivant ce même cap, passera-t-il bien à plus de 2 km de l'obstacle ?

53 Abscisse à l'origine
Calculer, raisonner, représenter

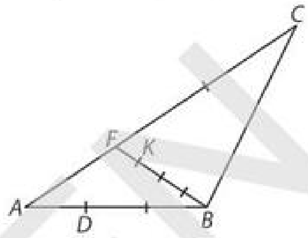
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;-1)$ et $B(5\,;2)$

1. Justifier que la droite (AB) et l'axe des abscisses sont des droites sécantes. On note P leur point d'intersection.

2. Déterminer les coordonnées de P en remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

54 Alignement ?
Représenter, calculer, raisonner

Sur la figure suivante, on a gradué régulièrement les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BF]$ et placé sur ces segments respectivement les points D, F et K.



1. Déterminer les nombres r et s tels que : $\overrightarrow{DC} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$.

2. Recopier et compléter les égalités suivantes.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\ldots F} = \ldots\overrightarrow{AB} + \ldots\overrightarrow{AC}$

3. En déduire que $\overrightarrow{KF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

4. Montrer que $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

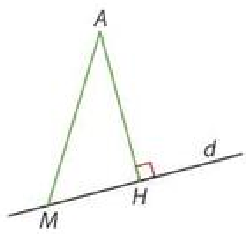
5. Les points D, K et C sont-ils alignés ?

Démonstration

Démo de cours

Soient A un point et d une droite.
Le projeté orthogonal H de A sur d est le point de la droite d le plus proche du point A.

Soient A un point et d une droite. Soient H le projeté orthogonal du point A sur la droite d et M un point de la droite d distinct du point H.



1. On suppose que le point A appartient à la droite d. Montrer que $AM > AH$.

2. On suppose que le point A n'appartient pas à la droite d.
Justifier que AM est le côté le plus long du triangle AMH.

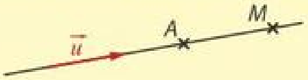
3. Conclure.

Chapitre 11 Équations de droites

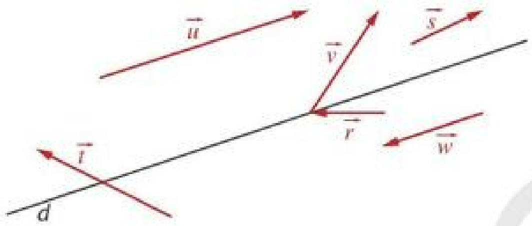
1 Connaître le vecteur directeur d'une droite

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

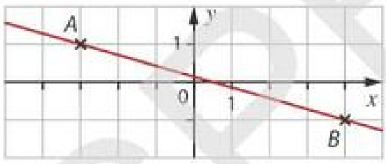
▸ Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point.
L'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite passant par A.
Le vecteur $\vec{u}$ est appelé un **vecteur directeur** de cette droite.



1 Parmi les vecteurs tracés, lequel ou lesquels semblent être des vecteurs directeurs de la droite d ?



2 Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB) représentée ci-dessous.



3 Dans un repère, on considère $A(-4\,;2)$ et $B(6\,;-5)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

4 Dans un repère, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $A(1\,;-2)$ et $B(7\,;8)$. La droite d passe par le point A et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$. Le point B appartient-il à la droite d ?

5 Dans un repère, on considère $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\5\end{pmatrix}$, $C(-4\,;-8)$ et $D(2\,;-4)$. La droite d passe par le point C et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}$. Le point D appartient-il à d ?

▸ Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Les vecteurs directeurs de d sont tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.

6 Dans un repère, on considère $R(-5\,;3)$ et $S(-1\,;2)$. Déterminer les coordonnées de trois vecteurs directeurs de la droite (RS).

7 MODE EXPERT ! Dans un repère, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\[4pt]\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(\frac{13}{12}\,;-\frac{33}{12}\right)$. Le vecteur $\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de la droite (AB) ?

2 Déterminer une équation cartésienne de droite

▸ Soient a, b et c trois réels tels que l'un au moins des réels a et b est non nul. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de cette droite.

▸ Soient a et b deux réels tels que l'un au moins des deux réels a et b est non nul.

Toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

8 Parmi les équations suivantes, entourer celles qui sont des équations cartésiennes de droites.

a. $2x+3y-5=0$ **b.** $-2y+9x=0$

c. $2x^2+3y-5=0$ **d.** $2x=0$

e. $2^2x-3y-5=0$ **f.** $y-5=0$

9 Vrai ou faux ?

a. La droite d'équation $2x-3y+5=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. ……

b. La droite d'équation $5x+2y-4=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. ……

c. La droite d'équation $7x+4y+3=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$. ……

d. La droite d'équation $6x-3y+10=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. ……

10 Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs de la droite d d'équation $-x+5y-2=0$.

11 On considère la droite d d'équation $2x+3y-6=0$. Les points $A(0\,;2)$, $B(3\,;0)$ et $C(1\,;1)$ appartiennent-ils à la droite d ?

12 Soit d la droite passant par $A(-1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de d.

13 Soient $A(2\,;-3)$ et $B(-5\,;6)$.

Déterminer une équation cartésienne de (AB).

14 MODE EXPERT ! Le point $A\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$ appartient-il à la droite d d'équation $\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{6}=0$?

3 Déterminer une équation réduite de droite

▸ Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
La droite d admet une équation cartésienne de la forme $x = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite d.
▸ Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
La droite d admet une équation cartésienne la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux réels. Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite d.

15 On donne des équations de droites. Entourer celle ou celles qui sont sous forme réduite.

a. $y = 2x$ b. $y = 2 - x$ c. $2x + 3 = 1$
d. $5y = 2x$ e. $x = -7$ f. $y = 0$

16 On donne des équations de droites. Entourer celle ou celles qui caractérisent une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

a. $x = 3$ b. $x + 7 = 0$ c. $y = 4$
d. $y = 2x$ e. $2x + y = 3$ f. $3y - 2 = 0$

17 On donne des équations cartésiennes de droites. Les écrire sous forme réduite.

a. $4x + 2y - 6 = 0$ ....

b. $x + 3 = 0$ ....

c. $2x + 3y = 0$ ....

d. $7x - 5y + 4 = 0$ ....

....

e. $-x + 9y + 3 = 0$ ....

....

f. $14x + 7y - 1 = 0$ ....

....

18 On donne des équations réduites de droites. Les écrire sous forme cartésienne.

a. $y = 2x + 3$ ....

b. $x = 2$ ....

c. $y = 3$ ....

d. $y = -4x$ ....

e. $y = \frac{2}{9}x + 7$ ....

▸ Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.
Pour déterminer l'équation réduite $y = mx + p$ de la droite (AB) :
- on calcule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
- on détermine p en utilisant les coordonnées d'un point de la droite (AB).

19 Soient les points $A(1\,;3)$ et $B(3\,;7)$. On note $y = mx + p$ l'équation réduite de la droite (AB).

1. Calculer m.

....

2. Sachant que le point A appartient à la droite (AB), en déduire une équation d'inconnue p.

....

....

3. En déduire l'équation réduite de la droite (AB).

....

....

20 Soient les points $A(3\,;-4)$ et $B(-1\,;8)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

....

....

....

....

....

....

21 MODE EXPERT ! On donne $C(2\,;-3)$ et $D(-5\,;8)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (CD).

....

....

....

....

....

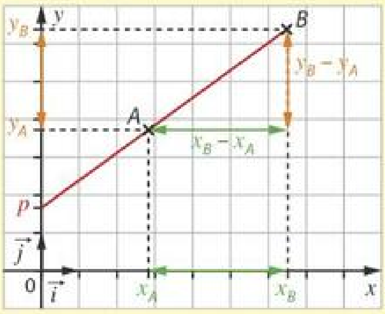
....

....

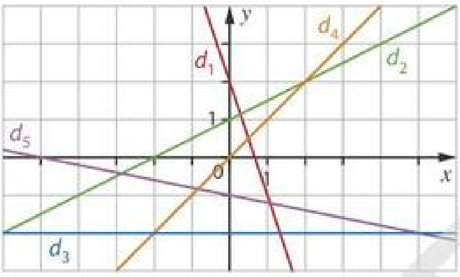
4 Tracer une droite d'équation donnée

Soient d la droite d'équation $y = mx + p$ et $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de d.

- $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est le **coefficient directeur** ou la pente de la droite d.
- p est **l'ordonnée à l'origine** de la droite d. C'est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées.



22 Donner l'ordonnée à l'origine des droites tracées dans le repère suivant.



$p_1 =$ ....

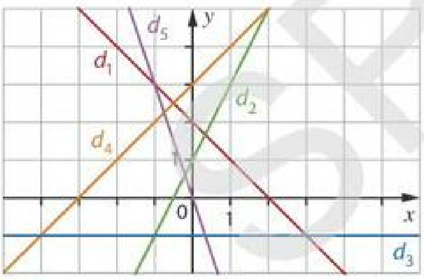
$p_2 =$ ....

$p_3 =$ ....

$p_4 =$ ....

$p_5 =$ ....

23 Donner le coefficient directeur des droites tracées dans le repère suivant.



$m_1 =$ ....

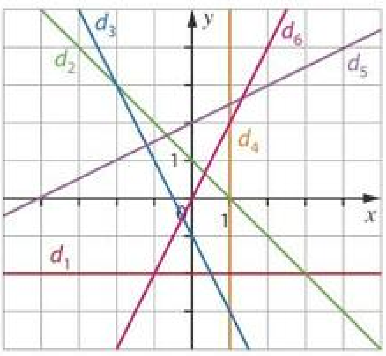
$m_2 =$ ....

$m_3 =$ ....

$m_4 =$ ....

$m_5 =$ ....

24 Donner l'équation réduite des droites tracées dans le repère suivant.



d_1 : ....

d_2 : ....

d_3 : ....

d_4 : ....

d_5 : ....

d_6 : ....

25 Dans le repère suivant, tracer les droites proposées.

a. $d_1 : y = 2x - 3$

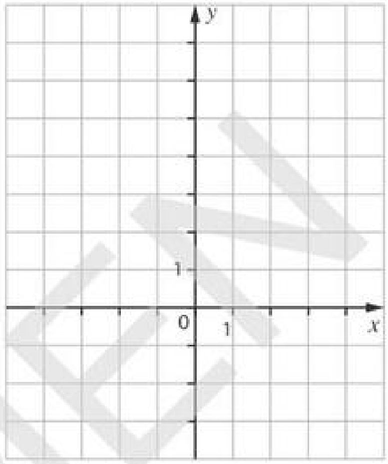
b. $d_2 : y = -x + 4$

c. $d_3 : x = -2$

d. $d_4 : y = 0{,}5x$

e. $d_5 : y = 3$

f. $d_6 : y = -3x + 1$

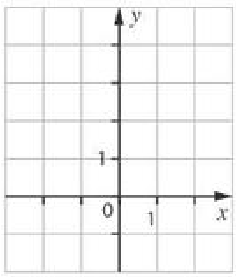


26 Déterminer deux points de la droite d d'équation $5x - 2y + 3 = 0$ puis tracer cette droite dans le repère suivant.

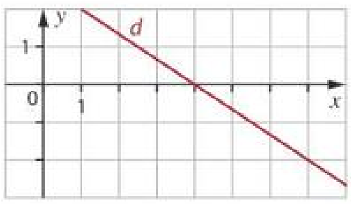
....

....

....



27 MODE EXPERT ! Donner l'équation réduite de la droite tracée dans le repère suivant.



....

....

....

....

....

5 Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes

▸ Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.
Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

28 On considère deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans chaque cas, dire si d et d' sont sécantes ou parallèles.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

29 On considère deux droites d et d' dont on donne une équation cartésienne. Dans chaque cas, dire si d et d' sont sécantes ou parallèles.

a. $d : x + 2y + 3 = 0$ et $d' : 2x + y - 7 = 0$

b. $d : 3x - 2y + 9 = 0$ et $d' : 6x - 4y - 1 = 0$

c. $d : 4x + 6y - 11 = 0$ et $d' : -6x - 9y + 2 = 0$

30 Soit d la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$. Donner une équation d'une droite parallèle à d.

31 MODE EXPERT ! Soit d la droite d'équation $-x + 4y = 0$. Donner une équation de la droite d' parallèle à d passant par $A(-1\,;7)$.

▸ Soient m et m' deux réels.
Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

32 On considère deux droites d et d' dont on donne l'équation réduite. Dans chaque cas, dire si d et d' sont parallèles.

a. $d : y = -3x + 4$ et $d' : y = 2x - 7$

b. $d : y = -x - 2$ et $d' : y = -x + 4$

33 Soit d la droite d'équation $y = -4x + 5$. Donner l'équation réduite d'une droite parallèle à d.

34 MODE EXPERT ! Soit d la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Donner l'équation réduite de la droite d' parallèle à d passant par $A\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.

Automatismes et calcul mental

Dans cette page, on se place dans un repère orthonormé du plan.

Parcours 1

35 Soit d la droite d'équation $2x - 3y + 9 = 0$. Parmi les vecteurs suivants, entourer celui ou ceux qui sont des vecteurs directeurs de d.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}_2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}_3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}_4\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}_5\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}_6\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

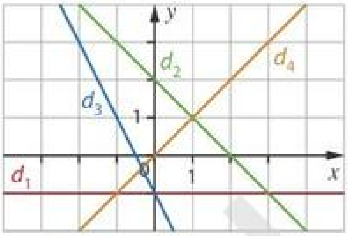
36 Soit d la droite d'équation $y = -3x + 4$.
Parmi les équations suivantes, entourer celles qui caractérisent des droites parallèles à d.

$y = -3x + 7$ $\quad y = 3x + 4$ $\quad y = 2x + 4$

$y = -6x + 8$ $\quad y = -5x - 4$ $\quad y = 4x + 2$

$y = -3x$ $\quad y = 4x - 3$ $\quad y = -3x + 10$

37 Compléter le tableau suivant.



Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Équation réduite
d_1	....	....	....
d_2	....	....	....
d_3	....	....	....
d_4	....	....	....

Parcours 2

MODE EXPERT !

38 Soit d la droite d'équation $-5x + 4y - 8 = 0$. Donner trois vecteurs directeurs de d.

....

39 Soit d la droite d'équation $y = -\frac{3}{10}x$.
Parmi les équations suivantes, entourer celles qui caractérisent des droites parallèles à d.

$y = -\frac{3}{10}x - 1$ $\quad y = -0{,}3x + 4$

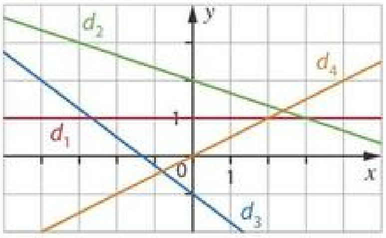
$y = x - \frac{3}{10}$ $\quad y = \frac{3}{10}x - 2$

$y = -\frac{3}{10}x - 4$ $\quad y = 3x - 10$

$y = -3x$ $\quad y = 0{,}3x - 3$

$y = -\frac{3}{10} + x$ $\quad y = -3x + 10$

40 Compléter le tableau suivant.



Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Équation réduite
d_1	....	....	....
d_2	....	....	....
d_3	....	....	....
d_4	....	....	....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 5.

