MATHS

Tles C et E

- Sujets d'examen
- Corrigés détaillés et commentés

Collection CAIMAN

NEI

Collection CAÏMAN

CAÏMAN MATHÉMATIQUES

Terminales Cet E

Par
Le Ministère de l'Éducation Nationale

Nouvelles Éditions Ivoiriennes
01 BP 1818 Abidjan 01

ISBN : 2-84487-161-5

AVANT-PROPOS

Ces annales de mathématiques comportent les sujets de mathématiques donnés au baccalauréat des séries C et E en Côte d'Ivoire de 1994 à 2001. Des conseillers et animateurs pédagogiques les ont corrigés avec beaucoup de soin, en y apportant de nouvelles méthodes pour en faire un ouvrage pédagogique de référence.
Ils ont ici le souci de répondre aux objectifs suivants :

1. Donner aux candidats et aussi aux enseignants des exemples de compétences exigibles à l'examen. Les enseignants notamment y trouveront des modèles de sujets de devoirs respectant les niveaux d'exigences et les formulations requises.

2. Permettre aux élèves de s'entraîner individuellement ou en groupes.

3. Aider les élèves à mieux rédiger.

Ces sujets sont conformes aux programmes en vigueur, néanmoins certaines questions ont été reformulées pour être conformes aux nouveaux axes pédagogiques. Les questions hors programmes ont été supprimées.

SOMMAIRE

EXAMENS

CORRIGÉS

ÉNONCÉS DES EXAMENS

EXAMEN 1 — Session de Remplacement 1994
Série C

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 4 cm pour unité.

1. Soit (H) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 - y^2 + x = 0$.
   a. Déterminer la nature de (H).
      Préciser ses éléments de symétrie et asymptotes éventuelles.
   b. Représenter graphiquement (H).

2. A tout point M d'affixe z différente de 0 et de -1 on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{2}{z^2 + z}$.
   a. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.
   b. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on désigne par (C_1) et (C_2) deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs 2 et 5 et sécants en I et J tels que :

$$\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{IO_1}, \overrightarrow{IO_2}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

1. Faire une figure (unité : 1 cm).
2. Soit s une similitude directe plane transformant (C_1) en (C_2).
   a. Quel est le rapport d'une telle similitude ?
   b. Si N est le centre de s, quelle est la valeur du rapport $\dfrac{NO_2}{NO_1}$?
   c. Déterminer et construire avec soin l'ensemble (Γ) des centres N des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2).
3. On considère maintenant la similitude plane directe S de centre I

transformant (C_1) en (C_2).
Faire une deuxième figure ne faisant pas apparaître (Γ).

a. Soit M_1 un point de (C_1) et M_2 son image par S.
Démontrer que les points J, M_1 et M_2 sont alignés.

b. Placer un point M_1 sur (C_1), construire alors M_2.

4. Une droite (D) passant par J recoupe (C_1) en B_1 ($B_1 \neq M_1$) et (C_2) en B_2.
   a. Pourquoi les droites (B_1M_1) et (B_2M_2) sont-elles sécantes ?
   b. On désigne par P le point d'intersection de (B_1M_1) et (B_2M_2).
   Démontrer que les points I, B_1, B_2 et P sont cocycliques.

PROBLÈME

On désigne par g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$

On se propose d'étudier g et de trouver une de ses primitives.

Partie A : Étude d'une fonction G définie par une intégrale

1. a. Démontrer que g est une fonction paire.
   b. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   c. Étudier le sens de variation de g.
   Dresser le tableau des variations de g.
   d. Tracer (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (On prendra 4 cm pour unité et e $\simeq$ 2,7).
2. On considère la fonction numérique G définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

   (On ne cherchera pas à exprimer G(x) en fonction de x..)
   a. Que représente G pour la fonction g ?
   b. Préciser $G'(x)$ et déduire le sens de variation de G.
   c. Déterminer le signe $G(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Étude d'une bijection f et de sa réciproque

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ par :

$$f(x) = \ln\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

a. Démontrer que si $x \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ alors $\tan(x+\frac{\pi}{4}) \in]0 ; +\infty[$

b. Démontrer que f est une fonction impaire.

c. Démontrer que : pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$,

$$f'(x) = \frac{1+\tan^2(x+\frac{\pi}{4})}{\tan(x+\frac{\pi}{4})}$$

Préciser le nombre dérivé de f en 0.

d. Étudier la limite à droite de f en $-\frac{\pi}{4}$, ainsi que la limite à gauche de f en $\frac{\pi}{4}$.

e. Dresser le tableau des variations de f.

f. Tracer (C), la courbe représentative de f, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O',I',J') (unité : 4 cm).

2.

a. Démontrer que f admet une bijection réciproque, que l'on notera f^{-1}, dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.

b. Préciser les limites de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition.
Préciser le nombre dérivé de f^{-1} en 0.
Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
Tracer sa courbe représentative (C'), dans le même repère que (C).

c. Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ on a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^x = \tan(y+\frac{\pi}{4}).$$

d. En déduire que $(f^{-1})' = G'$ et démontrer que $f^{-1} = G$.

EXAMEN 2

Session de Juin 1995
Série C

EXERCICE 1

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$.

1. a. Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n.
   b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geqslant 0$.

2. a. Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b. En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n dx$.
   a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.
   b. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel strictement positif.
On considère le point A de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de coordonnées $(a\,;\,a)$.

On désigne par R la rotation de centre O et l'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

On pose $F = R' \circ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ? Préciser ses éléments caractéristiques. (*On pourra considérer l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$.*)
2. Soit (D) la droite d'équation $x + y = a$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $S_{(D)} \circ F$.

X

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation.
   (*On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de D_f.*)

2. a. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty ; 0[$.
   b. Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -|x| + \dfrac{\ln|x|}{x}$

Soit (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O,I,J) (l'unité sera égale à 1 cm).

1. a. En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
3. Démontrer que les droites (Δ) d'équation $y = x$ et (Δ') d'équation $y = -x$ sont asymptotes à (C_f) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.
4. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $]0 ; +\infty[$.
   b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ') sur $]0 ; +\infty[$.
5. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty ; 0[$.
   b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty ; 0[$.
6. Tracer (Δ), (Δ') et (C_f).

Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $]-\infty ; 0[$.
Soit la fonction h définie sur $]-\infty ; 0[$ par : $h(x) = f(x) + x$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.
2. a. Démontrer que l'équation $x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) = -x$ admet une solution unique α.
   b. Démontrer que : $-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

Partie D

1. Soit t un nombre réel tel que $t \geqslant 1$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan délimitée par (Δ'), (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

2. On pose, pour tout nombre réel t tel que $t \geqslant 1$: $\mathcal{J}(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{J}(t)$.

   b. Démontrer que : $0 \leqslant \mathcal{J}(t) \leqslant 1$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{J}(t)$.

EXAMEN 3 Session de Remplacement 1995

Série E

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un nombre complexe non nul et A le point d'affixe a.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = a^3 z + a - 1$

1. Déterminer l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation. Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie.
   Représenter graphiquement l'ensemble des points A dont l'affixe a appartient à E_2.
3. Caractériser f pour $a = 1 + i$.
4. a. Soit M_0 le point d'affixe 1 et M'_0 son image par f. On considère l'ensemble (Γ) des points A d'affixe a telle que le point M'_0 appartient à l'axe $(O, \vec{u})$. Démontrer que (Γ) est la réunion d'une droite et d'une hyperbole.
   b. Sur une figure distincte de celle de la deuxième question, représenter graphiquement (Γ).

EXERCICE 2

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace. On désigne par G_1, le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, −1) et par G_2, le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).

1. a. Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que $G_1 \neq G_2$.
2. À tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que :
   $\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 tel que : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   a. Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.

b. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit l'espace.

3. Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{MM_2} = 0$.

PROBLÈME

On considère la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie A

1. a. Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que le point A de (C) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (C).
3. Tracer (C). On construira en particulier la tangente à (C) au point A.
4. a. Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}. Préciser l'ensemble de définition de f^{-1}.

   b. Donner une expression de $f^{-1}(x)$.

   c. Tracer dans le même repère que (C), la courbe (Γ) représentative de f^{-1}.
5. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait :

   $$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1}$$

   b. On pose : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t)dt$. Déduire de 5.a, que

   $$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^{\lambda}+1) + \ln(\frac{4}{27}).$$
6. a. x étant un réel de l'intervalle [0 ; 1[, établir à l'aide d'une considération géométrique que :

   $$I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t)dt = xf^{-1}(x).$$

   b. En déduire une expression de $\int_0^x f^{-1}(t)dt$.

Partie B

1. a. Étudier le sens variation de f'.

   b. En déduire que, pour tout réel x, $0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel, $\varphi(x) = f(x) - x$.
   a. Démontrer que la fonction φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique, que l'on notera α.
   c. Démontrer que : $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$.
3. On définit la suite numérique (U_n) par son premier terme U_0 et la relation de récurrence $\forall \in \mathbb{N},\ n : U_{n+1} = f(U_n)$.

   a. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que, pour tout entier naturel n : $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{3}{4}\left|U_n - \alpha\right|$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $\left|U_n - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|U_0 - \alpha\right|$

   En déduire que la suite (U_n) converge vers α.

   c. On donne $U_0 = -1$

   Justifier que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \left|U_n - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   À partir de quel rang n est-on sûr d'avoir : $\left|U_n - \alpha\right| \leqslant 10^{-3}$?

EXAMEN 4

Session de Juin 1996
Série C

EXERCICE 1

L'unité choisie est le centimètre.
Dans le plan orienté on considère deux points A et O tels que : AO = 1,5.

Soit f la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1. On pose : B = f(A) et C = f(B).
   a. Construire les points B et C.
   b. Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et que BC = 2 BA.
   En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   On désigne par D, E et F les points tels que : B=R(D), E=R(C) et F=f(D).
   a. Construire les points E, D puis F.
   b. Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques.
   En déduire que B, F, C et O sont cocycliques.
   c. Soit : $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD ;
   $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle BCF ;
   $\mathscr{C}''$ le cercle circonscrit au triangle ACE.
   Démontrer que ces trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE 2

Soit la suite réelle U de premier terme u_0 égal à 5 et définie par la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}.$$

1. a. Démontrer que pour tout entier n : $u_n > 0$.
   b. Démontrer que pour tout entier n : $u_n \neq 1$.
2. Donner dans un repère orthonormé (O,I,J) une représentation graphique de la fonction f définie sur $]-5\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité : 2 cm).

Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation $y = x$ pour placer u_o, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de U et sa limite ?

3. Soit V la suite réelle de terme général v_n tel que : $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4}$
   a. Démontrer que V est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.
   b. Démontrer que V est convergente et calculer sa limite.
   c. En déduire que la suite U converge et calculer sa limite.

•• PROBLÈME ••••

Un tableau de valeurs est donné en fin d'énoncé.
Toutes les fonctions considérés dans ce problème sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 3 cm).

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et préciser les asymptotes éventuelles à (C) parallèles aux axes.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.
   c. Tracer (C).
2. u est un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire A(u) de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = u$.
3. Calculer $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$.

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B

On considère les fonctions f_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\,e^{1-x}$.

1. a. Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation.
   c. Construire la représentation graphique (C_2) de f_2 dans le même repère que la courbe (C).
2. a. Déterminer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de f_3 et dresser son tableau de variation.
   c. Construire la représentation graphique (C_3) de f_3 dans le même repère que la courbe (C).

3. a. Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

b. Démontrer que pour tout entier non nul n : $f'_n = f_{n-1} - f_n$.

Partie C

On considère les fonctions J_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $J_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.

1. En utilisant la relation de la question B.3.b, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x.

2. Démontrer que pour tout réel x, on a : $J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$.

   En déduire que : $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

3. Dans cette question, on suppose que x est élément de $[0\,;\,1]$.
   a. Démontrer que pour tout entier non nul n : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1)$.
   b. En déduire que pour tout x élément de $[0\,;\,1]$, $J_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$.
   c. Calculer la limite de $J_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   d. Démontrer que pour tout x élément de $[0\,;\,1]$:
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

Partie D

1. On suppose n pair.
   Étudier le sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $J_n(x) = e$.
2. On suppose n impair.
   Étudier le sens variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $J_n(x) = e$.
   Préciser le signe de chaque solution.
3. Déterminer, suivant la parité de n, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
   $$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0 \quad \textit{(On ne calculera pas les solutions).}$$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$	2
e^x	0,05	0,13	0,37	2,72	4,48	7,39

EXAMEN 5 Session de Remplacement 1996
Série C

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur a. Soit I le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, −2).

1. Déterminer et construire I.
2. Calculer IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a.
3. Soit k, un nombre réel.
   a. Déterminer en fonction de k, l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$
   b. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k) ?
4. a. Démontrer que (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droites (AB).
   b. Démontrer que le symétrique D de B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC).
   c. Démontrer que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D.
   d. Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On prend 2 centimètres comme unité graphique. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, notée (E).

(E) : $z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i = 0$

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique, que l'on calculera.
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives i, $-1-2i$ et $2-i$.
   a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.
   b. Calculer les réels b et c pour que le point O soit le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, b) et (C, c)).

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). L'unité choisie est le centimètre.

PARTIE A

1. Soit (h) la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
   Quelle est la nature de (h) ?
   On note A le sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer (h).
2. On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.
   Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$.
   Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
3. Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M" d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\overline{z}$.
   a. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.
   b. Démontrer que $S = R \circ S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0;1).
   c. Déduire de ce qui précède, la nature de S.
4. a. Vérifier que : R(A) = S(A). On notera A' ce point.
   b. Démontrer que (D) coupe (h) en deux points E et F.
5. a. Démontrer que les coordonnées de M, M', M" vérifient :
   $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.
   b. En déduire que (h) a la même image par R et S. On appelle ($\mathcal{H}$) cette image.
   Donner la nature et une équation de ($\mathcal{H}$) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
6. a. Expliquer pourquoi E et F appartiennent à ($\mathcal{H}$).
   b. Construire sur la même figure la courbe (h), les points A et A', la droite (D) et la courbe ($\mathcal{H}$).

PARTIE B

1. On note ($\mathcal{h}$+) l'ensemble des points de ($\mathcal{h}$) d'ordonnées positives.

   a. Démontrer que ($\mathcal{h}$+) est la courbe représentative de la fonction

   $f : x \mapsto \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   b. Soit N un point de ($\mathcal{h}$+) d'abscisse x positive. On note U(x) l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe ($\mathcal{h}$+) et les segments [OA] et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x :

   $$U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16}\,dt - \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right)$$

   On ne cherchera pas à calculer U*(x).*

   c. Pour tout réel positif ou nul x, on pose : $G(x) = 8 \ln (x + \sqrt{x^2+16})$
   Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0 ;+\infty[$.
   Calculer U(0) et G(0).
   En déduire que pour tout réel positif ou nul x :

   $$U(x) = 8 \ln \left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right).$$

2. Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).
   On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

   a. Étudier le sens de variation de la fonction U sur $[0 ; +\infty[$.

   b. Calculer le nombre dérivé de U en O.
   Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

   c. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 8]. On construira la tangente à (C) en O.
   On prendra : $\ln 2 \simeq 0,693$; $\ln (1+\sqrt{2}) \simeq 0,881$; $\ln (2+\sqrt{5}) \simeq 1,444$; $\ln (1+\sqrt{5}) \simeq 1,174$.

PARTIE C

On appelle ($\mathcal{H}$ +) l'ensemble des points de ($\mathcal{H}$) d'ordonnées positives.
On se donne un point N' de ($\mathcal{H}$ +) d'abscisse x' telle que : $x' \geqslant 2\sqrt{2}$.

1. Démontrer que le point N_1, tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à ($\mathcal{h}$+) et que son abscisse x est positive.
2. Soit (Δ') la partie du plan limitée par ($\mathcal{H}$ +), les segments [OA'] et [ON'].
   Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

EXAMEN 6

Session de Juin 1996
Série E

EXERCICE 1

Un carré ABCD, de côté 35 cm, est divisé en 1225 (soit 35^2) petits carrés de 1 cm de côté par des segments régulièrement espacés et parallèles soit au segment [AB], soit au segment [AD].

1. On appelle "nœud" tout point d'intersection de deux segments de ce quadrillage qui n'est pas situé sur les côtés du carré ABCD.
   a. Combien y a-t-il de nœuds dans le quadrillage ?
   b. On choisit au hasard un de ces nœuds et on le note M. Soit I le projeté orthogonal de M sur (AB) et J le projeté orthogonal de M sur (AD). Déterminer la probabilité de chacun des événements :
   b-1 : le quadrilatère AIMJ est un carré,
   b-2 : le quadrilatère AIMJ a un périmètre de 24 cm.
2. n étant un entier naturel non nul, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.
   a. Démontrer que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   b. Combien y a-t-il d'entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leqslant 1225$?
3. Les petits carrés du quadrillage sont numérotés de 1 à 1225.
   a. On choisit au hasard un des petits carrés, et on note son numéro k. Quelle est la probabilité pour qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $S_n = k$?
   Un tel événement est appelé “succès”.
   b. On réalise 5 fois l'épreuve précédente.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois “succès” ?

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)z - 33 + 30i = 0$$

1. a. Vérifier que -3 est solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
   Les solutions seront notées z_0, z_1, et z_2, où $z_0 = -3$ et z_2 a sa partie réelle positive.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm). On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

   a. Placer les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   b. Démontrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle isocèle.

3. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(M_0,-1)$; $(M_1,1)$ et $(M_2,1)$.
   a. Construire géométriquement le point G. Justifier la construction.
   (*On ne demande pas de calculer les coordonnées de* G.)
   b. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que :
   $-MM_0^2+MM_1^2+MM_2^2=-GM_2^2$.
   (*On pourra vérifier que M_2 est un point de* $(\mathscr{C})$.)

PROBLÈME

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \dfrac{x^n - 1}{n} & \text{si } x > 0 \text{ (ln } x \text{ désigne le logarithme népérien de } x\text{)} \\ f_n(0) = \dfrac{1}{n} & \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité : 2 cm).

PARTIE A

1. Étudier la continuité de f_n à droite en 0.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)-\frac{1}{n}}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (on distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$).
   Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3. Étudier le sens de variation de f_n. Préciser la nature de la branche infinie.
4. Construire (C_1) et (C_2).

PARTIE B

Soit λ un réel strictement positif.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de λ l'intégrale :
   $\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, dx$.
2. En déduire la valeur, en fonction de λ, de $I(\lambda)$ tel que :
   $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f_2(x) \, dx$.

3. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
   En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan limitée par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

PARTIE C

1. On pose, pour tout x de l'intervalle $]0;1[$, $g(x) = f_2(x) - x$.
   Dresser le tableau de variation de g.
   En déduire que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.
2. a. Étudier le sens de variation de f_2', fonction dérivée de f_2 sur $]0;1]$ et dresser son tableau de variation.

   b. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a : $|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$
3. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ U_{n+1} = f_2(U_n) \end{cases}$$

   a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n \in [0 ; 1]$
   b. α étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e} |U_n - \alpha|,$$

   c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|$.
   d. En déduire que la suite (U_n) converge vers α.

EXAMEN 7 Session de Remplacement 1996
Série E

EXERCICE 1

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R et un point O' tel que OO'= 3R.

Soit r la rotation de centre O' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. On pose : $f = r \circ t$.

1. a. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
   b. Déterminer l'image de $(\mathscr{C})$ par f. Faire une figure où l'on prendra R = 3 cm.
   c. Déterminer et construire Ω, centre de la rotation f.
2. M étant un point quelconque de $(\mathscr{C})$ et M' son image par f, on appelle I le milieu du segment [MM'].
   a. Déterminer la nature du triangle ΩMM'.
   b. En déduire que I est l'image de M par une similitude directe de centre Ω, dont on précisera le rapport et l'angle.
   c. Déterminer et construire l'ensemble des points I quand M décrit le cercle $(\mathscr{C})$. Justifier votre construction.

EXERCICE 2

Deux personnes, A et B, écrivent chacune au hasard un nombre entier compris entre 1 et 50. On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B. On suppose que tous les couples (a,b) tels que $1 \leqslant a \leqslant 50$ et $1 \leqslant b \leqslant 50$ sont équiprobables.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   a. $a = b$
   b. $a+b = 20$
   c. $b \geqslant 15$
   d. $b \geqslant a$
2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'événement " $b \geqslant a$ " soit réalisé au moins deux fois ? Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

PROBLÈME

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } n = 0, f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{pour } n \geqslant 1, f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Étudier la parité des fonctions f_n.
2. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition. Étudier le sens de variation de f_0 et construire (C_0).
3. Démontrer que toutes les courbes (C_n) $(n \in \mathbb{N})$ ont deux points communs.
4. Dans cette question, on suppose que n est non nul.
   Pour tout réel x, calculer $f_n'(x)$ où f_n' est la fonction dérivée de f_n.
5. a. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2 et dresser leurs tableaux de variation.
   c. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_1) en $+\infty$ et préciser la position de (C_1) par rapport à cette asymptote. Tracer (C_1) et (C_2) dans le même repère que (C_0).

PARTIE B

Soit (I_n) la suite réelle définie par : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout entier naturel n, démontrer que : $I_n \geqslant 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $$\frac{1}{\sqrt{2}(2n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$
3. En déduire la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
4. On partage l'intervalle $[0;1]$ en cinq segments de même longueur 0,2 par les points $a_0 = 0$; $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}4$; $a_3 = 0{,}6$; $a_4 = 0{,}8$; $a_5 = 1$.
   a. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel i tel que $0 \leqslant i \leqslant 4$:
   $$0{,}2f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant 0{,}2f_0(a_i)$$
   b. Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant 5$, calculer $f_0(a_i)$ à 10^{-2} par défaut et par excès. En déduire un encadrement de I_0.

5. a À l'aide d'une intégration par parties de I_n, démontrer que, pour n de $\mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$.

b. Exprimer I_1 en fonction de I_0 et donner un encadrement de I_1.

EXAMEN 8 — Session de Juin 1997 — Série C

EXERCICE 1

On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$,.

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$,

1. a. Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel n non nul.

b. Calculer $I_2 - I_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2. a. Calculer I_1.

b. En déduire I_3.

3. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x : $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b. On pose, pour tout x élément de $[0\,;\frac{\pi}{3}]$: $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En déduire une primitive de f sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$.

c. Calculer I_0 puis I_2 et I_4.

EXERCICE 2

Dans le plan, on donne trois points alignés A, B et P.
Soit un point Q n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que : AQ = BP.
La parallèle à la droite (PQ) passant par B coupe la droite (AQ) en C.

1. Justifier l'existence d'une homothétie h transformant P en B et Q en C. Préciser son centre.

2. a. Construire B_1 et C_1 les images respectives de B et C par h.
   b. Démontrer que : $AC = BB_1$.
3. On donne un triangle RST. On veut construire deux points I et J tels que :

$$\begin{cases} (IJ)//(ST) \\ I \in (SR) \setminus \{S\,;R\} \\ J \in (RT) \text{ et } RJ = SI. \end{cases}$$

(Dans cette question, on ne demande pas de trouver toutes les solutions mais seulement d'en donner une.)

   a. Démontrer que, si le triangle RST est isocèle en R, il y a une solution évidente.
   b. Dans la suite, les segments [RS] et [RT] ne sont pas de même longueur. À l'aide des deux premières questions, donner un programme de construction d'un couple de points (I , J) solution du problème. Justifier ce programme.

PROBLÈME

traité 48

PARTIE A

Soit f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.
   a. Étudier le sens de variation de φ.
   b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.
3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f.
   b. Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$.
   c. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   d. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   On placera en particulier les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12.
   On prendra $\ln(0{,}27) \simeq -1{,}31$; $\ln(0{,}28) \simeq -1{,}27$; $\ln(2) \simeq 0{,}7$; ; $\ln(3) \simeq 1{,}1$; $\ln(5) \simeq 1{,}6$.

PARTIE B

1. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans [3, 4].

   b. Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2. Soit g la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

   a. Étudier le sens de variation de g.

   b. Démontrer que pour tout x élément de [3 ; 4], $g(x)$ est un élément de [3 ; 4].

   c. Démontrer que : $\forall x \in [3 ; 4],\ |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   On prendra. $e^{\frac{4}{3}} \simeq 3{,}8$; $e^{\frac{5}{4}} \simeq 3{,}49$.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

   a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [3 ; 4]$.

   b. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

   En déduire que $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   c. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

   d. Pour quelles valeurs de n, U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

PARTIE C

1. Soit n un entier naturel non nul.
   Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule.
   Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\alpha_n \geqslant e^n$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$.

   c. Déduire des questions 2.a. et 2.b. que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

EXAMEN 9 Session de Remplacement 1997
Série C

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $(p\,;q)\in \mathbb{Z}^2$, $11p-7q=-4$

1. a. Vérifier que $(-1;-1)$ est solution de (E).
   b. Résoudre (E).
2. a. Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :
   (F) $x \in \mathbb{Z},\ 2x \equiv 3\ [7]$
   (G) $x \in \mathbb{Z},\ 9x \equiv 4\ [11]$
   b. Déduire de 1) et de 2) les solutions du système

$$\begin{cases} 2x \equiv 3\ [7] \\ 9x \equiv 4\ [11] \end{cases},\quad x \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 2

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une boule de l'urne.
   Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.
   a. Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.
   b. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

PROBLÈME

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\ \ln(x) \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1. \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 5 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = (x-2)\ln(x)+(x-1)$.

1. Démontrer que pour tout réel x élément de $]0\,;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x} + \ln(x)$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Déduire de 2) que $g(x)$ est positif pour tout réel x élément de $]0\,;+\infty[$.

PARTIE B

1. a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b. Démontrer que f est continue à droite en 0, et continue en 1.

   c. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.

   d. On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \dfrac{3}{2}$.

   En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

   $$f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2}\ g(x).$$

   b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

   c. Démontrer que pour tout réel appartenant à $[0\,;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

   d. Dans le repère (O, I, J), tracer la demi-tangente à (C) au point O, la tangente à (C) au point B de coordonnées (1; 1) et la courbe (C).
   On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln 3 \simeq 1,1$.

PARTIE C

1. Pour tout réel α appartenant à $]0\,;\frac{1}{2}[$ on considère l'intégrale $A(\alpha)$ telle que :

$$A(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{t^2}{t-1}\ln(t)dt\,.$$

On note A la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.

Que représente géométriquement le nombre A ?

2. a. Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n, sur $]0\,;+\infty[$ par : $H_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t)-\frac{1}{n+1}\right)$

est une primitive de la fonction $t\mapsto t^n\ln(t)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. Soit α dans $]\,0\,;\frac{1}{2}\,[$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\ln(t)dt \quad\text{et}\quad I_n=\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}} I_n(\alpha).$$

Calculer $I_n(\alpha)$ et en déduire que $I_n=-\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. a. Pour tout réel t différent de 1, et pour tout entier naturel non nul n, calculer la somme : $t^2+t^3+\ldots+t^{n+1}$

(somme des n premiers termes d'une suite géométrique).

Démontrer que $\frac{t^2}{t-1}=-t^2-t^3-\ldots-t^{n+1}+\frac{t^{n+2}}{t-1}$

et que $A(\alpha)=-I_2(\alpha)-I_3(\alpha)-\ldots-I_{n+1}(\alpha)+\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)dt.$

b. En utilisant la question 2.c.de la partie B, démontrer que :

$$0\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)dt\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt\leqslant\int_0^1 t^n\,dt.$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel non nul n :

$0\leqslant A(\alpha)+I_2(\alpha)+I_3(\alpha)+\ldots+I_{n+1}(\alpha)\leqslant\frac{1}{n+1}$

et que, pour tout entier naturel non nul n :

$0\leqslant A-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}\right)\leqslant\frac{1}{n+1}$.

d. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$.

Démontrer que $A=\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$.

EXAMEN 10

Session de Juin 1998
Série C

EXERCICE 1

Dans le plan orienté on considère le carré ABCD de centre O tel que

$$\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, et I le milieu de [MN].

1. Faire une figure.
2. On considère la rotation r de centre A telle que : $r(D) = B$.
   a. Démontrer que N est l'image de M par r.
   b. En déduire la nature du triangle AMN.
3. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A telle que $s(D) = O$.
   b. Quelle est l'image de C par s ?
   c. Démontrer que I est l'image de M par s.
   d. En déduire l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite (DC).

EXERCICE 2

Soit a un réel non nul. On considère la suite U définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0,\ U_1 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul,} \quad aU_{n+1} = (a+1)U_n - U_{n-1}. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a, la suite U est-elle arithmétique ?
   Dans la suite de l'exercice, on supposera le réel a différent de 1.
2. Démontrer que la suite V définie pour tout entier naturel n par :
   $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $U_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$
   b. Pour tout entier naturel n non nul, calculer U_n en fonction de n et de a.
   c Pour quelles valeurs de a, la suite U est-elle convergente ?
   Préciser alors la limite de U en fonction de a.

4. On choisit $a = 2$.

Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - 2| < 10^{-3}$.

On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}69$ et $\ln 5 \simeq 1{,}61$.

PROBLÈME

Ce problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes.

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité mesurant 1 cm.

PARTIE A

On considère la fonction f définie, sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Démontrer que f est continue à droite en 0.
   b. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.
   En déduire une interprétation géométrique.
2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
   c. Tracer (C).
3. a. Soit g la restriction de f à $[4 ; +\infty[$.
   Démontrer que g est une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$ et que son application réciproque g^{-1} est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
   $g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$.
   b. Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1}, dans le même repère que (C).
   On appellera (H) la courbe $(C) \cup (C')$.
4. Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   a. Démontrer que pour tous réels x et y positifs, on a :
   $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$.
   En déduire que (H) = (E).
   b. Démontrer que un point M $(a ; b)$ est un point de (É) si, et seulement si, le point M'$(b ; a)$ est aussi un point de (E).
   En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

PARTIE B

1. Soit m un réel appartenant à $]-2\,;\,2[$.
   a. Soit les points A_m de coordonnées $(2+m\,;\,0)$ et B_m de coordonnées $(0\,;\,2-m)$.
   Écrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m.
   b. Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x-y-2m=0$.
   Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}(2+m)^2\,;\,\frac{1}{4}(2-m)^2\right)$.
   c. Démontrer que (D_m) est tangente à (C) en T_m.

2. a. Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y=-x$.
   Démontrer que H_m a pour coordonnées $(m\,;\,-m)$.
   b Soit F le point de coordonnées $(2\,;\,2)$.
   Démontrer que le quadrilatère $A_mH_mB_mF$ est un carré pour tout m appartenant à $]-2\,;\,2[$.

3. Pour $m=\frac{1}{2}$, placer le point T_m, tracer les droites (D_m), (Δ_m) et le carré $A_mH_mB_mF$.

PARTIE C

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   a. Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ).
   b. Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|$.

2. a. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = \left|z-(2+2i)\right|$ est la courbe (E).
   b. Interpréter géométriquement ce résultat.
   En déduire la nature de la courbe (E).
   En donner deux éléments caractéristiques.

EXAMEN 11 Session de Remplacement 1998
Série C

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que :

$$|z-1| = \frac{1}{4}\left|z - i\bar{z} - 2(i-1)\right|$$

On appelle (D) la droite d'équation $x - y + 2 = 0$.

1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

   $z' = \frac{1}{2}\left(z + i\bar{z}\right) + i - 1$.

   (On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.)

   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = M$ est la droite (D).
   b. Démontrer que pour tout point M du plan, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).
   c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à la droite (D), puis caractériser géométriquement l'application f.

2. On se propose de déterminer l'ensemble (E) défini au début de l'exercice.

   a. Démontrer que : $z - z' = \frac{1}{2}\left[z - i\bar{z} - 2(i-1)\right]$.
   b. En déduire que (E) est une ellipse de foyer F d'affixe 1, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser son axe focal (Δ).
   c. Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $\frac{1}{2}(1+i)$ et $\frac{1}{2}(5-3i)$ sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal.

3. a. Construire la droite (D), l'axe focal (Δ), les points A, A' et F.
   b. Déterminer géométriquement les autres sommets de (E).
   c. Construire (E).

EXERCICE 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel AB = $2a$ et AC = a, où a est un nombre réel strictement positif donné.

1. a. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, −1) et (C, 1).
   b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right\|.$$

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   a. Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, 1) et (C, −2).
   b. Pour tout réel k, on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2.$$

   Pour quelle valeur de k, E_k contient-il le point C ?
   c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$.

PROBLÈME

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (0,I, J). *(unité graphique : 4 cm).*

PARTIE A

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et donner le tableau de variation de f.
2. Démontrer que le point A de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.
3. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point A.
4. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$.
   a. Démontrer que :
   $\forall x \in]-\infty ; 0[, \ \varphi(x) > 0,$
   $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ \varphi(x) < 0.$

b. En déduire la position de (T) par rapport à ($\mathscr{C}$).

c. Tracer (T) et ($\mathscr{C}$).

PARTIE B

Pour tout réel non nul m, on considère les fonctions f_m dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $f_m(x) = f(\frac{x}{m})$.

($\mathscr{C}_m$) désigne la courbe représentative de f_m dans le repère (O, I, J).

Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'} = m\,\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

1. a. Donner la nature de T_{-1}.
   b. Démontrer que ($\mathscr{C}_m$) est l'image par T_m de ($\mathscr{C}$).
   c. Tracer ($\mathscr{C}_{-1}$).
2. Soit λ un réel. On pose $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\mathrm{d}x$.

Calculer $I_m(\lambda)$ et en déduire que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m.

PARTIE C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = x - f(x)$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.
   b. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.
2. a. Démontrer que : $\forall\, x \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$, $f(x) \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$.
   b. Calculer $f''(x)$. En déduire que : $\forall\, x \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   c. En déduire que : $\forall\, x \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$, $|f(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|x-\alpha|$
3. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

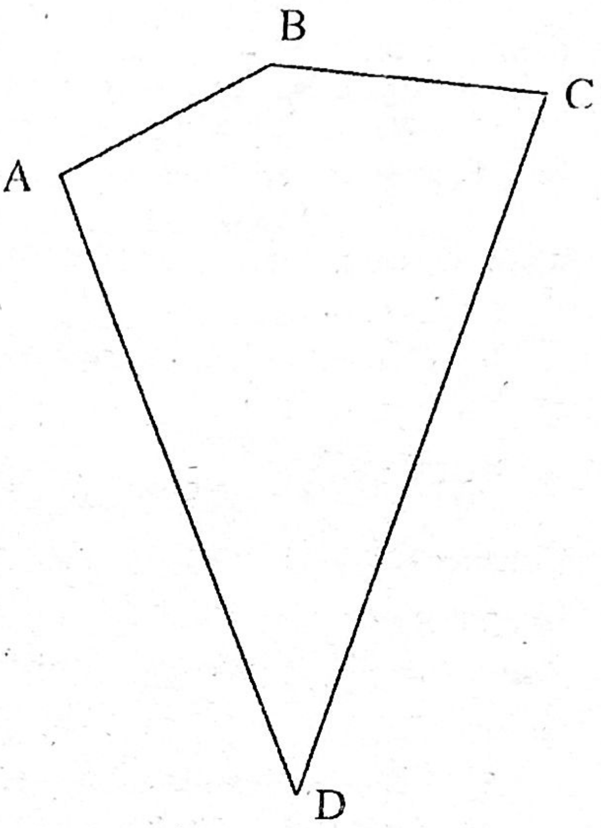
   $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   a. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$.
   b. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$
   c. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n-\alpha| \leqslant (\frac{1}{4})^{n+1}$.
4. a. Déterminer la limite de (U_n).
   b. Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p-\alpha| \leqslant 10^{-2}$.

EXAMEN 12

Session de Juin 1998
Série E

EXERCICE 1



Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère :

- le quadrilatère convexe ABCD.
(Voir figure ci-contre.)
- Extérieurement au quadrilatère, le point M_1 (respectivement M_2 ; M_3 ; M_4) tel que le triangle AM_1B(respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4).

Le but de l'exercice est de démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.

1. Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4.
   a. Exprimer z_1 en fonction de a et b.
   b. En déduire les expressions de z_2, z_3 et z_4 en fonction de a, b, c et d.
2. Démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.

EXERCICE 2

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées $(x\,,\,y)$ vérifiant l'équation :

$$(1) \qquad 25(x^2+y^2) = (3x-16)^2.$$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une ellipse de foyer O et de directrice associée la droite (Δ) d'équation $x = \dfrac{16}{3}$

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteur ($\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}$).

2. a. Déduire de l'équation (1) une relation entre OM et l'abscisse x de M.
   b. Démontrer que $OM = \dfrac{16}{5+3\cos\theta}$

3. On suppose ici que θ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M'.
   a. Démontrer que $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.
   b. Démontrer que $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité 3 cm).

PARTIE A

1. a. Calculer les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f_1 et dresser son tableau de variation.
   c. Tracer la tangente à l'origine à (C_1), puis tracer (C_1).
2. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, étudier le sens de variation de la fonction f_n.
   b. Calculer les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
   c. Sur une autre figure, tracer la tangente à l'origine à (C_3), puis tracer (C_3).
3. On note S_n la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation : $x = n$ et (C'_n) l'image de(C_n) par S_n.
   a. M étant le point du plan de coordonnées (x,y), calculer les coordonnées (x', y') de son image M' par S_n.
   b. Démontrer que (C'_n) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient : $y = f_n(2n-x)$.
   c. Tracer (C'_3) dans le même repère que (C_3).
   d. Pour $x \leqslant 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n - x)$.
   En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :
   $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n g_n(t)dt$.

4. Pour tout x élément de $]0\ ,\ n]$, on pose $h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.
   a. De l'étude des variations de h_n , déduire le signe de $h_n(x)$.
   b. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ,\ n]$, on a $f_n(x) \leqslant g_n(x)$.
   c. Déduire de ce qui précède , l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2n} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

PARTIE B

Pour tout réel positif x, on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0\ ;\ +\infty\ [$.
2. À l'aide d'une intégration par parties :
   a. Calculer $F_1(x)$.
   b. Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

3. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$F_n(x) = n![1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})].$$

4. a. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = n!$.
   b. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_n(x) \leqslant n!$.

PARTIE C

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)dt \leqslant n!$$

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leqslant F_n(n) \leqslant \frac{n!}{2}.$$

$$\frac{1}{2}e^n \leqslant 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leqslant e^n.$$

EXAMEN 13

EXERCICE 1

On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1. Calculer la probabilité d'avoir :
   a. une face blanche.
   b. une face noire.
2. On jette le dé quatre fois de suite.
   a. Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche ; une face blanche.
   b. Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.
   c. Calculer la probabilité d'avoir une face noire au 4^e lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$.
   a. Calculer $h'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
   c. Démontrer que : $\forall\, x \in [1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
   a. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer I_2.
   b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
   d. En utilisant la question 1.c., démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} - \frac{e^2}{(n+2)e^n}$.
   e. En déduire la limite de la suite (I_n).

PROBLÈME

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité :1 cm.

PARTIE A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^3-(6+i\sqrt{3})z^2+(11+4i\sqrt{3})z-6-3i\sqrt{3}=0.$

1. Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.
2. On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes respectives 3 ; $2+i\sqrt{3}$; -1 ; 7 et $11+4i\sqrt{3}$.
   a. Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.
   b. Démontrer que les points B, C et G sont alignés.
   c. Placer les points A, B, C, E et G.
3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

PARTIE B

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB.

1. On veut déterminer l' homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.
   a. Démontrer que l'image par h de [IA] est [EF].
   b. Justifier que : $h(\mathrm{I})=\mathrm{E}$, $h(\mathrm{A})=\mathrm{F}$ et $h(\mathrm{B})=\mathrm{G}$.
   c. Déterminer le centre et le rapport de h.
2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f=h\circ r$.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.
3. Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG.
   a. Démontrer que $h^{-1}\circ g$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même).
   b. Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.
   c. En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h, f et une troisième f' que l'on décomposera à l'aide de h et de r.
   d. Déterminer le rapport et l'angle de f'.

4. Soit Ω le centre de la similitude f. On appelle K le milieu du segment [IA].
   a. Déterminer l'image K' de K par f.
   b. Démontrer que Ω, A, G et F sont cocycliques.
   c. Démontrer que Ω,F, K et K' sont cocycliques.
   d. Construire Ω.
5. Déterminer l'application complexe associée à f'.
6. Calculer l'affixe du centre Ω' de f'.

EXAMEN 14 Session de Remplacement 1999
Série C

EXERCICE 1

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Justifier que : $1999 \equiv 4\ [7]$.
3. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132}.
4. Soit l'entier A_k tel que : $A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$.
   Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de A_k par 7.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère les fonctions f_n dérivables sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ et définies par : $f_n(x) = x + n\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Calculer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;+\infty[$, calculer $f_n'(x)$.
3. Étudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que l'équation, $x \in]0\ ;n[\ f_n(x) = 0$, admet une unique solution a_n.
5. Démontrer que : $\forall n \geqslant 3,\ 1 < a_n < e$.
6. Démontrer que : $\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$.
7. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
8. En déduire que la suite (a_n) converge.
9. Démontrer que : $\forall n \geqslant 3,\ \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$.
10. En déduire la limite de la suite (a_n).

PROBLÈME

Dans le plan orienté muni du repère orthonormé direct (O,I,J), on considère le carré direct OIKJ de côté 1 (L'unité étant le centimètre, on prendra : OI = 4). Soit A un point quelconque de la droite (IJ) distinct de J et soit S la similitude directe de centre O qui applique J sur A.

PARTIE A

On désigne par I', K' et A' les images respectives des points I, K et A par S.

1. Démontrer que le quadrilatère OI'K'A est un carré direct.
2. Construire les points O, I, K, J, I' et K'.
3. Démontrer que les points A, A' et I' sont alignés.
4. Démontrer que : OA' = A'K'.

PARTIE B

Soit a l'affixe du point A, α un argument de a et x la partie réelle de a.

1. Déterminer l'affixe de K.
2. Démontrer que : $ia+1 = x(1+i)$.
3. En déduire qu'il existe un argument de $ia+1$ dans la paire $\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$.
4. Démontrer que : $\widehat{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA})} = \widehat{(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ})}$
5. En déduire que $-\frac{\pi}{2}-\alpha$ est un argument du nombre complexe $a-(1+i)$.

PARTIE C

Soit M un point du plan d'affixe z et M' son image d'affixe z' par S.

1. Démontrer que : $z' = -iaz$.
2. Calculer en fonction de a les affixes respectives k' et a' des points K' et A'.
3. Soit u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{KK'}$, et $\overrightarrow{K'A'}$.
   a. Démontrer que u est un imaginaire pur et que v est un réel.
   b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.
4. Démontrer que I, K et K' sont alignés et en déduire que K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (IK).
5. En déduire une construction de A'.
6. Démontrer que, lorsque A décrit (IJ) privée de J, A' appartient à la parabole (Γ) de foyer O et de directrice (IK).

PARTIE D

On veut construire (Γ).

1. Donner l'axe focal et le sommet de (Γ).
2. Démontrer que J appartient à (Γ).
3. Construire (Γ).

EXAMEN 15

Session de Juin 1999
Série E

EXERCICE 1

On considère l'application f suivante :

$$f :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x$$

1. Démontrer que f est une bijection.
   On notera g la bijection réciproque de l'application f.
2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
3. Calculer les intégrales suivantes :
   $$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+x} dx \qquad K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$

EXERCICE 2

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches. On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$.

1. Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :
   A : Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches.
   B : Obtenir au moins une boule blanche.
   (*On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.*)
2. On suppose $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geqslant 2$.
   a. Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.
   b. Démontrer que la suite $(P_n)_{n \geqslant 2}$ est majorée par 1.
   Quel est le sens de variation de $(P_n)_{n \geqslant 2}$?
   c. Déduire de la question précédente que $(P_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

1. On désigne par M_0 l'origine O du repère et par M_1 le point tel que : $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$.
   On fixe un nombre réel $r > 0$ et un réel θ dans $\mathbb{R} - \{ k\pi \, ; k \in \mathbb{Z} \}$.
   Soit M_2 le point du plan tel que :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

   Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout entier naturel non nul n, on définit M_{n+1} à partir des points M_n et M_{n-1} par :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = r \left\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\right\| \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

   On obtient ainsi une suite M_0, M_1, ...,M_n, et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$,…, $[M_nM_{n+1}]$,… est appelée «polygone». On note v_n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = r\, e^{i\theta}\, v_{n-1}$. En déduire que la suite (V) est une suite géométrique.

   b. Déduire de la question précédente, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ.

3. Dans cette question, on suppose $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$ et placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, en prenant 8 cm pour unité graphique.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on note z_n l'affixe du point M_n.

1. Calculer z_0, z_1, z_2.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.
3. On rappelle que pour tout nombre $z \neq 1$, on a : $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

   Pour tout $n \geqslant 0$, calculer z_n en fonction de n, r et θ.
4. a. Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \dfrac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   b. On note Ω le point d'affixe ω tel que : $\omega = \dfrac{1}{1-re^{i\theta}}$.

   Interpréter géométriquement le résultat de la question a. ci-dessus.
5. Pour tout $n \geqslant 0$, on note z'_n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

   a. Calculer z'_n en fonction de n, r et θ.

   b. Établir qu'il existe un nombre complexe a non nul tel que pour tout $n \geqslant 1$, $z'_n = az'_{n-1}$.

   c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

   d. Dans cette question, on suppose $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$; calculer dans ce cas les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée.

   Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.

EXERCICE 1

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD). On désigne par I, J, O les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

1. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.
2. Les médiatrices des côtés [AD] et [BC] se coupent en G.
Démontrer que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.
3. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.
   a. Justifier que (E_2) est non vide.
   b. Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ (où k est une constante réelle).
   c. En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$.
   d. Déterminer et construire (E_2).

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :
$z_A = -3$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

1. Construire le triangle ABC.
2. Vérifier que les nombres complexes $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$ ont le même module que l'on précisera.
3. Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.
4. Déduire des questions 2. et 3. que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
5. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de S.
   b. Construire, après justification, les points E et F images de C et E par la similitude S. *(On ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F.)*

6. On pose : $A_0 = S(A)$; $A_1 = B$; $A_2 = S(B)$; $A_3 = S(C)$; $A_4 = S(E)$; $A_5 = S(F)$; $A_6 = S(A_5)$; ... ; pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $A_n = S(A_{n-1})$ et, pour tout entier naturel n : $R_n = \left| z_{A_{n+1}} - z_{A_n} \right|$.

   a. Calculer $\left| z_{A_2} - z_{A_0} \right|$ et R_2.

   b. En déduire la nature précise du triangle AA_2A_3.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_n.

   d. Démontrer que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

   e. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème le plan est muni du repère orthonormé (0,I,J) (unité : 2cm).

PARTIE A

1. On considère f la fonction numérique, de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$.
   a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
   c. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.
2. On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|e^{|1-x|}$.
   a. Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
   b. En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de g sur $]-\infty,1]$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$.
   c. Étudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto xe^{x-1}$.
   d. Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 1.
   e. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g.
   f. Tracer $(\mathscr{C}_g)$ ainsi que les demi-tangentes à $(\mathscr{C}_g)$ aux points d'abscisses 0 et 1.

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par : $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$.

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n.

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

   En donner une interprétation graphique.

3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Déterminer la dérivée f_n' de f_n.
   b. Étudier le signe de $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n.
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f_n(x) = x$.
   d. En déduire que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par deux points fixes que l'on précisera.
4. Étudier la position de $(\mathscr{C}_n)$ par rapport à $(\mathscr{C}_{n+1})$.
5. Tracer $(\mathscr{C}_2)$ dans le repère (O,I,J).
6. α étant un nombre réel, on pose : $I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f_n(x)dx$.
   a. Calculer $I_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b. Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

EXAMEN 17

Session de Juin 2000
Série E

EXERCICE 1

PARTIE A

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$I_n = \int_0^1 (1-x^n)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

On pose $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1. En utilisant une considération d'aire, justifier que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. Calculer J_1, en déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.
3. a. Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   b. En déduire que les suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.
4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de J_n en fonction de n.

1. Soit v la fonction définie sur [0 ;1] par $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et soit v' sa fonction dérivée sur l'intervalle [0 ;1[.
   a. Démontrer que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$. On admet que le résultat reste valable sur [0 ;1].
   b. À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir v, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :
   $(n+2)J_n = (n-1)\,J_{n-2}$. Vérifier que cela reste valable pour $n = 2$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \ldots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2p)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2p+3)} .$$

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\begin{cases} AB = AC \\ \text{Mes}\ \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On appelle r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose : $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.
   b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.
2. a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant la transformation réciproque de f).
   b. Déterminer l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.
3. Démontrer que (AC) est l'image de (IJ) par f.
4. Soit M un point du plan. On désigne par M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
   a. Démontrer que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$.
   b. Démontrer que M appartient à la droite (IJ) si et seulement si les points A, C, M_1 et M_2 sont alignés.
   c. On suppose que le point M n'appartient pas à la droite (IJ). Quelle est la nature du quadrilatère ACM_1M_2 ? Justifier.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) ; unité graphique 2 cm.
L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle]0; +∞ [par :

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit g la fonction dérivable sur [0 ;+∞[et définie par :
   $g(t) = 1 - t - e^{-2t}$.
   a. Étudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en +∞. (*on ne demande pas de construire la courbe représentative de g*).

b. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$.

c. Étudier le signe de $g(t)$.

d. Établir que $0{,}79 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}8$.

