

ANNEE SCOLAIRE :.....

ETABLISSEMENT :.....

CLASSE :.....

NOM DU PROFESSEUR :.....

NOM DE L'ELEVE :.....

PRENOMS DE L'ELEVE :.....

N° MATRICULE :.....

GROUPE SANGUIN :.....

NUMERO DE TELEPHONE :.....

PERSONNE A CONTACTER EN CAS D'URGENCE

:.....

NUMERO DE TELEPHONE DE CETTE PERSONNE :.....

AVANT-PROPOS

Dans un monde plongé dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés, la maîtrise et l'approfondissement des outils mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement de nos nations.

Voilà pourquoi, dans le souci de booster le rendement des apprenants tout en leur permettant d'aborder les mathématiques avec beaucoup plus d'aisance, les conseils d'enseignement de Mathématiques (C.E) des lycées modernes 1 et 2 d'Abobo ont décidé dès l' rentrée scolaire 2008-2009, d'élaborer ce document intitulé "**AU TOP EN MATHS**" et qui comporte deux parties : la première est réservée aux activités numériques et la seconde aux activités géométriques.

Ce document pédagogique que nous vous proposons obéit à deux objectifs majeurs :

- ✓ La mise à la disposition des apprenants, des notions de base d'une formation mathématique solide en tenant compte de leur environnement socioculturel,
- ✓ Le suivi progressif des apprenants par les professeurs.

Nous exprimons notre gratitude aux administrations des Lycées modernes 1 et 2 d'Abobo qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien moral, nous ont permis de réaliser ce document dans les meilleures conditions possibles.

Les conseils d'enseignement 1 et 2 d'Abobo,
L'A PRO MA CI (Association des Professeurs de Mathématiques de
Côte d'Ivoire) des Lycées Modernes 1 et 2 d'Abobo.

SOMMAIRE

Activités numériques

	Pages
1- Ensemble des nombres réels.....	4 à 16
2- Fonctions polynômes et fractions rationnelles.....	17 à 27
3- Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$	28 à 31
4- Equations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	32 à 37
5- Fonctions.....	38 à 48
6- Etude de fonctions	49 à 54
7- Statistiques	55 à 65

Activités géométriques

8- Vecteurs et points du plan..	66 à 80
9- Angles inscrits	81 à 87
10- Angles orientés et trigonométrie.....	88 à 99
11- Produit scalaire.....	100 à 107
12- Droites et cercles dans le plan	108 à 113
13- Homothétie et rotation	114 à 123

CHAPITRE I : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

I- NOMBRES RATIONNELS ET NOMBRES IRRATIONNELS

RAPPELS : les ensembles des nombres

• $\mathbb{N}$ ID.....

Exemples : Exemples :

• $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

Exemples : Exemples :

• $\mathbb{R}$

Exemples :

• $\mathbb{N}$

Exercice : calcule

$$A = -0,3 + 10 - 13,7 \quad B = 2 \times (-4) \times (-3) \times (2,5) \times (-0,5) \quad C = x - (y+x) + 3(x-3y)$$

.....

Un nombre est dit rationnel :

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non-nuls

1- JE JUSTIFIE QUE $\sqrt{2}$ N'EST PAS UN NOMBRE RATIONNEL

Activité

Je justifie que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel $\Leftrightarrow$ on peut trouver une fraction **irréductible** $\frac{a}{b}$

($a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$) telle que : Alors $a^2 = \dots\dots$

a^2 est pair donc a est.....

On obtient alors $\frac{a}{b} = \frac{2p}{2q}$

Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 2p$

$\frac{a}{b}$ n'est donc pas irréductible

$$a^2 = \dots\dots\dots = 2b^2$$

Ce qui contredit le fait que

$$b^2 = \dots\dots\dots$$

$\frac{a}{b}$ est irréductible.

b^2 est pair ; aussi b est pair. Et donc on peut écrire b sous la forme $b = \dots\dots q$ où $q \in \mathbb{N}^*$

Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre **irrationnel**.

Ce type de raisonnement est appelé :

Exemples de nombres rationnels et irrationnels

.....

.....

2- PROPRIETES DE CALCUL DANS IR

Propriété 1

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que b et d ne soient pas nuls, on a :

$$(1) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}; \quad (2) \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}; \quad (3) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$(4) \frac{1}{\frac{c}{d}} = \dots\dots\dots; \quad (5) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Propriété 2

Pour tous nombres entiers relatifs m, n et pour tous nombres réels non-nuls a et b , on a :

$$(1) a^m a^n = \dots\dots\dots, \quad (2) \frac{a^m}{a^n} = \dots\dots\dots; \quad (3) (a^m)^n = \dots\dots\dots$$

(4) $\frac{a^n}{b} = \dots\dots\dots$; (5) $(ab)^n \dots\dots\dots$; (6) $(-a)^n = \dots\dots\dots$

€

√

√

+

⇔

=

(-) —

Propriété 3

Pour tous nombres réels a, b et pour tout nombre entier naturel n, on a :

(1) $a \geq 0, b \geq 0, \sqrt{ab} = \dots\dots\dots$; (2) $a \geq 0, b > 0, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

(3) $a \geq 0, \sqrt[n]{a} = \dots\dots\dots$

Exercice :

Calcule les nombres suivants et donne les résultats sous la forme la plus simple.

$$A = \frac{\frac{1}{2}}{3} : \left(4 - \frac{2}{3}\right)$$

$$B = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$C = \left(\frac{4}{3}\right)^8 \times \left(\frac{3}{8}\right)$$

$$D = \frac{3^4 \times 2^{-3}^3}{9^{-1} \times 2^2^4}$$

$$E = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{10}{3}$$

$$F = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \sqrt{5}}}$$

$$G = \sqrt{20} + 2\sqrt{125} - \sqrt{180}$$

3- Comment démontrer une égalité ?

Exercices :

Utilise la méthode 1) pour démontrer que pour $a > b \geq 0$,

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$$

Utilise la méthode 2) pour démontrer que : $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4}$

II- RELATION D'ORDRE

1- Inégalité dans IR

Propriété

Soient a et b deux nombres réels ;

- a est inférieur ou égal à b équivaut à
- a est supérieur ou égal à b équivaut à

Exercice : x et y sont des nombres réels strictement positifs.

Démontre que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

2.a) Quel est le plus petit élément de E ?.....

On dit queest lede E.

b) Cite quatre (4) nombres plus petits ce nombre obtenu :

.....

On dit que :sont des.....de E.

Définition

Soit A un sous-ensemble non vide.

- Le plus grand élément de A, lorsqu'il existe, est appelé **maximum de A**.
- Un nombre réel **M** est un **majorant** de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit
- Le plus élément de A, lorsqu'il existe, est appelé **minimum de A**.
- Un nombre réel **m** est un **minorant** de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit

Exercice :

On donne l'ensemble $A = \left\{ \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1.a) Montre que 2 est un majorant de A

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1 \\ \frac{1}{n} \leq \dots\dots$$

.....

2 est.....que tous
les éléments de A.

Donc

b) Dédus-en que 2 est le maximum de A.

D'après la 1-a) on a : $2 = \frac{2}{\dots\dots}$

2-a) Montre que 0 est un minorant de A.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 0, \frac{1}{n} \dots\dots\dots 0$$

b) Montre que A n'admet pas de minimum (raisonnement par l'absurde)

supposons que A admette un minimum $\frac{2}{n_1}$. $\frac{2}{n_1}$ est le plusélément de A

$$\frac{2}{n_1+1} \in A \text{ or } \frac{2}{n_1+1} < \frac{2}{n_1} \text{ car } n_1+1 > n_1$$

NB. : on ne pourra jamais trouver un plus petit élément de A. Puisque lorsque prend un nombre, on peut trouver un autre nombre plus petit que celui-ci.

IV – VALEUR ABSOLUE

Activité 1

1- Quelle est la distance à zéro de -4 ?.....

On dit que 4 est lade -4 ; et on note $|-4| = 4$

$$|-4| = 4 \text{ est le plus grand des nombres -4 et 4}$$

2- Quelle est la distance à zéro de 3,5 ?.....

On dit que 3,5 est lade 3,5 ; et on note $|3,5| = 3,5$.

$|3,5|$ est le plus grand des nombres 3,5 et -3,5.

Définition

Soit a un nombre réel. Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est appelé et est noté $|a|$

Exercice : Ecris sans le symbole

$$|-\sqrt{3}| = \dots\dots\dots \quad \left| \sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{3} \right| = \dots\dots\dots$$

$$|-2| = \dots\dots\dots$$

Activité 2

1- Complète le tableau suivant :

a	2	0	$-8,7$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[2]{-1}$
$-a$	-2	0		$-\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[2]{-1}$
a				$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[2]{-1}$
$-a$					

Que constates-tu ?.....

Réponse : Quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on a $| \dots\dots\dots | = | \dots\dots\dots |$

2- Complète le tableau suivant :

a	b	a	b	ab	$a \times b$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\sqrt{a^2}$
-3	2									
9	-4									
-5,5	-2									
12	12									

Propriétés :

.....

.....

.....

.....

3- compare $|a + b|$ et $|a| + |b|$ en complétant le tableau suivant :

	a	b	a+ b	a	b	a + b	a + b	comparaison
a et b de	3	5						
même	-7	-2						
signe								
a et b de	3	-5						
signe	7	-2						
contraire								

Exercice : justifie que pour tout nombre réel x :

$$|13x + 8| \leq |6x - 7| + |7x + 15|$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

V- EQUATIONS ET INEQUATIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

1- Equations

Propriété 1

Soient a et r deux nombres réels tels que $r \geq 0 : |a| = r \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Exemple : Résous dans $\square : |x - 3| = 7$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

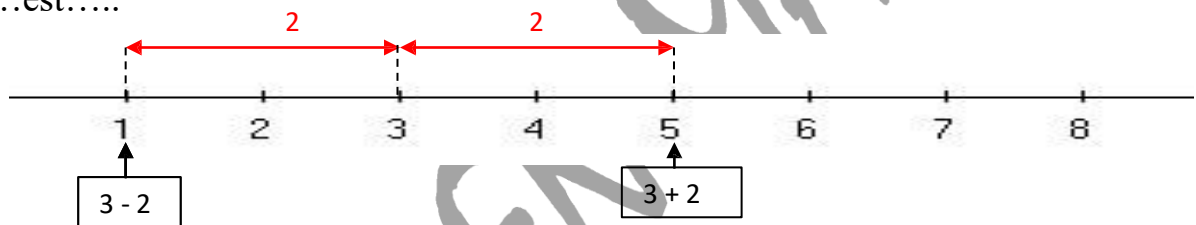
.....

.....

NB : si $r < 0$ alors $S = \emptyset$ (l'ensemble vide)

Résolution graphique : résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|x - 3| = 2$

Résoudre (E) revient donc à déterminer les nombres dont la distance àest.....



Les solutions de l'équation sont :

Propriété 2

Soient a et b deux nombres réels : $|a| = |b| \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Exemple : Résous dans $\mathbb{R}$: $|x - 3| = |2x + 1|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VII- VALEUR APPROCHÉE

Activité

x est un nombre réel tel que $3,48 \leq x \leq 3,52$.

L'amplitude de l'encadrement est

L'incertitude est.....

Le centre de l'intervalle est.....

On dit queest une valeur approchée à x àprès.

Définition :

.....
.....
.....
.....
.....

NB entre deux nombres a et b ($a < b$), il existe toujours un autre nombre réel.

Ce nombre peut-être pris comme valeur approchée d'un nombre compris entre a et b .

Exercice d'application :

1) On donne $0,5 \leq x \leq 0,5$. Donne une valeur approchée de x en précisant l'incertitude.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) On donne : $3,14159 < \pi < 3,14160$. Donne une valeur approchée de π à 10^{-5} près.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

CHAPITRE 2 : FONCTIONS POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I- GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1- Notion de polynômes

Activité :

On considère la fonction numérique P de variable x définie par :

$$P(x) = (3x + 2)(x - 4)^2 + 5 - 2x$$

a) Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x .

$P(x) =$

b) Quel est le terme de degré 2 ?

Quel est le terme constant ?

c) Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?.....

Ainsi chaque terme de $P(x)$ est appelé.....

L'expression littérale qui est la somme de plusieurs monômes est appelée.....

d) Calculons $P(0)$; $P(1)$; $P(-1)$.

$P(0) =$

$P(1) =$

$P(-1) =$

e) Quel est l'ensemble de définition de P ?.....

Définition et propriété

Soit a un nombre réel et n un entier naturel.

- ✓ Toute fonction numérique P de la variable réelle x , définie par $P(x) = ax^n$ est appelée....., de coefficient a et de degré.....
- ✓ On appelletoute somme algébrique de monômes.

Exemple : Donne un polynôme de degré 4.....

2- Egalité de deux polynômes

Propriété :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- ils ont.....
- et.....

Exercice : Soit a , b et c des nombres réels. Détermine a , b et c pour que les polynômes $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ et $Q(x) = ax^2 + (1 - b)x + c$ soient égaux.

.....

.....

.....

.....

.....

3- Zéros (racines) d'un polynôme

Activité :

On donne $Q(x) = x^2 + 2x - 3$. Calcule $Q(1)$; $Q(0)$ et $Q(-3)$.

$Q(1) =$

$Q(0) =$

$Q(-3) =$

Quelles sont les nombres qui annulent Q ?

Ces valeurs sont appelées.....

Définition

On appelle zéro d'un polynôme P tout nombre réel.....

.....

NB :

- ❖ Déterminer les zéros d'un polynôme Q , c'est résoudre l'équation $Q(X) = 0$
- ❖ Un polynôme de degré n admet au plus n zéros.
- ❖ Si a est un zéro de $P(x)$ alors on peut trouver $Q(x)$ tel que :
 $P(x) = (x - a) Q(x)$.

Exemple : On donne le polynôme $P(x) = (2-x)(3x+2)$. Détermine les zéros de P.

.....

Les zéros de P sont :

4- Produit de deux polynômes

Activité : On donne $P(x) = x^2 - 2$ et $Q(x) = x^3 - x + 5$

$P(x) Q(x) =$

.....

$d^{\circ}P =$ $d^{\circ}Q =$ et $d^{\circ}(PQ) =$

donc $d^{\circ}(PQ) =$ +

Propriété :

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté PQ. On a :

$d^{\circ}(PQ) = d^{\circ}P + d^{\circ}Q$.

5- Factorisations

Définition :

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Exemple : factorise $P(x) = x(2-x) + 4 - 2x$ et $Q(x) = 4x^2 - 81$

$P(x) =$

.....

$Q(x) =$

.....

Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :



Exercice :

Factorise les polynômes suivants :

$$R(x) = x^3 - 27$$

$$S(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II- POLYNÔME DU SECOND DEGRE

1- Définition

Un polynôme du second degré a pour forme générale :

$$P(x) = \dots \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \text{ et } x \text{ éléments de } \mathbb{R}$$

Exemple :

2- Forme canonique :

$$\text{Exemples : } P(x) = x^2 + 6x + 1$$

$$Q(x) = 2x^2 + x - 6$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3- Utilisation de la forme canonique pour factoriser

Exemple : Factorise en utilisant la forme canonique si cela est possible.

$$P(x) = x^2 + 4x + 2$$

$$Q(x) = 2x^2 - 4x + 8$$

$$R(x) = x^2 - 2x + 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On retient que :

Soit $P(x) = a[(x + \alpha)^2 + \beta]$ l'écriture de $P(x)$ sous la forme canonique

- ❖ Si $\beta > 0$ alors $P(x)$ n'est pas factorisable et donc n'admet pas de racines
- ❖ Si $\beta < 0$ alors $P(x)$ est.....
- ❖ Si $\beta = 0$ alors $P(x)$ admet une seule racine (racine double).

4- Etude du signe d'un polynôme

Polynôme de degré 1 :

Soit $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut d'abord chercher sa racine C , puis utiliser le tableau suivant :

x	$-\infty$	c	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$		signe de a

Exercice : Etude le signe des polynômes suivants :

$$A(x) = 5x - 2$$

$$B(x) = -4x + 3$$

$$C(x) = (x - 3)(4x + 2)$$

$$D(x) = 2x(3 - 5x)$$

Polynôme de degré 2

Méthode : Soit $A(x) = ax^2 + b$ ($a \neq 0$). Pour étudier le signe de $A(x)$, on peut d'abord chercher sa forme canonique et ses racines éventuelles.

Exercice : Etude le signe des polynômes suivants :

$$E(x) = x^2 + x - 2 \quad ; \quad F(x) = -3x^2 - 3x + 18 \quad ; \quad G(x) = x^2 - 2x + 5$$

AUTOPEN MATHS

III- FACTORISER PAR $x - a$

1- Déterminons le quotient de $P(x)$ par $x - a$

Activité : soit $P(x) = 3x^2 - x - 2$

- Vérifie que 1 est une racine de $P(x)$.
- Trouve $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1) Q(x)$

✓ **Méthode des coefficients indéterminés**

and EN MATHS

✓ Méthode de la division euclidienne

Handwriting practice sheet with a large 'A' and 'H' at the top left, followed by a series of horizontal dotted lines for writing practice.

2- Propriété :

Soit P un polynôme et a un nombre réel.

a est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q(x) tel que :
quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a) Q(x)$.

$Q(x)$ est le quotient de $P(x)$ par $x - a$: $Q(x) = \frac{P(x)}{x-a}$

Exercice 2 : Soit $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

- 1) Calcule $P(-1)$. Que peux-tu conclure ?
- 2) Détermine $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 1) Q(x)$.
- 3) Factorise $Q(x)$ puis $P(x)$.
- 4) Etudie le signe de $P(x)$.

IV – FRACTIONS RATIONNELLES

Définition :

Toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes, est appelée

L'ensemble de définition est $\square$ privé des zéros de Q(x).

Exemples :

$F(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 7}$; $A(x) = \frac{3x^8 - 3x - 1}{x^2 + 2}$; $B(x) = \frac{1}{5 - 4x^3}$ sont des fractions rationnelles.

Exercice 1 : on donne la fraction rationnelle F définie par : $F(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

- 1) Donne l'ensemble de définition de F.
- 2) Simplifie F(x) sur D_F .
- 3) Etudie le signe de F(x).

3- Equations liant deux fractions rationnelles

Méthode :

Pour résoudre une équation ϵ du type $|F(x)| = |G(x)|$, on peut :

- utiliser l'équivalence suivante : $|F(x)| = |G(x)|, \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- résoudre successivement les équations $(E_1) : F(x) = G(x)$
et $(E_2) : F(x) = -G(x)$.

L'ensemble de solutions de ϵ est la réunion des ensembles des solutions de (E_1) et (E_2) .

Exercice : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|-3x+4| = |5+4x|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II- INEQUATIONS

1- Inéquations liant deux polynômes

Exercice : Résous les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$(I) : 5x^2 - 2x + 3 \leq 2x^2 + 6x - 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$: **(I)**: $|2x + 3| \leq |x - 4|$

ALL TOP EN MATHEMATICS

CHAPITRE IV : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

I- SYSTEME D'EQUATION DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1- Activité

MICAN dispose d'une somme de 19 500 F CFA constituée de 240 pièces, les unes de 100 F CFA, les autres de 25 F CFA. Déterminons le nombre de pièces de chaque sorte.

a- Choix des inconnues

.....

.....

.....

b- Mise en équations

.....

.....

.....

.....

.....

On obtient un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

.....

{

.....

2- Le déterminant

Définition

Soit le système (S) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \text{ (E}_1\text{)} \\ a'x + b'y + c' = 0 \text{ (E}_2\text{)} \end{cases}$

On appelle **déterminant** du système (S) le nombre réel: $ab' - a'b$. On le

note : $\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \times$

Remarque :

- $\text{Det}(S) \neq 0$, (S) admet une solution unique
- $\text{Det}(S) = 0$
- (S) admet une infinité de solutions lorsque les deux équations sont équivalentes (on obtient une droite).
- Sinon le système (S) n'admet pas de solution.