Exercices interactifs

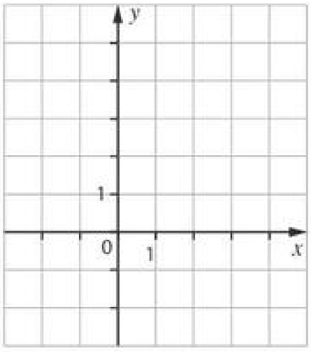
ou
hachette-clic.fr/22ma2011

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

41 Un quadrilatère
Raisonner, représenter, calculer

1. Dans le repère suivant, placer les points $A(-2\,;3)$, $B(1;5)$, $C(4\,;0)$ et $D(-1\,;-1)$.



2. Conjecturer les coordonnées du point d'intersection des diagonales du quadrilatère *ABCD*.

3. Déterminer une équation de la droite (*AC*).

4. Déterminer une équation de la droite (*BD*)

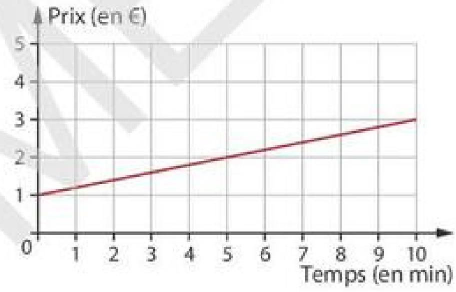
5. Montrer que le point $J(0\,;2)$ appartient aux droites (*AC*) et (*BD*).

42 Parallèles ?
Raisonner, calculer

Les droites d d'équation $y = 3x - 7$ et d' d'équation $15x - 5y - 10 = 0$ sont-elles parallèles ou sécantes ?

43 Location de trottinette
Représenter, calculer, raisonner

Youcef a représenté ci-dessous le prix qu'il paie, en euros, lorsqu'il loue une trottinette électrique, en fonction du temps en minutes.



1. Donner l'équation réduite de la droite tracée.

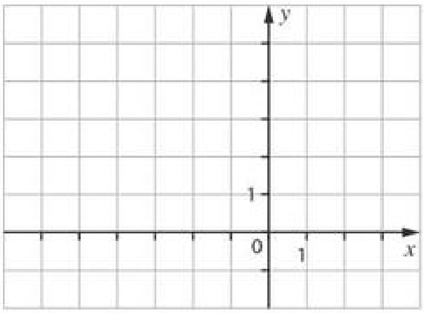
2. La location comprend un forfait de déverrouillage et un tarif à la minute. Préciser chacun de ces montants.

3. Youcef compte louer sa trottinette pendant une heure et demie sans faire de pause. Combien cela lui coutera-t-il ?

4. Youcef paie finalement 20,80 €. Combien de temps a-t-il utilisé la trottinette ?

44 Une intersection
Raisonner, représenter, calculer

1. Dans le repère orthonormé suivant, tracer les droites (MN) et (RS) avec $M(-6\,;3)$, $N(2\,;-1)$, $R(1\,;3)$ et $S(-5\,;-1)$.



2. Conjecturer que (MN) et (RS) sont sécantes en un point I dont on donnera les coordonnées.

3. a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (MN).

b. En déduire une équation cartésienne de la droite (MN).

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (RS).

5. Valider ou invalider la conjecture de la question 2.

45 Point de concours
Raisonner, calculer

1. On donne $A(15\,;39)$, $B(-15\,;-3)$ et $C(15\,;3)$. Calculer les coordonnées des points A', B', C', milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

2. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont appelées les médianes du triangle ABC. Justifier que la droite (BB') a pour équation $4x-5y+45=0$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AA').

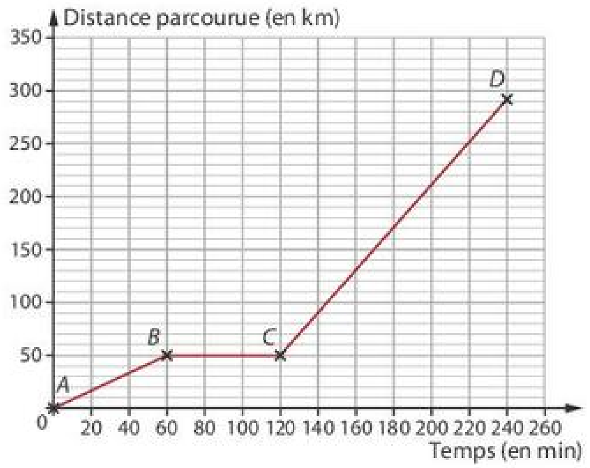
4. Montrer que le point $G(5\,;13)$ appartient aux droites (AA') et (BB').

5. Montrer que G appartient à la droite (CC').

6. Quel résultat a-t-on démontré ?

46 Algo et Python

Léo a relevé la distance parcourue en voiture sur un trajet. Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue (en kilomètres) en fonction du temps (en minutes).



1. Déterminer une équation réduite de chacune des droites (*AB*), (*BC*) et (*CD*).

2. Écrire en Python une fonction `distance` qui renvoie la distance parcourue par la voiture, en km, en fonction du temps en minutes.

47 Possible ?
Raisonner, calculer

m est un nombre réel. On considère la droite d d'équation $2x+3my+9=0$ et la droite d' d'équation $x-y-1=0$. Existe-t-il une ou des valeurs de m telles que d et d' soient parallèles ?

48 Une droite particulière
Calculer, raisonner

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-7\,;4)$, $B(1\,;-2)$, $C(6\,;13)$ et $H(-3\,;1)$.

1. Déterminer une équation des droites (*AB*) et (*CH*).

2. Montrer que les droites (*AB*) et (*CH*) sont sécantes en *H*.

3. a. Déterminer la nature du triangle *ACH*.

b. Que représente (*CH*) pour le triangle *ABC* ?

49 Des médiatrices
Raisonner, calculer

Soient les points $A(-8\ ;2)$, $B(-5\ ;-3)$ et $C(-1\ ;-1)$.

1. a. Montrer que le point $D(1\ ;4)$ appartient à la droite d_1, médiatrice du segment $[AB]$.
b. En déduire une équation cartésienne de la droite d_1.

2. a. Montrer que le point $E(-9\ ;-10)$ appartient à la droite d_2, médiatrice du segment $[AC]$.
b. En déduire une équation cartésienne de la droite d_2.

3. a. Montrer que le point $F(-5\ ;2)$ appartient à la droite d_3, médiatrice du segment $[BC]$.
b. En déduire une équation cartésienne de la droite d_3.

4. a. Justifier que les droites d_1, d_2 et d_3 sont deux à deux sécantes.
b. Montrer que le point $G\left(-\frac{57}{13};\frac{10}{13}\right)$ appartient aux droites d_1, d_2 et d_3.

5. a. Qu'a-t-on prouvé sur les médiatrices du triangle ABC ?
b. Que peut-on dire du point G par rapport aux points A, B et C ?

50 Un rectangle
Raisonner, représenter, calculer

1. Placer les points $A(-6\ ;2)$, $B(2\ ;2)$, $C(2\ ;-3)$, le point D tel que $ABCD$ soit un rectangle et les points E et F, milieux respectifs de $[DC]$ et $[DA]$.
2. Déterminer les coordonnées du point D.
3. Calculer les coordonnées des points E et F.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DB}$ et en déduire que les droites (EF) et (DB) sont sécantes en un point que l'on nommera H.
5. Déterminer une équation cartésienne des droites (EF) et (DB).
6. Montrer que H est le milieu de $[EF]$.

Démonstration

Raisonnement : Démontrer une implication et une équivalence

- Pour démontrer une implication $A \Rightarrow B$, on peut supposer que A est vraie et démontrer qu'alors, B est vraie.
- Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on peut d'abord démontrer que $A \Rightarrow B$ puis que $B \Rightarrow A$.

m est un réel.

1. On suppose que d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$. Démontrer qu'alors, d a pour équation réduite $y = mx + p$, où p est un réel.

2. On suppose à présent que d est une droite d'équation $y = mx + p$, où p est un réel. Montrer qu'alors, $A(0\ ;p)$ et $B(1\ ;m+p)$ appartiennent à la droite d et que d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

3. Quelle équivalence a-t-on démontrée ?

Chapitre 12

Systèmes d'équations

1 Comprendre la notion de systèmes d'équations

- Un **système** linéaire de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.
- Une **solution d'un système** de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $(x\,;y)$ pour lequel les deux égalités sont vraies simultanément.

1 En remplaçant x par 2 et y par 5 dans chacune des équations suivantes, dire si le couple $(2\,;5)$ est solution du système $\begin{cases} x-y=-3 \\ -2x+y=1 \end{cases}$.

2 Le couple $(1\,;-3)$ est-il solution du système $\begin{cases} x+y=-2 \\ 3x-y=0 \end{cases}$?

3 Entourer le ou les couples qui sont solutions du système $\begin{cases} -2x+6y=-4 \\ 3x-9y=6 \end{cases}$.

a. $(0\,;3)$ b. $(2\,;0)$ c. $(8\,;2)$
d. $(-1\,;-1)$ e. $(1\,;-3)$ f. $(-10\,;-4)$

- Soient les droites d d'équation $ax+by+c=0$ et d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$.

Soit le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

Un point M appartient à d et à d' si et seulement si le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées est solution de $\mathcal{S}$.

- Si d et d' sont sécantes, elles ont un unique point d'intersection : le système $\mathcal{S}$ a une **solution unique**, le couple formé par les coordonnées de leur point d'intersection.
- Si d et d' sont strictement parallèles, elles n'ont aucun point d'intersection. Le système $\mathcal{S}$ n'a **aucune solution**.
- Si d et d' sont confondues, elles ont une infinité de points en commun. Le système $\mathcal{S}$ a une **infinité de solutions**.

4 On considère le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$.

1. Écrire une équation cartésienne de chacune des droites d et d' mises en jeu dans ce système.

2. À l'aide de vecteurs directeurs de d et d', étudier la position relative de ces deux droites.

3. En déduire le nombre de solutions de $\mathcal{S}$.

5 Soit le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=2 \end{cases}$.

1. Justifier que les deux équations de ce système sont des équations de deux droites parallèles.

2. Le point $A(1\,;-1)$ appartient-il à d ? à d' ?
En déduire le nombre de solutions de $\mathcal{S}$.

6 MODE EXPERT ! Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 2x+\sqrt{5}y=13 \\ \sqrt{20}x+5y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

2 Résoudre un système par substitution

- **Résoudre un système**, c'est déterminer tous les couples solutions du système.
- Pour **résoudre un système par substitution**, on exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une des deux équations puis, dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par l'expression obtenue.

7 On considère le système $\mathcal{S} : \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

1. Quelle inconnue est-il judicieux d'isoler et dans quelle équation ?

2. Écrire un système équivalent à $\mathcal{S}$ en exprimant cette inconnue en fonction de l'autre.

$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

3. Résoudre $\mathcal{S}$ par substitution.

8 Résoudre par substitution les systèmes suivants.

a. $\mathcal{S} : \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$

b. $\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + 7y = 4 \\ 4x - y = -5 \end{cases}$

c. $\mathcal{S} : \begin{cases} -x - y = 1 \\ 7x + 2y = 8 \end{cases}$

9 MODE EXPERT ! Résoudre les systèmes suivants.

a. $\mathcal{S} : \begin{cases} \frac{4}{3}x + 8y = 2 \\ x + 6y = 3 \end{cases}$

b. $\mathcal{S} : \begin{cases} 15x + 5y = 1 \\ 3x + y = 0{,}2 \end{cases}$

3 Résoudre un système par combinaison

▸ Pour **résoudre un système par combinaison**, on multiplie chaque membre d'une des deux équations par un réel non nul et on additionne membre à membre les deux équations pour obtenir une équation à une seule inconnue.

10 On considère le système $\mathcal{S} : \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 4x-7y=5 \end{cases}$.

1. Par quel nombre peut-on multiplier les deux membres de la première équation pour que son premier membre « commence » par $-4x$?

2. Écrire un système équivalent à $\mathcal{S}$ en effectuant la multiplication précédente.

$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ 4x-7y=5 \end{cases}$.

3. Résoudre $\mathcal{S}$ par la méthode de combinaison.

$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ 4x-7y=5 \end{cases}$

11 Résoudre par combinaison les systèmes suivants.

a. $\mathcal{S} : \begin{cases} 2x+7y=11 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$

b. $\mathcal{S} : \begin{cases} -7x+8y=-3 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$

c. $\mathcal{S} : \begin{cases} 9x-6y=1 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$

12 MODE EXPERT ! Résoudre le système.

$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x+7y=4 \\ 3x+8y=11 \end{cases}$

4 Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes

Soient les droites d d'équation $ax + by + c = 0$ et d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.
Un point M appartient à d et à d' si et seulement si le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées est solution du système $\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

13 Soient les droites d d'équation $x + 2y - 9 = 0$ et d' d'équation $-x + 2y + 1 = 0$.

1. Justifier que d et d' sont sécantes en un point que l'on nommera *M*.

2. De quel système le couple de coordonnées $(x\,;y)$ du point *M* est-il la solution ?

3. Déterminer les coordonnées du point *M*.

14 Dans chacun des cas suivants, déterminer le point d'intersection *M* des deux droites d et d'.

a. $d : x + y - 3 = 0$ et $d' : 2x - 3y + 4 = 0$

b. $d : 3x + 4y - 19 = 0$ et $d' : 2x + 5y + 6 = 0$.

15 MODE EXPERT ! Déterminer le point d'intersection *M* des deux droites d et d', avec $d : 3x + \sqrt{2}y = 0$ et $d' : \sqrt{2}x + 2y - 1 = 0$.

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

16 Vrai ou faux ?

a. Le couple $(4\,;6)$ vérifie l'équation $x - y = 2$.

b. Le couple $(0\,;1)$ est solution du système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

c. Le couple $(2\,;-1)$ représente les coordonnées du point d'intersection des droites d d'équation $x - y - 3 = 0$ et d' d'équation $x + y - 1 = 0$.

d. Le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ a une infinité de solutions.

e. Le système $\begin{cases} x = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ admet le couple $(5\,;0)$ comme unique solution.

17 Compléter.

a. Pour résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ -6x - 7y = 1 \end{cases}$ par combinaison, on multiplie chaque membre de la première équation par .... puis on ajoute membre à membre les deux équations.

b. Pour résoudre le système $\begin{cases} x + 8y = 7 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ par substitution, on exprime l'inconnue .... en fonction de l'inconnue .... dans la .... équation.

c. Pour résoudre le système $\begin{cases} 13x + 8y = 2 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ par substitution, on exprime l'inconnue .... en fonction de l'inconnue .... dans la .... équation.

Parcours 2 MODE EXPERT !

18 Vrai ou faux ?

a. Le couple $\left(\frac{6}{5};1\right)$ est solution du système $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ x - y = \frac{1}{5} \end{cases}$.

b. Les droites d d'équation $3x - 4y - 3 = 0$ et d' d'équation $x + 5y - 1 = 0$ sont sécantes au point de coordonnées $(1\,;0)$.

c. Le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ admet un unique couple solution.

19 Compléter.

a. Pour résoudre le système $\begin{cases} 5x + 7y = 9 \\ -6x - 28y = 1 \end{cases}$ par combinaison, on multiplie chaque membre de la première équation par .... puis on ajoute membre à membre les deux équations.

b. Pour résoudre le système $\begin{cases} 6x + 8y = 7 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ par substitution, on exprime l'inconnue .... en fonction de l'inconnue .... dans la .... équation.