Sens de variation de f.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

b. Déduire de la question précédente le sens de variation de f.

Limite de f en 0.

3. a. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

b. En déduire la limite de f en 0.

Limite de f en $+\infty$.

4. a. Établir que pour tout élément t de $[0\,;\,1]$:
$0 \leqslant e^t - 1 \leqslant te$.

b. En déduire à l'aide d'une intégration, que pour tout u de $[0,1]$:

$$1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + u + \frac{e}{2}u^2.$$

c. Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geqslant 2$:
$0 \leqslant [f(x)]^2 - 2x \leqslant 2e$

d. Démontrer que pour tout $x \geqslant 2$: $f(x) \geqslant \sqrt{2x}$
En déduire la limite de f en $+\infty$.

a. Dresser le tableau de variation de f .

5. b. Tracer $(\mathscr{C})$.

EXAMEN 18

Session de Juin 2001
Série C

EXERCICE 1

On considère la suite (J_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$J_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt.$

1. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n :
   a. J_n est positif si n est pair.
   b. J_n est négatif si n est impair.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = 2\int_{0}^{1} (t^2-1)^n \, dt.$
3. Calculer J_0, J_1 et J_2.
4. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$.
5. Retrouver J_1 et J_2 connaissant J_0.
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}$.

EXERCICE 2

Le quadrilatère OHKL est un rectangle de sens direct tel que : OH = 2 LO. La médiatrice de [OK] coupe (OH) en E et (OL) en F. Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre E passant par O recoupe (OH) en A. Le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre F passant par O recoupe (OL) en O'. S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1. Démontrer que l'angle de S mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. Démontrer que : $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}') = \{O; K\}$.
3. Déterminer le centre de la similitude S.
4. Démontrer que : S(H) = L et en déduire le rapport de S.
5. Déterminer l'image du point E par S.
6. Soit M un point de (OH) distinct des points O et A. On admet que le cercle passant par O, K et M recoupe (OL) en M'. Démontrer que : S(M) = M'.

PROBLÈME

PARTIE A

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0\ ;+\infty[$ *et ln désigne la fonction logarithme népérien.*

On considère la fonction h définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $h(x) = 1+\frac{1}{x^2}-2\ln x$.

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0.
2. On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall\ x\in]0\ ;+\infty[$, $h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1\ ;+\infty[$.
4. En déduire le signe de h.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^2(1-\ln x)+1+\ln x$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.
2. On note g' la dérivée de g ; démontrer que : $\forall\ x\in]0\ ;+\infty[$, $g'(x) = xh(x)$.
3. Démontrer que $g(x_0) > 0$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) - 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0\ ;1[$.
5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0\ ;+\infty[$.
   a. Déterminer le signe de g.
   b. Démontrer que $x_1 \in]0{,}3\ ;0{,}4[$ et $x_2 \in]3{,}3\ ;3{,}4[$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$f(0) = 0$ et $\forall\ x\in]0\ ;+\infty[$, $\quad f(x) = \frac{x\ln x}{1+x^2}$.

1. Démonter que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la dérivée de f ; démontrer que : $\forall\ x\in]0\ ;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Démontrer que si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$ alors : $\ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$.
6. En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$.
7. Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f.
8. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I,J). (*On prendra pour unités*: 3 *cm en abscisse*, 8 *cm en ordonnées*, $x_1 \approx 0{,}35$ *et* $x_2 \approx 3{,}35$.)

PARTIE D

1. On considère la fonction F définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

Calcul de la limite de F en $+\infty$.

a. Démontrer que $\forall\ t \in]1\ ;+\infty[$, $\frac{1}{2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

b. Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$.

2. c. En déduire les limites de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Calcul de la limite de F en 0.

Pour tout nombre réel α élément de $]0\ ;1[$, on pose : $\phi(\alpha) = \int_1^\alpha t\ln t\,dt$.

a. Exprimer $\phi(\alpha)$ en fonction α.

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \phi(\alpha)$.

3. c. En déduire un encadrement de $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} F(x)$.

4. Déterminer la fonction dérivée F' de F.

5. Dresser le tableau de variation de F.

Donner l'allure de la courbe représentative de F dans le même repère (O,I,J) de la partie C.

EXAMEN 19

Session de Juin 2001
Série E

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$.

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
   b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$; $3i$; $-2 + 3i$.
   Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, –2 et 1.
   a. Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
   b. Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   c. En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose : $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$, $r = r_2 \circ r_1$.

1. a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).
   Déterminer $r(D)$.
   b. Démontrer que r est la symétrie centrale de centre Ω milieu de [BD].

2. a. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω.

(*On pourra considérer l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}})$.)

b. Prouver que (Γ) admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à (Γ). Construire le cercle (Γ).

PROBLÈME

Partie A

On propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions numériques f d'une variable réelle, définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \ (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

1. Soit f un élément de $\mathcal{J}$ et soit g la fonction dérivable sur $]-1; +\infty[$ et définie par : $g(x) = (1+x)f(x)$.
   a. Démontrer que g est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad h(x) = 1 + \ln(x+1)$.
   b. Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1, définie par :
   $$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x} \text{ est élément de } \mathcal{J}.$$
2. a. Déterminer les réels a et b tels que :
   $$\forall x \in]-1;+\infty[, \ \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$
   b. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de h sur $]-1;+\infty[$.

3. En déduire l'ensemble $\mathcal{J}$

Partie B

1. On considère l'ensemble des fonctions f_k dérivables sur $]-1;+\infty[$ et définies sur cet intervalle par :
   $$f_k(x) = \ln(x+1) + \frac{k}{x+1}, \ k \text{ étant un paramètre réel.}$$
   a. Calculer suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$ et à droite en -1.
   b. Étudier suivant les valeurs de k, le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation.

c. Tracer avec soin, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques respectives (C_{-1}), (C_0) et (C_1) des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

2. Pour tout réel t et pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose :
$Q_{n-2}(t) = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2}t^{n-2}$

a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}$, $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2}t^{n-2}+(-1)^{n-1}\left(\dfrac{t^{n-1}}{1+t}\right)$, $t \neq -1$.

c. À l'aide d'une intégration sur $[0\,;x]$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, démontrer que :
$\left(f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt\right)$ avec

$$P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

3. On considère la fonction φ définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f_0(x)}{x} \text{ si } x \in]0\,;1] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,dt$.

b. En déduire que : $\forall x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n}$.

c. Utilisant 2. c., démontrer que : $\forall x \in]0\,;1]$, $\dfrac{-1}{nx} \leqslant \varphi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{nx}$.

d. Par intégration sur $[\frac{1}{n}\,;1]$, démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

avec $S_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \ldots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$ $\quad n \geqslant 2$.

Partie C

1. Soit $g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in]-1;+\infty[$,

$f_0'(x) = g_n(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x}$.

2.

a. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$.

b. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

3. On considère la suite (U_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n = \sum_{i=0}^{2n} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots - \dfrac{1}{2n}$.

a. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_0(1) = U_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$.

b. En déduire la limite de la suite (U_n).

c. Tracer avec soin, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques respectives (C_{-1}), (C_0) et (C_1) des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

2. Pour tout réel t et pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose :
$Q_{n-2}(t) = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2}t^{n-2}$

a. Démontrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R}-\{1\}$, $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2}t^{n-2}+(-1)^{n-1}\left(\dfrac{t^{n-1}}{1+t}\right)$, $t \neq -1$.

c. À l'aide d'une intégration sur $[0\,;x]$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, démontrer que :
$\left(f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt\right)$ avec

$P_{n-1}(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}$.

3. On considère la fonction φ définie sur $[0;1]$ par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f_0(x)}{x} \text{ si } x \in\,]0\,;1] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall\, x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,dt$.

b. En déduire que : $\forall\, x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n}$.

c. Utilisant 2. c., démontrer que : $\forall\, x \in\,]0\,;1]$, $\dfrac{-1}{nx} \leqslant \varphi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{nx}$.

d. Par intégration sur $[\frac{1}{n}\,;1]$, démontrer que :
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

avec $S_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \ldots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$ $\quad n \geqslant 2$.

Partie C

1. Soit $g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1}$

   Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in\,]-1;+\infty[$,

   $f_0'(x) = g_n(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x}$.

2.
   a. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$.

   b. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

3. On considère la suite (U_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

   $U_n = \sum_{i=0}^{2n} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots - \dfrac{1}{2n}$.

   a. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_0(1) = U_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$.

   b. En déduire la limite de la suite (U_n).

CORRIGÉS DES EXAMENS

EXERCICE 1

1. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
$M \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1.$$

Soit Ω le point de coordonnées $(-\frac{1}{2},0)$ et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

$M \in (H) \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{Y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \ (X = x + \frac{1}{2}, Y = y)$;

(H) est une hyperbole équilatère de centre Ω.

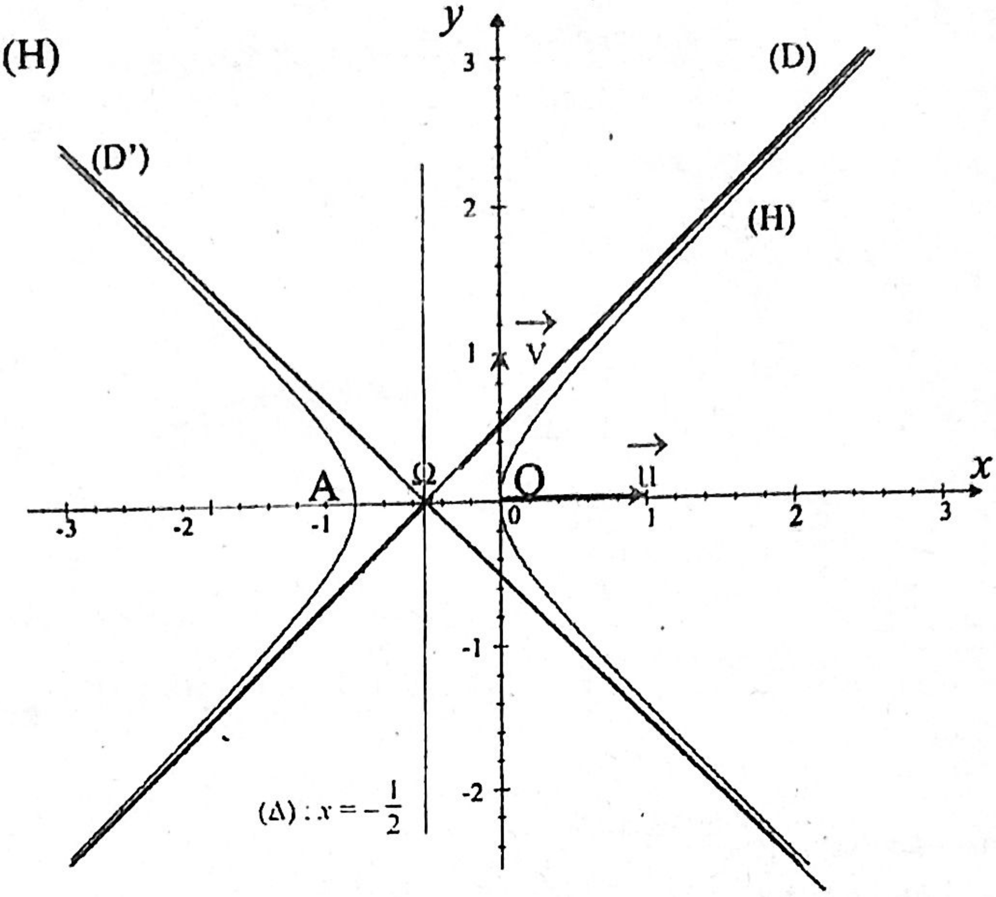
Éléments de symétrie dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

- $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ est le centre de symétrie,
- la droite d'équation $y = 0$ (l'axe focal) est un axe de symétrie,
- la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie.

Asymptotes dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

- $(D) : y = x + \frac{1}{2}$
- $(D') : y = -x - \frac{1}{2}$

b. Tracé de (H)



2. a. z' est réel $\Leftrightarrow \overline{z'} = z'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{z^2+z} = \dfrac{2}{\overline{z}^2+\overline{z}} \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+z = \overline{z}^2 + z \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z^2 - \overline{z}^2) + (z - \overline{z}) = 0 \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z - \overline{z})(\overline{z} + z + 1) = 0 \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = z \text{ ou } R_e(z) = -\dfrac{1}{2} \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

Soit (Ox) l'axe des abscisses et (Δ) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, A le point de coordonnées $(-1,0)$.
L'ensemble des points M tels que z' est réel est
$((Ox)-\{O,A\}) \cup (\Delta)$.

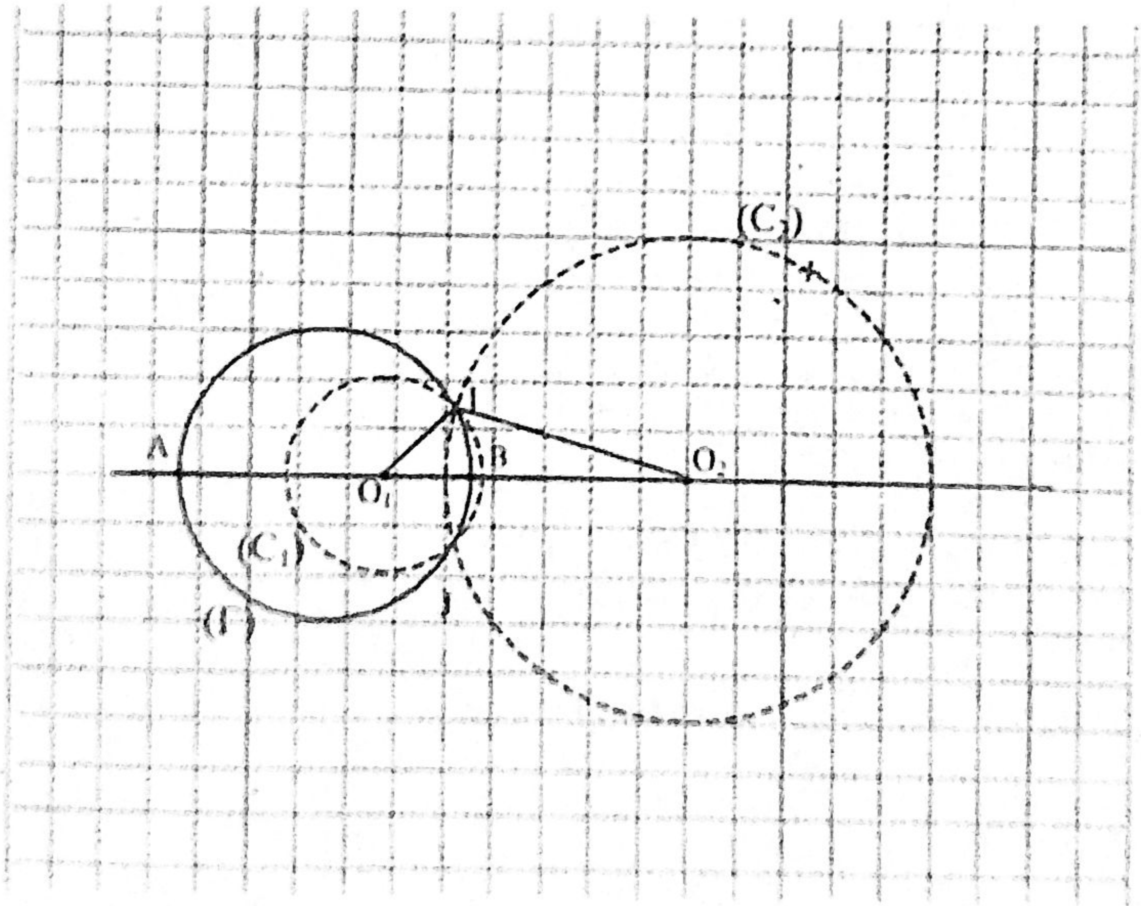
b. z' imaginaire pur $\Leftrightarrow z' = -\overline{z'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{z^2+z} = -\dfrac{2}{\overline{z}^2+\overline{z}} & ① \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

Posons $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,
$(x, y) \neq (0,0)$ et $(x, y) \neq (-1,0)$, la relation ① est équivalente à
$2x^2 - 2y^2 + 2x = 0$ soit $x^2 - y^2 + x = 0$.
Donc l'ensemble cherché est l'hyperbole (H) privée de ses sommets A et O.
Construction : voir figure.

EXERCICE 2

1. Figure 1



2. a. s a pour rapport $\frac{5}{2}$. En effet si α désigne le rapport de s, r_1 le rayon de (C_1) et r_2 celui de (C_2), alors $s(C_1) = (C_2)$. Ce qui entraîne $\alpha r_1 = r_2$.

Par suite $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$.

Comme $r_1 = 2$ et $r_2 = 5$, on a $\alpha = \frac{5}{2}$.

b. $s(N) = N$ et $s(O_1) = O_2$ alors $\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{5}{2}$.

c. $\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow NO_2^2 - \frac{25}{4}NO_1^2 = 0.$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{NO_2} - \frac{5}{2}\overrightarrow{NO_1}).(\overrightarrow{NO_2} + \frac{5}{2}\overrightarrow{NO_1}) = 0.$

Soit A le barycentre des points pondérés $(O_2, 1)$ et $(O_1, \frac{-5}{2})$ et B celui des points pondérés $(O_2, 1)$ et $(O_1, \frac{5}{2})$, l'ensemble (Γ) est le cercle de diamètre [AB].

3. On a la correspondance suivante :

$$I \xrightarrow{S} I$$

I	I
O_1	O_2
M_1	M_2

On a : $2\,(\widehat{\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JI}}) = (\widehat{\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}})$ (1)

$2\,(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}})$ (2)

d'après le théorème des angles inscrits.

En ajoutant les relations (1) et (2) et en appliquant l'égalité de Chasles, on a :

$2\,(\widehat{\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}}) + (\widehat{\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}}).$

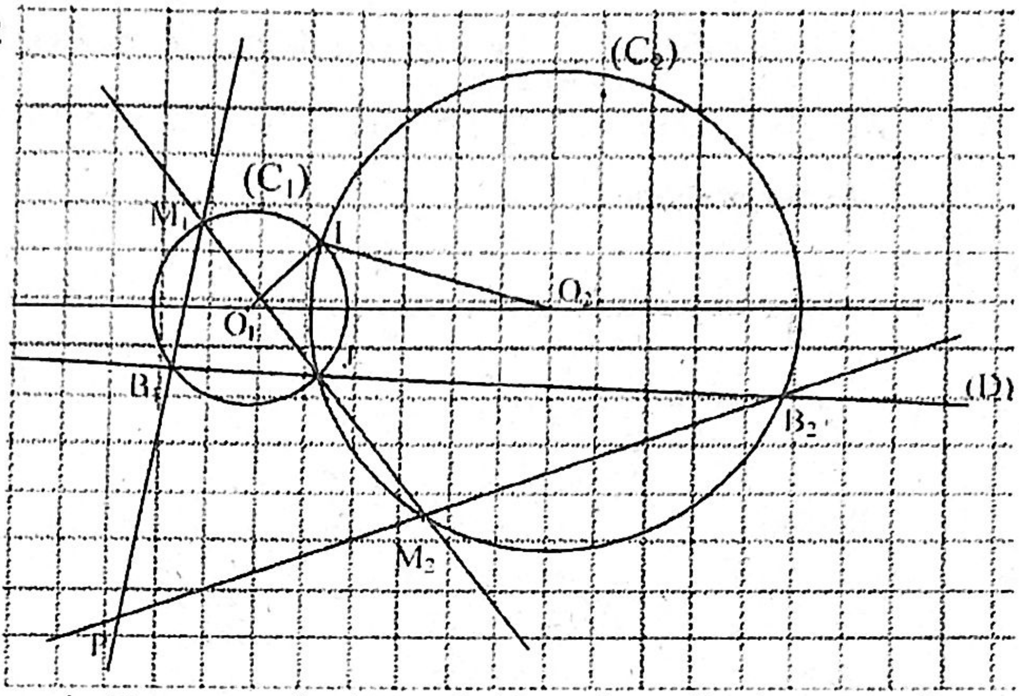
Comme la similitude directe conserve les angles orientés,

$2\,(\widehat{\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}}) + (\widehat{\overrightarrow{O_1I}, \overrightarrow{O_1M_1}}).$

On obtient : $2\,(\widehat{\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}}) = (\widehat{0}).$

Par suite, J, M_1, et M_2 sont alignés.

b. Figure 2



4. a. L'image du point B_1 est un point du cercle (C_2) qui est aligné avec J et B_1. C'est donc B_2. De plus $S(M_1) = M_2$ donc la droite (B_2M_2) est l'image de la droite (B_1M_1) par S.
Comme S est une similitude directe dont l'angle n'est ni plat, ni nul, les deux droites (B_1M_1) et (B_2M_2) sont sécantes.

b. P, B_1, M_1 sont alignés et P, B_2, M_2 sont alignés alors

$$2(\widehat{\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{PB_2}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{M_1B_1}, \overrightarrow{M_2B_2}})$$

Puisque S transforme le segment $[M_1B_1]$ en $[M_2B_2]$ et le segment $[IB_1]$ en $[IB_2]$, on a : $2(\widehat{\overrightarrow{M_1B_1}, \overrightarrow{M_2B_2}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{IB_1}, \overrightarrow{IB_2}})$. On en déduit que $2(\widehat{\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{PB_2}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{IB_1}, \overrightarrow{IB_2}})$.
Par conséquent P, B_1, B_2 et I sont cocycliques.

PROBLÈME

PARTIE A

1. a. $D_g = \mathbb{R}$; donc $\forall\, t \in D_g$, $-t \in D_g$.

$$g(-t) = \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} = \frac{e^{t}}{e^{2t}(1+e^{-2t})} = \frac{e^{t}}{1+e^{2t}} = g(t)$$

g est donc une fonction paire.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-t}+e^{t}} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \end{cases}$

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0 \\ \lim\limits_{t \to -\infty} (1+e^{2t}) = 1 \end{cases}$$

Autre méthode : $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} g(-t) = \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ car g est paire.

c. $$g'(t) = \frac{e^t(1+e^{2t}) - 2e^{2t}(e^t)}{(1+e^{2t})^2} = \frac{e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$$

$$g'(t) = \frac{e^t(1+e^t)(1-e^t)}{(1+e^{2t})^2}$$

le signe de g' (t) dépend du signe de $1-e^t$:

$1-e^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leqslant 0$

$1-e^t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > e^t \quad \Leftrightarrow \quad t < 0$

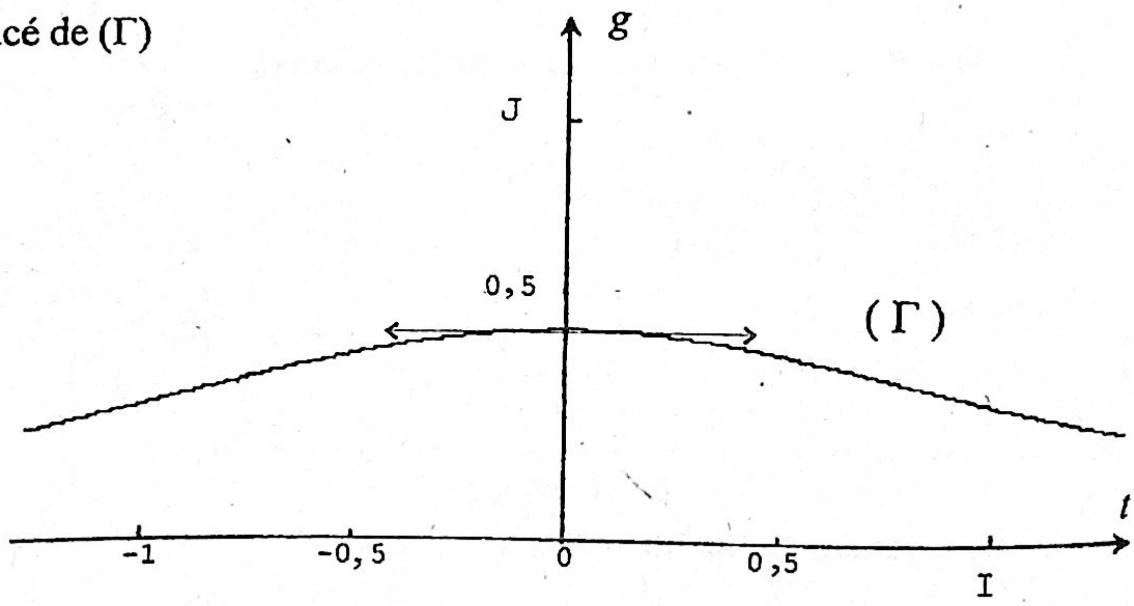
$1-e^t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < e^t \quad \Leftrightarrow \quad t > 0$

g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Tableau de variation de g

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

d. Tracé de (Γ)



2. $G(x) = \int_0^x g(t)dt$

a. G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = g(x)$. Comme $g(x) > 0$, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $G(0) = 0$ et G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

d'où : $\forall x \in]-\infty, 0[\quad G(x) < 0$

$\forall x \in]0, +\infty[\quad G(x) > 0$

PARTIE B

1. a. $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan(x + \frac{\pi}{4}) > 0$$

b. f est bien définie sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ d'après 1.a.

Si $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, $-x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

et $f(-x) = \ln(\tan(-x + \frac{\pi}{4})) = \ln\left[\tan(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4}))\right] = \ln\left[\text{cotan}(x + \frac{\pi}{4})\right]$

$$= -\ln\left[\tan(x + \frac{\pi}{4})\right] = -f(x).$$

Donc f est une fonction impaire.

c. $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

$u'(x) = 1 + \tan^2(x + \frac{\pi}{4})$ d'où le résultat : $f'(x) = \dfrac{1 + \tan^2(x + \frac{\pi}{4})}{\tan(x + \frac{\pi}{4})}$

Par suite $f'(0) = \dfrac{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}} = 2.$

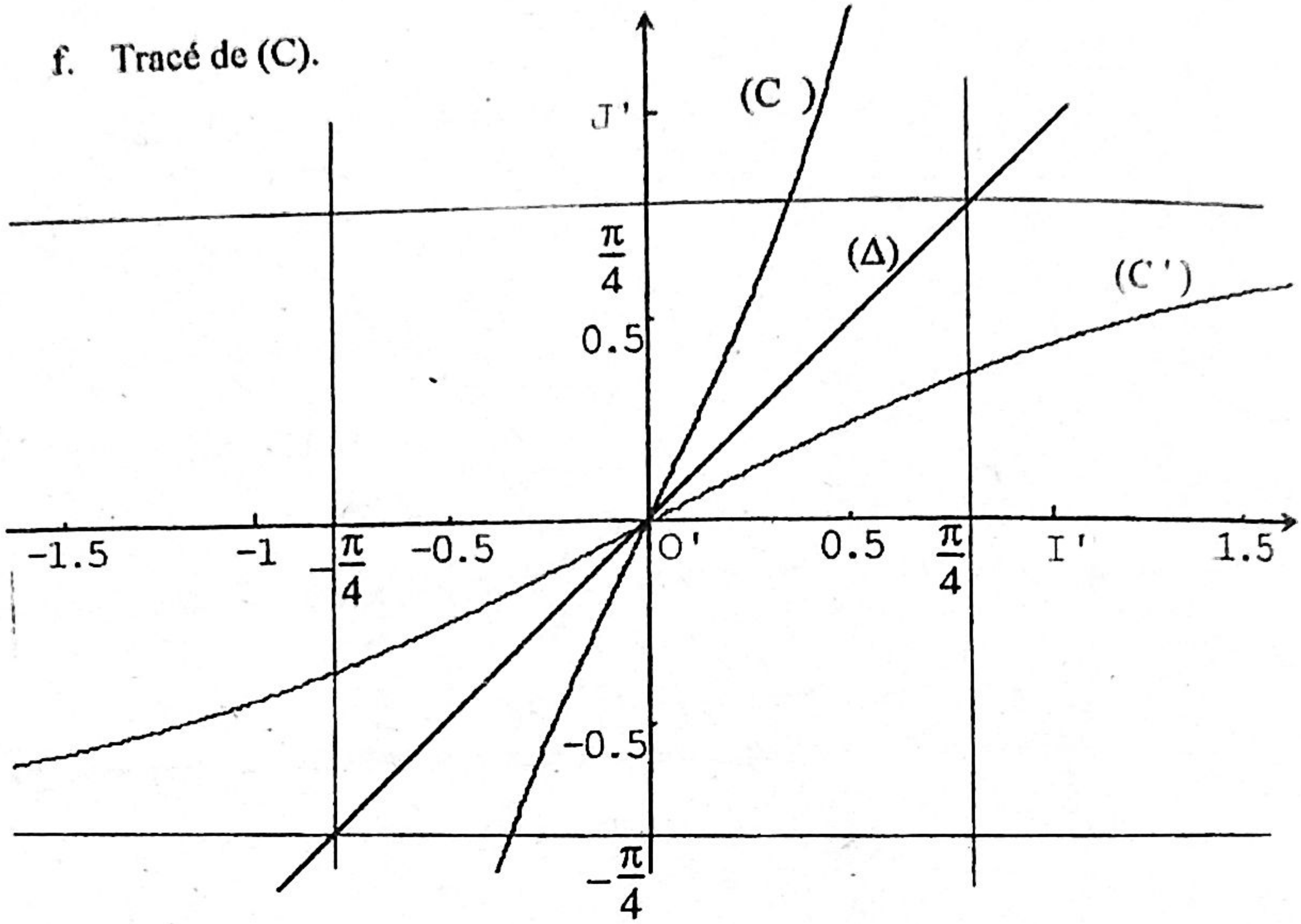
d. $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ >}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ >}} \tan(x + \frac{\pi}{4}) = 0.$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ <}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ <}} \tan(x + \frac{\pi}{4}) = +\infty.$

e. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[$.

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

f. Tracé de (C).



2. a. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}[$ et

$f(\,]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}[\,)=\mathbb{R}$

Donc f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}[$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent f admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}[$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=-\frac{\pi}{4}$

$f(0)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=0$. Comme $f'(0)\neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en 0 et on a : $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$.

Tableau de variation de f^{-1}

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$
$(f^{-1})(x)$	$-\frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{4}$

Tracé de (C') : voir figure. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé (O, I, J).

c. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow \quad x = \ln \tan(y + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = \tan(y + \frac{\pi}{4}).$$

d. $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1 + \tan(y + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan^2(y + \frac{\pi}{4})} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = g(x) = G'(x).$$

D'où f^{-1} est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
Comme $f^{-1}(0) = 0$ alors f^{-1} est la primitive de g qui s'annule pour $x = 0$.
Par conséquent $f^{-1} = G$.

EXERCICE 1

1. a. $1+x+x^2$ a un discriminant strictement négatif , alors pour tout réel x, $1+x+x^2 \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. Par conséquent U_n est bien défini pour tout entier naturel non nul n.

b. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1+x+x^2 > 0$.

Par conséquent : $\forall\, x \in [0\ ;\ 1],\quad \dfrac{x^n}{1+x+x^2} \geqslant 0.$

Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx \geqslant 0$. On a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad U_n \geqslant 0.$

2. a. $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,dx.$

$\forall\, x \in [0\ ;\ 1],\quad \dfrac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leqslant 0$, donc $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

Par conséquent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

b. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

3. a. $V_n = \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0.$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite qui converge vers 0.

b. $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Rightarrow 1+x+x^2 \geqslant 1,$

$\Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x+x^2} \leqslant 1,$

$\Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x+x^2} \leqslant x^n,\ n\in\mathbb{N}^*,$

$\Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n dx.$

$\Rightarrow 0 \leqslant U_n \leqslant V_n.$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

EXERCICE 2

1. Comme une symétrie centrale est une rotation d'angle π alors F est la composée de 3 rotations.

   La somme des angles est égale à $\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi$; d'où F est une symétrie centrale.

   Pour caractériser F, il suffit de trouver son centre, que l'on peut noter Ω.

   Soit $C = R^{-1}(B)$. On a $R(C) = B$; donc OCB est un triangle isocèle rectangle en O de sens direct.
   $F(C) = R' o S o R(C) = R' o S(B) = R'(B)$.
   Notons $E = R'(B)$. Le triangle ABE est isocèle rectangle en A de sens indirect.
   D'après les coordonnées de A et de B, OAB est un triangle isocèle rectangle en A de sens direct ; d'où E est le symétrique de O par rapport à A. Le milieu de [E C] est donc Ω.
2. Déterminons les coordonnées des points E, C et Ω. Utilisons les affixes de ces points.
   $R(C) = B \Rightarrow z_B = iz_C \Rightarrow z_C = -iz_B = -i(a + ai) = a - ai$;
   d'où C a pour coordonnées $(a, -a)$.

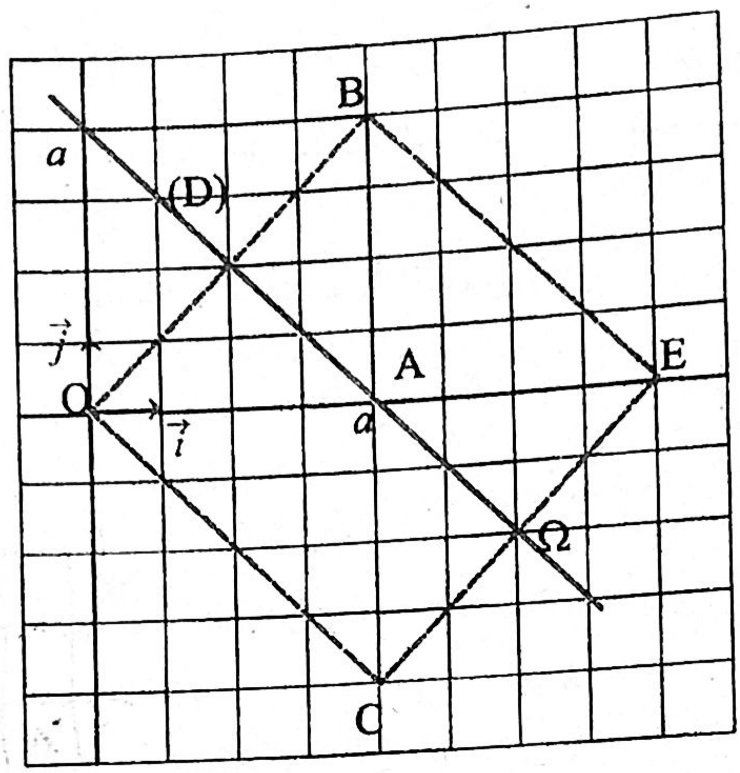
   $R'(B) = E \Rightarrow z_E - z_A = -i(z_B - z_A) \Rightarrow z_E = -i(z_B + iz_A - z_A)$.
   $z_E = 2a$. D'où E a pour coordonnées $(2a ; 0)$

   Ω est le milieu de [C E] d'où $z_\Omega = \left(\frac{z_E + z_C}{2}\right)$

   Ω a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}a, \frac{-a}{2}\right)$.
   (D) est la droite d'équation $y = -x + a$.

   Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $(a ; a)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1, -1)$ est un vecteur directeur de (D).

   $\overrightarrow{CE} \cdot \vec{u} = 0$; d'où les droites (CE) et (D) sont perpendiculaires.
   En remplaçant les coordonnées de Ω dans l'équation de la droite (D) on obtient que Ω appartient à (D).
   (CE) et (D) sont deux droites perpendiculaires en Ω. Alors on peut écrire :
   $S_\Omega = S_{(D)} o S_{(CE)}$; d'où $S_{(D)} o F = S_{(D)} o S_\Omega = S_{(D)} o S_{(D)} o S_{(CE)} = S_{(CE)}$.
   $S_{(D)} o F$ est la symétrie orthogonale d'axe (CE).



PROBLÈME

PARTIE A

1. $\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[,\qquad g(x) = x^2 + 1 - \ln(-x).$

   $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty\,[,\qquad g(x) = -x^2 + 1 - \ln(x).$

   g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   Pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2x - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{(2x^2+1)}{x}$

   $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty\,[$.

   Pour tout $x < 0$, $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x} = \dfrac{2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})}{x}$.

   $\left.\begin{array}{r} x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ x < 0 \end{array}\right\}$ $g'(x)$ est du signe de $x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Si $x \in]-\infty\,; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}[$, $g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}[$

   Si $x \in]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; 0[$, $g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; 0[$.

D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{3+\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	

2. a. Sur $]-\infty\,;0[$, g admet un minimum strictement positif qui vaut $\dfrac{3+\ln 2}{2}$.

   Donc si $x < 0$, $g(x) > 0$.

   b. $g(1) = 0$; comme g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ alors :
   si $0 < x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ donc $g(x) > 0$,
   si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.

   Voici le signe de g résumé dans un tableau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Partie B

1. a. Pour tout $x \in\,]-\infty\,;0[$, $f(x) = x + \dfrac{\ln(-x)}{x}$.

   f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et on a $f'(x) = \dfrac{1-\ln(-x)}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2+1-\ln(-x)}{x^2}$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   Pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f(x) = -x + \dfrac{\ln x}{x}$.

   f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a $f'(x) = -1 + \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{-x^2+1-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On peut donc écrire :

   $\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[\, \cup\,]0\,;1[$, $f'(x) > 0$:
   f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;1[$.
   $\forall\, x \in\,]1\,,+\infty[$, $f'(x) < 0$; f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

b. Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - \frac{\ln(-x)}{-x}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-x + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = -\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(x + \frac{\ln(-x)}{x}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \ln(-x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty. \end{cases}$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

2. Sur $]0\,;+\infty[$, f admet un maximum négatif, alors $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f(x) < 0$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;

d'où la droite (Δ') d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0$;

d'où la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique en $-\infty$.

4. a. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,

$$f(x) = -x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Donc (C_f) et (Δ') se coupent au point de coordonnées $(1,-1)$.

b. $\forall x \in]\,0\,;+\infty\,[\,, f(x)-(-x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

$\dfrac{\ln x}{x}<0 \Leftrightarrow 0<x<1$. $\forall x \in]0;1[$, $f(x)-(-x)<0$; donc (C_f) est en dessous de (Δ').

$\dfrac{\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow x>1$. $\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x)-(-x)>0$; donc (C_f) est au-dessus de (Δ').

5. a. $\forall x \in]-\infty\,;0[\quad \dfrac{\ln(-x)}{x}=0 \quad\Leftrightarrow -x=1$

$\Leftrightarrow \quad x=-1$

(C_f) et (Δ) se coupent au point de coordonnées $(-1,-1)$.

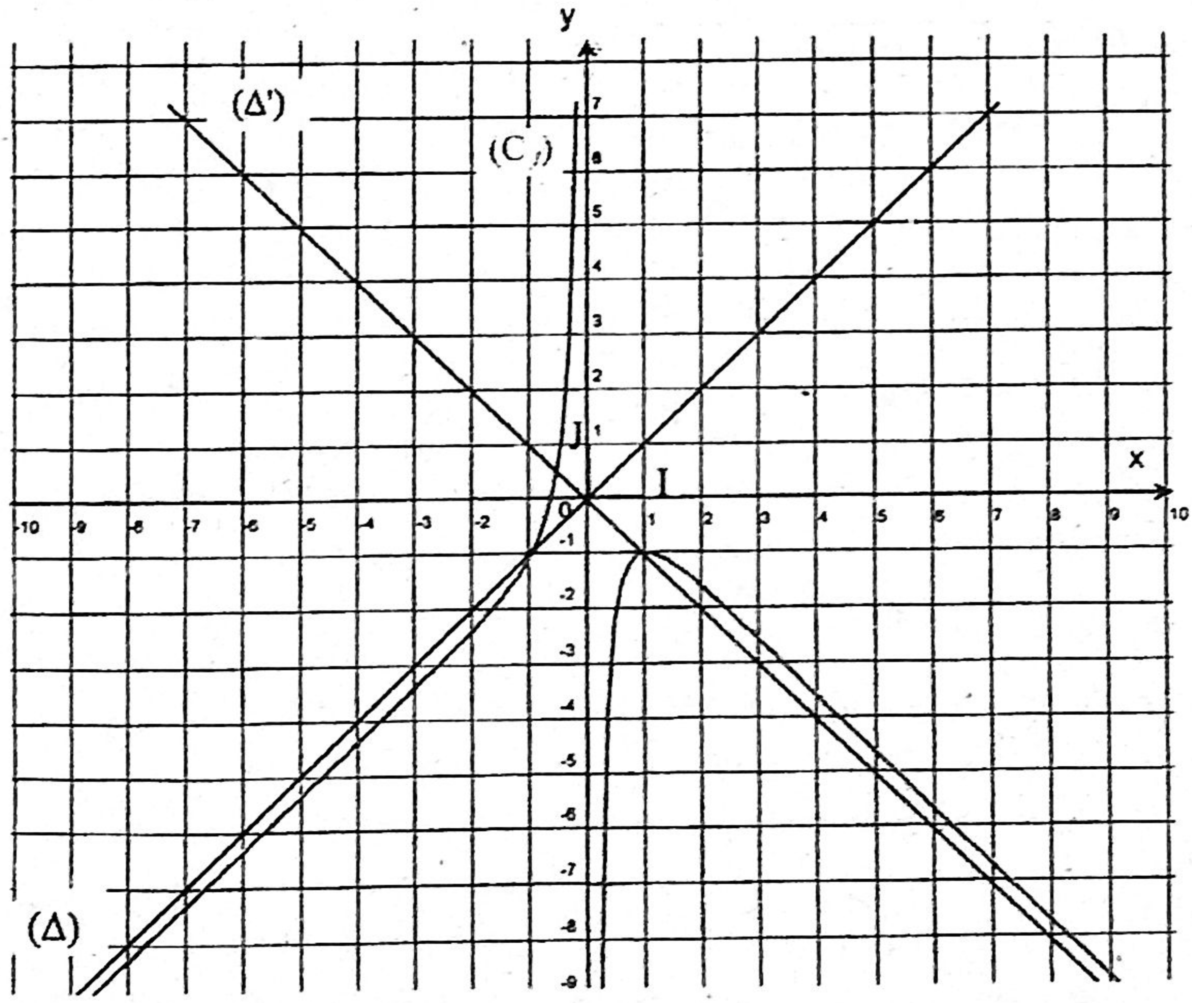
b. $\forall x \in]-\infty\,;0[\,,\ f(x)-x=\dfrac{\ln(-x)}{x}$

$\dfrac{\ln(-x)}{x}<0 \Leftrightarrow \ln(-x)>0 \Leftrightarrow x<-1$. $\forall x \in]-\infty\,;-1[$, $f(x)-x<0$;

donc (C_f) est en dessous de (Δ).

$\dfrac{\ln(-x)}{x}>0 \Leftrightarrow -1<x<0$. $\forall x\in]-1;0[$, $f(x)-x>0$; donc (C_f) est au-dessus de (Δ).

6. Tracé de (C_f), (Δ) et (Δ')



Partie C

1. a. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \dfrac{\ln(-x)}{x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\ln(-x)}{x} = +\infty$

b. h est dérivable sur$]-\infty\,,\,0[$ et on a $h'(x) = f'(x) + 1$.
Comme $f'(x) > 0$, alors $h'(x) > 0$. Donc h est strictement croissante sur$]-\infty\,;\,0[$.

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0
$h'(x)$		$+$	||
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

2. a. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,,\,0[$ et
$h(\,]-\infty\,;\,0[\,) = \,]-\infty\,;\,+\infty\,[$;
h est donc une bijection de $]-\infty\,;\,0[$ sur $]-\infty\,;\,+\infty[$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$,
alors il existe un unique nombre $\alpha \in \,]-\infty\,;\,0\,[$ tel que $h(\alpha) = 0$,
c'est-à-dire $f(\alpha) = -\alpha$. Par conséquent l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;\,0\,[$.

b. $h(-1) = -2$; $\quad h(-\frac{1}{2}) = -1 + 2\ln 2$.

$h(-1) < 0$ et $h(-\frac{1}{2}) > 0$ donc $-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

Partie D

1. Sur $]1, +\infty[$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (Δ') d'après B4.b.

D'où $\mathscr{A}(t) = \int_1^t (f(x) - x)\,dx = \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^t = \frac{1}{2}(\ln t)^2.$$

2. a. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$

on a donc $u'(x) = \frac{1}{x}\cdot$ Choisissons $v(x) = -\frac{1}{x}\cdot$

$$\mathcal{J}(t) = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t$$

$$\mathcal{J}(t) = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1.$$

b. Si $x \geqslant 1$, alors $\ln x \geqslant 0$ et $\frac{\ln x}{x^2} \geqslant 0$

d'où $\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx \geqslant 0$; par suite $\mathcal{J}(t) \geqslant 0$.

Si $t \geqslant 1$ alors $\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} \geqslant 0$ et $1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t} \leqslant 1$ c'est-à-dire $\mathcal{J}(t) \leqslant 1$,

On en déduit que $0 \leqslant \mathcal{J}(t) \leqslant 1$.

c. $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{J}(t) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0. \end{cases}$

EXAMEN 3 Session de Remplacement 1995
Série E

EXERCICE 1

1. Déterminons l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation.
f est une translation si, et seulement si, $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$; c'est-à-dire $a^3 = 1$.
a est une racine cubique de 1 donc $a \in \{1; j ; \overline{j}\}$ où $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Ainsi , $E_1 = \{1 ; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.
Caractérisons f pour chacune des valeurs trouvées.
   - si $a = 1$ alors $z' = z$. Donc f est la translation de vecteur nul c'est-à-dire l'application identique.
   - si $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, alors $z' = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = z \; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

     Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   - si $a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ alors $z' = z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = z \; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

     Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}\left(\frac{-3}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Déterminons l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie. f est une homothétie si, et seulement si, $z' = z$ ou $z' = kz + b$ où $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
1^er^ cas :
$$z' = z \Leftrightarrow a^3 = 1 \text{ et } a - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1.$$
$$S_1 = \{1\}$$
2^e^ cas :
$k \in \mathbb{R}^* - \{1\} \Leftrightarrow a^3 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
Posons $a = x + iy$; $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$a^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ①
$a^3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0$
$$\Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x).$$

- Si $y = 0$ alors $a = x$

$$a^3 = x^3$$
$$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
$$S_2 = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$$

Si $y = \sqrt{3}x$ alors $a = x + \sqrt{3}x\, i$

Dans ①, $a^3 = -8x^3 = -(2x)^3$

$$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \overline{j}$$
$$S_3 = \{x + \sqrt{3}x\, i, x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{\overline{j}\}.$$

- Si $y = -\sqrt{3}x$ alors $a = x - \sqrt{3}x\, i$

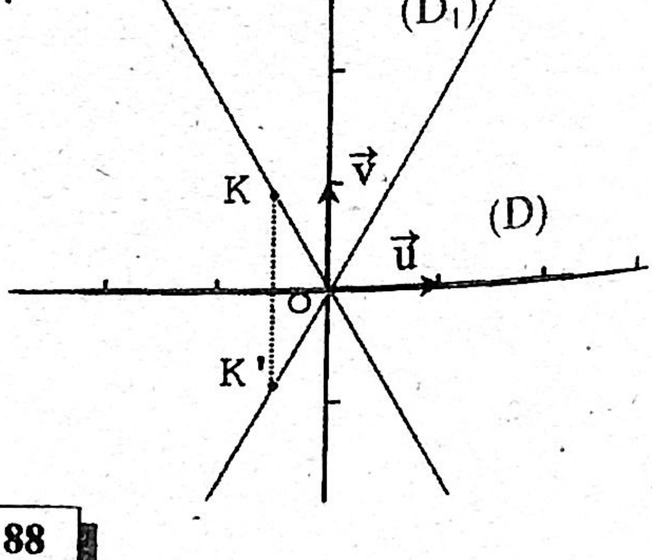
Dans ①, $a^3 = -8x^3 = -(2x)^3$

$$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = j$$
$$S_4 = \{x - \sqrt{3}x\, i, x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{j\}$$

$$E_2 = \{1\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}) \cup (\{x(1+\sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{\overline{j}\})$$
$$\cup (\{x(1-\sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{j\}).$$
$$E_2 = \left(\mathbb{R}^* \cup \{x(1+\sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{x(1-\sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\}\right) \setminus \{j ; \overline{j}\}.$$

E_2 est représenté graphiquement par la réunion des droites :

(D) : $y = 0$; (D$_1$) : $y = \sqrt{3}x$; (D$_2$) : $y = -\sqrt{3}x$ privée des points O(0;0) K$\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et K'$\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



3. Pour $a = 1 + i$

$z' = (1+i)^3 z + i$

$z' = (-2+2i)z + i$. z' est de la forme $az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Donc f est une similitude directe.

- $|-2+2i| = 2\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $-2 + 2i$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d'où $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- Soit Ω le centre de f.

$$z_\Omega = -\frac{i}{1-(-2+2i)} = \frac{i}{3-2i}.$$

$$z_\Omega = -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

f est donc la similitude directe de rapport $2\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ et de centre $\Omega\left(-\dfrac{2}{13}; \dfrac{3}{13}\right)$.

4. a. Soit z_0' l'affixe de M_0'.

$z_0' = a^3 + a - 1$ et $z_0' \in \mathbb{R}$.

$z_0' = (x+iy)^3 + x + iy - 1$.