Exercice : sans résoudre, dis si chacun des systèmes admet une solution, une infinité de solutions ou aucune solution à partir du déterminant.

$$(S_1) \begin{cases} 2x - 3y - 10 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ -6x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

.....

Propriété :

Un système de deux équations à deux inconnues admet un seul couple de solutions si et seulement si.....

.....

3- Résolution**a- Méthode de substitution**

Exemple : Soit le système (S) défini par :

$$\begin{cases} x + 3y - 15 = 0 \text{ (E}_1\text{)} \\ 2x + y - 10 = 0 \text{ (E}_2\text{)} \end{cases}$$

Calculons le déterminant du système (S).

.....

Donc le système (S) admet.....

L'équation (E₁) permet d'exprimer x en fonction de y. On obtient.....

.....

Puis on substitue à x cette valeur dans l'équation (E₂) :

.....

.....

b- Méthode de combinaison

Principe :

On élimine l'une des inconnues x ou y en combinant les deux équations. Pour cela, on peut :

- Multiplier les deux équations par des nombres réels non nuls de sorte à avoir des coefficients opposés.
- Ajouter ou retrancher membre à membre les deux équations.

Exemple : Soit le système (S) :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \text{ (E}_1\text{)} \\ 5x - 2y - 17 = 0 \text{ (E}_2\text{)} \end{cases}$$

Calculons le déterminant du système (S).

.....

Donc le système

.....

Résolution

.....

II- INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Soit le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \text{ (E}_1\text{)} \\ a'x + b'y + c' = 0 \text{ (E}_2\text{)} \end{cases}$$

On suppose que a et b d'une part, a' et b' d'autre part ne sont pas simultanément nuls.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) ; les équations (E_1) et (E_2) sont les équations cartésiennes de deux droites (D_1) et (D_2) .

Résoudre graphiquement le système (S) revient à étudier la position relative des droites (D_1) et (D_2) .

(D_1) et (D_2) sont parallèles	(D_1) et (D_2) sont confondues	(D_1) et (D_2) sont sécantes
(S) n'admet aucune solution	(S) admet une infinité de solutions	(S) admet une solution unique $A(x_0 : y_0)$.

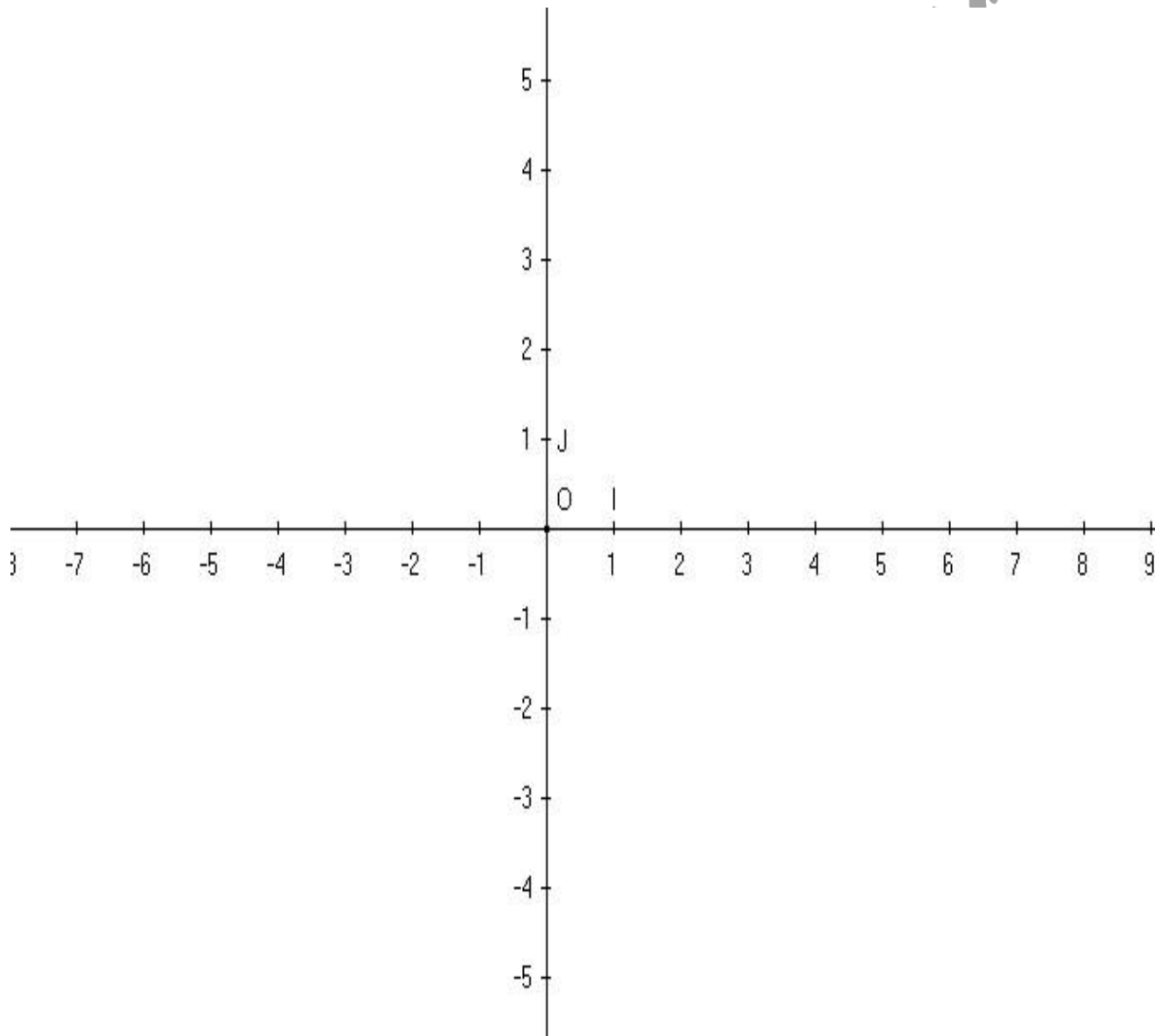
III- SYSTEME D'INEQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1- Résolution graphique d'une inéquation

Exemple :

Résolvons l'inéquation d'inconnues $(x ; y)$: $x + y - 3 < 0$.

Traçons la droite (D) d'équation : $x + y - 3 = 0$ dans le plan muni du repère (O, I, J) .



Cette droite (D) partage le plan en deux demi-plans (P_1) et (P_2) .

Calculons la valeur numérique de $x + y - 3$ avec les coordonnées $(0 ; 0)$ du point O. On obtient..... Or $-3 \leq 0$.

Donc le point O appartient à l'ensemble des points considéré.

Ainsi l'ensemble des solutions est :

.....

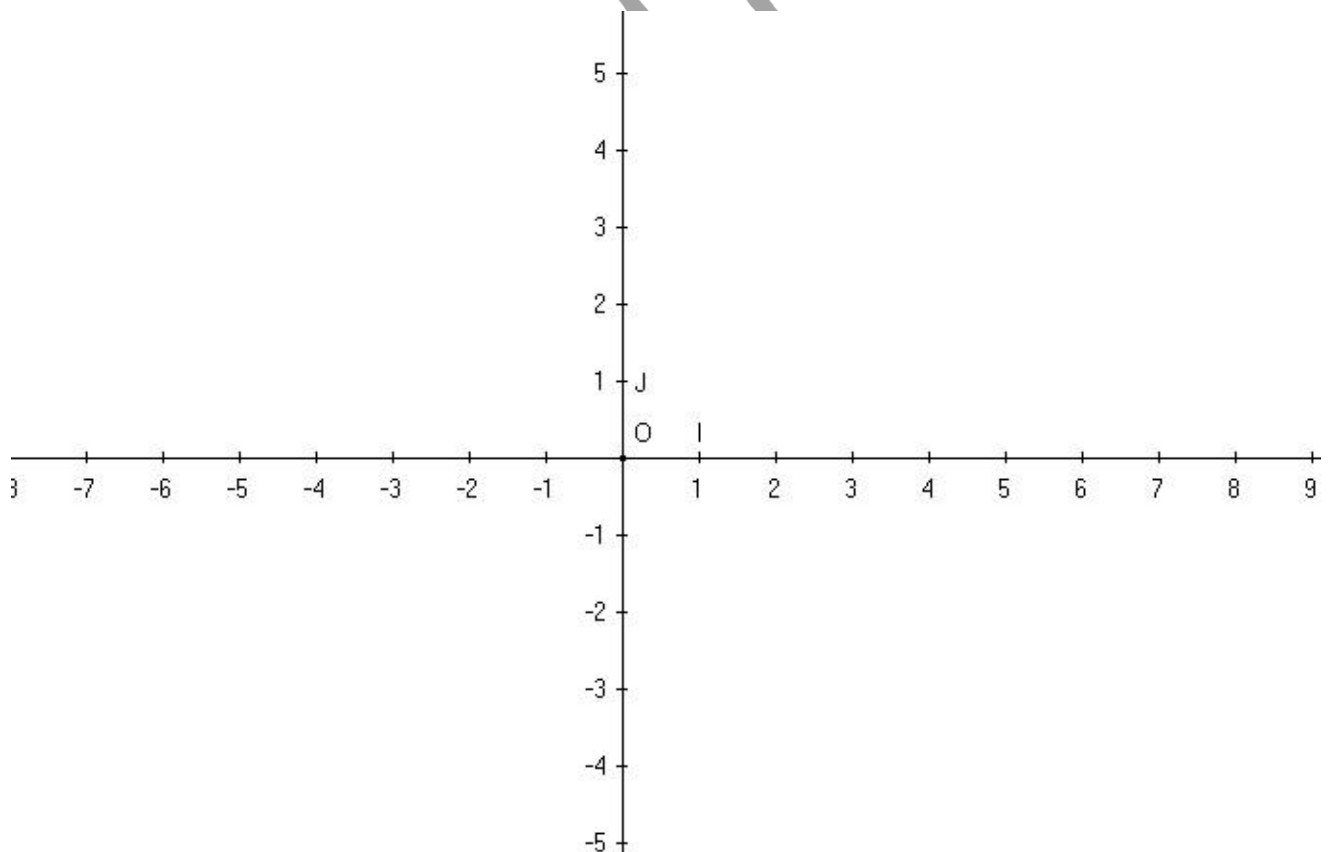
2- Résolution graphique d'un système d'inéquations

Exemple : Résolvons graphiquement le système suivant (S) :
$$\begin{cases} 2x + y - 2 < 0 \\ x - y + 4 < 0 \end{cases}$$

Soient (D_1) (D_2) les droites d'équations respectives : $2x + y - 2 = 0$ et $x - y + 4 = 0$.

- Traçons la droite (D_1) dans le repère, puis hachurons l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $2x + y - 2 < 0$. L'ensemble des coordonnées des points du demi-plan de frontière (D_1) contenant O est.....

- Traçons la droite (D_2) dans le repère ; puis colorions l'ensemble des points $N(x ; y)$ tels que $x - y + 4 < 0$. L'ensemble des coordonnées des points du demi-plan de frontière (D_2) ne contenant pas O.....



L'ensemble des solutions est du système est:.....
.....
.....

CHAPITRE V : FONCTIONS

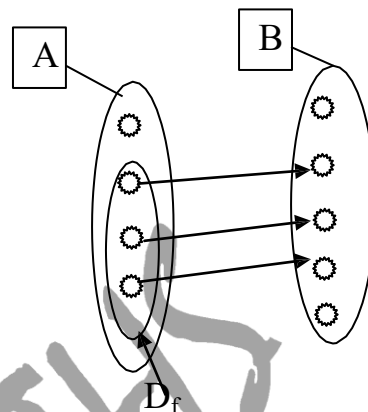
I- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Notion de fonction

a- Définition

A et B sont des ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B, toute correspondance qui,

.....

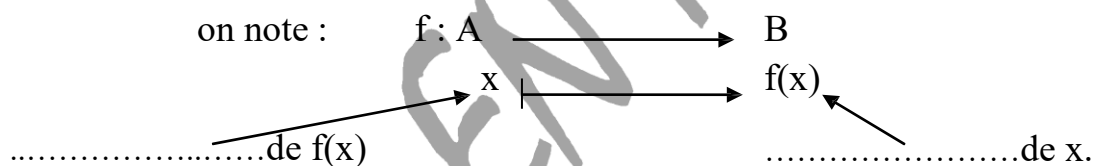


b- Vocabulaire et notations

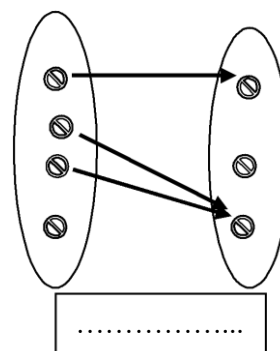
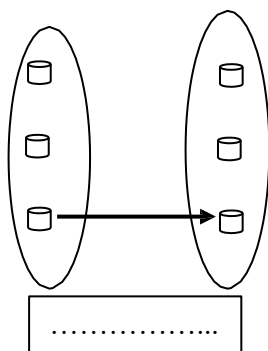
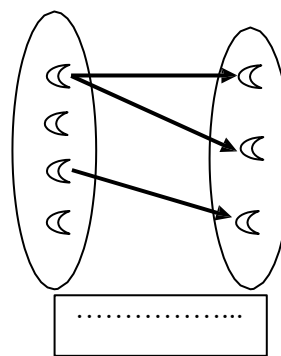
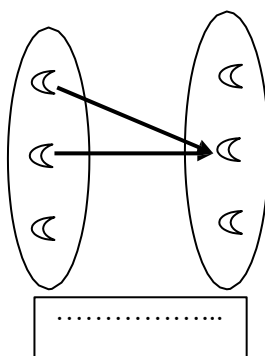
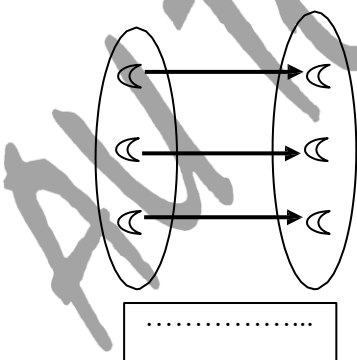
f étant une fonction de A vers B s'il existe le correspondant de x par f se note $f(x)$.

A est l'ensemble de et B l'ensemble de f.

x est la variable choisie dans A. $f(x)$ est l'image de x par f.



Exercice : Dans les cas suivants, dis si la correspondance est une fonction ou non. Complète par vrai ou faux.



2- Fonctions déterminées par une formule explicite

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \square$$

$$x \mapsto \sqrt{5-7x}$$

Ensemble de départ

Ensemble d'arrivée.....

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \dots\dots\dots, f(0) \dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{-4}{7}\right) = \dots\dots\dots$$

$$g: 4; -2; 0; 1; \frac{1}{2} \rightarrow \square$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$$

Ensemble de départ.....

Ensemble d'arrivée.....

$$g(x) \dots\dots\dots$$

$$g(0) = \dots\dots\dots; g(-4) \dots\dots\dots$$

3- Ensemble de définition d'une fonction

Activité :

Soit f une fonction définie par : $f: \left\{ 1; 0; 4,5; 6; \frac{4}{3} \right\} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{13 - 3x}{\sqrt{\quad}}$$

Calcule si possible les images de : $1; 0; \frac{4}{3}; 4,5; 6$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

*Cite les éléments qui admettent une image par f.

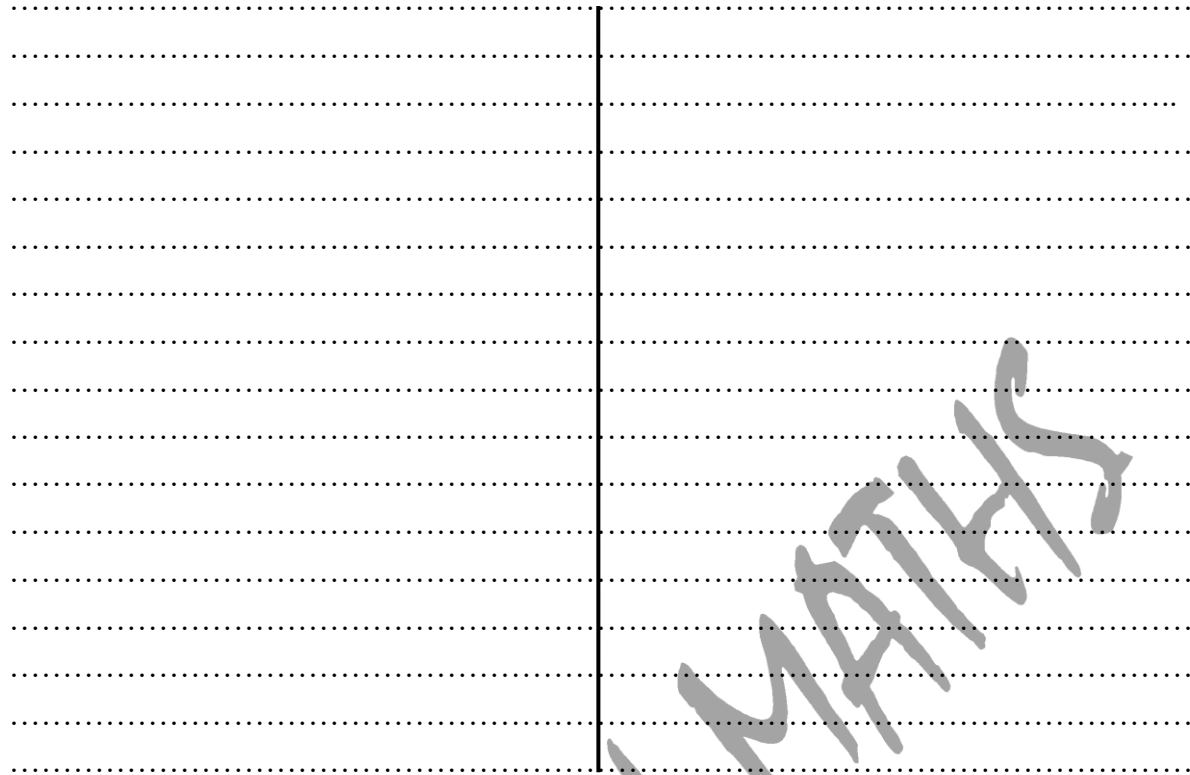
.....

.....

a) Définition :

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.

On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f, on le note D_f .



d- Représentation graphique d'une fonction

Définition

Le plan est muni d'un repère.

f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition D_f .

On appelle représentation graphique de f , ou courbe représentative de f , l'ensemble des point ; $f(x)$ où $x \in D_f$.

Notation et vocabulaire :

On note (C_f) la représentation graphique de f et on a :

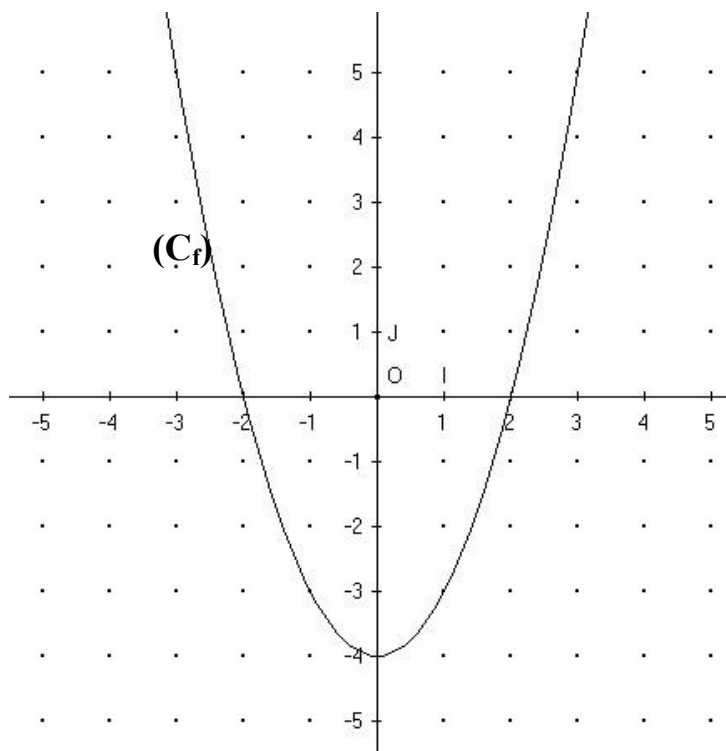
$M(x : y) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D \text{ et } \dots\dots\dots$

NB : $y = f(x)$ est l'équation de la courbe représentant la fonction f .