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 4.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2012

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

20 Vrai ou Faux ?
Raisonner

a. Les couples solutions du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ sont les coordonnées des points communs aux deux droites d'équation $ax + by + c = 0$ et d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

b. Il existe des systèmes qui n'ont pas de solution.

c. Si un système a deux couples solutions, alors il a une infinité de couples solutions.

d. Si les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et d'équation $a'x + b'y + c' = 0$ sont strictement parallèles, alors le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ a une infinité de solutions.

21 1er mai
Modéliser, calculer

Le 1er mai, Myriam vend son muguet dans la rue. Elle a estimé le prix d'un brin de muguet et d'une rose de son jardin. Elle propose deux types de bouquets :

- l'un composé de 4 brins de muguet et 3 roses pour 12 € ;
- l'autre composé de 2 brins de muguet et 1 rose pour 5 €.

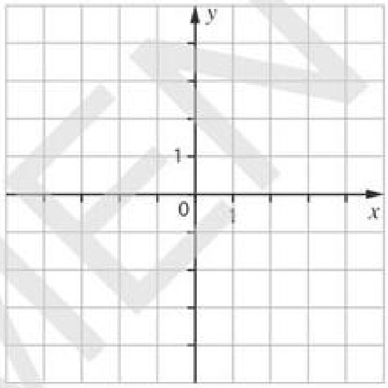
On note x le prix d'un brin de muguet et y le prix d'une rose.

Écrire un système d'inconnues x et y et déterminer le prix d'un brin de muguet et celui d'une rose.

22 Cas particuliers
Représenter, raisonner

Dans chaque cas :

- résoudre le système ;
- représenter dans le repère ci-dessous les deux droites mises en jeu dans le système ;
- s'il existe, placer le point dont les coordonnées constituent la solution du système.



a. $\mathcal{S} : \begin{cases} x = -4 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

b. $\mathcal{S} : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$

c. $\mathcal{S} : \begin{cases} x = y \\ y = -x \end{cases}$

d. $\mathcal{S} : \begin{cases} y = 2x \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

23 Théâtre
Modéliser, calculer

Agnès va au théâtre avec son mari, ses deux parents et ses trois enfants. Elle paie 111 €.

Assane va à la même représentation avec son épouse et ses deux enfants. Il paie 60 €. Quels sont les prix d'une place adulte et d'une place enfant ?

24 L'équation réduite d'une droite
Représenter, calculer

La droite passant par $A(3\ ;\ 2)$ et $B(5\ ;\ 6)$ a pour équation réduite $y = mx + p$.

1. En exprimant le fait que les coordonnées de A et de B vérifient l'équation réduite de la droite (AB), écrire un système vérifié par m et p.

2. Résoudre ce système et en déduire l'équation réduite de la droite (AB).

25 Différents degrés
Raisonner, calculer

Le degré Fahrenheit (°F) est une unité dans laquelle les anglo-saxons mesurent la température. La température en °F, notée T_F, est reliée à celle en degrés Celsius, notée T_C, par une relation du type $T_F = aT_C + b$. On connaît les correspondances suivantes entre ces deux unités de température.

T_C	10	40
T_F	50	104

1. Déterminer un système dont $(a\ ;\ b)$ est solution.

2. Résoudre le système précédent et exprimer T_F en fonction de T_C.

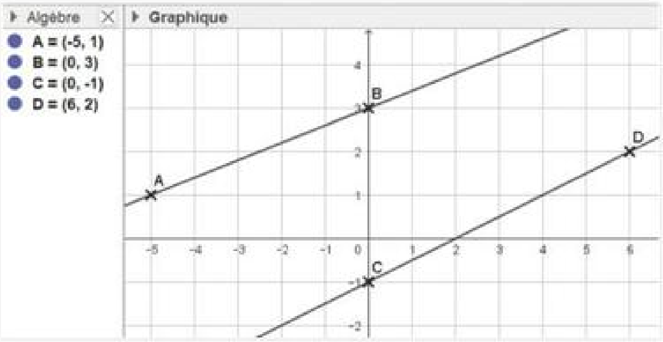
3. Quelle est la température normale du corps humain en °F ?

4. Un 14 juillet à Miami, on a relevé une température de 95°F. Faisait-il chaud ce jour-là à Miami ?

26 Droites sécantes

Représenter, raisonner, calculer

On a représenté ci-dessous, avec un logiciel de géométrie, deux droites (AB) et (CD).



1. Déterminer une équation réduite de la droite (AB) et une équation réduite de la droite (CD) puis justifier que ces deux droites ne sont pas parallèles.

2. Déterminer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de leur point d'intersection.

27 Algo et Python

Une entreprise fabrique des billes en verre de masse 6 grammes et des billes en métal de masse 10 grammes.

En cours de fabrication, un dispositif permet de peser et compter des échantillons de billes. Un de ces échantillons pèse 2 382 grammes et contient 315 billes.

Afin de savoir combien de billes de chaque sorte il contient, on a écrit la fonction en Python ci-dessous.

```
1 def echantillon():
2     for v in range(...):
3         for m in range(...):
4             if v+m==315 and ...==2382:
5                 return (v,m)
```

1. a. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable v et pour la variable m qui correspondent respectivement au nombre de billes en verre et au nombre de billes en métal ?

b. Compléter alors les pointillés des lignes 2 et 3.

2. Compléter les pointillés de la ligne 4 et expliquer l'instruction de cette ligne.

3. a. Interpréter le résultat suivant obtenu dans la console.

```
>>> echantillon()
(192, 123)
```

b. Vérifier ce résultat par le calcul.

28 Stylos 4 couleurs
Modéliser, calculer

Un stylo 4 couleurs « classique » coûte 1,50 € de moins qu'un stylo 4 couleurs « dernier cri » où le vert est remplacé par un critérium. Ingrid a acheté 3 stylos « classiques » et 2 stylos « dernier cri » ; elle a payé 12,50 €.

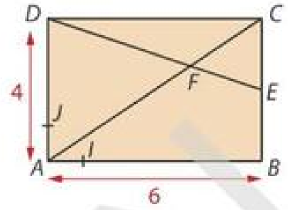
Quel est le prix de chaque type de stylo ?

29 Arcachon
Modéliser, calculer

Une entreprise propose une balade en bateau sur le bassin d'Arcachon. Un premier groupe, composé de 11 adultes et 3 enfants, a payé 157 €. Un second groupe, composé de 7 adultes et 9 enfants, a payé 146 €. Déterminer le prix d'une place adulte et celui d'une place enfant.

30 Aire dans un rectangle
Chercher, raisonner, calculer

$ABCD$ est un rectangle de longueur 6 et de largeur 4. E est le milieu de $[BC]$, F est le point d'intersection des droites (AC) et (DE). I et J sont les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



1. Pourquoi le repère $(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ est-il orthonormé ?

2. Déterminer les coordonnées du point F dans ce repère.

3. Calculer l'aire du triangle CEF.

31 Paramètre
Raisonner, calculer

Soit k un nombre réel. Résoudre le système suivant, d'inconnues x et y, en fonction des valeurs de k.

$$\mathcal{S}: \begin{cases} kx + 6y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

32 Point de concours
Raisonner, calculer

Dans un repère orthonormé, on a $A(-8\,;1)$, $B(3\,;2)$, $C(4\,;-1)$, $D(-3\,;3)$, $E(2\,;5)$ et $F(-2\,;0)$.

Montrer que les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes.

33 Les torchons et les serviettes
Modéliser, calculer, chercher

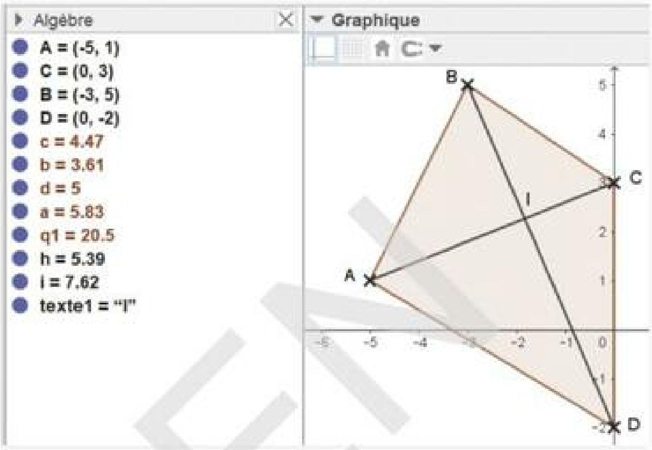
Une entreprise bretonne a en stock 1 157 torchons et 3 600 essuie-mains. Elle veut écouler la totalité de ce stock en vendant aux magasins de souvenirs de la région :

- des lots « Maxi » de 5 torchons et 12 essuie-mains ;
- des lots « Mini » de 2 torchons et 9 essuie-mains.

Est-ce possible ?

34 Coordonnées d'un point
Représenter, raisonner, calculer

Tom a tracé un quadrilatère $ABCD$ de centre I avec un logiciel de géométrie.



Grâce aux données du logiciel, déterminer les coordonnées du point I.

Démonstration

Raisonnement : négation d'une proposition

Une **proposition** est une affirmation qui est vraie ou fausse. La **négation** d'une proposition est la proposition obtenue en formulant le « contraire » de la proposition initiale, c'est-à-dire que la négation d'une proposition P doit être vraie quand P est fausse, et fausse quand P est vraie.
Exemple : On considère un réel x quelconque. La proposition « $x \geqslant 2$ » est vraie si le nombre x est supérieur ou égal à 2, et fausse sinon. Sa négation est donc « $x < 2$ ».

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes (x et y désignent des réels quelconques).

a. $x < 0$

b. $x + y = 5$

c. $x = 0$ ou $x = 1$

d. $x = 2$ et $y = 1$

e. $x \geqslant 0$ ou $y < 1$

Chapitre 13

Information chiffrée

1 Calculer et utiliser une proportion

On considère une population de N individus et une sous-population de n individus. La **proportion** d'individus de la sous-population notée p, est égale à $p = \frac{n}{N}$.
p peut s'exprimer sous la forme d'une **fraction**, en **écriture décimale** ou en **pourcentage**.

1 Compléter le tableau suivant dans lequel des proportions sont inscrites.

Fraction irréductible	Écriture décimale	Pourcentage
$\frac{2}{5}$	....	....
....	0,2	....
$\frac{1}{4}$	....	....
....	....	10 %
....	0,5	....
$\frac{3}{4}$	....	....

2 Une urne contient 10 boules rouges et 15 boules noires. Donner la proportion de boules rouges dans ce sac sous forme :

a. d'une fraction irréductible : ....

b. d'un nombre en écriture décimale : ....

c. d'un pourcentage : ....

3 Dans un lycée, il y a 720 élèves dont 540 demi-pensionnaires. Donner la proportion de demi-pensionnaires dans ce lycée sous forme :

a. d'une fraction irréductible : ....

b. d'un nombre en écriture décimale : ....

c. d'un pourcentage : ....

4 Dans une classe de 32 élèves, il y a 12 filles. Donner la proportion de filles dans cette classe sous forme :

a. d'une fraction inéductible : ....

b. d'une nombre en écriture décimale : ....

c. d'une pourcentage : ....

5 MODE EXPERT ! Dans le tableau suivant, on donne la composition d'une assemblée.

	Hommes	Femmes
Adulte	300	450
Enfant	100	150

1. Donner la proportion de femmes dans cette assemblée, en écriture décimale. ....

2. Donner la proportion d'adultes de sexe masculin dans cette assemblée, en pourcentage. ....

3. Donner la proportion d'enfants parmi les hommes de cette assemblée, sous la forme d'une fraction irréductible.

....

Pour calculer une proportion p d'une quantité N, on calcule $p \times N$.

6 Compléter.

a. 20 % de 1 000 : ....

b. $\frac{1}{4}$ de 500 : ....

c. 10 % de 320 : ....

d. 50 % de 350 : ....

e. $\frac{3}{4}$ de 800 : ....

f. 25 % de 900 : ....

g. $\frac{2}{5}$ de 450 : ....

h. $\frac{3}{10}$ de 130 : ....

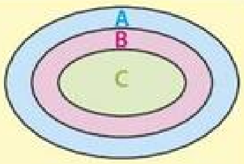
7 À un concert, 60 % des 450 places vendues sont des places assises. Combien de places assises ont été vendues pour ce concert ?

....

....

2 Calculer un pourcentage de pourcentage

- On considère :
  - une population notée A ;
  - une sous-population B de A ;
  - une sous-population C de B.



On note :
- p la proportion d'individus de B dans A ;
- p' la proportion d'individus de C dans B.

Alors, la proportion d'individus de C dans A est égale à $p \times p'$.

- Dans une classe de 2^de^, 40 % des élèves sont des garçons. Parmi ces garçons, 20 % étudient l'espagnol. La proportion de garçons étudiant l'espagnol dans la classe est $\frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{8}{100}$ soit 8 %.

8 Compléter.

a. 10 % de 50 % représentent $\frac{\ldots}{100}$ de $\frac{\ldots}{100}$, soit $\frac{\ldots}{100} \times \frac{\ldots}{100} = \frac{\ldots}{100}$, soit .... %.

b. 20 % de 10 % représentent $\frac{\ldots}{100}$ de $\frac{\ldots}{100}$, soit $\frac{\ldots}{100} \times \frac{\ldots}{100} = \frac{\ldots}{100}$, soit .... %.

c. 50 % de 15 % représentent .... %.

d. 25 % de 40 % représentent .... %.

9 Dans un lycée, 60 % des élèves sont inscrits à un club. Parmi eux, 40 % fréquentent leur club entre midi et deux heures. Quel pourcentage d'élèves de ce lycée fréquente un club entre midi et deux heures ?

10 Un jus de fruits a été préparé avec 40 % de fruits rouges dont 25 % de fraises. Quel est le pourcentage de fraises dans ce jus de fruits ?

11 Un garagiste constate que 20 % des voitures qu'il a en stock sont rouges. Parmi celles-ci, il décide d'en solder 10 %. Quel pourcentage de son stock représentent les voitures rouges soldées ?

12 92 % des foyers français sont équipés d'au moins un écran internet et environ 65 % d'entre eux s'y connectent tous les jours. Quelle proportion de Français se connecte tous les jours à un écran internet ? Donner le résultat sous la forme d'un pourcentage.

13 Le groupe sanguin le plus répandu est le groupe O qui concerne 45 % de la population. Dans ce groupe, environ 85 % sont de rhésus positif.

1. Quel pourcentage de la population est du groupe O avec un rhésus positif ?

2. On compte environ 67 millions de français. Combien sont du groupe O avec un rhésus positif (arrondir au million près) ?

14 MODE EXPERT ! Dans un lycée, 70 % des élèves sont demi-pensionnaires. Les filles demi-pensionnaires représentent 42 % des élèves du lycée.

1. Quelle est la proportion de filles parmi les demi-pensionnaires de ce lycée ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. Ce lycée compte 600 élèves. Combien y a-t-il de garçons demi-pensionnaires ?

3 Utiliser et déterminer une variation

Dans cette page, on considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initiale et V_F la quantité finale.

- La **variation absolue** de la quantité est le nombre $V_F - V_I$.
  - La variation absolue d'une quantité est positive si et seulement si la quantité augmente.
  - La variation absolue d'une quantité est négative si et seulement si la quantité diminue.

15 Compléter le tableau suivant.

V_I	V_F	Variation absolue	Baisse ou hausse
350	400	....	....
490	....	–40	....
....	534	22	....
302	....	–4	....
158	300	....	....
....	217	–98	....