$z_0' = (x^3 - 3xy^2 + x - 1) + i(-y^3 + 3x^2y + y)$.

$$\begin{aligned} z_0' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow -y^3 + 3x^2y + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y(-y^2 + 3x^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y^2 - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

(Γ) est donc la réunion de la droite (Δ) d'équation $y = 0$ et de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation $y^2 - \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$.

b. Les sommets de $(\mathscr{H})$ sont $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $B'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix}$; $A'\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix}$

2. $f(0) = -\frac{1}{2}$.

$A(0;-\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour (C) si, et seulement si, la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ est impaire.

$D_g = D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} + \frac{1}{2} = \frac{3(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$.

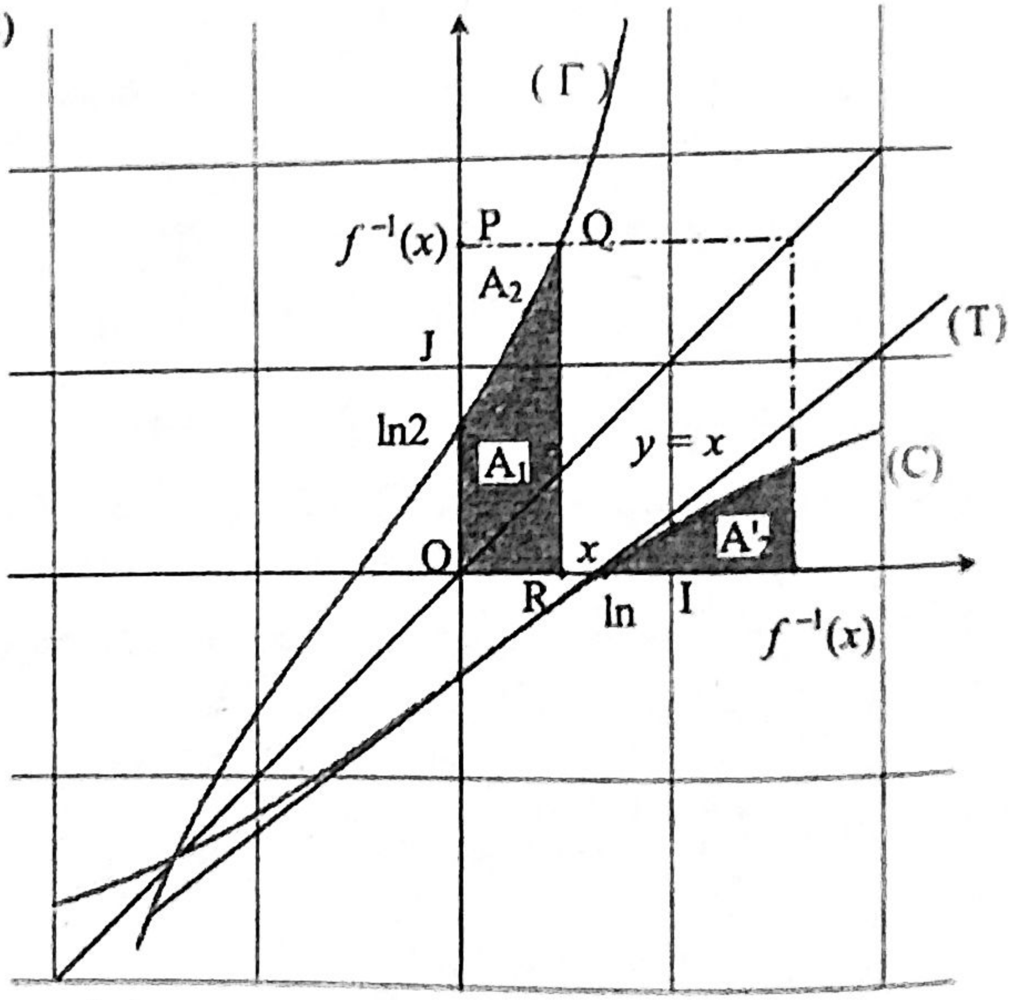
$g(-x) = \frac{3}{2}\,\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{3}{2}\,\frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{3}{2}\,\frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -g(x)$

donc g est impaire. Par suite A(0 ; −1/2) est un centre de symétrie de (C).

3. • $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. $f'(0) = \frac{3}{4}$. Le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) en A est $\frac{3}{4}$.

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point $B\begin{pmatrix}0\\ \ln 2\end{pmatrix}$ est $\frac{2}{3}$

• Tracé de (C)



4. a. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2; 1[$ (d'après le tableau de variation). Par suite f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $]-2; 1[$.

b. $\forall y \in]-2; 1[, \exists! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

$$y = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 2$$
$$\Leftrightarrow e^x(1-y) = 2 + y$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2+y}{1-y}.$$

$\forall y \in]-2 ;1[, \frac{2+y}{1-y} > 0$ d'où $x = \ln\left(\frac{2+y}{1-y}\right)$.

Ainsi, $f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{1-x}$.

c. (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Construction de (Γ) : voir figure

5. a. Déterminons a et b tels que $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1}$.

On a : $f(x) = \frac{ae^x + a + be^x}{e^x+1} = \frac{e^x(a+b)+a}{e^x+1}$

$$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x(a+b)+a}{e^x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $f(x) = -2 + \frac{3e^x}{e^x+1}$.

b. $I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t)dt = \int_{\ln 2}^{\lambda} (-2 + \frac{3e^t}{e^t+1})dt = [-2t + 3\ln(e^t+1)]_{\ln 2}^{\lambda}$

$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^\lambda + 1) + 2\ln 2 - 3\ln 3$

$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^\lambda + 1) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$

6. a. $x \in [0 ; 1[$. Démontrons à l'aide de considération géométrique que :
$I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t)dt = x f^{-1}(x)$.

Considérons les points $P(0, f^{-1}(x))$, $Q(x, f^{-1}(x))$ et $R(x, 0)$.
(C) coupe l'axe des abscisses au point $B(\ln 2 ; 0)$.

L'aire du rectangle OPQR est $xf^{-1}(x)$. (1)
Soit A_1 la région du plan comprise entre (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = x$. Comme (Γ) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0 ; x]$, alors l'aire de A_1 est $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t$. (2)

Soit A_2 la partie du plan comprise entre (Γ), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = \ln 2$ et $y = f^{-1}(x)$.
Comme (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, alors A_2 a la même aire que la région A'_2 du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = \ln 2$ et $t = f^{-1}(x)$, car les symétries orthogonales conservent les aires.
L'aire de A'_2 vaut $\int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)\mathrm{d}t$, car (C) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[\ln 2 ; +\infty[$.
Donc l'aire de A_2 est $\int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)\mathrm{d}t$. (3)
Or, aire (OPQR) = aire(A_1) + aire(A_2).
On déduit donc de (1), (2) et (3) que :

$$xf^{-1}(x) = \int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t + \int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

$$xf^{-1}(x) = \int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t + \mathrm{I}\left(f^{-1}(x)\right) \quad (4)$$ d'après A.5.b.

b. Calculons $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ où $x \in [0 ; 1[$.

De la relation (4), on a : $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf^{-1}(x) - \mathrm{I}\left(f^{-1}(x)\right)$;

soit $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf^{-1}(x) + 2f^{-1}(x) - 3\ln\left(e^{f^{-1}(x)} + 1\right) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$ (d'après A.5.b.)

Donc $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = (x+2)\ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) - 3\ln\left(\frac{3}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$ (d'après A.4.).

PARTIE B

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{3e^x(e^x+1)(1-e^x)}{(e^x+1)^4}$.

   Le signe de $f''(x)$ dépend de $1-e^x$.

   $1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$,

   et $1-e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

   $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

   $\forall x \in]0\,;+\infty[$ $f''(x) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

   Tableau de variation de f'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	

   f' admet un maximum qui est $\frac{3}{4}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$. De plus

   $\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2} > 0$. Par suite $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

2. a. $\varphi(x) = f(x) - x$.

   - $x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = f'(x) - 1$.

     Or $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

     $-1 < f'(x) - 1 < -\frac{1}{4} < 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) < 0$. Par suite φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$

     $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} x = -\infty$

     $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   φ est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α. Par conséquent l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. $\varphi(-1,5) \simeq 0,04$
$\varphi(-1,4) \simeq -6,5.\ 10^{-3}$.
$\varphi(-1,5) \times \varphi(-1,4) < 0$ donc $\alpha \in]-1,5 ; -1,4[$.

3. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$

$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$

b. • $|U_1 - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_0 - \alpha|$

$|U_2 - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_1 - \alpha|$

....

....

$|U_n - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_{n-1} - \alpha|$

en faisant le produit membre à membre on obtient :

$|U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$. Par suite $\lim (U_n - \alpha) = 0$, d'où $\lim U_n = \alpha$.

Donc la suite (U_n) converge vers α.

c. $U_0 = -1$.

• $U_0 - \alpha = -1 - \alpha$ or $-1,5 < \alpha < -1,4$.
donc $1,4 < -\alpha < 1,5$
$0,4 < -1 - \alpha < 0,5$
$|U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$.

Par conséquent $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

• $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) + n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -3\ln 10$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -3\ln 10 + \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-3\ln 10 + \ln 2}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2}{1000}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

$\Leftrightarrow n \geqslant 22$. A partir de $n = 22$, on est sûr d'avoir $|U_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

EXAMEN 4

Session de Juin 1995
Série C

EXERCICE 1

$\xrightarrow{f}$

O	O
A	B
B	C
D	F

$\xrightarrow{R}$

A	A
D	B
C	E

1. a. Construction des points (voir figure).

b. • $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})}$

$= -\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB})}$.

mes $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \equiv -\dfrac{2\pi}{3} + \pi \quad [2\pi]$ car f étant une similitude directe d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ et A et B ayant pour images B et C par f, on a :

mes$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} = \dfrac{2\pi}{3}$.

mes$\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Donc $\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}$.

- Une similitude de rapport 2 multiplie les distances par 2 donc $\boxed{BC = 2BA}$
- D'après le théorème d'Al Kashi,
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\,BA.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= BA^2 + BC^2 - 2BA \times 2BA\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= BC^2 - BA^2$.

$AC^2 + BA^2 = BC^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. a. Construction des points D, E et F (voir figure).

b. • $R(D) = B \Leftrightarrow \begin{cases} AD = AB \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Le triangle ABD est isocèle en A et $mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$. Donc ce triangle est équilatéral.

On a :

$$mes\,(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\begin{aligned} mes\,(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) &\equiv -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\equiv \pi + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

$mes\,(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) \equiv mes\,(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}}) + \pi \quad [2\pi]$ donc les points A,B,D,O sont cocycliques.

- L'image d'un cercle par une similitude directe est un cercle.
  Comme A,B,D et O sont cocycliques, alors leurs images B, C, F et O par f sont cocycliques.

c. $\mathscr{C}$ est le cercle passant par A, B, D et O.

$\mathscr{C}'$ est le cercle passant par B, C, F et O.

$O \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$.

Démontrons que $O \in \mathscr{C}''$.

$R(C) = E \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AE \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

ACE est un triangle isocèle ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral direct. On a :

$$mes\,(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}}) \equiv +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$mes\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) \equiv mes\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + mes\,(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \quad [2\pi]$$

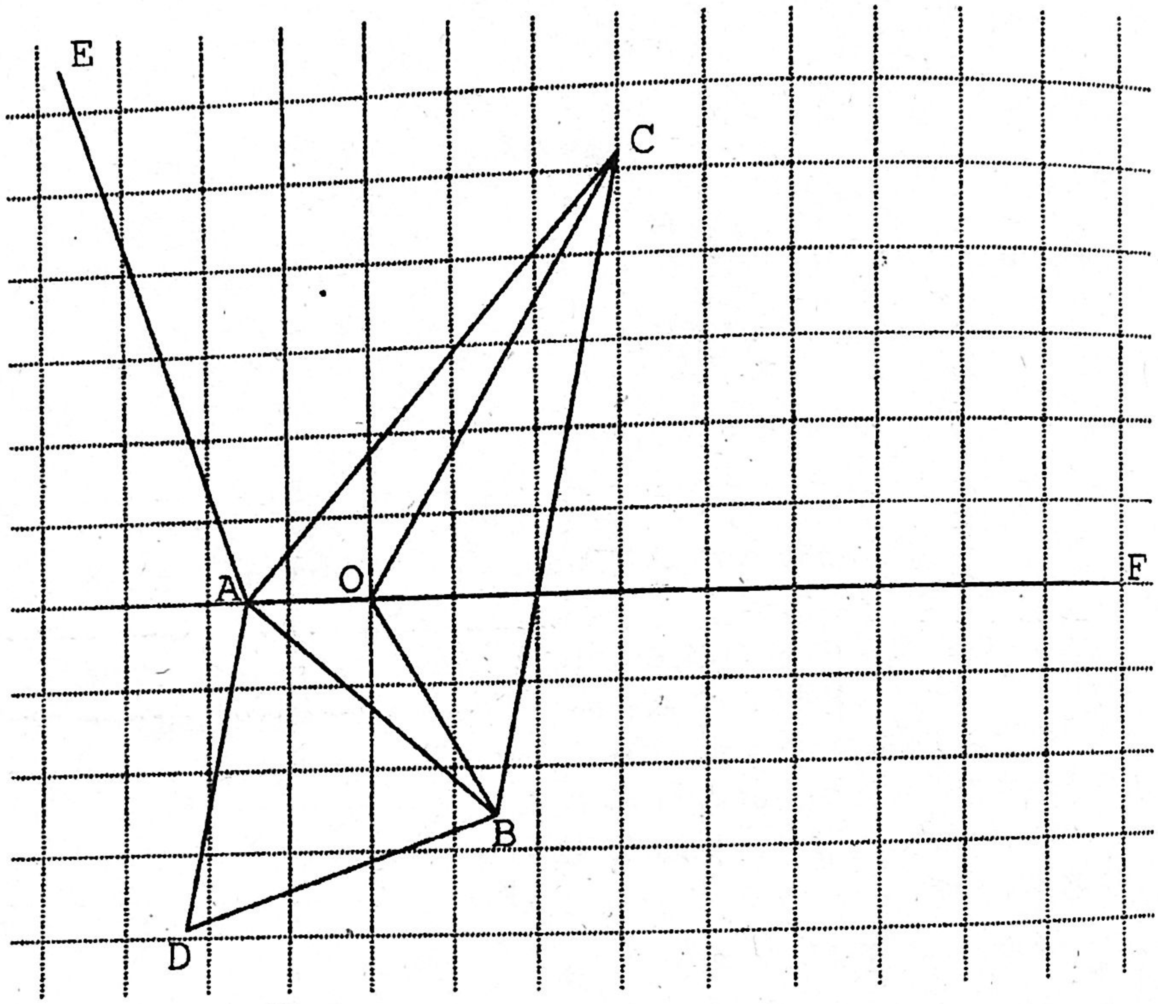
$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) \equiv \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA}}) + \pi \quad [2\pi]$$

Donc A,C,E et O sont cocycliques. Par suite O appartient à $\mathscr{C}''$

Les cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ ont donc le point O en commun.



EXERCICE 2

1. a. Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   - $u_0 > 0$.
   - Supposons que pour un entier naturel n, $u_n > 0$ et démontrons que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}$$

Or $u_n > 0$ donc $2\,u_n + 4 > 4 > 0$ et $u_n + 5 > 5 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Remarque : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \Leftrightarrow u_n+5 > 0$. Donc la suite (U_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

b. Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$.

- $u_0 \neq 1$
- supposons que pour un entier naturel n, $u_n \neq 1$ et démontrons que $U_{n+1} \neq 1$.

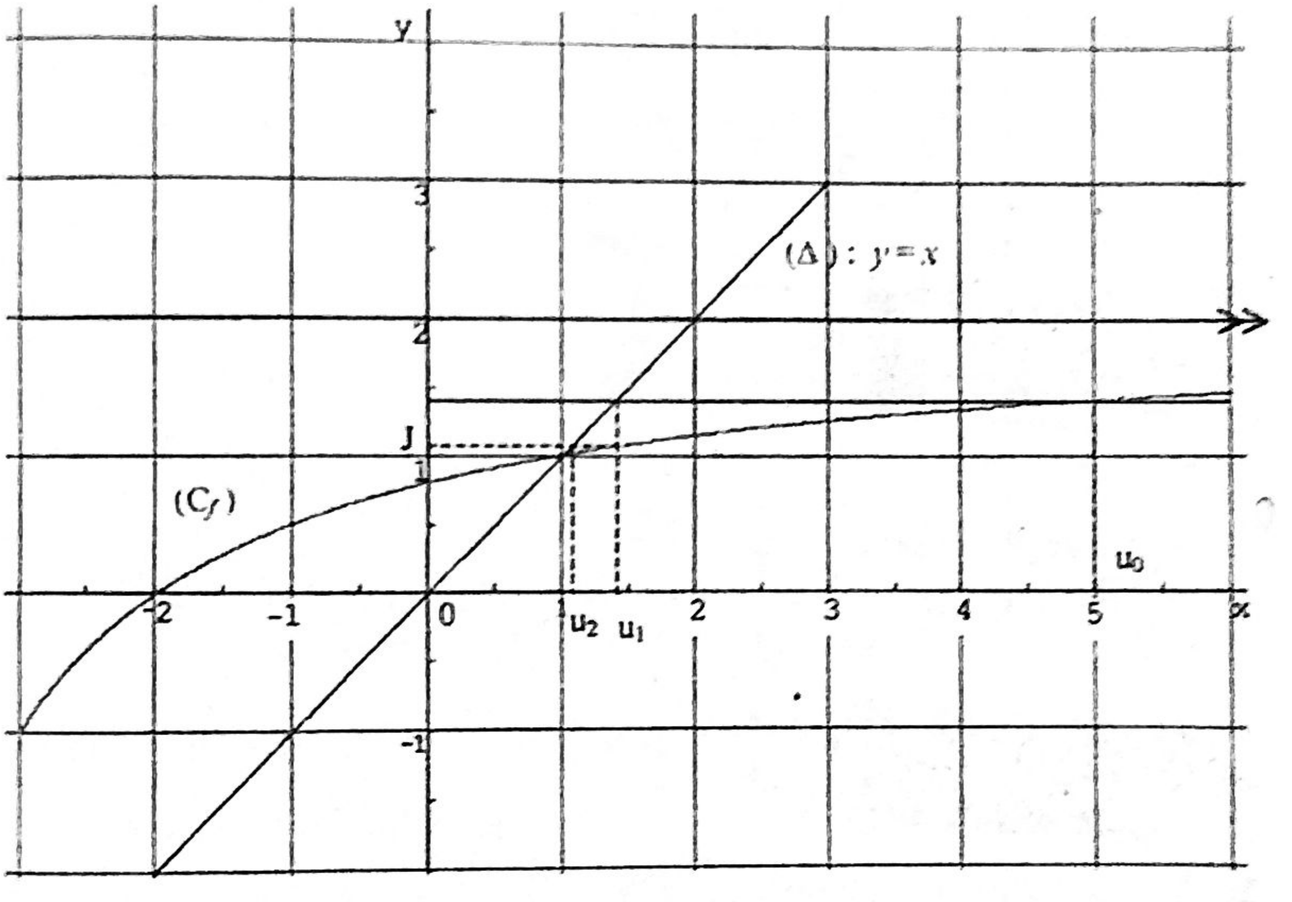
$$u_{n+1}-1 = \frac{2u_n+4-u_n-5}{u_n+5} = \frac{u_n-1}{u_n+5}$$

$u_n-1 \neq 0$ donc $u_{n+1}-1 \neq 0$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$.

2. Détermination graphique de u_0, u_1 et u_2 (voir figure).

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x+5}$.



On peut conjecturer que :

- U est décroissante,
- U converge vers 1.

3. a. $v_{n+1} = \dfrac{u_n-1}{u_n+4}$

$$v_1 = \frac{u_0-1}{u_0+4} = \frac{4}{9}$$

$$v_{n+2}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+4}=\frac{\dfrac{2u_n+4}{u_n+5}-1}{\dfrac{2u_n+4}{u_n+5}+4}$$

$$v_{n+2}=\frac{u_n-1}{6(u_n+4)}=\frac{1}{6}v_{n+1}.$$

$\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=\dfrac{1}{6}v_{n+1}.$

V est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ et de premier terme V_1 égal à $\dfrac{4}{9}$.

b. $\left|\dfrac{1}{6}\right|<1$ donc V est convergente et lim V = 0.

c. $v_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+4}\Leftrightarrow u_n=\dfrac{1+4v_{n+1}}{1-v_{n+1}}$

V converge vers 0 donc :

$1+4v_{n+1}$ converge vers 1

$1-v_{n+1}$ converge vers 1

En conséquence, U converge vers 1.

PROBLÈME

Partie A

1. $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=xe^{1-x}$

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e\times\dfrac{x}{e^x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Par suite la droite d'équation $y=0$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b. $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x>1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$.

f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et strictement décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tableau de valeurs

x	$-0,5$	0	2	3	4
Valeur approchée de $f(x)$	$-2,24$	0	$0,74$	$0,39$	$0,2$

c. Construction de (C) (voir figure).

2. $\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$, $A(u) = \int_0^u x e^{1-x}\,dx$. Intégrons par parties.

Posons $V(x) = x$ et $W'(x) = e^{1-x}$. On a : $V'(x) = 1$; choisissons $W(x) = -e^{1-x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} A(u) &= \left[-xe^{1-x}\right]_0^u - \int_0^u -e^{1-x}\,dx \\ &= -ue^{1-u} + 0 + \left[-e^{1-x}\right]_0^u \\ &= -ue^{1-u} - e^{1-u} + e \\ &= e - (1+u)\,e^{1-u} \end{aligned}$$

3. On a : $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{1-u} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{1-u} = 0$ d'après A.1.

Donc $\lim\limits_{u\to+\infty} [e - (1+u)\,e^{1-u}] = e$, c'est-à-dire $\lim\limits_{u\to+\infty} A(u) = e$.

Partie B

1. a. $f_2(x) = \frac{x^2}{2}\,e^{1-x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2}\,e^{1-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{2} \cdot \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'_2(x) = \frac{1}{2}\left(2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}\right)$

$$= \frac{1}{2}(2-x)xe^{1-x}.$$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 0)$

$f_2'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$

$f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;2[.$

f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$ et strictement croissante sur $[0\,;2]$.

Tableau de variation de f_2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

c. Construction de (C_2) (voir figure).

2. a. $f_3(x) = \frac{x^3}{6}\,e^{1-x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{6}\,e^{1-x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{6} \cdot \frac{x^3}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty.$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = \frac{1}{6}\left[3x^2e^{1-x} + x^3\left(-e^{1-x}\right)\right]$

$$= \frac{1}{6}\,x^2(3-x)\,e^{1-x}$$

$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 0)$

$f_3'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 3$

$f_3'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$

f_3 est strictement décroissante sur $[3;+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty\,;3]$.

Tableau de variation de f_3

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2e^2}$	$\searrow$	0

c. Construction de (C_3) (voir figure).

3. a. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \dfrac{1}{n!}[\,n\,x^{n-1}e^{1-x} + x^n(-e^{1-x})]$

$$= \frac{x^{n-1}}{n!}(n - x)e^{1-x}.$$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = n)$.

1^{er} cas : n est pair ($n \in \mathbb{N}^*$)

- Si n est pair alors $n-1$ est impair et x^{n-1} a le même signe que d'où $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\,;0[\ \cup\ ]n\,;+\infty[$
  $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;n[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{n!}e^{1-x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{n!}\cdot\dfrac{x^n}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

$f_n(n) = \dfrac{n^n}{n!}e^{1-n}$.

2ᵉ cas : n est impair.

- Si n est impair alors $n-1$ est pair et x^{n-1} est supérieur ou égal à 0.
  d'où $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\,n\ ;+\infty\,[$
  $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;n\,[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{n!} e^{1-x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e}{n!} \cdot \dfrac{x^n}{e^x} = 0.$

Tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

b. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \dfrac{n}{n!} x^{n-1} e^{1-x} - \dfrac{1}{n!} x^n e^{1-x}$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-x} - \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$$
$$= f_{n-1}(x) - f_n(x)$$

d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_n' = f_{n-1} - f_n$

Partie C

- $J_n(x) - J_{n-1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt - \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$

$$= \int_0^x \big(f_n(t) - f_{n-1}(t)\big)\,dt$$
$$= \int_0^x -f_n'(t)\,dt \text{ d'après B. 3.b}$$
$$= [-f_n(t)]_0^x.$$

Donc $J_n(x) - J_{n-1}(x) = -f_n(x)$

- D'après ce qui précède, on a :

$J_2(x) - J_1(x) = -\ f_2(x)$
$J_3(x) - J_2(x) = -\ f_3(x)$
....

....

$J_{n-1}(x) - J_{n-2}(x) = -\ f_{n-1}(x)$

$J_n(x) - J_{n-1}(x) = -\ f_n(x)$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient après simplification

$$J_n(x) - J_1(x) = -\sum_{k=2}^{n} f_k(x)$$

- $J_1(x) = \int_0^x te^{1-t}dt = \mathrm{A}(x)$
  $= e - (1+x)\,e^{1-x}$

$$J_n(x) = e - (1+x)\,\mathrm{e}^{1-x} - \sum_{k=2}^{n} f_k\,(x)$$

$$= e - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$= e - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{1-x}.$$

Donc $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$

3. a. Pour tout entier naturel non nul n , f_n est strictement croissante s $[0\,;1]$ donc $\forall\, x \in [\,0\,;\,1]$,
   $f_n\,(0) \leqslant f_n\,(x) \leqslant f_n(1)$
   $0 \leqslant f_n\,(x) \leqslant f_n(1)$.

   b. $0 \leqslant \int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^x f_n(1)\,dt$

   $0 \leqslant J_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{1}{n!}\,dt$

   $0 \leqslant J_n(x) \leqslant \left[\frac{1}{n!}\,t\,\right]_0^x$

   $0 \leqslant J_n(x) \leqslant \frac{x}{n!}$.

   Or $\forall\, x \in [0\,;\,1]\,;\ 0 \leqslant \frac{x}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$ donc $0 \leqslant J_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$.

   c. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geqslant n > 0$ d'où $0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$.

   or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n\,(x) = 0$.

d. $$\lim_{n\to+\infty} J_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \frac{e}{e^{1-x}} = e^{1-1+x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

Partie D

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ J_n'(x) = f_n(x)$

1. Supposons n est pair.

   Comme n est pair, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$ d'après B.3.

   Donc J_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e - e^{1-x} \times \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = -\infty$$

car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{n!} = +\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e}{k!}\times\frac{x^k}{e^x}\right)\right) = e \ \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k} = +\infty.$$

Tableau de variation de J_n.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$J_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e

J_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $J_n(\mathbb{R}) =]-\infty\,;\, e[$.
J_n est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty\,;\, e[$.
$e \notin]-\infty\,;\, e[$ donc l'équation $J_n(x) = e$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ pour n pair.

2. • Supposons n impair.
D'après B.3., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f_n(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ f_n(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,0[\\ f_n(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in]0\,;\,+\infty[\end{aligned}$$

J_n est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

• $$\lim_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e - e^{1-x} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = +\infty$$

car $$\lim_{x\to-\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{n!} = -\infty$$ puisque n est impair.

$$\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = e.$$

Tableau de variation de J_n.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$J_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e

• J_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et
$J_n(]-\infty\,;\,0]) = [0\,;\,+\infty[$.
D'où J_n réalise une bijection de $]-\infty\,;\,0]$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
$e \in [0\,;\,+\infty[$ donc l'équation $J_n(x) = e$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;0]$.

• J_n est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et
$J_n([0\,;\,+\infty[) = [0\,;\,e[$.
J_n réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[0\,;\,e[$.
$e \notin [0\,;\,e[$, donc l'équation $J_n(x) = e$ n'a pas de solution dans $[0\,;\,+\infty[$

Conclusion

Pour n impair, l'équation $J_n(x) = e$ admet une unique solution négative dans $\mathbb{R}$.

3. $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$$

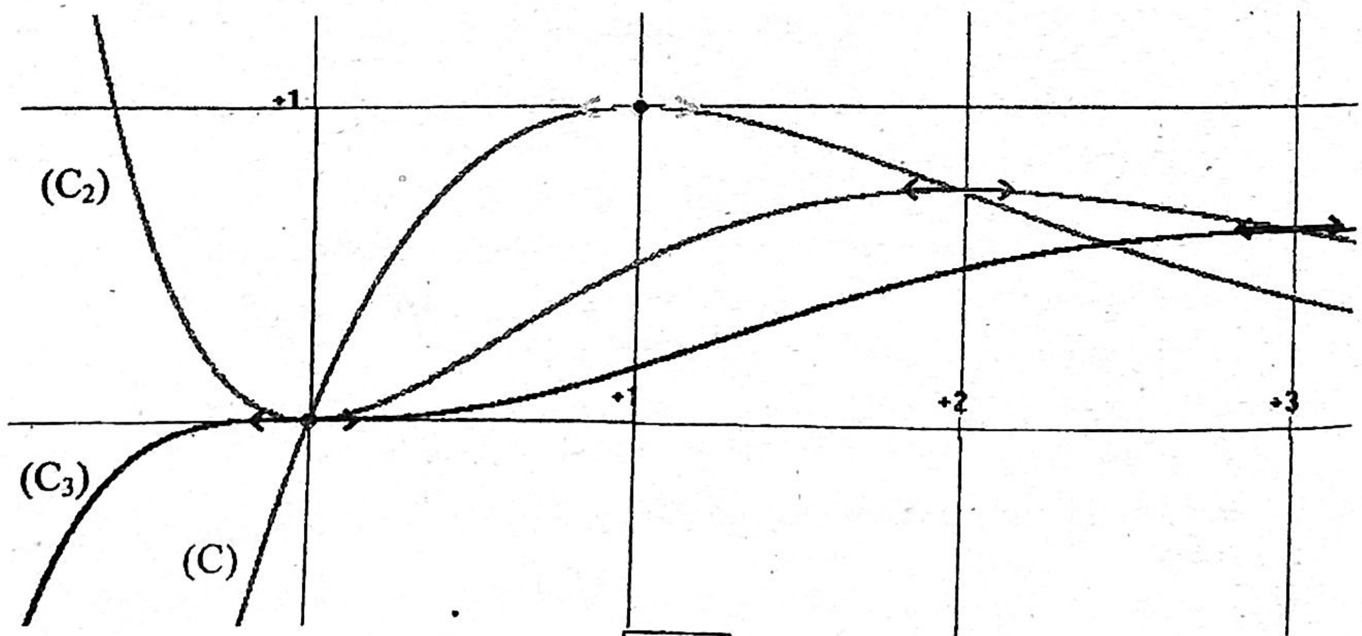
$$\Leftrightarrow (e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)) = e$$

$$\Leftrightarrow J_n(x) = e.$$

D'après la question D.1.,

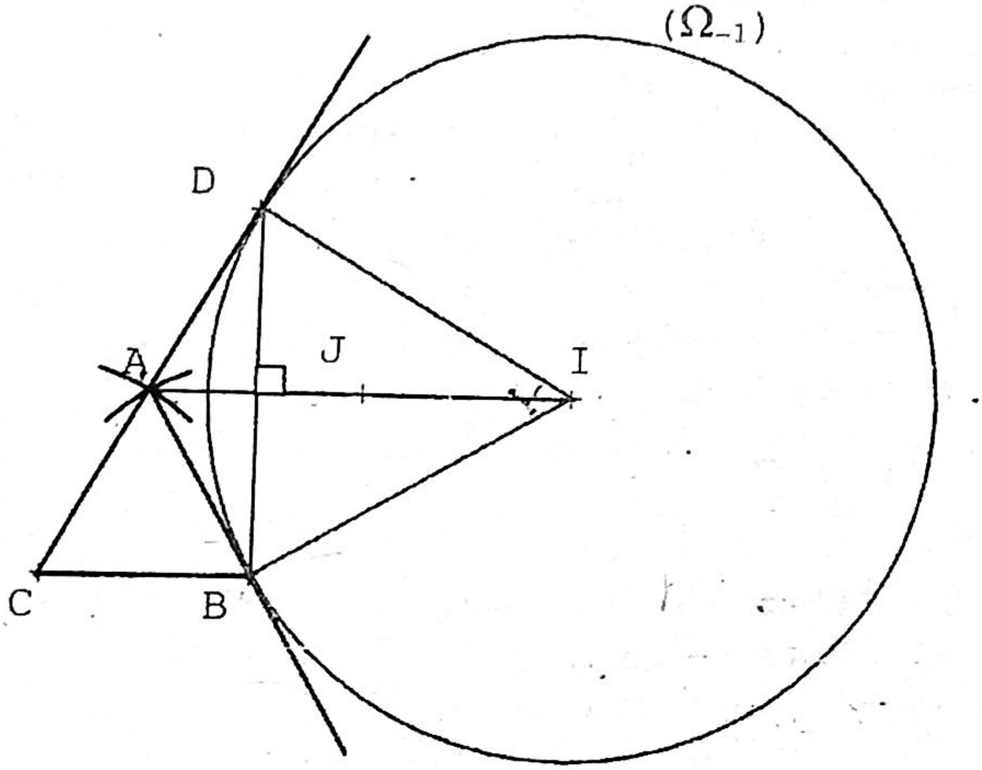
Si n est pair, alors l'équation $(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

D'après D.2., si n est impair, alors l'équation $(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}) = 0$ admet une solution négative dans $\mathbb{R}$.



EXAMEN 5 Session de Remplacement 1996
Série C

EXERCICE 1



1. I étant le barycentre des points pondérés (A,1), (B,2) et (C,–2), on a :

$\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$= 2\,\overrightarrow{CB}.$

I est donc l'image de A par la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{CB}$.

2. • *Calcul de* IA^2

$\overrightarrow{IA} = 2\,\overrightarrow{CB}$ donc $AI = 2\,BC = 2a$.

D'où $IA^2 = 4a^2$

• *Calcul de* IB^2

En appliquant le théorème d'Al Kashi dans le triangle BAI, on a :

$IB^2 = AB^2 + AI^2 - 2AB \times AI \times \cos \widehat{BAI}$

$= a^2 + 4a^2 - 2a \times 2a \times \cos \frac{\pi}{3}$ car mes $\widehat{BAI}$ = mes $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ (angles alternes-internes formés de deux droites parallèles et une sécante).

$IB^2 = 3a^2$

• *Calcul de* IC^2

En appliquant le théorème d'Al Kashi dans le triangle IAC, on a :

$$IC^2 = AC^2 + AI^2 - 2AC \times AI \times \cos \widehat{IAC}$$
$$= a^2 + 4a^2 - 2a \times 2a \times \cos \frac{2\pi}{3}$$
$$= 7a^2$$

3. a. Pour tout point M du plan, posons $g(M) = MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2$

$1 + 2 - 2 = 1$

$1 \neq 0$ donc $g(M) = g(I) + MI^2$.

$$g(M) = k\,a^2$$
$$\Leftrightarrow IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 + MI^2 = k\,a^2$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 + 2(3\,a^2) - 2(7\,a^2) + MI^2 = k\,a^2$$
$$\Leftrightarrow MI^2 = (k + 4)\,a^2$$

1[er] cas : si $k < -4$ alors $(\Omega_k) = \varnothing$.

2[e] cas : si $k = -4$ alors $(\Omega_k) = \{ I \}$.

3[e] cas : si $k > -4$ alors (Ω_k) est le cercle de centre I et de rayon $a\sqrt{k+4}$.

b. $B \in (\Omega_k) \Leftrightarrow BI^2 = (k+4)\,a^2$
$\Leftrightarrow 3a^2 = (k+4)\,a^2$
$\Leftrightarrow k + 4 = 3$
$\Leftrightarrow k = -1$.

Donc pour $k = -1$, B appartient au cercle (Ω_k).

4. a. $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}).\overrightarrow{AB}$

$$= AB^2 - \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$$
$$= AB^2 - AI \times AB \times \cos \frac{\pi}{3}$$
$$= a^2 - a^2 = 0.$$

Donc (AB) est la tangente au cercle (Ω_{-1}) en B.

b. Déterminons une mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.

- mes $\widehat{CAD}$ = mes $\widehat{CAB}$ + mes $\widehat{BAI}$ + mes $\widehat{IAD}$
- mes $\widehat{BAI}$ = mes $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ (angles alternes internes formés de deux droites parallèles et une sécante).
- mes $\widehat{IAD}$ = mes $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{3}$ (angles symétriques par rapport à (AI)).

Donc mes $\widehat{CAD} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$. Les points A, B et C sont donc alignés. Par conséquent, D appartient à la droite (AC).

c. Soit D le symétrique de B par rapport à (AI).

- $D \in (\Omega_{-1})$ car ID = IB
- $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= AD^2 - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD}$$
$$= AD^2 - AI \times AD \times \cos \widehat{IAD}$$
$$= a^2 - 2a \times a \times \frac{1}{2} \text{ car } AB = AD$$
$$= 0.$$

Donc (AC) est la tangente au cercle (Ω_{-1}) en D.

d. B et D étant symétriques par rapport à la droite (AI), IB = ID.
Donc le triangle IBD est isocèle en I.

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BID}$ sont associés ; donc 2 mes $\widehat{ABD}$ = mes $\widehat{BID}$.

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BAI}$ sont complémentaires ; donc mes $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$.

Par suite mes $\widehat{BID} = \frac{\pi}{3}$. BID est un triangle isocèle qui a un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$; il est donc équilatéral.

EXERCICE 2

1. a. Soit a un réel et S l'ensemble des solutions de (E).

$$ia \in S \Leftrightarrow (ia)^3 + (-1 + 2i)(ia)^2 - (1 + 2i)(ia) - 3 + 4i = 0$$
$$\Leftrightarrow -ia^3 - a^2(-1 + 2i) - (1 + 2i)(ia) - 3 + 4i = 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + 2a - 3) + i(-a^3 - 2a^2 - a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 0 & (E_1) \\ -a^3 - 2a^2 - a + 4 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Les solutions de (E_1) sont -3 et 1.

Seul 1 est solution de (E_2). Donc la solution imaginaire pure est i.

b.

- Pour tout nombre complexe z, posons $P(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i$.

Puisque i est un zéro de P, il existe deux nombres complexes b et c tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$ pour tout z.

Calculons b et c

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$

Ce qui donne après identification membre à membre

$$\begin{cases} b - i = -1 + 2i \\ c - ib = -1 - 2i \\ -ic = -3 + 4i \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b = -1 + 3i \\ c = -4 - 3i \end{cases}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - i)\,(z^2 + (-1 + 3i)\,z - 4 - 3i)$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (-1 + 3i)z - 4 - 3i = 0$

$\Delta = (-1 + 3i)^2 + 4(4 + 3i)$
$\quad = 8 + 6i.$

Soit δ une racine carrée de Δ.

Il existe un couple (x,y) de réels tel que :

$\delta = x + yi$

$\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$; $|\delta|^2 = x^2 + y^2$; $|\Delta| = 10$

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

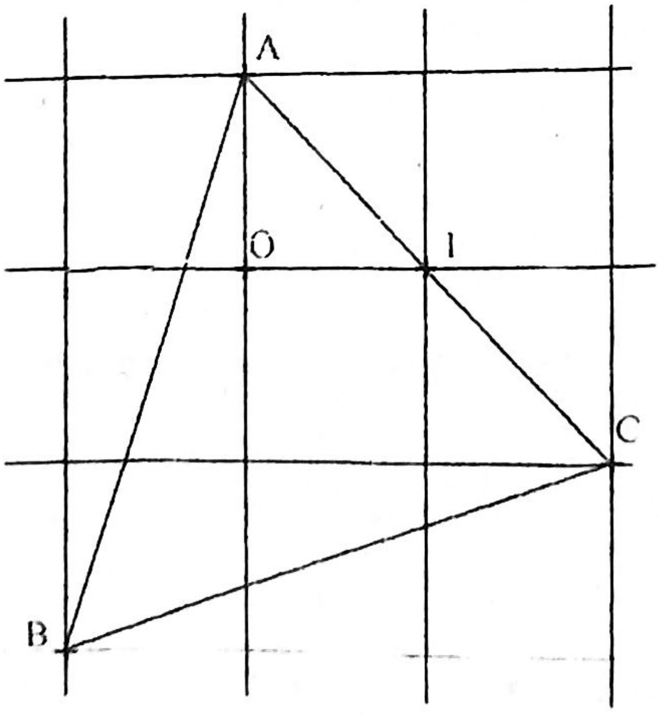
On prend $\delta = 3+i$

Les solutions de l'équation $z^2 + (-1 + 3i)z - 4 - 3i = 0$ sont :

$\dfrac{1 - 3i + 3 + i}{2} = 2 - i$; $\quad \dfrac{1 - 3i - 3 - i}{2} = -1 - 2i.$

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont i , $-1 - 2i$ et $2 - i$.

2. a



$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{10}$; $BC = |z_C - z_B| = \sqrt{10}$

On a AB = BC. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

b. On doit avoir $1 + b + c \neq 0$

et $(1 + b + c)\,\overrightarrow{AO} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}$

En utilisant les affixes des vecteurs on a :

$$\begin{aligned}(1+b+c)(-i) &= b\,(-1-2i-i) + (2-i-i)c \\ &= b\,(-1-3i) + (2-2i)c \\ &= -(b-2c) - (3b+2c)i\end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} b - 2c = 0 \\ 1 + b + c = 3b + 2c \\ 1 + b + c \neq 0 \end{cases}$

Par conséquent , $\begin{cases} b = \dfrac{2}{5} \\ c = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Autre méthode : On peut utiliser les coordonnées des vecteurs.

PROBLÈME

Partie A

1. Soit M un point du plan et (x,y) ses coordonnées.

$$M \in (\mathscr{h}) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

$(\mathscr{h})$ est donc une hyperbole équilatère.

A est le point de coordonnées (0,4).

Tracé de $(\mathscr{h})$ (voir figure).

2. R est une similitude directe car sa transformation complexe est du type $z \mapsto az + b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Le rapport de R est $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right|$ qui vaut 1

R est donc un déplacement.

Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ est différent de 1, alors R est une rotation de centre O

(car $b = 0$) et d'angle ARG $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)$ qui est $-\dfrac{\pi}{4}$.

3. a. $S(M) = M \Leftrightarrow z = z'$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x-iy)$

$\Leftrightarrow x + iy = (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) + i(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = -x + y \\ \sqrt{2}y = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+\sqrt{2})x \\ (-1+\sqrt{2})y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+\sqrt{2})x \\ y = (1+\sqrt{2})x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x$

(D) est donc la droite d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b. Cherchons la transformation complexe associée à $RoS_{(OJ)}$.

Soit r la transformation complexe associée à R,

g la transformation complexe associée à $S_{(OJ)}$,

s la transformation complexe associée à S.

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, r(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

$g(z) = -\bar{z}$

$rog(z) = r[g(z)] = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(g(z)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z} = s(z)$.

$rog = s$ donc $RoS_{(OJ)} = S$.

c. L'application S est la composée de deux isométries donc elle est une isométrie. De plus S admet la droite (D) comme ensemble de points invariants. Donc S est la symétrie orthogonale d'axe (D).

4. a. $r(4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(4i) = 2\sqrt{2}(i-i^2) = 2\sqrt{2}(1+i)$

$s(4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(-4i) = 2\sqrt{2}(i-i^2) = 2\sqrt{2}(1+i)$.

$r(4i) = s(4i)$; donc $R(A) = S(A)$

$A'(2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2})$

b. Soit M un point de coordonnées (x,y).

$$M \in (D) \cap (\mathcal{h}) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 16 & (E_3) \\ y = (\sqrt{2}+1)x & (E_4) \end{cases}$$

Avec (E_4), on a : $y^2 = (3 + 2\sqrt{2})x^2$ d'où en remplaçant dans (E_3) on a : $(2 + 2\sqrt{2})x^2 = 16$.

En conséquence, $x^2 = \dfrac{8}{1+\sqrt{2}}$. L'équation $x^2 = \dfrac{8}{1+\sqrt{2}}$ admet deux solutions distinctes ; donc (D) coupe $(\mathcal{h})$ en deux points E et F.

5. a. Déterminons d'abord les expressions analytiques de R et S.

On a :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow \quad z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases} \quad \text{(expression analytique de R).}$$

De même :

$$M'' = S(M) \Leftrightarrow \quad z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow x'' + iy'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x-iy)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \\ y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases} \quad \text{(expression analytique de S).}$$

On a : $x'y' = \dfrac{1}{2}(y^2 - x^2)$; $x''y'' = \dfrac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

D'où : $x'y' = x''y'' = \dfrac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b. $M \in (\mathcal{h}) \Leftrightarrow \quad x'y' = 8$ (équation de $S(\mathcal{h})$.

$M \in (\mathcal{h}) \Leftrightarrow \quad x''y'' = 8$ (équation de $R(\mathcal{h})$.

$S(\mathcal{h})$ et $R(\mathcal{h})$ ont la même équation $xy = 8$ ou encore $y = \dfrac{8}{x}$ qui est l'équation d'une hyperbole rapporté à ses asymptotes. On en déduit que ($\boldsymbol{h}$) à même image par R et S qui est l'hyperbole ($\mathscr{H}$) d'équation $y = \frac{8}{x}$.

6. a. E appartient à (D) , donc S(E) = E.
E appartient à ($\boldsymbol{h}$) , donc S(E) appartient à $\mathscr{H}$ image de ($\boldsymbol{h}$) par S
Par conséquent E appartient à ($\mathscr{H}$)
Il en est de même pour F.

b. Tracés de ($\boldsymbol{h}$), (D) et ($\mathscr{H}$) (voir figure).

Partie B

1. a. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y)

$$M \in (\boldsymbol{h}+) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\boldsymbol{h}) \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+16}.$$

b. Une équation de la droite (ON) est de la forme $z = at$. Puisque N a pour coordonnées $(x, \sqrt{x^2+16})$ alors $z = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} t$

On en déduit que U(x) vaut $\int_0^x [f(t) - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} t] \, dt$.

$$\text{D'où : } U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16} \, dt - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} \int_0^x t dt$$
$$= \int_0^x \sqrt{t^2+16} \, dt - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$= \int_0^x \sqrt{t^2+16} \, dt - \frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}.$$

c. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$, on a :

$$U'(x) = \sqrt{x^2+16} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+16} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right]$$
$$= \frac{8}{\sqrt{x^2+16}}.$$

$$G'(x) = 8\times \frac{1+\frac{1}{2}(x^2+16)^{-½} \times 2x}{x+\sqrt{x^2+16}} = 8\left[\frac{\sqrt{x^2+16}+x}{\sqrt{x^2+16}\,(x+\sqrt{x^2+16}\,)}\right]$$

$$G'(x) = \frac{8}{\sqrt{x^2+16}}$$

$U(0) = 0$ et $G(0) = 8\ln 4$

U et G ayant la même fonction dérivée, elles sont les primitives d'une même fonction sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$. Il existe donc un réel c tel que :
$\forall\, x \in [0\,,+\infty[\,,\ U(x) = G(x) + c.$

$$\begin{aligned} U(0) - G(0) &= c \\ &= -8\ln 4 \end{aligned}$$

D'où $U(x) = 8\,[\ln(x+\sqrt{x^2+16}\,) - \ln 4] = 8\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$.

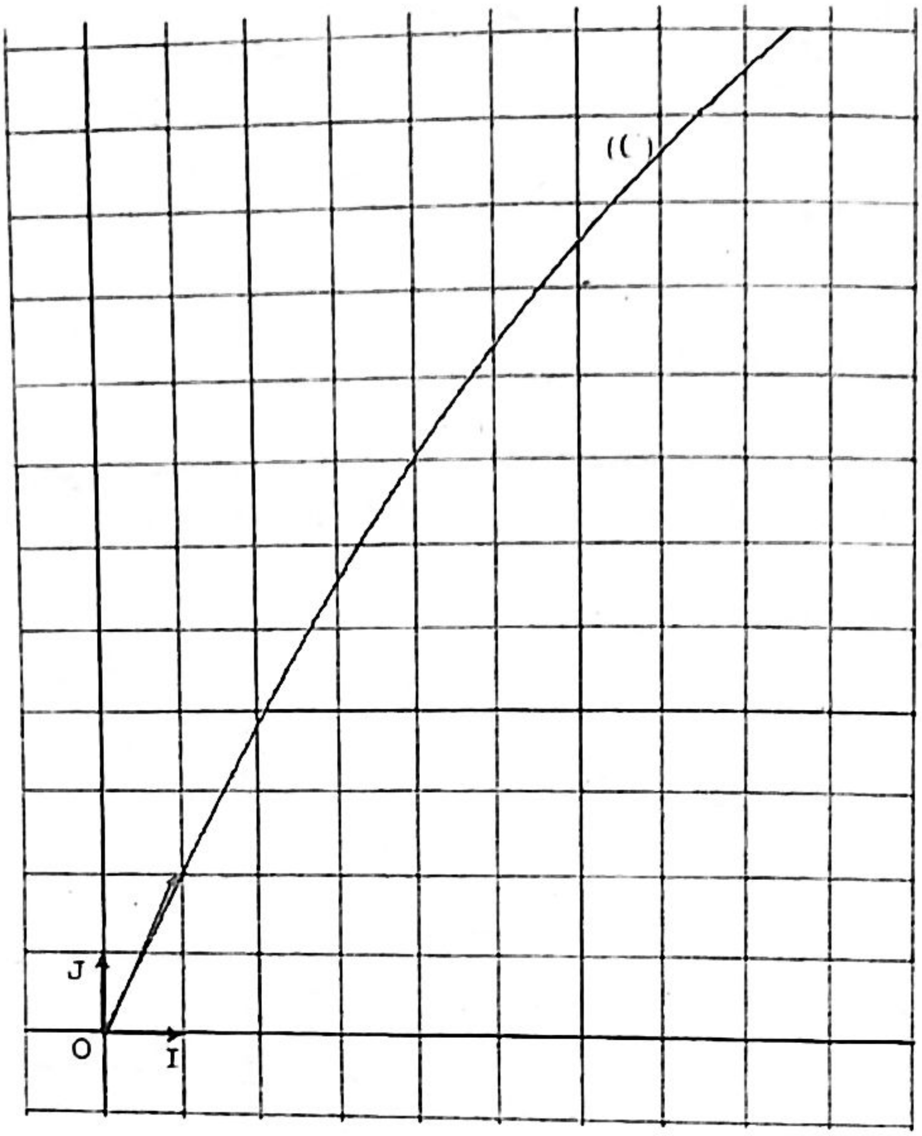
2. a. $\forall\, x \in [0\,;+\infty[\,,\ U'(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x^2+16}} > 0$

U est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

b. $U'(0) = \dfrac{8}{\sqrt{0+16}} = 2$

(C) admet donc une demi-tangente à l'origine de coefficient directeur 2.

c. Courbe (C) (voir figure).