Exercice :

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction.



- 1) $D_f = \dots\dots\dots$
- 2) Parmi les points A (-3 ; 5), B (0 ; -4) et C (0 ; -3) suivants, lesquels appartiennent-ils à (C_f) ?

.....

.....

.....

.....

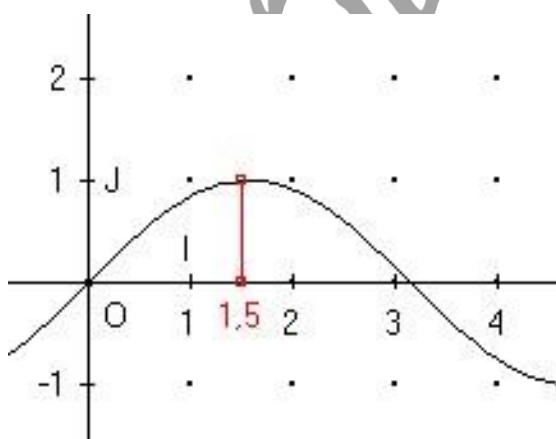
.....

.....

II- ETUDE GRAPHIQUE

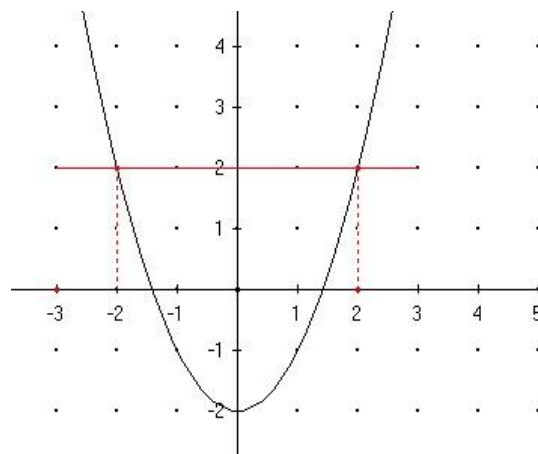
1- Image et antécédents d'un nombre

Lecture d'image

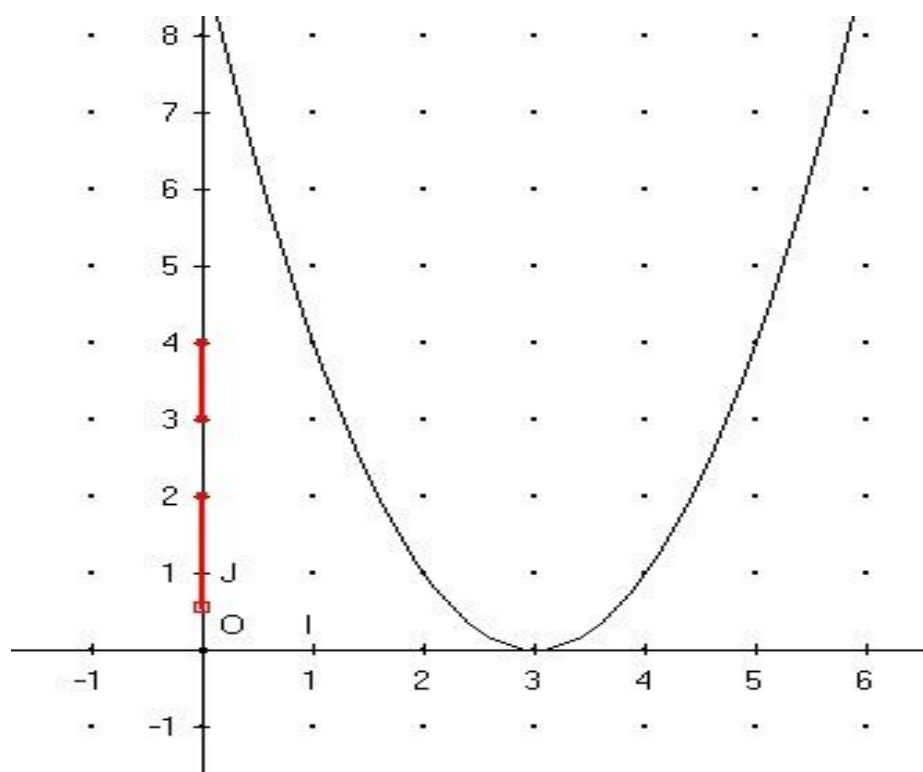


L'image par f de 1,5 est.....
C'est le point d'intersection de la droite d'équation $x = 1,5$ et de (C_f) .

Lecture d'antécédents



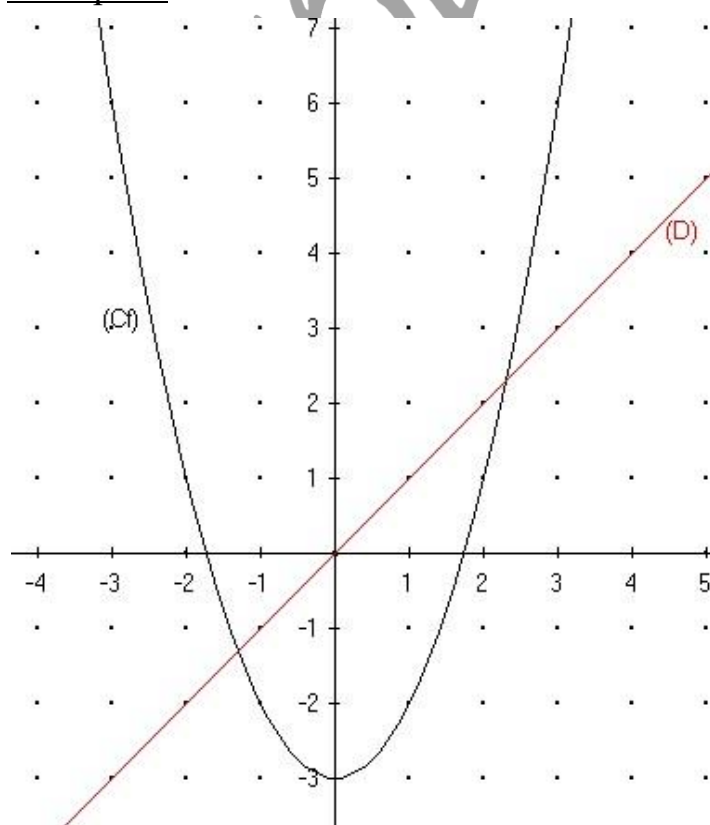
Les antécédents de 2 sont.....
Points d'intersection de la droite (D) $(D) : y = 2$ et de (C_f) .



Détermine graphiquement par f l'image réciproque de chacun des intervalles :
 $[3 ; 4]$ et $[0, 5 ; 2]$.

.....

Exemple 2



(C_f) et (D) sont les représentations graphiques des fonctions f et g .

- Résous graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$

.....

- Résous graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$

.....

III- VARIATIONS D'UNE FONCTION

1- Maximum, minimum d'une fonction

Activité

Le plan est muni du repère $(0, I, J)$. f est la fonction définie sur $[-4 ; 4]$ de représentation graphique (C) ci-dessous.

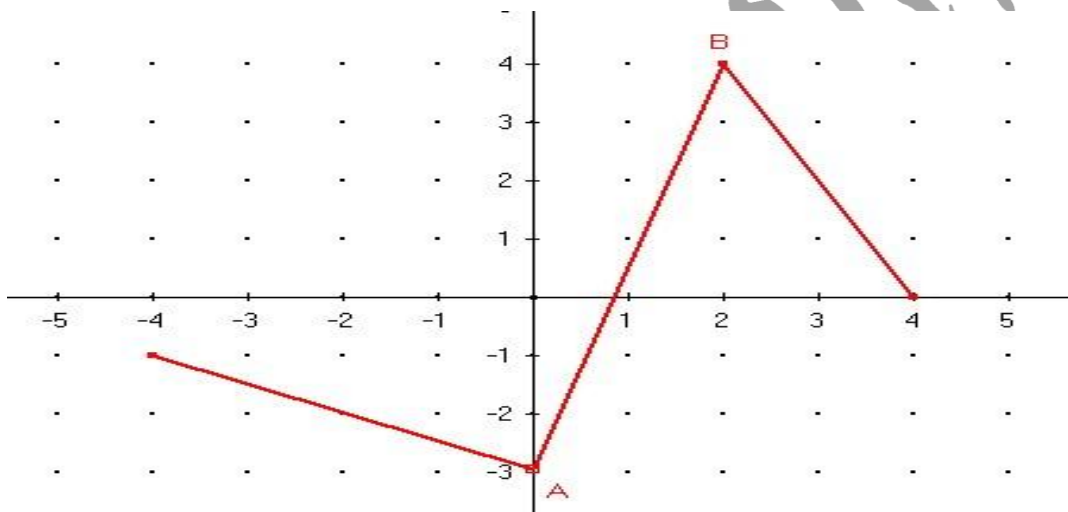
A(..... ;.....) est le point de (C) ayant la plus.....ordonnée.

B(..... ;.....) est le point de (C) ayant la plus.....ordonnée.

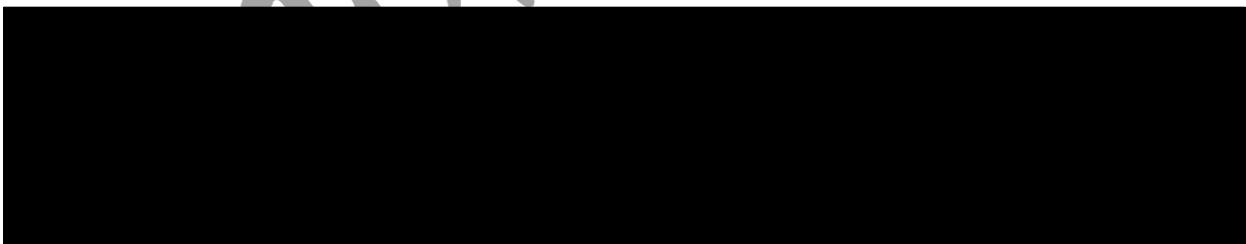
On dit que :

Sur l'intervalle..... f admet en.....**un maximum** égal à.....

Sur l'intervalle..... f admet en.....**un minimum** égal à.....



Définition :



Exercice : On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 + \sqrt{-7+x}$

Démontre que f admet un minimum sur D_f .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2- Sens de variation, tableau de variation

F est une fonction d'une variable réelle sur un intervalle K. On dit que :

- F est une fonction **strictement croissante** sur K lorsque, pour tous éléments u et v de K :
- F est une fonction **strictement décroissante** sur K lorsque, pour tous éléments u et v de K :
- F est une fonction **constante** sur K lorsque, pour tous éléments u et v de K :

Tableau de variation d'une fonction croissante

x	a	b
F(x)		

Tableau de variation d'une fonction décroissante

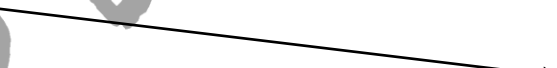
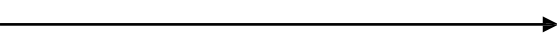
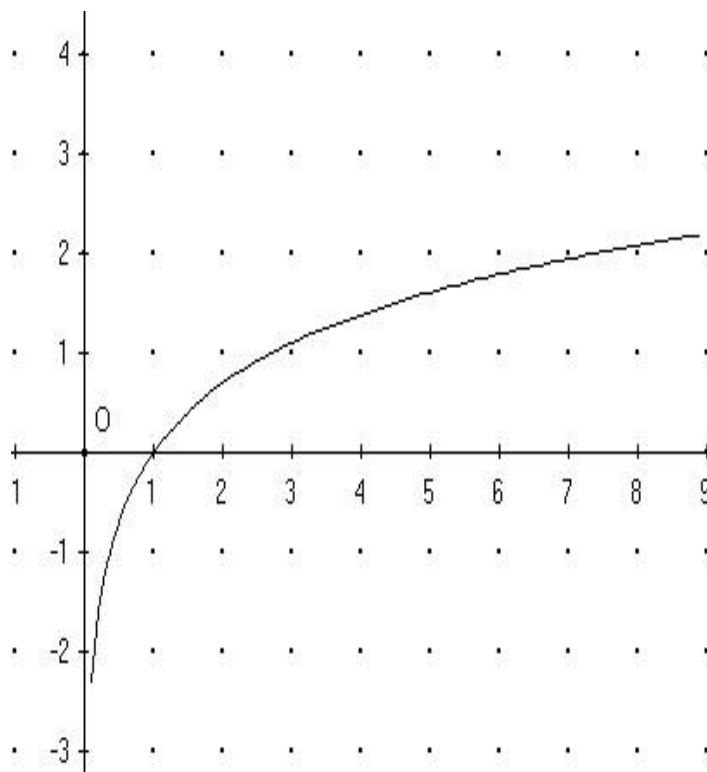
x	a	b
F(x)		

Tableau de variation d'une fonction constante

x	a	b
F(x)		

NB : Une fonction f est dite monotone sur K lorsqu'elle est soitou soit.....sur K.

Exercice 1 : f est une fonction numérique sur $]0 ; +\infty[$



Dresse le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

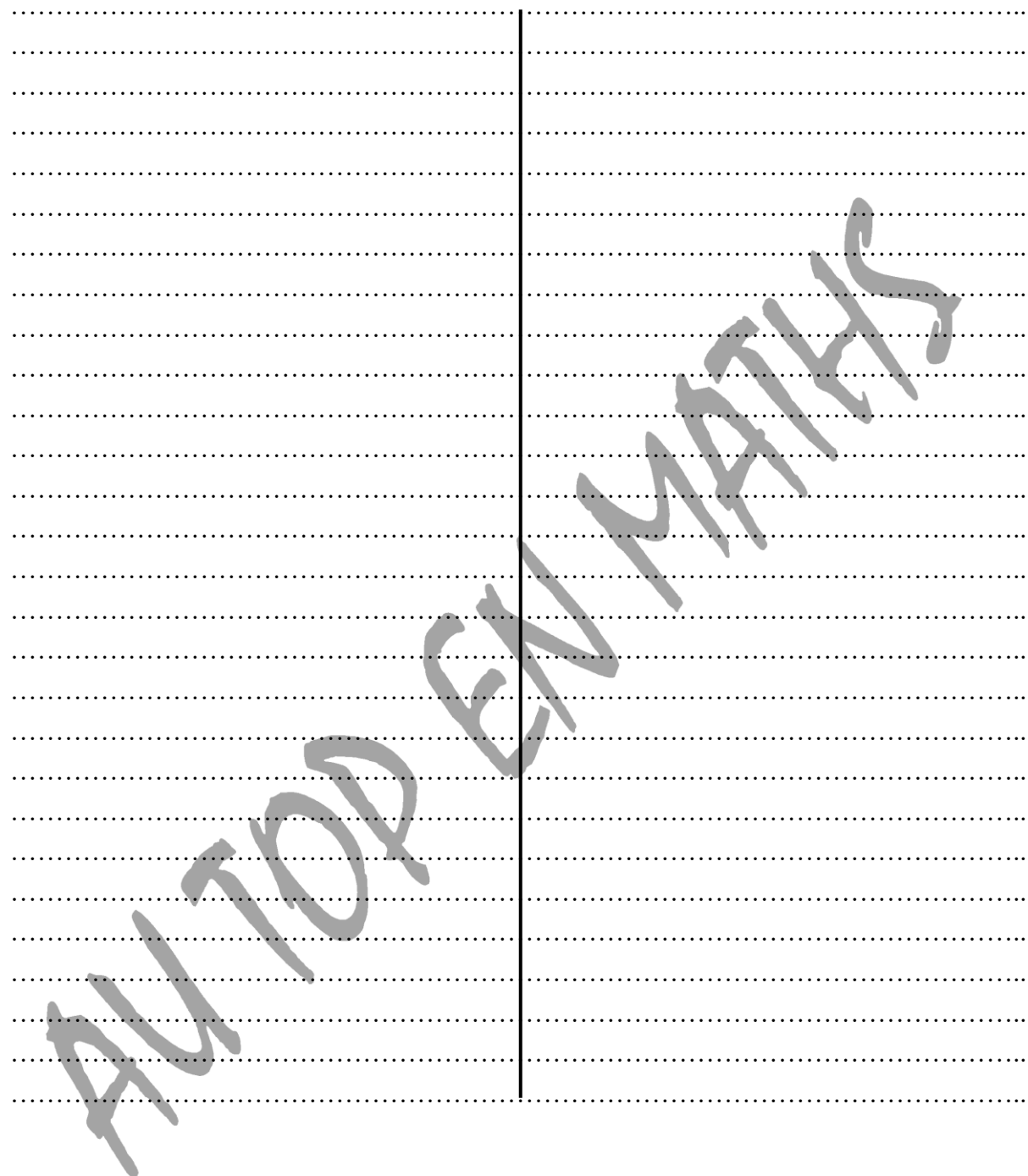
Exercice 2 : f est une fonction définie sur chacun des intervalles I et J .

Détermine le sens de variation de f sur I et J .

1) $f(x) = -3x + 2$, $I =]-\infty ; 0]$ et $J = [0 ; +\infty[$.

2) $f(x) = 2x + 3$ $I =]-\infty ; 0]$ et $J = [0 ; +\infty[$.