16 Une ville compte 128 000 habitants. 3 % des habitants décident de quitter la ville. Quelle est la variation absolue de la population ?

- La **variation relative** ou **taux d'évolution** de cette quantité est le nombre $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.
  - t est positif si et seulement si la quantité augmente.
  - t est négatif si et seulement si la quantité diminue.

17 Une robe coûtant 56 € est soldée à 44,80 €. Quelle est le pourcentage de réduction ?

18 La facture de gaz de M. Carré est passé de 128,50 € à 167,05 €. De quel pourcentage a-t-elle augmenté ?

- On a $V_F = (1+t)V_I$. Le nombre $c = 1 + t$ est appelé **coefficient multiplicateur**.
  - On a aussi $c = \dfrac{V_F}{V_I}$.
  - La quantité augmente si et seulement le coefficient multiplicateur est plus grand que 1.
  - La quantité diminue si et seulement le coefficient multiplicateur est plus petit que 1.

19 Compléter le tableau suivant.

Taux d'évolution en pourcentage	Coefficient multiplicateur	Baisse ou hausse
–20 %	....	....
....	1,3	....
10 %	....	....
....	0,65	....

20 Compléter le tableau suivant.

V_I	V_F	t	c
40	50	....	....
50	....	–0,2	....
200	....	....	0,75
240	360	....	....

21 Un jeu vidéo coûtant 67 € est soldé à –25 %. Déterminer son nouveau prix à l'aide d'une seule opération.

22 Un tableau dont le prix de vente est fixé à 6 500 € est soumis à la taxe sur les objets précieux dont le montant s'élève à 6 % du prix du bien. Déterminer, en une seule opération, le montant dont l'acheteur doit s'acquitter.

23 MODE EXPERT ! Quel est le montant hors taxe (HT) d'une facture de 263,75 €, dont le taux de TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est de 5,5 % ?

4 Utiliser des évolutions successives ou réciproques

▸ Dans le cas d'**évolutions successives**, le **coefficient multiplicateur global** est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution. Il permet de déterminer le **taux d'évolution global**.
▸ Pour appliquer des évolutions successives à une quantité, il suffit de multiplier cette quantité par le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

24 On considère deux évolutions successives de taux t_1 et t_2. Compléter le tableau suivant.

t_1	0,2	−0,1	0,3	−0,1
t_2	0,3	−0,2	−0,2	0,3
c_1	1,2	......	......	......
c_2	1,3	......	......	......
Coefficient global	1,56	......	......	......
Taux global en écriture décimale	0,56	......	......	......
Taux global en pourcentage	56 %	......	......	......

25 Dans une boutique, pendant les soldes, on décide d'une première baisse de 20 % puis d'une seconde de 10 %.

1. Quel est le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux baisses de prix ?

2. De quel pourcentage les prix ont-ils finalement baissé ?

26 Un article coûtant 230 € subit une hausse de 15 % puis une autre hausse de 20 %.

1. Quel est le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux hausses de prix ?

2. De quel pourcentage le prix de cet article a-t-il finalement augmenté ?

3. Quel est le prix final de cet article ?

27 MODE EXPERT ! Un vendeur souhaite appliquer à un article deux hausses successives d'un même pourcentage, de sorte que l'augmentation globale soit d'environ 30 %. Quelles hausses, à 1 % près, doit-il appliquer ?

▸ Soient deux quantités V_0 et V_1.
• On appelle **évolutions réciproques** les évolutions qui permettent de passer de V_0 à V_1 d'une part, et de V_1 à V_0 d'autre part.
• Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre.

28 Pour faire face à une suractivité temporaire, une entreprise a augmenté ces effectifs de 25 %. Quelle baisse d'effectif va-t-il falloir appliquer pour retrouver l'effectif initial ?

29 MODE EXPERT ! Pendant le confinement, les ventes d'une entreprise ont baissé de 80 %. De quel pourcentage devront-elles augmenter pour retrouver leur niveau initial ?

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

30 Compléter.

a. 10 % de 40 : ....
b. 20 % de 200 : ....
c. 50 % de 70 : ....
d. 25 % de 400 : ....
e. 40 % de 300 : ....
f. 75 % de 60 : ....
g. $\frac{1}{4}$ de 800 : ....
h. $\frac{1}{2}$ de 500 : ....
i. $\frac{3}{4}$ de 400 : ....
j. $\frac{1}{5}$ de 1 500 : ....

31 Compléter par un nombre écrit en pourcentage.

a. 10 % de 20 % : ....
b. 20 % de 50 % : ....
c. 50 % de 30 % : ....
d. 25 % de 80 % : ....
e. 75 % de 80 % : ....
f. 40 % de 100 % : ....
g. 10 % de 60 % : ....
h. 20 % de 40 % : ....

32 Compléter le tableau.

Taux	20 %	−10 %	−50 %	30 %
Coefficient multiplicateur				
↗ (hausse) ou ↘ (baisse)				

33 Compléter le tableau.

Coefficient multiplicateur	1,4	0,7	1,5	0,2
Taux d'évolution en pourcentage				
↗ (hausse) ou ↘ (baisse)				

Parcours 2 MODE EXPERT !

34 Compléter.

a. 10 % de 434 : ....
b. 20 % de 210 : ....
c. 50 % de 35 : ....
d. 25 % de 50 : ....
e. 40 % de 35 : ....
f. 75 % de 3 600 : ....
g. $\frac{1}{4}$ de 888 : ....
h. $\frac{1}{2}$ de 59 : ....
i. $\frac{3}{4}$ de 500 : ....
j. $\frac{1}{5}$ de 300 : ....

35 Compléter par un nombre écrit en pourcentage.

a. 10 % de 35 % : ....
b. 20 % de 30 % : ....
c. 50 % de 45 % : ....
d. 25 % de 70 % : ....
e. 75 % de 60 % : ....
f. 40 % de 20 % : ....
g. 10 % de 3 % : ....
h. 20 % de 4 % : ....

36 Compléter le tableau.

Taux	2 %	−3 %	−5,5 %	1 %
Coefficient multiplicateur				
↗ (hausse) ou ↘ (baisse)				

37 Compléter le tableau.

Coefficient multiplicateur	1,14	0,74	1,153	0,82
Taux d'évolution en pourcentage				
↗ (hausse) ou ↘ (baisse)				

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 4.

Exercices interactifs

ou
hachette-clic.fr/22ma2013

Problèmes

ceinture jaune — ceinture verte — ceinture noire

38 Réduction
Calculer

Dans un magasin, un article coûtant 500 € est soldé à 360 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

39 Meilleure réduction
Calculer

Un modèle de téléphone est vendu à 480 € dans deux magasins différents. Le premier magasin décide d'une réduction de 50 € et le second d'une réduction de 10 %. Dans quel magasin la réduction est-elle la plus élevée ?

40 Pot de peinture
Calculer

Lucie, peintre en bâtiment, achète 8 pots identiques de peinture blanche chez son fournisseur. Elle paye 364,80 € TTC (toutes taxes comprises). Le taux de TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est de 20 %. Quel le prix HT (hors taxes) d'un pot de peinture ?

41 Aquarium
Calculer

Environ 1 % de l'eau d'un aquarium s'évapore chaque jour. Jeudi, il contenait 64,35 L.

1. Quel volume d'eau contenait-il la veille ?

2. Est-ce qu'il contenait au moins 70 L une semaine auparavant ?

42 Ciment
Raisonner, calculer

Pour faire du béton standard, on préconise les proportions suivantes : « 1 volume de ciment pour 2 volumes de sable, 3 volumes de gravier et 0,5 volume d'eau ».

1. Déterminer les proportions de chacun des composants du béton standard sous la forme d'une fraction.

2. On souhaite fabriquer 26 dm^3 de béton. Quelle quantité de chaque composant faut-il prévoir ?

43 Sondage
Communiquer, calculer

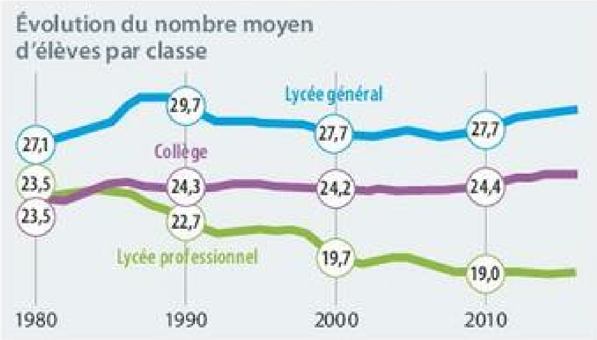
Une chaîne de restaurant végan commande un sondage dans une ville pour savoir si elle prend le risque d'y ouvrir un restaurant. Sur 1 200 habitants sondés, 576 ont répondu positivement à l'ouverture d'un tel restaurant.

1. Calculer le pourcentage de personnes ayant répondu positivement à ce sondage.

2. La société de sondage considère que ses résultats comportent une marge d'erreur de 3 %. On considère que ce sondage est représentatif de la population. La chaîne de restaurant décide d'ouvrir un restaurant si elle a la certitude que plus de 47 % des habitants ont eu une réaction positive. Va-t-elle ouvrir un restaurant végan dans cette ville ?

44 Nombre d'élèves par classe
Représenter, calculer

Le document suivant montre l'évolution du nombre d'élèves par classe en France de 1980 à 2010.



Dans tout le problème, on donnera les résultats en pourcentage arrondis à 0,1 %.

1. Calculer le taux d'évolution du nombre moyen d'élèves par classe en collège en France entre les années 1980 et 2000.

2. Calculer le taux d'évolution du nombre moyen d'élèves par classe en lycée général en France entre les années 1980 et 1990.

3. Calculer le taux d'évolution du nombre moyen d'élèves par classe en lycée professionnel en France entre les années 1980 et 2010.

45 Polytechnique
Calculer, raisonner

Le 19 février 2013, un journaliste parle du montant des factures d'électricité et annonce, au journal télévisé : « C'est du jamais vu ! Plus 6 % par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait Polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30 %. »

Que penser de cette affirmation ?

46 Engrenage
Raisonner, calculer

Une usine utilise trois machines fabriquant des roues pour engrenage dans les proportions suivantes :

- 25 % sont fabriqués par la machine A ;
- 40 % sont fabriqués par la machine B ;
- le reste par la machine C.

Les machines ne sont pas parfaites. On considère que 1 % des roues fabriquées par la machine A sont défectueuses, que la machine B produit 3 % de roues défectueuses et que la machine C en produit 2 %.

1. Parmi l'ensemble des roues fabriquées dans cette usine, quel est le pourcentage de roues défectueuses ?

2. L'usine fabrique 200 000 roues d'engrenage par jour. Combien de roues défectueuses sont fabriquées quotidiennement dans cette usine ?

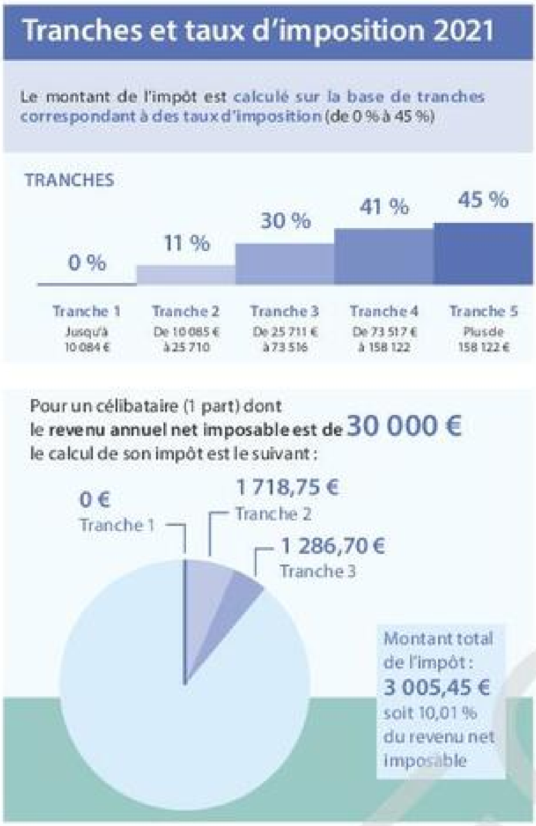
3. a. Déterminer sans calcul quelle est la machine qui produit le plus grand nombre de pièces défectueuses.

b. Combien de pièces défectueuses cette machine produit-elle chaque jour ?

47 Impôts sur le revenu

Calculer, raisonner, représenter

Le document suivant explique comment calculer le montant des impôts sur le revenu en fonction du revenu net imposable pour un célibataire sans enfant.



1. Écrire le calcul permettant de retrouver le montant de l'impôt sur le revenu de l'exemple présenté.

2. Déterminer, à l'euro près, le montant des impôts sur le revenu d'un célibataire sans enfant dont le revenu net imposable est de 75 000 €.

3. Quel pourcentage de son revenu net imposable ses impôts sur le revenu représentent-ils ?

48 Le moins cher

Raisonner, calculer

Une peinture est vendue dans deux magasins A et B en bidons de 5 L, au prix de 20 € le bidon.

Le magasin A fait une offre publicitaire : « réduction de 20 % sur le prix du bidon ». Le magasin B contre-attaque en faisant l'offre suivante : « 20 % de peinture en plus dans le bidon pour le même prix ».

Pour laquelle de ces deux offres le prix du litre de peinture est-il le plus intéressant ?

49 Dépenses courantes

Raisonner, calculer

Le mois dernier, Mélanie a dépensé 450 € : 100 € en habillement, 150 € en nourriture et le reste en dépenses diverses.

Ce mois-ci, ses dépenses d'habillement ont baissé de 25 %, ses dépenses de nourriture n'ont pas varié et ses dépenses diverses ont augmenté de 20 %.

Les dépenses de Mélanies ont-elles augmenté ou baissé ? De quel pourcentage ? Donner le résultat sous forme de pourcentage arrondi à 0,01%.

50 Algo et Python

Une espèce de chenilles s'attaque aux buis. Un massif forestier en est victime depuis quelques temps et perd 15 % de son effectif tous les ans.

Début 2022, le massif comptait 30 000 pieds de buis.

1. On a écrit une fonction Python `buis` qui permet de déterminer au bout de combien d'années les buis auront disparu de ce massif.

```
1 def buis():
2     nombre=...
3     n=2022
4     while nombre>=1:
5         nombre=...
6         n=...
7     return ...
```

a. Expliquer la condition de la ligne 4.

b. Compléter cette fonction afin qu'elle donne le résultat attendu.

c. Utiliser cette fonction pour déterminer l'année de la disparition des buis de ce massif.

2. L'ONF préconise de replanter 3 000 plants de buis chaque année pour compenser les dégâts de la chenille.

a. Modifier la fonction précédente afin qu'elle tienne compte de cette préconisation.

b. En utilisant cette fonction, conjecturer si cette préconisation est suffisant pour enrayer la disparition des buis.

51 **Assurance**

Raisonner, calculer, chercher

Angélique décide d'étudier l'évolution de sa cotisation d'assurance de 2017 à 2020 dans un tableur. La ligne 3 est au format « pourcentage à une décimale ».

	A	B	C	D	E
1	Année	2017	2018	2019	2020
2	Cotisation annuelle (en euros)	854	961	1072	1187
3	Taux d'évolution annuel		[illegible]%	11,6%	10,7%

1. Calculer le taux d'évolution global de sa cotisation entre 2017 et 2020, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,01 %.

