Collection Excellence

MATHS

3e

Auteurs

Mme Aïda Gassama DIALLO
Birame FAYE
Ismaël MANE
Baro BADJI
Souleymane NDIAYE, *responsable de l'équipe*
Dado BA NDIAYE
Charlot FAYE
Gorgui FAYE

Coordonnateur de la collection
Gorgui FAYE

Directeur de collection
Mamadou SANKHARE
Professeur à l'UCAD

Éditions des Écoles Nouvelles Africaines - Sénégal
ÉÉNAS

Révision scientifique : Mamadou Bachir Diaham, IGEN de Maths.

Avenue Cheikh Anta Diop x Rue Pyrotechnie Stèle Mermoz
B.P. : 581 - Tél.: 221 33 864 05 44 - Fax. 221 33 864 13 52
Courrier électronique : eenas@orange.sn - DAKAR, Sénégal

Dépôt légal, octobre 2008

Imprimé au Sénégal

ISBN 2-915104-02-6

Avant-propos

La collection ***Excellence maths*** est le fruit de travaux d'équipes de professeurs expérimentés responsables depuis plusieurs années dans l'organisation des examens nationaux (BFEM Baccalauréat) et diverses évaluations certificatives. Ils sont pour la plupart, soit membres de la Commission Nationale de Réforme des programmes de Mathématiques, soit Conseillers pédagogiques à la formation continue, à l'IREMPT ou Formateurs à l'École Normale Supérieure, à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

La collection ***Excellence maths*** présente aux élèves et enseignants des unités d'apprentissage dont le découpage en séquences d'enseignement/apprentissage permet, à travers une démarche innovante, d'aller droit au but en s'appuyant sur les objectifs et compétences exigibles des programmes officiels.

Le développement des thèmes abordés permet d'aller au-delà de ces compétences exigibles, vers la satisfaction de besoins plus spécifiques dans la préparation de concours et dans la consolidation et l'accroissement des performances.

La méthode pédagogique adoptée et inspirée de la pédagogie de la réussite, permet d'initier les élèves au raisonnement mathématique amorcé depuis l'élémentaire. Cette dynamique détermine le type d'organisation pédagogique.

Chaque chapitre commence par :

- un flash, image en rapport avec le contenu ;
- un sommaire laissant apparaître les différentes leçons et la structuration globale du chapitre ;
- l'introduction générale qui indique sommairement les objectifs généraux avec parfois une touche historique ;
- une situation-problème qui sert d'entrée. Placée en début de chapitre, elle incite l'élève à amorcer les apprentissages à partir de ses pré-acquis.

L'unité d'enseignement/apprentissage est ainsi structurée :

- les compétences exigibles ;
- les activités préparatoires ;
- la rubrique « À retenir » ;
- les exercices d'application ;
- les exercices d'évaluation.

Les exercices d'évaluation sont constitués par :

- des exercices d'entraînement ;
- des exercices de synthèse ;
- des exercices d'approfondissement.

À la fin du chapitre, l'élève devrait être en mesure de résoudre la situation problème de départ.

La solution est donnée à la fin.

La collection ***Excellence maths***, nous le souhaitons, participera à rehausser l'engouement et l'intérêt des élèves pour les mathématiques. C'est pourquoi nous l'avons voulu attrayante, éducative et en conformité avec les programmes officiels de mathématiques.

Nous remercions tous ceux qui ont encouragé et favorisé la parution de ces manuels.

Les auteurs

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

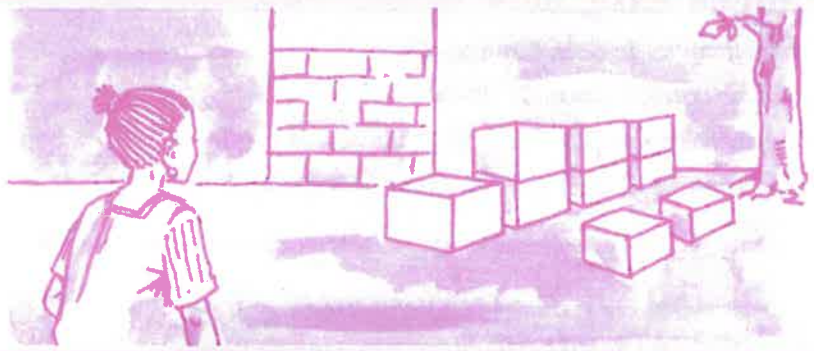
CHAPITRES	SOUS-CHAPITRES	OBJECTIFS
1. Théorème de Thalès	1. Cas du triangle 2. Théorème réciproque 3. Cas du trapèze 4. Agrandissement et réduction 5. Partage d'un segment dans un rapport donné	– Reconnaître une configuration de Thalès. – Utiliser le théorème de Thalès dans le cas du trapèze, du triangle, dans le partage d'un segment dans un rapport donné.
2. Relations trigonométriques dans un triangle rectangle	1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu 2. Relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu 3. Relation entre le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires 4. Sinus, cosinus, et tangente d'un angle de mesure : 30°, 45° et 60°	– Connaître la définition du sinus, du cosinus et de la tangente. – Calculer le sinus, le cosinus, la tangente d'un angle aigu. – En comprendre la relation pour résoudre des problèmes. – L'utiliser pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.
3. Géométrie dans l'espace	1. Présentation d'une pyramide 2. Représentation plane d'une pyramide 3. Patron d'une pyramide 4. Présentation d'un cône de révolution 5. Représentation plane d'un cône 6. Patron d'un cône de révolution 7. Volume de la pyramide et du cône 8. Section d'une pyramide ou d'un cône	– Décrire, représenter de manière plane une pyramide, un cône de révolution. – Dessiner le patron d'une pyramide, d'un cône de révolution. – Utiliser la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base.
4. Angle inscrit	1. Présentation – Définition 2. Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre associé 3. Comparaison d'angles inscrits qui interceptent le même arc	– Connaître le vocabulaire angle au centre, angle inscrit, arc intercepté. – Reconnaître les configurations dans les différents cas de l'angle au centre, inscrit et l'arc intercepté. – Comparer un angle inscrit et un angle au centre associé.
5. Vecteurs	1. Addition vectorielle (construction et définition) 2. Propriétés de l'addition vectorielle 3. Multiplication d'un vecteur par un nombre (construction et définition) 4. Propriété de la multiplication 5. Vecteurs colinéaires	– Connaître et utiliser la relation de Chasles. – Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés. – Connaître les propriétés de l'addition, de la multiplication vectorielle. – Connaître la définition de deux vecteurs colinéaires et utiliser une égalité vectorielle pour démontrer la colinéarité de vecteurs, le parallélisme de droites, l'alignement de points.
6. Repérage dans le plan	1. Distance entre deux points 2. Coordonnées d'un vecteur 3. Vecteurs égaux – Vecteurs opposés 4. Somme de deux vecteurs – Produit d'un vecteur par un réel – Vecteur nul 5. Vecteurs colinéaires 6. Vecteurs orthogonaux	– Calculer la distance entre deux points, les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal du plan. – Reconnaître dans un repère orthonormal deux vecteurs égaux, opposés et reconnaître le vecteur nul. – Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel. – Déterminer une équation d'une droite.
7. Transformations du plan	1. Exemples de transformations 2. Étude de deux translations successives 3. Étude de deux symétries centrales successives 4. Étude de deux symétries orthogonales successives	– Utiliser les propriétés d'une transformation pour résoudre des problèmes. – Utiliser la transformation résultant de l'application de deux translations successives, de deux symétries centrales successives, de deux symétries orthogonales successives pour résoudre des problèmes.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

CHAPITRES	SOUS-CHAPITRES	OBJECTIFS
1. Racine carrée	1. Valeur exacte, valeur approchée, définition et notation de la racine carrée 2. Nombres irrationnels : ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels 3. Calcul numérique dans $\mathbb{R}$ 4. Propriétés de la racine carrée 5. Rendre rationnel un dénominateur irrationnel	– Connaître, définir la racine carrée d'un nombre positif, un nombre irrationnel, la notation $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nomb réels et celle de la racine carrée. – Calculer la valeur numérique d'une expression littérale dans – Connaître et utiliser les propriétés de la racine carrée, les propriétés de la valeur absolue d'un nombre. – Encadrer une expression comportant un radical.
2. Applications affines et applications affines par intervalles	1. Applications affines – Présentation 2. Représentation graphique d'une application affine 3. Variations d'une application affine 4. Détermination de l'expression littérale d'une application affine 5. Utilisation des applications affines	– Reconnaître et déterminer l'expression littérale d'une application affine, l'application linéaire associée. – Représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal. – Reconnaître et représenter graphiquement une application affine par intervalle $f : x \mapsto \|ax + b\|$.
3. Équation et inéquation à une inconnue	1. Équation du type $\|ax + b\| = \|cx + d\|$ 2. Équation du type $ax^2 + b = 0$ 3. Inéquation – Produit du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$ 4. Inéquations du type $ax^2 + b \leq 0$ 5. Résolution de problèmes	– Résoudre différents types d'équations et d'inéquations. – Résoudre différents types d'inéquations. – Résoudre des problèmes en utilisant les équations, inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue.
4. Équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues	1. Résolution graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues : $ax + by + c = 0$ 2. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par substitution 3. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par comparaison 4. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par addition (ou par combinaison) 5. Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues	– Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ différents systèmes d'équations par la méthode de substitution, de comparaison et d'addition. – Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues. – Résoudre graphiquement un système d'équations du premier degré à deux inconnues.
5. Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues	1. Inéquation du premier degré à deux inconnues (ou dans $\mathbb{R}^2$) 2. Système d'inéquations du premier degré à deux inconnues	– Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du premier degré à deux inconnues. – Résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.
6. Statistiques	1. Groupement en classes de même amplitude – histogramme 2. Effectifs cumulés, fréquences cumulées diagrammes cumulatifs 3. Classe modale, centre de classe, moyenne 4. Médiane 5. Interprétation de résultats	– Grouper des données en classes de même amplitude. – Présenter sous forme de tableau les classes obtenues avec leurs effectifs ou leurs fréquences. – Construire un histogramme des effectifs ou des fréquences, un diagramme cumulatif. – Déterminer le mode ou la médiane d'une série statistique.

CHAPITRE

1 THÉORÈME DE THALÈS



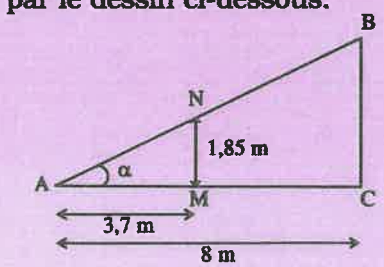
Sommaire

Introduction

Le théorème de Thalès apparaît comme une extension des théorèmes de la droite des milieux et aboutit aux homothéties.
Thalès de Milet a vécu à Milet (Asie Mineure) entre le septième et le sixième siècle avant J.-C. Mathématicien, astronome, physicien, géographe et philosophe grec, il séjourna en Égypte d'où il rapporta les fondements de la géométrie. Il fut le premier à avoir exprimé la hauteur d'un objet à partir de son ombre et ce calcul est maintenant connu sous le nom de théorème de Thalès.
La résolution de problèmes sur les calculs de longueur et le parallélisme de droites constituera l'objectif principal de ce chapitre.

Situation problème

Monsieur Emmanuel, debout à côté du mât de l'école, se demande comment trouver la hauteur de ce mât.
C'est à une heure où les rayons solaires sont obliques, ce qui lui permet de voir que l'ombre du mât et lui sont dans la position indiquée par le dessin ci-dessous.



Si la taille de Monsieur Emmanuel est 1,85 m, son ombre 3,7 m et que l'ombre du mât est 8 m, alors aide Emmanuel à trouver la hauteur de ce mât.

1.1 Cas du triangle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
– de reconnaître une configuration de Thalès ;
– de connaître le théorème de Thalès ;
– d'utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle OIF. Soit E le milieu de [OF] et soit J le milieu de [OI].
2. Quelle est la position de (EI) par rapport à (FJ) ?
3. Exprime JE en fonction de IF.
4. Quelle est la position des droites (JE) et (IF) ? Justifie ta réponse.

Activité 2.

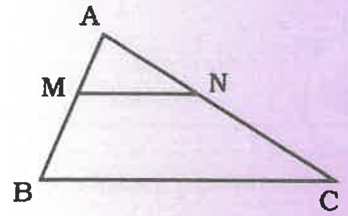
1. Construis trois points non alignés A, E et F tels que AE = 9 cm et AF = 6 cm.
2. Construis le point B sur (AE) tel que AB = 3 cm. Trace la parallèle à (FE) passant par B. Elle coupe (AF) en C.
3. Mesure le segment [AC] puis, calcule et compare les rapports $\frac{AB}{AE}$ et $\frac{AC}{AF}$.

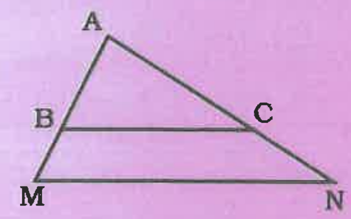
À Retenir

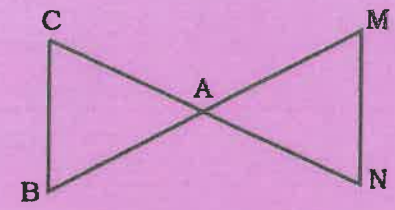
Énoncé du théorème direct
Soit ABC un triangle,
M un point de la droite (AB) et
N un point de la droite (AC).