Partie C

1. Puisque N' appartient à ($\mathcal{H}_+$) d'après la partie A5.b., $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à ($\boldsymbol{h}$).
   Soit (x,y) les coordonnées de N_1
   (x',y') les coordonnées de N'

   on a : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$

   Puisque N' appartient à ($\mathcal{H}_+$) alors y' est positif.

   D'où $\begin{cases} x' \geqslant 2\sqrt{2} \\ y' \geqslant 0 \end{cases}$ entraîne $y \geqslant 0$

   N_1 appartient donc à ($\boldsymbol{h}_+$).

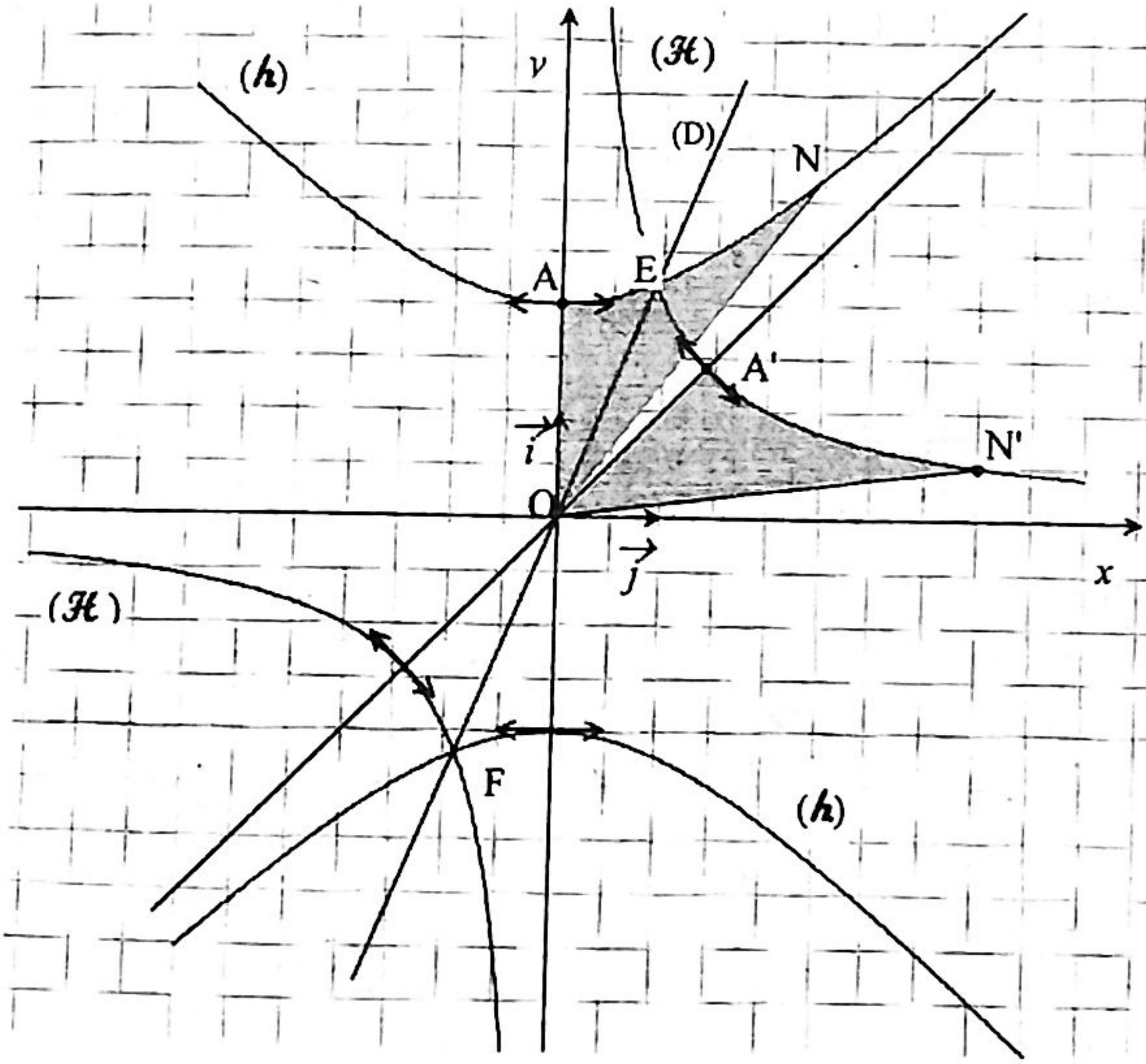
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x' - y')$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x' - \frac{8}{x'}\,) \text{ car N}' \in (\mathcal{H}) \text{ d'équation } y = \frac{x}{8}.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\frac{x'^2 - 8}{x'}\,)$$

d'où $x \geqslant 0$ car $x' \geqslant 2\sqrt{2}$.

2. (Δ') est l'image de (Δ) par R qui est une rotation (donc une isométrie). Or les isométries conservent les aires, donc (Δ) et (Δ') ont la même aire.

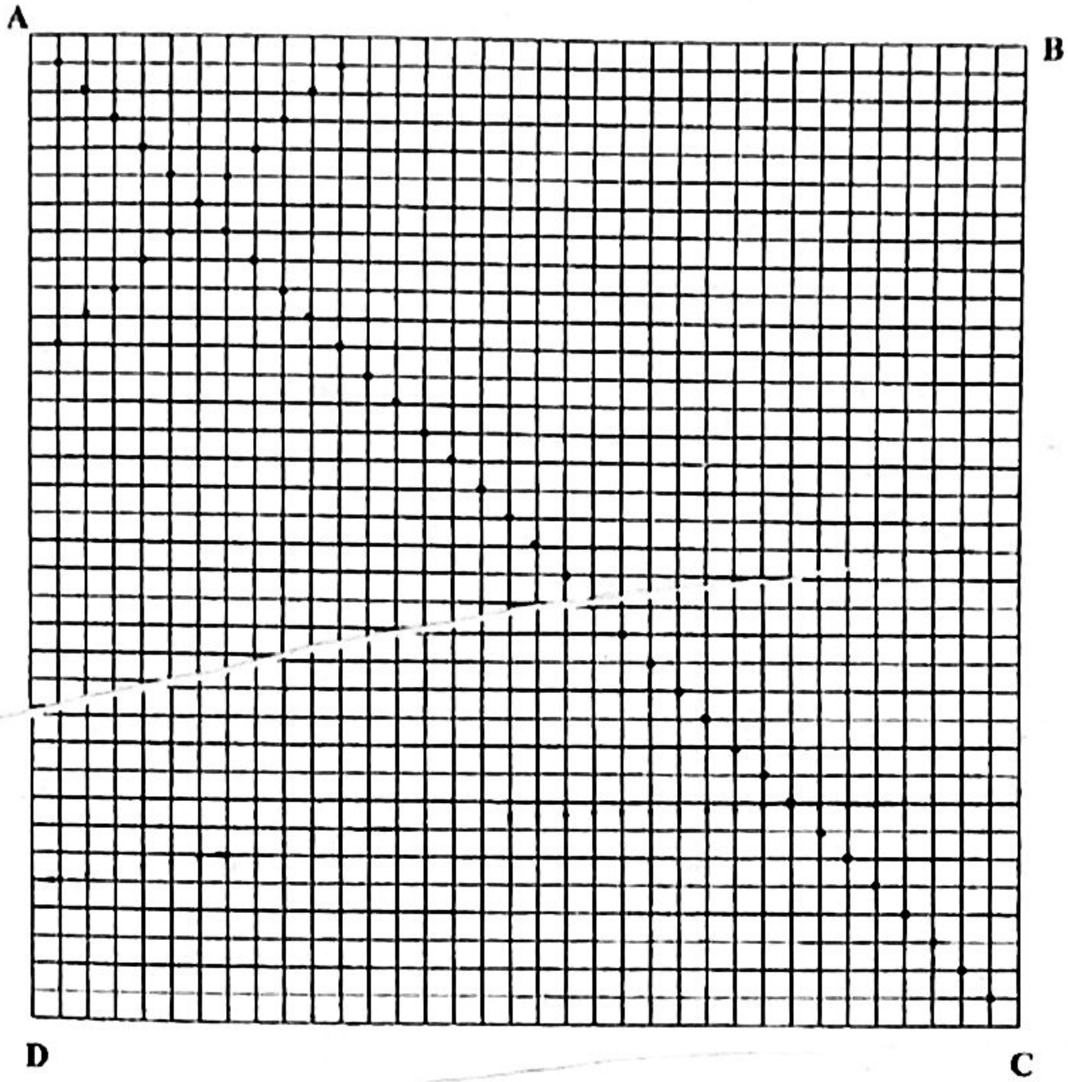


EXAMEN 6

Session de Juin 1996
Série E

EXERCICE 1

1. a. Sur une ligne, il y a 34 nœuds or, il y a 34 lignes qui contiennent les nœuds. Donc le nombre de nœuds est 34×34, c'est-à-dire 1156 (voir quadrillage).



b.1. Le quadrilatère AIMJ est un carré. Donc M est sur la diagonale [AC].
Or sur cette diagonale, il y a 34 nœuds.
Soit P_1 cette probabilité.

$$P_1 = \frac{34}{34 \times 34} = \frac{1}{34}.$$

b.2. Si le périmètre est 24 cm, alors le demi-périmètre est 12 cm.

Les nœuds concernés ont donc pour couple de coordonnées :

(1 ;11) ; (11 , 1)

(2 ,10) ; (10 , 2)

(3 , 9) ; (9 , 3)

(4 , 8) ; (8 , 4)

(5 , 7) ; (7 , 5)

(6 , 6).

Il y a donc 11 nœuds. Soit P_2 cette probabilité.

$$P_2 = \frac{11}{1156}.$$

2. $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) + n.$

   a. S_n est la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

   $$S_n = n\left(\frac{1+n}{2}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

   b. $S_n \leqslant 1225$

   $$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \leqslant 1225$$

   $$\Leftrightarrow n^2 + n - 2450 \leqslant 0$$

   $\Delta = 99^2$

   $n_1 = -50$ et $n_2 = 49$ donc $n \in \,]0\,;\,49]$.

   Il y a donc 49 entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leqslant 1225$.

3. a. D'après 2., il y a 49 valeurs de k pour que $S_n = k$. Appelons P_3 la probabilité du "succès".

   $$P_3 = \frac{49}{1225} = \frac{1}{25}.$$

   b. Appelons P_4 cette probabilité.

   $$P_4 = C_5^3\left(\frac{1}{25}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{25}\right)^4\left(\frac{24}{25}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{25}\right)^5.$$

   $$= \frac{10 \times 24^2 + 5 \times 24 + 1}{25^5}$$

   $$P_4 = \frac{5881}{9765625}$$

EXERCICE 2

Posons $P(z) = (1 - 6i)\ z^2 - (17 + 8i)\ z - 33 + 30i$

1. a. $P(-3) = (-3)^3 + (1 - 6i)(-3)^2 - (17 + 8i)(-3) - 33 + 30i$

$$= -27 + 9 + 51 - 33 + i(-54 + 24 + 30)$$
$$= 60 - 60 + i(54 - 54)$$
$$= 0$$

Donc -3 est une solution de l'équation (E). $z_0 = -3$.

b. $P(z) = (z + 3)(az^2 + bz + c)$. Déterminons a, b et c par division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)\ z - 33 + 30i & z + 3 \\
z^3 + 3\ z^2 & \\
\hline
(-2-6i)z^2 - (17+8i)\ z - 33 + 30i & z^2 - (2+6i)\ z - 11 + 10i \\
(-2-6i)\ z^2 - (6+18i)\ z & \\
\hline
(-11+10i)\ z - 33 + 30i & \\
(-11+10i)\ z - 33 + 30i & \\
\hline
0 \quad + \quad 0 &
\end{array}$$

Résolvons l'équation $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$ (*)

$\Delta = [-(2+6i)]^2 - 4(-11 + 10i) = 12 - 16i$

Cherchons les racines carrées de Δ. Soit δ une racine carrée de Δ.

Posons $\delta = x + iy$. On a $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; $|\delta^2| = x^2 + y^2$

$|12 - 16i| = \sqrt{144 + 256} = 20.$

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$\delta_1 = 4 - 2i$ et $\delta_2 = -4 + 2i$. Les solutions de l'équation (*) sont donc :

$$z' = \frac{2 + 6i + 4 - 2i}{2} = 3 + 2i = z_2$$

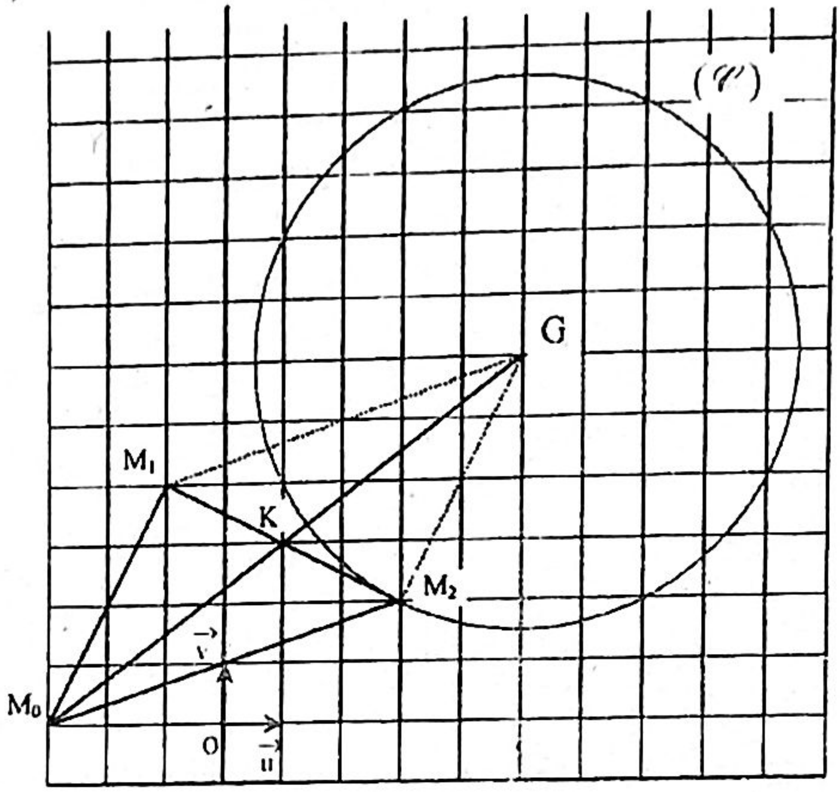
$$z'' = \frac{2 + 6i - 4 + 2i}{2} = -1 + 4i = z_1$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$\{-3\ ;\ -1 + 4i\ ;\ 3 + 2i\}$

2. a. $z_0 = -3$; $z_1 = -1 + 4i$; $z_2 = 3 + 2i$

$M_0\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $M_1\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ $M_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



b. • $\overrightarrow{M_1M_0}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{M_1M_2}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$M_1M_0 = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$M_1M_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

• $\overrightarrow{M_1M_0}.\overrightarrow{M_1M_2} = -2 \times 4 + (-4)(-2) = 0.$

$M_1M_0 = M_1M_2$ et $\overrightarrow{M_1M_0} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle et isocèle en M_1.

3. a. Soit K le milieu $[M_1M_2]$. G est le barycentre des points pondérés $(M_0,-1)$ et $(K,2)$.

On a donc : $-\overrightarrow{M_0G} + 2\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{M_0G} + 2\overrightarrow{KM_0} + 2\overrightarrow{M_0G} = \vec{0}$

$\overrightarrow{M_0G} = 2\overrightarrow{M_0K}$

Donc K est le milieu du segment $[M_0G]$. Par conséquent G est le symétrique de M_0 par rapport à K.

Méthode de construction de G

Construire le milieu K de $[M_1M_2]$ puis le symétrique G de M_0 par rapport à K.

b. $-MM_0^2 + MM_1^2 + MM_2^2 = -GM_2^2$

$\Leftrightarrow MG^2 - GM_0^2 + GM_1^2 + GM_2^2 = -GM_2^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = GM_0^2 - GM_1^2 - 2GM_2^2$

Calculons GM_0^2 ; GM_1^2 et GM_2^2.

K est le milieu commun des segments $[M_0G]$ et $[M_1M_2]$, donc $M_0M_1GM_2$ est un parallélogramme.

- $GM_1 = M_0M_2$

  $GM_1^2 = M_0M_2^2 = (3+3)^2 + (2-0)^2 = 40$
- $GM_2 = M_0M_1 = 2\sqrt{5}$

  $GM_2^2 = 20$
- $GM_0 = 2M_0K$.

M_0M_1K est un triangle rectangle en M_1 et $M_1K = \dfrac{M_1M_2}{2} = \sqrt{5}$

$M_0K^2 = M_0M_1^2 + M_1K^2 = 20 + 5 = 25$

$GM_0^2 = 4M_0K^2 = 100$

$$\begin{aligned} GM^2 = GM_0^2 - GM_1^2 - 2\,GM_2^2 &\Leftrightarrow \quad GM^2 = 100 - 40 - 2 \times 20 \\ &\Leftrightarrow \quad GM^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow \quad GM = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$GM = 2\sqrt{5} = GM_2$; donc $M_2 \in (\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ est donc le cercle de centre G et de rayon GM_2.

Construction de $(\mathscr{C})$, (voir figure).

PROBLÈME

Partie A

1. Étude de la continuité de f_n à droite en 0.

$D_{f_n} = [0 \ ; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0.$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = f_n(0)$. Donc f_n est continue à droite en 0.

2.

- 1^{er} *cas* : $n = 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f_1(x)-1}{x} = \dfrac{x\ln x - x}{x} = \ln x - 1.$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_1(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x - 1 = -\infty.$$

f_n n'est pas dérivable à droite en 0 mais la représentation graphique de f_1 admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

- 2^e *cas* : $n > 1$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} = \frac{x^n \ln x - \frac{x^n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{x}$$

$$= x^{n-1}\ln x - \frac{x^{n-1}}{n}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{n} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^{n-1}\ln x - \frac{x^{n-1}}{n} \right)$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{n-1}\ln x = 0$$

f_n est donc dérivable à droite en 0 et a pour nombre dérivé 0.
La représentation graphique de f_n admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

3.

- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + \dfrac{x^n}{x} - \dfrac{1}{n}\left(nx^{n-1}\right) = nx^{n-1}\ln x.$

$f_n'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
$f_n'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$
$f_n'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

f_n est donc strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\left(\ln x - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{nx} = +\infty$

(C_n) admet donc une branche parabolique de direction (OJ).

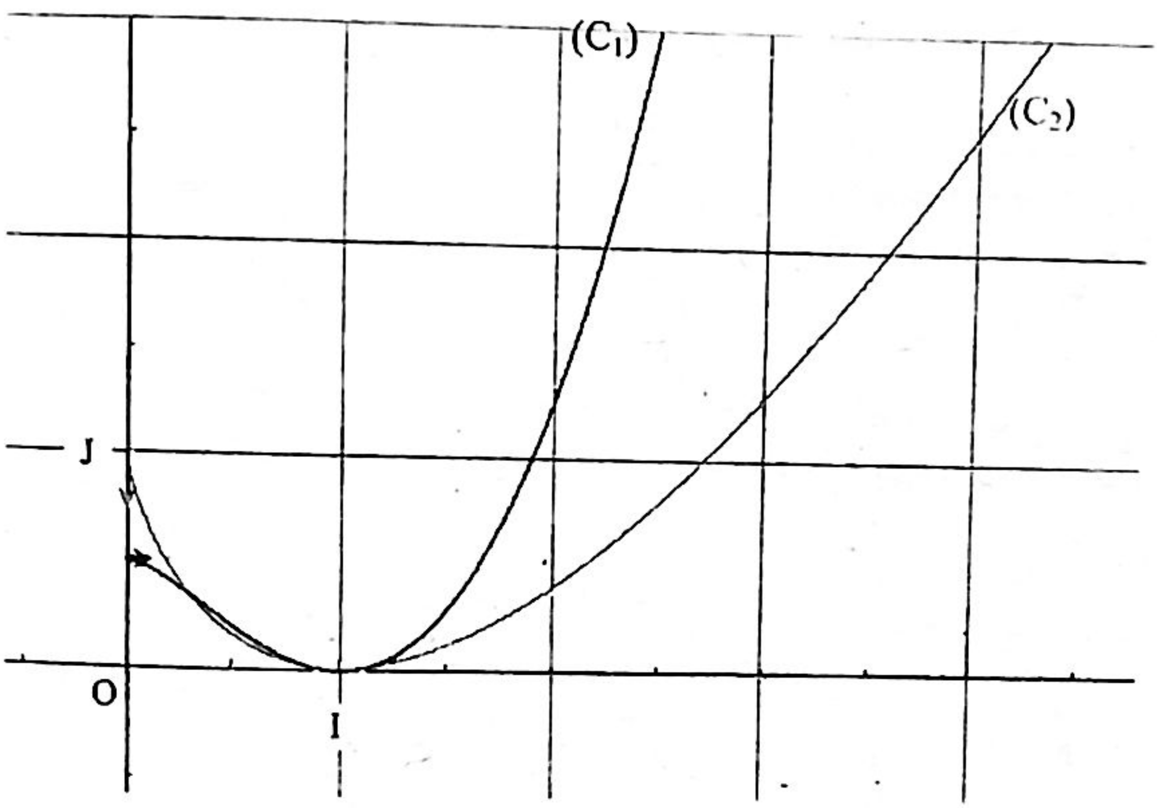
Tableau de variation de f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation de f_n $(n>1)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construction de (C_1) et (C_2)



Partie B

1. Calculons $\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx$.

Posons : $U(x) = \ln(x)$ et $V'(x) = x^2$

On a : $U'(x) = \frac{1}{x}$; choisissons $V(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\lambda}^{1}$$

$$= -\frac{1}{9} - \left(\frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda - \frac{\lambda^3}{9}\right)$$

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx = \frac{\lambda^3}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda - \frac{1}{9}.$$

2. $$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1}\left[x^2 \ln x dx - \frac{1}{2}(x^2-1)\right]dx$$

$$= \int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx - \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{1}(x^2-1)dx$$

$$= \int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\lambda}^{1}$$

$$= \frac{\lambda^3}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - 1 - \frac{\lambda^3}{3} + \lambda\right].$$

$$= \frac{5\lambda^3}{18} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda + \frac{2}{9} - \frac{\lambda}{2}$$

$$I(\lambda) = \frac{5\lambda^3}{18} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda + \frac{2}{9}.$$

3. $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} I(\lambda) = \frac{2}{9}$ car $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} \lambda^3 \ln\lambda = 0$.

L'aire en cm^2 de la portion du plan limité par la courbe (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $\frac{2}{9} \times 4$ cm^2, c'est-à-dire $\frac{8}{9}$ cm^2.

Partie C

1. $\forall\, x \in \,]0\,;1[\;\; g(x) = f_2(x) - x$

   $g'(x) = f_2'(x) - 1$. Or $\forall\, x \in \,]0\,;1[\,,\, f_2'(x) < 0$ donc $f_2'(x) - 1 < 0$.

   Donc g est strictement décroissante sur $]0\,;1[$.

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x) - x = \dfrac{1}{2}$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x) - x = -1$

   Tableau de variation de g

x	0		1
g'		$-$	
$g(x)$	$1/2$	$\searrow$	-1

   g est continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$ et $g(\,]0\,;1[\,) = \,]-1;\dfrac{1}{2}[$.

   g est donc une bijection de $]0\,;1[$ sur $]-1;\dfrac{1}{2}[$. $0 \in \,]-1;\dfrac{1}{2}[$; donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0\,;1[$.

2. a. $\forall\, x \in \,]0\,;1]\,,\, f'_2(x) = 2x\ln x$

   $f_2''(x) = 2\,(1 + \ln x)$

   $f_2''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$

   $f_2''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-1}$

   $f_2''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{-1}$

   f_2' est donc strictement décroissante sur $]0;\, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1};1]$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2'(x) = 0$

   Tableau de variation de f_2'

x	0		e^{-1}		1
$f_2''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	0

   $f_2''(e^{-1}) = -2e^{-1}$

b. On sait que $f_2'(0) = 0$.
D'après le tableau de variation de f_2', $-2e^{-1}$ est le minimum absolu de f_2' sur $[0;1]$; 0 est le maximum absolu de f_2' sur $[0;1]$.
Donc $\forall x \in [0;1]$, $-2e^{-1} \leqslant f_2'(x) \leqslant 0$.

$0 \leqslant -f_2'(x) \leqslant \dfrac{2}{e}$

d'où $\left|f_2'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{e}$ pour tout x de $[0;1]$.

3. a. $U_0 \in [0;1]$
Supposons que pour un entier naturel n, $U_n \in [0;1]$ et démontrons que $U_{n+1} \in [0;1]$.
On sait d'après A.3 que $f_2([0;1]) = [0;\frac{1}{2}]$ et $[0;\frac{1}{2}] \subset [0;1]$
Donc si $U_n \in [0;1]$, alors $f(U_n) \in [0;1]$, par conséquent $U_{n+1} \in [0;1]$
Conclusion
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0;1]$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|U_{n-1} - \alpha\right| = \left|f(U_n) - f(\alpha)\right|$
$U_n \in [0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$
Pour tout x compris entre U_n et α, x appartient à $[0;1]$ et on a $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{e}$
D'après l'inégalité des accroissements finis,
$\left|f_2(U_n) - f(\alpha)\right| \leqslant \dfrac{2}{e}\left|U_n - \alpha\right|$ c'est-à-dire $\left|U_{n-1} - \alpha\right| \leqslant \dfrac{2}{e}\left|U_n - \alpha\right|$.

c. $\left|1 - \alpha\right| \leqslant \left|1 - \alpha\right|$

Supposons que pour un entier naturel n, $\left|U_n - \alpha\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{e}\right)^n \left|1 - \alpha\right|$ et

démontrons que $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{e}\right)^{n+1} \left|1 - \alpha\right|$

$$\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{2}{e}\left|U_n - \alpha\right|$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \left|1 - \alpha\right|.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|U_n - \alpha\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{e}\right)^n \left|1 - \alpha\right|$

d. $\left|\dfrac{2}{e}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^n \left|1 - \alpha\right| = 0$

Par suite $\lim U_n = \alpha$.

EXAMEN 7 — Session de Remplacement 1996

Série E

EXERCICE 1

1. a. La composée d'une rotation d'angle non nul de mesure α et d'une translation est une rotation d'angle de mesure α.

   Donc f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

   b. $t(O) = O'$ et $r(O') = O'$ donc $f(O) = O'$.
   Par conséquent l'image de $(\mathscr{C})$ par f est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O' et de rayon R.

   c. f est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

   Comme $f(O) = O'$, Ω est tel que $\Omega OO'$ est un triangle équilatéral direct ; ce qui permet de construire Ω.
   Construction de Ω (voir figure).

2. a. $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

   $\Omega MM'$ est un triangle isocèle où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral direct.

   b. (ΩI) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}}) = \frac{\pi}{6}$

   ΩMI est un triangle rectangle en I et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}}) = \frac{\pi}{6}$

   $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\Omega I}{\Omega M} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $\Omega I = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega M$

   Cette similitude directe S, de centre Ω, a pour rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

   c. Déterminons S(O).
   $\Omega OO'$ est un triangle équilatéral direct.

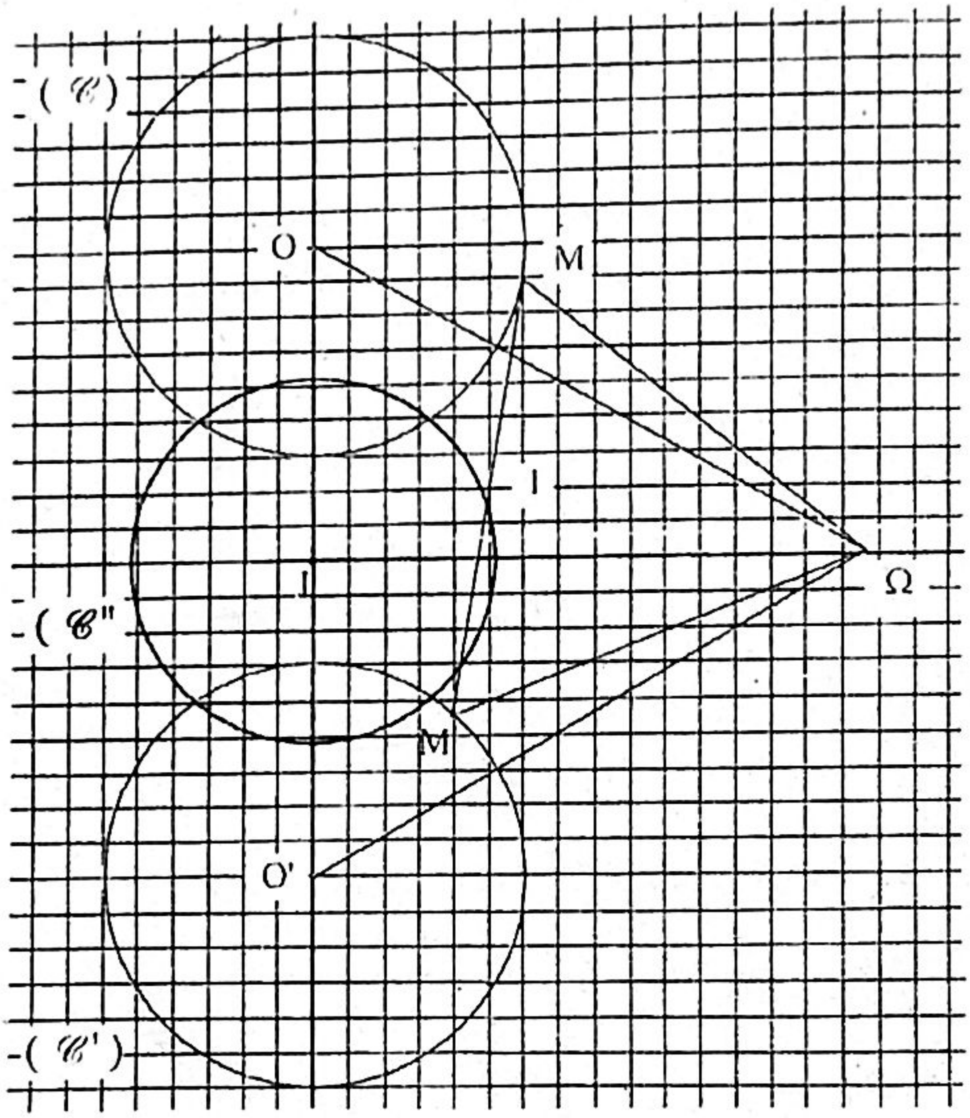
Soit J le milieu de [OO']. On a :

$$\begin{cases} \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega J}}) = \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\Omega J}{\Omega 0} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc S(O) = J

Lorsque M décrit ($\mathscr{C}$), I décrit le cercle ($\mathscr{C}''$) de centre J et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$R.

Construction : on construit le cercle de centre J et de rayon $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.



EXERCICE 2

Posons E = { 1 ;2 ;3 ;....... ;49 ;50}.

Soit Ω l'ensemble des résultats. $\Omega = E \times E$. Donc Card $\Omega = 50 \times 50 = 2500$

1. a. $P(a = b) = \dfrac{50}{2500} = \dfrac{1}{50}$

   En effet l'ensemble {(1,1) ; (2,2) ; (3,3) ;... ; (50 ;50)} a 50 éléments

   b. $\{(a,b) / a+b = 20\}$= {(1;19) ; (2 ;18) ; (3;17) ; (4;16) ; (5; 20) ; (6 ;14) ; (7;13) ; (8 ;12) ; (9 ;11) ; (10;10) ; (11 ; 9) ; (12 ;8) ; (13;7) ; (14 ; 6) ; (15;5) ; (16 ; 4) ; (17 ;3) ; (18 ;2); (19 ; 1)}.

   Il y a 19 cas favorables

   $P(a + b = 20) = \dfrac{19}{2500}$

   c. Il y a 36 nombres entiers compris entre 15 et 50. Pour chacun de ces entiers, il y a 50 couples solutions. Par conséquent, le nombre de couples (a,b) tels que $b > 15$ est 36×50.

   $$P(b > 15) = \frac{36 \times 50}{2500} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$$

   d. $\{(a,b) / b > a\}$

   Si $a = 1$, on a 50 couples solutions

   Si $a = 2$, on a 49 couples solutions

   ....

   Si $a = 49$, on a 2 couples solutions

   Si $a = 50$, on a 1 couple solution.

   Le nombre de cas favorables est

   $$50 + 49 + 48 + \dots + 2 + 1 = \frac{50(1 + 50)}{2} = 25 \times 51$$

   $$P(b > a) = \frac{25 \times 51}{2500} = \frac{51}{100} = 0,51.$$

2. Soit E l'événement : " $b > a$ " est réalisé au moins 2 fois.

$\bar{E}$ est l'événement : " $b > a$ " est réalisé au plus 1 fois.

$$P(\bar{E}) = C_5^0(0{,}49)^5 + C_5^1(0{,}51)\times(0{,}49)^4$$

$$P(\bar{E}) \simeq 0{,}18.$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$
$$P(E) \simeq 1 - 0{,}18.$$
$$P(E) \simeq 0{,}82.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $Df_n = \mathbb{R}$.
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$, et $f_n(-x) = f_n(x)$ donc f_n est paire

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.
   Par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$f_0'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f_0'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$
$f_0'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$
f_0 est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On remarque que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_0).
Construction de (C_0) (voir figure).

3. Cherchons les solutions de l'équation : $\forall \quad n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

- $n \geqslant 1,\ f_n(0) = 0\ ;\ f_0(0) = 1$
- $n \geqslant 1,\ f_n(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ f_0(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $n \geqslant 1,\ f_n(-1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ f_0(-1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc toutes les courbes C_n ($n \in \mathbb{N}$) passent par les points $A(1; \dfrac{\sqrt{2}}{2})$

et $A'(-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

4. $n \geqslant 1$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{2n} f_0(x)$.

$$f_n'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{2n}(-x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2nx^{2n-1}(1+x^2) - x^{2n+1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^{2n-1}(2n+2nx^2-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_n'(x) = \frac{[(2n-1)x^2+2n]x^{2n-1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

5. a. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_1(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_2(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^4}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = \dfrac{(x^2+2)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$
$f_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$
f_1 est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = \frac{(3x^2+4)x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f_2'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$
$f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

f_2 est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. • $f_1(x) - x = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x$

$$= \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x(x-\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x(x-\sqrt{1+x^2}\,)(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2}\,)} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2}\,)}$$

$$= \frac{-x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,(x+\sqrt{1+x^2}\,)} \text{ pour } x \neq 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,(x+\sqrt{1+x^2}\,)}$$

$= 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{1+x^2} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) - x = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_1) en $+\infty$.

• Position de (C_1) par rapport (Δ).

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1(x) - x = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2}\,)}$

$f_1(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
$f_1(x) - x < 0 \Leftrightarrow x > 0,$
$f_1(x) - x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$
Sur $]-\infty\,;0[$, (C_1) est au-dessus de (Δ).
Sur $]0\,;+\infty[$, (C_1) est en dessous (Δ).
(C_1) et (Δ) se coupent au point O.

- Construction de (C_1) et (C_2) (voir figure).

PARTIE B

$n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geqslant 0$ donc $\forall x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \geqslant 0$.
Par conséquent $I_n \geqslant 0$.

2. $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$0 \leqslant x \leqslant 1$
$\Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$
$\Rightarrow 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$
$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$
$\Rightarrow \frac{x^{2n}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^{2n}$
$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{2}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,dx$
$\Rightarrow \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$
D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0.$

4. a. f_0 est décroissante sur $[0\,;1]$
$\forall x \in [a_i\,;a_{i+1}]$,
$f_0(a_{i+1}) \leqslant f_0(x) \leqslant f_0(a_i)$
$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_{i+1})dx \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_i)dx$

$$[a_{i+1}-a_i]f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant [a_{i+1}-a_i]f_0(a_i)$$

or $a_{i+1}-a_i = 02$.

Donc $0{,}2f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant 0{,}2f_0(a_i)$.

b. $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$0{,}98 < f_0(0{,}2) < 0{,}99$

$0{,}92 < f_0(0{,}4) < 0{,}93$

$0{,}85 < f_0(0{,}6) < 0{,}86$

$0{,}78 < f_0(0{,}8) < 0{,}79$

$0{,}70 < f_0(1) < 0{,}71$

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx$$

$$= \int_0^{0,2} f_0(x)dx + \int_{0,2}^{0,4} f_0(x)dx + \int_{0,4}^{0,6} f_0(x)dx + \int_{0,6}^{0,8} f_0(x)dx + \int_{0,8}^{1} f_0(x)dx$$

$0{,}2\,[f_0(1)+f_0(0{,}8)+f_0(0{,}6)+f_0(0{,}4)+f_0(0{,}2)] \leqslant I_0 \leqslant 0{,}2\,[f_0(0{,}8)+f_0(0{,}6)$
$+f_0(0{,}4)+f_0(0{,}2)+f_0(0)]$

$0{,}2 \times 4{,}23 \leqslant I_0 \leqslant 0{,}2 \times 4{,}57$

$0{,}846 \leqslant I_0 \leqslant 0{,}914$

5. a. $n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Posons $U(x) = x^{2n+1}$ et $V'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : $U'(x) = (2n+1)\,x^{2n}$; choisissons $V(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$I_{n+1} = [x^{2n+1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 (2n+1)x^{2n}\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= -\int_0^1 (2n+1)x^{2n} \times \frac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} - (2n+1)\left[\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right]$$

$$= \sqrt{2} - (2n+1)\,(I_n + I_n+1)$$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)\,(I_n + I_{n+1})$

b. $I_1 = \sqrt{2} - (I_0 + I_1)$

$I_1 = \sqrt{2} - I_0 - I_1$

$2I_1 = \sqrt{2} - I_0$

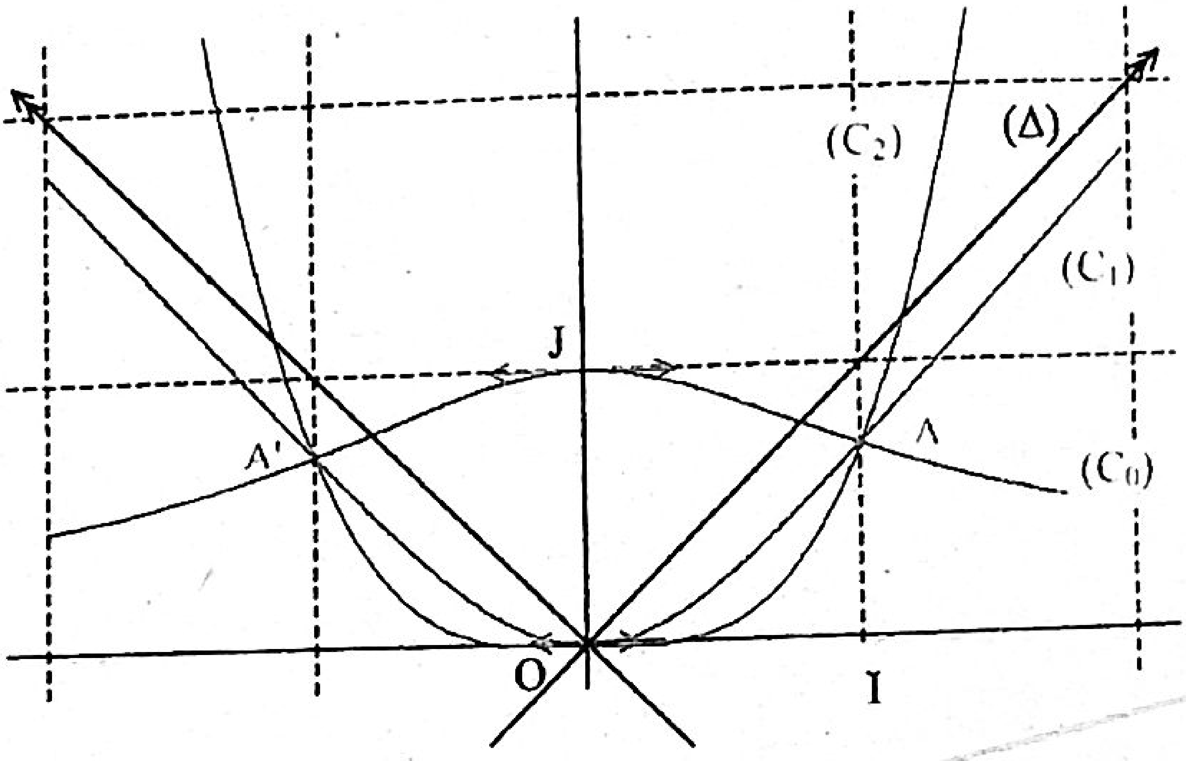
$I_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0)$

On sait que $\quad 0,846 \leqslant I_0 \leqslant 0,914$

$$\begin{array}{c} -9,14 \leqslant -I_0 \leqslant -0,846 \\ 1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415 \\ \hline 0,500 \leqslant \sqrt{2} - I_0 \leqslant 0,569 \end{array}$$

$$0,25 \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) \leqslant 0,2845$$

$$0,25 \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) \leqslant 0,29$$



EXAMEN 8

Session de Juin 1997
Série C

EXERCICE 1

1. a. $J_0 = \int_0^{\pi/3} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x \, dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u(x) = \sin x$

$u'(x) = \cos x$

Alors $(\sin x)^n \cos x = u^n(x)\, u'(x)$.

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto u^n(x)\, u'(x)$ est la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} u^{n+1}(x)$.

On a : $J_n = \dfrac{1}{n+1}[(\sin x)^{n+1}]_0^{\pi/3}$

$$J_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$$

$J_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{0+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0+1}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $J_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

b. $I_2 - I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{-\cos^2 x}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} -\cos x \, dx$$

$$= [-\sin x]_0^{\pi/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$n \geqslant 1$, $I_{n+2} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} (\sin^2 x - 1) dx$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} \cos^2 x \, dx$$

$$= -\int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x \, dx = -J_n$$

$$I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \text{ pour } n \geqslant 1.$$

$$I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1}$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

2. a. $I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

On pose $u(x) = \cos x$,

$u'(x) = -\sin x$ donc $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$

$$I_1 = -\int_0^{\pi/3} \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = -\Big[\ln|u(x)|\Big]_0^{\pi/3}$$

$I_1 = -(\ln\frac{1}{2} - 0)$ d'où $I_1 = \ln 2$

b. D'après 1.b, $I_3 - I_1 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{8}$

$I_3 = I_1 - \frac{3}{8}$ d'où $I_3 = -\frac{3}{8} + \ln 2$

3. a.
$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left[2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos x\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\\ &= (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})\\ &= \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2})\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2})\\ &= 2\,(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4})\,(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2})\end{aligned}$$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x = 2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$

b. $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{3}]$, $u'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \times \frac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \times \frac{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\cos x}$$

d'où $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Par conséquent une primitive de f sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$ est

$F : x \mapsto \ln|u(x)|$ où $u(x) = \tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$

c. $I_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x}\,dx$

$$= \left[\ln(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \ln[\tan(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})]$$

d'où $I_0 = \ln(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1})$ car $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$I_0 = \ln(\sqrt{3}+2)$

On a : $I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d'après 1.b.)

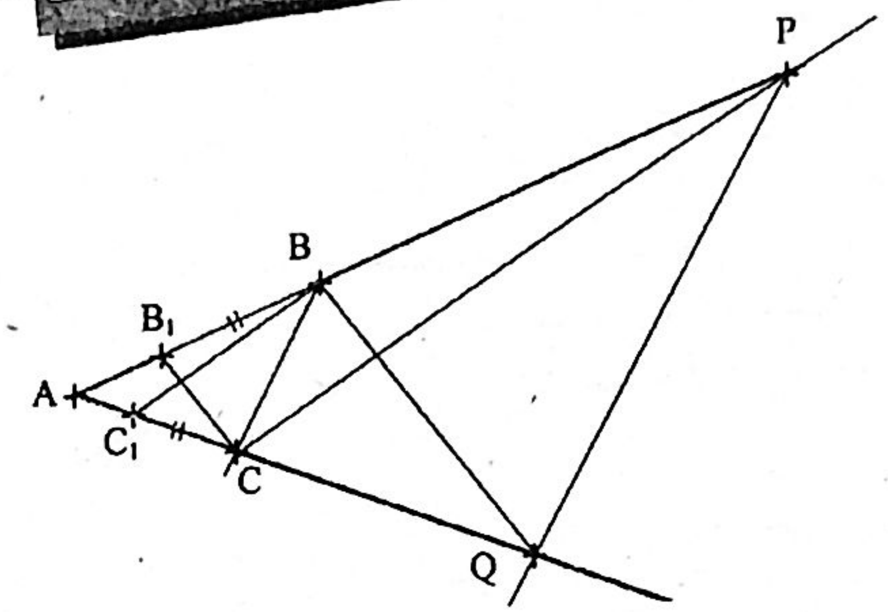
D'où $I_2 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $I_4 - I_2 = -\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ (d'après 1.b.)

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

d'où $I_4 = \frac{-5\sqrt{3}}{8} + \ln(\sqrt{3}+2)$.

EXERCICE 2



1. (BC) //(PQ)
   (BP) $\cap$ (QC) = {A};
   donc il existe une homothétie *h* transformant P en B et Q en C. Son centre est A.
2. a. Construction de B_1 et de C_1 (voir figure).

$$h$$

A	A
P	B
Q	C
B	B_1
C	C_1

* B_1 est tel que (BQ) // (C B_1) et $B_1 \in$ (AB)
* C_1 est tel que (B C_1) // (P C) et $C_1 \in$ (AC).

b. si *k* est le rapport de h alors $AC = |k| AQ$ et $BB_1 = |k|\ BP$

or $AQ = BP$, donc $AC = |k|\ BP = BB_1$

Par conséquent, $AC = BB_1$.

3. RST est un triangle.
   I et J sont deux points tels que :

$$\begin{cases} (IJ) \mathbin{//} (ST) \\ I \in (SR) \setminus \{S\,;R\} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI \end{cases}$$

a. RST est isocèle en R.

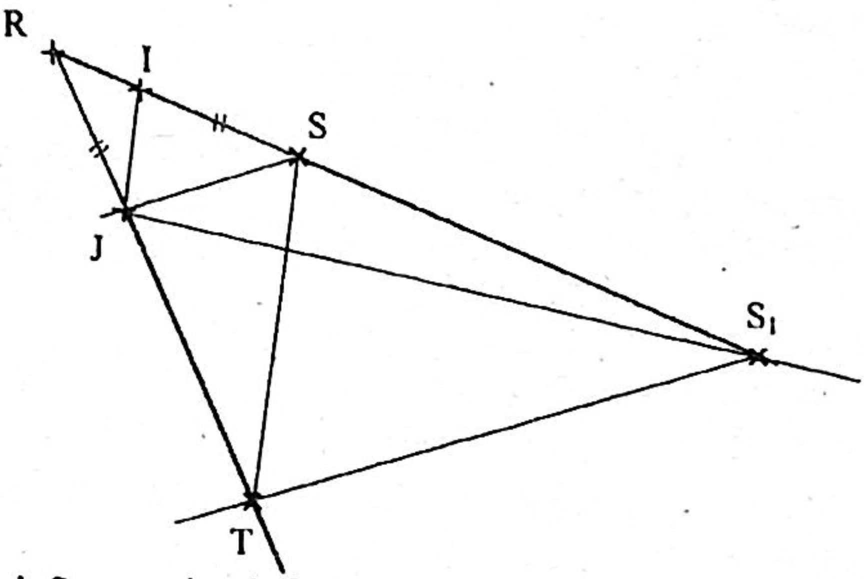
Soit I et J les milieux respectifs de [SR] et [RT].