2. a. Quelle formule Angélique a-t-elle pu saisir dans la cellule C3 pour y obtenir le taux annuel d'évolution de 2017 à 2018, puis, par recopie vers la droite jusqu'à la cellule E3, les taux d'évolution annuels successifs jusqu'en 2020 ?

b. Retrouver la valeur cachée par la tache sur son document.

3. On fait l'hypothèse que la cotisation annuelle augmentera chaque année de 11,6 % à partir de 2020.

a. Estimer le montant, arrondi à l'euro, de la cotisation annuelle de l'année 2025.

b. En quelle année, pour la première fois, la cotisation annuelle aura-t-elle doublé par rapport à 2017 ?

52 Hausse ou baisse ?

Raisonner, calculer, chercher

1. a. On considère une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 %. Quelle évolution globale est équivalente à ces deux évolutions ?

b. Même question avec 20 %.

2. Plus généralement, on choisit un nombre réel non nul a et on considère deux évolutions successives, l'une au taux $t_1 = a\ \%$ et l'autre au taux $t_2 = -a\ \%$.

a. Montrer que ces deux évolutions successives sont équivalentes à une baisse.

b. Quel est le taux d'évolution, en pourcentage, de cette évolution globale ?

c. En déduire, mentalement, à quelle évolution globale correspond une hausse de 50 % suivie d'une baisse de 50 %.

53 Monte le volume !

Raisonner, calculer

On augmente le rayon d'un cylindre de 20 % et sa hauteur de 30 %. De quel pourcentage augmente son volume ?

54 Hausse moyenne

Raisonner, calculer, chercher

Un article qui coûtait 150 € il y a deux ans coûte aujourd'hui 216 €. En discutant avec un vendeur, Samir apprend que l'article en question a en fait subit une augmentation chaque année et que ces deux hausses étaient de taux identique, mais le vendeur ne se souvient plus de ce taux.

Déterminer ce taux.

55 Du calcul littéral au calcul mental

Raisonner, calculer, chercher

a et b sont deux nombres réels strictement positifs. On considère une hausse de a % et une baisse de b %.

1. Quel est le coefficient multiplicateur c associé à l'enchaînement de ces deux variations ?

2. Montrer que $c = 1 + \dfrac{a - b - \dfrac{ab}{100}}{100}$.

3. En déduire, mentalement, à quelle évolution globale correspond :

a. une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 20 % ;

b. une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 10 %.

Démonstration

Démo de cours

On considère une population notée A, une sous-population B de A et une sous-population C de B.
On note $p_{B,A}$ la proportion d'individus de la population B dans A et $p_{C,B}$ la proportion d'individus de la population C dans B.
La proportion $p_{C,A}$ d'individus de C dans A est égale à $p_{C,A} = p_{C,B} \times p_{B,A}$.

1. Rappeler la définition d'une proportion p d'une sous-population d'effectif n dans une population d'effectif N.

2. A est une population d'effectif n_A, B une sous-population de A d'effectif n_B et C une sous-population de B d'effectif n_C.

a. Exprimer $p_{B,A}$, $p_{C,B}$ et $p_{C,A}$ en fonction de n_A, n_B et n_C.

b. Calculer $p_{C,B} \times p_{B,A}$ et en déduire l'égalité demandée.

Chapitre

14 Statistique descriptive

1 Calculer et exploiter une moyenne

▸ On considère la série statistique ci-dessous.

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p
Fréquence	f_1	f_2	...	f_p

On note $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$, l'effectif total.
La **moyenne pondérée** de cette série statistique, notée $\overline{x}$, est donnée par l'une des formules suivantes :

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$$

ou $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots + f_p \times x_p$

1 Calculer la moyenne pondérée de la série suivante.

Valeur	7	10	13
Effectif	2	3	5

2 Calculer la moyenne pondérée de la série suivante.

Valeur	4	2	8
Fréquence	0,5	0,3	0,2

3 Dans une entreprise, on a la répartition de salaire suivante.

	Salaire net mensuel en €	Fréquence
Ouvrier	1 287	65 %
Cadre	2 829	35 %

Déterminer le salaire moyen d'un employé de cette entreprise.

▸ Lorsque les valeurs de la série sont **regroupées en classes**, on utilise comme valeurs le centre de chaque classe (moyenne des bornes de l'intervalle).

4 Le tableau suivant donne la durée de vie (en heures d'utilisation) de 100 ampoules LED.

Durée de vie en milliers d'heures d'utilisation	Effectif
[0 ; 10[	30
[10 ; 20[	50
[20 ; 30[	20

Calculer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

5 MODE EXPERT ! Salomé a eu 3 notes de mathématiques ce trimestre : 14 coefficient 0,25 puis 10 et 15 coefficient 0,75. Combien doit-elle avoir au minimum au dernier devoir maison, coefficient 0,25, pour avoir 13 de moyenne ?

▸ Lorsque toutes les valeurs de la série sont transformées par une fonction affine $x \mapsto mx + p$, la moyenne de la nouvelle série est $m\,\overline{x} + p$.

6 Pour compenser la hausse du prix de l'essence, une entreprise décide d'augmenter tous ses employés de 2 % et d'ajouter une prime de 20 €. Le salaire moyen des employés avant cette augmentation était de 1 532 €. Quel est le nouveau salaire moyen ?

2 Calculer et exploiter une médiane

Pour une série statistique dont les valeurs sont **rangées dans l'ordre croissant**, une **médiane** est une valeur qui partage la série en deux séries de mêmes effectifs.

Dans la pratique :

- Si l'effectif N est impair : on prend pour médiane la valeur centrale de la série des termes classés par ordre croissant.
- Si l'effectif N est pair : on prend pour médiane la moyenne des deux valeurs centrales de la série des termes classés par ordre croissant.

Valeur	2	5	6	9
Effectif	4	6	8	18
Effectif cumulé croissant	4	10	18	36

Il y a 36 valeurs, donc la médiane est la moyenne de la 18^e et la 19^e valeur

- La 18^e valeur est 6 et la 19^e valeur est 9.

La médiane vaut donc $\frac{6+9}{2} = 7{,}5$.

7 On considère la série statistique : 1 ; 4 ; 2 ; 7 ; 9. Quelle est la médiane de cette série ?

8 On considère la série statistique : 6 ; 4 ; 3 ; 10. Quelle est la médiane de cette série ?

9 On donne les résultats de la classe de 2de 3 en français dans le tableau ci-dessous.

1. Compléter le tableau.

Note	9	10	12	15	18
Effectif	5	11	10	6	3
Effectif cumulé croissant	5	16			

2. Combien d'élèves y a-t-il en 2de 3 ?

3. a. Quelle est la note médiane de cette classe ?

b. Interpréter ce résultat.

10 Dans une auto-école, on a fait des statistiques sur l'âge d'obtention du permis de conduire des jeunes.

1. Compléter le tableau.

Âge	17	18	19	20	21
Effectif	10	35	21	18	16
Effectif cumulé croissant					

2. Dans cette auto-école, quel pourcentage de jeunes a le permis avant 20 ans ?

3. a. Déterminer l'âge médian d'obtention du permis pour les jeunes de cette auto-école.

b. Interpréter ce résultat.

11 MODE EXPERT ! Voici une série de notes :

7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19.

1. Déterminer la médiane de cette série.

2. Modifier une note sans que la médiane soit modifiée.

3. Modifier deux notes de la série initiale afin que la médiane augmente de 1 point.

3 Étudier la dispersion d'une série statistique

On considère une série statistique dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.

- Le 1er **quartile** (respectivement 3^{e} quartile), noté Q_1 (resp. Q_3), est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % ou $\frac{1}{4}$ (resp. 75 % ou $\frac{3}{4}$) des valeurs lui sont inférieures ou égales.
- **L'intervalle interquartile** est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$. Son amplitude $Q_3 - Q_1$ s'appelle l'**écart interquartile**.

L'intervalle interquartile mesure la dispersion d'une série autour de sa médiane : plus il est petit, plus la série est regroupée autour cette médiane.

12 On considère la série statistique suivante :

2 ; 7 ; 10 ; 15 ; 23 ; 30.

1. Déterminer le 1er quartile de cette série.

2. Déterminer le 3^{e} quartile de cette série.

13 On donne les résultats de la classe de 2de 6 en mathématiques dans le tableau ci-dessous.

1. Compléter le tableau.

Note	7	9	11	13	17
Effectif	3	6	13	5	6
Effectif cumulé croissant	3	9			

2. Combien d'élèves y a-t-il en 2de 6 ?

3. a. Quel est le 1er quartile de cette série de notes ?

b. Interpréter ce résultat.

4. Quel est le 3^{e} quartile de cette série de notes ?

5. En déduire l'écart interquartile de cette série.

On considère la série statistique ci-dessous.

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p
Fréquence	f_1	f_2	...	f_p

- On note $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ l'effectif total et $\overline{x}$ sa moyenne. L'**écart type** de cette série est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N}}$$

- L'écart type mesure la dispersion d'une série autour de sa moyenne : plus il est petit, plus la série est regroupée autour de cette moyenne.

14 On considère la série statistique suivante.

Valeur	3	2	1	4
Effectif	1	4	3	2

1. Calculer la moyenne de cette série.

2. Calculer son écart type.

15 Voici les résultats de deux classes à un devoir commun de mathématiques.

Note	8	10	11	13	14	17
Effectif 2de 1	4	7	10	8	3	3
Effectif 2de 2	3	10	9	8	1	4

1. Quelle classe a obtenu la meilleure moyenne ?

2. Quelle est la classe dont les résultats sont les plus homogènes (c'est-à-dire dont les notes sont les plus regroupées autour sa moyenne) ?

4 Utiliser une calculatrice pour déterminer les paramètres d'une série statistique

Avec la TI-83 Premium CE

- **Pour entrer une série statistique :**

  stats ÉDIT 1:Modifier… entrer

  Dans la colonne L1, recopier les valeurs de la série statistique et, dans la colonne L2, les éventuels effectifs associés.

- **Pour déterminer les paramètres d'une série :**

  stats 1:Stats 1 Var entrer

  Dans Xliste, écrire le nom de la liste des valeurs et, dans ListeFréq, le nom de la liste des effectifs ou des fréquences (pour écrire L_1, taper 2nde 1).

  Taper entrer pour obtenir les résultats.

  La valeur de l'écart type est sur la ligne σ_X .

Avec la Casio GRAPH 90+E

- **Pour entrer une série statistique :**

  MENU Statistique

  Dans la colonne **List 1**, recopier les valeurs de la série statistique et, dans la colonne **List 2**, les éventuels effectifs associés.

- **Pour déterminer les paramètres d'une série :**

  Sélectionner CALC (F2) puis SET (F6) pour paramétrer les calculs. Dans **1Var XListe**, écrire le nom de la liste des valeurs et, dans **1Var Freq**, la liste des effectifs ou des fréquences (pour écrire **List 2**, taper 2).

  Taper sur EXE et choisir 1-VAR (F1) pour obtenir les résultats.

  La valeur de l'écart type est sur la ligne σ_X .

Avec la NumWorks

- **Pour entrer une série statistique :**

  , menu , onglet Données .

  Dans la colonne **Valeurs V1**, recopier les valeurs de la série et, dans la colonne **Effectifs N1**, les éventuels effectifs associés.

- **Pour déterminer les paramètres d'une série :**

  Sélectionner l'onglet Stats pour obtenir tous les paramètres statistiques.

  La valeur de l'écart type est sur la ligne Ecart type.

16 On considère la série statistique suivante :

4 ; 5 ; 2 ; 9 ; 12 ; 7 ; 23 ; 1 ; 11 ; 21 ; 20 ; 19 ; 10

Calculer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne, l'écart type et l'écart interquartile de cette série (arrondis si besoin au centième).

17 On considère la série statistique suivante.

Valeur	21	12	54	3
Effectif	42	17	82	13

Déterminer, à la calculatrice, les paramètres de cette série : moyenne, médiane, écart type, écart interquartile.

18 On considère la série statistique suivante.

Valeur	8	5	4	9
Fréquence	0,2	0,4	0,1	0,3

Déterminer, à la calculatrice, les paramètres de cette série : moyenne, médiane, écart type, écart interquartile.

19 La professeure d'anglais d'un lycée demande à l'assistant de langue, qui a pris en charge un de ses groupes d'élèves, de mettre une note d'oral à chacun. Voici la répartition des notes.

Note	10	12	15	18	20
Effectif	2	4	5	3	1

1. Déterminer, à la calculatrice, la moyenne et l'écart type de cette série (arrondis si besoin au centième).

2. La professeure d'anglais veut comparer les résultats de l'assistant avec les notes de son groupe, dont la répartition est la suivante :

Note	10	12	15	18	20
Effectif	4	4	7	2	3

Que peut-elle conclure ?

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

20 On considère la série suivante : 8 ; 10 ; 12.
Sans calculatrice, déterminer :

a. la moyenne .... b. la médiane : ....

c. les quartiles : ....

d. l'écart interquartile : ....

e. l'écart type : ....

21 Vrai ou faux ?

a. La moyenne pondérée d'une série statistique est toujours une valeur de la série. ....

b. La médiane d'une série statistique est toujours une valeur de la série. ....

c. Le 1er et le 3^{e} quartiles d'une série statistique sont toujours des valeurs de la série. ....

22 Donner un exemple de série statistique contenant :
a. trois valeurs différentes et de moyenne nulle ;

....

b. quatre valeurs différentes et de médiane nulle.

....

23 a. Si toutes les valeurs d'une série augmentent de 1, que se passe-t-il pour la moyenne ?

....

b. Si on note $\overline{x}$ l'ancienne moyenne, quelle est l'expression de la nouvelle moyenne ?

....

24 Si toutes les valeurs d'une série augmentent de 20 %, que se passe-t-il pour la moyenne ?

....

Parcours 2 MODE EXPERT !

25 On considère la série suivante : 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14.
Sans calculatrice, déterminer :

a. la moyenne .... b. la médiane : ....

c. les quartiles : ....

d. l'écart interquartile : ....

e. l'écart type : ....

26 Vrai ou faux ?

a. La moyenne pondérée d'une série statistique peut être une valeur de la série. ....

b. La médiane d'une série statistique est parfois une valeur de la série. ....

c. Les quartiles d'une série statistique ne sont jamais des valeurs de la série. ....

27 a. Donner un exemple de série statistique contenant cinq valeurs, dont le 1er quartile est égal au 3^{e}.

....

b. Donner un exemple de série statistique contenant quatre valeurs différentes, dont la médiane est égale à la moyenne.

....

28 a. Si toutes les valeurs d'une série diminuent de 30 % puis augmentent de 3, que se passe-t-il pour la moyenne ?

....

b. Si on note $\overline{x}$ l'ancienne moyenne, quelle est l'expression de la nouvelle moyenne ?

....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 4.

Exercices interactifs

ou
hachette-clic.fr/22ma2014

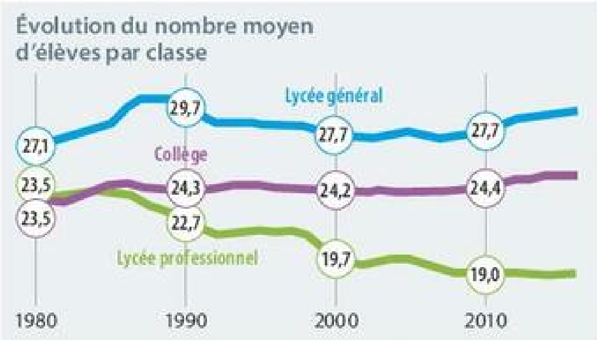
Problèmes

ceinture jaune · ceinture verte · ceinture noire

29 Nombre d'élèves par classe

Représenter, calculer

Le document suivant montre l'évolution du nombre moyen d'élèves par classe dans le secondaire en France de 1980 à 2010.