Si (MN) est parallèle à (BC), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Configuration







M ∈ [AB], N ∈ [AC] (MN)//(BC) donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.	M ∈ [AB), N ∈ [AC) (MN)//(BC) donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.	A ∈ [BM], A ∈ [CN] (MN)//(BC) donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

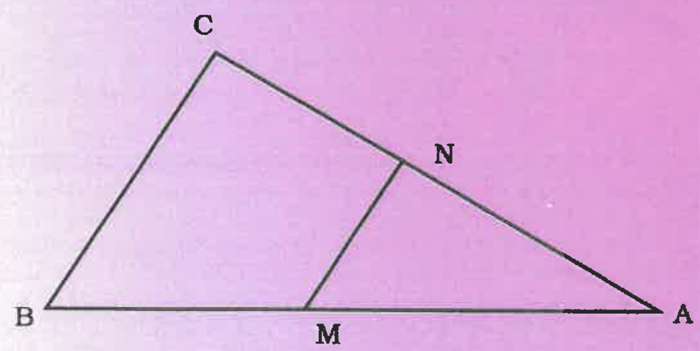
Déductogramme

Si: ABC un triangle | M ∈ (AB), N ∈ (AC) | (NM)//(BC).

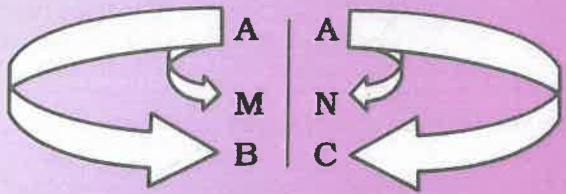
Alors: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

NB : Les triangles ABC et ANM sont en configuration de Thalès. On dit aussi que les triangles ABC et ANM sont en position de Thalès.

Méthode mnémotechnique



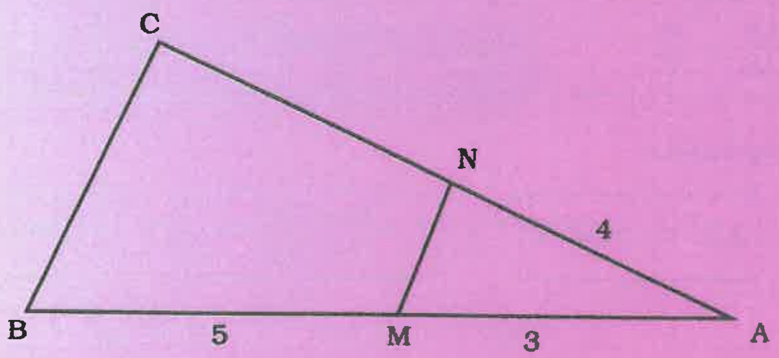
Pour trouver les rapports de Thalès si ANM et ABC sont en configuration de Thalès.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Exercice commenté

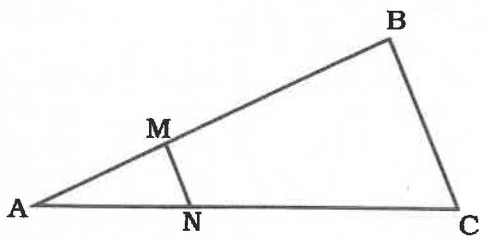
Soit ABC et ANM deux triangles comme l'indique la figure suivante avec (MN)//(BC).
Calcule AC.

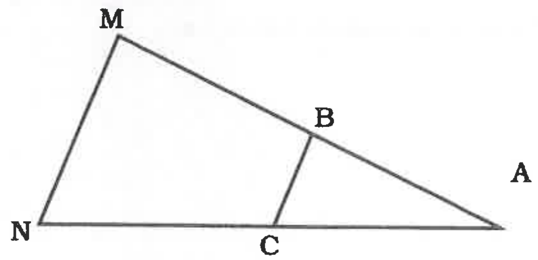


Je sais que M ∈ [AB] et N ∈ [AC] et (MN) // (BC) ; d'où les triangles ANM et ABC sont en configuration de Thalès.
Or si ABC et ANM sont en configuration de Thalès alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, ce qui donne $\frac{3}{8} = \frac{4}{AC}$, d'où 3 AC = 32 donc AC = $\frac{32}{3}$.

B. Exercices d'application

Dans chacune des figures suivantes, calcule la longueur inconnue AC.

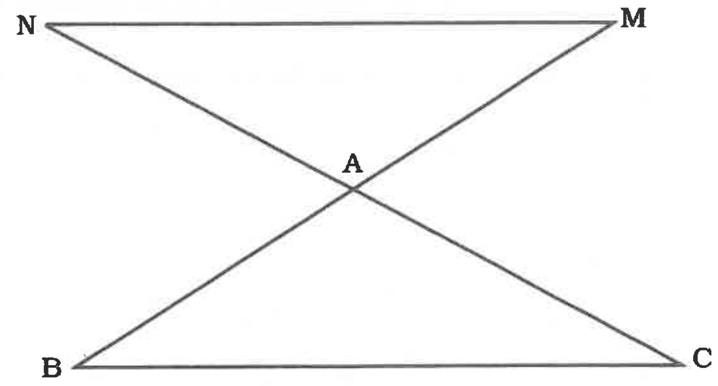




(MN) // (BC)
AM = 2,8
AB = 6,8
AN = 3,5
AC = ?

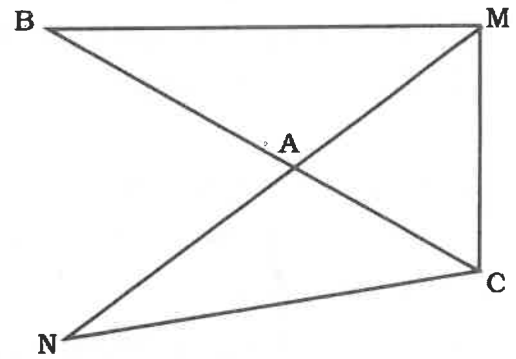
(MN) // (BC)
AN = 8,5
AB = 2,5
AM = 5,5
AC = ?

(BC) // (MN)
AB = 6
AN = 4,5
AM = 5
AC = ?



Contre-exemple

AN = 5
AM = 3,5
AB = 4
Peux-tu calculer AC ?
Justifie ta réponse.



Conséquence

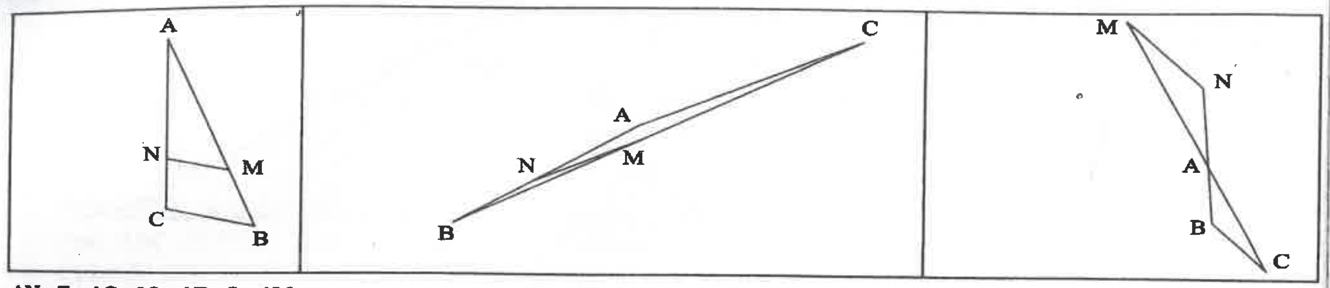
Reprends l'activité 2 de la page 8, mesure les segments [EF] et [BC] puis compare le rapport $\frac{BC}{EF}$ au rapport $\frac{AB}{AE}$.

À Retenir

Si deux triangles ABC et AMN sont en configuration de Thalès tels que M ∈ (AB), N ∈ (AC) alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

B. Exercices d'application

Dans chacune des figures suivantes, les triangles sont en configuration de Thalès. Calcule la longueur inconnue x.



AN=7 ; AC=10 ; AB=2 ; AM=x — AC = 8,5 ; AB = 8 ; NM = 5 ; AN = x — AB = 4 ; AN = 3 ; AM = 6 ; AC = x

1.2 Théorème réciproque

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de justifier que deux droites sont parallèles.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

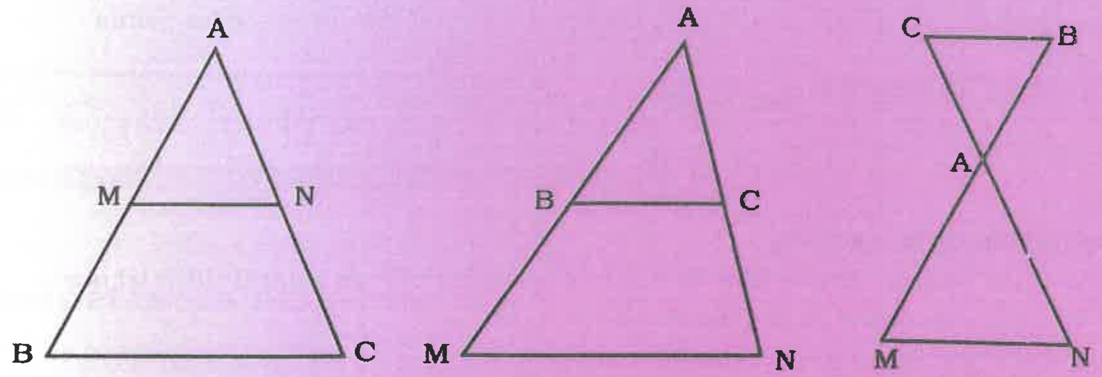
1. Construis un triangle BAC tel que AB = 12 cm et AC = 8 cm.
2. Place un point E sur [AB] tel que AE = 3 cm et un point F sur [AC] tel que AF = 2 cm.
3. Compare les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$.
4. Quel constat fais-tu concernant les droites (BC) et (EF) ?
5. Recommence l'activité en prenant AE = 9 cm et AF = 6 cm. Quel constat fais-tu ?

À Retenir

La réciproque du théorème de Thalès.

Soient ABC et AMN deux triangles, si les points A, B, M sont alignés dans le même ordre que les points A, C, N et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN) est parallèle à (BC).

Configuration



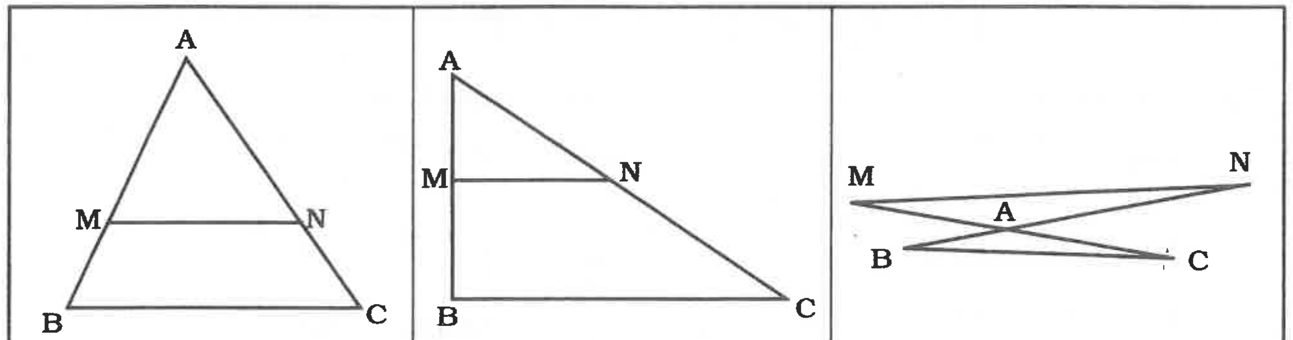
Déductogramme

Si — ABC et AMN sont deux triangles — A,M,B alignés dans le même ordre que A, N, C — $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Alors — (MN) // (BC).

B. Exercices d'application

Sur les figures ci-dessous, a-t-on (MN) // (BC) ? Justifie ta réponse.



AM = 6	AN = 7,5	AB = 10,5	AC = 14,5	AN = 4,5	AM = 3
MB = 2	AC = 10	AM = 4	AN = 6,3	AB = 2	AC = 3

Méthode :

Pour démontrer que deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, je procède comme suit :
- Je vérifie que les points A,M,B sont alignés dans le même ordre que les points A,N,C
- Je calcule les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

$$\text{Si } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}, \text{ alors (MN) est parallèle à (BC).}$$

Application de la méthode

ENA est un triangle tel que EN = 4,5 cm ; EA = 6 cm et I un point de [EN] tel que EI = 3 cm ; J un point de [EA] tel que EJ = 4 cm.
(IJ) est-elle parallèle à (AN) ? Justifie ta réponse.