On a bien :

$$\begin{cases} (IJ) \mathbin{//} (ST) \\ I \in (SR) - \{S\,;R\} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI \end{cases}$$

Les points I et J sont des solutions au problème posé.

b. RST est un triangle tel que $RS \neq RT$.



Soit S_1 un point de [RS) tel que $SS_1 = RT$.

Soit J le point de (RT) tel que $(SJ) \mathbin{//} (TS_1)$.

I est le point de (RS) tel que $(IJ) \mathbin{//} (ST)$.

Soit h l'homothétie telle que :

h

R	R
S_1	S
T	J
S	I

avec $SS_1 = RT$.

D'après les premières questions, en prenant :

R pour A

J pour C

S pour B

I pour B_1,

On a SI = RJ

PROBLÈME

Partie A

1. *Continuité en 0*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\ln(x)}{x+1} = 0 = f(0) \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \end{cases}$$

donc f est continue à droite en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \end{cases}$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. $\forall x \in]0\,;+\infty[\,;\qquad \varphi(x) = \ln(x) + x + 1.$

   a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} + 1.$

   et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >0}} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$

   φ est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et
   $\varphi(\,]0\,;+\infty[\,) = \mathbb{R}$, donc φ est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   $0 \in \mathbb{R}$, il existe par conséquent un unique réel β appartenant à $]0\,;+\infty[$
   tel que $\varphi(\beta) = 0$.
   On a $\varphi(0{,}27) \simeq -0{,}04$ et $\varphi(0{,}28) \simeq 0{,}007$
   $\varphi(0{,}27) \times \varphi(0{,}28) < 0$ donc $\beta \in]0{,}27\,;0{,}28[$.

3. a. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{[\ln(x)+1](x+1) - x\ln(x)}{(x+1)^2} = \frac{x\ln(x) + \ln(x) + x + 1 - x\ln(x)}{(x+1)^2}$$

   donc $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x+1)^2}.$

   $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$.

b. $f(\beta) = \dfrac{\beta \ln(\beta)}{\beta + 1}$

$\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln(\beta) = -\beta - 1$

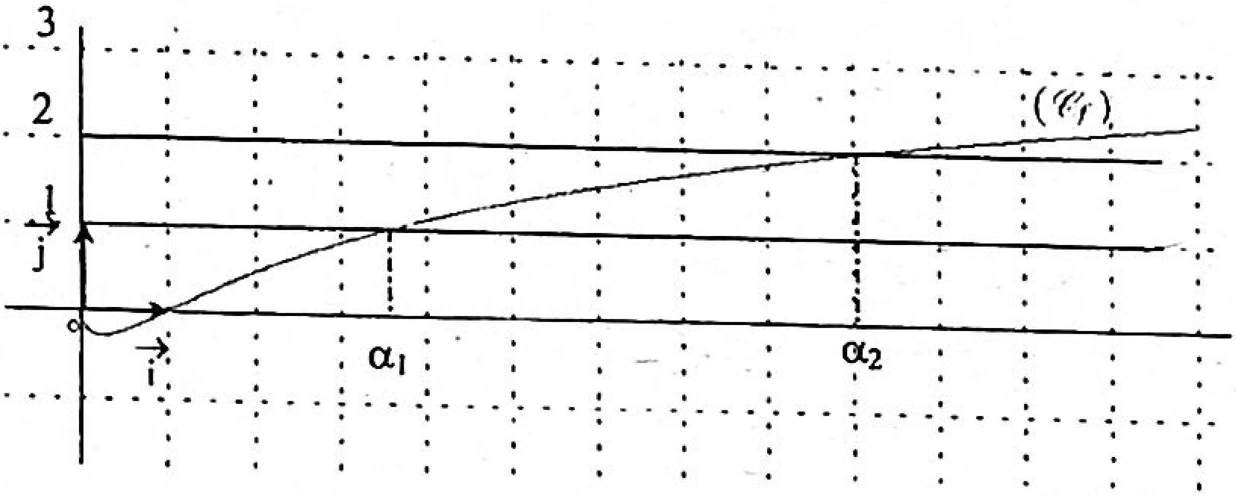
Donc $f(\beta) = \dfrac{\beta(-\beta - 1)}{\beta + 1} = -\beta$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1} \cdot \ln x \right) = +\infty.$

d. Comme $\varphi(\beta) = 0$ et φ est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ alors, $\forall\, x \in\,]0\,;\beta[$, $\varphi(x) < 0$ et $\forall\, x \in\,]\beta\,;+\infty[$ $\varphi(x) > 0$. Par suite f est strictement décroissante sur $]0\,;\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta\,;+\infty[$. d'où le tableau de variation de f.

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\beta$	↗	$+\infty$

4. **Construction de (C) (voir figure).**



Partie B

1. a. f est continue et strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$ et $f([\beta;+\infty[) = [-\beta;+\infty[$.

f est donc une bijection de $[\beta;+\infty[$ sur $[-\beta;+\infty[$.

$1 \in [\beta;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[\beta;+\infty[$.

$[3;4] \subset [\beta;+\infty[$

$f(3) \simeq 0{,}82$ et $f(4) \simeq 1{,}1$

$f(3) \leqslant 1 \leqslant f(4)$

f étant strictement croissante, on a : $3 \leqslant \alpha \leqslant 4$ c'est-à-dire $\alpha \in [3;4]$

b. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x\ln(x)}{x+1} = 1$

$$\Leftrightarrow x\ln(x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1+\frac{1}{x}}$$

donc les équations $f(x) = 1$ et $x = e^{1+\frac{1}{x}}$ sont équivalentes.

2. a. $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}$

on a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) < 0$.

Par conséquent g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b. $x \in [3;4] \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant \frac{4}{3}$$

la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$e^{5/4} \leqslant e^{1+\frac{1}{x}} \leqslant e^{4/3} \Leftrightarrow e^{5/4} \leqslant g(x) \leqslant e^{4/3}$.

$e^{5/4} \simeq 3{,}49$ et $e^{4/3} \simeq 3{,}79$ d'où $[e^{5/4}; e^{4/3}] \subset [3;4]$

d'où $\forall x \in [3;4]$, $g(x) \in [3;4]$

c. $\forall x \in [3;4]$ $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2}g(x)$

or $0 < g(x) \leqslant 4$ et $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{9}$ donc $|g'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$

d'où $\forall x \in [3;4]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 3$, $U_0 \in [3\,;4]$. Supposons que pour un entier naturel n, $U_n \in [3\,;\,4]$ et démontrons que $U_{n+1} \in [3\,;\,4]$.
$U_{n+1} = g(U_n)$ or $\forall\, x \in [3\,;4]$, $g(x) \in [3\,;4]$ donc si $U_n \in [3\,;\,4]$ alors $g(U_n) \in [3\,;4]$ c'est-à-dire $U_{n+1} \in [3\,;\,4]$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3\,;\,4]$

b. g est dérivable sur $[3\,;\,4]$, $\alpha \in [3\,;\,4]$, $U_n \in [3\,;\,4]$ et $\forall\, x \in [3\,;4]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|\,g(U_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\,U_n - \alpha|$

$|\,U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|U_n - \alpha|$ d'après l'inégalité des accroissements finis.

En utilisant l'équivalence $e^{1+\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow f(x) = 1$ (voir 1.b.), on a $g(\alpha) = \alpha$.

Démontrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$

Pour $n = 0$ $|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$

$3 < \alpha < 4$ donc $-4 < -\alpha < -3$
$-1 < 3 - \alpha < 0$
d'où $|3 - \alpha| < 1$.

Supposons que pour un entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et démontrons

que $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Or $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|U_n - \alpha|$ (d'après 3.a)

donc $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$

d'où $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \alpha$

d. U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $|U_n - \alpha| < 10^{-2}$.

Comme $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-2}$

$$2^n > 10^2$$
$$n \ln 2 > 2 \ln 10$$
$$n > \frac{2 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\frac{2 \ln 10}{\ln 2} \simeq 6{,}64 \qquad \text{donc } n \geq 7.$$

Partie C

1. $n \in \mathbb{N}^*$

D'après A.3.d., $\beta > 0$ et $f([0\,;\beta[\,) = [-\beta\,;0\,[$ donc l'équation $f(x) = n$, n'a pas de solution dans $[0\,;\beta[$.

f est une bijection de $[\,\beta\,;+\infty[$ sur $[-\beta\,;+\infty\,[$ et $n \in [-\beta\,;+\infty[$ donc il existe un unique réel α_n dans $[\,\beta\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha_n) = n$.

2. a. $f(\alpha_n) = n$

$$f(e^n) = \frac{n\,e^n}{e^n+1} \quad \text{et} \quad \frac{e^n}{e^n+1} \leq 1 \quad \text{donc} \frac{n\,e^n}{e^n+1} \leq n$$

d'où $f(e^n) \leq n$

c'est-à-dire que $f(e^n) \leq f(\alpha_n)$. f est strictement croissante sur $]\,\beta\,;+\infty[$

donc $e^n \leq \alpha_n$ car $n \geq 1 \Rightarrow e^n \geq e \Rightarrow e^n \geq \beta$.

b. $f(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1} = n$

$$\frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1} = n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(\alpha_n)}{1+\alpha_n} = \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(\alpha_n) = \frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_n = e^{\frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_n = e^{\frac{n}{\alpha_n}} \times e^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}.$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n \geq e^n > 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < \dfrac{1}{\alpha_n} \leq \dfrac{1}{e^n} \;\Leftrightarrow\; 0 < \dfrac{n}{\alpha_n} \leq \dfrac{n}{e^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{e^n}\right) = 0$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) = 0$

par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = 1$.

$\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite qui converge vers 1.

EXAMEN 9 — Session de Remplacement 1997 — Série C

EXERCICE 1

1. a. On remplace p par -1 et q par -1 dans l'équation (E) et on obtient :
$11p - 7q = -11 + 7 = -4$
donc $(-1, -1)$ est une solution de E.

b. $\begin{cases} 11p - 7q = -4 \\ 11(-1) - 7(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 11(p+1) - 7(q+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 11(p+1) = 7(q+1).$ (*)

Donc 11 divise $7(q+1)$. Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 11 divise $q+1$.
Par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $q + 1 = 11k$.
On obtient $q = -1 + 11k$.
En remplaçant dans la relation (*), q par $-1 + 11k$ on obtient $p = -1 + 7k$.
D'où les solutions de (E) sont les couples $(-1 + 7k, -1 + 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. a (F) : $x \in \mathbb{Z}$, $2x \equiv 3$ [7].
Calculons $2x$ suivant les classes de congruence modulo 7.

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5

Par conséquent : $2x \equiv 3\ [7] \Leftrightarrow x \equiv 5\ [7] \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Z} \quad x = 5 + 7s$.

$S_{(F)} = \{5 + 7s, s \in \mathbb{Z}\}$

(G) : $x \in \mathbb{Z}$, $9x \equiv 4$ [11].
Calculons $9x$ suivant les classes de congruence modulo 11.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$9x$	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

Par conséquent $9x \equiv 4\ [11] \quad \Leftrightarrow x \equiv 9\ [11]$
$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} / x = 9 + 11t$

$S_{(G)} = \{9 + 11t, t \in \mathbb{Z}\}$

b. Les solutions du système sont les nombres qui sont à la fois solutions de (F) et de (G).

Cela revient à résoudre $\begin{cases} x = 5 + 7s \\ x = 9 + 11t, (s, t) \in \mathbb{Z}^2 ; \end{cases}$

ce système se ramène à : $\begin{cases} 11t - 7s = -4 \\ x = 5 + 7s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -1 + 7k \quad \text{et} \quad s = -1 + 11k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = 5 + 7s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = -2 + 77k$

Les solutions du système sont les nombres entiers relatifs x qui s'écrivent :

$x = -2+77k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

1. Il y a 10 boules dans l'urne. Il y a 4 cas favorables à l'événement "obtenir une boule blanche", la probabilité de cet événement est alors :

   $p = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

2. Le résultat d'un tirage simultané de 2 boules est une combinaison de 2 éléments parmi 10 est :

   $p = 1 - \dfrac{6^4}{10^4}$

   Nombre de cas possibles : $C_{10}^{2} = 45$.

   Il y a C_4^2 possibilités de tirer 2 boules blanches et C_6^2 possibilités de tirer 2 boules rouges.

   Nombre de cas favorables $C_6^2 + C_4^2 = 15 + 6 = 21$.

   Par conséquent la probabilité de cet événement est $p = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

3. a. **1re méthode** : il s'agit d'un enchaînement de 4 épreuves indépendantes aboutissant à 2 issues.

   S : "obtenir une boule blanche"

   $\overline{S}$: "obtenir une boule rouge"

   $p(S) = \dfrac{2}{5}$ et $p(\overline{S}) = \dfrac{3}{5}$

   C'est un schéma de Bernoulli. La probabilité de tirer exactement 2 boules rouges est :

   $$p(2R) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$$
   $$= \frac{6 \times 9 \times 4}{625} = \frac{216}{625}.$$

b. La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est :

$$p = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{544}{625}$$

2^e méthode : on considère qu'un résultat est un 4-uplet ; à chaque tirage il y a 10 choix possibles. Donc le nombre de cas possibles est 10^4.

a. Soit E l'événement , tirer 2 boules rouges exactement.

$$p(E) = \frac{C_4^2 \times 6^2 \times 4^2}{10^4} = \frac{6\times 9\times 4}{625}$$

b. Il y a 6^4 possibilités de tirer uniquement des boules rouges à l'issue des 4 tirages. La probabilité de l'événement "aucune boule blanche" est :

$p = \left(\frac{6}{10}\right)^4$. L'événement "tirer au moins une boule blanche" est l'événement contraire. Donc sa probabilité est :

$$p = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^4 = 1 - \frac{3^4}{5^4} = \frac{544}{625}.$$

PROBLÈME

Partie A

1. $\forall x \in]0 ; +\infty[, \; g'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$
2. Pour connaître le signe de $g'(x)$, calculons $g''(x)$.

On a $g''(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \; g''(x) > 0.$

Donc g' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme $g'(1) = 0$ on peut conclure que :

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Alors, g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ;1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. g admet 0 pour minimum absolu ; donc pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

b. • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[(x^2 \ln x) \dfrac{1}{x-1} \right] = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[(x \ln x) \dfrac{1}{x-1} \right] = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$

f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. La courbe (C) admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

d. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Une équation de (T) est :

$y = \dfrac{3}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

2. a. $\forall\, x \in \,]0;1[\, \cup \,]1;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \ln x + \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2} \left[(x-2) \ln x + (x-1) \right]$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot g(x)$$

b. Pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$g(x) > 0$ et $\dfrac{x}{(x-1)^2} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

De plus f est continue en 1 et continue à droite en 0.

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ car f est strictement croissante, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

d. voir figure à la fin du problème.

Partie C

1. $\lim\limits_{\alpha \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - \alpha) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} (\frac{1}{2} + \alpha) = 1$

alors A représente l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. a. $H'_n(t) = t^n (\ln t - \dfrac{1}{n+1}) + \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{1}{t} = t^n \ln t$

H_n est une primitive de $t \mapsto t^n \ln(t)$ définie sur $]0;+\infty[$.

b. $$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \ln(t)dt = H_n(\frac{1}{2} + \alpha) - H_n(\frac{1}{2} - \alpha)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} (\frac{1}{2} + \alpha) = 1 \\ \lim\limits_{t \to 1} H_n(t) = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \left(\ln(t) - \dfrac{1}{n+1} \right) = -\dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases},$$

donc $\lim\limits_{\alpha \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n(\frac{1}{2} + \alpha) = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$$\lim_{\alpha \xrightarrow[<]{} \frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - \alpha) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} H_n(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{n+1} [\, t^{n+1} \ln t - \frac{t^{n+1}}{n+1} \,] = 0$$

d'où $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow[<]{} \frac{1}{2}} H_n(\frac{1}{2} - \alpha) = 0.$

Alors $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow[<]{} \frac{1}{2}} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}$ · Par conséquent $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ ·

3. a.

$$t^2 + t^3 + \ldots\ldots + t^{n+1} = \frac{t^2(1-t^n)}{1-t}$$

$$= \frac{t^{n+2}}{t-1} - \frac{t^2}{t-1}$$

$$\text{d'où } \frac{t^2}{t-1} = -(t^2 + t^3 + \ldots + t^{n+1}) + \frac{t^{n+2}}{t-1}$$

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1} \ln t\, dt = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \left(-t^2 - t^3 - \ldots - t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}\right) \ln(t)\, dt$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^2 \ln t\, dt - \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^3 \ln t\, dt - \ldots - \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^{n+1} \ln t\, dt + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^{n+2}}{t-1} \ln t\, dt$$

$$= -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) \ldots - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\, dt\,.$$

b. • D'après B.2, $0 < f(t) < 1$.

Alors $0 < t^n f(t) < t^n$ pour tout t appartenant à $]0\,;\,1[$

d'où $\quad 0 < \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\, dt < \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\, dt$

- Soit F une primitive de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0\,;+\infty[$.

Alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt = F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$.

Posons pour $\alpha \in [0;\frac{1}{2}]$, $G(\alpha) = F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

on a $G'(\alpha) = F'\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) + F'\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^n + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^n.$$

$\alpha \in [0\,;\frac{1}{2}]$, d'où $\frac{1}{2}+\alpha > 0$ et $\frac{1}{2}+\alpha > 0$;

par conséquent $G'(\alpha) > 0$. G est donc strictement croissante sur $[0\,;\frac{1}{2}]$.

Alors : $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, $G(\alpha) < G\left(\frac{1}{2}\right)$.

C'est-à-dire $F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) < F(1) - F(0)$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt < \int_0^1 t^n\,dt$$

d'où $\displaystyle 0 < \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt < \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt < \int_0^1 t^n\,dt$

c. $\displaystyle A(\alpha) + I_2(\alpha) + \ldots + I_{n+1}(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\,dt$ d'après C.3.a.

D'où le résultat

$\displaystyle 0 < A(\alpha) + I_2(\alpha) + \ldots + I_n(\alpha) < \int_0^1 t^n\,dt$

or $\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

On obtient alors la conclusion demandée :

$0 < A(\alpha) + I_2(\alpha) + \ldots + I_n(\alpha) < \frac{1}{n+1}$.

$$0 \leqslant \lim_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} (\text{[illegible]} I_2(\alpha) + \ldots + I_{n+1}(\alpha)) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

d'où $0 \leqslant A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) \right] = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

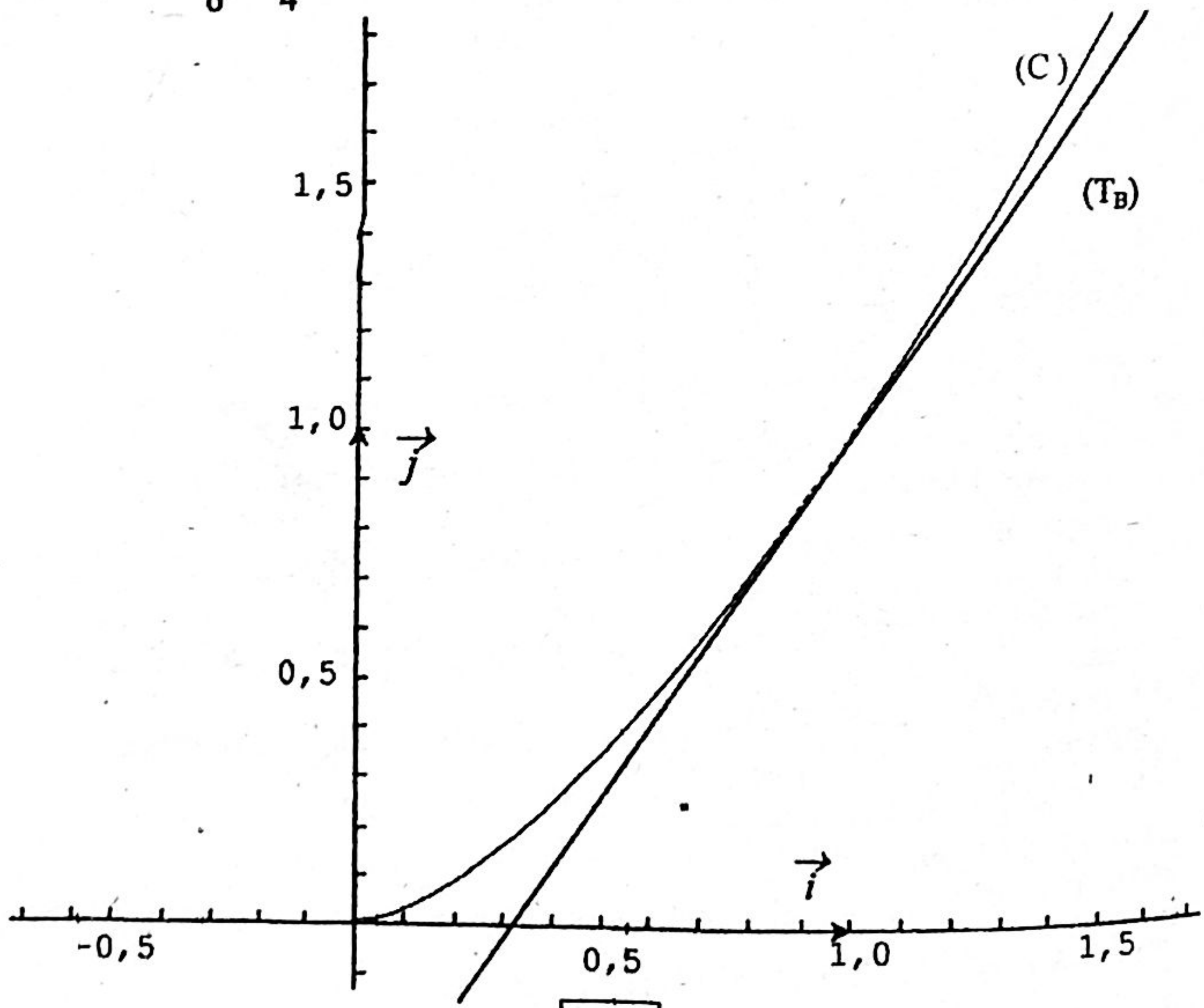
D'où $\quad A = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right)$

d. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$

Par conséquent $1 + \frac{1}{2^2} + \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$,

d'où $A = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$.

$A = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$.

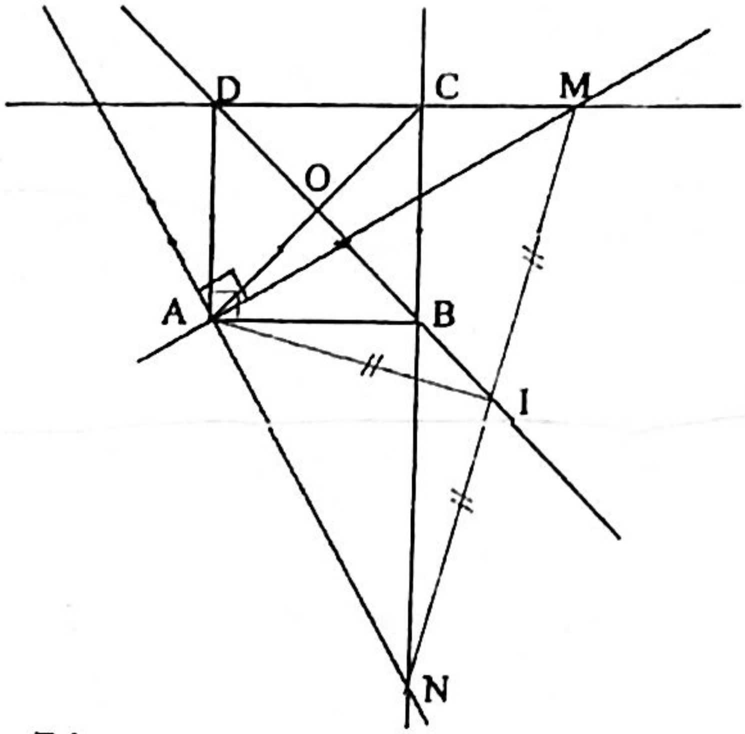


EXAMEN 10

Session de Juin 1998
Série C

EXERCICE 1

1. Voir figure ci-dessous



2. a. Démontrons que $r(M) = N$.

r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On sait que $\{M\} = (DC) \cap (AM)$

L'image de la droite (AM) par r est la perpendiculaire à (AM) en A ; c'est-à-dire (AN).
L'image de la droite (AD) par r est la droite (AB) par définition de r.
(AD) est la perpendiculaire à (DC) en D.
Par conservation de l'orthogonalité, (AB) est la perpendiculaire en B à l'image de (DC) par r.
Or la perpendiculaire à (AB) en B est (BC). Donc l'image de la droite (DC) par r est la droite (BC).
$\{M\} = (DC) \cap (AM)$
$\{r(M)\} = (BC) \cap (AN) = \{N\}$
donc $r(M) = N$.

b. $r(M) = N \Leftrightarrow$ (AM = AN et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) = -\frac{\pi}{2}$),

donc AMN est un triangle rectangle et isocèle en A.

3. 

a. Soit α le rapport de s

$\alpha = \frac{AO}{AD}$. OAD étant un triangle rectangle et isocèle en O,

on a $AD = \sqrt{2}\, AO$.

Donc $\alpha = \frac{AO}{\sqrt{2}\, AO} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit θ la mesure principale de l'angle de s

$\theta = \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}}) = -\frac{\pi}{4}$.

Donc s est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure principale $-\frac{\pi}{4}$.

b. ACB est un triangle rectangle et isocèle indirect en B.

Donc $\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite s(C) = B.

c. AMI est un triangle rectangle et isocèle indirect en I.

Donc $\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Par suite s(M) = I.

d. Lorsque M décrit (DC), I décrit l'image de (DC) par s, c'est-à-dire (OB).

EXERCICE 2

1. U est arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1}$

On a : $aU_{n+1} = (a+1)U_n - U_{n-1} \Leftrightarrow aU_{n+1} = aU_n + U_n - U_{n-1}$

$\Leftrightarrow a(U_{n+1} - U_n) = U_n - U_{n-1}$

Donc U est arithmétique si, et seulement si, $a = 1$

2. $a \neq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1} - U_n$

$aV_n = aU_{n+1} - aU_n$

$aV_n = (a+1)U_n - U_{n-1} - aU_n$

$aV_n = U_n - U_{n-1}$

$V_n = \frac{1}{a} V_{n-1}$

V est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$ et de premier terme V_0.

$V_0 = U_1 - U_0 = 1 - 0 = 1.$

3. a. $V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$

$V_{n-2} = U_{n-1} - U_{n-2}$

....

... .

$V_1 = U_2 - U_1$

$V_0 = U_1 - U_0$

$V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-2} + V_{n-1} = U_n - U_0$ (après addition membre à membre).

$U_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-2} + V_{n-1}$ car $U_0 = 0$

b. $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = V_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right)$$

$$= \frac{a}{a-1}\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)$$

c. $$\left|\frac{1}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim U = \frac{a}{a-1}.$$

U est donc convergente si $|a| > 1$.

4. $a = 2$. $U_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (d'après 3.b.).

Pour avoir $|U_p - 2| < 10^{-3}$; il suffit que $\frac{1}{2^{p-1}} < 10^{-3}$.

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 10^{-3} \Leftrightarrow 2^{p-1} > 10^3$$

$$\Leftrightarrow (p-1)\ln 2 > 3\ln 10$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{3\ln 10}{\ln 2} + 1$$

$$\Leftrightarrow p > 10{,}96$$

Donc le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - 2| < 10^{-3}$ est 11.

PROBLÈME

PARTIE A

1. a. $f(0) = 4$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x - 4\sqrt{x} + 4 = 4 = f(0)$

donc f est continue à droite en 0.

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x - 4\sqrt{x} + 4 - 4}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \dfrac{4}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0 mais (C) admet au point d'abscisse 0, une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

2. a *Limite de f en $+\infty$*

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 4) + 4 = +\infty$

b. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

f est donc strictement décroissante sur [0 ; 4] et strictement croissante sur [4 ; +∞[.

Tableau de variation de f

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	$+\infty$

c. Tracé de (C) ; voir figure.

a. g est continue et strictement croissante sur $[4\,;+\infty[$ et $g([4\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$

g est donc une bijection de $[4\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$

$\forall\, y \in [0\,;+\infty[,\ \exists!\, x \in [4\,;+\infty[$ tel que $y = x - 4\sqrt{x} + 4$.

$$y = x - 4\sqrt{x} + 4 \iff y = \left(\sqrt{x}-2\right)^2$$
$$\iff \sqrt{y} = \sqrt{x}-2 \text{ car } \sqrt{x}-2 \geqslant 0$$
$$\iff \sqrt{x} = \sqrt{y}+2$$
$$\iff x = \left(\sqrt{y}+2\right)^2$$
$$\iff g^{-1}(y) = y + 4\sqrt{y} + 4.$$

donc l'application réciproque g^{-1} de g est définie par :

$g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$

b. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Tracé de (C') ; (voir figure).

4. a. $[y - f(x)]\,[y - g^{-1}(x)] = 0$

$$\iff (y - x + 4\sqrt{x} - 4)\,(y - x - 4\sqrt{x} - 4) = 0$$
$$\iff y^2 + x^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$
$$\iff x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$

On a ainsi établi l'équivalence demandée.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E) \iff [y - f(x)]\,[y - g^{-1}(x)] = 0$$
$$\iff y = f(x) \text{ ou } y = g^{-1}(x)$$
$$\iff M \in (C) \cup (C')$$
$$\iff M \in (H).$$

b. $$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (E) \iff a^2 + b^2 - 2ab - 8a - 8b + 16 = 0$$
$$\iff b^2 + a^2 - 2ba - 8b - 8a + 16 = 0$$
$$\iff M\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in (E)$$

La droite d'équation $y = x$ est donc un axe de symétrie de (E).

5. Soit A l'aire de cette partie du plan.

$$A = \int_0^4 (x - 4\sqrt{x} + 4)\, dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{8}{3} \times \sqrt{x} + 4x\right]_0^4$$

$$A = \frac{8}{3}.$$

Partie B

1. a. Soit $m \in]-2\,;2[$ et $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On a: $\overrightarrow{A_mB_m}\begin{pmatrix}-m-2\\2-m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A_mM}\begin{pmatrix}x-m-2\\y\end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D_m) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A_mM}, \overrightarrow{A_mB_m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2-m & -m-2\\ y & 2-m\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-m)(2-m) + y(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{m-2}{m+2}x - m + 2$$

(D_m) : $y = \dfrac{m-2}{m+2}x - m + 2$

b. (Δ_m) : $y = x - 2m$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D_m)\cap(\Delta_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{m-2}{m+2}x - m + 2 \\ y = x - 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{m+2}x - m + 2 = x - 2m \text{ et } y = x - 2m$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{m+2}x = -m-2 \text{ et } y = x - 2m$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(m+2)^2}{4} \text{ et } y = \frac{(m+2)^2}{4} - 2m.$$

$$y = \frac{(m+2)^2}{4} - 2m$$
$$= \frac{m^2+4m+4-8m}{4}$$
$$= \frac{m^2-4m+4}{4}$$
$$= \frac{(m-2)^2}{4}$$
$$y = \frac{(2-m)^2}{4}.$$

d'où $T_m\left(\frac{1}{4}(2+m)^2 ; \frac{1}{4}(2-m)^2\right)$.

c. (D_m) est la tangente à (C) au point T_m signifie que :

$$\begin{cases} T_m \in (C) \\ f'\left(\frac{1}{4}(m+2)^2\right) = \frac{m-2}{m+2} \end{cases}.$$

- $f(x) = \left(\sqrt{x}-2\right)^2$

$$f\left(\frac{1}{4}(m+2)^2\right) = \left(\frac{m+2}{2}-2\right)^2 \text{ car } m > -2$$

$$= \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 = \frac{(2-m)^2}{4}.$$

donc $T_m \in (C)$. (1)

- On sait que $\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

$$f'\left(\frac{(m+2)^2}{4}\right) = \frac{\frac{m+2}{2}-2}{\frac{m+2}{2}} = \frac{m-2}{m+2}. \ (2)$$

De (1) et (2), on conclut que (D_m) est la tangente à(C) au point T_m.

2. a. $(\delta) : y = -x$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (δ).

$H_m\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de T_m sur (δ) si et seulement si :

$$\begin{cases} H_m \in (\delta) \\ \overrightarrow{T_mH_m}\cdot\vec{u} = 0. \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{T_mH_m}\begin{pmatrix} a-\frac{1}{4}(m+2)^2 \\ b-\frac{1}{4}(m-2)^2 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} H_m \in (\delta) \\ \overrightarrow{T_mH_m}\,.\,\vec{u} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a-\frac{1}{4}(m+2)^2 - b + \frac{1}{4}(m-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a-b=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ a=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m \\ b=-m \end{cases}$$

donc $H_m\begin{pmatrix} m \\ -m \end{pmatrix}$.

b. $F(2\,;2)$; $A_m\begin{pmatrix} 2+m \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_m\begin{pmatrix} 0 \\ 2-m \end{pmatrix}$; $H_m\begin{pmatrix} m \\ -m \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{FA_m}\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FB_m}\begin{pmatrix} -2 \\ -m \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{H_mA_m}\begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{H_mB_m}\begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a $FA_m = FB_m = H_mA_m = H_mB_m = \sqrt{m^2+4}$.

et $\overrightarrow{FA_m} \cdot \overrightarrow{FB_m} = -2m + 2m = 0$.

Donc $A_mH_mB_mF$ est un carré.

3. $m = ½$

- $A_{1/2}\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$ $\quad B_{1/2}\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$
- $(D_{1/2}) = (A_{1/2}B_{1/2})$
- $(\Delta_{1/2}) : x-y-1=0$
- $\{T_{1/2}\} = (D_{1/2}) \cap (\Delta_{1/2})$.
- $H_{1/2}$ est le projeté orthogonal de $T_{1/2}$ sur (δ).

Partie C

1. a. Puisque $H\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur la droite (δ), on a :

$$\begin{cases} H \in \delta \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ avec } \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de } (\delta). \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} H \in \delta \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ (x-a)-(y-b)=0 \end{cases}$ car $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a \\ b - a = y - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a \\ 2b = y - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2}(y - x) \\ a = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bi = \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(y - x)$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bi = \frac{1}{2}(x + yi) + \frac{1}{2}(-y - xi)$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bi = \frac{z - i\,\overline{z}}{2}.$$

Donc le point H d'affixe $\frac{z - i\,\overline{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur (δ).

b. $d(M,(\delta)) = MH = |z - z_H| = \left| z - \frac{z - i\overline{z}}{2} \right|.$

$d(M,(\delta)) = \left| \frac{z + i\overline{z}}{2} \right|.$

2. a. $\left| \frac{z + i\overline{z}}{2} \right| = |z - (2+2i)|$

$\Leftrightarrow |z + i\overline{z}|^2 = 4|z - (2+2i)|^2$. Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

alors $z + i\overline{z} = (x + iy) + i(x - iy)$
$= x + y + i\,(y + x)$

et $z - (2+2i) = (x-2) + i\,(y-2)$.

D'où $|z + i\overline{z}|^2 = 4|z - (2+2i)|^2$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (y + x)^2 = 4(x-2)^2 + (y-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

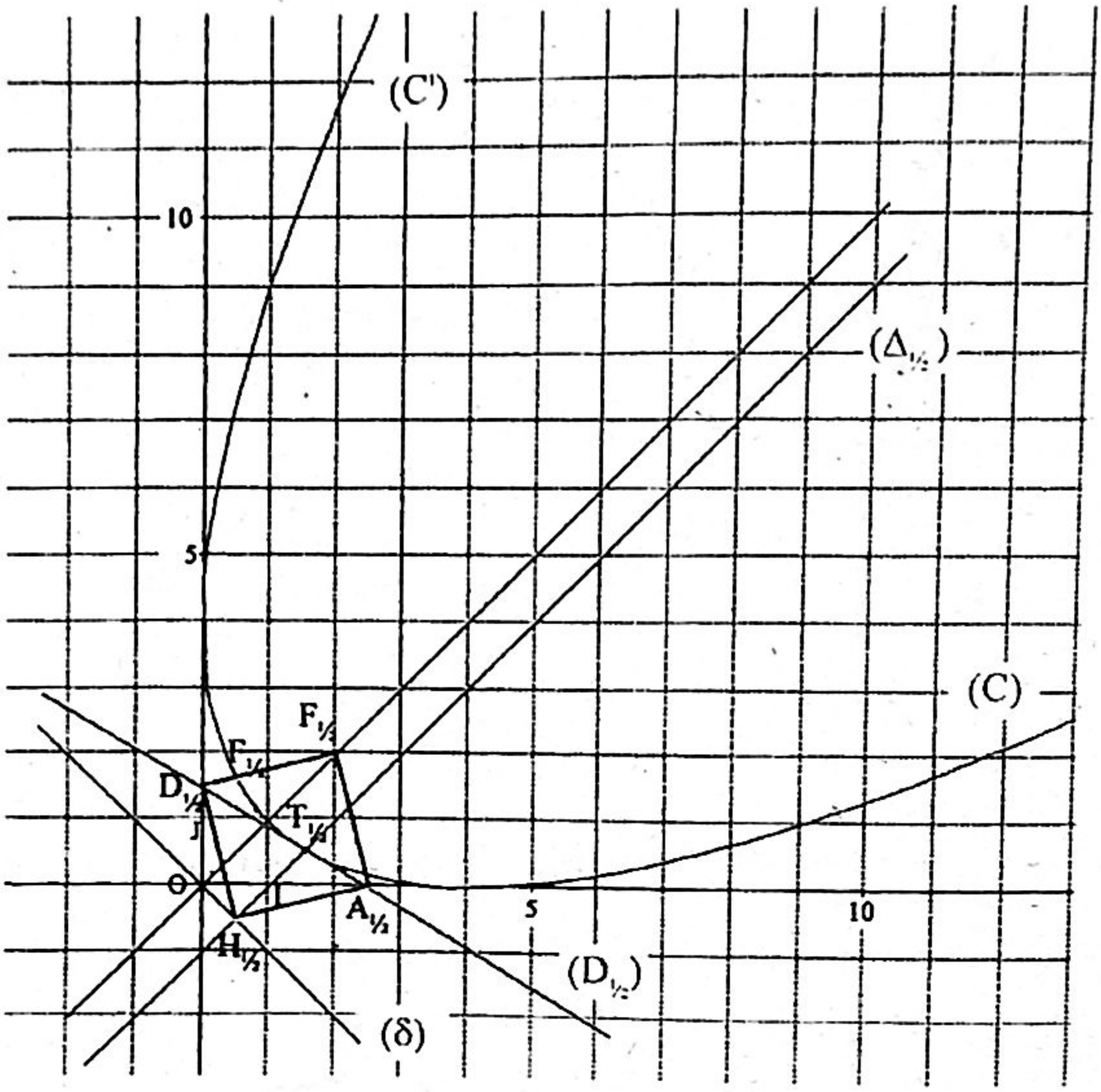
$\Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E)$. Donc (E) est bien l'ensemble des points M dont l'affixe

vérifie $\left| \frac{z + i\overline{z}}{2} \right| = |z - (2+2i)|$

b. $\left|\dfrac{z+i\overline{z}}{2}\right| = \left|z-(2+2i)\right| \quad \Leftrightarrow \qquad d(M,(\delta)) = d(M, F)$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{d(M,(\delta))}{d(M, F)} = 1$$

(E) est donc la parabole de foyer F $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de directrice (δ) d'équation : $y = x$.



EXAMEN 11 — Session de Remplacement 1998 — Série C

EXERCICE 1

1. a. Pour tout point M du plan,

$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) + i - 1$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y = \frac{1}{2}(x + y + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \\ \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

L'ensemble des points M tels que $f(M) = M$ est la droite (D).

b. Déterminons les coordonnées de M'.

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y + 2). \end{cases} \quad \text{d'où } M'\left(\frac{1}{2}(x + y - 2)\,;\frac{1}{2}(x + y + 2)\right).$$

Démontrons maintenant que M' appartient à (D).

On a : $\frac{1}{2}(x + y - 2) - \frac{1}{2}(x + y + 2) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0.$

Ainsi, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).
Donc M' appartient (D).

c.

- On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\quad M'\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y-2) \\ \frac{1}{2}(x+y+2) \end{pmatrix}$;

d'où $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-x+y-2) \\ \frac{1}{2}(x-y+2) \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de (D).

Comme $\quad \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = -\frac{1}{2}(x-y+2) + \frac{1}{2}(x-y+2)$

$= 0,$

alors $\overrightarrow{MM'}$ est normal à la droite (D).

- Caractérisons géométriquement f.
À tout point M du plan , f associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} M' \text{ appartient à } (D) \\ \overrightarrow{MM'} \text{ est normal à } (D). \end{cases}$$

f est donc la projection orthogonale sur la droite (D).

2. a. $z - z' = \frac{1}{2}[2z - z - i\bar{z} - 2i + 2]$

$= \frac{1}{2}[z - i\bar{z} - 2(i-1)].$

b. Pour tout point M du plan,

$$M \in (E) \iff |z-1| = \frac{1}{4}\left|z - i\bar{z} - 2(i-1)\right|$$

$$\iff |z-1| = \frac{1}{2}|z-z'| \text{ d'après 2.a.}$$

$$\iff MF = \frac{1}{2}MM'$$

$$\iff \frac{MF}{d(M,(D))} = \frac{1}{2}.$$

(E) est donc l'ellipse de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

L'axe focal (Δ) est la perpendiculaire à (D) passant par F. Une équation de (Δ) est de la forme : $x + y + c = 0$ car $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, vecteur directeur de (D) est un vecteur normal à (Δ).

(Δ) passe par F $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; donc : $1 + 0 + c = 0$ soit $c = -1$.

Une équation cartésienne de (Δ) est donc : $x + y - 1 = 0$.

c. Vérifions que les points A et A' sont des points d'intersection de (Δ) et (E).

$(\Delta) : x + y - 1 = 0$ $\qquad$ $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $A'(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2})$

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} - 1 = 0$ donc $A \in (\Delta)$; $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0$ donc $A' \in (\Delta)$.

- $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i - 1\right| = \frac{1}{2}\,|-1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

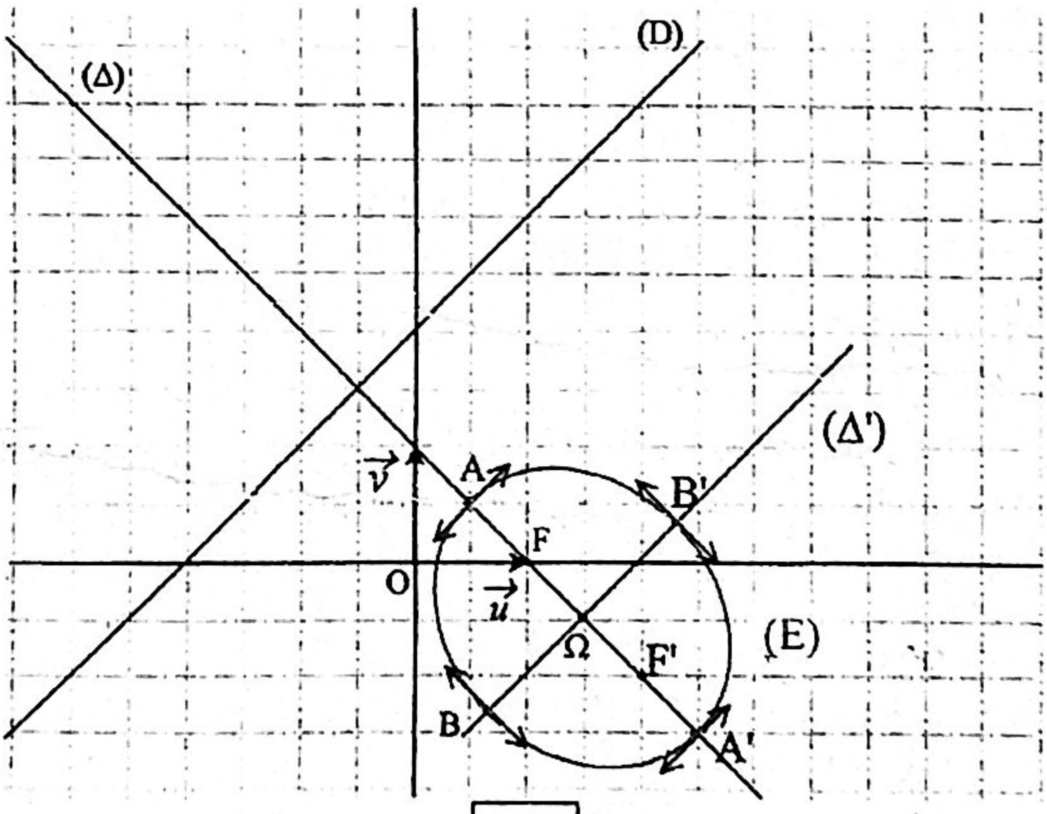
  $\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i - i(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i) - 2(i-1)\right| = \frac{1}{4}|2-2i| = \frac{1}{2}|1-i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $A \in (E)$

- $\frac{1}{4}\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i - i(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i) - 2i + 2\right| = \frac{1}{4}|6-6i| = \frac{1}{2}|1-i| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

  $\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i - 1\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2}|1-i| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ donc $A' \in (E)$.

Par conséquent A et A' sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal (Δ).

3. a



b. *Construction des autres sommets* B *et* B' :
Soit Ω le centre de l'ellipse (E), (Δ') l'axe non focal de (E). Ω est le milieu du segment [AA'] B et B' sont les points d'intersection de l'axe non focal (Δ') et du cercle de centre F et de rayon ΩA.

c. voir figure.

EXERCICE 2

1. a. On a : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

d'où $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (en utilisant l'égalité de Chasles)

G est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Construction de G (voir figure).

b. Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{MC}$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$= 2\overrightarrow{CI}$$ (I étant le milieu du segment [AB]).

Pour tout point M du plan,

$$M \in (C) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|2\overrightarrow{CI}\right\|$$

$$\Leftrightarrow MG = 2CI$$

(C) est le cercle de centre G et de rayon 2CI.
Construction de (C), voir figure.

2. a. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) - (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA})$$

d'où : $\frac{3}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$

Donc $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$

On a : $3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$, donc H est le barycentre des points pondérés (A,3) ; (B,1) et (C,−2).

Autre méthode : On peut justifier que les points pondérés (A,3) ; (B,1) et (C,−2) admettent un barycentre K et que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et conclure.

b. $C \in E_k \Leftrightarrow 3\,CA^2 + CB^2 = ka^2$.

ABC étant un triangle rectangle en A,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$.

$$
\begin{aligned}
C \in E_k &\Leftrightarrow 3a^2 + 5a^2 = ka^2 \\
&\Leftrightarrow 8a^2 = ka^2 \\
&\Leftrightarrow k = 8.
\end{aligned}
$$

Pour $k = 8$, $C \in E_k$

c. $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow 3HA^2 + HB^2 - 2HC^2 + MH^2 = 8a^2$

$$
\begin{aligned}
HA^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 &= \frac{1}{4}AB^2 + AC^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{4}(4a^2) + a^2 - 0 \quad (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \text{ car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}) \\
&= 2a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \\
&= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BH^2 &= \frac{1}{4}AB^2 + AC^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{4}(4a^2) + a^2 + 0 \\
&= 2a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CH^2 &= \frac{1}{4}AB^2 + 4AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{4}(4a^2) + 4a^2 \\
&= 5a^2
\end{aligned}
$$

$3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow 3(2a)^2 + 2a^2 - 2(5a^2) + 2MH^2 = 8a^2$

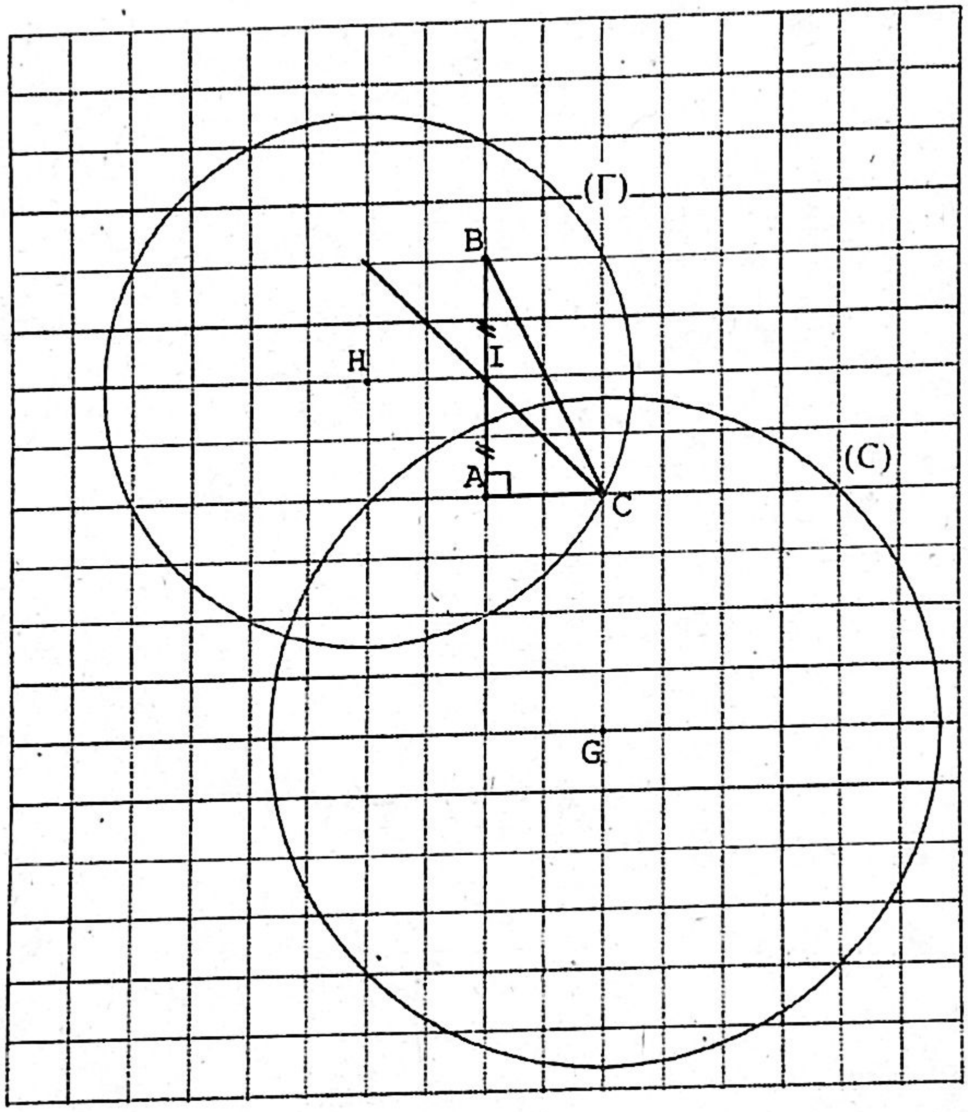
$\Leftrightarrow 6a^2 + 2a^2 - 10a^2 + 2MH^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow MH^2 = 5a^2$

$\Leftrightarrow MH = a\sqrt{5}$

Puisque $C \in (\Gamma)$, alors (Γ) est le cercle de centre H et de rayon HC.