Calculer une estimation (arrondir au dixième si besoin) :

a. du nombre moyen d'élèves par classe en lycée général entre 1980 et 2010

b. du nombre moyen d'élèves par classe en collège entre 1980 et 2000

c. du nombre moyen d'élèves par classe en lycée professionnel entre 1990 et 2010

30 Résultats d'un devoir

Raisonner, calculer

Un professeur de mathématiques affiche les paramètres du dernier devoir en classe pour ses élèves.

Effectif total Σn	31
Minimum Min	7
Maximum Max	18
Etendue E	11
Moyenne $\bar{x}$	13.80645
Ecart type σ	4.37308
Variance var	19.12383
Premier quartile Q1	10
Troisième quartile Q3	18
Médiane Med	14

Vrai ou faux ?

a. La classe compte 31 élèves.

b. Un quart de la classe à une note inférieure ou égale à 14.

c. Trois quarts de la classe ont une note inférieure ou égale à 18.

d. Tous les élèves ont des notes comprises entre 7 et 18.

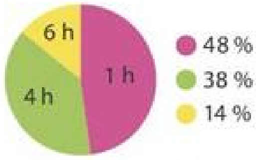
e. La moitié des élèves a une note inférieure ou égale à 13,8 et l'autre moitié une note supérieure ou égale à 13,8.

f. Environ la moitié de la classe a des notes comprises entre 10 et 18.

31 Réseaux sociaux

Calculer, représenter

Une étude dans un lycée a mis en évidence le temps passé quotidiennement sur les réseaux sociaux par les lycéens.



Déterminer le temps quotidien moyen passé par les jeunes de ce lycée sur les réseaux sociaux.

32 Devoir commun

Raisonner, calculer

Voici les résultats du devoir commun de mathématiques de seconde d'un lycée.

Classe	2^{de} 1	2^{de} 2	2^{de} 3	2^{de} 4	2^{de} 5
Effectif	30	36	32	28	27
Moyenne	11,5	9,8	10,1	11	10

Pour calculer la moyenne de l'ensemble des élèves de seconde, un élève propose $\dfrac{11{,}5+9{,}8+10{,}1+11+10}{5}=10{,}48$.

1. Expliquer pourquoi ce calcul ne peut convenir.

2. Calculer la moyenne de l'ensemble des élèves de seconde de ce lycée.

Problèmes

33 Salaire d'une PME
Raisonner, calculer

Le tableau suivant donne la répartition des salaires dans une PME en 2021.

Catégorie	Effectif	Salaire net en €
Ouvrier	38	1 258
Ouvrier qualifié	23	1 423
Cadre moyen	12	1 987
Cadre supérieur	9	2 598
Directeur	1	8 322

1. Combien d'employés a cette entreprise ?

2. a. Quel est, à l'euro près, le salaire moyen d'un employé de cette entreprise, sans tenir compte du directeur ?

b. Quel est, à l'euro près, le salaire moyen de la totalité des employés de cette entreprise ?

c. Expliquer la différence entre ces deux moyennes.

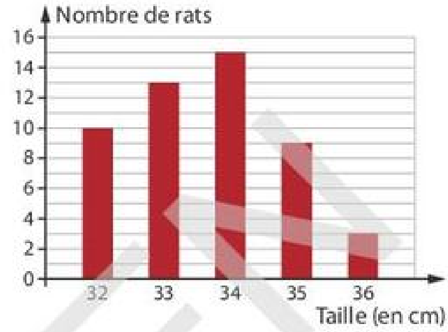
3. a. Quel est le salaire médian d'un employé de cette entreprise, sans tenir compte du directeur ?

b. Quel est le salaire médian de la totalité des employés de cette entreprise ?

c. Commenter la différence entre ces deux médianes.

34 Hormone de croissance
Raisonner, calculer, représenter

Un laboratoire teste une hormone de croissance sur des rats. Avant la première injection, on a mesuré la taille de chaque animal. Le graphique suivant donne le nombre de rats en fonction de leur taille en centimètres.



1. Quelle est la taille moyenne des rats de ce laboratoire ?

2. Après injection de l'hormone de croissance, tous les rats ont grandi de 2 cm. Quelle est la nouvelle taille moyenne des rats de ce laboratoire ?

35 Choix d'un groupe
Raisonner, calculer

Angélique, 25 ans, souhaite partir en vacances. L'agence de voyages lui propose de rejoindre un groupe de 6 personnes, toutes d'âges différents, dont la moyenne d'âge est de 26 ans.

1. Donner un exemple des âges possibles pour les membres de ce groupe.

2. Angélique décide de rejoindre ce groupe. Est-il possible de calculer la nouvelle moyenne d'âge du groupe sans connaître l'âge de chaque membre ? Si oui, la calculer.

36 Label
Raisonner, calculer

Afin de se voir attribuer un label, un producteur de légumes fait vérifier par un laboratoire agréé les traces de pesticides présents dans ses légumes (on supposera que tous les légumes testés ont le même poids). Les différents tests effectués donnent les résultats suivants.

Concentration trouvée (en µg/kg)	0,1	0,5	1	1,2	1,4
Nombre de légumes	29	28	32	23	17

Le label sera attribué si les conditions suivantes sont réunies :

- le dosage moyen sur les légumes testés doit être inférieur à 0,9 µg/kg ;
- la moitié des légumes testés doivent avoir un dosage inférieur à 1,1 µg/kg ;
- un quart des légumes testés doit avoir un dosage inférieur à 0,6 ;
- trois quarts des légumes testés doit avoir un dosage inférieur à 1,3.

L'agriculteur va-t-il obtenir son label ?

37 Médiane et moyenne
Raisonner, calculer, chercher

Voici une série de notes : 8 ; 10 ; 13 ; 17 ; 19 ; 7 ; 11 ; 9.

1. Déterminer la moyenne et la médiane de cette série.

2. Modifier une seule note afin que la moyenne baisse de 1 point sans que la médiane ne soit modifiée.

3. Modifier exactement deux notes de la série initiale afin que la médiane augmente de 1 point sans que la moyenne ne soit modifiée.

38 Algo et Python

On a créé la fonction en Python suivante.

```
def m(n):
    somme=0
    for k in range (n):
        valeur=input("valeur ?")
        somme=somme+float(valeur)
    return(somme/n)
```

1. Quel est le rôle de cette fonction ? Que représente la variable n ?

2. En s'inspirant de la fonction précédente, écrire une fonction mp prenant comme argument le nombre n de valeurs et renvoyant la moyenne pondérée de ces n valeurs affectées de coefficients (les valeurs et les coefficients seront demandés à l'utilisateur).

39 Moyenne et écart type

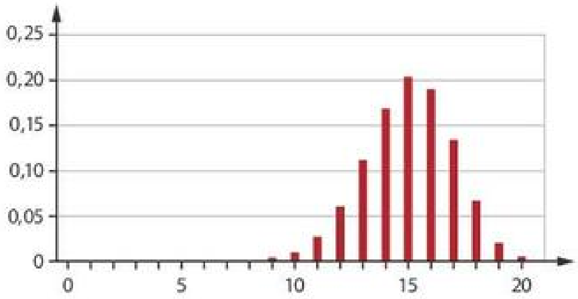
Raisonner, représenter

On étudie trois séries statistiques :

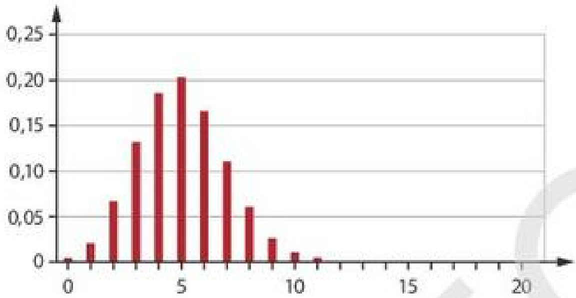
- série 1 : $\overline{x_1} = 15$ et $\sigma_1 = 2,7$
- série 2 : $\overline{x_2} = 15$ et $\sigma_2 = 1,9$
- série 3 : $\overline{x_3} = 5$ et $\sigma_3 = 1,9$

Associer chaque série au graphique correspondant.

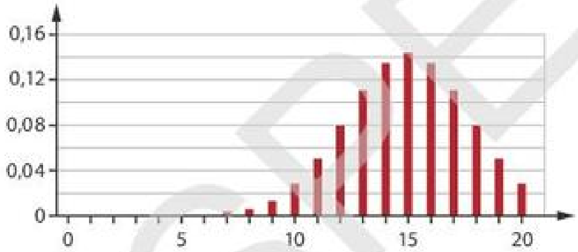
Graphique 1 : Série ....



Graphique 2 : Série ....

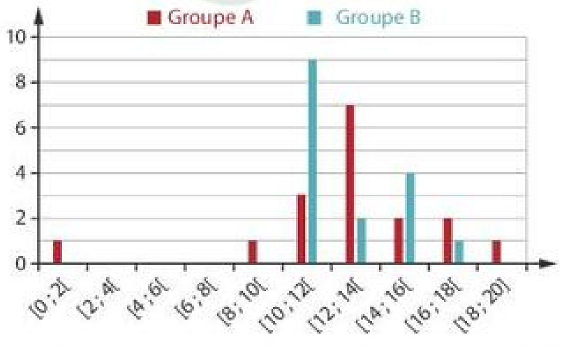


Graphique 3 : Série ....



40 Devoir d'histoire

Calculer, raisonner, représenter



Le graphique montre les résultats à un devoir d'histoire pendant lequel la classe était divisée en deux groupes. Le professeur affirme que le groupe A a mieux réussi ce contrôle que le groupe B car sa moyenne est meilleure.

1. Vérifier l'argument utilisé du professeur.

2. Les élèves du groupe B ne sont pas d'accord avec le professeur. Ils essaient de le convaincre que le groupe A n'a pas nécessairement mieux réussi. Donner des arguments que les élèves du groupe B pourraient utiliser.

41 Déréglée ?

Raisonner, calculer

Une usine fabrique des vis dont la longueur doit être de 6,5 cm. Afin de tester sa machine, le fabriquant étudie un lot de 1 000 vis. Il obtient les résultats suivants.

Longueur (en cm)	6	6,1	6,2	6,3	6,4
Effectif	62	106	111	89	100

Longueur (en cm)	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
Effectif	89	87	102	100	105	49

Le fabriquant considère que la machine est bien réglée si :

- la longueur moyenne des vis et la longueur médiane diffèrent de moins de 1 mm ;
- l'écart interquartile est inférieur ou égal 7 mm ;
- au moins 68 % de la production a une longueur appartenant à l'intervalle $[\overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma]$;

La machine est-elle correctement réglée ?

42 Financement participatif

Raisonner, calculer

Un jeu vidéo, développé grâce à un financement participatif, a reçu les dons suivants.

Dons (en €)	10	20	30	40	50
Effectifs en milliers	7,5	2,3	2	1,9	1,7

1. Déterminer les paramètres statistiques de cette série : moyenne, médiane, écart type, intervalle interquartile.

2. 1 000 dons supplémentaires de 50 € n'avaient pas été comptabilisés. Cela modifie-t-il l'écart interquartile ? Cela modifie-t-il l'écart type ?

43 Salaires

Raisonner, calculer

La répartition des salaires dans une entreprise est la suivante.

Salaires (en €)	Effectifs
[1 000 ; 2 000[	240
[2 000 ; 3 000[	80
[3 000 ; 9 000[	25

À l'issue de négociations entre la direction et les syndicats de salariés, on décide d'appliquer à tous les salaires le calcul : *nouveau* $= 0{,}96 \times$ *ancien* $+ 100$

1. Quelles sont les conséquences sur le salaire moyen de l'entreprise ? Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Est-ce que la répartition des salaires est plus homogène après ces négociations ?

44 Seine ou Rhône ?

Raisonner, calculer

Les débits moyens, en m^3 par seconde, de la Seine à Paris et du Rhône à Beaucaire selon le mois de l'année sont donnés ci-dessous.

	Seine	Rhône
Janvier	510	2 296
Février	545	2 050
Mars	445	2 280
Avril	232	1 673
Mai	229	1 668
Juin	157	1 558
Juillet	112	1 230
Août	94	1 148
Septembre	99	1 427
Octobre	124	1 066
Novembre	244	1 591
Décembre	309	1 378

1. Quel fleuve a l'écart type le plus grand ?

2. Pour savoir quel est le fleuve dont le débit est le plus « changeant », expliquer pourquoi la comparaison des écarts types n'est pas pertinente dans ce cas.

3. On décide, pour répondre à ce problème, de comparer les rapports $\frac{\sigma}{\overline{x}}$ de chaque fleuve, où σ est l'écart type et $\overline{x}$ la moyenne. Selon cet indicateur, quel est le fleuve dont le débit est le plus « changeant » ?

Démonstration

Démo de cours

La moyenne de la série ci-contre est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$$

ou $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots + f_p \times x_p$

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p
Fréquence	f_1	f_2	...	f_p

1. Soit i un entier compris entre 1 et p. Rappeler la définition de la fréquence f_i de la valeur numéro i.

2. En déduire que les deux formules donnent bien le même résultat.

Chapitre 15 Probabilités et échantillonnage

1 Modéliser une expérience aléatoire

▸ Choisir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité de l'issue**, de sorte que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1. On définit ainsi une **loi de probabilité**.

1 On tire au hasard un jeton dans le sac ci-contre et on observe son numéro. Compléter le tableau par des fractions sous forme irréductible.

Issue	1	2	3
Probabilité	....	....	....

2 MODE EXPERT ! On dispose d'une pièce truquée où Face a trois fois plus de chance de sortir que Pile. Compléter le tableau.

Issue	Face	Pile
Probabilité	....	....

▸ Quand chaque issue a autant de chances de se produire qu'une autre, on est en situation d'**équiprobabilité**. Si une expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'elles est égale à $\frac{1}{n}$.

▸ Dans une situation d'équiprobabilité d'univers Ω, la probabilité d'un évènement A est égale à :

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre d'issues dans } \Omega}.$$

▸ Quand on répète **un grand nombre de fois** une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur qui est la probabilité de cette issue.

3 On lance un dé non truqué à six faces et on observe le numéro de la face du dessus. Compléter le tableau.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	....	....	....	....	....	....

4 Dans une urne, on place trois boules rouges numérotées de 1 à 3, deux boules noires numérotées 1 et 2 et une blanche numérotée 1.

1. Quelles sont les issues possibles des expériences suivantes ?

a. On tire une boule au hasard et on observe sa couleur.

....

b. On tire une boule au hasard et on observe son numéro.

....

2. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. une boule rouge ? ....

b. une boule numérotée 2 ? ....

5 On choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et 20.
Quelle est la probabilité que ce soit un nombre premier ? Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

....

....

6 Pour une tombola, on fabrique 15 billets gagnants et 385 perdants. Quelle est la probabilité de gagner si on achète un billet ? Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

....

7 On a lancé un dé tétraédrique un grand nombre de fois, ce qui a permis d'établir le modèle de probabilité suivant.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

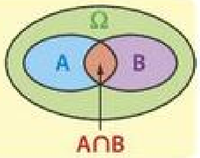
Que peut-on penser de ce dé ?