Proposition de solution

Je sais que :
ENA est un triangle,
I est un point de [EN],
J est un point de [EA],
et que les points E, I, N sont alignés dans le même ordre que les points E, J, A.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, si $\frac{EI}{EN} = \frac{EJ}{EA}$, alors (IJ) // (NA).

or $\frac{EI}{EN} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$ *et* $\frac{EJ}{EA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

d'où $\frac{EI}{EN} = \frac{EJ}{EA}$, *donc (IJ) // (NA).*

Démonstration du théorème direct de Thalès (avec les aires)

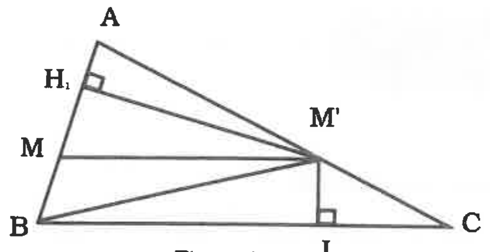


Figure 1

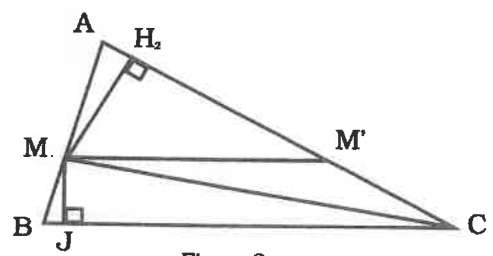


Figure 2

Dans la figure 1 on a :

$$\text{Aire (ABM')} = \frac{AB \times M'H_1}{2}$$

$$\text{Aire (AMM')} = \frac{AM \times M'H_1}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{\text{Aire (AMM')}}{\text{Aire (ABM')}} = \frac{AM}{AB}.$$

Dans la figure 2 on a :

$$\text{Aire (AMM')} = \frac{MH_2 \times AM'}{2}$$

$$\text{Aire (AMC)} = \frac{MH_2 \times AC}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{\text{Aire (AMM')}}{\text{Aire (AMC)}} = \frac{AM'}{AC}.$$

Par ailleurs Aire ABC = Aire ABM' + Aire BM'C

et Aire ABC = Aire AMC + Aire BMC

Puisque les triangle BM'C et BMC ont même aire (même base et hauteur égale) on a :

$$\frac{\text{Aire (AMM')}}{\text{Aire (ABM')}} = \frac{\text{Aire (AMM')}}{\text{Aire (AMC)}}, \text{ d'où } \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}.$$

1.3 Cas du trapèze

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
– de reconnaître une configuration de Thalès et de l'utiliser dans le cas du trapèze.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

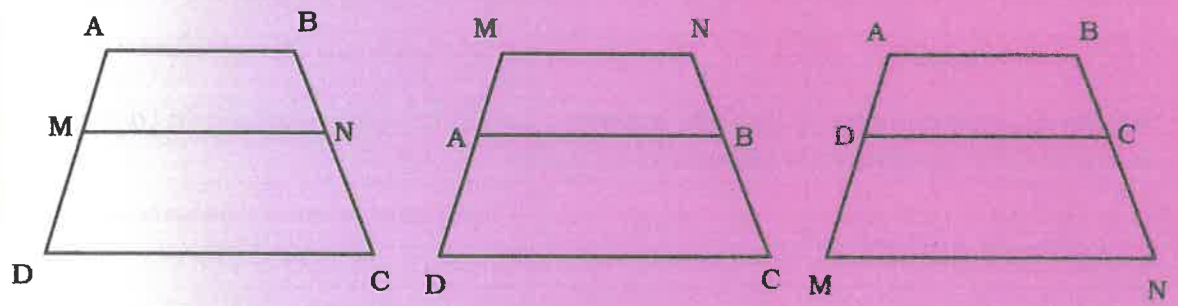
1. Construis un trapèze ABCD tel que (AB) // (CD).
2. Place un point M sur [AD] et un point N sur [BC] tel que (MN) // (AB).
3. Mesure les longueurs des segments [AB], [AD], [AM], [BN], [BC], [CD].
4. Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AD}$; $\frac{BN}{BC}$; $\frac{AM}{MD}$; $\frac{BN}{NC}$.
5. Quel constat fais-tu ?

À Retenir

Soit ABCD un trapèze et M un point de (AD), N un point de (BC) :
Si (AB) // (MN) //(DC), alors on a:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} \quad ; \quad \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad ; \quad \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}.$$

Trapèzes en configuration de Thalès



Démonstration

Ici, on utilise la parallèle aux bases passant par l'intersection I des diagonales du trapèze.
Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD], I le point d'intersection des diagonales [AC] et [DB], E un point de [AD] et F un point de [BC] tel que (EF) // (AB).

Dans le triangle ADC :

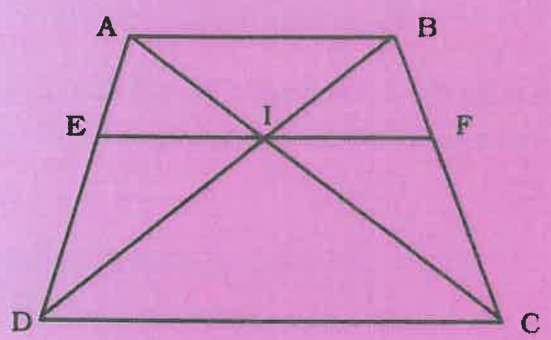
E ∈ [AD], I ∈ [AC] et (EI) // (DC), les triangles AEI et ADC sont donc en position de Thalès.

D'où : $\frac{AE}{AD} = \frac{AI}{AC}$. (1)

De même, les triangles BIF et BDC sont en position de Thalès d'où : $\frac{BI}{BD} = \frac{BF}{BC}$. (2)

De même les triangles ABI et DIC sont en position de Thalès d'où : $\frac{BI}{BD} = \frac{AI}{AC}$. (3)

Des (1), (2) et (3) égalités on déduit :
$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$.



B. Exercices d'application

1. Soit ABCD un trapèze tel que (AB) // (CD) et AD = 4,5 cm ; BC = 3 cm.

2. Sur [BC], place un point E tel que CE = 2,5 cm. La parallèle à (AB) passant par E coupe [AD] en F. Calcule AF et déduis-en DF.

1.4 Agrandissement et réduction

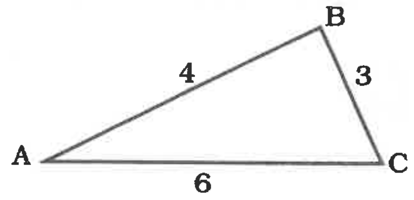
Compétences exigibles

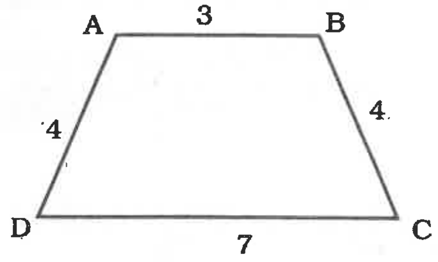
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'utiliser la propriété relative à l'aire dans le cas de deux triangles en configuration de Thalès.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Reproduis chacune des figures ci-dessous à l'échelle $\frac{3}{2}$ puis à l'échelle $\frac{1}{2}$.





2. Dans quels cas as-tu réduit les figures ?

Activité 2.

1. Construis un triangle ABC et place les points D et E tels que D ∈ [AB] et E ∈ [AC] avec AD = 3AB et AE = 3AC.

2. Calcule et compare les rapports $\frac{AD}{AB}$ puis $\frac{AE}{AC}$.

3. Quelle est la position de (BC) par rapport à (DE) ?

Activité 3.

1. Deux triangles ABC et AMM' sont tels que M ∈ [AB], M' ∈ [AC] et $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC} = k$.
La hauteur [AH] de ABC coupe [MM'] en H'.

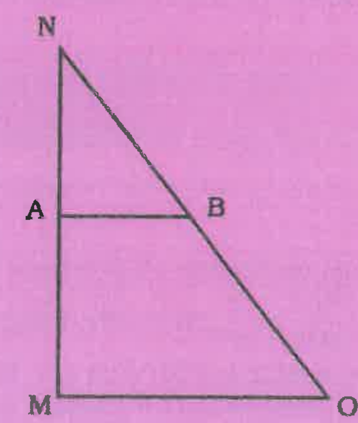
2. Donne le périmètre AMM' en fonction du périmètre de ABC.

3. Donne l'aire de AMM' en fonction de l'aire de ABC.

À Retenir

Si deux triangles ou deux trapèzes sont en configuration de Thalès, alors l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Les triangles NAB et NMO sont en configuration de Thalès. NAB est une réduction de NMO et NMO est un agrandissement de NAB.



Propriétés

- Si $\frac{NA}{NM} > 1$, alors NAB est agrandissement de NMO.
- Si $\frac{NA}{NM} < 1$, alors NAB est une réduction de NMO.
- Si on multiplie les longueurs des côtés d'une figure par un réel k, alors l'aire de sa surface est multipliée par k^2.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Construis un triangle CAN rectangle en A tel que AN = 5 cm et AC = 3 cm. Calcule l'aire du triangle CAN.
2. Sur la demi droite [AN), place le point M tel que AM = 7,5 cm et sur la demi-droite [AC), place le point E tel que AE = 4,5 cm. Calcule l'aire du triangle AME.
3. Calcule et compare le rapport des côtés correspondants des triangles ACN et AEM au rapport de leurs aires.

Exercice 2.

GSKP est un trapèze rectangle dont les bases [GP] et [SK] mesurent respectivement 15 cm et 10 cm et la hauteur GS = 8,5 cm. On multiplie les dimensions de ce trapèze dans un rapport égale à $\frac{7}{5}$. Quelle est l'aire du nouveau trapèze ainsi obtenu ?

1.5 Partage d'un segment dans un rapport donné

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :

- *de partager un segment dans un rapport donné ;*
- *de placer un point d'abscisse donné sur une droite graduée.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle MON tel que MO = 6 cm et MN = 4 cm. Place sur [MN] le point I tel que $\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$. Pour cela divise [MO] en trois parties égales (c'est possible car 6 : 3 = 2). Place le point J sur [MO] tel que MJ = 4 cm.
2. Trace la parallèle à (ON) passant par J, elle coupe [MN] en I. Justifie que $\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$.

Activité 2.

1. Sur une droite graduée (D), place le point C d'abscisse $\frac{5}{3}$.
2. Explique ta méthode.

À Retenir

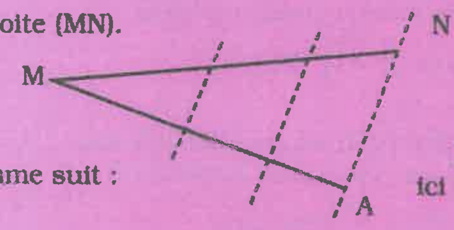
Méthodes pratiques

Pour partager un segment [MN] de longueur 7cm en 3 parties égales, je procède comme suit :

- Je trace le segment [MN].
- Je trace un segment [MA] dont la mesure de sa longueur est un nombre multiple de 3. (3 ; 6 ; 9 : 12 ....).
- Je subdivise [MA] en 3 parties égales.
- Je trace les parallèles à (NA) passant par les points de la subdivision ainsi obtenue.

Le théorème de Thalès nous permet de conclure que le segment [MN] est divisé en 3 parties égales.

NB : Le point A n'appartient pas à la droite (MN).



MN = 7 cm
ici MA = 6 cm

Configuration

Pour placer sur une droite graduée (D) le point M d'abscisse $\frac{5}{3}$, je procède comme suit :

- Je trace une droite graduée (D') sécante à (D) ayant même origine de graduation.
- Je trace une droite passant par le point d'abscisse +1 de (D) et le point d'abscisse +3 de (D').
- Je trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse +5.

Elle coupe (D) au point recherché M d'abscisse $\frac{5}{3}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Construis un segment [SR] de longueur 8 cm. Divise ce segment en sept segments de même longueur.

Exercice 2.

Sur une droite graduée (D), place les points H, K et P d'abscisses respectives $\frac{-7}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$.

Exercices d'entraînement

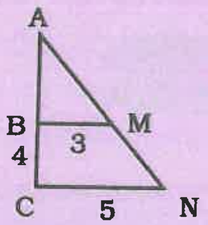
Exercice 1
Construis un triangle PIN tel que PI = 4 cm, IN = 7 cm et PN = 5 cm. Sur [PI] place le point E tel que PE = 3 cm. La parallèle à (IN) passant par E coupe (PN) en F.
Calcule EF.

Exercice 2
Soit SIM un triangle rectangle en S tel que SI = 13 cm et SM = 9 cm. On marque un point A sur (SM). La parallèle à (IM) passant par A coupe (SI) en B. Calcule en valeur exacte SB et AB.

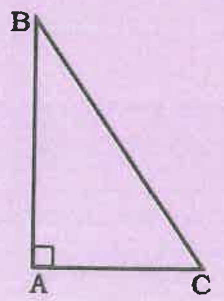
Exercice 3
1. Trace un segment [OM] de longueur 4 cm. Place un point I sur (OM) tel que $OI = \frac{3}{5}$ OM. Calcule OI.
2. Reprends les mêmes questions avec OM = 7 cm et $OI = \frac{7}{4}$ OM.

Exercice 4
Trace un segment [OM] tel que OM = 5 cm. Place sur (OM) les points A et B distincts tels que $OA = OB = \frac{7}{3}$ OM. Que représente O pour le segment [AB] ?

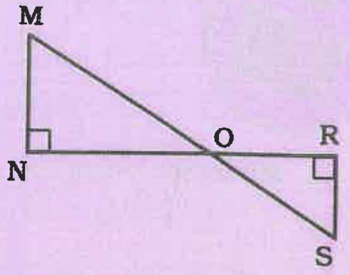
Exercice 5
1. ACN est-il un agrandissement de ABM ? Quelle est l'échelle ?
2. Reproduis la figure en construisant le trapèze BMNC et sa réduction B'M'N'C' à l'échelle $\frac{3}{4}$.



Exercice 6
AB = 4,8 cm et AC = 3,6 cm.
Reproduis la figure puis place les points M et N tels que :
$AM = \frac{AB}{3}$; $AN = \frac{AC}{3}$.
Démontre que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



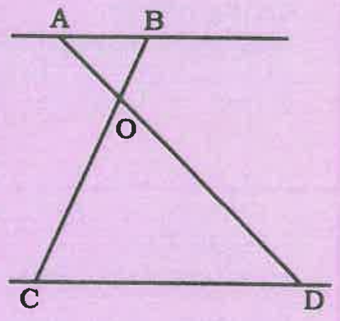
Exercice 7
MN = 7,5 cm ;
ON = 18 cm et
RS = 1,5 cm.