3) $f(x) = -x^2 + 4$; $I = [-3; -1]$; $J = [1; 2]$

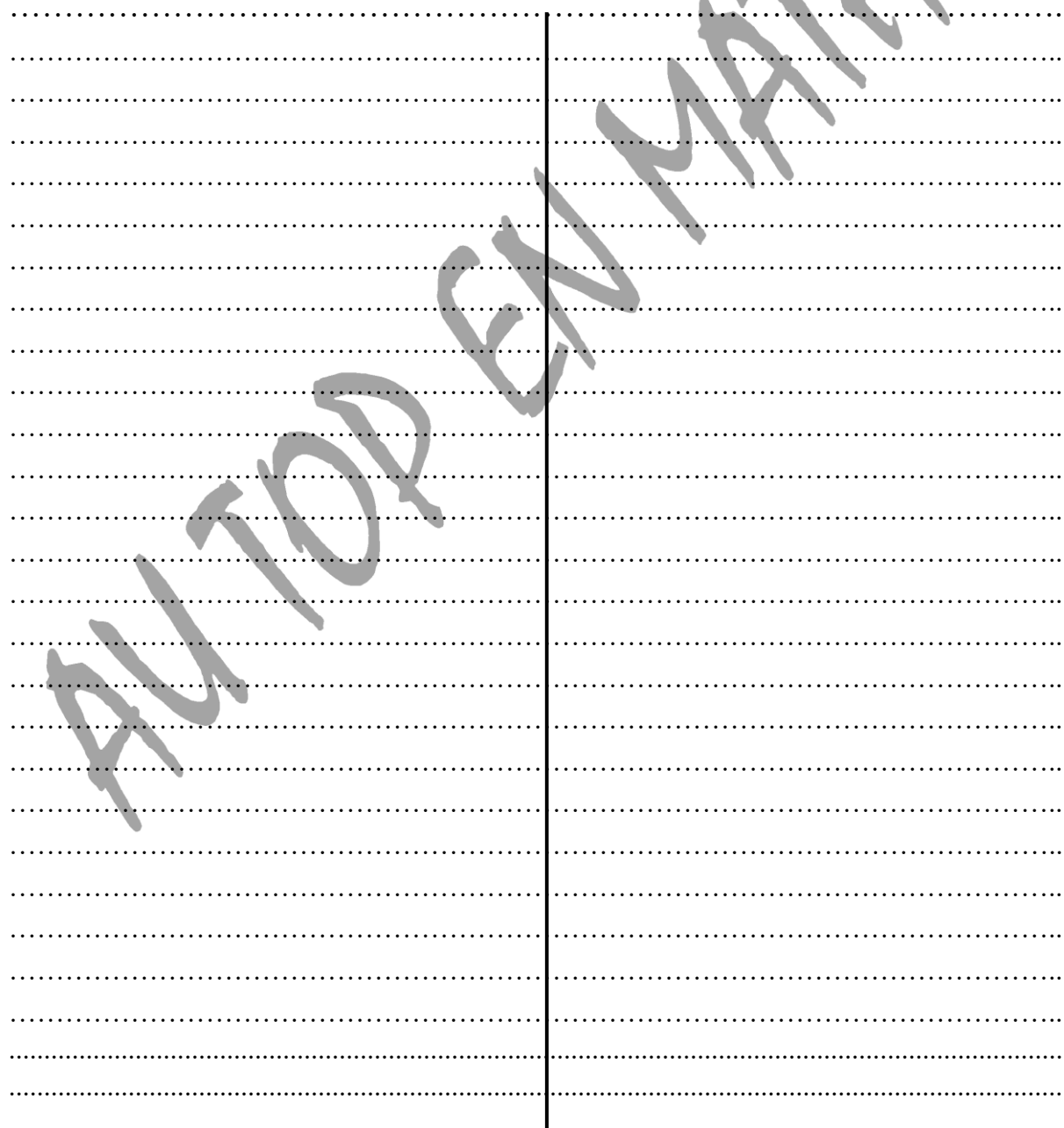


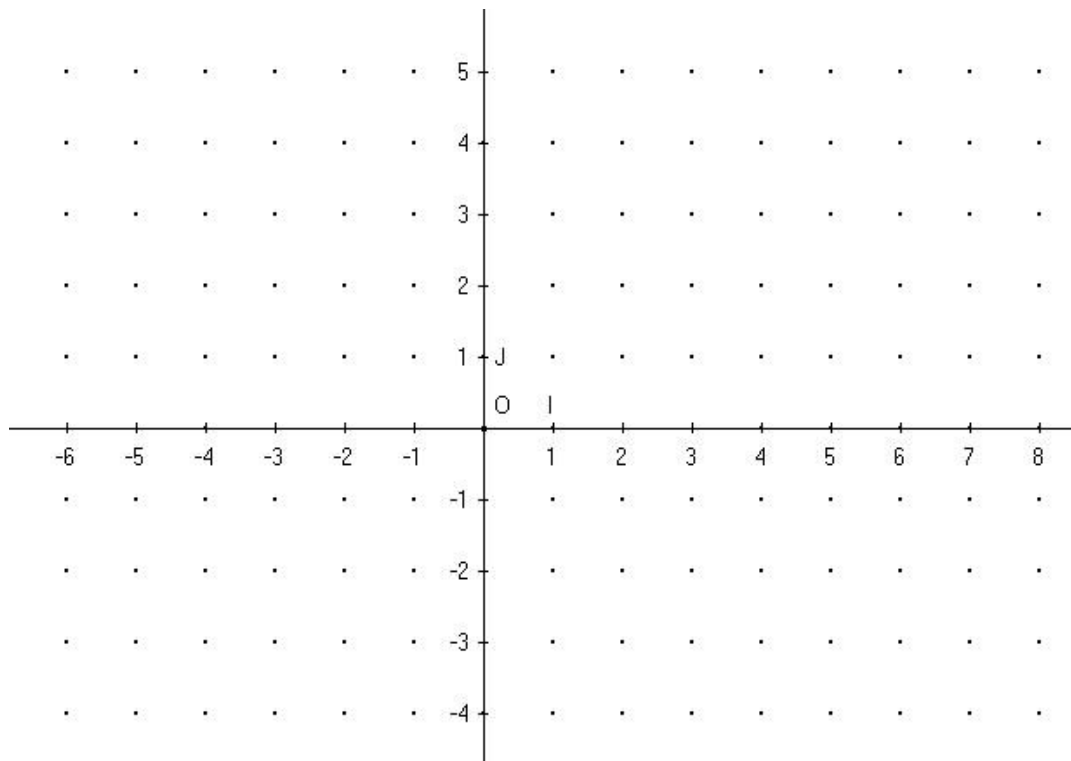
CHAPITRE VI : ETUDE DE FONCTIONS**I – FONCTION AFFINE PAR INTERVALLE****1- Fonctions affines**

Exercice : Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x - 4$

- Détermine l'ensemble de définition de f .
- Détermine le sens de variation de f .
- Dresse le tableau de variations de f .
- Construis la courbe représentative de f .





2- Fonction affine par intervalles

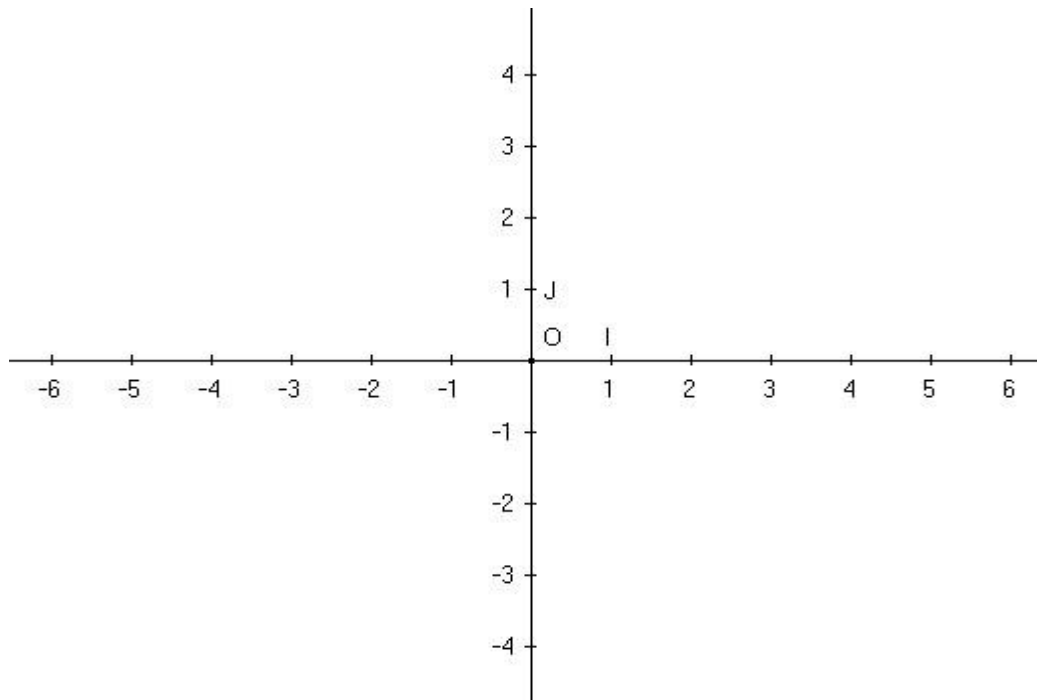
Exercice : Le plan est muni du repère (O, I, J) . On définit la fonction g par :

- $x \in [-3 ; -1[$, $g(x) = 2x + 4$
- $x \in [-1 ; 3[$, $g(x) = 5$
- $x \in]3 ; 5]$, $g(x) = -x + 2$

On dit que g est une

- détermine l'ensemble de définition D_g de la fonction g
- Calcule l'image par g des nombres réels : -3 ; -2 ; -1 ; 2 ; 3 ; 5 .
- Détermine le sens de variation de g .
- Dresse le tableau de variation de g .
- Représente graphiquement la fonction g .

[illegible]



3- Fonction avec valeur absolue

Exercice : le plan est muni du repère (O, I, J) . On donne $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

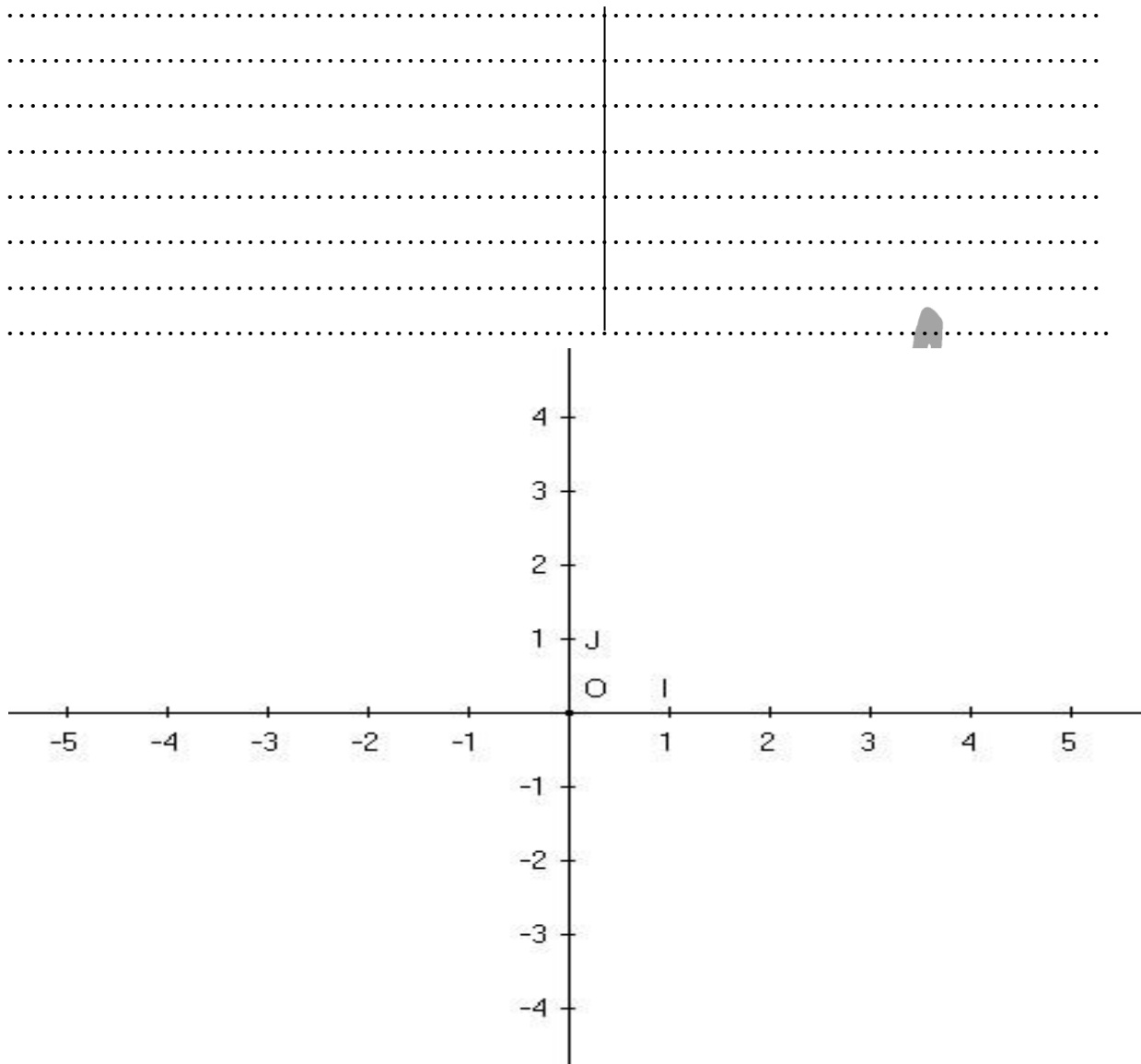
$$\mathbf{X} \longrightarrow |\mathbf{X}|$$

- Détermine l'ensemble de définition de g .
- Calcule l'image des nombres réels -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 3 .
- Ecris la fonction $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

On dit que la fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles.

- d) Donne le sens de variation de g .
e) Dresse le tableau de variation de g .
f) Représente graphiquement g .

[illegible]



II – FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Fonction carrée

On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2$

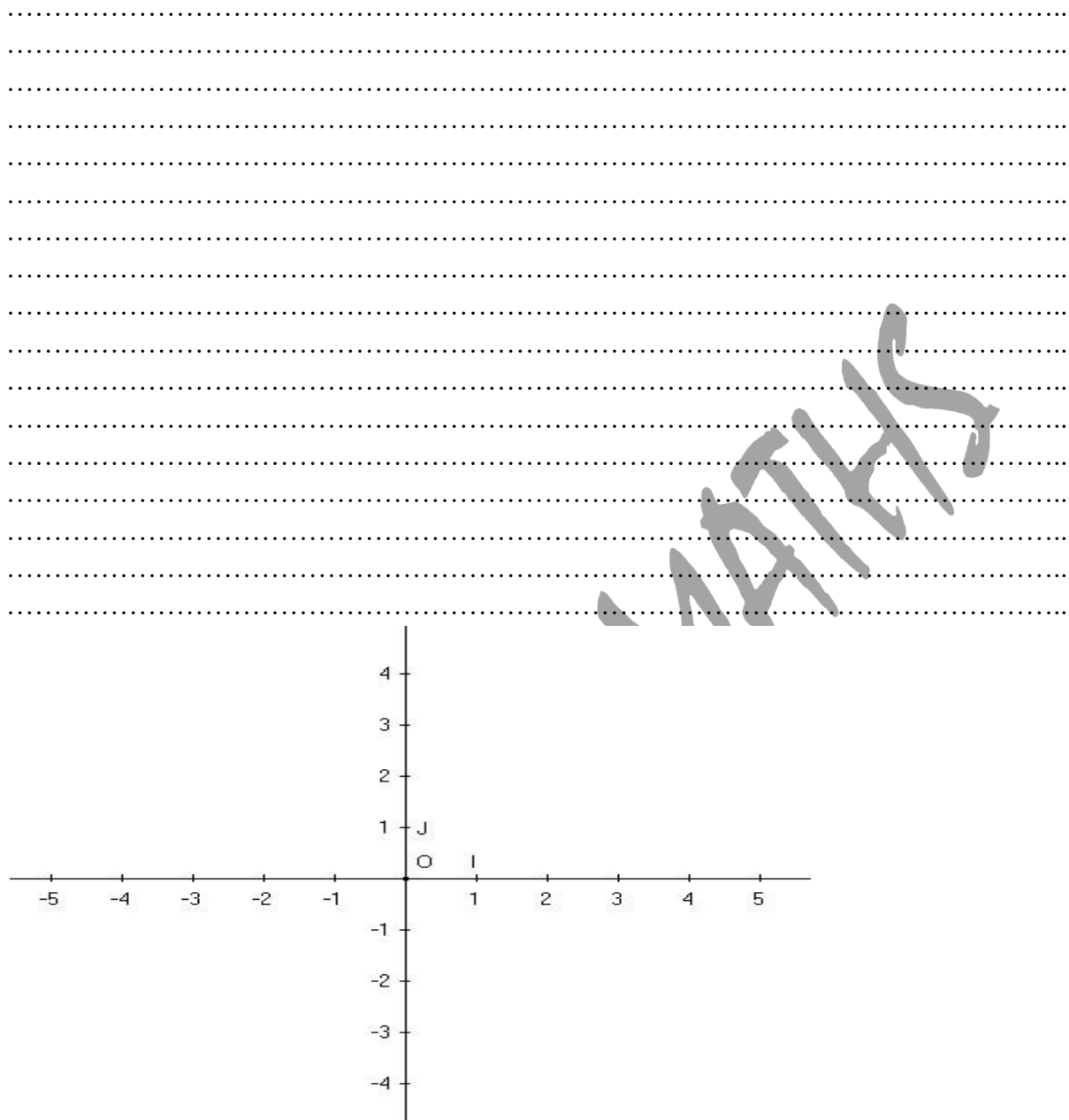
- Détermine l'ensemble de définition de h .
- Détermine le sens de variation de h .
- Détermine le tableau de variation de h .
- Représente graphiquement h .

.....

.....

.....

.....



2- Fonction racine carrée

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x}$

- Détermine l'ensemble de définition de g .
- Détermine le sens de variation de g .
- Détermine le tableau de variation de g .
- Représente graphiquement g .

CHAPITRE VII : STATISTIQUES

A- ORGANISATION DES DONNEES

I – ETUDE D'UN CARACTERE QUALITATIF

Activité :

Après son élection, le maire d'une commune mène une enquête pour connaître la priorité dans la réalisation des quatre projets suivants :

Electrification (E) ; Adduction d'eau (A) ; Bitumage (B) ; Dispensaire (D)

Chaque personne interrogée doit choisir un et un seul projet.

Voici le tableau obtenu après une semaine d'enquête :

E A D E A B E A A E B
B A A A E D D A E B E
D A D E E A B B D A
B E B A D E B D E A B
B A B E D E D A E A E
A B E D E A

- 1) Quelle est la population étudiée ?
- 2) Quel est le caractère étudié ?
- 3) Quelles sont les modalités du caractère ?
- 4) Quelle est la nature du caractère ?

La donnée du couple (modalités, effectifs) ou (modalités, fréquences) constitue une **série statistique**.

5) Tableau des effectifs et des fréquences.

Modalités					Totaux
Effectifs					
Fréquences en %					

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i$

Fréquence de chaque modalité : $f_k = \frac{n_k}{N}$

6) Quel est le projet prioritaire ?

On dit que la modalitéest le mode de la série.

NB : Une série statistique peut avoir un ou modes.

7) Représentation par un diagramme circulaire ou semi-circulaire.

Modalité					Totaux
Effectif					
Angle au centre (°)					360°

Diagramme circulaire : Angle au centre = $\frac{\text{Effectif de la modalité}}{\text{Effectif total}} \times 360^\circ$

Diagramme semi-circulaire : Angle au centre = $\frac{\text{Effectif de la modalité}}{\text{Effectif total}} \times 180^\circ$

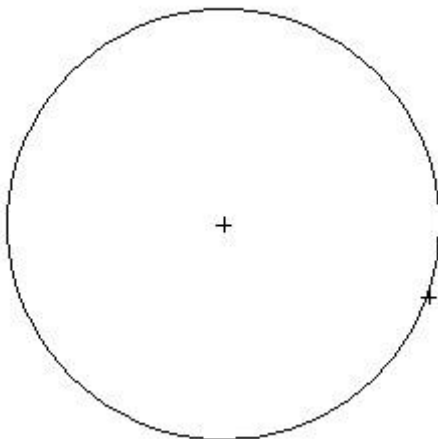


Diagramme circulaire

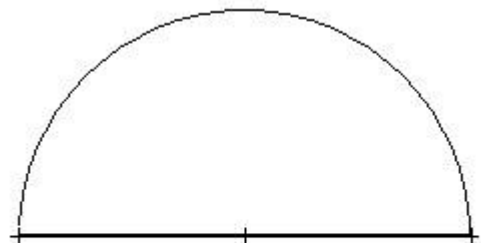


Diagramme semi-circulaire

Définitions :

- ◆ Une population est un ensemble de personnes, d'animaux ou d'objets sur lequel se porte une étude.
- ◆ La caractère est le phénomène, la particularité que l'on étudie dans la population.
- ◆ Une modalité est une forme (rubrique) du caractère.
- ◆ Le mode est la modalité qui a le plus grand effectif.
- ◆ Un caractère statistique est qualitatif si ses modalités ne sont pas mesurables.