....

....

2 Utiliser des réunions ou intersections d'évènements

- On appelle $A \cap B$ (on dit « A inter B »), l'évènement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.



8 On lance un dé équilibré à six faces et on observe le numéro de la face du dessus. On note A l'évènement « Obtenir un multiple de 3 » et B « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 ».

1. Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$.

2. Quelles sont les issues contenues :

a. dans A ? .... b. dans B ? ....

c. dans $A \cap B$? ....

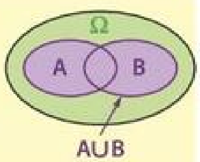
3. Quelle est la probabilité de chacun des évènements précédents ?

9 On fait tourner une roue équilibrée constituée de 15 secteurs identiques numérotés de 1 à 15. On note A l'évènement « Obtenir un résultat pair », B « Obtenir un résultat supérieur ou égal à 12 » et C « Obtenir un résultat strictement inférieur à 5 ». Écrire, à l'aide des évènements A, B et C les évènements suivants :

a. « Obtenir 2 ou 4 » ....

b. « Obtenir 12 ou 14 » ....

- On appelle $A \cup B$ (on dit « A union B ») l'évènement constitué des issues qui sont dans A ou dans B (c'est-à-dire dans A, dans B ou dans les deux.)



10 On lance un dé équilibré à six faces et on observe le numéro de la face du dessus. On note A l'évènement « Obtenir un multiple de 2 » et B « Obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».

1. Décrire par une phrase l'évènement $A \cup B$.

2. Quelles sont les issues contenues :

a. dans A ? .... b. dans B ? ....

c. dans $A \cup B$? ....

3. Quelle est la probabilité de A, de B et de $A \cup B$?

11 On fait tourner une roue équilibrée constituée de cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5. On note A l'évènement « Obtenir un résultat impair », B « Obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 » et C « Obtenir un résultat strictement inférieur à 4 ». Écrire, à l'aide des évènements A, B et C, les évènements suivants :

a. « Obtenir 1, 3, 4 ou 5 » ....

b. « Obtenir 1, 2, 3 ou 5 » ....

- A et B sont deux évènements d'un univers Ω.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

12 Lors une expérience aléatoire, on a $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.
Calculer $P(A \cup B)$.

13 Dans une population, la probabilité qu'un individu possède un marqueur génétique A est de 0,34 et celle qu'un individu possède un marqueur génétique B est de 0,18. La probabilité qu'il possède les deux marqueurs est de 0,07.
Quelle est la probabilité qu'il possède au moins l'un de ces deux caractères ?

14 MODE EXPERT ! Dans un service après-vente, sur deux bureaux A et B, l'un au moins est toujours ouvert. On note les évènements A : « Le bureau A est ouvert » et B : « Le bureau B est ouvert ». Une étude statistique sur les derniers mois a montré que $P(\overline{A}) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}84$.
Un client arrive. Quelle est la probabilité qu'il trouve les deux bureaux ouverts ?

3 Dénombrer à l'aide d'un tableau

▸ Un **tableau à double entrée** permet de dénombrer les issues d'une expérience aléatoire, en particulier lorsqu'on étudie simultanément deux caractères d'une même population.

15 Voici la répartition des employés d'une entreprise.

	Cadres	Non cadres	Total
Femmes	32	28	60
Hommes	27	13	40
Total	59	41	100

On tire au hasard une fiche d'un des salariés de cette entreprise. Quelle est la probabilité que cette fiche soit :

a. celle d'une femme ? ....

b. celle d'un cadre ? ....

c. celle d'un homme non cadre ? ....

d. celle d'une femme cadre ? ....

16 Dans un lycée comptant 625 élèves, 340 sont demi-pensionnaires. Parmi les 302 filles de ce lycée, 158 sont demi-pensionnaires.

1. Compléter le tableau suivant.

	DP	Externes	Total
Filles	....	....	....
Garçons	....	....	....
Total	....	....	....

2. On tire au hasard un dossier scolaire d'un des élèves de ce lycée.
Quelle est la probabilité que cette soit :

a. celui d'un garçon ? ....

b. celui d'une fille externe ? ....

c. celle d'un garçon DP ? ....

d. celle d'un élève DP ? ....

3. On choisit au hasard le dossier d'un garçon.
Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?

....

4. On croise un élève externe au hasard. Y a-t-il plus de chances que ce soit une fille ou un garçon ?

....

....

....

17 Dans une association, on a fait un sondage pour connaître les préférences des adhérents : activités au sein de l'association, sorties sportives ou culturelles. 53 % des adhérents sont des femmes. Celles qui préfèrent les sorties sportives représentent 20 % des adhérents et celles préférant les sorties culturelles, 12 %. Les hommes préférant des activités au sein de l'association représentent 14 % des adhérents et ceux préférant les sorties sportives, 15 %.

1. Compléter le tableau suivant.

	Femmes	Hommes	Total
Activités au sein de l'association	....	....	....
Sorties sportives	....	....	....
Sorties culturelles	....	....	....
Total	....	....	100 %

2. On prend au hasard la fiche d'un adhérent.
Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme préférant les sorties culturelles ?

....

3. On prend au hasard la fiche d'une personne préférant les sorties culturelles.
Quelle est la probabilité que ce soit celle d'une femme ?

....

....

....

18 MODE EXPERT ! Voici la composition d'une urne.

	Boules rouges	Boules noires
Numérotées 1	23	37
Numérotées 2	44	29
Numérotées 3	19	38

1. On tire au hasard une boule de cette urne.
Quelle est la probabilité que ce soit :

a. une boule numérotée 2 ? ....

b. une boule noire ? ....

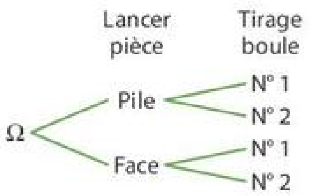
2. On tire une boule noire de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ? ....

3. On tire une boule numérotée 1 de l'urne.
Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ? ....

4 Dénombrer à l'aide d'un arbre

▸ Un **arbre** permet de représenter et dénombrer les issues d'une expérience aléatoire, en particulier lorsqu'on a une succession de plusieurs épreuves.

19 On lance une pièce équilibrée puis on tire une boule dans une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1 et l'autre numérotée 2. L'arbre ci-dessous résume cette expérience.



1. Quelle est le nombre d'issues de cette expérience ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face puis la boule numérotée 2 ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule numérotée 1 ?

4. On a obtenu Pile en lançant la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule numérotée 2 ?

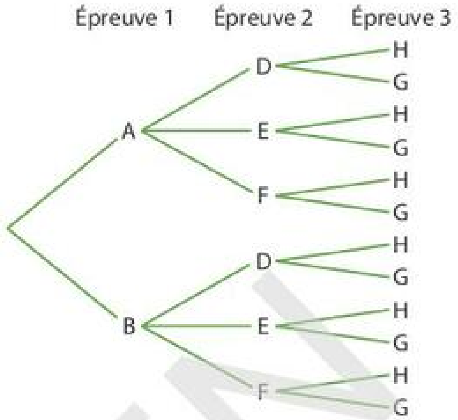
20 On tire une boule dans une urne contenant trois boules, une rouge, une blanche et une noire puis on lance une pièce équilibrée.

1. Représenter cette situation par un arbre.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge puis Face ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir Pile ?

21 L'arbre ci-dessous modélise une expérience aléatoire.



1. Combien la 1re épreuve a-t-elle d'issues ?

2. Combien la 2e épreuve a-t-elle d'issues ?

3. Combien la 3e épreuve a-t-elle d'issues ?

4. Combien l'expérience aléatoire a-t-elle d'issues ?

22 MODE EXPERT ! Dans une tirelire, on place une pièce de 1 € et deux pièces de 2 €. On la retourne et on en fait tomber une pièce puis une autre. On note A l'évènement « On obtient la pièce de 1 € » et B_i « On obtient la i-ème pièce de 2 € ».

1. Représenter cette situation par un arbre.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir les deux pièces de deux 2 € ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce de chaque sorte ?

4. La première pièce sortie est une pièce de 2 €.
Quelle est la probabilité que la seconde pièce sortie soit une pièce de 1 € ?

5. La première pièce sortie est une pièce de 1 €.
Quelle est la probabilité que la seconde pièce sortie soit une pièce de 2 € ?

5 Comprendre la fluctuation d'échantillonnage

Soit n un entier naturel non nul. On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière **indépendante** (c'est-à-dire que la probabilité de chaque issue ne dépend pas des résultats précédemment obtenus).
Un **échantillon de taille n** est constitué des résultats obtenus par n répétitions de cette expérience aléatoire.

23 On lance 1 000 fois une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Face vaut $\frac{1}{4}$.

1. Quelle est l'expérience aléatoire à deux issues qui est réalisée et répétée plusieurs fois ?

2. a. Quelle sont les deux issues de cette expérience ?

b. Donner la probabilité de ces deux issues.

3. Quel est la taille de l'échantillon obtenu ?

24 On lance 500 fois un dé équilibré à six faces et on observe si le numéro de la face du dessus est un 6 ou non.

1. Quelle est expérience aléatoire à deux issues qui est réalisée et répétée plusieurs fois ?

2. a. Quelle sont les deux issues de cette expérience ?

b. Donner la probabilité de ces deux issues.

3. Quelle est la taille de l'échantillon obtenu ?

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante et dont on connaît la probabilité p d'une issue ω.
On constitue un grand nombre d'échantillons de taille n sur lesquels on observe la fréquence f de réalisation de l'issue ω.
Plus la taille n des échantillons est grande, moins il y a de **fluctuation de la fréquence observée f** autour de la valeur de p.

25 Une urne contient des boules vertes et des boules jaunes. 30 % des boules sont vertes. On prélève au hasard une boule au hasard, on observe sa couleur et on la remet dans l'urne.
On répète 25 fois cette expérience. On obtient 9 fois une boule verte.

1. a. Quelle est l'issue dont la fréquence f est observée ?

b. Quelle est la valeur de f ?

2. Quelle est la probabilité p de cette issue ?

3. Quelle est la taille n de l'échantillon ?

4. Calculer $|f - p|$.

26 MODE EXPERT ! Un jeu de 32 cartes est composé de 8 cartes : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8 et 7, de 4 couleurs : cœur, carreau (cartes rouges) trèfle et pique (cartes noires). On prélève, avec remise, 100 cartes au hasard de ce jeu. On obtient 10 as.

1. a. Quelle est l'issue dont la fréquence f est observée ?

b. Quelle est la valeur de f ?

2. Quelle est la probabilité p de cette issue ?

3. Quelle est la taille de l'échantillon ?

4. a. Calculer $|f - p|$.

b. Si on tirait 500 cartes au lieu de 100, la différence $|f - p|$ obtenue serait-elle plus grande ou plus petite ?

6 Estimer une proportion

▸ On considère une population dans laquelle on cherche la proportion p des individus qui possèdent un certain caractère.
On prélève au hasard un échantillon de taille n dans la population et **on observe la fréquence f** du caractère dans cet échantillon. Cette fréquence f est une valeur approchée de p, appelée **estimation ponctuelle de p**.
Plus la taille de l'échantillon est grande, meilleure est l'estimation de p.

27 À la veille d'une élection, un institut de sondage souhaite estimer la proportion d'électeurs favorables au candidat sortant. Pour cela, il interroge 1 000 électeurs et obtient 432 intentions de vote pour ce candidat.

1. Quelle est la population étudiée ?

2. Quel est le caractère étudié ?

3. Quelle est la taille de l'échantillon ? ....

4. Quelle est la fréquence de personnes ayant l'intention de voter pour le candidat sortant dans cet échantillon ?

5. Donner, en pourcentage, une estimation de la proportion p d'électeurs souhaitant voter pour ce candidat.

28 Dans une usine, on souhaite vérifier la conformité des pièces produites. On prélève 500 pièces et on constate que 10 ont un défaut. On considère que la production est assez grande pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la population étudiée ?

2. Quel est le caractère étudié ?

3. Quelle est la taille de l'échantillon ? ....

4. Quelle est la fréquence de pièces qui ont un défaut dans cet échantillon ? ....

5. Donner, en pourcentage, une estimation de la proportion p de pièces qui ont un défaut dans cette usine.

29 On lance 300 fois une punaise et elle tombe 63 fois « sur le dos ».

1. Quelle est la taille de l'échantillon ? ....

2. Donner, en pourcentage, une estimation de la probabilité, pour cette punaise, de retomber sur le dos.

30 Dans un lycée accueillant 1 536 élèves, on souhaite estimer la proportion d'élèves ayant besoin d'une correction ophtalmologique (lunettes ou lentilles). On sonde 125 élèves et on constate que 27 élèves ont besoin d'une correction.

1. Quelle est la taille de l'échantillon ? ....

2. Donner, en pourcentage, une estimation de la proportion d'élèves ayant besoin d'une correction ophtalmologique dans ce lycée.

3. En déduire une estimation du nombre d'élèves qui ont besoin d'une correction ophtalmologique dans ce lycée.

31 MODE EXPERT ! Kylian s'entraîne pour un *bottle flip challenge* : il lance une bouteille d'eau à moitié pleine et essaie de faire en sorte qu'elle retombe debout.

1. À son premier entraînement, il lance la bouteille 400 fois et réussit à la faire retomber debout 13 fois. Donner une estimation, en pourcentage, du taux de réussite de Kylian.

2. Au bout de quelques mois, Kylian réussit 2 lancers sur 60 essais. Peut-on estimer que Kylian a progressé ?

Automatismes et calcul mental

Parcours 1

32 On lance un dé non équilibré à quatre faces. Compléter le tableau suivant.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,41	0,12	0,01	....

33 On tire un jeton au hasard dans une urne dont voici la composition.

	Rouge	Blanc	Noir	Total
Triangle	18	14	21	53
Carré	12	9	11	32
Total	30	23	32	85

Quelle est la probabilité :

- qu'il soit noir ? ....
- qu'il soit blanc et qu'il porte un carré ? ....

34 Pour une expérience aléatoire, on a :

$P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}12$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

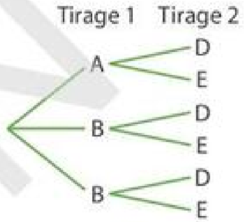
Calculer.

a. $P(\overline{A}) =$ ....

b. $P(\overline{B}) =$ ....

c. $P(A \cup B) =$ ....

35 L'arbre ci-contre représente une expérience aléatoire. Compléter.



a. Nombre d'issues du tirage 1 :

....

b. Nombre d'issues de l'expérience :

....

Parcours 2 MODE EXPERT !

36 On lance un dé non équilibré à quatre faces. Compléter le tableau suivant.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	....

37 On tire un jeton au hasard dans une urne dont voici la composition.

	Rouge	Blanc	Noir
Triangle	13	12	21
Carré	17	8	9

Quelle est la probabilité :

a. que ce soit un triangle ? ....

b. qu'il soit blanc et qu'il porte un carré ? ....

38 Pour une expérience aléatoire, on a :

$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

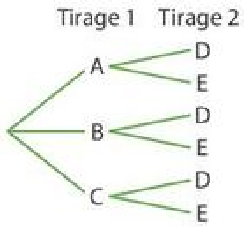
Calculer.

a. $P(\overline{A}) =$ ....

b. $P(\overline{B}) =$ ....

c. $P(A \cup B) =$ ....