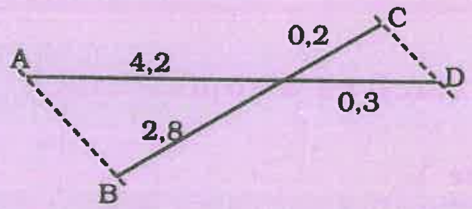
1. Montre que les droites (MN) et (RS) sont parallèles.
2. Calcule les distances OR et OM.

Exercice 8
Les droites (AB) et (CD) des figures ci-dessous sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

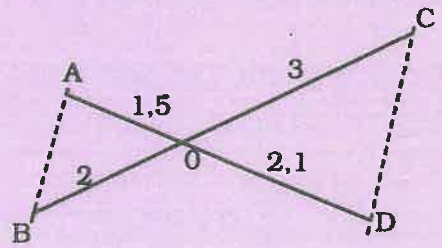
a) AO = 6 cm
OB = 5 cm
OD = 15 cm
OC = 12 cm



b)



c)



Exercice 9
Construis trois segments [AB], [CD], [EF] de longueurs respectives a = 6 cm ; b = 7 cm ; c = 13 cm et un segment [MN] de longueur *x* telle que *x* soit la quatrième proportionnelle à a, b, c sans calculer au préalable cette longueur *x*. Vérifie par le calcul et mesure la longueur du segment obtenu.

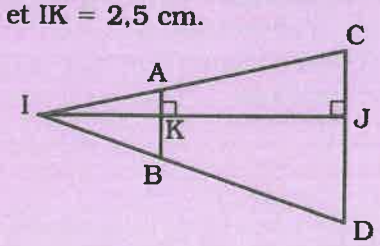
Exercice 10
Construis un triangle SOW tel que SO = 6, SW = 7 et WO = 3. Sur la demi-droite [WO), construis le point M tel que OM soit égale à 4OW. Nomme P le milieu de [SO] puis trace la droite (MP), elle coupe (SW) en I.
Calcule la longueur SI.

Exercice 11
Construis une droite graduée de repère (I,O) telle que OI = 8 cm.
Construis sur cette droite les points A, B, C, E, F, d'abscisses respectives
$\frac{-5}{3}$; $\frac{+5}{7}$; $\frac{-5}{7}$; $\frac{+4}{3}$; $\frac{-8}{7}$.

Exercices de synthèse

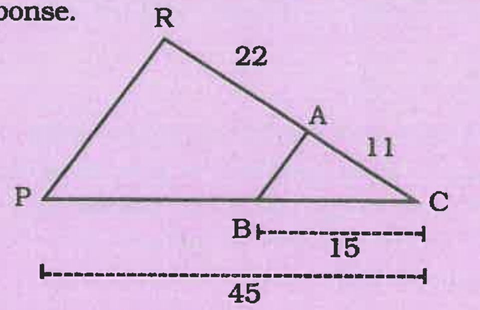
Exercice 12
Construis un parallélogramme SINE tel que SI = 6 cm, IN = 9 cm et SN = 12 cm.
Place le point A sur [SI] tel que SA = 4 cm.
La parallèle à (IN) passant par A coupe (SN) en B.
Justifie que SB = 8 cm.
Soit C le point de [SE] tel que SC = 6 cm.
Démontre que (BC) //(EN).

Exercice 13
Sur la figure ci-dessous, ABDC est un trapèze où (AB) est parallèle à (CD) et AB = 3 cm ; CD = 8 cm. Les droites (AC) et (BD) se coupent en I. La perpendiculaire aux bases passant par I coupent [AB] en K et [CD] en J. Calcule IJ si AK = 1,5 cm ; JC = 2 cm et IK = 2,5 cm.



Exercice 14
1. Construis le triangle BIC tel que BI = 6,4 cm, BC = 4,8 cm et IC = 5,8 cm.
2. Place le point J sur (BC) tel que $BJ = \frac{3}{2}$ BC. J, B, C sont alignés dans cet ordre.
   Trace la parallèle à (CI) passant par J. Elle coupe (BI) en K. Calcule BK et KJ.
   La parallèle à la droite (IC) passant par B coupe la droite (CK) en H.
   La parallèle à la droite (IJ) passant par B coupe la droite(JK) en N.
3. Démontre que les droites (HN) et (JC) sont parallèles.

Exercice 15
Les droites (AB) et (RP) de la figure ci-dessous sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.



Exercice 16
1. Construis un triangle NOP isocèle en N tel que NO = 6 cm ; OP = 8 cm et M, un point de [NP].
2. La droite perpendiculaire à la droite (NP) passant par M coupe le segment [OP] en Q. Le cercle de diamètre [QN] recoupe le segment [NO] en H. Justifie que NHQM est un rectangle.
3. Démontre que le triangle NHQ est un triangle rectangle.
   On pose MQ = *x*. Calcule MP en fonction de *x*.

Exercice 17
Construis un triangle RAM. Sur le segment [MA] place un point N. Les parallèles à (RA) et (RM) passant par N coupent respectivement (RM) et (RA) en B et C.
Démontre que (BC) // (AM).

Exercice 18

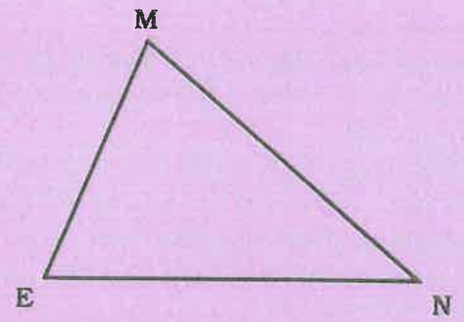
Construis un triangle ABC tel que AB = 6, BC = 7, et AC = 8.
Soit M un point de [BC] tel que BM = x.
Les droites passant par M et parallèles respectivement à (AB) et (AC) coupent respectivement (AC) et (AB) en Q et P.

1. En fonction de x, calcule MP et PQ. En déduire MP + PQ.
2. Détermine PM + PQ pour $x = 2$, puis pour $x = 5$.
3. Détermine x pour que PM + PQ soit égale à 8 puis à 7.

Exercice 19

Soit MEN un triangle.

1. Place le point A sur [ME] tel que $MA = \frac{1}{4}$ ME, puis B sur [MN] tel que $MB = \frac{1}{4}$ MN.
2. Démontre que (BA) est parallèle à (NE).
3. Trace la droite passant par B et parallèle à (ME) ; elle coupe [NE] en C. Calcule EC/EN.
4. Soit O le milieu [EN], démontre que C est le milieu [EO].



Exercice 20

À l'échelle un $\frac{1}{1\,000}$, par un segment de combien de mm la distance Dakar – Saint-Louis est-elle représentée ? (distance Dakar à Saint-Louis = 200 000 m).

Exercice 21

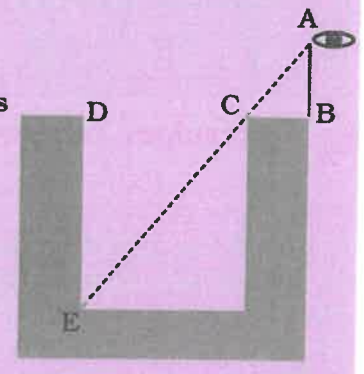
À la photocopieuse de NGoor, un rectangle de dimension 7 cm sur 15 cm a été agrandi à la dimension 10,5 sur 22,5 cm. Quel est le coefficient k de cet agrandissement ?

Exercice 22

1. Construis un triangle ABC tel que : AB = 6 cm ; AC = 7,5 cm et BC = 4,5 cm.
2. Place un point M sur [AB] tel que AB / AM = 3.
3. Place un point N sur [AC] tel que (MN) soit parallèle à (BC).
4. Place un point P sur [BC] tel que (NP) soit parallèle à (AB).
5. Place un point Q sur [AB] tel que (PQ) soit parallèle à (AC).
6. Place un point R sur (AC) tel que (QR) soit parallèle à (BC).
7. Place un point S sur (BC) tel que (RS) soit parallèle à (AB).
   a) Justifie que (MS) parallèle à (AC).
   b) Calcule BS / BC et BM / BA.

Exercice 23

Le regard d'un observateur rase le bord C du puits pour aboutir au point E de l'arête centrale du fond. Calcule DE en fonction de CB, AB et DC.



Exercice 24

Construis un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4,8 cm et AC = 3,6 cm.

1. Calcule BC.
2. Sur la perpendiculaire au plan (ABC) en A, marque un point S tel que AS = 6 cm.
3. Considère le tétraèdre SABC. Sur [AS], on place deux points M et N tels que AM = MN = 2 cm.
   On sectionne cette pyramide par deux plans parallèles à la base et passant respectivement par M et N.
   Calcule le volume du tronc de pyramide intermédiaire.

Exercice 25

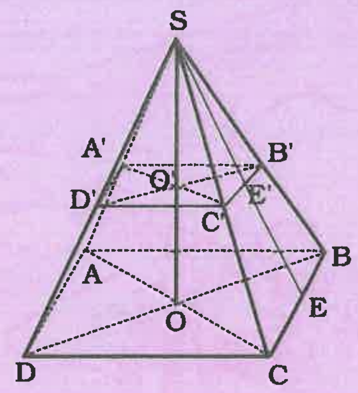
On donne trois points du plan, E, G et H alignés, dans cet ordre, sur une droite (D) tels que EG = 1 et EH = x ; $x \in \mathbb{R}^*$.
Sur une droite (D') passant par E et distincte de (D), on prend deux points M et N tels que (GM) soit parallèle à (HN) et un point F de (D) tel que (FM) soit parallèle à (GN).

1. Fais la figure.
2. Calcule EF en fonction de x.
3. Montre que $EG^2 = EF \times EH$.

Exercice 26

La pyramide SABCD est à base polygonale.
Le polygone ABCD est un carré de côté 4,5 cm. La hauteur SO mesure 6 cm.

1. Calcule la longueur de son apothème [SE].
2. Calcule son volume.
3. On sectionne cette pyramide suivant un plan parallèle à la base (voir la figure ci-dessous) tel que A' B' = 1,5 cm
   Calcule les dimensions SO', AA' et E E'.



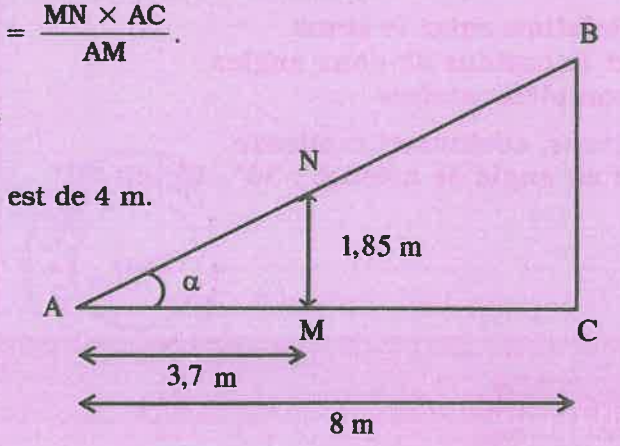
Solution de la situation problème

Soit BC la hauteur du mât.
N ∈ [AB] ; M ∈ [AC] et (MN) // (BC).
D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle

$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC}$, d'où $BC = \frac{MN \times AC}{AM}$.

$BC = \frac{1,85 \times 8}{3,7} = 4$.

h = 4 m.
La hauteur de ce mât est de 4 m.



CHAPITRE 2

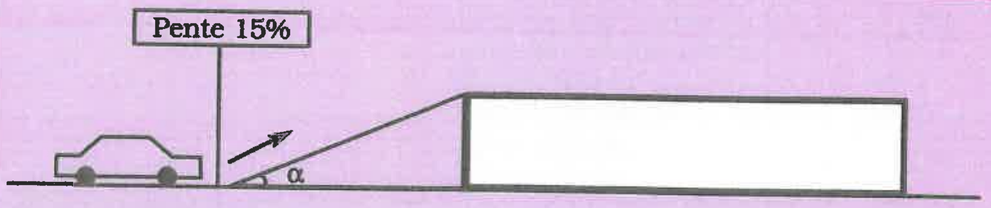
RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Sommaire

Introduction

Le terme « trigonométrie » vient du grec *trigonôs* qui signifie triangle et *métron* qui signifie mesure. La trigonométrie étudie les relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles, d'un triangle.
Pendant l'Antiquité et le Moyen âge, les arpenteurs se servaient déjà des relations trigonométriques pour établir leurs calculs sur le terrain.
De nos jours, ces relations sont encore utilisées en astronomie, en cartographie, en architecture, en navigation aérienne et maritime pour déterminer des distances ou des angles.

Situation problème



Un pont comme échangeur routier a une pente de 15%.
On demande de calculer l'angle α d'inclinaison que fait la ligne de plus grande pente avec l'horizontale.

2.1 Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

a) connaître la définition et la notation du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ;

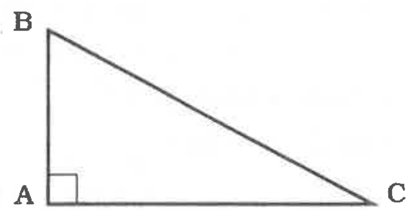
b) être capable de :

- *calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle,*
- *calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle,*
- *déterminer une valeur approchée d'un angle aigu dans un triangle rectangle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente à l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Examine la figure ci-contre, puis recopie et complète :

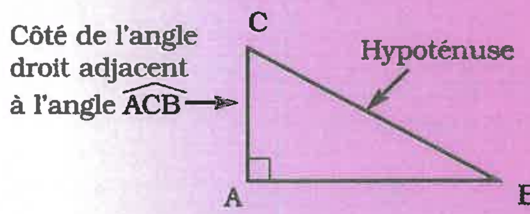


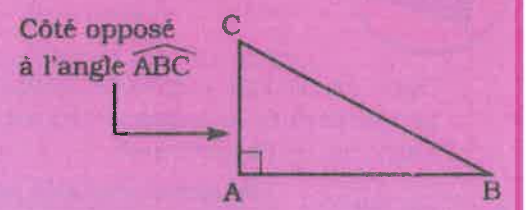
1. ABC est un triangle rectangle en ....
2. L'hypoténuse du triangle ABC est le côté ....
3. Le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ est ....
4. Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ est ....
5. Le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est ....
6. Le côté de l'angle droit adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ est ....
7. Le côté de l'angle droit adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ est ....