Construction de (Γ) ; voir figure.



PROBLÈME

PARTIE A

1. a. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$ car $e^x > 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

2.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(0-x) + f(0+x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{1+e^x}$

$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{(1+e^{-x})(1+e^x)}$$

$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}$$

$$= 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}.$$

Le point A est donc centre de symétrie de (C).

3. Une équation de (Γ) est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$. D'où une équation de (T) est : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

4. a. Calculons $\varphi'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{4} - f'(x)$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x}\right)^2 - \frac{1}{2^2}$$

$$= \left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x} + \frac{1}{2}\right)$$

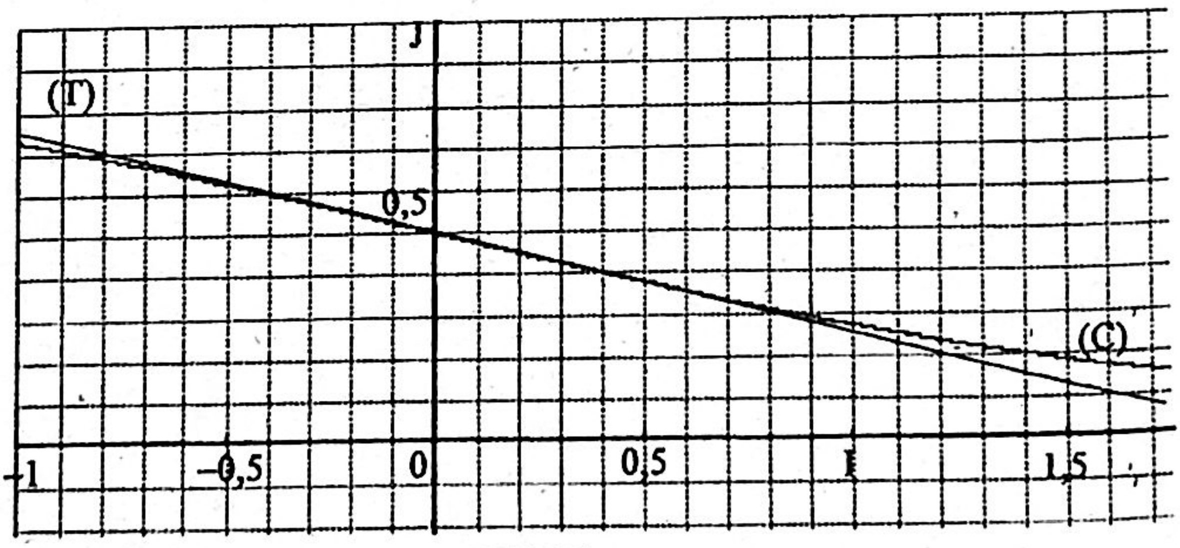
$$= -\frac{(e^{x/2}-1)^2\,(e^{x/2}+1)^2}{4(1+e^x)^2}.$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) < 0$ et φ' s'annule en 0.

Conclusion : φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $\varphi(0) = 0$, on a :
$\forall x \in]-\infty\,; 0[$, $\varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0$.
$\forall x \in]0\,; +\infty[$, $\varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0$.

b. Sur $]-\infty, 0[$, (T) est au-dessus de (C) car $\varphi(x) > 0$
Sur $]0, +\infty[$, (T) est en dessous de (C) car $\varphi(x) < 0$

c. Tracé de (T) et ($\mathscr{C}$)



Partie B

1. a. $T_{-1} : P \to P$

$$M \mapsto M' \,/\, \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$$

T_{-1} est la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

b. Déterminons l'expression analytique de T_m.

Soit (x,y) et (x',y') les coordonnées respectives de M et M'.

Le point H est donc de coordonnées (0,y).

On a : $\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$ (*)

Démontrons que $T_m(\mathscr{C}) \subset (\mathscr{C}_m)$

Soit M un point de $(\mathscr{C})$ et M' son image par T_m

$f_m(x') = f\left(\dfrac{x'}{m}\right)$ par définition

$= f(x)$ d'après (*)

$= y$ car $M \in (\mathscr{C})$

$= y'$ d'après (*)

D'où M' appartient à $(\mathscr{C}_m)$. Par suite $T_m(\mathscr{C}) \subset (\mathscr{C}_m)$

Démontrons réciproquement que $(\mathscr{C}_m) \subset T_m(\mathscr{C})$

Soit M' un point de $(\mathscr{C}_m)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe un point M de $(\mathscr{C})$ tel que $M' = T_m(M)$.

Par hypothèse, T_m est une transformation (donc bijective), il existe un point M du plan tel que $T_m(M) = M'$.

Il reste à démontrer que M appartient à $(\mathscr{C})$. On a :

$f(x) = f\left(\dfrac{x'}{m}\right)$ d'après (*)

$= f_m(x')$ par définition

$= y'$ car $M' \in (\mathscr{C}_m)$

$= y$ d'après (*).

Par conséquent M appartient à $(\mathscr{C})$. On en déduit que $(\mathscr{C}_m) \subset T_m(\mathscr{C}_m)$.

Conclusion : $T_m(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}_m)$.

Remarque : on peut raisonner par équivalence car T_m est bijective.

c. $(\mathscr{C}_{-1}) = T_{-1}(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C}_{-1})$ est donc l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Tracé de $(\mathscr{C}_{-1})$ (voir figure).

2. Pour tout $(\lambda, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\,dx$$

$$= 2\lambda - \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{x/m}}{1+e^{x/m}}\,dx \text{ car } \frac{1}{1+e^{x/m}} = 1 - \frac{e^{x/m}}{1+e^{x/m}}$$

$$I_m(\lambda) = 2\lambda - m\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\frac{1}{m}e^{x/m}}{1+e^{x/m}}\,dx$$

$$= 2\lambda - m[\ln(1+e^{x/m})]_{-\lambda}^{\lambda}$$

$$= 2\lambda - m[\ln(1+e^{\lambda/m}) - \ln(1+e^{-\lambda/m})]$$

$$= 2\lambda - m[\ln(e^{\lambda/m}(1+e^{-\lambda/m})) - \ln(1+e^{-\lambda/m})]$$

$$= 2\lambda - m\ln e^{\lambda/m}$$

$$= 2\lambda - m\frac{\lambda}{m} = \lambda$$

$I_m(\lambda)$ est indépendant de m.

Partie C

1. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad g'(x) = 1 - f'(x)$

$$= 1 + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c. g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$ qui est $\mathbb{R}$.
L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique α. Il s'en suit que l'équation $f(x) = x$ admet la solution unique α.

$g(\frac{1}{4}) \simeq 0{,}19 > 0$, $g(\frac{1}{2}) \simeq -0{,}12 < 0$

α appartient alors à l'intervalle $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$.

2. a. f étant continue strictement décroissante,

on a : $f([\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]) = [f(\frac{1}{2});f(\frac{1}{4})]$

$f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{1+\sqrt{e}}$

$$
\begin{aligned}
e \leqslant 9 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{e} \leqslant 3 \\
&\Rightarrow \quad 1+\sqrt{e} \leqslant 4 \\
&\Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{2}) \geqslant \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$f(\frac{1}{4}) = \dfrac{1}{1+e^{1/4}}$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{1/4} \geqslant 1 \\
&\Rightarrow \quad 1+e^{1/4} \geqslant 2 \\
&\Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{4}) \leqslant \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

par conséquent $f([\frac{1}{4};\frac{1}{2}]) \subset [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$$= \frac{-e^x(1+e^x)+2e^x}{(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

Par conséquent, $\forall x \in [\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}]$, $f''(x) \geqslant 0$.

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$f'(\frac{1}{4})$	$\nearrow$	$f'(\frac{1}{2})$

$\forall x \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $-f'(\frac{1}{2}) \leqslant -f'(x) \leqslant -f'(\frac{1}{4})$

D'où : $\forall x \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{e^{1/4}}{(1+e^{1/4})^2}$.

Avec la calculatrice, on a : $\frac{e^{1/4}}{(1+e^{1/4})^2} < 0{,}246 < \frac{1}{4}$

D'où : $\forall x \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $|f'(x)| < \frac{1}{4}$

Autre méthode (sans calculatrice)

On peut étudier la fonction a définie sur $[1, +\infty[$ par : $a(x) = \frac{x^{1/4}}{(1+x^{1/4})^2}$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $a'(x) = \frac{1}{4}\frac{x^{-3/4}(1-x^{1/4})}{(1+x^{1/4})^3}$..

$\forall x \in [1; +\infty[$, $a'(x) \leqslant 0$.
a est décroissante sur $[1 ; +\infty[$

d'où : $a(e) \leqslant a(1) = \frac{1}{4}$

Conclusion : $\forall x \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$

c. D'après ce qui précède et l'inégalité des accroissements finis, on a :
$\forall x \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $|f(x)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|x-\alpha|$

Comme $f(\alpha) = \alpha$ d'après 1.c., on a le résultat demandé.

3. a. On a : $U_0 = \frac{1}{4}$; $U_0 \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$

Supposons que pour un entier naturel n, $U_n \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$. Démontrons que

$U_{n+1} \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$.

On a $f(U_n) \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$ d'après 2.a.

D'où $U_{n+1} \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$

b. En utilisant 2.c., et ce qui précède, on a : $\left|f(U_n)-\alpha\right| < \frac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$.

$\forall n\in\mathbb{N}, \left|f(U_n)-\alpha\right| < \frac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$

d'où : $\forall\, n\in \mathbb{N}, \left|U_{n+1}-\alpha\right| < \frac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$

c. On a $\left|U_0-\alpha\right| < \frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\left|U_0-\alpha\right| < \frac{1}{4}$

$\left|U_0-\alpha\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1}$ car $U_0 \in [\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$.

Supposons que pour un entier naturel n, $\left|U_n-\alpha\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Démontrons que $\left|U_{n+1}-\alpha\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$.

On a : $\left|U_{n+1}-\alpha\right| < \frac{1}{4}\left|U_n-\alpha\right|$ d'après 3.b.

D'où $\left|U_{n+1}-\alpha\right| < \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$\left|U_{n+1}-\alpha\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$.

Conclusion : $\forall\, n\in\mathbb{N}, \left|U_n-\alpha\right| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

4. a.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

b. $\forall\, n\in\mathbb{N}, \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-2} \Rightarrow 4^{n+1} > 10^2$

$\Rightarrow (n+1)\log 4 > 2$

$\Rightarrow n+1 > \frac{2}{\log 4}$

$\Rightarrow n > \frac{2}{\log 4} - 1 = 2{,}32$

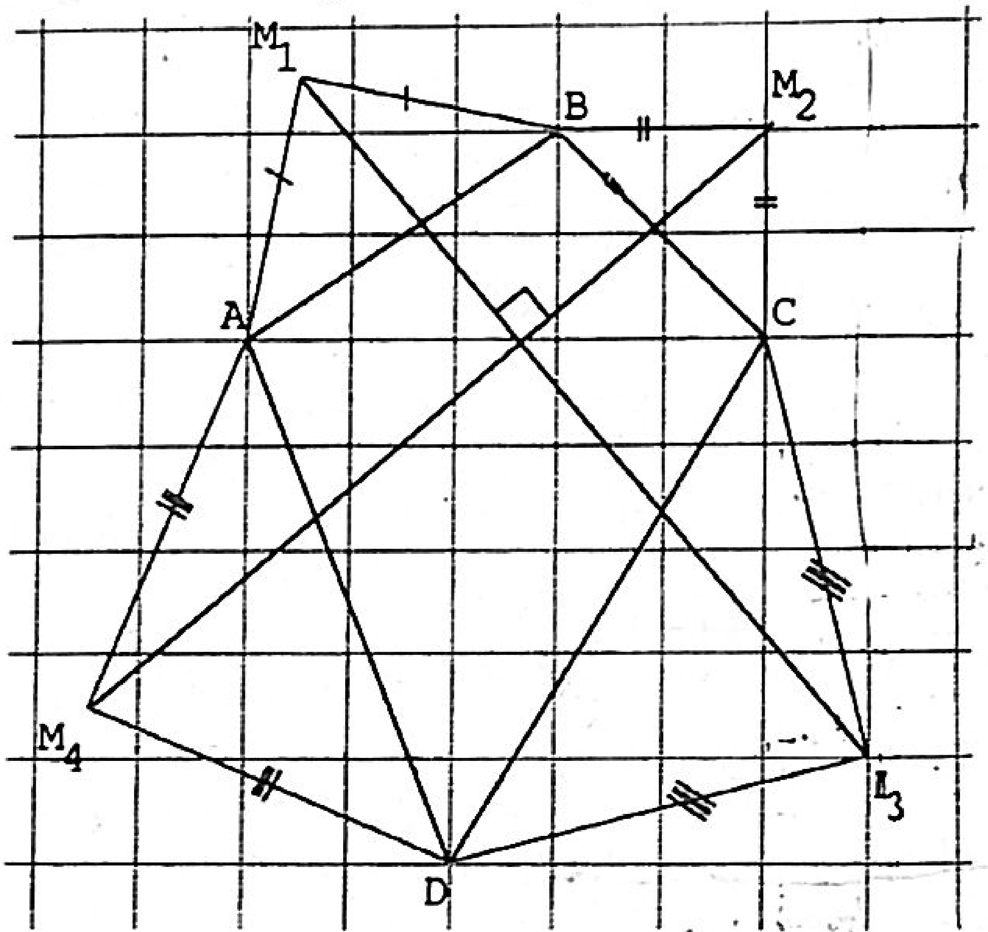
$\Rightarrow n > 2{,}32$

$p = 3.$

EXAMEN 12 — Session de Juin 1998 — Série C

EXERCICE 1

1. L'orientation des angles est donnée par la figure de base.



a. on a :

$$\left.\begin{array}{c} M_1A = M_1B \\ \text{Mes}\,(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - z_1}{a - z_1} = i$$

$$\Leftrightarrow b - z_1 = i\,(a - z_1)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-b + ia}{-1 + i}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{(b + a) + i(b - a)}{2}.$$

b. Par le même procédé on obtient :

$$z_2 = \frac{(c+b)+i(c-b)}{2}$$

$$z_3 = \frac{(d+c)+i(d-c)}{2}$$

$$z_4 = \frac{(a+d)^2+i(a-d)}{2}.$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$ a pour affixe $z_3 - z_1 = \dfrac{(c+d-b-a)+i(a+d-c-b)}{2}$

Le vecteur $\overrightarrow{M_2M_4}$ a pour affixe $z_4 - z_2 = \dfrac{(a+d-b-c)+i(a+b-d-c)}{2}$

$$M_1M_3 = |z_3 - z_1| = \frac{1}{2}\sqrt{(c+d-b-a)^2+(a+d-c-b)^2}$$

$$M_2M_4 = |z_4 - z_2| = \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2+(a+b-d-c)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2+(c+d-a-b)^2}$$

Par conséquen $M_1M_3 = M_2M_4$. Les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont la même longueu.

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{M_1M_3}.\overrightarrow{M_2M} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c)+\frac{1}{4}(a+b-c-d)(a+d-c-b)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}.\overrightarrow{M_2M} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c)-\frac{1}{4}(c+d-a-b)(a+d-b-c)=0$$

donc les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires.

EXERCICE 2

1. Pour tout point M du plan de coordonnées (x,y),

la distance de M à la droite (Δ) d'équation $x = \dfrac{16}{3}$ est $\left|x - \dfrac{16}{3}\right|$.

$\left|x - \dfrac{16}{3}\right| = \dfrac{1}{3}|3x+6|$ et la distance OM est égale à $\sqrt{x^2+y^2}$.

$$M \in (E) \quad \Leftrightarrow \quad 25(x^2+y^2) = (3x-16)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{(3x-16)^2} = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{3x-16}{3}\right)^2} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{OM^2}{d(M,(\Delta))^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{OM}{d(M,(\Delta))} = \frac{3}{5}$$

(E) est donc l'ellipse de foyer O, d'excentricité $\frac{3}{5}$ et de directrice associée (Δ).

2. a. $OM = \frac{1}{5}\left| 3x-16\right|$

puisque $x < \frac{16}{3}$, $3x-16 < 0$ donc $OM = \frac{1}{5}(16-3x)$.

b. $x = OM\cos\theta$

donc $5OM = 16 - 3OM\cos\theta$

Par suite $OM = \dfrac{16}{5+3\cos\theta}$.

3. On a $\operatorname{mes}\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \theta + \pi$ et $M' \in (E)$

d'où $OM' = \dfrac{16}{5+3\cos(\theta+\pi)} = \dfrac{16}{5-3\cos\theta}$

a. $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$

b. on a $OI\cos\theta = \dfrac{16}{3}$ d'où $OI = \dfrac{16}{3\cos\theta}$

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{6\cos\theta}{16} = 2 \times \frac{3\cos\theta}{16} = \frac{2}{OI}.$$

PROBLÈME

Partie A

1. $f_1(x) = x\,e^{-x}$.

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$

   b. $f_1'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}$

   Le signe $f_1'(x)$ dépend du signe de $(1-x)$.

   Alors $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

   $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$,

   $f_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

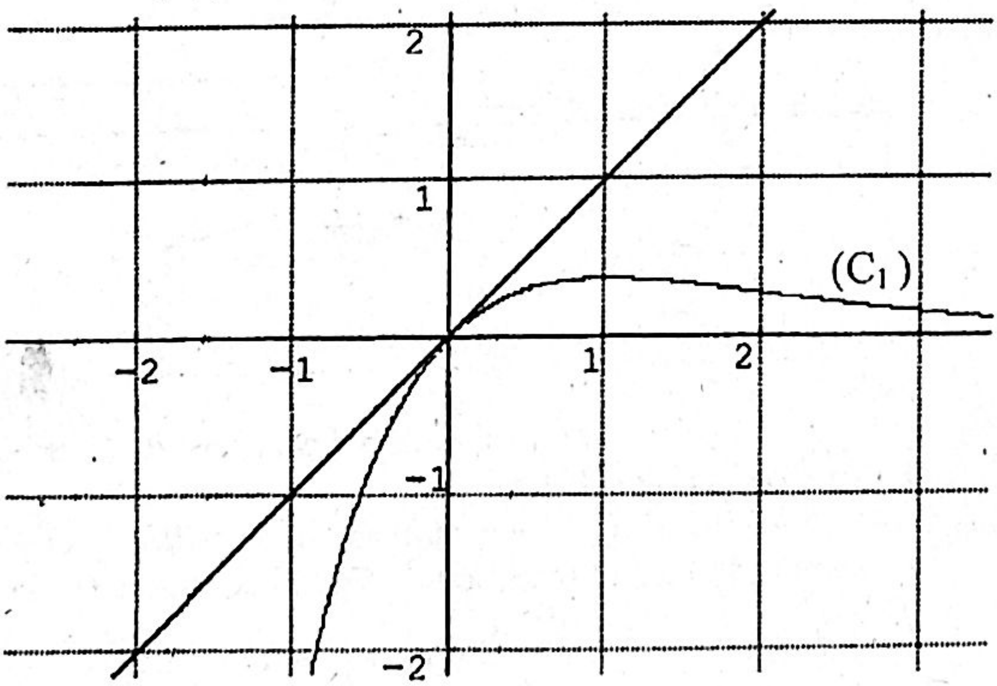
   f_1 est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

   On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   c. La tangente à l'origine est la droite d'équation $y = x$.

   Tracé de (C_1)



2.. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = n\,x^{n-1}\,e^{-x} - x^n\,e^{-x} = x^{n-1}\,e^{-x}\,(n-x)$.

Le signe de f_n' dépend du signe de $x^{n-1}\,(n-x)$.

Le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n.

- si n est pair , $n-1$ est impair et le signe de x^{n-1} est celui de x.

On obtient le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau :

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	|	$+$	
$n-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[n\,;+\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[0\,;n]$.

- si n est impair , $n-1$ est pair donc x^{n-1} est toujours positif.

On peut donner le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	|	$+$	
$n-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

f_n est strictement croissante sur $]-\infty\,;n[$ et f_n est strictement décroissante sur $[n\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{27}{e^3}$	$\searrow$	0

c. La tangente à l'origine est la droite des abscisses. Courbe de (C_3), voir figure à la fin du problème.

3. a. La droite d'équation $x = n$ est une droite parallèle à (OJ). M et M' ont la même ordonnée et le milieu de [MM'] se trouve sur la droite d'équation $x = n$. d'où $\dfrac{x' + x}{2} = n \Rightarrow x' = 2n - x$.

- On a : $\begin{cases} x' = 2n - x \\ y' = y \end{cases}$

M' a pour coordonnées $(2n - x, y)$.

b. $M'(x',y') \in C'_n \Leftrightarrow \exists M(x\,;y) \in (C_n)\ M' = S_n(M)$

$\Leftrightarrow x' = 2n - x$ et $y' = f_n(x)$

$\Leftrightarrow y' = f_n(2n - x')$

donc (C'_n) est l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $y = f_n(2n - x)$.

c. Voir figure.

d.

$\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)\,dt$ est l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équations $x = n$ et $x = 2n$.

si $n \leqslant x \leqslant 2n$ alors $0 \leqslant 2n - x \leqslant n$

$\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,dt$ est l'aire de la partie $\mathscr{D}'$ du plan telle que : $\mathscr{D}' = S_n(\mathscr{D})$

donc $\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,dt = \int_0^{2n} f_n(t)\,dt$ car une symétrie orthogonale conserve les aires.

4. a. $x \in]0\,;n]$, $h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.

- Comme $x \in]0\,;n]$ alors $f_n'(x) \geqslant 0$. Donc f_n est croissante sur $]0\,;n]$.

$0 < x \leqslant n \Leftrightarrow f_n(0) < f_n(x) \leqslant f_n(n)$

$\Leftrightarrow 0 < f_n(x) \leqslant n^n e^{-n}$.

Par conséquent $f_n(x)$ est strictement positif sur $]0\,, n]$.

La fonction $x \mapsto \ln(f_n(x))$ est bien définie et dérivable sur $]0\,;n]$.

- Comme $x \in]0\,;n]$ alors $2n - x \in [n,2n[$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[n\,;2n[$.

$0 < x \leqslant n \Leftrightarrow n \leqslant 2n - x < 2n$

$\Leftrightarrow f_n(2n) < f_n(2n-x) \leqslant f_n(x)$

$\Leftrightarrow (2n)^n e^{-2n} < g_n(x) \leqslant n^n e^{-n}$

g_n est strictement positif sur $]0\,;n]$. Alors la fonction $x \mapsto \ln(g_n(x))$ est définie et dérivable sur $]0\,;n]$.

Par conséquent h_n est définie et dérivable sur $]0\,;n]$.

On a $\ln(f_n(x)) = \ln(x^n e^{-x}) = -x + n\ln x$

$\ln(g_n(x)) = \ln(2n - x)^n e^{-(2n-x)} = -(2n - x) + n\ln(2n - x)$

d'où $h_n(x) = 2x - 2n + n\ln(2n - x) - n\ln x$

$$h'_n(x) = 2 - \frac{n}{2n - x} - \frac{n}{x} = \frac{-2x^2 + 4nx - 2n^2}{x(2n - x)}$$

$$h'_n(x) = \frac{-2(x-n)^2}{x(2n-x)}$$

si $x \in]0\,;n]$ alors $x\,(2n-x) > 0$ d'où $h'_n(x) < 0$

x	0	n
$h_n'(x)$	$-$	
$h_n(x)$	$\searrow$	0

h_n admet pour minimum 0 , par conséquent
$\forall\, x \in]0\,;n]\quad h_n(x) > 0.$

b. $\forall\, x \in]0\,;n]\quad h_n(x) > 0 \Rightarrow \ln(g_n(x)) > \ln(f_n(x))$
$\Rightarrow g_n(x) > f_n(x)$

d'où $\forall\, x \in]0\,;n],\quad f_n(x) < g_n(x)$

c. $\forall x \in]0\,;n],\quad f_n(x) < g_n(x)$

$$\int_0^n f_n(t)\,dt < \int_0^n g_n(t)\,dt$$

or $\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,dt = \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$, d'où le résultat :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^n f_n(t)\,dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt\,.$$

Partie B

$$\mathrm{F}_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt\,.$$

1. $\mathrm{F}'_n(x) = f_n(x)$ sur $[\,0, +\infty\,[$ or $f_n(x) > 0$ pour $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, par conséquent F_n est croissante sur $[0, +\infty\,[$.

2. a. $\mathrm{F}_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\,e^{-t}\,dt$. Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a $u'(t) = 1$; choisissons $v(t) = -e^{-t}$

alors $\mathrm{F}_1(x) = [-t\,e^{-t}]_0^x + \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = [-t\,e^{-t}]_0^x - [e^{-t}]_0^x$

$\mathrm{F}_1(x) = -x\,e^{-x} - e^{-x} + 1$

b. $F_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt$

Posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a $u'(t) = (n+1)t^n$. Choisissons $v(t) = -e^{-t}$

$$f_{n+1}(x) = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

$$= -x^{n+1} e^{-x} + (n+1)\, F_n(x).$$

d'où $F_{n+1}(x) = (n+1)\, F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

3. Pour $n = 1$, $F_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - (1+x)\,e^{-x} = 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!}\right)$.

La relation est vérifiée pour $F_1(x)$.

Supposons que pour tout entier n, $F_n(x) = n![1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})]$.

On a $F_{n+1}(x)$ $= (n+1)\, F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

$$= (n+1)\, n!\, [1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})] - x^{n+1} e^{-x}$$

$$= (n+1)!\, [1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})]$$

Donc la propriété est vraie pour $F_{n+1}(x)$.

Par conséquent : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $F_n(x) = n![1 - e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})]$.

4. a. $\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = n!$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} = 0$

b. $1 - e^{-x}(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}) \leq 1$

d' où $F_n(x) \leq n!$

Partie C

1. $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^{2n} f_n(t)\,dt = F_n(2n)$

or $F_n(2n) \leq n!$ d'après B.4.b.

d'où $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)\,dt \leq n!$

2. On a $0 \leq \int_0^n f_n(t)\,dt \leq \int_n^{2n} f_n(t)\,dt.$

$$0 \leqslant F_n(n) \leqslant 2F_n(n) \leqslant F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)\, dt \leqslant n!.$$

d'où $0 \leqslant 2F_n(n) \leqslant n!$

alors $0 \leqslant F_n(n) \leqslant \dfrac{n!}{2}$.

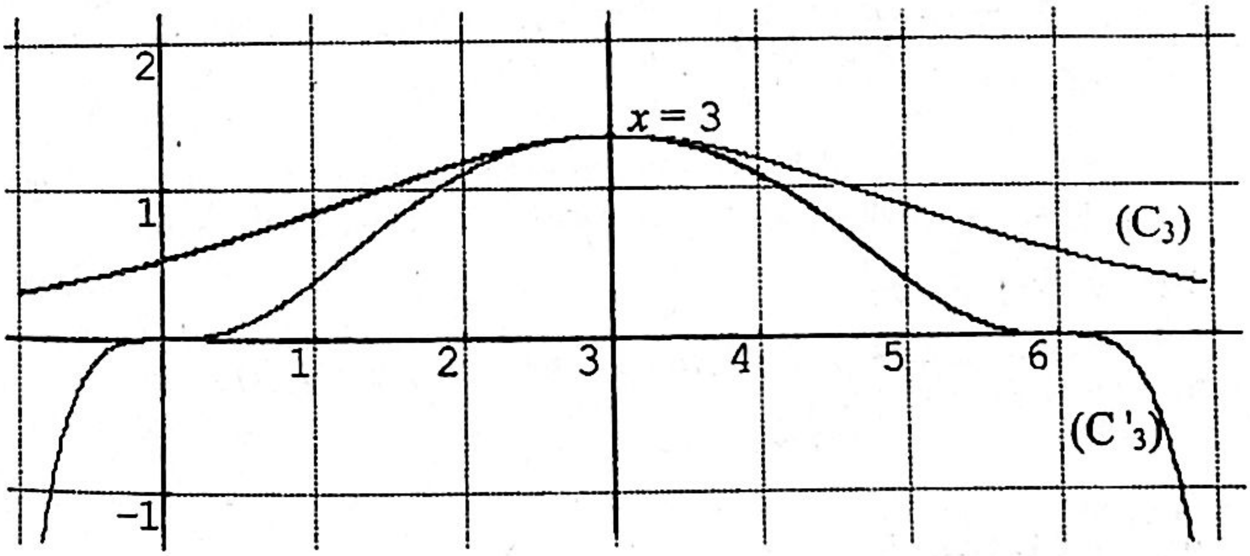
Remplaçons $F_n(n)$ par $n![1 - e^{-n}\left(1 + \dfrac{n}{1!} + \dfrac{n^2}{2!} + \ldots\ldots\ \dfrac{n^n}{n!}\right)]$,

on obtient :

$$0 \leqslant n!\left[1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots\ \frac{n^n}{n!}\right)\right] \leqslant \frac{n!}{2.}$$

$$0 \leqslant 1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots\ \frac{n^3}{n!}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} e^n \leqslant 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots\ldots\ \frac{n^n}{n!} \leqslant e^n.$$



EXAMEN 13

Session de Juin 1999
Série C

EXERCICE 1

1. Soit Ω l'ensemble des résultats. Ω est l'ensemble des 6 faces du dé.
   a. Soit P(B) la probabilité d'avoir une face blanche.
   $$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$
   b. soit P(N) la probabilité d'avoir une face noire.
   $$P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$
2. Soit E l'ensemble de résultats.
   $E = \Omega^4$; donc card $E = 6^4$.
   a. Soit P_1 la probabilité d'avoir dans l'ordre B,N,B et B.
   $$P_1 = \frac{4 \times 2 \times 4 \times 4}{6^4} = \frac{8}{81}.$$
   b. Soit P_2 la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des 4 lancers. Cette face noire peut s'obtenir au 1^{er}, 2^e, 3^e ou au 4^e lancer.
   $$P_2 = 4 \times \frac{8}{81} = \frac{32}{81}.$$
   c. Soit P_3 la probabilité d'avoir une face noire au 4^e lancer.
   $$P_3 = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 2}{6^4} = \frac{1}{3}.$$
3. $n \in \mathbb{N}^*$
   Soit F l'ensemble des résultats
   $F = \Omega^n$; donc card $F = 6^n$
   a. la négation de "au moins une face blanche" est "aucune face blanche", c'est-à-dire "quatre faces noires". La probabilité de cet événement est : $\left(\frac{4}{6}\right)^n$
   $$P_n = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n$$
   $$P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
   b. $P_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0{,}99$
   $$\Leftrightarrow -\left(\frac{2}{3}\right)^n > -0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < -2\ln 10$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2\ln 10}{\ln 2 - \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n > 11{,}357.$$

Le plus petit entier naturel non nul n tel que $P_n > 0{,}99$ est 12.

EXERCICE 2

1. a. $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{x}$

   b. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

   $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

   $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e.$

   h est donc strictement décroissante sur $[e\ ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0\ ; e]$.

   Tableau de variation de h.

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

   c. Sur $[1\ ; e]$, h est strictement croissante. Donc

   $\forall x \in [1\ ; e]$, $h(1) < h(x) < h(e)$

   $-\frac{1}{e} < h(x) < 0$

   $h(x) < 0$ donc $\ln x < \frac{x}{e}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

a. $I_2 = \int_1^e x(\ln x)^2\,dx$

Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = x$

On a $u'(x) = \frac{2}{x}\ln x$. Choisissons $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\ln x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\,dx.$$

Soit $J = \int_1^e x\ln x\,dx.$

Posons $S(x) = \ln x$ et $T'(x) = x$

On a : $S'(x) = \frac{1}{x}$; choisissons $T(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

On a donc $I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

$$I_2 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

b. $I_{n+1}-I_n = \int_1^e [x(\ln x)^{n+1} - x(\ln x)^n]dx$

$$= \int_1^e x(\ln x-1)(\ln x)^n \, dx \leqslant 0 \text{ car } x \in [1;e],\ \ln x - 1 \leqslant 0.$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

c. $\forall x \in [1; e]$, $x(\ln x)^n \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

d. D'après 1.c

$\forall x \in [1 ; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$

$$0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$$

$$0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n$$

$$0 \leqslant x(\ln x)^n \leqslant \frac{x^{n+1}}{e^n}$$

donc $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n \, dx \leqslant \int_1^e \frac{x^{n+1}}{e^n} dx$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)\, e^n}\right]_1^e$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^{n+2}}{(n+2)e^n} - \frac{1}{(n+2)e^n}$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n}$$

e. $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e^2}{n+2} - \dfrac{1}{(n+2)^2}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n} = 0$$

d' après le théorème des gendarmes ; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

PROBLÈME

Partie A

Posons $P(z) = z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$

1. Soit a une solution réelle.

$P(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 - (6 + i\sqrt{3})a^2 + (11 + 4i\sqrt{3})a - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

$$\begin{cases} a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0 \quad (1) \\ -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Résolvons l'équation (2) :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2-1)(a-2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-3)(a-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \text{ ou } a = 1 \end{aligned}$$

1 et 3 vérifient l'équation (1) donc 1 et 3 sont les solutions réelles de l'équation $P(z) = 0$.

On a $P(z) = (z-1)(z-3)(az + b)$

$= (z^2 - 4z + 3)(az + b)$

$= az^3 + (b - 4a)z^2 + (-4b + 3a)z + 3b$

Par identification

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -(6 + i\sqrt{3}) \\ 3a - 4b = 11 + 4i\sqrt{3} \\ 3b = -6 - 3i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$P(z) = (z-1)(z-3)(z - 2 - i\sqrt{3})$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 3 \text{ ou } z = 2 + i\sqrt{3})$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{1 ; 3 ; 2 + i\sqrt{3}\}$.

2. a. $I(1)$; $A(3)$; $B(2 + i\sqrt{3})$

$IA = |3 - 1| = 2$

$IB = |2 + i\sqrt{3} - 1| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$

$AB = |2 + i\sqrt{3} - 3| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$

$IA = IB = AB$

Donc le triangle IAB est équilatéral.

b. $\overrightarrow{BC}$ $\begin{pmatrix}-3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}$ $\begin{pmatrix}9\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BG} = -3\,\overrightarrow{BC}$ donc les points B,C et G sont alignés.

Autre solution

Soit z_M l'affixe d'un point M.

$$\frac{z_G - z_B}{z_C - z_B} = \frac{11 + 4i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}}{-1 - 2 - i\sqrt{3}}$$

$$\frac{z_G - z_B}{z_C - z_B} = \frac{9 + 3i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$$

$$\frac{z_G - z_B}{z_C - z_B} = -3$$

mes $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG})} = \pi$; donc les points B,C et G sont alignés.

c. Voir figure.

3. F $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et EFG est un triangle équilatéral. E $\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$; G $\begin{pmatrix}11\\4\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Soit G' le projeté orthogonal de G sur (OI).

G' est le milieu du segment [EF].

on a $x_{G'} = 11$

donc $11 = \dfrac{x_E + x_F}{2}$

d'où $x_F = 15$

F $\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$

Partie B

1. a. Un segment et son image par une homothétie ont des supports parallèles.

Or seule la droite (IA) est parallèle à la droite (EF).

Donc l'image du segment [IA] par h est le segment [EF]

b. Si $h([IA]) = [EF]$ alors $h(B) = G$ et on a les deux possibilités suivantes :

$\xrightarrow{h}$

I	F
A	E
B	G

$\xrightarrow{h}$

I	E
A	F
B	G

Dans le premier cas, la droite (IB) n'est pas parallèle à la droite (FG). En effet $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{FG}) \neq 0$. Donc la seule homothétie h qui transforme IAB en EFG est telle que :
$h(I) = E$; $h(A) = F$ et $h(B) = G$.

c. Les droites (BG) et (IE) sont sécantes en C.

Soit k le rapport de h. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{EF}$ ayant le même sens, k est positif

On a : $k = \dfrac{EF}{IA} = \dfrac{|15-7|}{|3-1|} = 4$

Donc h est l'homothétie de centre C et de rapport 4.

2. $h = h(C,4)$; $r = r(O', \frac{2\pi}{3})$; $f = h o r$.

a. Le rapport de f est celui de h c'est-à-dire 4
L'angle de f est celui de r .

Il a donc pour mesure $\frac{2\pi}{3}$.

b. $\left.\begin{array}{l} r(I) = A \\ r(A) = B \\ r(B) = I \end{array}\right\}$ donc $r(IAB) = ABI$
$= IAB$
or $h(IAB) = EFG$
donc $f(IAB) = EFG$

3. a. h^{-1} a pour rapport $\frac{1}{4}$.

Soit α le rapport de la similitude directe g.
$\alpha = \dfrac{\text{mesure d'un coté de EFG}}{\text{mesure d'un coté de IAB}} = \dfrac{8}{2} = 4$
$h^{-1} o g$ est une similitude directe qui a pour rapport 1.
C'est donc un déplacement.
$g(IAB) = EFG$ d'après l'énoncé. Or $h^{-1}(EFG) = IAB$
donc $h^{-1} o g(IAB) = IAB$
La seule translation qui laisse globalement invariant un triangle est $Id_{\mathscr{P}}$ qui est une rotation.
Donc $h^{-1} o g$ est une rotation qui laisse globalement invariant le triangle IAB.

b. Les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB sont :

- La rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r.
- La rotation de centre O' et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r^{-1}.
- L'identité de $\mathscr{P}$.

c. $h^{-1}og = R$ (où $R \in \{Id_{\mathscr{P}}, r, r^{-1}\}$ d'après ce qui précède).

$\Leftrightarrow g = hoR$

d'où $g = hoId_{\mathscr{P}} = h$

ou $g = hor = f$

ou $g = hor^{-1} = f'$

d. $f' = hor^{-1}$

f' a pour rapport 4 et pour angle $-\frac{2\pi}{3}$

4. $\xrightarrow{f}$

I	F
A	G
B	E
Ω	Ω
K	K

a. K est le milieu de [IA]; son image K' est donc le miliu de [FG] car une similitude directe conserve le milieu.

b. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega G}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$E \in [FA)$ Donc $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FG}}) = (\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}})$

FEG est un triangle équilatéral de sens indirect. Donc

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FG}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}}) = -\frac{\pi}{3}$

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FG}}) \equiv \frac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

$\equiv \pi + \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega G}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FG}}) + \pi + 2k\pi$

donc les points Ω , F , A , G sont cocycliques.

c. On démontre de la même manière (voir b) que les points Ω, F, K et K' sont cocycliques.

d. Les deux cercles passant respectivement par Ω, F, A , G et Ω, F, K, K' sont sécants en Ω et F or, F n'est pas invariant, donc Ω est le point d'intersection des deux cercles différents de F.

5. On a : $f'(I) = G$

$f'(A) = E$

$f'(B) = F$

Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe associée à f'.

Déterminons a et b

$$\begin{cases} z_G = az_I + b \\ z_E = az_A + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 + 4i\sqrt{3} = a + b \\ 7 = 3a + b \end{cases}$$

$2a = -4 - 4i\sqrt{3}$

$a = -2 - 2i\sqrt{3}$

$b = 11 + 4i\sqrt{3} - a$

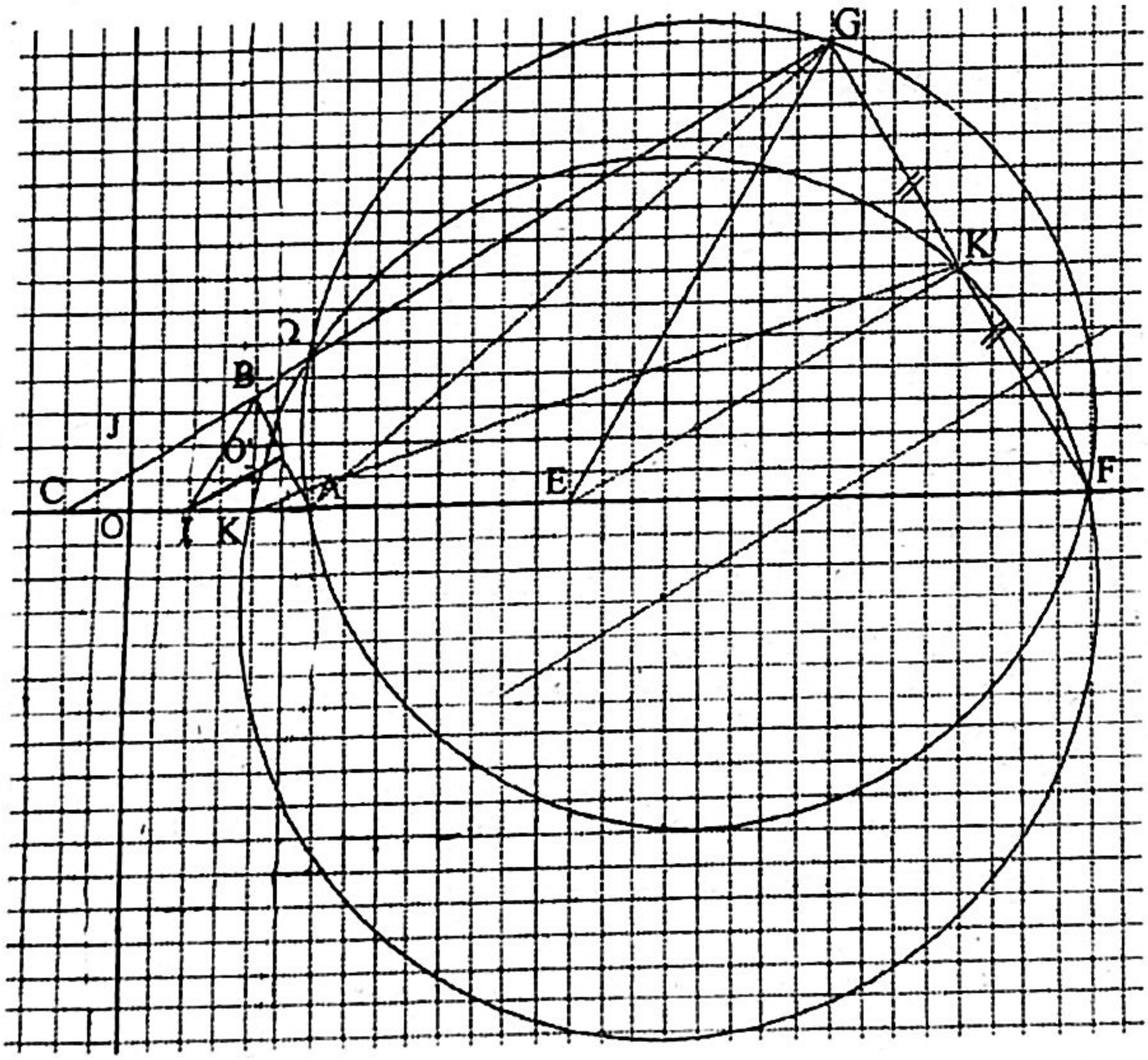
$b = 13 + 6i\sqrt{3}$

$z' = (-2 - 2i\sqrt{3})z + 13 + 6i\sqrt{3}$

6. Le centre Ω' œ f' a pour affixe $\dfrac{b}{1-a}$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{13 + 6i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3}} = \frac{(13 + 6i\sqrt{3})(3 - 2i\sqrt{3})}{9 + 4 \times 3} = \frac{75 - 8i\sqrt{3}}{21}$$

$$z_{\Omega'} = \frac{75 - 8i\sqrt{3}}{21}.$$



EXAMEN 14 Session de Remplacement 1999

Série C

EXERCICE 1

1. $4^0 \equiv 1\,[7]$; $4^1 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1\,[7]$.
   Par conséquent,
   si $n \equiv 0[3]$ alors $4^n \equiv 1[7]$.
   si $n \equiv 1[3]$ alors $4^n \equiv 4[7]$.
   si $n \equiv 2[3]$ alors $4^n \equiv 2[7]$.
   En conclusion, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 est :
   1 si $n \equiv 0[3]$,
   4 si $n \equiv 1[3]$,
   2 si $n \equiv 2[3]$.
2. $1999 = 7 \times 285 + 4$
   $1999 \equiv 4[7]$
3. $1999^{132} \equiv 4^{132}[7]$
   or $132 \equiv 0[3]$
   donc le reste de la division euclidienne de 1999^{132} par 7 est 1.
4. $A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$
   $123 = 7 \times 17 + 4$ donc $123 \equiv 4[7]$
   par conséquent,
   $A_k = 4^k + (4^k)^2 + (4^k)^3 + (4^k)^4 + (4^k)^5[7]$
   1^er^ cas : si $k \equiv 0[3]$ alors $4^k \equiv 1[7]$
   donc $A^k \equiv 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5[7]$
   $A_k \equiv 5[7]$.
   2^e^ cas si $k \equiv 1[3]$ alors $4^k \equiv 4[3]$
   donc $A_k \equiv 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5[7]$
   $A_k \equiv 6[7]$
   3^e^ cas si $k \equiv 2[3]$ alors $4^k \equiv 2[7]$
   donc $A_k \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5[7]$
   $A_k \equiv 6[7]$

Le reste de la division euclidienne de A_k par 7 est :

- 5 si $k \equiv 0$ [3].
- 6 si $k \equiv 1[3]$ ou $k \equiv 2[3]$.

EXERCICE 2

1. $f_n(x) = x - n \ln x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - n\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{n\ln x}{x}) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}$

$= \frac{x-n}{x}$.

3. $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n$

$f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < n$

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x > n$

f_n est donc strictement décroissante sur $]0; n]$, et strictement croissante sur $[n ; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

4. f_n est continue et strictement décroissante sur $]0 ; n[$, et

$f_n(\,]0 ; n[\,) =]n(1-\ln(n)) ; +\infty[$

f_n réalise donc une bijection de $]0 ; n[$ sur $]n(1-\ln(n)) ; +\infty[$

0 appartient à l'intervalle $]n(1-\ln(n)) ; +\infty[$ car $n(1-\ln(n))$ est strictement négatif pour tout n supérieur ou égal à 3.

Donc l'équation $x \in]0 ; n[$, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n.

5. $f_n(1) = 1$
$f_n(e) = e - n$ et $e - n < 0$
donc $f_n(1) \times f_n(e) < 0$
par suite $1 < a_n < e$

6. $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$
$a_{n+1} - (n+1)\ln(a_{n+1}) = 0$
$a_{n+1} = (n+1)\ln(a_{n+1})$

$$\begin{aligned} f_n(a_{n+1}) &= a_{n+1} - n\ln(a_{n+1}) \\ &= (n+1)\ln(a_{n+1}) - n\ln(a_{n+1}) \\ &= (n+1-n)\ln(a_{n+1}) \\ &= \ln(a_{n+1}) \end{aligned}$$

$\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$

7. $f_n(a_{n+1}) - f_n(a_n) = f_n(a_{n+1})$ car $f_n(a_n) = 0$
d'après 5., $a_{n+1} \in]1; e[$ d'où $\ln(a_{n+1}) > 0$
par conséquent $f_n(a_{n+1}) > f_n(a_n)$ car $f_n(a_{n+1}) = \ln(a_{n+1})$
d'où $a_{n+1} < a_n$
La suite (a_n) est donc décroissante.

8. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.