39 L'arbre ci-contre représente une expérience aléatoire. Compléter.



a. $P(A \cap E) =$ ....

b. $P(A) =$ ....

Corrigés des automatismes

Je fais le bilan

Exercices interactifs sur les savoir-faire 1 à 6.

Exercices interactifs

ou

hachette-clic.fr/22ma2015

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

40 Un dé et une pièce

Calculer, modéliser, représenter

On lance un dé équilibré à quatre faces puis une pièce de monnaie équilibrée.

1. Représenter cette situation par un arbre.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 au dé ?

4. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 puis Pile ?

41 Spécialité

Calculer

Dans un lycée, en début de Seconde, on procède à un sondage concernant les spécialités envisagées en classe de Première. On obtient les résultats suivants, concernant le premier vœu des élèves. Le lycée propose 8 spécialités.

Compléter le tableau suivant par des pourcentages. Arrondir à 0,1 % près au besoin.

	Effectif	Estimation de la proportion
Mathématiques	125	
HGGSP	58	
SVT	78	
NSI	12	
HLP	34	
Physique-Chimie	61	
SES	47	
LLCE Anglais	52	

42 Jeu de cartes

Calculer, communiquer

Un jeu de 32 cartes est composé de huit cartes : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8 et 7, de quatre couleurs : cœur, carreau (cartes rouges) trèfle et pique (cartes noires). On prélève une carte au hasard dans un tel jeu. Donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un trèfle ?

3. On note D l'évènement « Obtenir une dame », P l'évènement « Obtenir un pique » et R l'évènement « Obtenir une carte rouge ». Décrire les évènements suivants et déterminer leur probabilité.

a. $D \cap P$:

b. $D \cup R$:

c. $P \cap R$:

d. $\overline{P} \cap D$:

43 Activités extra-scolaires

Calculer, communiquer

Dans un collège, on souhaite estimer la proportion d'élèves qui pratiquent une activité extra-scolaire. On sonde 84 élèves et on constate que 52 élèves en pratiquent au moins une.

1. Donner, en pourcentage, une estimation de la proportion d'élèves pratiquant au moins une activité extra-scolaire.

2. Ce collège accueille 857 élèves. En déduire une estimation du nombre d'élèves qui pratiquent au moins une activité extra-scolaire dans ce collège.

44 Avec ou sans défaut
Calculer, communiquer

Une entreprise fabrique en grande série des pièces pour imprimantes. 95 % de ces pièces ne présentent pas de défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces produites. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défaut mais ne rejette que 80 % des pièces qui ont un défaut.

On considère un lot de 10 000 pièces respectant ces pourcentages.

1. Compléter le tableau suivant.

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	Total
Nombre de pièces acceptées après contrôle	....	....	....
Nombre de pièces rejetées après contrôle	....	....	....
Total	....	....	....

2. On prélève une pièce au hasard parmi les 10 000 du lot précédent. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. On considère les évènements A : « La pièce prélevée a un défaut » et B : « La pièce est acceptée après le contrôle »

Définir par une phrase en français les évènements suivants et déterminer leur probabilité.

a. $\overline{A}$: ....

b. $A \cap B$: ....

c. $A \cap \overline{B}$: ....

d. $A \cup B$: ....

45 Promotions
Calculer, raisonner, communiquer

Un magasin propose deux fruits en promotion : des ananas et des bananes.

Parmi les 400 clients venus ce jour-là :
- 184 ont acheté des ananas en promotion ;
- 226 ont acheté des bananes en promotion ;
- 122 ont profité des 2 promotions.

1. On note A l'évènement « Le client a profité des ananas en promotion » et B « Le client a profité des bananes en promotion ». Présenter cette situation sous forme d'un tableau à double entrée.

2. On interroge un client au hasard. Calculer, en pourcentage, la probabilité des évènements suivants.

a. « Le client interrogé a acheté des bananes en promotion »

b. « Le client interrogé n'a acheté que des bananes en promotion ».

c. « Le client interrogé n'a pas acheté d'ananas en promotion ».

d. « Le client interrogé a profité des deux promotions ».

e. « Le client interrogé a profité d'au moins une des deux promotions ».

46 Fluctuation
Calculer

On a simulé dans un tableur 10 000 lancers d'un dé équilibré à six faces.

	A	B	C
1	tirage n°	tirage dé	Fréquence de 6
2	1	5	0,1692
3	2	3	
4	3	6	
5	4	2	

1. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule :

a. B2 ? ....

b. C2 ? ....

2. Quelle est la différence entre la fréquence observée dans cet échantillon et la probabilité théorique d'obtenir le 6 ?

....

47 Matériel informatique
Modéliser, calculer, communiquer

Dans un magasin d'informatique, on a observé que :

- lorsqu'un client rentre dans le magasin, il achète un ordinateur dans 70 % des cas ;
- lorsqu'un client achète un ordinateur, il achète une imprimante dans 40 % des cas ;
- 10 % des clients rentrant dans le magasin n'achètent ni ordinateur ni imprimante.

On choisit un client au hasard dans le magasin.

On note O l'évènement « Le client achète un ordinateur » et I « Le client achète une imprimante ».

1. Représenter ces résultats dans un tableau.

2. Décrire par une phrase et calculer la probabilité des évènements suivants. Donner les résultats en écriture décimale.

a. $\overline{O} \cap \overline{I}$: ....

b. $\overline{O \cap I}$: ....

c. $O \cup I$: ....

48 Algo et Python

Le « bandit manchot » est un jeu de machine à sous. Lorsqu'on tire le levier, trois rouleaux tournent et s'arrêtent sur un chiffre compris entre 1 et 9 pour le rouleau le plus à gauche, entre 0 et 9 pour les deux rouleaux suivants. Lorsque le joueur obtient trois fois le même chiffre, il gagne le jackpot.

On souhaite créer un programme en Python pour simuler un grand nombre de parties de ce jeu et ainsi estimer la probabilité de gagner le jackpot.

1. En Python, l'instruction `randint(m,n)` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre entier aléatoire entre m et n (inclus). Écrire une fonction `simul` qui simule une partie de ce jeu et renvoyant 1 si on a gagné et 0 sinon.

....

2. On a créé une fonction permettant, en utilisant la fonction précédente, de simuler n parties de ce jeu et de renvoyer la fréquence de parties gagnantes.

a. Compléter cette fonction.

```
def simul_n_fois(n):
    gagne=......
    for k in range(...):
        gagne=............
    return(............)
```

b. Utiliser cette fonction pour obtenir une estimation de la probabilité de gagner.

....

49 Simulation
Modéliser, calculer, raisonner

On a simulé sur Python un échantillon de lancers d'un dé équilibré. La fonction `randint(m,n)` renvoie un nombre entier aléatoire entre `m` et `n` (inclus).

```python
import random as rd
def echantillon():
    compteur=0
    for k in range(50):
        tirage=rd.randint(1,4)
        if tirage<=3:
            compteur=compteur+1
    frequence=compteur/50
    return(frequence)
```

1. Combien de faces ce dé a-t-il ? ....

2. Quelle est la taille de l'échantillon simulé ? ....

3. Quelle est l'évènement dont on calcule la fréquence d'apparition ?

....

....

4. En exécutant cette fonction, on obtient :

```
>>> echantillon()
0.72
```

Quelle est la différence entre la probabilité théorique de l'évènement du 3 et la fréquence obtenue ?

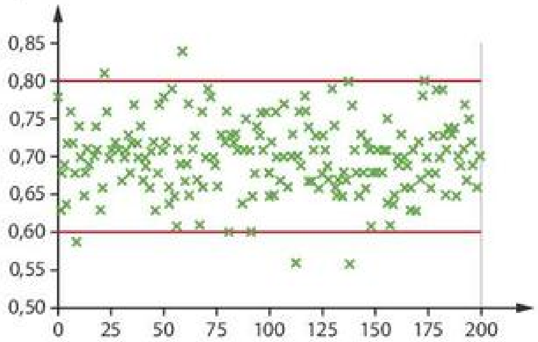
....

....

....

50 Estimation
Représenter

On place dans une urne des boules noires et blanches. On a tiré une boule de cette urne, 100 fois, avec remise, noté la fréquence d'apparition d'une boule blanche et renouvelé cette expérience 200 fois. Le graphique ci-dessous représente les fréquences obtenues au cours des 200 répétitions de l'expérience.



1. a. Quelle est la taille des échantillons ?

....

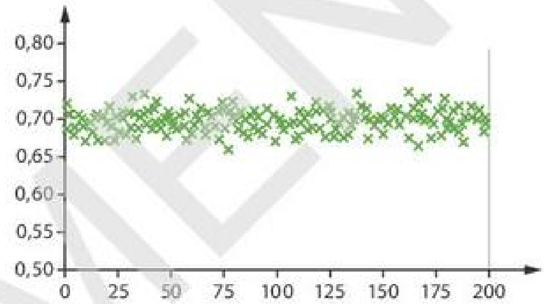
b. Combien de ces fréquences sont en dehors de l'intervalle [0,6 ; 0,8] représenté en rouge sur le graphique ?

....

c. En déduire le pourcentage de fréquences appartenant à l'intervalle [0,6 ; 0,8].

....

2. On a renouvelé l'expérience avec 200 échantillons de taille 1 000. On obtient le graphique suivant.



Donner une estimation de la proportion de boules blanches dans l'urne.

....

....

51 Des langues vivantes et du sport
Chercher, représenter, communiquer, raisonner

Un lycée accueille 336 élèves en Seconde. Parmi eux, 294 pratiquent l'anglais, 169 l'allemand et 237 l'espagnol. Ce sont les trois seules langues vivantes proposées par ce lycée. 29 participent à l'UNSS (union nationale du sport scolaire) parmi ceux qui pratiquent l'anglais, 37 parmi ceux qui pratiquent l'allemand et 18 parmi ceux qui pratiquent l'espagnol.

1. Compléter le tableau suivant.

	Anglais	Espagnol	Allemand
UNSS			
Pas UNSS			
Total			

2. Tous les élèves pratiquent deux langues vivantes et éventuellement une troisième. On choisit au hasard le dossier scolaire d'un lycéen de 2de de ce lycée. Quelle est la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un élève pratiquant trois langues vivantes ?

....

....

52 Des urnes

Raisonner, calculer, modéliser

On dispose de deux urnes : dans la première, il y a deux boules noires numérotées 1 et 2 et une boule blanche numérotée 1 ; dans la seconde, il y a une boule blanche numérotée 2 et une boule noire numérotée 3.

On tire une boule dans la première urne et on la place dans la seconde. On y tire alors une boule.

1. Construire un arbre représentant cette situation.
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule blanche ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur ?

53 Simulation

Raisonner, modéliser

On considère l'expérience suivante : on choisit au hasard deux nombres réels compris entre 0 et 1. Écrire une fonction en Python permettant d'estimer la probabilité que le produit des deux nombres obtenus soit inférieur à 0,5.

54 Une fonction Python

Raisonner, calculer, représenter

En Python, l'instruction `randint(m,n)` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre entier aléatoire entre `m` et `n` inclus. Voici une fonction Python.

```python
from random import *
def simulation():
    a=randint(1,6)
    b=randint(1,2)
    if b==1:
        c="Pile"
    else:
        c="Face"
    return(a,c)
```

1. Décrire une expérience aléatoire qui peut être simulée par cette fonction.
2. Construire un arbre représentant cette expérience aléatoire.
3. Calculer la probabilité que la fonction `simulation()` :
   a. renvoie Face ;
   b. renvoie un nombre pair ;
   c. renvoie un nombre impair et Pile ;
   d. renvoie le nombre 2 ou Face ;
   e. ne renvoie ni un nombre premier, ni Pile.

Démonstration

Démo de cours

- Si une expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'elles est égale à $\frac{1}{n}$.
- Dans une situation d'équiprobabilité d'univers Ω, la probabilité d'un évènement A est égale à :

$$P(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre d'issues dans }\Omega}.$$

On considère une expérience aléatoire comportant n issues équiprobables.

1. On considère une issue quelconque parmi les n issues et on note p sa probabilité.
   a. Quelle est la probabilité de chacune des autres issues ? Pourquoi ?
   b. Pourquoi peut-on dire que $n \times p = 1$?
   c. Conclure.
2. On considère un évènement A contenant m issues. Exprimer $P(\text{A})$ en fonction de m et de n.

Nous tenons à remercier les nombreux enseignants qui, par leurs avis exprimés lors d'entretiens, nous ont aidés à élaborer cet ouvrage.

Mise en pages et schémas : **Soft Office**
Maquette intérieure : **ADN**
Couverture : **Loan Nguyen Thanh Lan**
Édition : **Alexandre Bertin**

hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-786632-9
(ISBN à utiliser pour toute commande de l'ouvrage)

Les indispensables du calcul

Calcul numérique

Addition des fractions

- $\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{cb}{b}=\frac{a+cb}{b}$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Exemples

- $\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{5}{2}$
- $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$

Opposé d'une fraction

- $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$
- $-\frac{a+b}{c}=\frac{-a-b}{c}$

Exemples

- $-\frac{3}{7}=\frac{-3}{7}=\frac{3}{-7}$
- $-\frac{x+2}{4}=\frac{-x-2}{4}$

Multiplication des fractions

- $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$
- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Exemples

- $\frac{2}{5}\times 3=\frac{6}{5}$
- $\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{21}{20}$

Division des fractions

- $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Exemples

- $\frac{3}{\frac{2}{7}}=3\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$
- $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{10}$

Calcul littéral

Développer

- $x(a+b)=ax+bx$
- $x(a-b)=ax-bx$
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
- $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

Exemples

- $2(x+3)=2x+6$
- $5(2-y)=10-5y$
- $(x+2)(3+x)=3x+x^2+6+2x=x^2+5x+6$
- $(4+x)(x-3)=4x-12+x^2-3x=x^2+x-12$

Factoriser

- $ab+ac=a(b+c)$
- $ab-ac=a(b-c)$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Exemples

- $7x+7(x+1)=7(x+x+1)=7(2x+1)$
- $x(x-2)-x(2x+3)=x(x-2-2x-3)=x(-x-5)$
- $x^2-49=(x+7)(x-7)$

cahier de MATHS 2de

Des savoir-faire aux problèmes **COLLECTION MATHIZY** Tout le programme en un cahier

EXISTE EN VERSION PAPIER OU NUMÉRIQUE

Avec de nombreuses ressources supplémentaires :

- 100 exercices interactifs pour **réviser ses acquis sur les points-clés du Collège**
- 350 exercices interactifs pour **s'entraîner sur tous les savoir-faire de Seconde**
- les corrigés des exercices Automatismes et calcul mental

VERSION PAPIER

Les ressources numériques du cahier en accès direct

- **Avec les mini-liens hachette-clic ou les QR-codes** dans le cahier

- **Sur le site collection** lycee.hachette-education.com/mathizy/2de

VERSION NUMÉRIQUE

Le cahier numérique interactif avec les ressources numériques intégrées

Avec toutes les fonctionnalités d'Educadhoc :
- accès aux exercices interactifs en 1 clic
- zones de saisie des réponses

En vente sur https://kiosque-edu.com/familles

88 4763 6
ISBN 978-2-01-786632-9
9 782017 866329

PAPIER À BASE DE FIBRES CERTIFIÉES

IMPRIMÉ ET RELIÉ EN FRANCE

hachette ÉDUCATION
hachette-education.com