II- ETUDE D'UN CARACTERE QUANTITATIF

Activité : On a relevé les âges au 01-01-2009, des élèves d'une classe de seconde C. On a obtenu les résultats suivants :

14 15 13 14 15 14 14 16 15 14
 15 14 14 14 13 15 14 16 15 15
 15 16 15 15 14 16 13 14 14 14
 14 14 14 15 15 16 15 13 15 14
 16 15 15 14 14 13 14 15 15 15

- 1) Quelle est la population étudiée ?
- 2) Quel est le caractère étudié ?
- 3) Quelles sont les modalités du caractère ?
- 4) Le caractère âge est-il mesurable, quantifiable ?
 On dit d'un tel caractère qu'il est quantitatif.
 Un caractère est quantitatif si ses modalités sont quantifiables.
- 5) Tableau des effectifs, effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées.

Modalité					TOTAL
Effectif n_i					
Effectif cumulé croissant					
Fréquence en %					
Fréquence cumulée croissant					
Fréquence cumulée décroissant en %					

- 6) Quel est le mode de cette série ?
- 7) Dans cette série, l'âge le plus élevé est 16 ans et le plus bas est 13 ans.
 L'étendu de la série est
- 8) a- Quelle est la moyenne d'âge de cette classe ?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

$$\bar{x} = \frac{\dots \dots \dots}{\dots \dots \dots} = \frac{\dots \dots \dots}{\dots \dots \dots}$$

b) Combien d'élèves ont un âge inférieur ou égal à 14 ans?

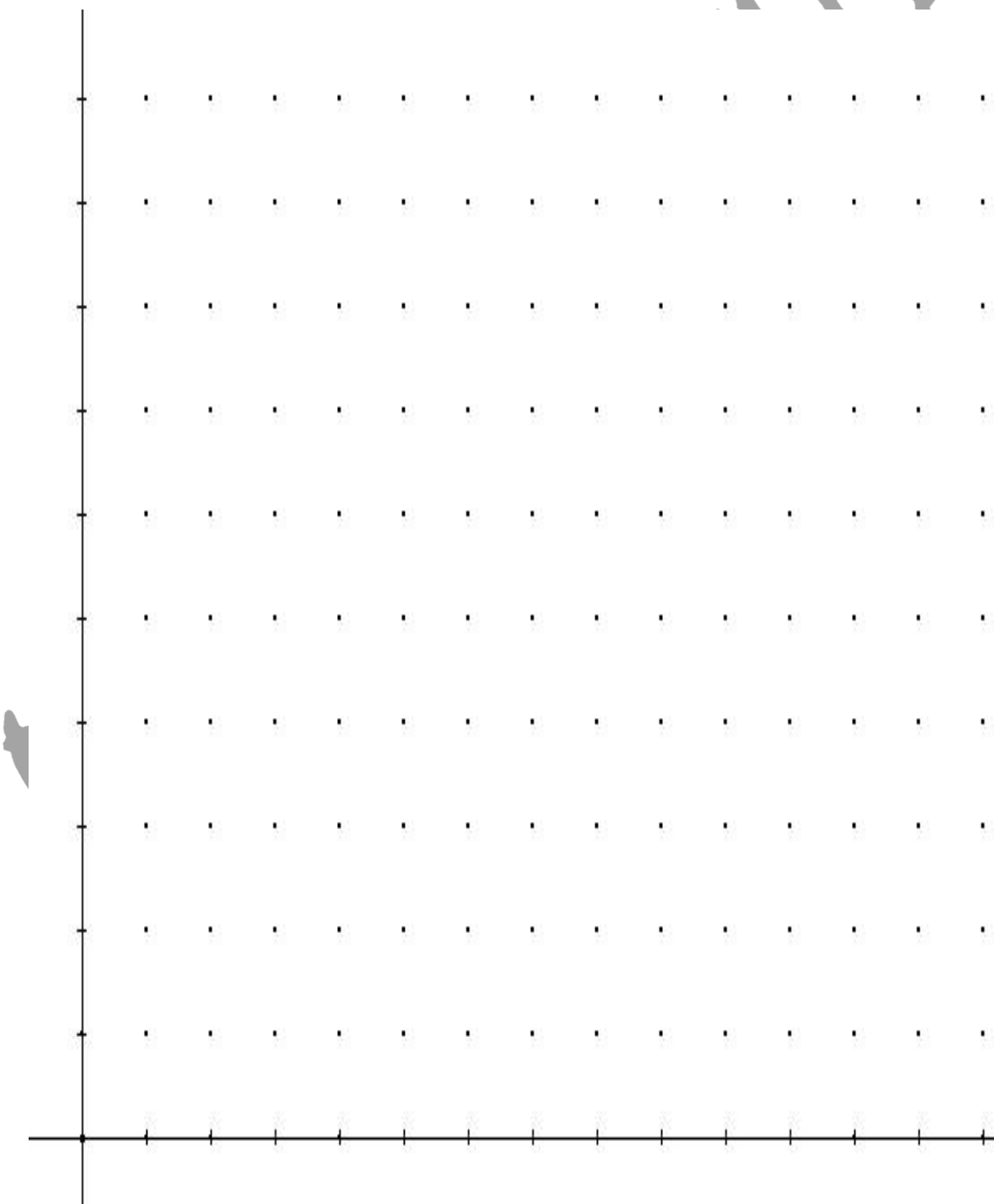
.....
.....

c) Quel est le pourcentage d'élèves ayant un âge supérieur à 14 ans ?

.....
.....
.....

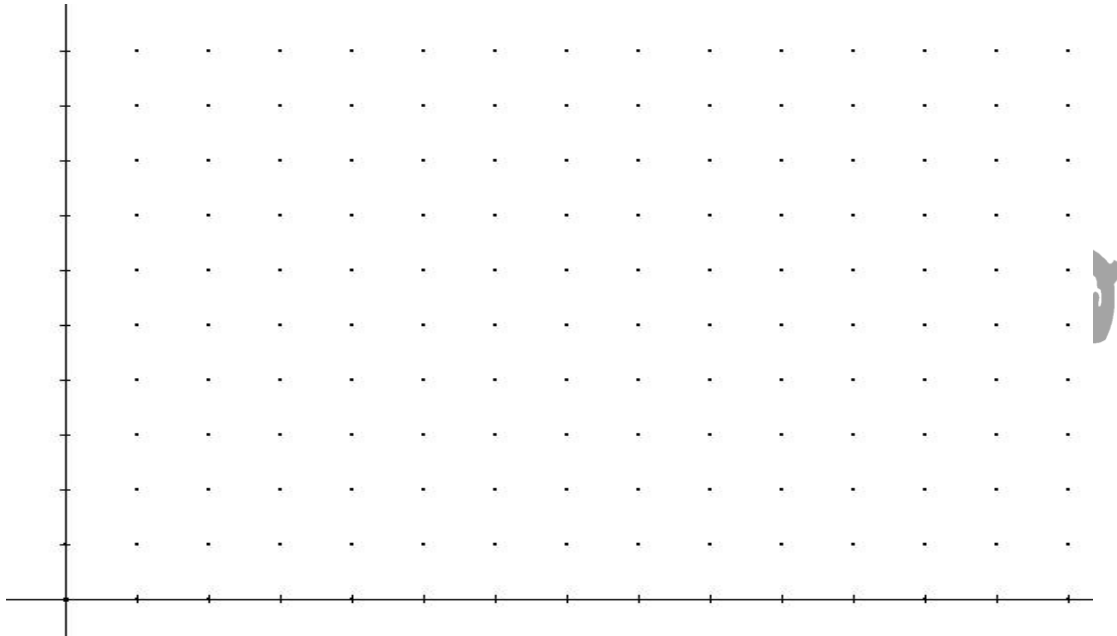
9) Représentation par des diagrammes

a- Diagramme en bâtons



b- Diagramme cumulatif

Effectif cumulé croissant



III- REGROUPEMENT EN CLASSES

Activité :

Les moyennes en mathématiques, de 30 élèves, au premier trimestre d'une classe de seconde sont les suivantes :

06 9.1 17.2 10.5 09 13.7

13 06 7.3 4.1 18 8.5

03 10.3 12.2 7.2 13 08

5.6 6.3 15.6 7.3 14.1 07

3.1 10 12 11.1 14.2 12

Le professeur décide de classer ces moyennes en cinq groupes de la façon suivantes :

- Le groupe des « **faibles** » dont la moyenne est comprise dans $[3 ; 6[$.
- Le groupe des « **insuffisants** » dont la moyenne est comprise dans $[6 ; 9[$.
- Le groupe des « **convenables** » dont la moyenne est comprise dans $[9 ; 12[$.
- Le groupe des « **satisfaisants** » dont la moyenne est comprise dans $[12 ; 15[$.
- Le groupe des « **très satisfaisants** » dont la moyenne comprise dans $[15 ; 18[$.

On dit qu'il a regroupé les moyennes en cinq classes d'amplitude.....

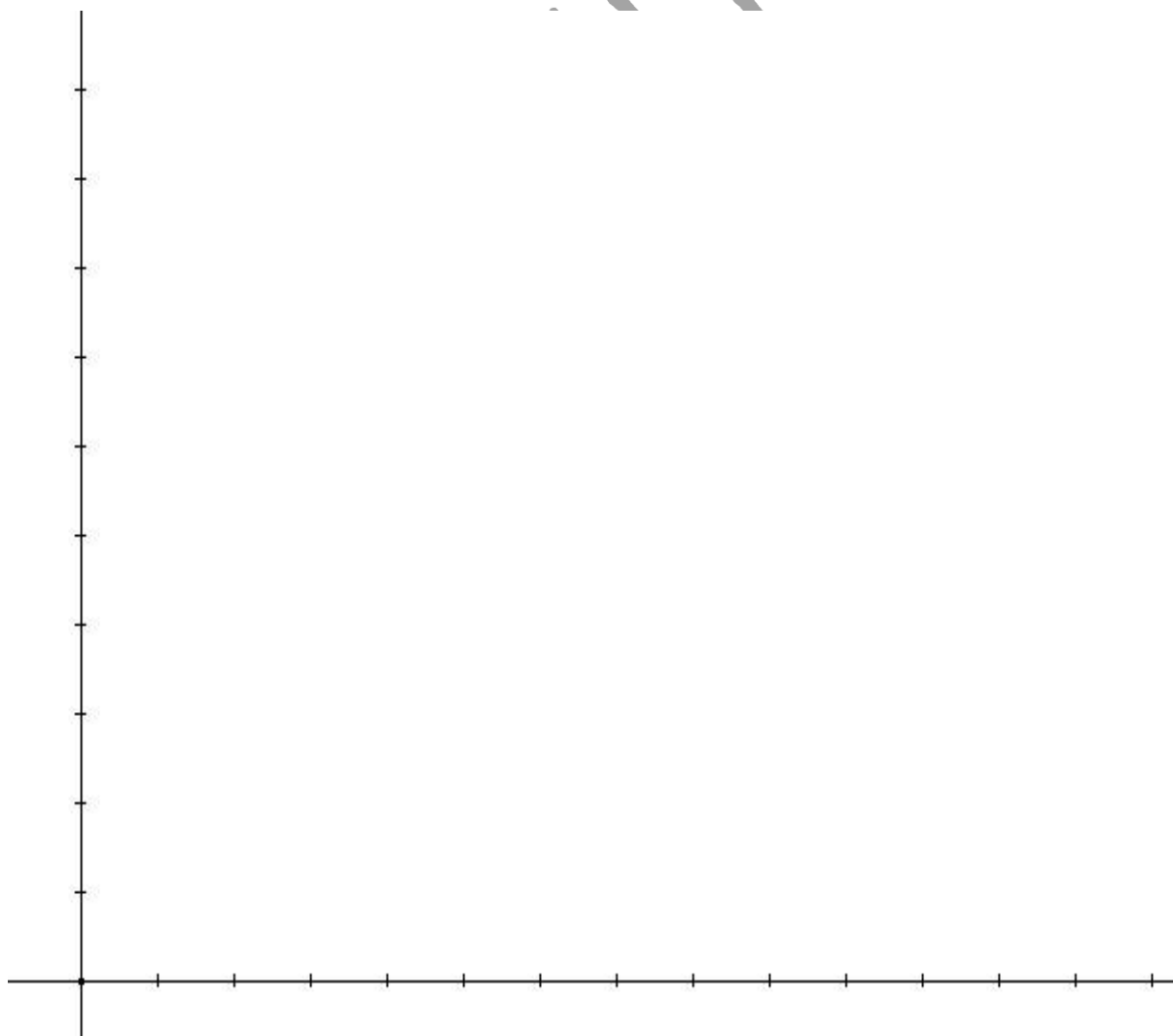
1) Tableau des effectifs et des fréquences

Classe i						Total
Effectif n_i						
Fréquence en %						

- 2) Quelle est la classe qui a le plus grand effectif ?.....
 La classe qui a le plus grand effectif est appelée.....

- 3) La moyenne du regroupement en classe est : (où c_i est le centre de la classe i).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i c_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

4) Représentation par un diagramme à bandes

B- CARACTERISTIQUES DE POSITION ET DISPERSION

I-CARATERISTIQUES DE POSITION OU DE TENDANCE CENTRALE

Les caractéristiques de positions donnent une idée sur les valeurs prises par le caractère.

Les trois caractéristiques de position les plus utilisées sont : **le mode, la moyenne et la médiane.**

Les deux dernières ne concernent que des séries statistiques à caractère quantitatif.

Le mode :

.....

Le moyenne : C'est le nombre $\bar{x}$ définit par :

La médiane : C'est une valeur du caractère telle que l'effectif des valeurs qui lui sont inférieures soit égal à l'effectif qui lui sont supérieures.

La médiane a pour effectif cumulé la moitié de l'effectif total : $\frac{N}{2}$

NB :

- ✓ Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série.
- ✓ Une médiane peut être un nombre réel unique ou tout nombre d'un intervalle (fermé) de $\square$.

Exercice 1 : L'âge des élèves d'une classe de seconde est donné par le tableau suivant :

Modalité	13	14	15	16	Total
Effectif	5	19	20	6	
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					

Seule la modalité.....a un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à : $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$; donc la médiane est :

.....

Exercice 2 :

Les notes obtenues par les trente-deux élèves d'une classe de terminale C sont données par le tableau suivant :

Modalité	12	13	15	16	17	18	19	Total
Effectif	8	6	2	6	2	4	4	
Effectif cumulé croissant								
Effectif cumulé décroissant								

Les modalités.....et.....ont un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = \frac{32}{2} = 16$;
donc tout nombre réel M de l'intervalle [...] est une médiane de la série.
L'intervalle [...] est appelé intervalle.....de la série statistique.

I- CARACTERISTIQUES DE DISPERSION

Les caractéristiques de dispersion que nous définirons sont :

L'écart moyen, la variance et l'écart type.

Exemple :

Les deux tableaux suivants représentent les notes de Yao en français et en anglais.

Français

Notes	7,5	8	9	10
Effectifs	1	2	1	1

- 1) Dans quelle matière les notes de Yao ont-elles un écart assez grand ?.....

.....

On dit que les notes sont plus **dispersées** en français.

Anglais

Notes	3	3,5	8	20
Effectifs	1	1	2	1

- 2) Dans quelle matière les notes sont-elles éloignées de la moyenne ?

.....
.....
.....
.....

L'écartmoyen : C'est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{\sum_{i=1}^k n_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{n_1 |x_1 - \bar{x}| + n_k |x_k - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

La variance est le nombre réel V défini par :

$$\frac{\sum_{i=1}^k n_i |X_i - \bar{X}|}{\sum_{i=1}^k n_i} ; V = \sum_{i=1}^k \frac{n_i X_i^2}{n_1} - \frac{(\bar{X})^2}{1}$$

L'écarttype : C'est la racine carrée de la variance $\sigma\sqrt{V}$

.....

Exercice 1 :

On considère la série sur les âges des élèves de la classe de seconde C donnée par le tableau ci-dessous.

Complète, puis calcule l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique :

Modalité X_i	12	13	14	15	Total
Effectif n_i	6	20	18	6	50
X_i^2					
$N_i X_i^2$					
$ X_i - \bar{X} $					
$n_i X_i - \bar{X} $					

V =

$\sigma\sqrt{V} =$

$e_m =$

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 :

On considère la série statistique sur la moyenne en mathématiques des 30 élèves. Complète le tableau, puis calcule l'écart moyen, la variance et l'écart type.

Classe	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	Total
Effectif n_i						
Centre C_i						
C_i^2						
$n_i C_i^2$						
$n_i C_i - \bar{X} $						
$n_i C_i - \bar{X} $						

$V =$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$\sigma = \sqrt{V}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE VIII : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

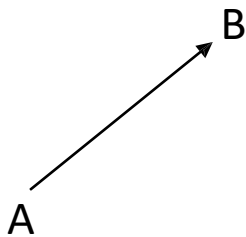
L'ensemble de tous les vecteurs du plan est appelé

On le note

I- VECTEURS

1- Définition et propriété

a) Caractéristique d'un vecteur

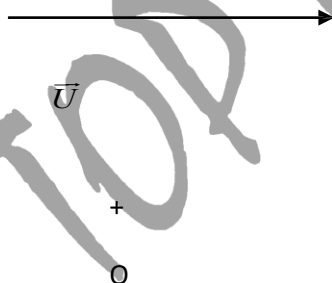


Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction qui est la droite
- son sens :
- sa norme qui est AB : on la note $\|\overrightarrow{AB}\| = \dots$

b) Propriété fondamentale

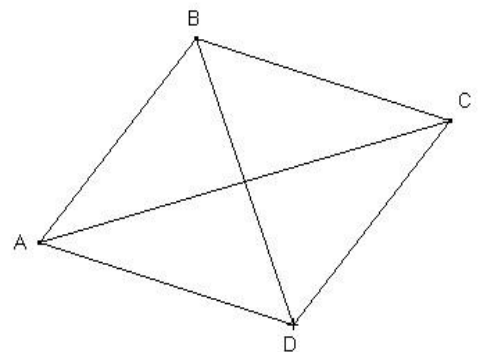
Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{U}$, il existe un et un seul point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{U}$



c) Propriété

Les énoncés suivants sont équivalents :

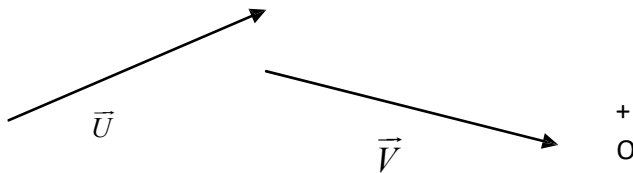
- ABCD est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \dots$
- $\overrightarrow{AD} = \dots$
- [AC] et [BD] ont le même



2- Calcul vectoriel

a) Somme de vecteurs

Construis un représentant de la somme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ à partir du point O donné.



Propriétés :



$$(7) a\vec{U} = \vec{O} \quad \dots\dots\dots (8) a \frac{\vec{U}}{\dots\dots\dots} \frac{\vec{O}}{\dots\dots\dots}$$

$$= - + + - -$$

Exemple :

On donne le vecteur $\vec{T} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} - 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$. Développe et réduis ce vecteur.

.....

b) Combinaisons linéaires

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur de la forme $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, où a et b

Sont des nombres réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
 a et b sont les respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice :

Soit $\vec{w} = 4(2\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}$. Montre que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

.....

.....

.....

.....

.....

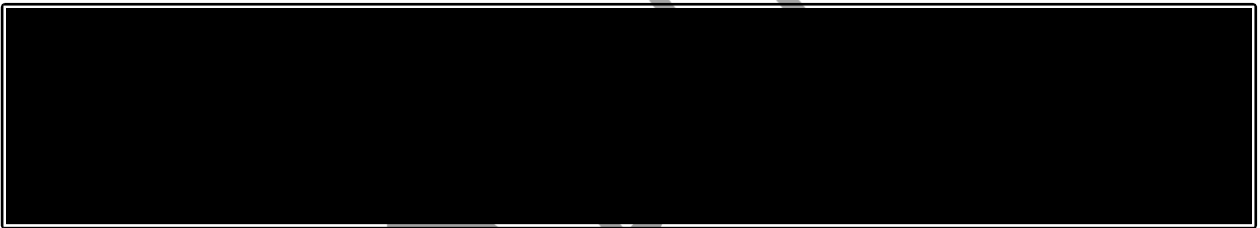
.....