9. D'après 5. $1 < a_n < e$ or $f_n(a_n) = 0 = a_n - n\ln(a_n)$
c'est-à-dire $a_n = n\ln(a_n)$
donc $1 < a_n < e$
$1 < n\ln(a_n) < e$
$\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$

10. $\left(\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}\right) \Leftrightarrow e^{1/n} < a_n < e^{e/n}$

$$\lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = \lim_{n \to +\infty} e^{e/n} = 1 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n} = 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$ (d'après le théorème des gendarmes).

PROBLÈME

PARTIE A

1. Une similitude directe conserve le rapport des distances et l'angle orienté. Par suite l'image du carré OIKJ par S est le carré OI'K'A
2. Construction des points O, I, J, K, I', K' (voir figure).
3. Les points I, J et A sont alignés. Donc leurs images I', A' et A sont alignés car une similitude directe conserve l'alignement.

4. $\overset{S}{\curvearrowright}$

O	O
J	A
I	I'
K	K'
A	A'

La similitude directe conserve le rapport des distances. Donc
$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'K'}{AK}$.
Démontrer que OA' = A'K' revient à démontrer que
OA= AK
La droite (IJ) est un axe de symétrie du carré O I K J.
C'est la médiatrice du segment [O K]. A appartient à la droite (IJ) donc
AO =AK.
Par conséquent OA' =A' K'.

Partie B

1. K a pour couple de coordonnées (1;1) donc l'affixe z_k de K est $1+i$
2. soit (x,y) le couple de coordonnées de A dans le repère (O,I,J).

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \in (IJ) \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x-1+y=0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 1-x \end{aligned}$$

$a = x + iy$
$\quad = x+i(1-x)$
$ia + 1 = ix-(1-x) + 1$
$ia +1= x(1+i)$

3. Un argument de $1+i$ est $\frac{\pi}{4}$. Un argument du réel non nul x est 0 ou $+\pi$ selon le signe de x.

($x \neq 0$ car $A \neq J$) ; par suite un argument de $x(1+i)$ est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

Donc il existe un argument de $ia+1$ dans la paire

$\{\frac{\pi}{4} ; \frac{-3\pi}{4}\}$.

4. Considérons la symétrie orthogonale $S_{(IJ)}$ d'axe (IJ).

$$\xrightarrow{S_{(IJ)}}$$

O	K
J	J
A	A

On a $(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}}) = -(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KA}})$

$= (\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}})$

car une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

5. Le vecteur image du complexe $a-(1+i)$ est $\overrightarrow{KA}$.

$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{KA}}) = (\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{KA}})$ (car $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JK}$)

$= (\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{KJ}}) + (\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KA}})$

$= (\widehat{\pi}) - (\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}})$

$= (\widehat{\pi}) - (\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}})$

$= (\widehat{\pi}) - (\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$

$= (\widehat{\pi}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$

mes $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{KA}}) \equiv \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \; [2\pi]$

$\equiv 3\frac{\pi}{2} - \alpha \; [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} - \alpha \; [2\pi]$

donc $-\frac{\pi}{2}-\alpha$ est un argument du nombre complexe $a-(1+i)$.

PARTIE C

1. $S(O) = O$ et $S(J)=A$.
   L'écriture complexe de S est : $z' = tz + p$ où $t \in \mathbb{C}^*$.
   On a :
   $$\begin{cases} 0 = 0 + p \\ a = t(i) + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ t = -ia \end{cases}$$
   donc $z' = -i\,a\,z$.

2. $K' = S(K)$
   $k' = -ia(1+i)$
   $A' = S(A)$
   $a' = -ia^2$

3. a
   - $u = k' - (1+i)$
     $= -ia(1+i) - (1+i)$
     $= (1+i)(-ia-1)$
     $= -(1+i)(ia+1)$
     $$\begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$$
     $$\begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$
     $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
     donc u est un imaginaire pur.
   - $v = a' - k'$
     $= -ia^2 + ia(1+i)$
     $= -ia(a-(1+i))$

$$\arg(v) \equiv -\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\ [2\pi]$$

$$\arg(v) \equiv -\pi\ [2\pi]$$

donc v est un nombre réel.

b. u est un imaginaire pur donc (KK') $\perp$ (OI),
v est un nombre réel donc (K'A') // (OI) donc (KK') $\perp$ (K'A'),

par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.

4. On sait que (KI) $\perp$(OI) et que (KK') $\perp$(OI)
Donc les droites (KI) et (KK') sont confondues. Par sconséquent les points K, K' et I sont alignés.

On sait d'après 3.a. que les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que les droites (KK') et (K'A') sont perpendiculaires en K'. Donc K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (KK') c'est-à-dire sur la droite (KI).

5. *Construction de* A'
On sait :
- d'après A.3. que A' $\in$ (AI')
- d'après C.4. que (A'K') $\perp$ (KK')

A' est donc l'intersection de la droite (AI') et de la perpendiculaire à la droite (KK') en K'.

6. On sait d'après A.4. que OA' = A'K' donc $\frac{OA'}{K'A'} = 1$

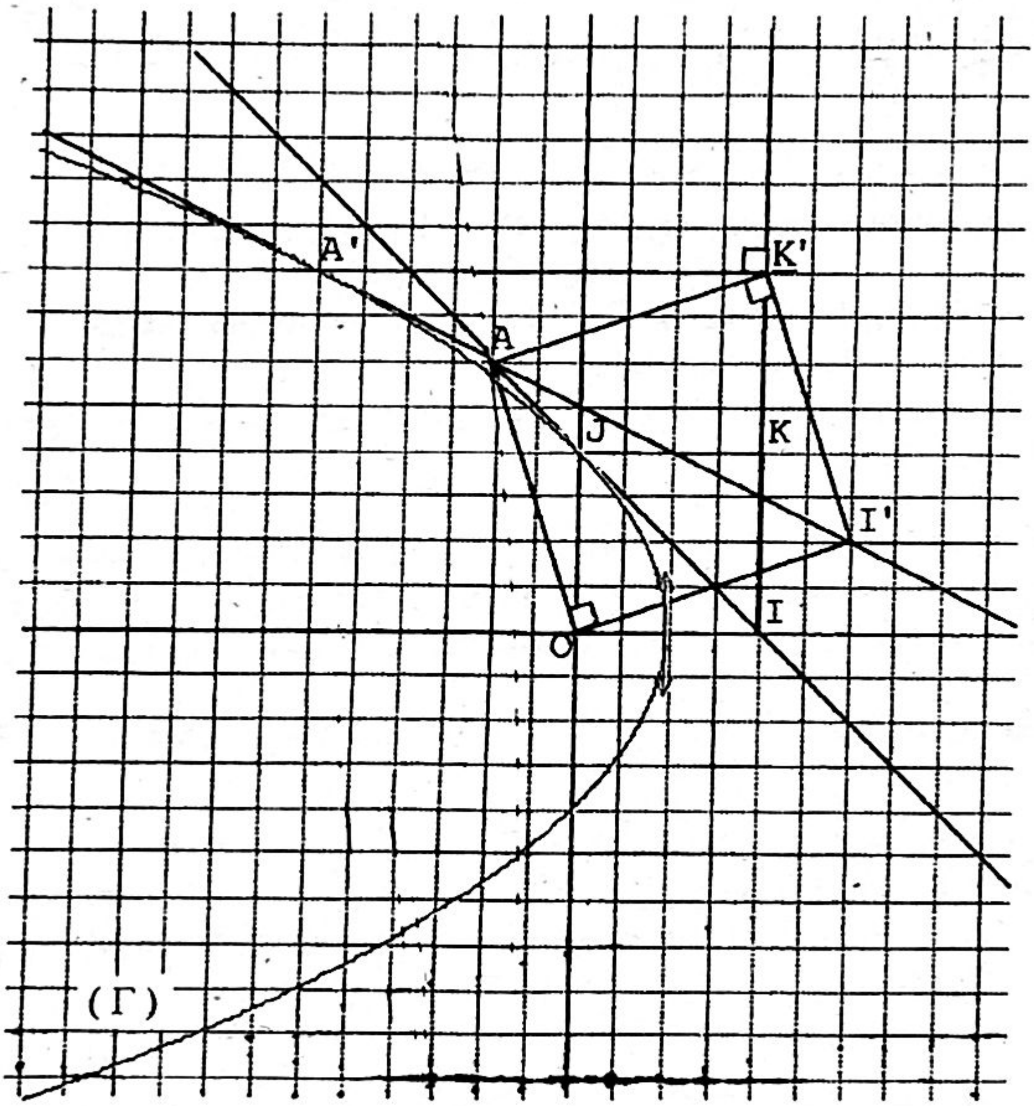
c'est-à-dire $\frac{d(A',O)}{d(A',(IK))} = 1$

donc A' appartient à la parabole de foyer O et de directrice (IK).

PARTIE D

1. L'axe focal de (Γ) est la perpendiculaire à la droite (IK) passant par O c'est-à-dire (OI).
Le sommet de la parabole est le milieu du segment [OI].
2. $\frac{d(J,O)}{d(J,(IK))} = \frac{1}{1} = 1$
donc J $\in$ (Γ).

3. **Construction de (Γ)**



EXERCICE 1

1. L'ensemble de définition de f est $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

   f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et on a :

   $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x.$

   $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) > 0.$

   f est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

   $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty, \qquad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

   f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

2. $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1+(f\circ g(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. *calcul de* I

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

   d'où : $$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{0} (1 - g'(x))\,dx = [x - g(x)]_{-1}^{0}$$

$$= 1 - (g(0) - g(-1))$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Calcul de K

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (g o \sin)'(x) = g'(\sin x) \times \cos x = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

$$= \cos x \times g'(\sin(x))$$
$$= (g o \sin)'(x)$$

d'où $K = [(g o \sin(x))]_0^{\pi/2}$

$$= (g o \sin)(\frac{\pi}{2}) - (g o \sin)(0)$$
$$= g(1) - g(0)$$
$$K = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 2

1. Il y a dans l'urne, 5 boules rouges et 10 boules blanches. Le nombre de cas possibles est donc C_{15}^4.

   $C_{15}^4 = 1365.$

   L'événement A est réalisé si on tire 2 boules rouges parmi 5 et 2 boules blanches parmi 10.

   Le nombre de cas favorables à A est donc $C_5^2 \times C_{10}^2$

   $C_5^2 \times C_{10}^2 = 450.$

   $P(A) = \dfrac{450}{1365} = \dfrac{30}{91}$

Il est plus aisé de calculer la probabilité de B en passant par le calcul de celle de $\overline{B}$.

$\overline{B}$ est l'événement : "n'obtenir aucune boule blanche"; c'est-à-dire "obtenir 4 boules rouges".

Le nombre de cas favorables à $\overline{B}$ est C_5^4.

$C_5^4 = 5$.

$P(\overline{B}) = \dfrac{5}{1365} = \dfrac{1}{273}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{273}$$
$$= \frac{272}{273}.$$

2. a. Le nombre de cas possibles est C_{3n}^{2}

$$C_{3n}^{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$$

On obtient deux boules de même couleur en obtenant soit 2 boules rouges parmi n soit 2 boules blanches parmi $2n$.

Le nombre de cas favorables à la réalisation decet événement est $C_{n}^{2} + C_{2n}^{2}$

$$C_{n}^{2} + C_{2n}^{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2}$$

$$C_{n}^{2} + C_{2n}^{2} = \frac{n(n-1)+2n(2n-1)}{2}$$
$$= \frac{n(5n-3)}{2}$$

d'où : $$P_n = \frac{C_{n}^{2}+C_{2n}^{2}}{C_{3n}^{2}}$$
$$= \frac{5n-3}{3(3n-1)}$$

b. P_n étant une probabilité, alors elle est inférieure ou égale à 1.

La suite $(P_n)_{n \geqslant 2}$ est donc majorée par 1.

Sens de variation de $(P_n)_{n \geqslant 2}$

Considérons la fonction f dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \frac{5x-3}{3(3x-1)}$$

$\forall\, x \in [2\,;+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{12}{9(3x-1)^2} = \dfrac{4}{3(3x-1)^2}$

$\forall\, x \in [2,+\infty[$, $\quad f'(x) > 0.$

f est donc strictement croissante. Par conséquent,

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant 2\,,\ f(n+1) > f(n);$

c'est-à-dire $P_{n+1} > P_n$.

La suite $(P_n)_{n \geqslant 2}$ est donc strictement croissante.

Autre méthode : on peut étudier le signe de $P_{n+1} - P_n$.

c. La suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée donc elle converge.

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x-3}{3(3x-1)}$$
$$= \frac{5}{9}.$$

PROBLÈME

PARTIE A

1. On désigne par z_M l'affixe d'un point M et par $z_{\vec{v}}$ celle d'un vecteur $\vec{v}$.

$$v_0 = z_{\overrightarrow{M_0M_1}} = z_{M_1} - z_{M_0} = 1$$

$$v_0 = 1$$

$$\text{mes}\ (\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}}) \equiv \arg\left(\frac{z_{M_2} - z_{M_1}}{z_{M_1} - z_{M_0}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{v_1}{v_0}\right) \quad [2\pi]$$

$$\text{d'où} \quad \arg\left(\frac{v_1}{v_0}\right) \equiv \theta \quad [2\pi] \qquad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| \Leftrightarrow |v_1| = r|v_0|$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{v_1}{v_0}\right| = r \quad (2)$$

de (1) et (2), on déduit que : $\frac{v_1}{v_0} = re^{i\theta}$

Donc $v_1 = v_0\, re^{i\theta}$

Par conséquent $v_1 = re^{i\theta}$ car $v_0 = 1$.

2. a. mes $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) \equiv \arg(\frac{v_n}{v_{n-1}})$ $[2\pi]$

$\equiv \theta$ $[2\pi]$.

D'où $\arg(\frac{v_n}{v_{n-1}}) \equiv \theta$ $[2\pi]$ (3)

Or $\left\| \overrightarrow{M_nM_{n+1}} \right\| = r \left\| \overrightarrow{M_{n-1}M_n} \right\|$,donc

$|v_n| = r|v_{n-1}|$ et par suite $\left| \frac{v_n}{v_{n-1}} \right| = r$ (4)

De (3) et (4) on déduit que : $\frac{v_n}{v_{n-1}} = re^{i\theta}$

On conclut que $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $re^{i\theta}$

b. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = r^n e^{in\theta} v_0$

$= r^n e^{in\theta}$ car $v_0 = 1$

3. Voir figure.

Partie B

1. $z_0 = 0$ car $M_0 = 0$

$v_0 = 1$ donc $z_1 - z_0 = 1$

Par conséquent $z_1 = 1$

$v_1 = re^{i\theta}$

$= z_2 - z_0$ donc $z_2 = z_0 + re^{i\theta}$

$z_2 = 1 + re^{i\theta}$

2. $v_n = z_{n+1} - z_n$

$v_{n-1} = z_n - z_{n-1}$

$v_{n-2} = z_{n-1} - z_{n-2}$

....

....

$v_1 = z_2 - z_1$

$v_0 = z_1 - z_0$

En ajoutant membre à membre les égalités ci-dessus, on obtient :

$z_n = v_0 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1} \qquad \forall\, n \geqslant 1$

3. z_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $re^{i\theta}$, on a donc :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ z_n = \frac{1-(re^{i\theta})^n}{1-re^{i\theta}} \text{ car } \theta \in \mathbb{R} - \{ k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \}$$

$$= \frac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}.$$

4. a. $$z_n = \frac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} - \frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}.$$

d'où : $$z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}} = -\frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

par conséquent $$\left| z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}} \right| = \frac{r^n}{\left|1-re^{i\theta}\right|}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$ car $0 < r < 1$, d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}} \right| = 0.$$

b. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| z_n - \omega \right| = 0$ d'après 4.a.

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\| = 0.$

5. a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ z_n' = z_n - \omega$

$$= -\frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

b. $$z_n' = re^{i\theta}\left(-\frac{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$= re^{i\theta} z'_{n-1}.$$

Posons $a = re^{i\theta}$, a est non nul.

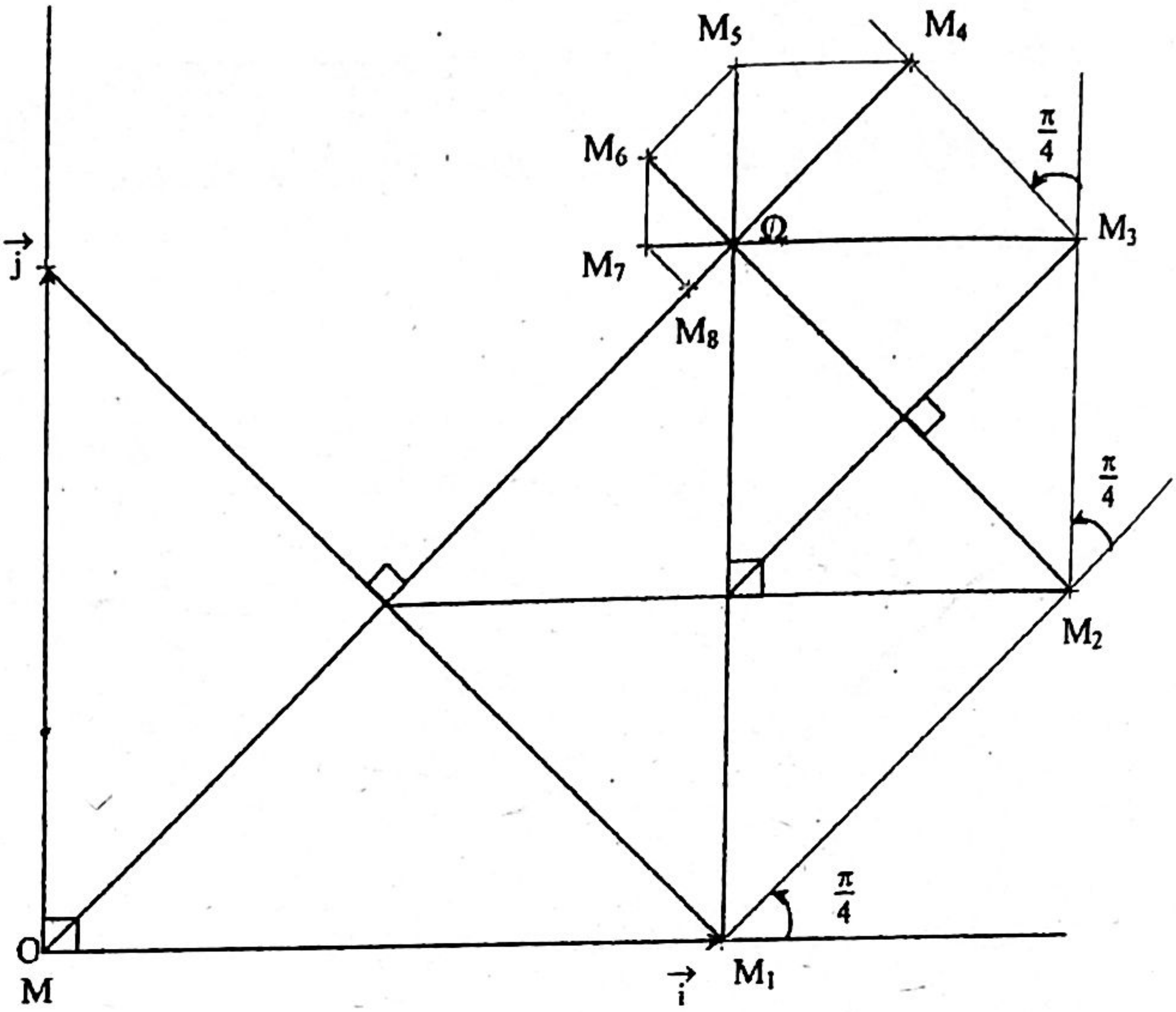
Il existe donc un nombre complexe non nul a tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z'_n = a\, z'_{n-1}$

c. De l'égalité $z'_n = a\, z'_{n-1}$, on a : $z_n - \omega = re^{i\theta}(z_{n-1} - \omega)$ d'où f est la similitude directe de centre Ω, de rapport r et d'angle θ. Cette similitude transforme M_{n-1} en M_n.

d. $$\omega = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$
$$= 1 + i$$
$\omega = 1+i$; donc $\Omega(1,1)$.

f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1+i$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

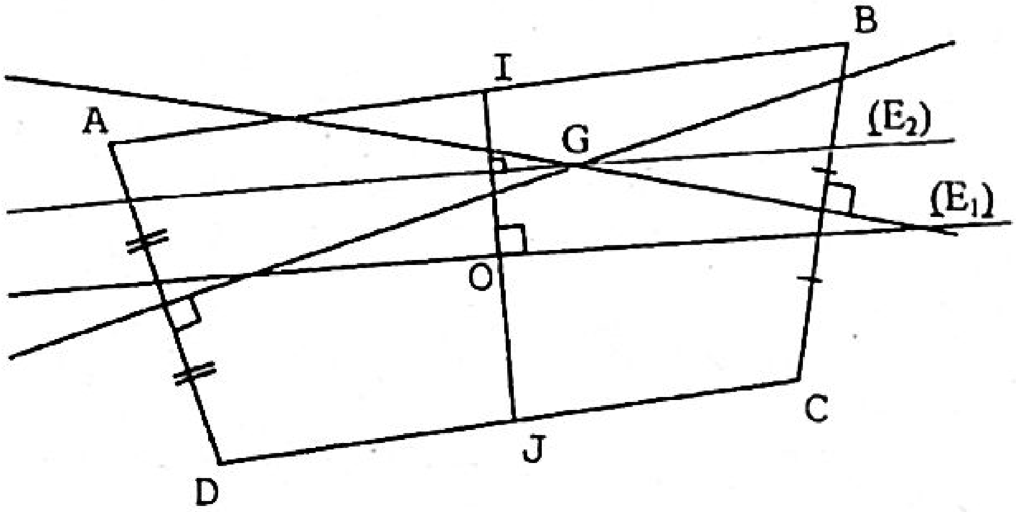
De l'égalité $f(M_{n-1}) = M_n$, on déduit que le triangle $\Omega M_{n-1}M_n$ est rectangle isocèle en M et de sens direct.


M_5
M_4
M_6
$\frac{\pi}{4}$
$\vec{j}$
Ω
M_3
M_7
M_8
$\frac{\pi}{4}$
M_2
$\frac{\pi}{4}$
O
M
$\vec{i}$
M_1

EXAMEN 16

Session de Juin 2000
Série C

EXERCICE 1



1. $M \in (E_1) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$$

$$\Leftrightarrow MI = MJ$$

(E_1) est la médiatrice du segment [IJ].

2. G appartient à la médiatrice de [AD], donc $GA = GD$.
   G appartient à la médiatrice de [BC], donc $GB = GC$.
   Alors $GA^2 + GB^2 = GD^2 + GC^2$.

3. a. $G \in (E_2)$ donc (E_2) est non vide.
   b. $M \in (E_2) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC})^2+(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\,MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2$$

$$\Leftrightarrow 2(MI^2 - MJ^2) = \frac{DC^2}{2} - \frac{AB^2}{2}.$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}).\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}(DC^2 - AB^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}(DC^2 - AB^2)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{8}(DC^2 - AB^2)$$

Par conséquent $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM}$ est une constante réelle.

c. Comme $G \in (E_2)$, on peut aussi écrire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}(DC^2 - AB^2)$

Alors $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OG}$

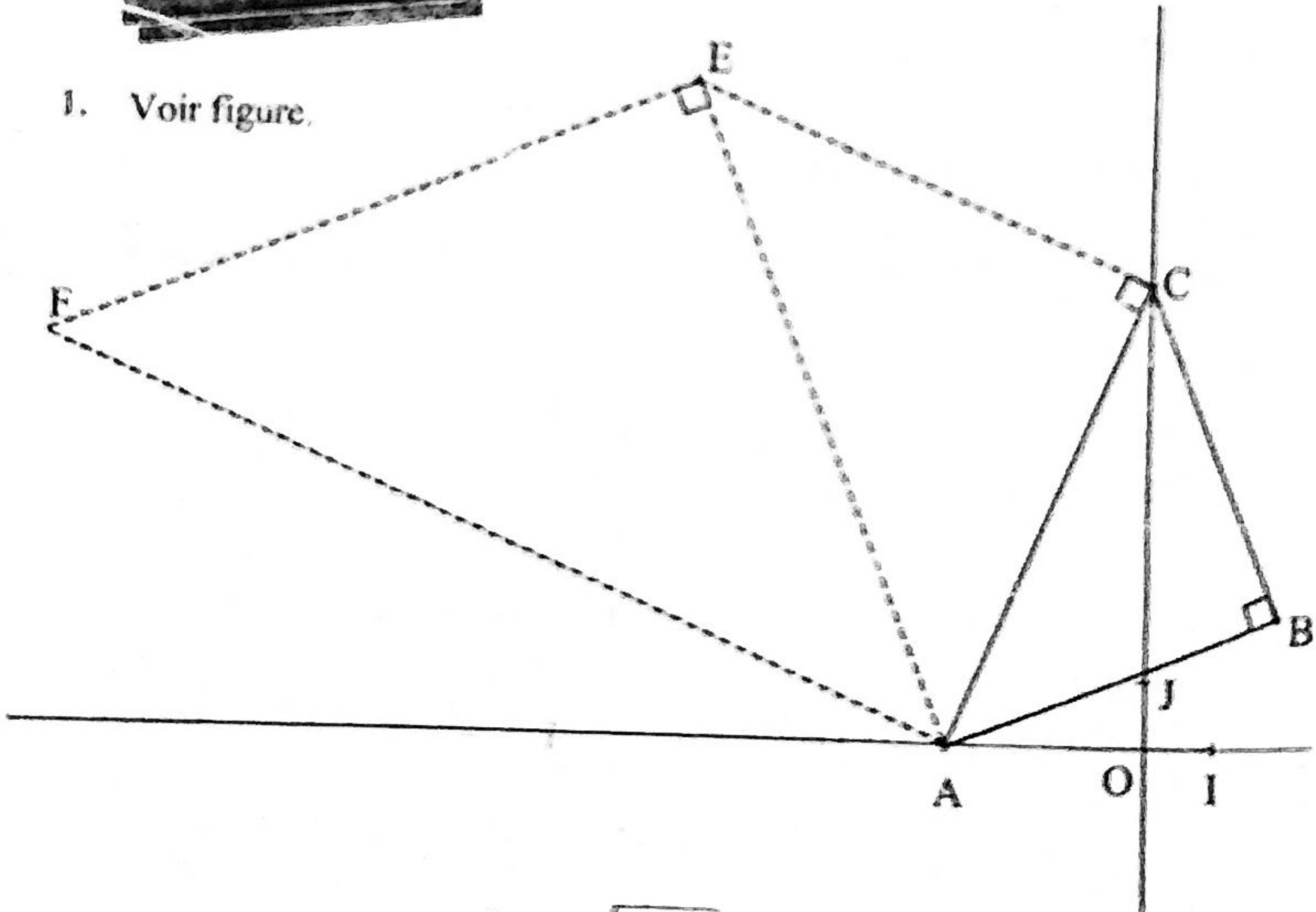
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$

d. $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$. La droite (GM) est donc perpendiculaire à la droite (IJ).
Par conséquent (E_2) est la perpendiculaire à la droite (IJ) passant par le point G.

EXERCICE 2

1. Voir figure.



2. $|z_A - z_B| = \sqrt{29}$, $|z_C - z_B| = \sqrt{29}$ d'où $|z_A - z_B| = |z_C - z_B|$

3. $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-5-2i}{-2+5i} = \dfrac{i(-2+5i)}{-2+5i} = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

4.. $|z_A - z_B| = |z_C - z_B| \Leftrightarrow AB = BC$. Donc ABC est un triangle isocèle en B.

Un argument de $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$. Donc une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$

est égale à $\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent ABC est un triangle rectangle en B.

On peut donc conclure que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

5. a.

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

A	A
B	C

Le rapport de S est égal à $\dfrac{AC}{AB}$; $\dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.

L'angle de S est égal à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$;

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3+7i}{5+2i} = \dfrac{29+29i}{29} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

d'où Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

S est donc la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b.

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

A	A
B	C
C	E
E	F

$AC = AB\sqrt{2}$. Or AB = BC, puisque ABC est un triangle isocèle.
Le segment [CE] est l'image du segment [BC] par la similitude S, on peut écrire alors que $CE = BC\sqrt{2}$. D'où $CE = AB\sqrt{2} = AC$.
Le triangle ACE est un triangle isocèle en C.

Comme S est une similitude directe d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, on en déduit que

mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

ACE est donc un triangle isocèle en C où les angles à la base mesurent $\frac{\pi}{4}$.

ACE est donc un triangle rectangle.
D'où ACE est un triangle isocèle rectangle en C. De la même façon, on peut montrer que AEF est un triangle isocèle rectangle en C.
Cela permet la construction des points E et F.

6.

$$\xrightarrow{S}$$

A_0	A_0
A_1	A_2
A_2	A_3
A_3	A_4
A_4	A_5
A_{n-1}	A_n
A_n	A_{n+1}

a. $\left| z_{A_2} - z_{A_0} \right| = \left| z_C - z_A \right| = AC = \sqrt{58}$

$R_2 = \left| z_{A_3} - z_{A_2} \right| = \left| z_E - z_C \right| = EC = AC = \sqrt{58}$

b. A A_2 A_3 est le triangle ACE. On a montré qu'il est isocèle rectangle en C.

c. D'après la similitude directe S :

$z_{A_{n+1}} - z_A = (z_{A_n} - z_A)\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = (1 + i)\,(z_{A_n} - z_A)$

d'où $z_{A_{n+1}} - z_{A_n} + z_{A_n} - z_A = (1 + i)\,(z_{A_n} - z_A)$

$z_{A_{n+1}} - z_{A_n} = i\ (z_{A_n} - z_A)$

alors $\left| z_{A_{n+1}} - z_{A_n} \right| = \left| z_{A_n} - z_A \right|$ et $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{A_nA}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}}) = -\frac{\pi}{2}$

ce qui démontre que $AA_n = A_n A_{n+1}$ et $(A_nA \perp A_nA_{n+1})$

AA_nA_{n+1} est un triangle isocèle et rectangle en A_n.

d. $R_n = \left| z_{A_{n+1}} - z_{A_n} \right| = A_n A_{n+1} = A\, A_n = \sqrt{2}\, A\, A_{n-1} = \sqrt{2}\, A_{n-1}A_n$

car AA_{n-1} A_n est un triangle isocèle en A_{n-1}.

$R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$.

Par suite, $R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$. D'où $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

e. $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ dont le premier terme R_1 vaut $\sqrt{29}$.

D'où $R_n = R_1(\sqrt{2})^{n-1}$

$R_n = \sqrt{29}\,(2)^{\frac{n-1}{2}}$.

PROBLÈME

PARTIE A

1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{1-x} - x\,e^{1-x} = (1-x)\,e^{1-x}$.
Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1-x$ car $e^{1-x} > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c. *Tracé de* $(\mathscr{C}_f)$
Voir figure.

2. a. $g(x) = |x|\, e^{|1-x|}$

si $x \in]-\infty\,;0]$ alors $g(x) = -x\,e^{1-x}$
si $x \in [0\,;\,1]$ alors $g(x) = x\;e^{1-x}$
si $x \in [1\,;+\infty[$ alors $g(x) = x\,e^{x-1}$

b. Sur l' intervalle $[\,0\,;\,1]$, $(\mathscr{C}_g) = (\mathscr{C}_f)$ car $g(x) = f(x)$.
Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$, $(\mathscr{C}_g)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l 'axe des abscisses car $g(x) = -f(x)$.

c. $\forall\, x \in [1,+\infty\,[$, $h'(x) = (1+x)\,e^{x-1}$. Alors $\forall\, x \in [1,+\infty\,[$, $h'(x) > 0$.
Donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

d.

- $g(0)=0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} -e^{1-x} = -e \, ,$$

d'où g est dérivable à gauche en 0 et on a : $g'_g(0) = -e$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{1-x} = e,$$

d'où g est dérivable à droite en 0 on a $g'_d(0) = e$. g n'est pas dérivable en 0 car $g'_g(0) \neq g'_d(0)$

- $g(1) = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{xe^{x-1}-1}{x-1}$$

posons $u = x-1$,alors

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \frac{(u+1)\,e^{u}-1}{u} = \lim_{u \to 0} e^{u} + \frac{e^{u}-1}{u} = 2 \text{ car } \lim_{u \to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1.$$

g est dérivable à droite de 1 et $g'_d(1) = 2$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{xe^{x-1}-1}{x-1}$$

posons $u = 1-x$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \frac{(1-u)\,e^{u}-1}{-u} = \lim_{u \to 0} e^{u} + \frac{e^{u}-1}{u} = 0 \text{ car } \lim_{u \to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1.$$

g est donc dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) = 0$

$g'_g(1) \neq g'_d(1)$ donc g n'est pas dérivable en 1.

e.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-e$ ‖ e		0 ‖ 2		
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$

f. Voir figure.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} nxe^{-nx} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} nx\, e^{-nx} = \lim\limits_{u\to+\infty} u\, e^{-u} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} n(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{n(1-x)} = +\infty$

donc $(\mathscr{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction (OJ).

3. a. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f_n'(x) = e^{n(1-x)} - nxe^{n(1-x)}$
$= (1-nx)\, e^{n(1-x)}$

b. Le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $1-nx$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow$ si $x = \dfrac{1}{n}$,

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow$ si $x < \dfrac{1}{n}$,

$f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow$ si $x > \dfrac{1}{n}$;

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		$1/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{n}e^{n-1}$	$\searrow$	0

c. $f_n(x) = x \Leftrightarrow x(1-e^{n(1-x)}) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{n(1-x)} = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $n(1-x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$S = \{0,1\}$

d. D'après 3.c, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ donc les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par les points O(0,0) et A(1,1).

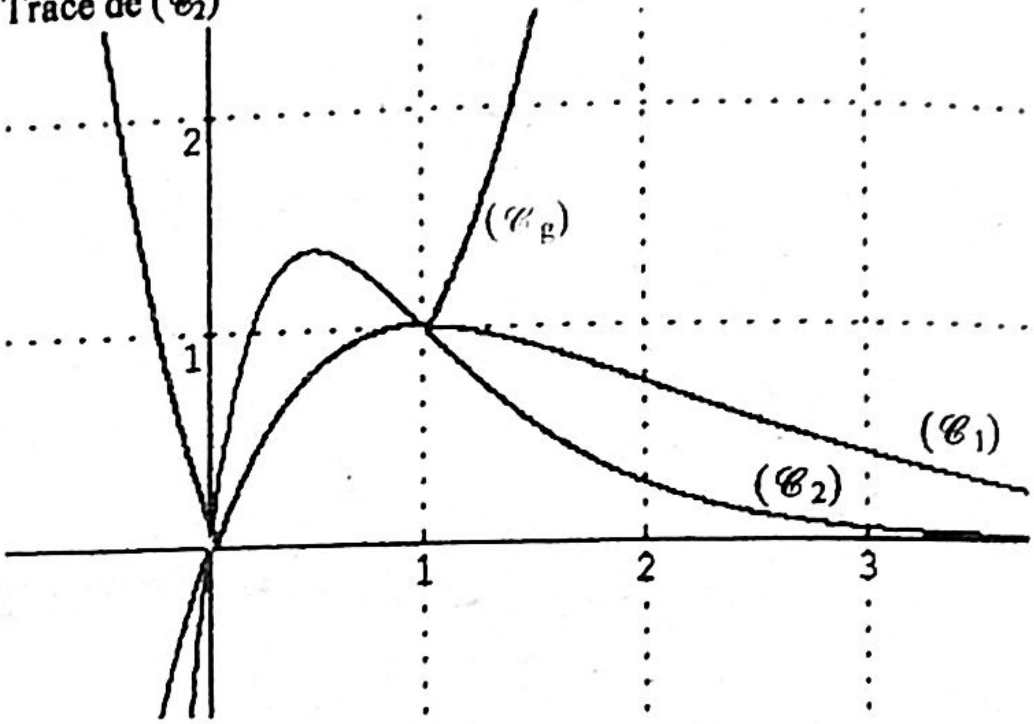
4. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\, e^{n(1-x)}(e^{1-x} - 1)$

$e^{1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > 1$
$\Leftrightarrow 1-x > 0$
$\Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{1-x}-1$		$+$	$+$		0	$-$	
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty\,;0[\cup]1,+\infty[$ $(\mathscr{C}_{n+1})$ est en dessous de $(\mathscr{C}_n)$.
Sur $]0\,;1[$, $(\mathscr{C}_{n+1})$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_n)$.
$(\mathscr{C}_{n+1})$ et $(\mathscr{C}_n)$ se coupent en O(0,0) et A(1,1).

5. Tracé de $(\mathscr{C}_2)$



6. a. $\mathrm{I}_n(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\alpha} f_n(x)\,dx=\int_0^{\alpha} x\,e^{n(1-x)}\,dx$

Posons $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{n(1-x)}$

On a $u'(x)=1$; choisissons $v(x)=-\dfrac{1}{n}e^{n(1-x)}$.

$$\mathrm{I}_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}\right]_0^{\alpha}+\frac{1}{n}\int_0^{\alpha} e^{n(1-x)}\,dx$$

$$\mathrm{I}_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}-\frac{1}{n^2}\,e^{n(1-x)}\right]_0^{\alpha}$$

$$=-\frac{\alpha}{n}e^{n(1-\alpha)}-\frac{1}{n^2}e^{n(1-\alpha)}+\frac{1}{n^2}e^{n}.$$

b. $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{I}_n(\alpha)=\frac{1}{n^2}e^{n}.$

EXAMEN 17

Session de Juin 2000
Série E

EXERCICE 1

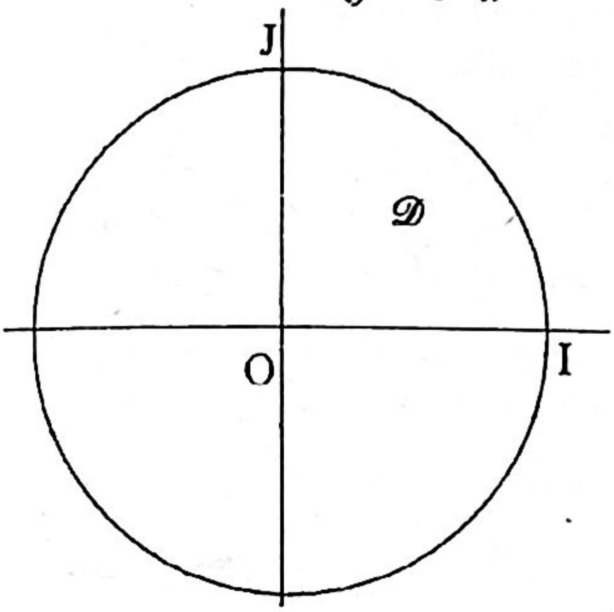
PARTIE A

1. Rapportons le plan P à un repère orthonormé (O,I,J).

Soit $\mathscr{D} = \{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{P} \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \}$

Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathscr{P}$,

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \\ y^2 \leqslant 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$



J_0 est l'aire d'un quart du disque unité.

$$J_0 = \frac{\pi}{4}$$

2. Soit u la fonction définie sur $[0;1]$ par $u(x) = 1 - x^2$.

On a : $\forall\, x \in [0;1],\ x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)\sqrt{1-x^2}$

$$= -\frac{1}{2}\ u'(x)[u(x)]^{\frac{1}{2}}$$

Une primitive sur $[0;1]$ de la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ est donc la fonction $x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

On a donc $J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1$

$$J_1 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= J_0 - J_1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Posons $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C_f) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O,I,J).

f est positive sur $[0;1]$ donc I_1 est l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx.$

$\forall x \in [0\,;1],\ x^n(x-1)\sqrt{1-x^2} \leqslant 0$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{n+1} \leqslant J_n$ (positivité de l'intégrale).

Donc la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b. $\forall x \in [0\,;1],\ x^n\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ donc $J_n \geqslant 0$.

La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, étant décroissante et minorée par 0, converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = J_0 - J_n.$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc convergente car $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est.

4. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\Rightarrow -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 \text{ or } x^n \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $0 \leqslant x^n\sqrt{1-x^2} \leqslant x^n$;

par conséquent $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Donc $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

De plus $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_0 - J_n$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = J_0 = \frac{\pi}{4}$.

Partie B

1. a. $\forall x \in [0\,;1[$, $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

$$v'(x)= x\sqrt{1-x^2} \quad \text{(voir I.1))}$$

b. $\forall n \geqslant 3$, $J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 x^{n-1} \times x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

posons $u(x) = x^{n-1}$; et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

On a : $u'(x) = (n-1)\,x^{n-2}$; choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$J_n = \left[-\frac{1}{3}\,x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\right] + \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\,\left[\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\,\right]$$

$$= \frac{n-1}{3}\,[J_{n-2} - J_n\,] \text{ donc } 3J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

$$(3+n-1)J_n = (n-1)J_n$$

d'où $\forall n \geqslant 3$, $(n+2)\,J_n = (n-1)\,J_{n-2}$.

$n = 2$, $J_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

On a : $u'(x) = 1$; choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$J_2 = \left[-\frac{1}{3}x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx - \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}(J_0 - J_2)$$

$3J_2 = J_0 - J_2$

$4J_2 = J_0$. Par conséquent la formule est vraie pour $n = 2$.

2. $\forall n \geq 2,\ J_n = \frac{n-1}{n+2} J_{n-2}$.

On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\quad J_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2} J_{2p-2}$

$$J_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p} J_{2p-4}$$

....

....

$$J_4 = \frac{3}{6} J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{4} J_0$$

$$J_{2p} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \ldots\ldots \times \frac{2p-3}{2p} \times \frac{2p-1}{2p+2} J_0$$

$$= \frac{1 \times 3 \times \ldots\ldots \times (2p-3)\,(2p-1)}{4 \times 6 \times \ldots\ldots \times (2p)(2p+2)} \times \frac{\pi}{4}$$

On démontre de même que :

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p+2} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots\ldots \times (2p)}{3 \times 5 \times 7 \ldots\ldots \times (2p+3)}$.

Remarque : les démonstrations peuvent être faites par récurrence.

EXERCICE 2

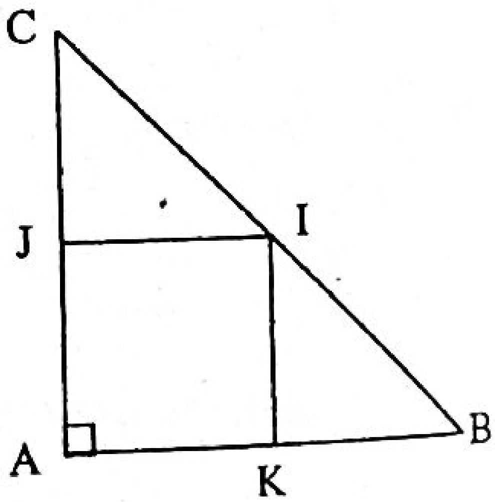
1. a. $f(K) = r(t(K))$

K et J étant les milieux respectifs de [AB] et [AC],

on a $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$

(Droites des milieux)

Donc $t(K) = J$.



IJAK est un carré direct donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}}) = \frac{\pi}{2}$ .et IJ = IK.

Par suite $r(J) = K$.
D'où $f(K) = K$.
$g(J) = t(r(J))$
$= t(K)$ car $r(J) = K$.
$= J$ car $t(K) = J$ d'après ce qui précède.

b. La composée d'une rotation d'angle non nul α et d'une translation est une rotation d'angle α .

Par conséquent, f est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

g est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. f^{-1} est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

La somme des angles de f^{-1} et de g étant nulle, gof^{-1} est une translation.

b. On a $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

IJAK est un carré direct, donc Mes$(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}}) = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} KA = KI \\ \text{Mes }(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc $f^{-1}(A) = I$.
Déterminons $g(I)$.

On a JI = JC et Mes$(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc $g(I) = C$
Par conséquent $gof^{-1}(A) = C$

gof^{-1} est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3. D'après 2.b., $f^{-1}(A) = I$ donc $f(I) = A$
$(KI) \perp (IJ)$ alors $f(KI) \perp f(IJ)$
donc $(KA) \perp f(IJ)$
$f(IJ)$ est la perpendiculaire à (KA) en A, c'est-à-dire (AC).

4. a. $[g\circ f^{-1}(M_1) = M_2] \Leftrightarrow [\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{AC}]$

car $g\circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b. $M \in (IJ) \Rightarrow M_1 \in (AC)$ car $f(IJ) = (AC)$ d'après 3.

$\Rightarrow M_1, M_2$, A et C sont alignés car $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ d'après 4.a.

M_1, M_2, A et C sont alignés $\Rightarrow M_1 \in (AC)$

$\Rightarrow M \in (IJ)$ car $f(IJ) = (AC)$ et f bijective.

c. Puisque M n'appartient pas à (IJ) alors M_1, M_2, A et C sont non alignés d'après 4.b. Et puisque $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$, alors ACM_2M_1 est un parallélogramme.

PROBLÈME

1. *Étude d'une fonction auxiliaire*

a. $\forall\, t \in [0; +\infty[,\ g'(t) = -1 + 2e^{-2t}$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-2t} = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\ln 2$$
$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-2t} > 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-2t} > \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{2}\ln 2$$
$$g'(t) < 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}\ln 2$$

g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}\ln 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\ln 2 ; +\infty[$

$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}(1-t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$.

b. g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; \frac{1}{2}\ln 2]$,

$g\left(]0 ; \frac{1}{2}\ln 2]\right) =]0 ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2]$.

0 n'appartient pas à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2]$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]0 ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2[$.

g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}\ln 2\ ;+\infty[$, g réalise une bijection de $[\frac{1}{2}\ln 2, +\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2]$.

0 appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2]$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\ln 2\ ;+\infty[$.

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,\ g(1)=-e^{-2},\ g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\times g(1)<0.$

Donc $\frac{\ln 2}{2}<\alpha<1$

c. $\forall t\in[0,+\infty[,\ (g(t)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=\alpha)$
$\forall t\in[0,+\infty[,\ (g(t)>0 \Leftrightarrow t\in]0\ ;\alpha[)$
$\forall t\in[0,+\infty[,\ (g(t)<0 \Leftrightarrow t\in]\alpha\ ;+\infty[)$

d. $g(0{,}79)\simeq 0{,}004$
$g(0{,}8)\simeq -0{,}0019$
$g(0{,}79)\times g(0{,}8)<0$
Donc : $0{,}79<\alpha<0{,}8$

2. *Sens de variation de f*

$\forall x\in]0\ ;+\infty[,\quad f'(x)=(e^{2/x}-1)^{1/2}-\frac{1}{x}(e^{2/x}-1)^{-1/2}e^{2/x}$

$$=(e^{2/x}-1)^{-1/2}[e^{2/x}-1-\frac{1}{x}e^{2/x}]$$

$$=(e^{2/x}-1)^{-1/2}e^{2/x}[1-e^{-2/x}-\frac{1}{x}]$$

$$=(e^{2/x}-1)^{-1/2}e^{2/x}g\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\forall x\in]0\ ;+\infty[,$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\alpha$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$

$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<\alpha$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha}$

$f'(x) < 0 \iff \frac{1}{x} > \alpha$

$\iff 0 < x < \frac{1}{\alpha}$.

Donc f est strictement croissante sur $[\frac{1}{\alpha} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0 ; \frac{1}{\alpha}]$.

3. *Limite de f en 0.*

a. $\forall x > 0$, $\ln(f(x)) = \ln x + \frac{1}{2}\ln(e^{2/x} - 1)$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln[e^{2/x}(1 - e^{-2/x})]$

$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-2/x})$

$= \frac{1}{x}(x\ln x + 1) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-2/x})$.

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(x\ln x + 1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(x\ln x + 1) = +\infty$

on a également :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(1 - e^{-2/x}) = 1$ car $\lim\limits_{u \to +\infty} e^{-u} = 0$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(\ln(1 - e^{-2/x})\right) = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln f(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

4. *Étude de f en $+\infty$*

a. Soit $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto e^t - et - 1$

$\forall t \in [0;1]$, $\varphi'(t) = e^t - e$

$\forall t \leqslant 1$, $e^t \leqslant e$, d'où : $\varphi'(t) \leqslant 0$, il s'ensuit que φ est décroissante sur $[0;1]$

$\varphi(0) = 0$; donc $\forall t \in [0;1]$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 0$.

Il vient que : $\forall t \in [0;1]$, $e^t - 1 \leqslant te$

$\forall t \in [0;1]$, $e^t \geqslant 1$ donc $e^t - 1 \geqslant 0$.