M20 00 L

À Retenir

ABC est un triangle rectangle en A





Activité 2.

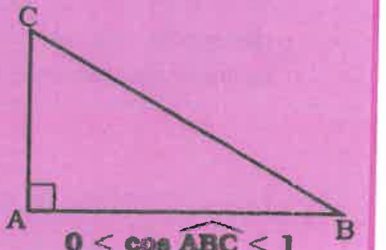
L'unité de longueur étant le centimètre,

1. Construis un triangle ABC tel que AB = 3 cm ; AC = 4 cm et BC = 5 cm.
2. Montre que ABC est un triangle rectangle en A.
3. Calcule le rapport $\frac{AB}{BC}$.
4. Recopie et complète $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{longueur du côté .... à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'.......................}}$; AB > 0 et BC > 0, donc $\frac{AB}{BC}$ ... 0.
5. On sait que pour tout triangle ABC rectangle en A, AB < BC ; divise chaque membre de cette inégalité de BC puis complète par > ou < : $\frac{AB}{BC}$ ... 1 ; vérifie que le résultat trouvé au point 3 est valable. Ce rapport $\frac{AB}{BC}$ que tu as calculé est le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

À Retenir

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$



$0 < \cos \widehat{ABC} < 1$

Activité 3.

L'unité de longueur étant le centimètre,

1. Construis un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm ; AC = 8 cm.
2. Calcule la longueur BC.
3. Calcule le rapport $\frac{AC}{BC}$.

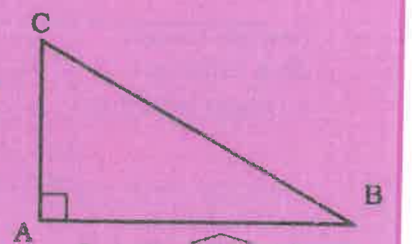
Recopie et complète : $\frac{AC}{BC} = \frac{\text{longueur du côté ...... à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'.......................}}$; AC > 0 et BC > 0, donc $\frac{AC}{BC}$ ... 0.

4. On sait que AC < BC. Divise chaque membre de cette inégalité par BC puis complète par > ou < : $\frac{AC}{BC}$ ... 1.
5. Vérifie que le résultat trouvé au point 3 est valable. Le rapport $\frac{AC}{BC}$ que tu as calculé est le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

À Retenir

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$



$0 < \sin \widehat{ABC} < 1$

Activité 4.

L'unité de longueur étant le centimètre,

1. Construis un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.
2. Calcule le rapport $\frac{AC}{AB}$.
3. Recopie et complète : $\frac{AC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté ... } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté ... } \widehat{ABC}}$.
4. Calcule BC puis $\cos \widehat{ABC}$ et $\sin \widehat{ABC}$.

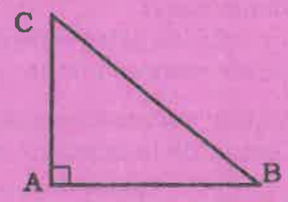
   Calcule le rapport $\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}}$ et compare-le au rapport $\frac{AC}{AB}$ trouvé au point 2.
5. Recopie et complète : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{...}$; $\sin \widehat{ABC} = \frac{...}{BC}$; $\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{AC}{...} \times \frac{...}{AB} = \frac{AC}{...}$.

   Ce rapport $\frac{AC}{AB}$ que tu as calculé est la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

À Retenir

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent.

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$



$\tan \widehat{ABC} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}}$

Activité 5.

Un triangle ABC rectangle en A est tel que $\cos \widehat{ACB}$ = 0,6 cm et BC = 4 cm.

1. Calcule AC.
2. Fais une figure.
3. En sachant que $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$, c'est-à-dire $\frac{\cos \widehat{ACB}}{1} = \frac{AC}{BC}$, complète :

   AC × 1 = BC × .... d'où AC = 4 × .... = ... selon le cm.

   Si $\sin \widehat{ACB}$ = 0,4 cm et AB = 3 cm, calcule BC en procédant comme au point 3.

   Si $\tan \widehat{ACB}$ = 1,6 cm et AC = 5 cm, calcule AB en procédant comme au point 3.

À Retenir

Dans un triangle rectangle, si on connaît la longueur d'un côté, le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, on peut calculer la longueur des deux autres côtés.

$\frac{\cos\widehat{ACB}}{1} = \frac{AC}{BC}$; $AC = BC \times \cos\widehat{ACB}$ $BC = \frac{AC}{\cos\widehat{ACB}}$	$\frac{\sin\widehat{ACB}}{1} = \frac{AB}{BC}$; $AB = BC \times \sin\widehat{ACB}$ $BC = \frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$

$$\frac{\tan\widehat{ACB}}{1} = \frac{AB}{AC} \ ; \ AB = AC \times \tan\widehat{ACB}$$

$$AC = \frac{AB}{\tan\widehat{ACB}}$$

Activité 6.

Un triangle rectangle a un angle aigu de mesure $\alpha = 30°$.

1. Calcule $\cos \alpha$.

Pour cela, tu peux utiliser ta calculatrice :
- Vérifie d'abord que la calculatrice est en mode degré.
- Appuie successivement sur les touches $\boxed{3}$; $\boxed{0}$; $\boxed{\cos}$ et si nécessaire sur $\boxed{=}$.

L'écran de la machine affiche :

DEG 0,866025403
Donc $\cos 30° = 0{,}866$ (Valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.)

Remarque

D'autres calculatrices utilisent le programme : $\boxed{\cos}$; $\boxed{3}$; $\boxed{0}$ = 0,866025

2. Calcule $\sin \alpha$ puis $\tan \alpha$ de la même façon.

Activité 7.

1. Un triangle rectangle a un angle aigu β tel que $\cos \beta = 0{,}5$. Détermine β en degrés .
On peut utiliser la calculatrice. Appuie successivement sur les touches $\boxed{0}$; $\boxed{.}$; $\boxed{5}$ $\boxed{2^{nd}}$; $\boxed{\cos}$. Il s'affiche sur l'écran $\boxed{\text{DEG } 60}$.
Sur certaines calculatrices, on obtient le résultat en appuyant sur $\boxed{2^{nd}}$; $\boxed{\cos}$; $\boxed{0}$; $\boxed{.}$; $\boxed{5}$.
Donc l'angle β qui a pour cos 0,5 mesure 60°.

2. Calcule β si $\sin \beta = 0{,}45$ en utilisant la calculatrice.

3. Calcule β si $\tan \beta = 2{,}6$ à la calculatrice.

Remarque

Si on connaît l'angle α, on peut utiliser une calculatrice ou une table trigonométrique pour déterminer cos α, sin α ou tan α. On peut faire de même pour déterminer une valeur approchée de l'angle si on connait son sinus, son cosinus ou sa tangente. Dans tous les cas, il faut s'assurer que sur l'écran, il est affiché DEG, RAD ou GRAD, selon l'unité d'angle que l'on veut utiliser.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

À l'aide d'une calculatrice, détermine la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{100}$ près dans chacun des cas suivants de :

sin 35° ; sin 43° ; sin 27° ; sin 47° ; cos 57° ; cos 10°

cos 89° ; cos 27,9° ; tan 0° ; tan 19° ; tan 66° ; tan 84,2°

Exercice 2.

En utilisant une calculatrice détermine, si possible, la valeur approchée en degré à $\frac{1}{10}$ près par excès de l'angle α :

$\cos \alpha = 0{,}06$; $\cos \alpha = 1{,}7$; $\cos \alpha = 0{,}8$; $\sin \alpha = 0{,}75$
$\sin \alpha = 0{,}08$; $\sin \alpha = 1{,}07$; $\tan \alpha = 1{,}6$; $\tan \alpha = 0{,}9$; $\tan \alpha = 2{,}9$

Exercice 3.

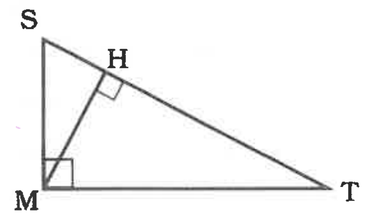
Recopie et complète les expressions suivantes en utilisant la figure ci-dessous

$\cos\widehat{TSM} = \frac{\dots}{\dots}$ 　 $\tan\widehat{MSH} = \frac{\sin\widehat{\dots}}{\cos\widehat{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{HS}{SM} = \cos\widehat{\dots}$ 　 $\tan\widehat{HMT} = \frac{HT}{\dots}$

$\frac{MH}{HT} = \tan\widehat{\dots}$ 　 $\sin\widehat{STM} = \frac{\dots}{\dots}$

$\tan\widehat{SMH} = \frac{\sin\widehat{\dots}}{\cos\widehat{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$ 　 $\frac{HT}{MT} = \sin\widehat{\dots} = \cos\widehat{\dots}$



Exercice 4.

WAS est un triangle rectangle en A.

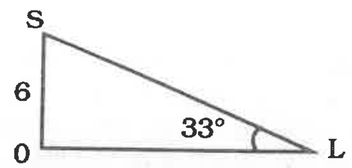
1. WS = 5 cm et AW = 3,5 cm. Calcule $\cos\widehat{AWS}$; déduis-en la valeur approchée de $\widehat{AWS}$ à 1 degré près par excès en utilisant la calculatrice.

2. AS = 6 cm et AW= 3 cm. Calcule $\tan\widehat{ASW}$ puis déduis-en la valeur approchée de $\widehat{ASW}$ puis de $\widehat{AWS}$ à 1° par défaut en utilisant la calculatrice.

3. AS = 3 cm et AW = 4 cm. Calcule WS puis $\sin\widehat{ASW}$. Déduis-en les valeurs approchées à $\frac{1}{10}$ de degré près par défaut de $\widehat{ASW}$ et $\widehat{AWS}$ en utilisant la calculatrice.

Exercice 5.

1. Considère la figure ci-contre : complète $\tan 33° = \dfrac{\dots\dots}{OL}$.
Détermine tan 33° à l'aide de la calculatrice et déduis-en OL.



2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et BC = 7 cm. Calcule AB.
3. EFG est un triangle rectangle en E tel que $\cos \widehat{EGF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et GF = 9. Calcule EG.

2.2 Relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle ABC rectangle en B.
2. Recopie et complète : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{\dots}$; $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\dots}{AC}$
ABC est un triangle rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, tu peux écrire $AB^2 + \dots\dots = \dots\dots\dots$
3. Divise chaque membre de cette égalité par AC^2. Tu obtiens $\dfrac{AB^2}{AC^2} + \dfrac{\dots}{AC^2} = \dfrac{\dots}{AC^2}$.
donc $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{\dots}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^2$, d'où $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\dots)^2 = 1$.

À Retenir

La somme du carré du cosinus d'un angle aigu et du carré du sinus de ce même angle aigu est égale à 1.
Pour tout angle aigu α, on a :

$$\boxed{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1 \text{ ou } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

α est un angle aigu. On donne cos α = 0,6. Calcule sin α en utilisant la formule précédente.

Exercice 2.

α est un angle aigu.

1. On pose $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\ }$. Calcule cos α en utilisant la formule précédente.
2. On donne $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{7}$. Calcule sin α en utilisant la formule précédente.
Déduis de ces résultats une valeur de tan α.

2.3 Relation entre le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation qui lie le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle ABC rectangle en A.
2. Recopie et complète : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \dots\dots°$. La somme de ces deux angles est égale à .....° donc $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux angles ....
3. Recopie et complète : $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{\dots}{BC}$; $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\dots}{\dots}$.
4. Compare $\cos \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ABC}$.
5. Détermine puis compare $\cos \widehat{ABC}$ et $\sin \widehat{ACB}$.

À Retenir

Si deux angles sont complémentaires, alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et réciproquement.
Si $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$, alors $\cos \widehat{ABC} = \sin \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ABC} = \cos \widehat{ACB}$.

B. Exercices d'application

Dans les exercices 1 et 2, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 1.

On donne $\cos\widehat{ACB} = 0,1$. Détermine $\sin\widehat{ABC}$ puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 1 degré près par défaut.

Exercice 2.

On donne $\sin\widehat{ABC} = \frac{2}{3}$. Détermine une valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$ à 0,1 degré par excès.

2.4 Sinus, cosinus et tangente d'un angle de mesure : 30°, 45° ou 60°

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle de 30°, 45° ou 60°et être capable de les utiliser pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A.On pose AB = AC = a, a étant un nombre réel positif.
2. Calcule BC en fonction de a.
3. Recopie et complète $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} =$ ......°.
4. Recopie et complète $\cos 45° = \frac{\dots}{a\sqrt{2}} = \frac{\dots}{\sqrt{2}} = \frac{\dots}{2}$.
5. Calcule de même sin 45° et tan 45°.

Activité 2.

1. Construis un triangle ABC équilatéral de côté a, a étant un réel strictement positif.
2. Trace la hauteur issue de A qui coupe [BC] en H.
3. Recopie et complète : ABC est un triangle équilatéral donc $\widehat{ABC} =$ ......°.
4. Calcule BH en fonction de a.
5. Dans le triangle BAH, rectangle en H, calcule AH^2 en fonction de a et déduis-en que $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

6. Dans ce triangle ABH rectangle en H, calcule la valeur exacte de cos 60°, sin 60° et tan 60°.
7. En déduire sin 30°, cos 30° et tan 30°.