.....

.....

.....

.....

3- Vecteurs colinéaire**a) Définition :****b) Propriétés****Propriété 1 :**

Soient deux vecteurs :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel x tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = x \cdot \vec{u}$

Propriété 2 :

$\vec{u} \quad \vec{v}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, x et y deux nombres réels.

Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

(2) $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0$

Exercice d'application :

Soit ABC un triangle de centre de gravité G, I le milieu de [BC]

1) Démontre que pour tout point M du plan :

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

b) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

2) Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires ?

3) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \text{ ?}$$

II- MESURE ALGEBRIQUE

1- Vecteur directeur et vecteur unitaire

Définition :

- On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que (D).
- On dit que (D) est dirigée par $\vec{u}$.
- On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

2- Mesure algébrique

a- Activité



1- Ecris les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EA}$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{i}$.

$$\overrightarrow{AB} = \dots \vec{i}$$

$$\overrightarrow{AE} = \dots \vec{i}$$

$$\overrightarrow{BC} = \dots \vec{i}$$

$$\overrightarrow{EA} = \dots \vec{i}$$

On a : $\overrightarrow{AB} = \dots \vec{i}$

On dit que est la mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{i}$

On note $AB = \dots$ et AB se lit « mesure algébrique de (A, B) ».

2- Détermine : AE, BC, AE et EB.

$$AE = \dots$$

$$BC = \dots$$

$$EA = \dots$$

$$EB = \dots$$

b- Définition

Soit (D) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
A et B étant deux points de (D).

On appelle mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel

noté AB tel que : $\overrightarrow{AB} = \dots \vec{i}$

c- Propriété

Soit (D) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.

Pour tous points A, B, C de (D), tout nombre réel a on a :

(1) $\|\overrightarrow{AB}\| = \dots\dots\dots$

(2) $\overrightarrow{BA} = \dots\dots\dots$

(3) Lorsque A et B sont distincts :

• $\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de $\dots\dots\dots$

• $-\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$ si et seulement si $-\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de $\dots\dots\dots$
 $\Leftrightarrow$

(4) $\overrightarrow{AB} = 0 \dots\dots\dots$

(5) $AC = a AB \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(6) $AB + BC = \dots\dots\dots$ (Relation de Chasles)

Exercice 1 :

Lire sur le graphique ci-dessous: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

—

—

—

$\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$

$\overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$

$\overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$

Exercice 2

1- Sur la droite (D) ci-dessous orientée par un vecteur directeur unitaire $\vec{i}$,

place trois points A, B et C tel que $AB = 4$ et $AC = -2$

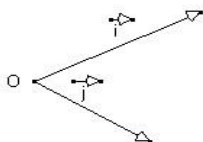
2- Calcule $\overrightarrow{BC}$

.....

III- BASES ET REPERES

Activité : Sur la figure ci-dessous, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs non colinéaires.

Construis un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$



Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires ; on dit que le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de V.

Le couple (2 ; 3) est appelé de $\vec{u}$ dans la $(\vec{i}, \vec{j})$.

On note

- Si $\vec{i} \perp \vec{j}$, on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est

- $\perp \parallel \parallel$

Si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, on dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est

I- Base

Définition :

- Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs est appelé de V.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V et $\vec{u}$ un vecteur. Le seul couple de nombres réels

$(x ; y)$ vérifiant $\vec{u} = \dots\dots\dots$ est appelé couple.....

..... de $\vec{u}$ dans la On écrit : $\vec{u} (\dots ; \dots)$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

→ → → → →

Exercice : $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont deux bases telles que :

$$\vec{j} = 7\vec{u} - \vec{v} \text{ et } \vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$$

a- Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

.....

b- Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2- Normed'unvecteur

Propriété

Soit $u(x; y)$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}(-3; -4)$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. calcule $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

3- Déterminant de deux vecteurs

a- Définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V . $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ deux vecteurs.

On appelle $\dots\dots\dots$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le nombre $\dots\dots\dots$

On le note $\dots\dots\dots$

2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

3. Soit $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\vec{i}, \vec{j}$.

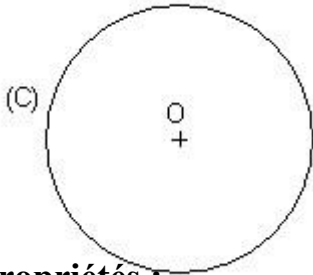
Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$?

CHAPITRE IX : ANGLES INSCRITS

I- ANGLES INSCRITS

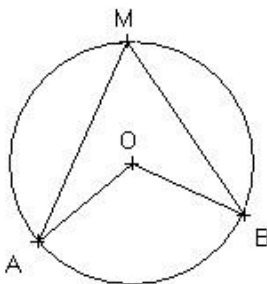
1- Angle inscrit défini par une corde et un point

Activité : On donne un cercle (C) de centre O et les points A, B et M appartenant à (C).

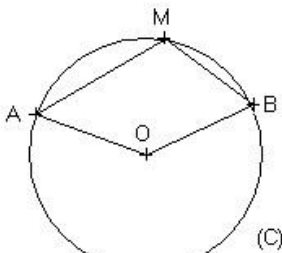


- Construis l'angle au centre qui intercepte l'arc AB
- Construis l'angle inscrit qui intercepte l'arc AB
- L'angle au centre $\widehat{AOB}$, et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc AB :
On dit que les angles $\widehat{AOB}$, et $\widehat{AMB}$ sont.....

Propriétés :



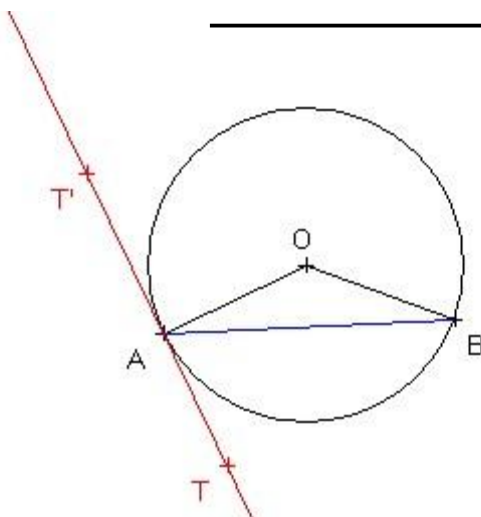
- Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O
- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc AB alors
mes $\widehat{AMB}$ =



Si $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc AB alors

mes $\widehat{AMB}$ =

2- Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente



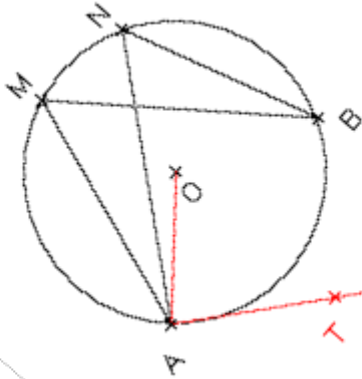
Soit [AB] une corde d'un cercle (C), qui n'est pas un diamètre. [AT) la demi-droite tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O.
[AT') l'autre demi tangente en A.

On a : mes $\widehat{TAB}$ =

Et mes $\widehat{T'AB}$ =

II- ANGLE INSCRITS ET ARCS DE MEME LONGUEUR : ANGLE INSCRIT ET BISSECTRICE

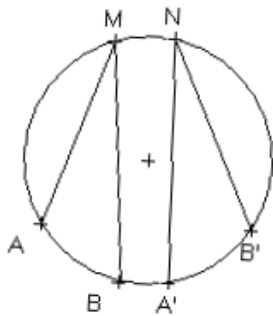
Propriétés :



1. Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont.....

[AT) est la demi-tangente en A

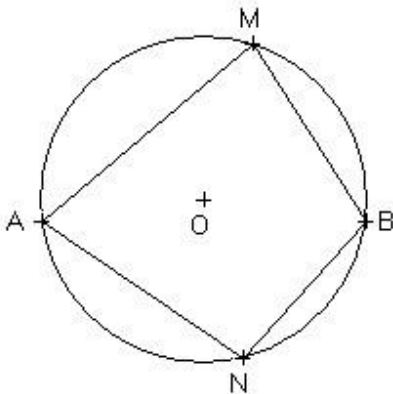
Compare : $\widehat{TAB}$ $\widehat{AMB}$



Trace la demi tangente en A', puis compare :
..... $\widehat{AMB}$

Trace la demi-tangente en A.

On a $\widehat{TAI} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$



Calcule $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \dots\dots\dots$

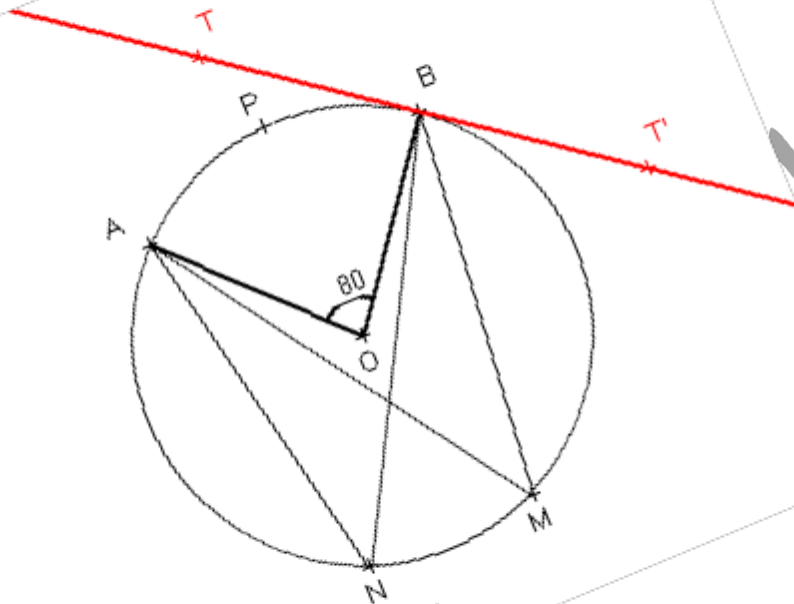
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice :

Soit le cercle (C) de centre O, et (TT') la tangente à (C) en B.

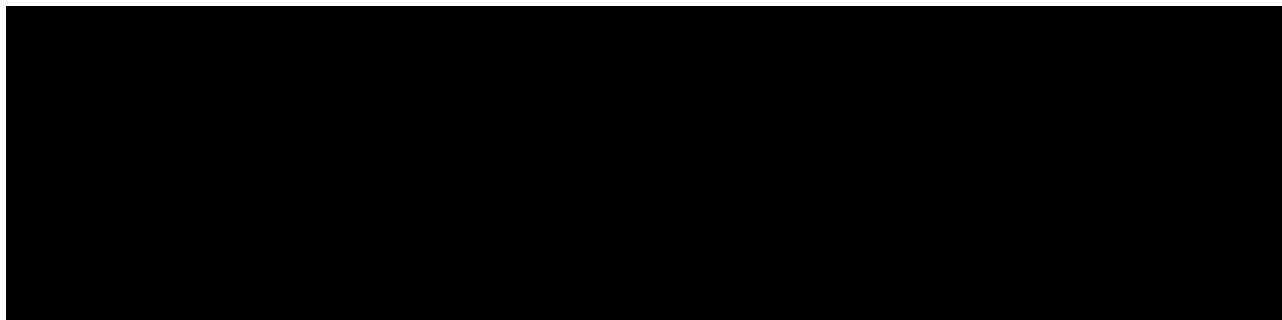
On donne $\widehat{AOB} = 80^\circ$ (voir figure ci-dessous).

- 1- Calcule $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$
- 2- Détermine $\widehat{ABT}$ et $\widehat{ANB}$



III- DETERMINATION DU LIEU GEOMETRIQUE DES POINTS M TELS QUE $\widehat{AMB} = \theta^\circ$

Propriété :



Méthode de construction page 12 (collection CIAM)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

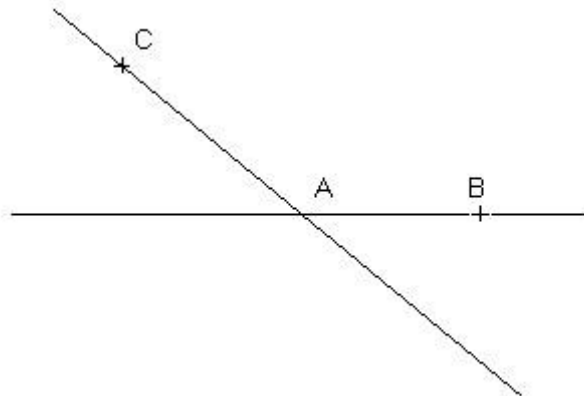
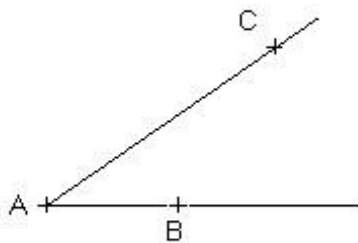
Exercice :

Construis le lieu géométrique des points M tels que, $\widehat{AMB} = 70^\circ$ avec $AB = 7 \text{ cm}$.

IV- RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE

1- Sinud'unangle

Construis H, projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de B sur (AC).



Définition :

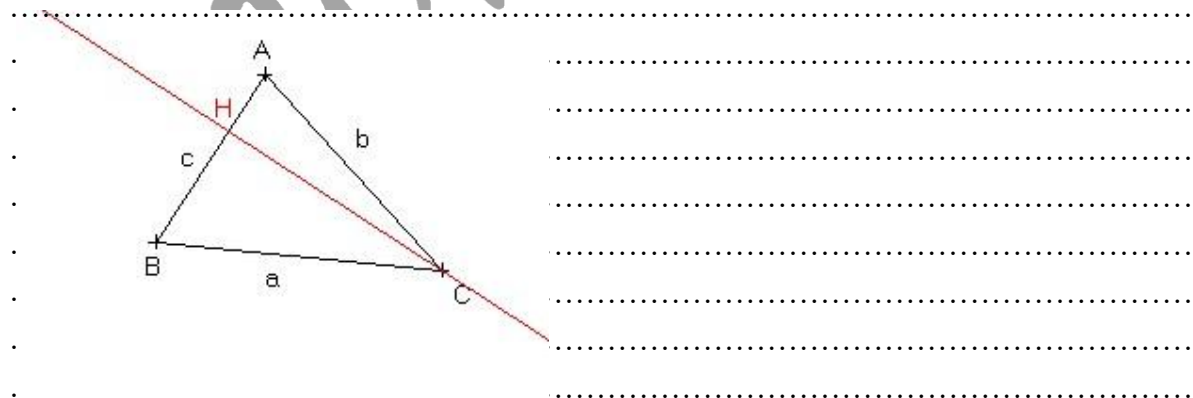
Soit $\widehat{BAC}$ un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB) ; K le projeté orthogonal de B sur (AC).

On pose $\sin \widehat{BAC} = \dots\dots\dots$

Activités :

ABC est un triangle tel que $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$; H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. Donne l'expression A de l'aire du triangle ABC.



Justifie que $HC = b \sin \widehat{A}$ puis déduis que $A = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

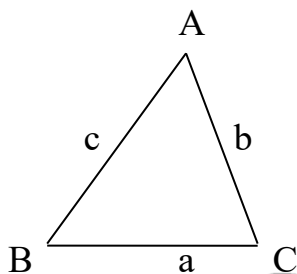
.....

.....

.....

2- Propriété de l'aire d'un triangle

a- Propriété



Soit ABC un triangle, A son aire.

On pose $AB = \dots\dots\dots$; $BC = \dots\dots\dots$ et $AC \dots\dots\dots$

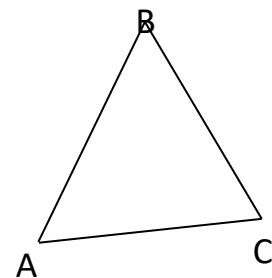
On a : $A = \dots\dots\dots$

Exercice :

L'unité est le centimètre

Sur la figure ci-contre $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 6$ et $\sin \widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On rappelle que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$



1- Calcule l'aire A du triangle ABC.

2- On donne $AC = 4$, justifie que $\widehat{C} = 30^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

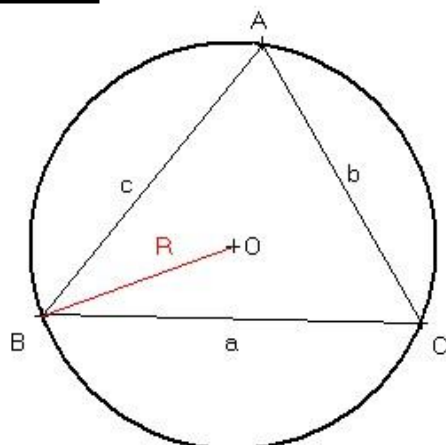
.....

.....

.....

.....

b- Théorème des Sinus



Soit ABC un triangle, A son aire, (C) son cercle circonscrit, R le rayon de (C).
On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On a :

.....

.....

.....

.....

Exercice d'application

Soit la figure ci-contre.

Calcule l'aire A du triangle ABC

.....

.....

.....

.....

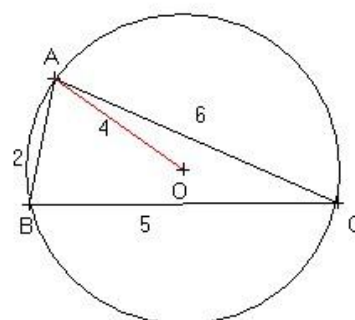
.....

.....

.....

.....

.....



CHAPITRE X : ANGLES ORIENTES – TRIGONOMETRIE

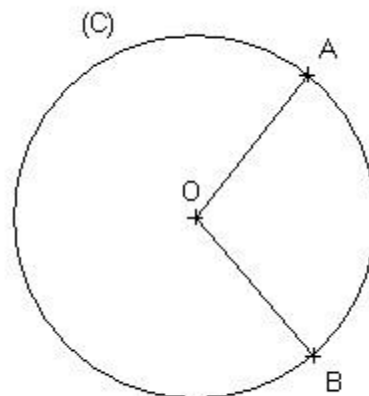
I- COMPLEMENTS SUR LES ANGLES

1- Radian

On donne le cercle (C) de centre O et de rayon r.

A et B deux points de (C).

On longueur de $\widehat{AB} = \frac{\pi r}{180^\circ} \times \text{mes } \widehat{AOB}$.



Complète le tableau suivant en prenant $r = 1$

Mesure de l'angle	30°	45°	60°	90°
Longueur $\widehat{AB}$				

On définit une nouvelle unité de mesure d'angles pour que la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$, qui l'intercepte, soient mesurés par le même nombre. Cette unité est le.....

a) Définition

La mesure en.....d'un angle $\widehat{AOB}$ est égale à la.....
de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1.
On la note $\text{mes } \widehat{AOB} = \dots\dots\dots$

Mesure en radian et mesure en degré

Mesure en degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
Mesure en radian	2π						

NB : L'unité de mesure d'un angle peut être donnée en : degré, en radian, ou en grade.

$180^\circ \longrightarrow \pi \text{ rad} ; \pi \text{ rad} \longrightarrow 200 \text{ grades} ; 180^\circ \longrightarrow 200 \text{ grades}$

b) Propriété

Soit un cercle de rayon R. La longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α radians est :

2- Angles orientés, de deux vecteurs

a) Présentation

Couple de deux vecteurs de même origine.

b) Vocabulaire : Les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ sont dits.....