On déduit que : $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant e^t - 1 \leqslant te$

b. $\forall\, u \in [\,0;1]\,,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^u (e^t - 1)dt \leqslant \int_0^u te\,dt$

or $\displaystyle\int_0^u (e^t - 1)dt = [e^t - t]_0^u = e^u - (u+1)$

$\displaystyle\int_0^u te\,dt = e\frac{u^2}{2}$

d'où : $\forall\, u \in [0,1]\,,\ 0 \leqslant e^u - (u+1) \leqslant e\dfrac{u^2}{2}$

on a alors $\forall\, u \in [0;1]\,, u+1 \leqslant e^u \leqslant 1 + u + e\dfrac{u^2}{2}$

c. $\forall\, x \geqslant 2\,,\quad [f(x)]^2 - 2x = x^2\,(e^{2/x} - 1) - 2x$

$\forall\, x \geqslant 2\,,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$,donc $\dfrac{2}{x} \in [0,1]$ d'après ce qui précède :

$1 + \dfrac{2}{x} \leqslant e^{2/x} \leqslant 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2e}{x^2}$

soit $\dfrac{2}{x} \leqslant e^{2/x} - 1 \leqslant \dfrac{2}{x} + \dfrac{2e}{x^2}$ et donc $2x \leqslant x^2(e^{2/x} - 1) \leqslant 2x + 2e$

et alors $0 \leqslant x^2\,(e^{2/x} - 1) - 2x \leqslant 2e$ on conclut que :
$\forall\, x \geqslant 2\,,\quad 0 \leqslant [f(x)]^2 - 2x \leqslant 2\,e$

d. $\forall\, x \geqslant 2,\quad f(x) - \varphi(x) = \dfrac{[f(x)]^2 - 2x}{f(x) + 2x}$

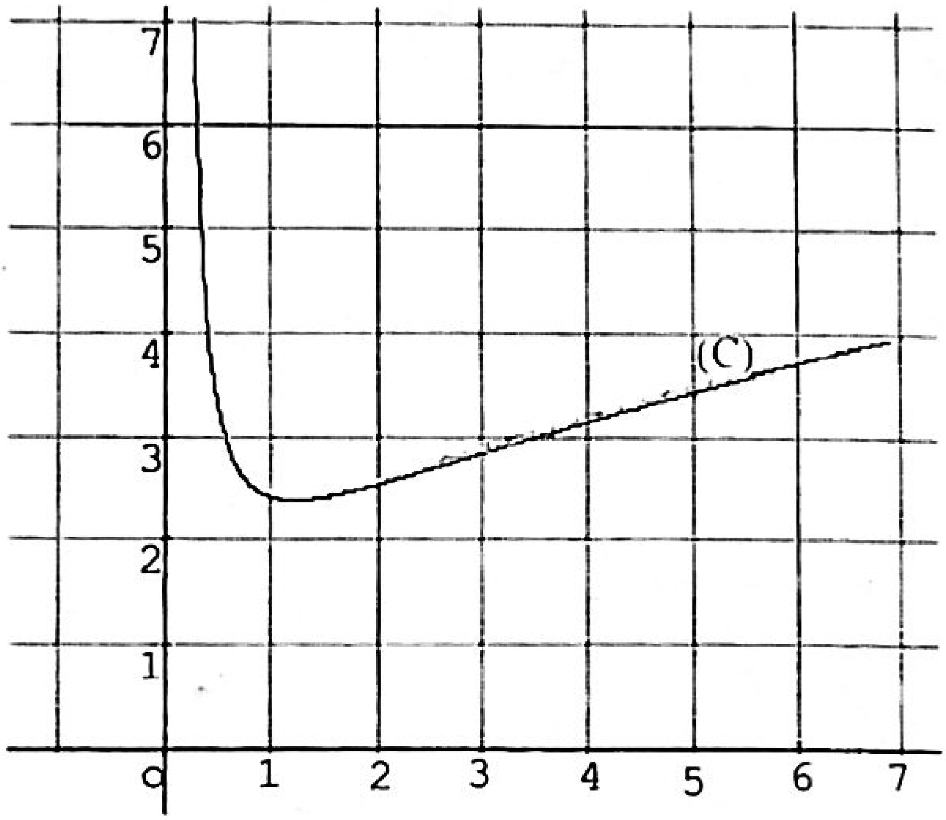
on a : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) \geqslant 0$ donc :
on conclut d'après 4.c. que : $\forall\, x \geqslant 2\,,\ f(x) \geqslant \varphi(x)$
De $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x} = +\infty$, on déduit que
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (limite par comparaison).

5. a. *Tableau de variation de f.*

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{e^{2/\alpha} - 1}$	↗	$+\infty$

$f(\dfrac{1}{\alpha}) \simeq 2{,}485.$

b. *Courbe de f*



EXAMEN 18

Session de Juin 2001
Série C

EXERCICE 1

1. a. Pour n pair ;
   $(t^2-1)^n > 0$;
   donc $\forall\, t \in [-1;1]$, $J_n > 0$

   b. Pour n impair ;
   $(t^2-1)^n$ a le même signe que t^2-1.
   Or $\forall\, t \in [-1;1]$, $t^2-1 < 0$.
   Donc $J_n < 0$.

2. $$\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\,dt = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n\,dt + \int_{0}^{1}(t^2-1)^n\,dt$$

   Posons $u = -t$ alors $du = -\,dt$.

   On a $\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2-1)^n\,dt = -\int_{1}^{0}(u^2-1)\,du = \int_{0}^{1}(u^2-1)\,du$;

   donc $\displaystyle J_n = 2\int_{0}^{1}(t^2-1)^n\,dt$.

3. D'après 2.,

   $$J_0 = 2\int_0^1 dt = 2[t]_0^1 = 2(1-0) = 2$$

   $J_0 = 2$

   $$J_1 = 2\int_0^1 (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-1-0\right)$$

   $$J_1 = -\frac{4}{3}$$

   $$J_2 = 2\int_0^1 (t^2-1)^2 dt = 2\int_0^1 (t^4-2\,t^2+1)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1$$

   $$= 2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-0\right)$$

   $$J_2 = \frac{16}{15}.$$

4. $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $u(t) = (t^2-1)^n$ et $v'(t) = 1$;

On a $u'(t) = 2n(t^2-1)^{n-1}t$. Choisissons $v(t) = t$.

Ainsi, $\frac{1}{2} J_n = \int_0^1 (t^2-1)^n \, dt$

$$\frac{1}{2}J_n = [t(t^2-1)]_0^1 - 2n \int_0^1 (t^2-1)^{n-1} t^2 \, dt$$

$$= 0 - 2n \int_0^1 (t^2-1)^{n-1} (t^2-1+1) \, dt$$

$$= -2n \int_0^1 [(t^2-1)^{n-1}(t^2-1) + (t^2-1)^{n-1}] dt$$

$$= -2n\left(\int_0^1 (t^2-1)^n \, dt + \int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt\right)$$

$$= -2n\left(\frac{1}{2} J_n + \frac{1}{2} J_{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{2} J_n = -n \, J_n - n \, J_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2} + n) J_n = -n \, J_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2n}{2} J_n = -n \, J_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$$

5. D'après 4., on a :

$J_1 = -\frac{2}{3} J_0 = -\frac{4}{3}$ car $J_0 = 2$

$J_2 = -\frac{4}{5} J_1 = -\frac{4}{5}(-\frac{4}{5}) = \frac{16}{15}$

6. D'après 4., on a successivement

$$\begin{cases} J_n = -\dfrac{-2n}{2n+1} J_{n-1} \\ J_{n-1} = \dfrac{-2(n-1)}{2n-1} J_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_2 = (-2) \times \dfrac{2}{5} J_1 \\ J_1 = (-2) \times \dfrac{1}{3} J_0 \end{cases}$$

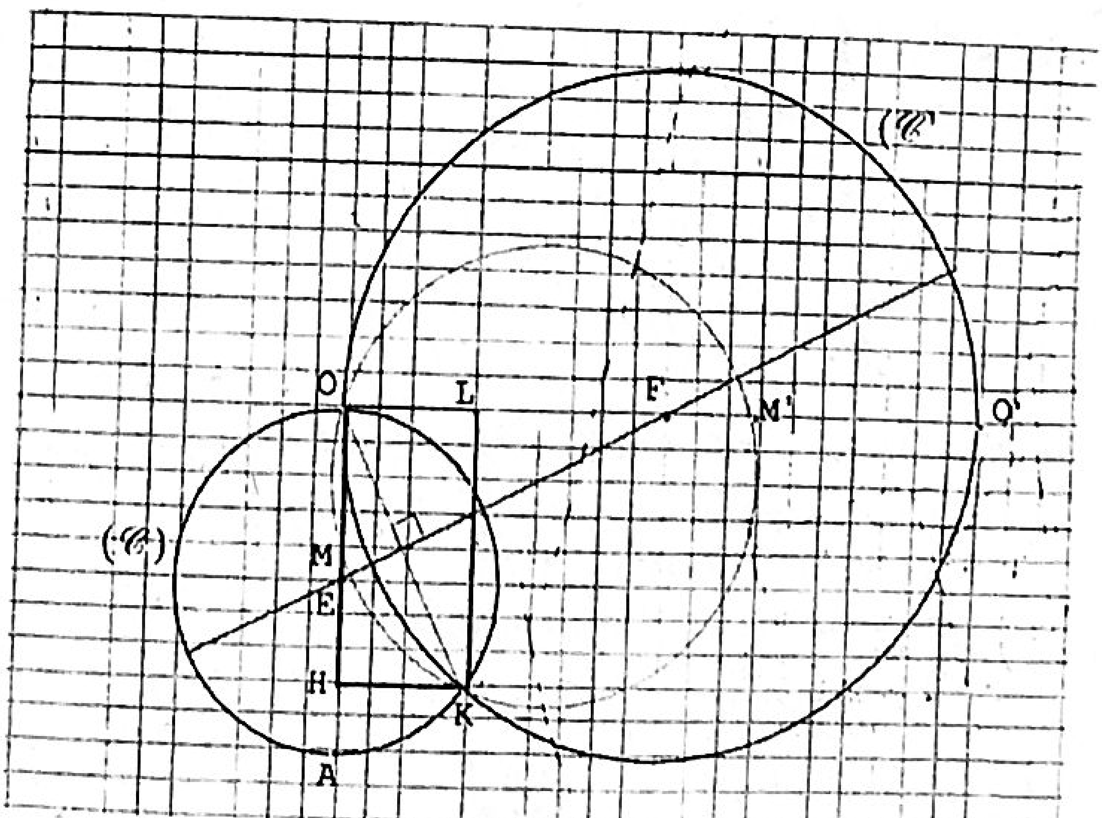
En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient après simplification

$$J_n = \frac{(-2)^n \times n \times (n-1) \times \dots \times 1 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 5 \times 3}$$

Or $n(n-1) \times \dots \times 1 = n!$

D'où $J_n = \dfrac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}$.

EXERCICE 2



1. Soit θ l'angle de la similitude directe S.

comme $\overset{S}{\curvearrowright}$

A	O
O	O'

Alors $\theta = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OO'}})$

$= \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HK}})$

$= -\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HO}})$

$= -\dfrac{\pi}{2}$

car le rectangle OHKL est de sens direct :

Donc l'angle de S est $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. Par hypothèse, les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, de centres respectifs E et F, passent par O. De plus la droite (EF) est la médiatrice du segment [OK]. D'où EO = EK et FO = FK.

On en déduit que K appartient aux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Donc $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}') = \{O ; K\}$.

3. Donc [OA] et [OO'] sont respectivement des diamètres des cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Soit Ω le centre de S.

Puisque : $\overset{S}{\curvearrowright}$

Ω	Ω
A	O
O	O'
(ΩA)	(ΩO)
(ΩO)	$(\Omega O')$

alors $(\Omega O) \perp (\Omega A)$ et $(\Omega O') \perp (\Omega O)$ car $-\dfrac{\pi}{2}$ est l'angle de S. On en déduit

que: $\Omega \in (\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}')$.

Par conséquent $\Omega = O$ ou $\Omega = K$ (d'après 2.).

O n'est pas invariant par S. Il s'ensuit que $\Omega = K$.

Donc le centre de S est le point K.

4. H appartient à (OA) et à la perpendiculaire à (OA) passant par K. Donc S(H) appartient à (OO') image de (OA) par S. S(M) appartient à la perpendiculaire à (OO') passant par S(K) , c'est-à-dire (LK). Donc S(H) = L.
Soit α le rapport de S
Comme $\xrightarrow{S}$

K	K
H	L

alors $\alpha = \frac{KL}{KH}$. Or KL = HO = 2LO et KH = LO

D'où $\alpha = \frac{2LO}{LO} = 2.$

Le rapport de S est donc 2.

5. Comme

$$\begin{cases} S(A) = O \\ S(K) = K \\ S(O) = O', \end{cases}$$

alors l'image de ($\mathscr{C}$) par S est le cercle ($\mathscr{C}'$). Par conséquen l'image du centre de ($\mathscr{C}$) par S est le centre de ($\mathscr{C}'$), c'est-à-dire F.

6. Les points K, M, O et M' sont cocycliques, donc

$$2(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KM'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \qquad (1)$$

Comme M $\in$ (OH) , M' $\in$ (OL) et (OH) $\perp$ (OL), alors

$$2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \pi .$$

De plus $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KS(M)}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Alors $2\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KS(M)}}) = \pi$;

d'où $2(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KS(M)}})$

De l'égalité (1) on déduit $2(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KM'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KS(M)}})$.

D'où S(M) appartient à (KM').

Puisque $M \in (AH)$ et $(AH) = (OH)$, alors $S(M)$ appartient à (OL) image de (AH) par S.
Ainsi $S(M)$ appartient à $(KM') \cap (OL) = \{M'\}$.
Par conséquent $S(M) = M'$.

PROBLÈME

Partie A

1. Limite de h en $+\infty$

   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\ln x) = -\infty$.

   D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.

   Limite de h à droite en 0.

   On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (-2\ln x) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty$.

2. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x}$

   $$= -\frac{2(1+x^2)}{x^3}.$$

3. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) < 0$.
   h est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. $h(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$.
   h est donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0\,;+\infty[$.
   $h(1) = 2$ donc $h(1) > h(x_0)$. h est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. On en déduit que $1 < x_0$ c'est-à-dire $x_0 \in]1\,;+\infty[$.
   Par conséquent l'équation $x \in]0\,;+\infty[$, $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

4. $h(x_0) = 0$ et h est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$; d'où
$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$
$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,; x_0[$
$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]x_0\,; +\infty[$

PARTIE B

1. *Limite de g en + ∞*

On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = x^2\left[1 - \ln x + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Limite de g à droite en 0

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = x^2 - x^2\ln x + 1 + \ln x$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2+1+\ln x) = -\infty$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.

2. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = 2x(1-\ln x) - \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}$

$$= x\left[2 - 2\ln x - \frac{x}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$= x\left[2 - 2\ln x - 1 + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right]$$

$$g'(x) = x\,h(x)$$

3. On a : $g(x_0) = x_0^2(1 - \ln x_0) + 1 + \ln x$.
De plus $h(x_0) = 0$, d'après la question 3. de la partie A.

$1 + \frac{1}{x_0^2} - 2\ln x_0 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_0^2}$

d'où $g(x_0) = x_0^2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x_0^2}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_0^2}$

$$= x_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x_0^2}\right)+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x_0^2}$$

$$= \frac{x_0^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x_0^2}$$

$$= \frac{x_0^2}{2}+1+\frac{1}{2x_0^2}$$

d'où $g(x_0) > 0$

4. $\forall x \in]0\,;1[$, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$.
Or d'après la partie A.4 , on a $h(x)>0$. D'où $\forall x \in]0\,;1[$, $g'(x) > 0$.
g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$ $g(]0\,;1[) =]-\infty\,;2[$.
g réalise donc une bijection de $]0\,;1[$ sur $]-\infty\,;2[$.
$0 \in]-\infty\,;2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0\,;1[$.

5. a. D'après la partie A.4 , on a :
$\forall x \in]0\,;x_0[$, $h(x) > 0$, donc $g'(x) > 0$
$\forall x \in]x_0;+\infty[$, $h(x) < 0$, donc $g'(x) < 0$
$h(x_0) = 0$, donc $g'(x_0) = 0$.
Donc g est strictement croissante sur $]0\,;x_0]$ et strictement décroissante sur $]x_0\,;+\infty[$. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	0		x_1		1		x_0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$				0		$-$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	2	↗	$g(x_0)$	↘	0	↘	$-\infty$

Comme $g(x_1) = 0$ avec $x_1 \in]0\,;1[$ et $g(x_2) = 0$ avec $x_2 \in]x_0\,;+\infty[$, alors :

$$\begin{cases} \forall x \in]0\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1\,;\ x_2[,\ \ g(x) > 0 \\ \forall x \in \{x_1\,;x_2\},\ g(x) = 0. \end{cases}$$

b. On a $g(0,3) \simeq -0,005$; $g(0,4) \simeq -0,4$; $g(3,3) \simeq 0,08$; $g(3,4) \simeq -0,36$.
On déduit du sens de variation de g obtenue à la question précédente que :
$g(0,3) < 0$ et $g(0,4) > 0$, donc $x_1 \in]0,3\ ;0,4[$.
$g(3,3) > 0$ et $g(3,4) < 0$, donc $x_2 \in]3,3\ ;3,4[$.

PARTIE C

1. *Continuité de f à droite en 0*

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (1+x^2) = 1$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = f(0)$, alors f est continue à droite en 0.

Dérivabilité de f à droite en 0

$\forall x \in]0\,;+\infty[\,,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$; d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty.$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. *Limite de f en $+\infty$*

$\forall x \in]0\,;+\infty[\,,\ f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{\ln x}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

3. $\forall x \in]0\,;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{(\ln x+1)(1+x^2) - 2x(x\ln x)}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\ln x + 1 + x^2\ln x + x^2 - 2x^2\ln x}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - x^2\ln x + 1 + \ln x}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x}{(1+x^2)^2}$;

Donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x^2)^2}$

4. Comme $(1+x^2)^2 > 0$ alors $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
Il résulte de la question 5.a de la partie B. que :
$\forall x \in]0\ ;x_1[\cup]x_2\ ;+\infty[,\quad f'(x) < 0$
$\forall x \in]x_1\ ;x_2[,\quad f'(x) > 0$
$\forall x \in \{x_1\ ;x_2\},\quad f'(x) = 0$

Tableau de variation de f :

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘		↗	$f(x_2)$	↘	
			$f(x_1)$				0

5. Si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$, alors α vérifie :
$\alpha^2(1-\ln\alpha) + 1 + \ln\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha^2\ln\alpha + 1 + \ln\alpha = 0$
$\Leftrightarrow (1-\alpha^2)\ln\alpha = -1-\alpha^2$
$\Leftrightarrow \ln\alpha = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$

6. Si α est solution de l'équation $g(x) = 0$, on a :
$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$
$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$$
Donc si $\alpha \in]0\ ;1[$, alors $f(\alpha) < 0$.
Si $\alpha \in]1\ ;+\infty[$, alors $f(\alpha) > 0$.
Comme $x_1 \in]0;1[$, alors on a $f(x_1) < 0$
et comme $x_2 \in]1\ ;+\infty[$ alors on a : $f(x_2) > 0$.

7. $f(1) = 0$. D'après le tableau de variation de f et compte tenu du signe de $f(x_1)$
et $f(x_2)$, on déduit que : $\forall x \in]0\ ;1[,\quad f(x) < 0$
$\forall x \in]1\ ;+\infty[,\quad f(x) > 0$
$f(1) = 0$

Tracé de $(\mathscr{C}_f)$: voir figure.

PARTIE D

1. a. $\forall t \in]1 ; +\infty[$, $t^2 < 1 + t^2 < 2t^2$

donc $\frac{1}{2t^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$

b. $$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x$$
$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

c. $\forall t > 1$, on a : $\frac{1}{2t^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$.

D'où en multipliant par le nombre réel positif $t\ln t$, on obtient :

$\forall t > 1, \frac{\ln t}{2t} < f(t) < \frac{\ln t}{t}$.

Alors $\forall t \in]1 ; +\infty[$, $\int_1^x \frac{\ln t}{2t}\,dt < \int_1^x f(t)\,dt < \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$.

Avec $x > 1$, on obtient : $\frac{1}{4}(\ln x)^2 < F(x) < \frac{1}{2}(\ln x)^2$ d'après D.1.b.;

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}(\ln x)^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

on a : $\forall x > 1$, $\frac{1}{4}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 < \frac{F(x)}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

2. $\forall \alpha \in]0 ; 1[$, $\varphi(\alpha) = \int_1^\alpha t \ln t\,dt$.

a. Intégrons par parties.

Posons $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t$.

On a $u'(t) = \frac{1}{t}$. Choisissons $v(t) = \frac{t^2}{2}$.

b. $\varphi(\alpha) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{t}{2}\,dt.$

$= \left[\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right]_1^\alpha$

$= \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln\alpha\right) + \frac{1}{4}$

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0\\ >}} \varphi(\alpha) = \lim_{\substack{\alpha \to 0\\ >}} \left(\frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln\alpha\right) + \frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{\alpha \to 0\\ >}} \left(\frac{-\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4}\right)$$

$= \frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} \alpha^2 \ln\alpha = 0.$

c. $\forall t \in [0;1],\ 1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$;

d'où $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

$t\ln t \leqslant \frac{t\ln t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}\, t\ln t$ car $t\ln t < 0$.

pour $0 < \alpha \leqslant t < 1$, on a :

$$\int_\alpha^1 t\ln t\,dt \leqslant \int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{2}\,dt$$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{2}\,dt \leqslant -\int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{1+t^2}\,dt \leqslant -\int_\alpha^1 t\ln t\,dt$$

$$\Rightarrow \int_1^\alpha \frac{t\ln t}{2}\,dt \leqslant \int_1^\alpha \frac{t\ln t}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_1^\alpha t\ln t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,\varphi(\alpha) \leqslant F(\alpha) \leqslant \varphi(\alpha).$$

comme $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0\\ \alpha > 0}} \varphi(\alpha) = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{8} \leqslant \lim\limits_{\substack{\alpha \to 0\\ \alpha > 0}} F(\alpha) \leqslant \frac{1}{4}$

3. Comme f est continue sur $[0\,;+\alpha[$, la fonction F définie par :

$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, est la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$, qui s'annule en 1.

Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ F'(x) = f(x)$.

4. D'après la partie C.7, on a :

$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;1[$

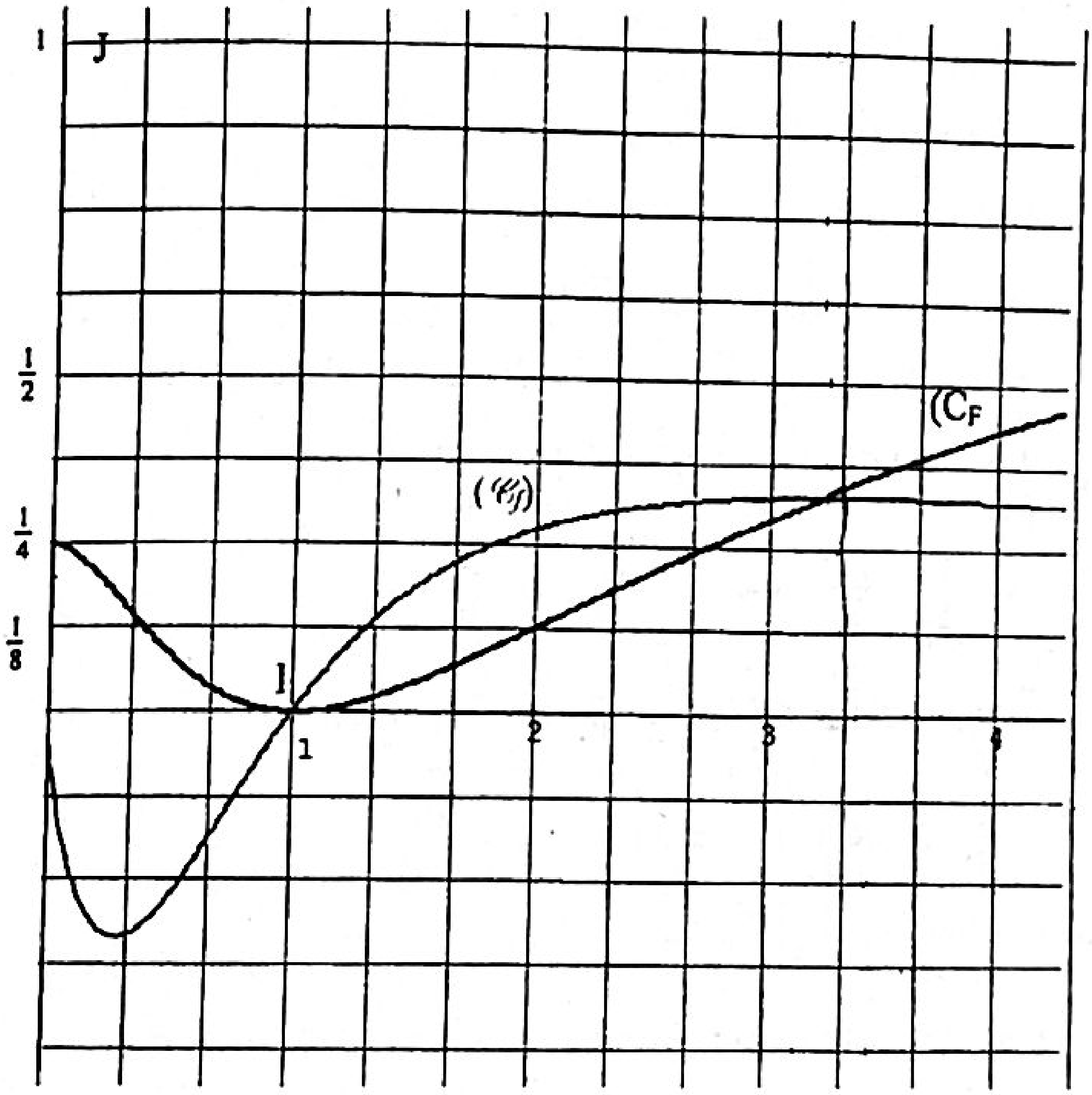
$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1\,;+\infty[$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tableau de variation de F

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	1	↗	$+\infty$

5. Allure de la courbe représentative de F



EXAMEN 19

Session de Juin 2001
Série E

EXERCICE 1

1. a. S_E l'ensemble solution de (E).
Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} ix \in S_E &\Leftrightarrow (ix)^3+(1-8i)(ix)^2-(23+4i)(ix)-3+24i=0 \\ &\Leftrightarrow -ix^3+(1-8i)(-x^2)-23ix+4x-3+24i=0 \\ &\Leftrightarrow (-x^2+4x-3)+i(-x^3+8x^2-23x+24)=0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+4x-3=0 \text{ et } -x^3+8x^2-23x+24=0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $-x^2+4x-3=0$.
On a une solution évidente, 1 ; l'autre solution est 3,
1 n'est pas solution de l'équation $-x^3+8x^2-23x+24=0$.
On déduit que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure, $3i$.

b. Effectuons la division euclidienne de
$z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i$ par $z-3i$.

$$\begin{array}{r|l} z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i & z-3i \\ \cline{2-2} -z^3+3iz^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & z^2+(1-5i)z+(-8-i) \\ \hline (1+5i)z^2-(23+4i)z-3+24i & \\ -(1-5i)z^2+(15+3i)z \qquad\quad & \\ \hline (-8-i)z-3+24i & \\ (8+i)z-24i+3 & \\ \hline 0 \qquad\quad & \end{array}$$

On déduit que $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=(z-3i)(z^2+(1-5i)z-8-i)$
L'équation (E) est donc équivalente à :
$z-3i=0$ ou $z^2+(1-5i)z-8-i=0$
Résolvons l'équation $z^2+(1-5i)z-8-i=0$
$\Delta=(1-5i)^2-4(-8-i)=1-25-10i+32+4i$
$\Delta=8-6i$

Cherchons les racines carrées de Δ :
Soit δ une racine carrée de Δ.
$\delta = x + iy$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $|\delta|^2 = x^2 + y^2$
$|\Delta| = 10$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy < 0 \end{cases}$$

On obtient $x = 3$ et $y = -1$ ou $x = -3$ et $y = 1$.
Les racines carrées de Δ sont les nombres complexes $3 - i$ et $-3 + i$.
Les solutions de l'équation $z^2 + (1-5i)z - 8 - i = 0$

sont : $z_1 = \dfrac{-1+5i+3-i}{2} = 1+2i$ et

$$z_2 = \frac{-1+5i-3+i}{2} = -2+3i$$

On en déduit $S_E = \{3i, 1+2i, -2+3i\}$.

2. a. Notons z_A, z_B, z_C et z_G les affixes respectives des points A,B,C,G.
G est le barycentre des points A,B,C affectés des coefficients respectifs 2,–2 et 1.

Donc $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

On en déduit les affixes respectives $z_{\overrightarrow{GA}}$, $z_{\overrightarrow{GB}}$ et $z_{\overrightarrow{GC}}$ des vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$:

$$z_{\overrightarrow{GA}} = -2(z_A - z_B) + z_A - z_C = -z_A + 2z_B - z_C\ ;$$

$$= -1 - 2i + 6i + 2 - 3i = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_{\overrightarrow{GB}} = 2(z_B - z_A) + z_B - z_C = 3z_B - 2z_A - z_C\ ;$$

$$= 9i - 2 - 4i + 2 - 3i = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{\overrightarrow{GC}} = 2(z_C - z_A) - 2(z_C - z_B) = 2(z_B - z_A);$$

$$= 2(i-1) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(+\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(+\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

b. On en déduit que :

$$z_{\overrightarrow{GB}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overrightarrow{GA}}$$

$$z_{\overrightarrow{GC}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overrightarrow{GB}}$$

$z_{\overrightarrow{GA}}$, $z_{\overrightarrow{GB}}$ et $z_{\overrightarrow{GC}}$ sont donc des termes d'une suite géometrique de raison $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c. On a : $z_B - z_G = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - z_G)$

$$z_C - z_G = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} (z_B - z_G)$$

La transformation complexe définie par $z' - z_G = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_G)$ est celle de la similitude directe de centre G, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Cette similitude transforme A en B et B en C.

EXERCICE 2

1.

a. Désignons par S la symétrie orthogonale d'axe (AB).

On a le tableau de correspondance suivant :

$\overset{S}{\curvearrowright}$

A	A
B	B
C	D

Or S est un antidéplacement et ABC un triangle équilatéral direct ;
Donc ABD est un triangle équilatéral indirect.
On en déduit que :
$r(D) = r_2(r_1(D)) = r_2(B) = B$.

b. On a : r_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$;

r_2 est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

c'est-à-dire une symétrie centrale.

Or $r(D) = B$; donc r est la symétrie centrale de centre Ω, milieu de [BD].

a.

Si $M = \Omega$ alors $M = M'$ et les points M, N et M' sont alignés
Si $M = A$ alors $M = N$ et les points M, N et M' sont alignés.
Supposons dans la suite que $M \neq \Omega$ et $M \neq A$
On a alors $M \neq N$ et $M \neq M'$
D'après l'égalité de Chasles, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA})}$$

or $\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$ car Ω est milieu du segment [MM'] ;

donc $\widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA})}$.

Les points M, N et M' sont alignés si, et seulement si, mes $\widehat{(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MN})} \equiv 0\ [\pi]$.

Or Mes$\widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ car $r_1(M) = N$;

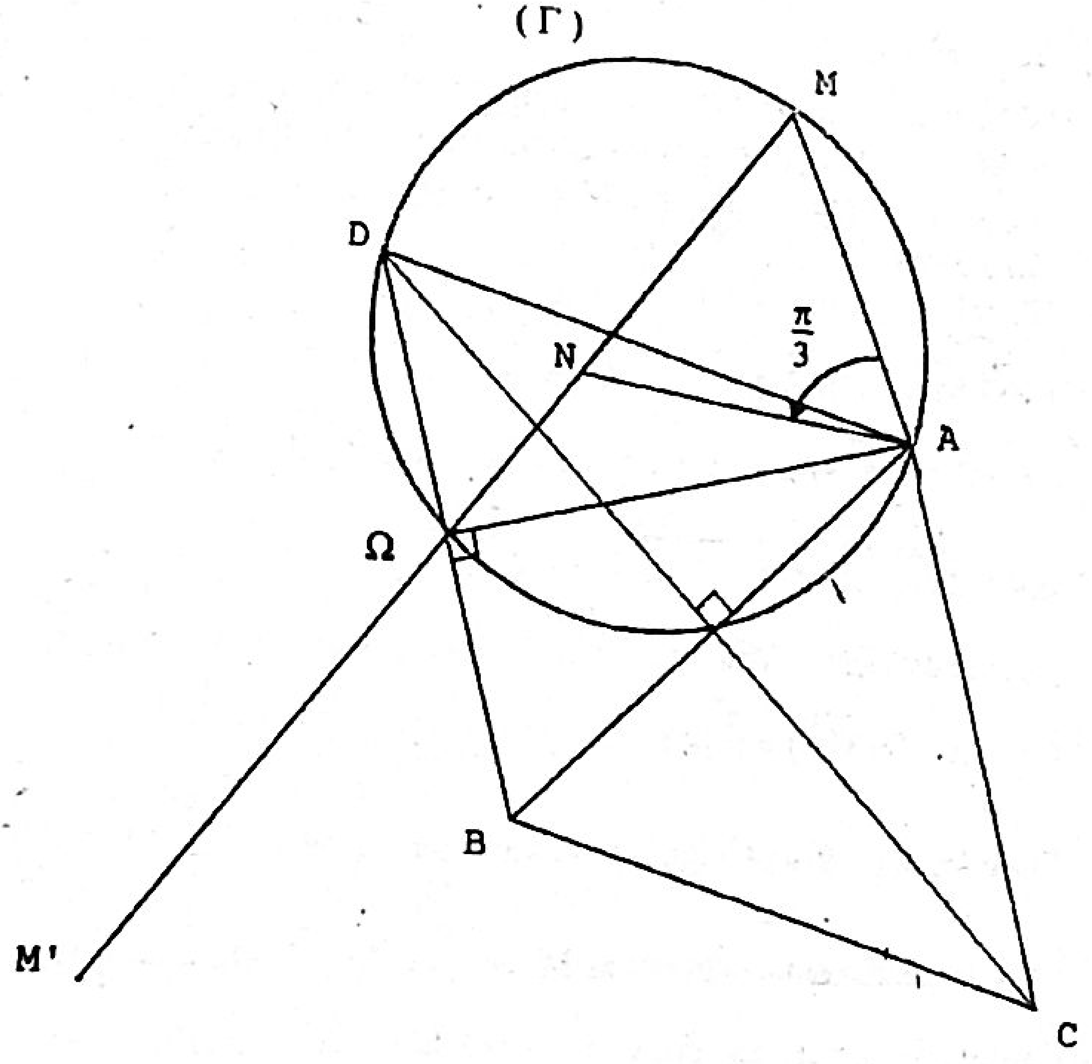
Donc M, N et M' sont alignés si, et seulement si, Mes $\widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$.

On sait que l'ensemble des points M tels que Mes$\widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ est le cercle (Γ) formé des deux arcs capables d'extrémités Ω et A et de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. On déduit de cette étude que l'ensemble des points M tels que M,N et M' soient alignés est le cercle (Γ) tout entier.

b. On sait que ADB est un triangle équilatéral direct et que Ω est le milieu de [BD];

donc Mes $\widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})} \equiv$ Mes $\widehat{(\overrightarrow{D\Omega},\overrightarrow{DA})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On en déduit que D appartient (Γ).
(Γ) est donc le cercle circonscrit au triangle $AD\Omega$ rectangle en Ω.
D'où [AD] est un diamètre de (Γ).
On sait que le triangle $AD\Omega$ est rectangle en Ω et que le triangle ADI est rectangle en I.
Donc les points A,D,Ω et I sont cocycliques.
On en déduit que I appartient à (Γ).


(Γ)
M
D
N
$\frac{\pi}{3}$
A
Ω
B
M'
C

PROBLEME

PARTIE A

1. a. On a : $\forall x \in]-1\,;+\infty[\ g'(x) = (1+x)f'(x) + f(x)$

$= 1+\ln(1+x)$ car $f \in \mathcal{J}$.

On en déduit que g est une primitive de h sur $]-1;+\infty[$.

b. $\forall x \in]-1\,;+\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{g_1'(x)(1+x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)h(x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)h(x) - (1+x)f_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{h(x) - f_1(x)}{1+x}$$

d'où :

$(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = h(x)$

On en déduit que f_1 est élément de $\mathcal{J}$

2. a. $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x}$

$= 1 - \dfrac{1}{1+x}$

On en déduit que $a = 1$ et $b = -1$.

b. Soit H la primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de h qui s'annule en 0.

On a : $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$

$= \displaystyle\int_0^x [1+\ln(1+t)]\,dt$

$= x + \displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt$ par intégration par parties.

Posons $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = 1$

On a $u'(t) = \dfrac{1}{1+t}$; choisissons $v(t) = t$

On a : $\int_0^x \ln(1+t)\,dt = [t\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$$

D'après la question 2.a., on a :

$\forall\, t \in]-1\,;+\infty[\,,\ \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.

Donc $\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

$$= x - [\ln(1+t)]_0^x = x - \ln(1+x).$$

On en déduit que : $\forall x \in]-1\,;+\infty[$,

$H(x) = x + x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$

$= (1+x)\ln(1+x)$.

Les primitives sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) + c$ où c est un nombre réel.

3. De l'étude qui précède, on déduit que $\mathcal{J}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) + \frac{c}{1+x}$ où c est un nombre réel.

Partie B

1. a. Déterminons la limite de f_k en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$;

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

Déterminons la limite de f_k en -1 suivant les valeurs de k.

On a : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \ln(x+1) = -\infty$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{k}{x+1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } k>0 \\ -\infty \text{ si } k<0 \end{cases}$$

On en déduit que :

pour $k<0$ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f_k(x) = -\infty$.

Supposons que $k = 0$.

On a : $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ f_k(x) = \ln(x+1)$;

donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f_k(x) = -\infty$.

Supposons que $k > 0$.

On a : $\forall x \in]-1\ ; +\infty[$, $f_k(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)+\cdot}{(x+1)}$;

$\lim\limits_{x \to -1} (x+1)\ln(x+1) = 0$;

donc $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)\ln(x+1) + k = k$ et par suite $\lim\limits_{x \to -1} f_k(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]-1\ ;+\infty[\ f_k'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{k}{(1+x)^2}$;

$$= \frac{1+x-k}{(1+x)^2};$$

$$= \frac{x-(k-1)}{(1+x)^2}.$$

On déduit que $f_k'(x)$ a le même signe que $x-(k-1)$

$\forall x \in]-1\ ; +\infty[$, $(f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k-1)$.

$\forall x \in]-1\ ; +\infty[$, $(f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > k-1)$.

$\forall x \in]-1\ ; +\infty[$, $(f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < k-1)$.

Donc :

Pour $k \leqslant 0$, on a : $x-(k-1) > 0$

Pour $k > 0$, on a : $\forall x \in]-1\ ; k-1[$, $x-(k-1) < 0$

$\forall x \in]k-1\ ; +\infty[$, $x-(k-1) > 0$.

On déduit que ;

pour $k \leqslant 0$, $f_k'(x) > 0$ pour tout x élément de $]-1; +\infty[$; d'où f_k est strictement croissante sur $]-1\ ; +\infty[$;

pour $k > 0$, on a :

$\forall x \in]-1\ ; k-1[\ f_k'(x) < 0$;

$\forall x \in]k-1; +\infty[\ f_k'(x) > 0$;

d'où f_k est strictement décroissante sur $]-1; k-1]$ et strictement croissante sur $[k-1\ ; +\infty[$.

On déduit de cette étude le tableau de variation de f_k suivant les valeurs de k.

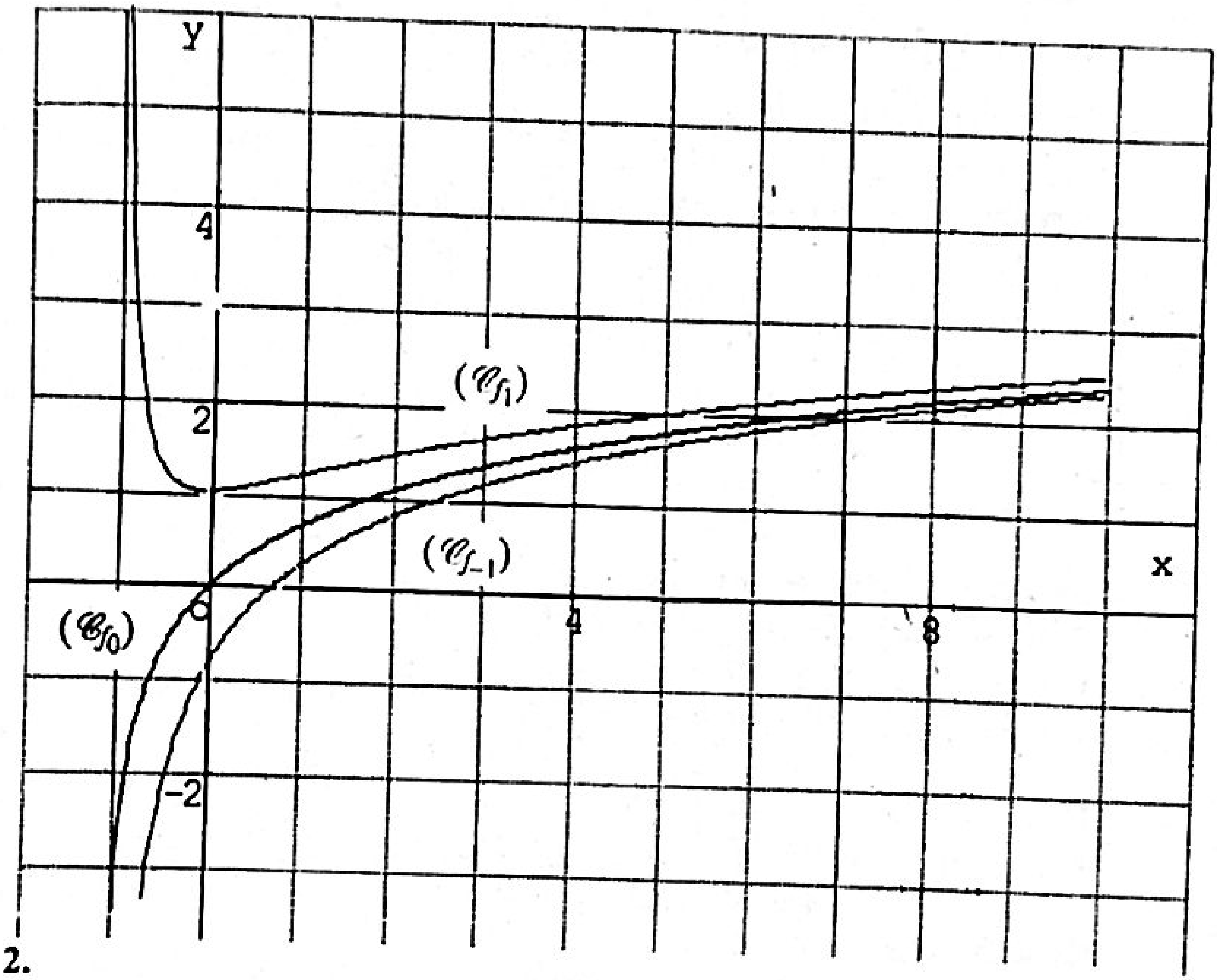
$k \leqslant 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$k > 0$

x	-1		$k-1$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\ln k$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Tracé de $(\mathscr{C}_{-1})$, $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$.



2.

a. $Q_{n-2}(t)$ est la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $-t$ et de premier terme 1 , avec $t \neq -1$.
Donc $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} = \dfrac{1-(-1)^{n-1} \times t^{n-1}}{1+t}$.

b. On déduit de la question précédente que :

$\forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2}\, t^{n-2} = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{t+1}$

$\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1}\, \dfrac{t^{n-1}}{t+1}$.

c. Soit x un élément de $[0\,;1\,]$.
D'après la question b. on a :

$\forall\, t \in [0\,;x]$, $\dfrac{1}{1+t} = 1-t^{2+}t^2+\ldots+(-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1}\, \dfrac{t^{n-1}}{t+1}$.

En intégrant chacun des deux membres, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0 \left(1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-2} t^{n-2}\right) dt \;+ (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1}\,dt.$$

$$[\ln(1+t)]_0^x = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-2} \times \frac{t^{n-1}}{n-1} \right]_0^x + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1}\, dt$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-2} \times \frac{x}{n-1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1}\, dt.$$

$$f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1}\, dt.$$

3.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f_0(x)}{x} & \text{si } x \in]0\,;1] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

a. Soit x un élément de $]0\,;1]$.

On a : $\forall t \in [0,x]$

$$0 \leq t$$
$$1 \leq 1+t$$
$$\frac{1}{1+t} \leq 1$$
$$\frac{t^{n-1}}{1+t} \leq t^{n-1};$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]0\,;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leq \int_0^x t^{n-1}\, dt.$$

b.

On a $\displaystyle\int_0^x t^{n-1}\, dt = \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x = \frac{x^n}{n}$;

or $0\ x \leq 1$;

donc $\leq x^n \leq 1$ et par conséquent $0 \leq \dfrac{x^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

on duit que :

$$\forall : [0\,;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{n}.$$

c. d'après 2.c., on a :

$$\forall x \in [0\,;1]\ f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt$$

$$f_0(x) - P_{n-1} = (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt$$

$$\left|f_0(x) - P_{n-1}(x)\right| = \left|\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt\right|$$

$$= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \text{ car } \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt > 0$$

$\left|f_0(x) - P_{n-1}(x)\right| < \frac{1}{n}$ d'après 3.b.

$$-\frac{1}{n} < f_0(x) - P_{n-1}(x) < \frac{1}{n}$$

pour x élément de $]0\,;1]$, on a :

$$-\frac{1}{n\,x} < \frac{f_0(x)}{x} - \frac{P_{n-1}(x)}{x} < \frac{1}{nx}\ ;$$

$$\frac{-1}{nx} < \varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} < \frac{1}{nx}.$$

d. On a : $\forall x \in\ ]0\,;1]$

$$\frac{-1}{nx} < \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + (-1)^{n-2} \times \frac{x^{n-2}}{n-1}\right) < \frac{1}{nx}.$$

en intégrant sur $[\frac{1}{n}\,;1]$, on obtient :

$$-\int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\,dx < \int_{1/n}^1 \varphi(x)\,dx - \int_{1/n}^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{n-1}\right)dx < \frac{1}{n}\int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{n}\left[\ln x\right]_{1/n}^1 < \int_{1/n}^1 \varphi(x)dx - \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}\right]_{1/n}^1 < \frac{1}{n}\left[\ln x\right]_{1/n}^1$$

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} < \int_{1/n}^1 \varphi(x)\,dx - \left(S_n(1) - S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) < -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$$

$$\int_{1/n}^1 \varphi(x)\,dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) < S_n(1) \text{ et}$$

$$S_n(1) < \int_{1/n}^1 \varphi(x)\,dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\int_{1/n}^{1} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) < S_n(1) < \int_{1/n}^{1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

Partie C

1. On a : $\forall x \in]1;+\infty[,\ g_1(x) + \frac{x^2}{1+x} = 1-x+\frac{x^2}{1+x}$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x}$$

$$= f_0'(x).$$

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$ et démontrons que :

$$\forall x \in]1;+\infty[,\ g_{n+1}(x) + \frac{x^{2n+2}}{x+1} = \frac{1}{1+x}.$$

On a : $\forall x \in]1;+\infty[$,

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + (-1)^{2n}x^{2n} + (-1)^{2n+1}x^{2n+1}$$

$$g_{n+1}(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{1+x} = g_n(x) + (-1)^{2n}x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{x+1} + (-1)^{2n+1}x^{2n+1}.$$

$$= g_n(x) + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{x+1}$$

or $g_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x}$ d'après l' hypothèse de récurrence ;

donc $g_{n+1}(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x} + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{-x^{2n}+(1+x)x^{2n} - (1+x)x^{2n+1} + x^{2n+2}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{-x^{2n}+x^{2n}+x^{2n+1}-x^{2n+1}-x^{2n+2}+x^{2n+2}}{1+x}$$

$$g_{n+1}(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{0}{1+x} = \frac{1}{1+x} = f_0'(x).$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;+\infty[,\ f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}.$$

2.

a. On a : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]0\,;1[$,

$0 \leqslant x$

$1 \leqslant 1+x$

$\frac{1}{1+x} \leqslant 1$

$\frac{x^{2n}}{(1+x)} \leqslant x^{2n}$ car $x^{2n} \geqslant 0$

donc : $\forall x \in [0\,;1]$, $\frac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$.

b. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0\,;1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^{2n}}{x+1} \leqslant x^{2n}\,;$$

donc : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,dx$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}\,dx \leqslant \left[\frac{x^{2n+1}}{x+1}\right]_0^1$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}\,dx \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

3. D'après la question 1. on a :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1\,;+\infty[$, $f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$;

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_0'(x)\,dx = \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$

$$f_0(1) - f_0(0) = \int_0^1 [1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{2n-1}x^{2n-1})]dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

$$f_0(1) = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

$$f_0(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \left(-\frac{1}{2n}\right) + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

$$f_0(1) = U_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx.$$

b. On a :

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx < \frac{1}{2n+1} \text{ d'après 2.b. ;}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx = 0.$

On déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[f_0(1) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \right] = f_0(1)$

$= \ln 2.$

Achevé d'imprimer 2ème trimestre 2010
par MICI - 11 BP 222 Abidjan 11
Dépôt légal : n° 4974 - Ed. 01

une collection destinée aux classes intermédiaires
2e et 1re, pour un enseignement progressif
et une maîtrise des apprentissages.

ISBN 2-84487-161-5
9 782844 871619

La référence africaine
pour votre culture et votre formation

ISBN 2-84487-161-5

9 782844 871619