À Retenir

Tableau des valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente des angles de 30° ; 45° et 60° :

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque : Lors des calculs, on utilise les valeurs exactes sauf si une valeur approchée est demandée.

Méthode pour retenir le tableau précédent :

- On écrit les trois valeurs de l'angle α dans l'ordre croissant : 30° ; 45° ; 60°.
- On écrit en dessous les 3 premiers nombres entiers non nuls : 1 ; 2 ; 3.
- On met chaque nombre sous un radical : $\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$.
- On divise chaque terme obtenu précédemment par 2.
- On obtient la ligne des sinus $\frac{\sqrt{1}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Pour obtenir la ligne des cosinus, il suffit de constater que les angles de 30° et de 60° sont complémentaires et donc d'appliquer la propriété des lignes trigonométriques de deux angles complémentaires : le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Exemple d'utilisation d'une table trigonométrique :

Pour déterminer cos 21° avec la table.

Je lis sur la table la ligne correspondant à la mesure de cet angle :

α	cos	sin	tan
21	**0,934**	**0,358**	**0,384**

Je lis cos 21° = 0,934 ; sin 21° = 0,358 ; tan 21° = 0,384.

Je procède de même pour n'importe quel angle aigu.

Remarque

- On constate que lorsque les mesures en degrés de l'angle augmentent (de 0 à 90°), les valeurs du sinus et celles de la tangente augmentent ou diminuent alors que celles du cosinus évoluent en sens inverse. On dit que le sinus et la tangente sont croissants alors que le cosinus est décroissant.
- Pour déterminer cos 67,5°, on constate d'abord que cette valeur ne figure pas dans la table.

On a : $67° < 67,5° < 68°$: comme le cosinus est décroissant, on a :

$\cos 68° < \cos 67,5° < \cos 67°$ c'est-à-dire $0,375 < \cos 67,5° < 0,391$.

– Pour sin 67,5°, on n'a pas besoin de permuter les bornes :
$67° < 67,5° < 68°$
$\sin 67° < \sin 67,5° < \sin 68°$
$0,921 < \sin 67,5° < 0,927$
– Pour tan 67,5°, on aura aussi
$67° < 67,5° < 68°$
$\tan 67° < \tan 67,5° < \tan 68°$
$2,356 < \tan 67,5° < 2,475$
– Soit à déterminer un angle α connaissant son cosinus ou son sinus ou sa tangente :

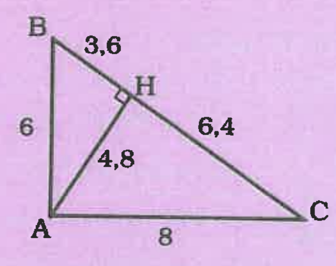
Exemple

Détermine α si cos α = 0,974. Je cherche 0,974 dans la colonne cos et je lis la mesure de l'angle correspondant dans la colonne des degrés.
0,974 est le cosinus de l'angle de 13°.
Je procède de même pour déterminer α connaissant tan α ou sin α.
– Déterminons α tel que cos α = 0,84, nombre qui ne figure pas sur la table trigonométrique.
Je sais que $0,839 < 0,84 < 0,848$ et $\cos 33° = 0,839$ et $\cos 32° = 0,848$
$0,839 < \cos \alpha < 0,848$
$32° < \alpha < 33°$
– Déterminons α tel que tan α = 0,63, nombre qui ne figure pas sur la table trigonométrique.
Je sais que $0,625 < 0,63 < 0,649$ et $\tan 32° = 0,625$ et $\tan 33° = 0,649$
$0,625 < \tan \alpha < 0,649$ donc $32° < \alpha < 33°$.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

En considérant la figure suivante, mets une croix dans la case contenant la bonne réponse.



$\cos \widehat{BCA}$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{HC}{AC}$	$\frac{AC}{BC}$
$\sin \widehat{HAC}$	$\frac{HC}{AC}$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{HC}{BC}$
$\tan \widehat{CBA}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{4,8}{3,6}$	$\frac{6}{8}$
$\widehat{ACB}$	53,13°	36,87°	43,12°
$\widehat{HAB}$	36,87°	53,1°	27,23°

Exercice 2

À l'aide d'une calculatrice, détermine la valeur approchée par excès à 10^{-1} près de :

cos 27° ; cos 12° ; cos 8,5° ; cos 81° ; cos 17,3° ;
sin 75° ; sin 22° ; sin 13° ; sin 25,6° ; sin 14° ;
tan 5° ; tan 36° ; tan 15,5° ; tan 22° ; tan 42,1°.

Exercice 3

En utilisant une calculatrice, détermine un encadrement à 1° de l'angle α.

$\cos \alpha = 0,05$; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \alpha = \frac{1}{100}$; $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{27}}$;

$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; $\sin \alpha = 0,09$; $\tan \alpha = 2\sqrt{5}$;

$\tan \alpha = 6$; $\tan \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{2}$; $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4

En utilisant une calculatrice, détermine si possible la valeur approchée en degrés à une unité près de l'angle α :

1. cos α = 0,004 ; cos α = 0,6 ; cos α = 2,05 ; cos α = 0, 875.
2. sin α = 1,002 ; sin α = 0,32 ; sin α = 0,05 ; sin α = 0,125.
3. tan α = 4; tan α = 9,7 ; tan α = 0,5 ; tan α = 1,625.

Exercices 5 à 15

ABC est un triangle rectangle en A. Fais une figure avant de répondre aux questions.

Exercice 5

AB = 3 cm ; BC = 5 cm. Calcule $\cos \widehat{ABC}$ puis déduis-en la valeur approchée de $\widehat{ABC}$ à 1° près par défaut.

Exercice 6

AB = 5 cm ; BC = 7 cm. Calcule $\sin \widehat{ACB}$ puis déduis-en la valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$ à 1° près par excès.

Exercice 7

AB = 3 cm ; BC = 4 cm. Calcule $\tan \widehat{ABC}$ puis $\tan \widehat{ACB}$. Déduis-en les valeurs approchées des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ en degrés à 10^{-1} près par excès.

Exercice 8

AB = 6 cm ; AC = 8 cm ; BC = 10 cm.
Calcule $\cos \widehat{ABC}$; $\sin \widehat{ABC}$; $\tan \widehat{ABC}$; $\cos \widehat{ACB}$, $\sin \widehat{ACB}$, $\tan \widehat{ACB}$.
Que constates-tu ?

Exercice 9

$\cos \widehat{ABC} = 0,04$ et BC = 6 cm. Calcule AB.

Exercice 10

$\cos \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et AB = 5 cm. Calcule BC.

Exercice 11

$\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et BC = 3,5 cm. Calcule AB.

Exercice 12

$\sin \widehat{ACB} = 0,12$ et AB = 1,3 cm. Calcule BC.

Exercice 13

$\tan \widehat{ABC} = 1,5$ et AC = 3 cm.
Calcule AB.

Exercice 14

$\tan \widehat{ABC} = 1,63$ et AB = 5 cm. Calcule AC.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, détermine une valeur approchée par excès au centimètre près de la longueur des deux autres côtés du triangle :

1. $\widehat{ACB} = 28°$ et BC = 6 cm.
2. $\widehat{ACB} = 39°$ et AC = 2,5 cm.
3. $\widehat{ABC} = 65°$ et BC = 5 cm.
4. $\widehat{ABC} = 87°$ et AB = 10 cm.

Exercice 16

WAS est un triangle rectangle en W.
Détermine une valeur approchée des mesures des angles $\widehat{WAS}$ et $\widehat{WSA}$ dans chaque cas :

1. AW = 6 cm ; AS = 8 cm.
2. AW = 5 cm ; WS = 9 cm.
3. WS = $\frac{12}{7}$ cm ; AW = 2 cm.
4. AW = 9,5 cm ; AS = 12 cm.

Exercice 17 à 20

α est la mesure en degrés d'un angle aigu du triangle rectangle. Sans calculer α, réponds aux questions posées. Utilise les relations $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Exercice 17

cos α = 0,25. Calcule sin α puis tan α.

Exercice 18

$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Calcule sin α puis tan α.

Exercice 19

sin α = 0,75. Calcule cos α puis tan α.

Exercice 20

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcule cos α puis tan α.

Exercice 21

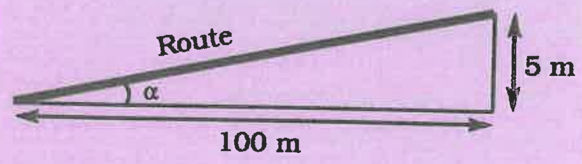
EFG est un triangle rectangle en E.

1. On donne $\cos \widehat{EFG} = 0{,}75$. Détermine $\sin \widehat{EGF}$ puis une valeur approchée de $\widehat{EGF}$ à 1° près par excès.
2. On donne $\sin \widehat{EGF} = \frac{3}{5}$. Détermine en degrés une valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près par excès de $\widehat{EFG}$.

Exercice 22

Dans cet exercice, on utilise le mot pente qui s'exprime souvent par un pourcentage. Par exemple, dire que la pente d'une route est de 5 % signifie que si on se déplace de 100 m sur l'horizontal, l'élévation de la route est de 5 m.

Pente = 5 % signifie que $\tan \alpha = 0{,}05$.



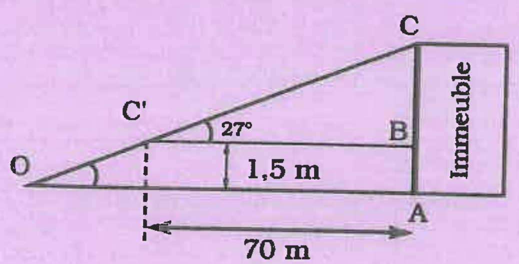
Calcule une valeur approchée de l'angle que fait une route rectiligne avec l'horizontale si la pente est de 10 % ; 13 % ; 5 %.

Exercice 23

Une route supposée rectiligne s'élève de 17,575 m sur une distance de 185 m. Calcule sa pente.

Exercice 24

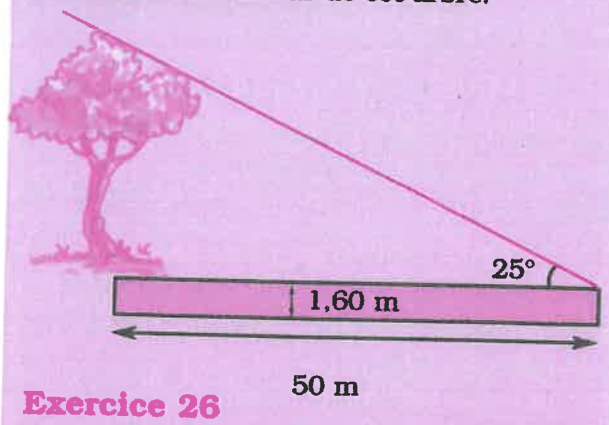
1. Quelle est la hauteur de cet immeuble ?



2. Sachant que cet immeuble compte 12 étages et que le rez-de-chaussée a une hauteur de de 3,5 m, quelle est la hauteur de chaque étage ?

Exercice 25

Détermine la hauteur de cet arbre.

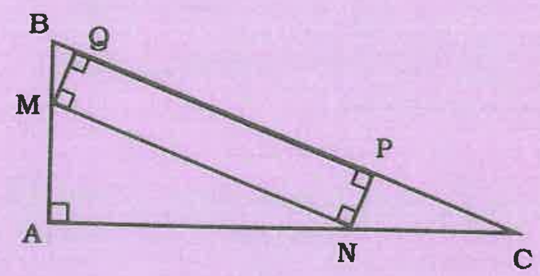


Exercice 26

1. Construis un losange CASE de côté 6 cm tel que l'angle $\widehat{CAS} = 60°$.
2. Calcule la longueur des diagonales de ce losange.

Exercice 27

On donne la figure suivante où ABC est un triangle rectangle en A et MNPQ un rectangle. On pose AM = x cm et MN = $\frac{5}{3}x$ cm. AB = 6 cm ; AC = 8 cm.



Calcule BC puis $\sin \widehat{ABC}$ dans le triangle ABC.

1. Exprime $\sin \widehat{ABC}$ en fonction de x et de MQ dans le triangle MBQ.
2. Déduis des deux questions MQ en fonction de x.
3. Détermine x pour que le quadrilatère MNPQ soit un carré.

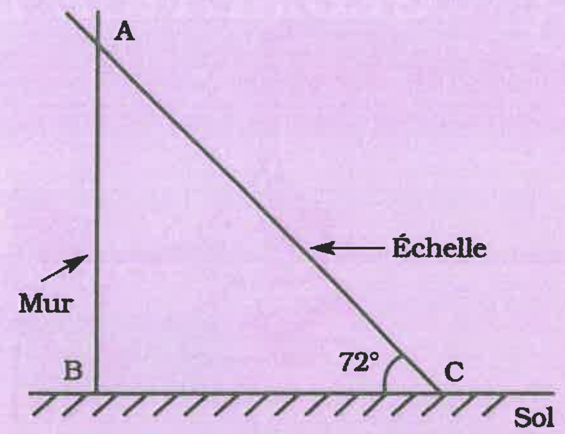
Exercice 28

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 cm et AC = 4 cm.

1. Calcule BC puis construis la figure.
2. Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]. On donne $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$. Calcule BH,CH puis AH.
3. La parallèle à la droite (AH) passant par C coupe (AB) en E. Calcule AE et déduis-en EC.
4. Calcule $\sin \widehat{E}$.
5. Fais une figure complète.