3- Orientation du plan

* Orienter le plan, c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens.

Ce sens est appelé sens

C'est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

*Le sens contraire est appelé sens **indirect ou négatif**.

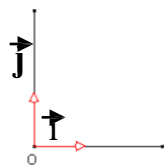
4- Repère orthonormé direct ou indirect

Définitions

Soit le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est direct si l'angle

$(\vec{i}, \vec{j})$ est l'angle.....



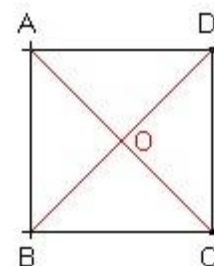
Le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est indirect si l'angle

$(\vec{i}, \vec{j})$ est l'angle.....

Exercices d'application

ABCD est un carré de centre O. Complète les phrases :

- Le repère (O, B, A) est.....
- Le repère (O, D, A) est.....
- Le repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$



5- Mesure principale d'un angle orienté

Définition et propriété fondamentale

a) définition

Soit $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ un angle orienté.

Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O.

La mesure principale en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est le nombre réel $\text{Mes}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ et définie par :

- $\text{Mes}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \dots\dots\dots$ lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc MN est le sens direct (fig.1).
- $\text{Mes}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \dots\dots\dots$ lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc MN est le sens indirect (fig.2).

Fig.1

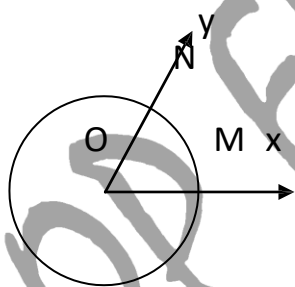
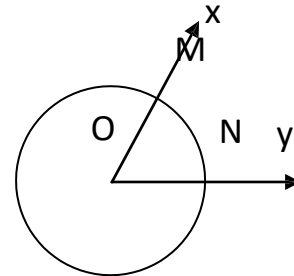


Fig.2



b) Egalité d'angles orientés

Des angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale

c) Propriété fondamentale

Etant donné un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et une demi-droite [OX), il existe une demi-droite [OY) telle que :

$$\text{Mes}(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = \alpha$$

Remarque :

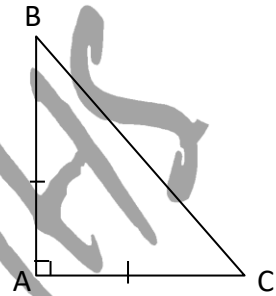
- Si $(\widehat{Ox, Oy})$ est l'angle nul, $\text{Mes}(\widehat{Ox, Oy}) = \dots\dots\dots$
- Si $(\widehat{Ox, Oy})$ est l'angle plat, $\text{Mes}(\widehat{Ox, Oy}) = \dots\dots\dots$

On définit de manière analogue la mesure principale en degré d'un angle orienté. On note $\text{Mes}^\circ(\widehat{Ox, Oy})$

Exemple :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. on a :

$\text{Mes} \widehat{CB, CA} = \dots\dots\dots$ et $\text{Mes}^\circ \widehat{CB, CA} = \dots\dots\dots$

**Détermination de la mesure principale d'un angle****Méthode 1 :** Encadrement

Soit $\alpha = \theta + 2k\pi$ la mesure principale de θ .

- 1- Ecrire l'encadrement - $\pi < \theta + 2k\pi \leq \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- 2- Détermine un encadrement de k.
- 3- Trouve la valeur de k.
- 4- Détermine $\alpha = \theta + 2k\pi$ en remplaçant k par sa valeur obtenue précédemment.

Exercice d'application : Détermine α mesure principale de l'angle orienté de mesure θ .

$$\theta_1 = \frac{16\pi}{3}; \theta_2 = 9\pi; \theta_3 = \frac{-7\pi}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Méthode 2 : la division

Soit α la mesure principale de $\theta = \frac{a\pi}{b}$

- 1- Faire la division euclidienne de a par b
- 2- Veiller à ce que le quotient q soit un nombre pair
- 3- Ecrire $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$
- 4- Déduis-en que : $\frac{a\pi}{b} = \dots\dots\dots$
- 5- La mesure principale de θ est $\alpha = \dots\dots\dots$

Exemple

Détermine α la mesure principale de l'angle orienté de mesure $\theta = \frac{17\pi}{4}$

$$\frac{17}{4} = \dots\dots\dots ; \frac{17\pi}{4} = \dots\dots\dots ; \text{D'où } \alpha = \dots\dots\dots$$

Exercice d'application

Détermine la mesure principale de l'angle orienté de mesure θ .

$\theta = \frac{16\pi}{3}$; $\theta = \frac{\pi}{9}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

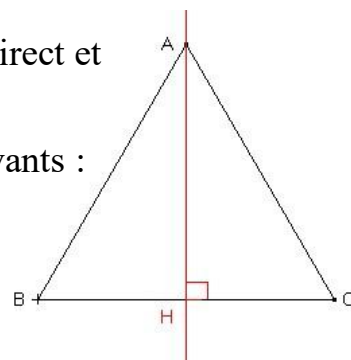
Exercice

Sur la figure ci-contre BAC est un triangle équilatéral indirect et H le pied de la hauteur issue de A.

Détermine les mesures principales des angles orientés suivants :

Mes $\widehat{AB, AC}$ = ; Mes $\widehat{BA, BC}$ =

Mes $\widehat{HB, HA}$ = ; Mes $\widehat{BH, HA}$ =



NB : Pour une meilleure détermination de la mesure principale d'un angle orienté, il faut veiller à ce que les deux vecteurs formant le couple aient la même origine.

Exercices :

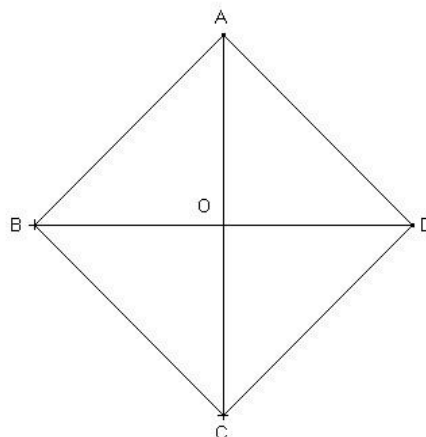
1. Complète le tableau de correspondance suivant :

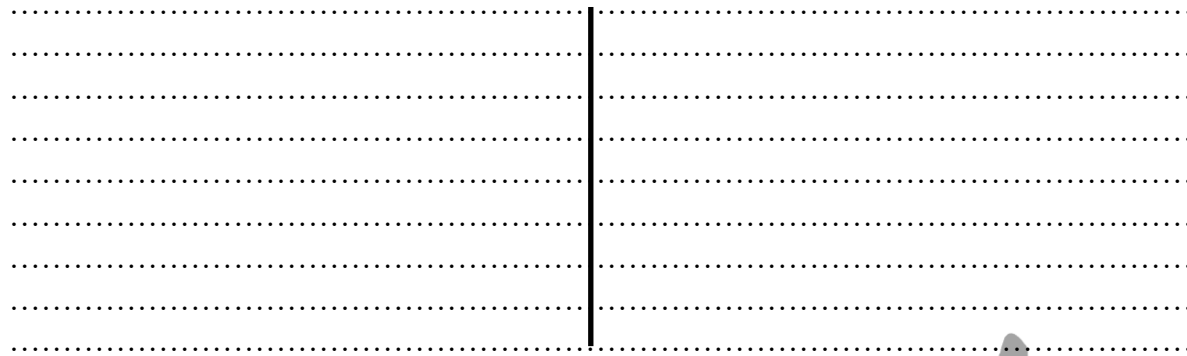
Degré	60	75	135	$\dots \pi \dots$	$\dots \pi \dots$	
Radians				4	12	2
Grades						

2. La figure ci-dessous représente un carré ABCD de centre O. Détermine les mesures principales d'angles orientés :

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CD}$

.....



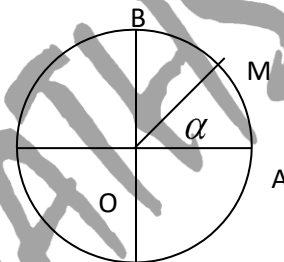


II- TRIGONOMETRIE

1. Cercle trigonométrique

Définition

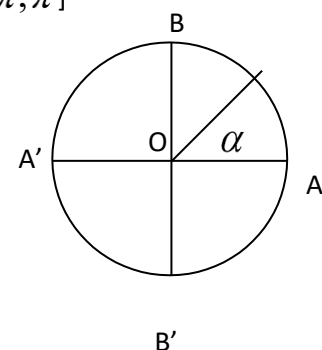
(O, A, B) est un repère orthonormé direct.
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O, origine du repère, et de rayons....



A tout point M du cercle trigonométrique, on associe le nombre α mesure principale de l'angle orienté $\widehat{OA, OM}$

Réciproquement : à tout nombre réel α de l'intervalle $] - \pi; \pi]$

est associé le point M du cercle trigonométrique tel que :
 α soit la mesure principale de l'angle de $\widehat{OA, OM}$



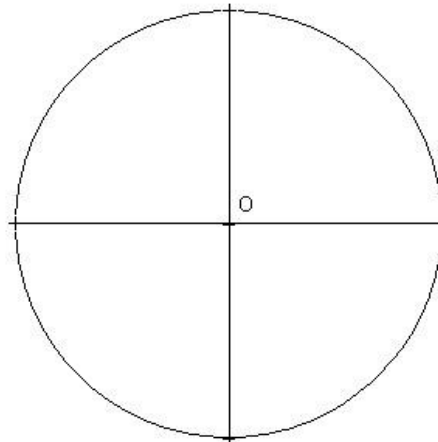
M est appelé.....de α sur le cercle Trigonométrique.

On convient généralement que A' est l'image de.....
Et B' celle de

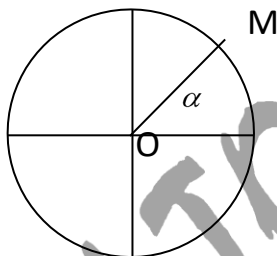
Exercice :

Place les points A, B, C, D, E, F et G images respectives des angles orientés de mesure principale :

$$\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$$

**2. Utilisation du cercle trigonométrique**

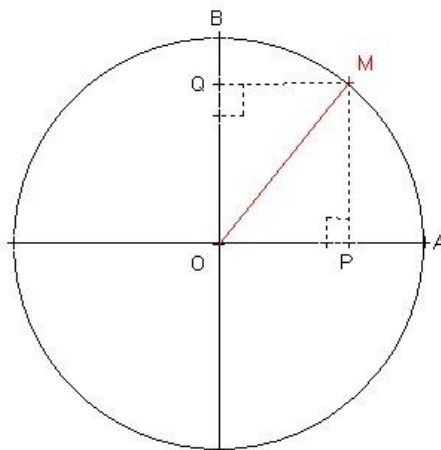
Sur la figure ci-dessous, le point M est l'image du nombre réel α appartenant à $-\pi; \pi$. Place sur la figure le point M' image du nombre β tel que $\beta = -\alpha$

**Remarque :**

On dit que α et β sont des mesures d'angles associés.

3. Sinus – Cosinus d'un angle

Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc AB.



Dans le triangle OMP rectangle en P, on, a :

$$\cos \widehat{AOM} = \dots\dots\dots \text{et} \sin \widehat{AOM} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Or } OM = 1$$

$$\text{Donc : } \cos \widehat{AOM} = \dots\dots\dots \text{et} \sin \widehat{AOM} = \dots\dots\dots$$

$\cos \widehat{AOM}$ et $\sin \widehat{AOM}$ sont respectivement.....

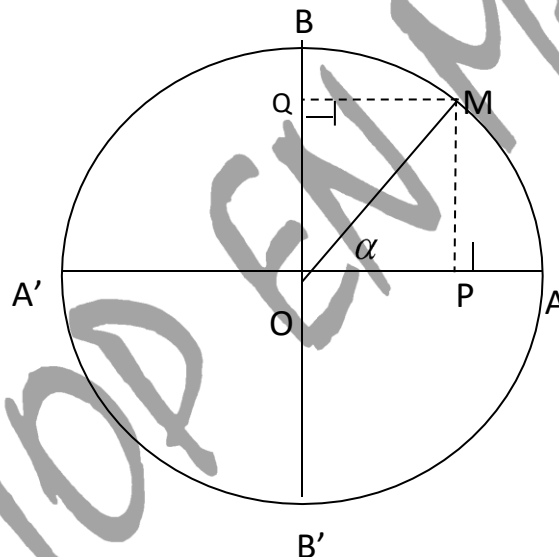
.....et.....de M dans le repère (O, A, B).

a) Définition

Un angle orienté $\vec{u}, \vec{v}$ de mesure principale α étant donné.

Soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

Soient P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AA') et BB').

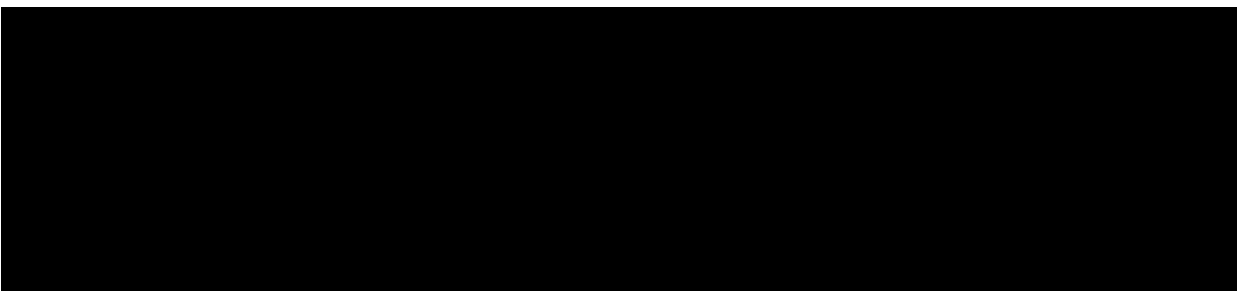


Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $\vec{u}, \vec{v}$ ou de sa mesure principale α sont définis par

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \cos \alpha = \dots\dots\dots \text{est} \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \sin \alpha = \dots\dots\dots$$

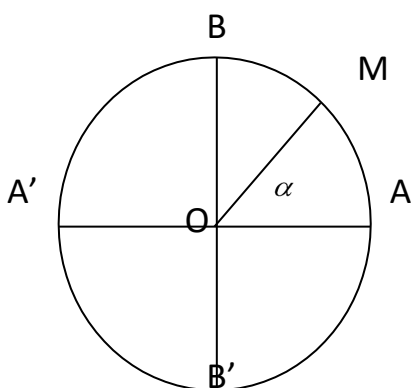
Dans le repère (O, A, B), on a : $M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

b) Propriétés

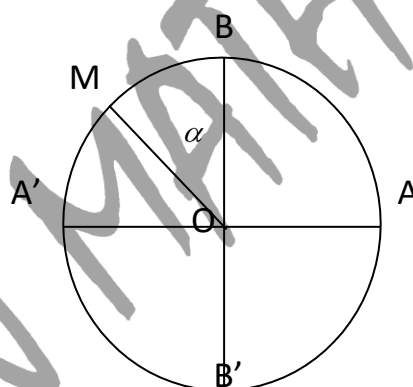


c) Signe du sinus et du cosinus

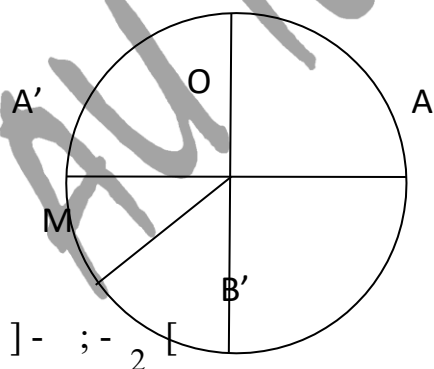
Dans les cas suivants, donne le signe de $\cos \alpha$ et de $\sin \alpha$ =



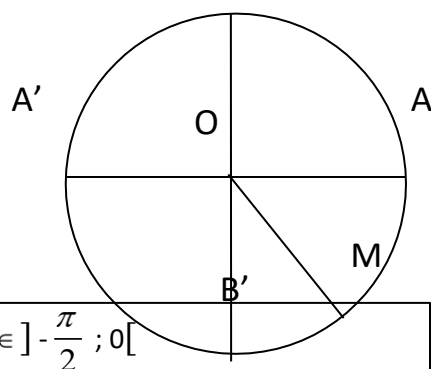
$\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$
 $\cos \alpha$; $\sin \alpha$



$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$
 $\cos \alpha$; $\sin \alpha$



$\alpha \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[$
 $\cos \alpha$; $\sin \alpha$



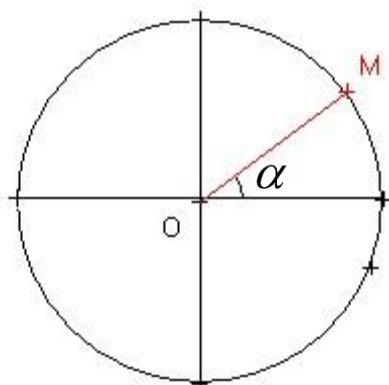
$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
 $\cos \alpha$; $\sin \alpha$

d) Cosinus et Sinus d'angles remarquables

Complète le tableau suivant :

Mesure principale	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus						
Sinus						

e) Cosinus et Sinus d'angles associés



$$\cos(-\alpha) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(-\alpha) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(-\alpha) = \dots\dots\dots$$

4- Tangente d'un angle orienté

a- Définition

Soit un angle orienté $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ non droit de mesure principale

$$\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha \neq -\frac{\pi}{2} \right)$$

La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par :

$$\tan \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \tan_{\alpha} = \dots\dots\dots$$

CHAPITRE XI : PRODUIT SCALAIRE

I- DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES

1- Produit scalaire de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \text{ si les deux vecteurs sont non nuls.}$$

Vocabulaire : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$

$\text{Mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3}{4}$ On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

$\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$; $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{4}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Exercice : Calcule le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\vec{u} = 2$; $\vec{v} = \frac{1}{4}$; $\text{Mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2}{3}$

2) $\vec{u} = 5$; $\vec{v} = 3$ et $\text{Mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4}{5}$

.....

.....

.....

.....

2) Propriétés :

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

3) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et
 seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Définition et propriété :

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé le $\dots\dots\dots$ de $\vec{u}$

On le note $\vec{u}^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$



Exercice 1 : ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$ et $AD = 3$.

Calcule : $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2

EFG est un triangle équilatéral de coté a . démontre que $\vec{EF} \cdot \vec{EG} = \frac{a^2}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 : Calcule $\|\vec{v}\|$ sachant que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = -\frac{\pi}{3}$

.....

.....

.....

.....

.....

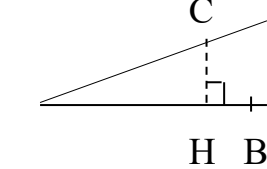
.....

.....