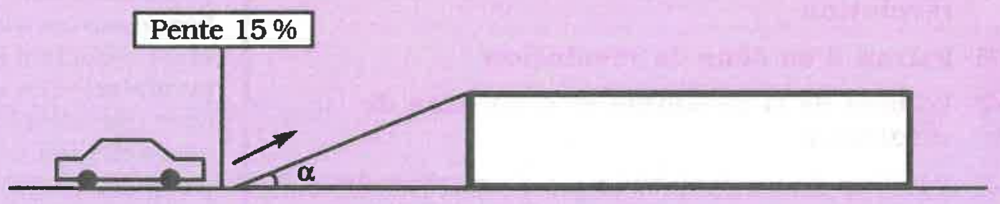
Exercice 29

Une échelle est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de 72° avec le sol horizontal. Le pied de l'échelle est à 1,5 m du pied du mur (voir figure).



1. Calcule la longueur de l'échelle en prenant $\cos 72° = 0{,}30$.
Détermine à 10^{-1} près la hauteur à laquelle se trouve le point d'appui de l'échelle sur le mur.

Solution de la situation problème



Calcule l'angle de l'inclinaison α que fait la route avec l'horizontale.
Calcule $\tan \alpha = 15\,\% = 0{,}15$.
Détermine α à l'aide de la calculatrice à 0,01° près par excès.

CHAPITRE

3 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

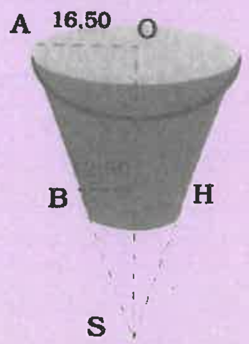
Sommaire

Introduction

L'étude de la géométrie dans l'espace entamée dans les classes précédentes sera poursuivie en classe de troisième avec l'étude de la pyramide et du cône de révolution. Ici, on utilisera beaucoup les notions de patron et de réduction (de cône ou de pyramide). Ces deux notions sont très utilisées dans la vie courante. Par exemple, les patrons sont utilisés dans la confection des habits et la notion de réduction est utilisée en architecture pour les maquettes.

Situation problème

La figure ci-contre représente un seau dont les dimensions sont les suivantes :
Le rayon du rebord supérieur est 16,50 cm, celui du fond est 12,50 cm et la profondeur OH est de 27 cm.
Calcule le volume de ce seau.



3.1 Présentation d'une pyramide

Compétences exigibles

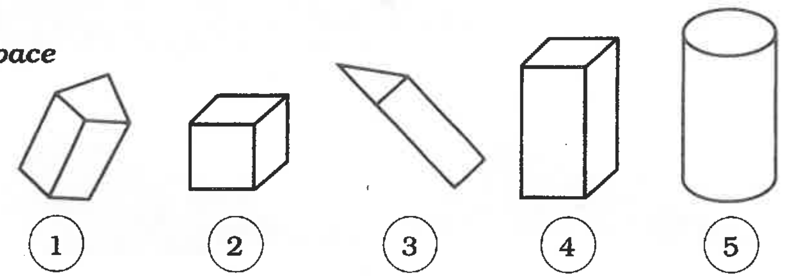
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et de décrire une pyramide.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Reconnaissance d'un solide de l'espace

1. Pour chacun de ces solides :
   a) Donne la forme.
   b) Donne si possible :
   – le nombre de sommets,
   – le nombre d'arêtes,
   – le nombre de faces,
   – le nombre de bases.
   c) Donne la forme géométrique de chaque base.
2. Donne la position à partir de laquelle tu vois chacun des solides ci-dessus.



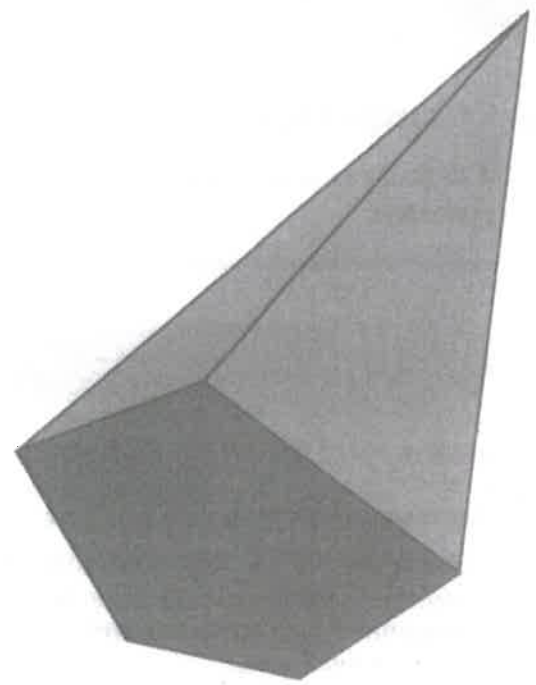
Activité 2.

Présentation et description d'une pyramide

On donne le solide ci-contre.

1. Donne la position à partir de laquelle ce solide est observé.
2. Donne le nombre de sommets, d'arêtes, de faces, de bases.
3. a) Remarques-tu un sommet qui est joint à chacun des autres par une arête ? Indique-le.

   b) Ce sommet est opposé à une face et n'appartient pas au plan de celle-ci. Quelle figure est représentée par cette face ?
   Ce solide est appelé une pyramide.



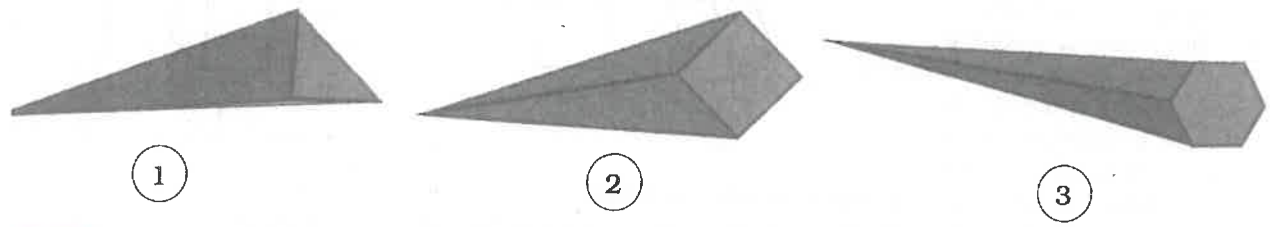
À Retenir

Vocabulaire

Une pyramide comprend :
- une base qui est un polygone,
- un sommet n'appartenant pas au plan contenant ce polygone (ce sommet représente le sommet de la pyramide et le polygone, sa base),
- des faces latérales qui sont des triangles.

B. Exercices d'application

Décris chacun des solides suivants :



3.2 Représentation plane d'une pyramide

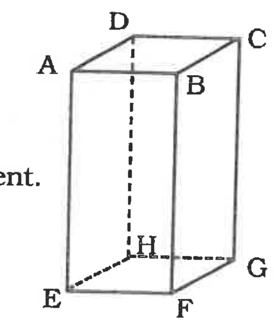
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de faire une représentation plane d'une pyramide.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Représentation plane d'un solide

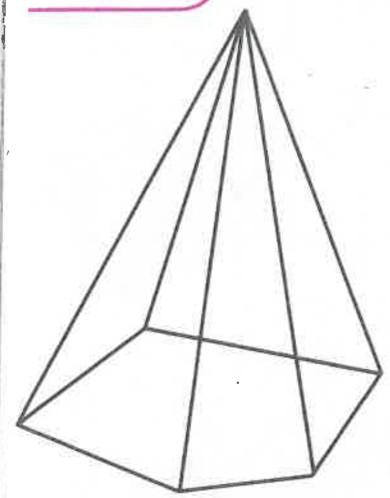


Cette figure est une représentation plane d'un solide.

1. a) Nomme cette figure et le type de représentation à laquelle elle appartient.
   b) Nomme les sommets, les arêtes et les faces.
   c) Nomme les bases.

2. a) Donne la position à partir de laquelle ce solide est observé et explique pourquoi [EF] est horizontal alors que [FG] est oblique.
   b) Explique pourquoi [EF] est en trait plein alors que [HG] est en pointillés.
   c) Nomme les arêtes perpendiculaires à [AE], orthogonales à [AE].
   d) Nomme les faces perpendiculaires à [AE].
   e) [AE] peut-il représenter la hauteur de cette figure ? Justifie ta réponse.
   f) Nomme les arêtes parallèles à [AD].

Activité 2.



Représentation plane d'une pyramide en fil de fer

1. a) Présente devant une source lumineuse (soleil, projecteur) une pyramide en fil de fer puis un écran blanc.
   b) Marque à la craie de couleur, l'ombre de la pyramide obtenue sur l'écran.
   Tu viens de réaliser une représentation plane de cette pyramide en fil de fer.
   c) Mesure la longueur d'une arête de la pyramide en fil de fer et sa longueur sur le dessin, puis détermine l'échelle qui a été appliquée.
   d) Sur le dessin, mesure l'angle formé par une droite horizontale et un côté oblique de la base.
2. Change la position de la source lumineuse et reprends l'expérience précédente avec les mêmes questions.
3. Compare les deux représentations planes ainsi obtenues de cette pyramide.

Activité 3.

Représentation plane d'une pyramide

1. Reprends la partie a) de l'activité 2.
2. a) Ensuite, sans déplacer la pyramide, habille-la avec du carton opaque et observe-la à partir de la position de la source lumineuse.
   b) Applique alors une règle de la perspective cavalière pour placer correctement les pointillés sur le dessin que tu as obtenu à l'écran. Quelle est cette règle ?
   Tu viens de réaliser une représentation plane de cette pyramide.
   c) Trace la hauteur d'une face latérale.

Activité 4.

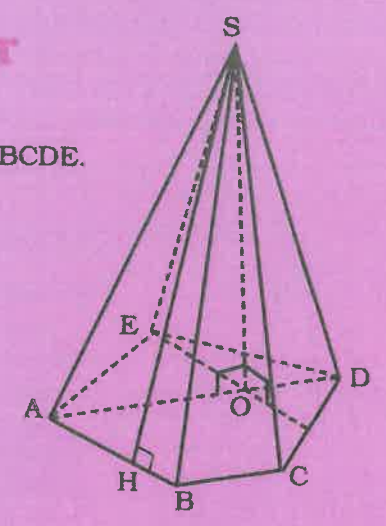
Pyramide régulière

SABCD est une pyramide régulière à base carrée telle que AB = 3 cm et SA = 7 cm.

1. Représente ABCD par un parallélogramme avec [AB] horizontal et AB = 3 cm et BC = 2 cm.
2. Construis le point S tel que le triangle SAB (vue de face) soit isocèle en S avec SA = 7 cm.
3. Joins les sommets B, C et D au point S (les arêtes non visibles sont en pointillés).
4. Les diagonales du carré ABCD se coupent en O. Le segment [SO] représente la hauteur de la pyramide SABCD.
5. Construis la hauteur [SE] du triangle SAB. Cette hauteur est un apothème de la pyramide.

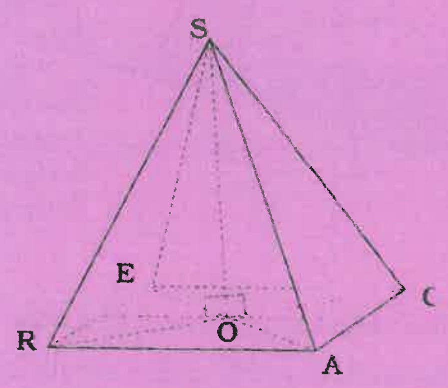
À Retenir

Vocabulaire
Le polygone ABCDE est la base de la pyramide SABCDE.
Le triangle SAB est une face latérale.
S est le sommet de la pyramide.
[AS] est une arête latérale.
[SO] est la hauteur de la pyramide.
[SH] est un apothème de la pyramide.



Définition
- Si la base d'une pyramide est un polygone régulier (qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux) et si sa hauteur passe par le centre de ce polygone régulier, alors cette pyramide est dite régulière.
- Si la base est un triangle, alors cette pyramide est appelée un tétraèdre.
- Si la base est un triangle équilatéral et la hauteur passe par le centre de ce triangle, alors cette pyramide est appelée un tétraèdre régulier.

Propriété
Si une pyramide est régulière, alors chacune de ses faces est un triangle isocèle.



Pyramide régulière à base carrée

B. Exercices d'application

Soit ALUT un carré de côté 6 cm. Fais la représentation plane de la pyramide SALUT avec SO = 4 cm. Le point O étant le centre du carré ALUT.

3.3 Patron d'une pyramide

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de dessiner le patron d'une pyramide.