3) Interprétation géométrique

Pour tous points A, B et C tels que $A \neq B$, on a :

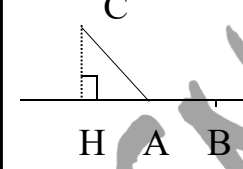
L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0$$

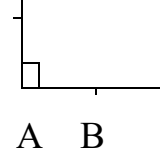
L'angle $\widehat{BAC}$ est obtus



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$$

L'angle $\widehat{BAC}$ est droit

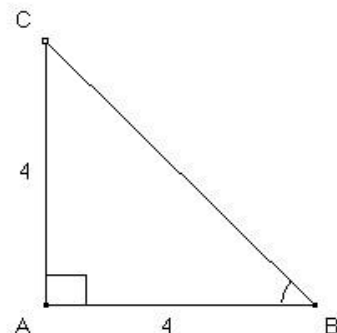


$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

Exercice d'application : Soit la figure suivante :

Calcule $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

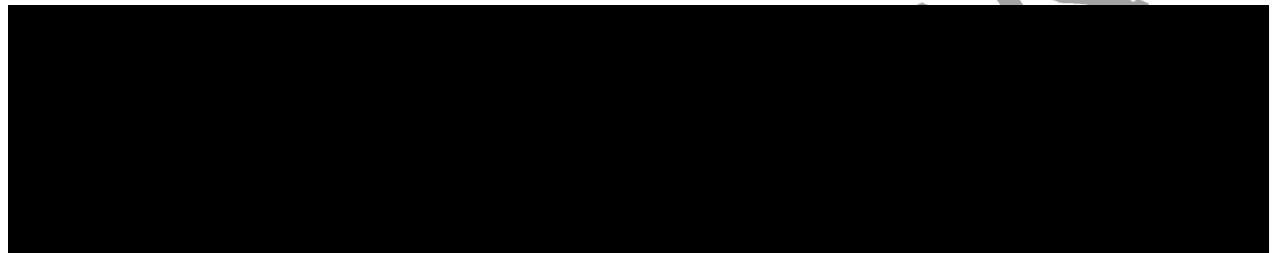
II- PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

1- Propriétés des vecteurs orthogonaux

Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Conséquences :



2- Propriétés fondamentales :

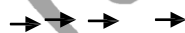
Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, w$ et tout nombre réel λ , on a :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ (3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

(2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \dots\dots\dots$ (4) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$

Conséquences :



Pour tous vecteurs u, v, w et s on a :

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{s}) = \dots\dots\dots$

$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \dots\dots\dots (\vec{u} - \vec{v})^2 = \dots\dots\dots$

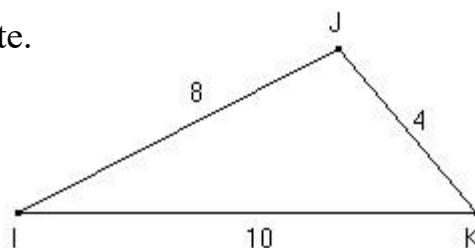
$(\vec{u} \cdot \vec{v}) (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \dots\dots\dots$

Autre expression du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Exercice 1 : On donne la figure suivante.

Calcule : $\overrightarrow{IJ}$ $\overrightarrow{JK}$



Exercice 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

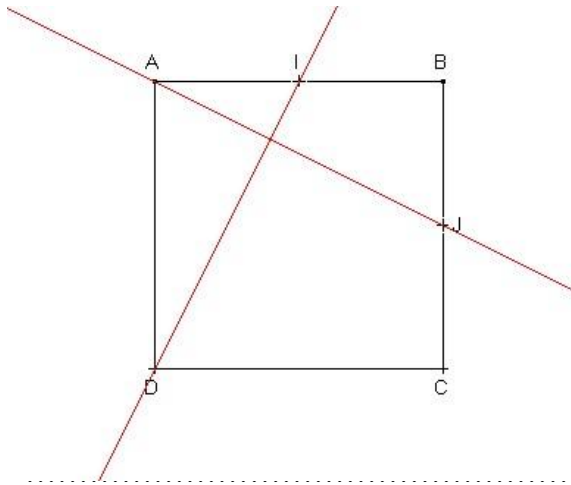
On pose $\vec{i} = 8\vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{j} = \vec{u} + \vec{v}$

a) Calcule $\|\vec{i}\|^2$ et $\|\vec{j}\|^2$

b- Démontre que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et déduis-en la nature de la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Exercice 3 : Soient ABCD un carré, I le milieu de [AB] et J celui de [BC].

Démontre que (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.



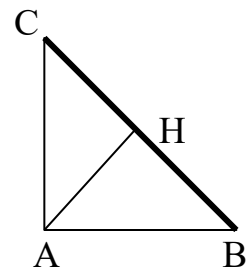
III- RRELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE.

1- Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Les énoncés suivants sont équivalents :

- (1) ABC est rectangle en A
- (2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- (3) $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
- (4) $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

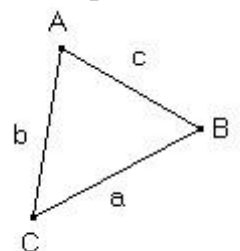


2- Théorème d'Al – Kashi : Relation métrique pour un triangle quelconque.

Propriété

ABC est un triangle quelconque. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

On a : $a^2 = b^2 + c^2$



Remarques :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

c² =

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'} \text{ (A' milieu de [BC])}$$

Exercice d'application :

ABC est un triangle tel que $BC = 4$, $AB = 3\sqrt{2}$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$. Calcule AC.

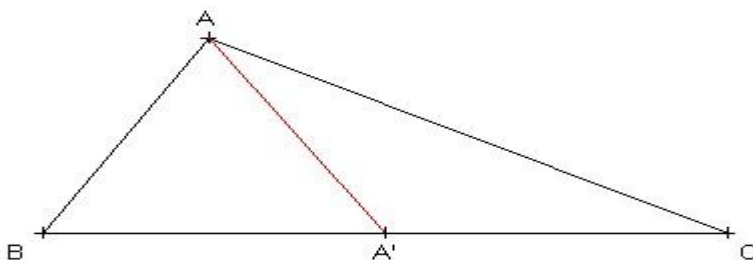
This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. A single vertical red margin line runs down the left side of the page. The paper appears to be from a notebook or a standard ruled document. There are no markings, text, or drawings on the page.

3- Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et $[AA']$ la médiane relative à $[BC]$. On a :

(1).....

(2).....



IV- FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Propriété :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

Exercice

Dans un repère orthonormé on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{t}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

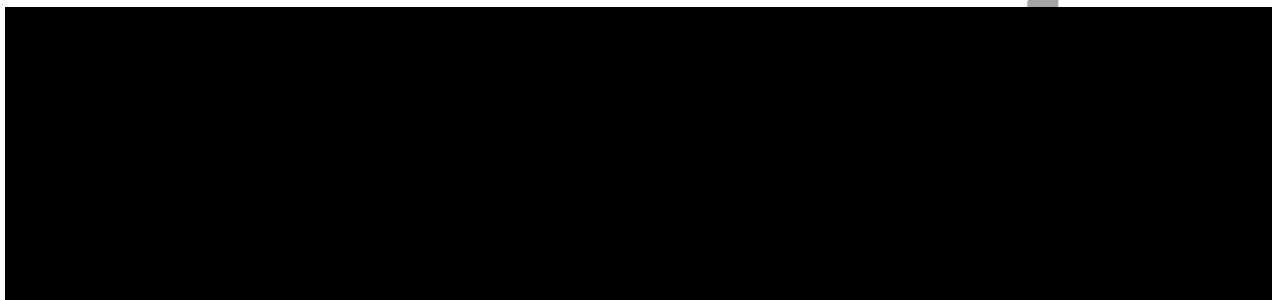
.....

CHAPITRE XII : DROITES ET CERCLES DANS LE PLAN

I- DROITES

1- Vecteur directeur

Propriété 1



Propriété 2



2- Equations cartésiennes d'une droite

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit A (3, 2) un point du plan et (D) une droite passant par A et de vecteur

directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermine une équation de la droite (D).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Donc la droite (D) a pour équation.....

Cette équation est aussi appelée une équation..... de la droite (D).

Définition

Exercice :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) direct. On donne les points A (4 ; 2), B (1 ; -3) et C (-1 ; 0).

Détermine une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à (AB) et passant par C.

TOP EN

NB : Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. $\vec{u}(-b ; a)$ est un vecteur directeur de (D). $\vec{n}(a ; b)$ est un vecteur normal à (D).

3- Equation réduite

Définition :

Toute équation de la forme.....ou.....est appelée
équation réduite.

a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété :**Exercice :**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Etudie les positions relatives des droites d'équations cartésiennes suivantes :

(1) (D) : $-3x + 6y - 5 = 0$ et (D') : $x - 2y + 4 = 0$

(2) (D) : $x + 2y + 5 = 0$ et (D') : $-x - 5y + 1 = 0$

(3) (D) : $2x - y + 1 = 0$ et (D') : $-7x - 14y + 8 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4- Représentations paramétriques d'une droite**Propriété 1 :**

Soit A et M deux points du plan et (D) une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$$M \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel au } \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$$

Propriété 2 :

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit (D) la droite passant par A ($x_A ; y_A$) et de vecteur directeur $\vec{u}$ ($a ; b$) ; M ($x ; y$) un point de (D).

La représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $E(-2 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; 1)$.

.....

.....

.....

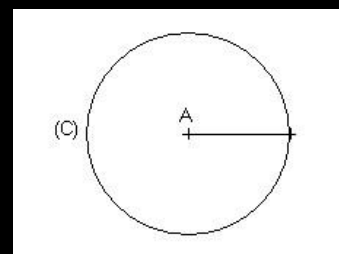
.....

.....

.....

.....

.....

II- CERCLES**1- Cercle défini par son centre et son rayon****a- Définition****Propriété :**

.....

.....

.....

Exercice :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) orthonormé. On donne (C) le cercle de centre $P(1 ; -2)$ et de rayon 3. Détermine une équation cartésienne du cercle $C(P ; 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

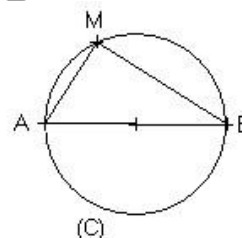
.....

2- Cercle défini par un de ses diamètres

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan et (C) le cercle de diamètre [AB].

Pour tout point M, on a : $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



Exercice

On donne A (3 ; -1) et B (4 ; 0) deux points du plan dans le repère orthonormé (O, I, J). Détermine une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3- **Ensemble des points M(x ; y) tels que : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$**

Propriété

L'ensemble des points M(x ; y) tels que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ est soit :

*

*

*

Exercice :

La plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Détermine l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant les équations suivantes :

Dans le cas d'un cercle, précise les coordonnées du centre et le rayon.

1) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

$$2) \ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$$

$$3) \ x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 5 = 0$$

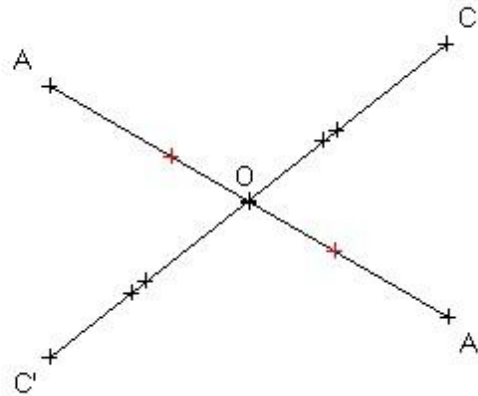
AUTODEN

CHAPITRE XIII : HOMOTHÉTIE – ROTATION

I- HOMOTHÉTIE

Activité

Sur la figure ci-contre, le point O est le milieu des segments $[AA']$ et $[CC']$



a- Complète $\overline{OA'} = \dots\dots\dots \overline{OA}$; $\overline{OC'} = \dots\dots\dots \overline{OC}$

On dit que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport....

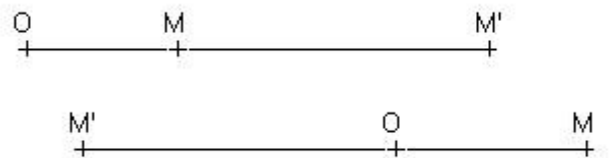
1- Définition

Soit O un point, k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application $h_{(O,k)}$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overline{OM'} = \dots\dots\dots$

Remarque :

*si $k > 0$ alors $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ ont le même sens



*si $k < 0$ alors $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ sont de sens contraire

Exercice :

1- Place un point D sur la figure de l'activité précédente. Construis l'image

D' du point D par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$

2- Traduis par des égalités vectorielles les phrases suivantes :

a-« M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 5 ».....

.....

b-« L'homothétie de centre I et de rapport -3 transforme A en B » :.....

.....

2- Conséquences de la définition

Propriété 1 :

Un point M , son image M' par une homothétie et le centre de cette homothétie sont.....

Vocabulaire :

Un point est dit **invariant** par une application f de P dans P lorsqu'il est **sa propre image**.

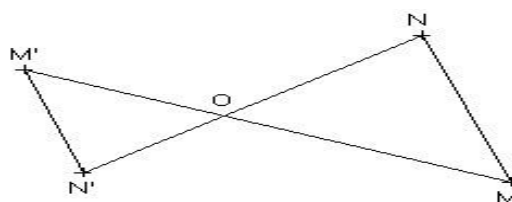
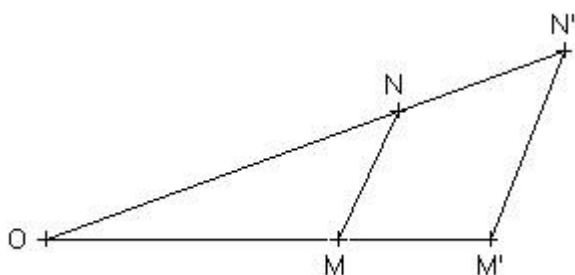
Propriété 2 :

II- PROPRIETES DE L'HOMOTHETIE

1- Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de rapport k , M' et N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N .

On a :



2- Images de figures simples

Propriété 1 :

Soit h une homothétie de rapport k .

A' , B' et I' les images respectives de A , B ($A \neq B$) et I par h .

(1). L'image de la droite (AB) est.....

(2). L'image du segment $[AB]$ est.....

(3). L'image de la demi-droite $[AB)$ est.....

(4). L'image du cercle de centre I et de rayon r est.....

Conséquence :

Toute homothétie transforme trois points alignés en.....

a- Conservation du parallélisme

Propriétés

Toute homothétie transforme :

(1) Deux droites parallèles en.....

(2) Deux droites perpendiculaires en.....

(3) Le milieu d'un segment en.....

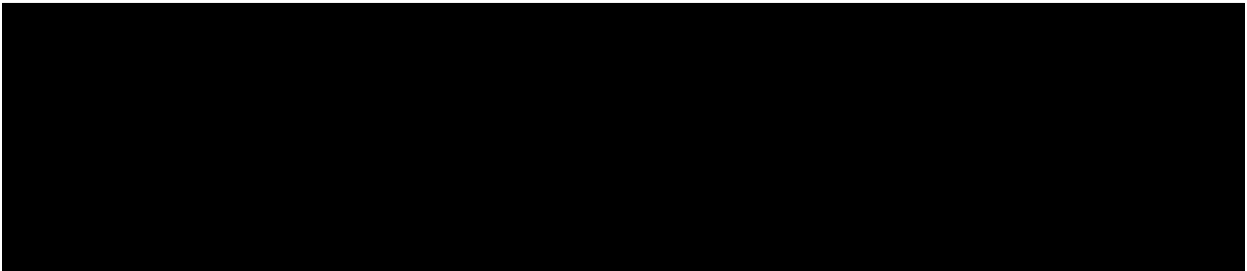
NB : Toute homothétie conserve.....

Méthode :

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaire (resp. parallèles), on peut démontrer qu'elles sont les images de deux droites perpendiculaire (resp. parallèles) par une homothétie.

c- Longueurs et aires

Propriété :

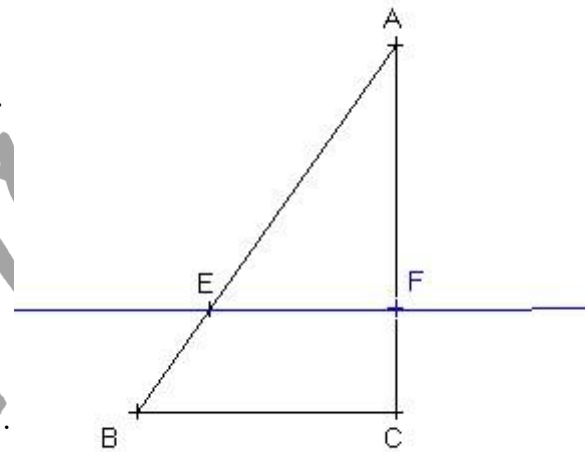


Exercice :

Soit ABC un triangle et E un point du segment $[AB]$.

La droite parallèle (CB) passant par E coupe le coté [AC] en F.

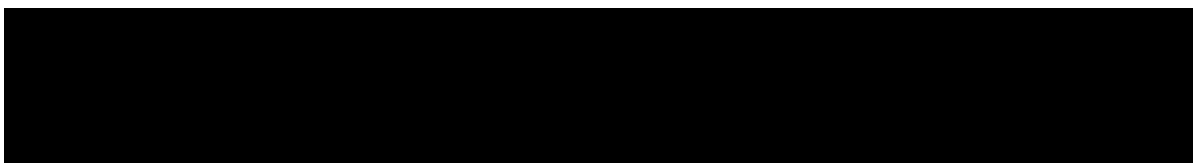
Détermine la position de E pour que l'aire du triangle AEF soit le quart de celle du triangle ABC.



III- CARACTERISATIONS D'UNE HOMOTHETIE

a- Homothétie définie par son centre, un point et son image

Propriété :



b- Homothétie définie par son rapport, un point et son image.

Propriété :

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1 deux points A et A'.

Il existe une et une seule homothétie de rapport k qui transforme A en A' .

c- Homothétie définie par deux points et leurs images

Propriété :

Soient quatre points A, B, A' et B' tels que $(AB) \parallel (A'B')$ et $\frac{A'B'}{AB} \neq \frac{A'B}{AB}$

Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B' .

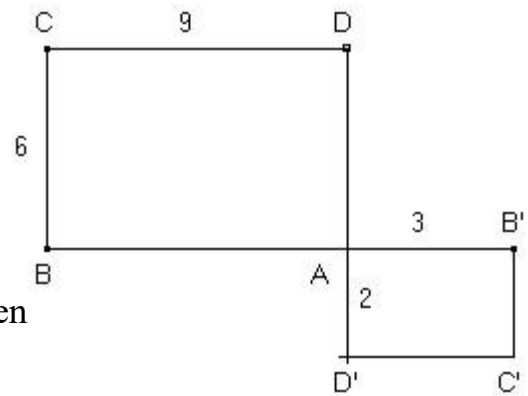
Exercice :

On donne les deux rectangles ABCD
et AB'C'D' ci-contre.

On a : $CD=9$, $CB=6$, $AB'=3$ et $AD'=2$.

Démontre qu'il existe une homothétie de centre A qui transforme le rectangle ABCD en le rectangle AB'CD'.

On donnera le rapport de cette homothétie.



IV- ROTATION

1- Définition et exemples

a- Définition

Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application $r_{(O, \alpha)}$ du plan dans lui-même qui, à tout M , associe le point M' tel que :

- Si $M = O$ alors $M' = M$
- Si $M \neq O$, alors $OM' = \dots\dots\dots$ et $\widehat{OM; OM'} = \alpha$

b- Exemples

α). Construis l'image A' du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

+
 O

+
 A

β). Construis l'image P' du point P par la rotation de centre I et de rapport $\frac{\pi}{6}$

I
+

 P
+

c- Conséquence de la définition

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est.....
.....

3- Propriété

a- Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α .

A' et B' les images par r respectivement de deux points quelconques A et B .

On a : $A'B' = AB$ et $\widehat{AB, A'B'} = \alpha$

NB :

On appelle isométrie toute transformation du plan dans lui-même qui conserve la distance. C'est-à-dire qui transforme tout segment en

.....

b- Images de figures simples

Propriété

Toute rotation transforme :

- (1) Une droite en.....
- (2) Un segment en.....
- (3) Une demi-droite en.....
- (4) Un cercle en.....

c- Conservation du milieu d'un segment, des angles orientés, du parallèle, de l'orthogonalité

Propriété

Toute rotation transforme :

- (1) Le milieu d'un segment.....
- (2) Un angle orienté en.....
- (3) Deux droites parallèles en.....
- (4) Deux droites perpendiculaires en.....

2. Construis l'image de la droite (D) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

(D)