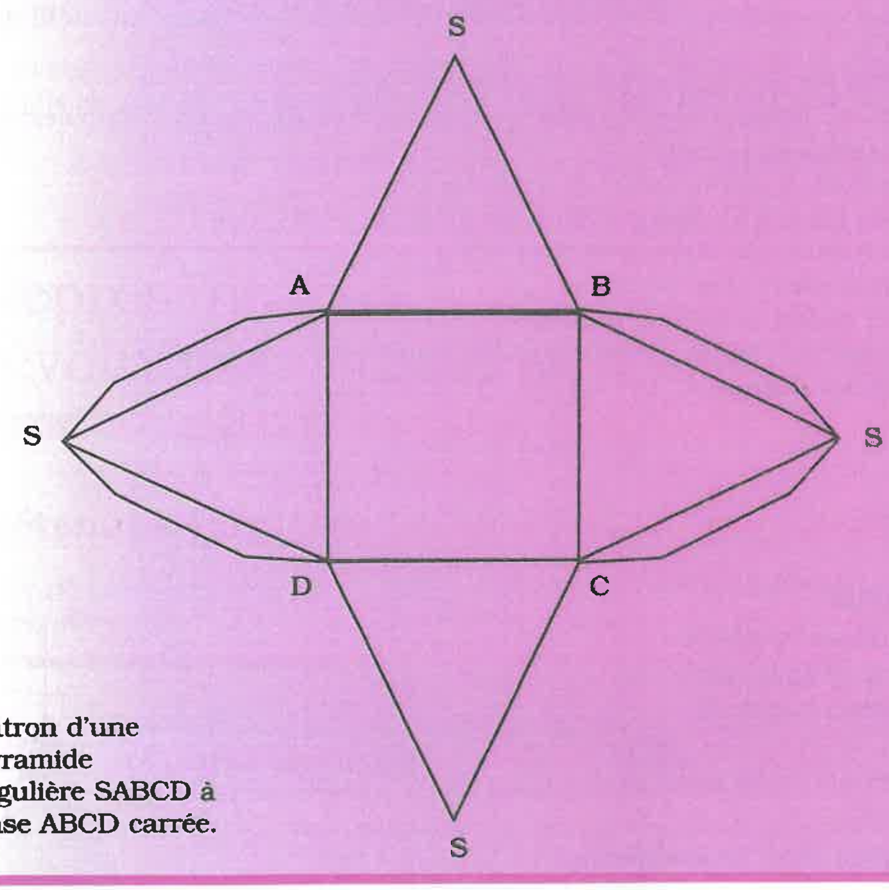
A. Activités préparatoires

Activité 1.

Patron et maquette

1. Construis un carré ABCD de 3 cm de côté.
2. Construis quatre triangles isocèles dont la base est un côté du carré et dont les côtés égaux mesurent 4 cm.
3. Sur les côtés égaux de deux triangles isocèles dont les bases sont des côtés opposés du carré, construis des onglets en forme de trapèze isocèle dont la petite base mesure 3 cm et la hauteur, 2 cm (voir figure ci-dessous).

À Retenir



Patron d'une pyramide régulière SABCD à base ABCD carrée.

B. Exercices d'application

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 cm. Dessine le patron d'une pyramide SABC ayant pour base le triangle équilatéral ABC.

3.4 Présentation d'un cône de révolution

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et de décrire un cône de révolution.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Cône

Dans un morceau de carton posé horizontalement est planté verticalement un fil de fer droit de 10 cm de hauteur.
Un verseur est orienté vers l'extrémité libre de ce fil de fer.

1. Depuis le verseur laisse couler du sable le long du fil de fer. Au bout d'un certain temps, le tas de sable s'élève en pointe.
   Tu viens d'obtenir un tas de sable en forme de cône.
2. Verse du sable jusqu'à atteindre le bout du fil de fer.
   Quelle est la hauteur du cône ainsi obtenu ?
   Le fil de fer représente l'axe du cône.
3. Marque sur le carton le contour du cône.
   Comment s'appelle la figure géométrique que représente ce contour ?
4. Montre la surface latérale.

Activité 2.

Cône de révolution

On considère la figure ci-contre :

1. Fait tourner le triangle ABC rectangle en B autour de la droite (AB).
2. Quel solide as-tu l'impression de voir ? (fig. 2)

Ce cône est appelé cône de révolution

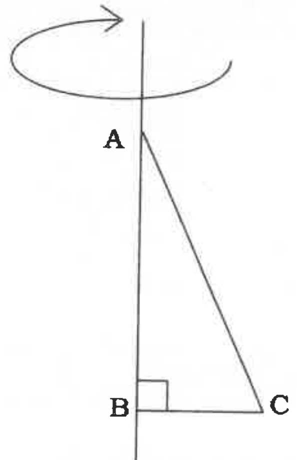


fig 1

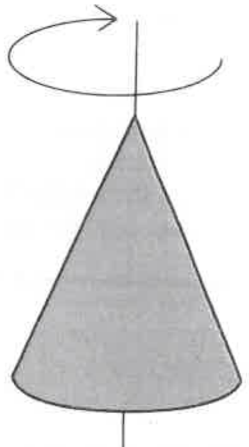
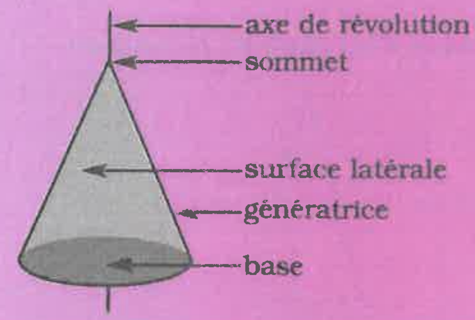


fig 2

À Retenir

Vocabulaire

Un cône est un solide dont la base est un disque, les points du cercle de base sont reliés à un point fixe appelé sommet.



B. Exercices d'application

Construis un triangle quelconque ABC. Fais tourner ce triangle autour de la droite (AB).
Recopie et remplis les pointillés convenablement : j'obtiens un solide dont la base est .... et dont le .... est A. Ce solide .... un cône de révolution car ....

3.5 Représentation plane d'un cône de révolution

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de faire une représentation plane d'un cône de révolution.

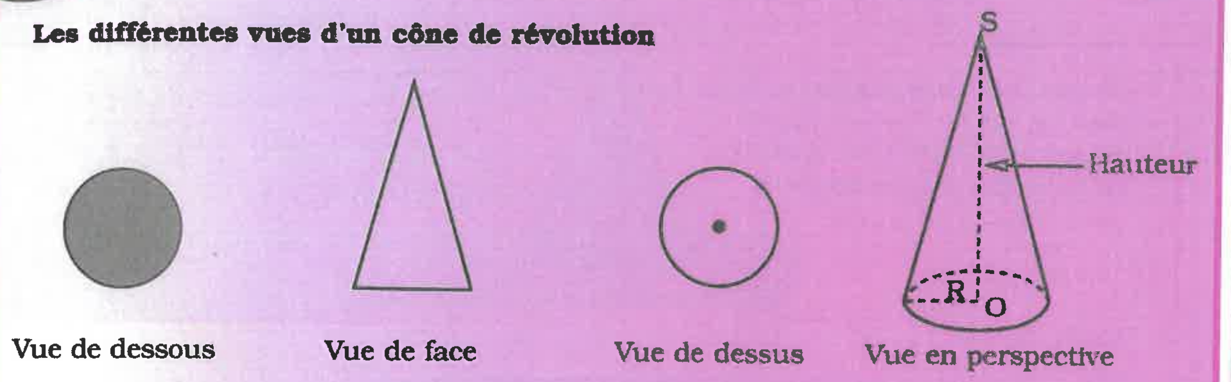
A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Place un solide en forme de cône entre la source lumineuse d'une lampe torche et un écran blanc de telle sorte qu'il se projette sur l'écran.
2. a) Marque à la craie de couleur sur l'écran, l'ombre obtenue du cône.
   b) Applique une règle de la perspective cavalière pour placer correctement les pointillés sur le dessin. Tu viens de réaliser une représentation plane du cône.

À Retenir

Les différentes vues d'un cône de révolution



B. Exercices d'application

Effectue en vraie grandeur les représentations planes du cône de révolution d'axe (AH) tel que AH = 7 cm et le rayon de base est de 3 cm.

3.6 Patron d'un cône de révolution

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de dessiner le patron d'un cône de révolution.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Patron et maquette d'un cône

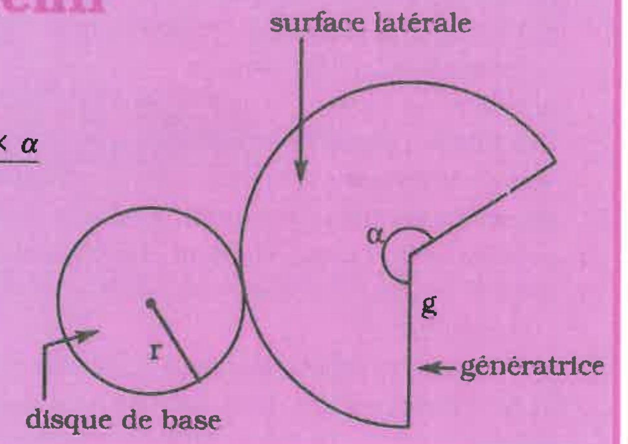
1. Trace sur une feuille de papier un cercle ($\mathscr{C}$) de centre S et de rayon 7,5 cm.
2. Construis un angle de 216° et de sommet S. Ses côtés coupent le cercle ($\mathscr{C}$) en A et B.
3. Trace un cercle ($\mathscr{C}'$) de diamètre 9 cm et tangent à l'arc de cercle contenu dans l'angle de 216°.

4. Découpe les deux cercles sans les détacher ainsi que l'angle.
   Tu viens de réaliser le patron d'un cône.
5. Plie le morceau de papier de manière à faire coïncider [SA] et [SB] ensuite ferme le fond par le disque du cercle ($\mathscr{C}'$).
   Tu viens de réaliser la maquette d'un cône.

À Retenir

- Périmètre du disque de base $= \dfrac{\pi \times 2g \times \alpha}{360°}$

- Aire latérale $= \pi \times r \times g$



B. Exercices d'application

Dessine le patron du cône de rayon de base 2 cm et hauteur 6 cm.

3.7 Volume de la pyramide et du cône de révolution

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Calcul du volume d'un prisme droit et d'un cylindre de révolution.

1. a) Exprime le volume V du prisme à l'aide de l'aire B de la base et de la hauteur h.
   b) Calcule le volume d'un prisme droit de longueur 40 cm, de largeur 25 cm, de hauteur 90 cm.
2. a) Exprime le volume V du cylindre à l'aide de l'aire B de la base et de la hauteur h.
   b) Calcule le volume d'un cylindre droit de hauteur 80 cm et dont le disque de base a pour rayon 15 cm.

Activité 2.

1. a) Fabrique la maquette d'un prisme droit à bases carrées.
   b) Enlève l'une de ses bases.
2. a) Fabrique la maquette d'une pyramide régulière à base carrée ayant même hauteur et même base que le prisme.
   b) Enlève sa base.
3. Remplis la pyramide de sable et tasse-le bien.
4. Verse entièrement le contenu de la pyramide dans le prisme droit en le tassant bien. Recommence jusqu'à remplir le prisme droit à ras bord.
5. Le volume du prisme contient combien de fois celui de la pyramide ?
6. a) Si V^1 désigne le volume du prisme droit et V celui de la pyramide, exprime alors V^1 en fonction de V.
   b) Déduis-en l'expression de V en fonction de V^1.
7. a) Si B désigne l'aire de la base et h la hauteur, exprime V^1 à l'aide de B et **h**.
   b) Déduis-en l'expression de V en fonction de B et h.

Activité 3.

Reprends l'activité 2 ci-dessus en remplaçant partout le prisme par un cylindre de révolution et la pyramide par un cône de révolution ayant la même hauteur et le même disque de base que le cylindre (le reste est sans changement).

À Retenir

Le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution d'aire de base B et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3} B \times h$

B. Exercices d'application

1. Un objet d'art a la forme d'une pyramide. Cette pyramide a une base rectangulaire de 7 cm de longueur sur 5 cm de largeur et une hauteur de 13 cm. Cet objet est en laiton de masse volumique 8,9 g/cm^3. Détermine la masse de cet objet.
2. Un flacon a la forme d'un cône de 18 cm de rayon de base et 25 cm de hauteur. Détermine la contenance de ce flacon.

3.8 Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

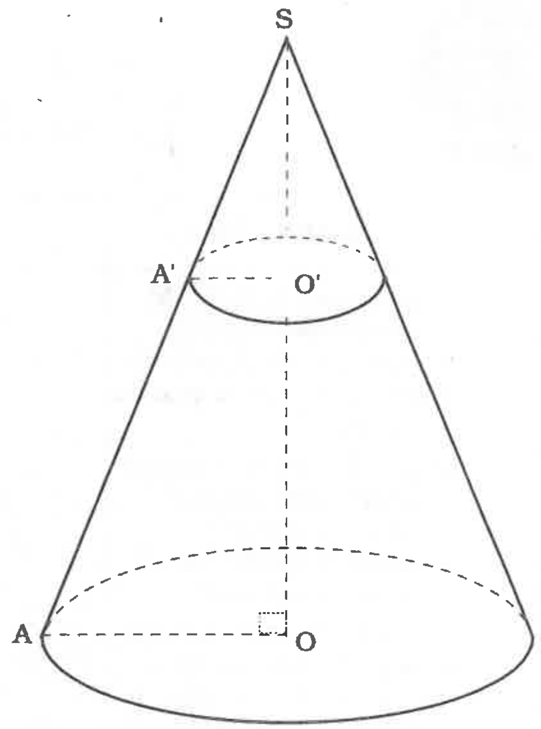
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On coupe le cône en A' par un plan parallèle au disque de base. Le rayon est [OA] et [SO], la hauteur. On donne $SA' = \frac{1}{3}$ SA.



Partie A : *Les longueurs*

1. a) Démontre que [O'A'], rayon du disque de base du petit cône, est perpendiculaire à (SO').
   b) Déduis-en que (OA) est parallèle à (O'A').
2. Utilise le théorème de Thalès pour écrire les égalités qui traduisent la proportionnalité des côtés correspondants des triangles SO'A' et SOA.
3. Utilise les égalités obtenues au point 2 pour compléter les égalités suivantes :
   SO' = ... SO (1)
   O'A' = ... OA (2)

Partie B : *Les aires*

1. Exprime, à l'aide du rayon OA, l'aire B du disque de base du grand cône.
2. Utilise l'égalité (2) de la question 3 de la partie A pour compléter l'égalité : $B = \pi \times ...O'A'^2$
3. a) Exprime l'aire B' du disque de base du petit cône à l'aide de O'A', puis exprime B en fonction de B'.
   b) Déduis-en une expression de B' à l'aide de B.

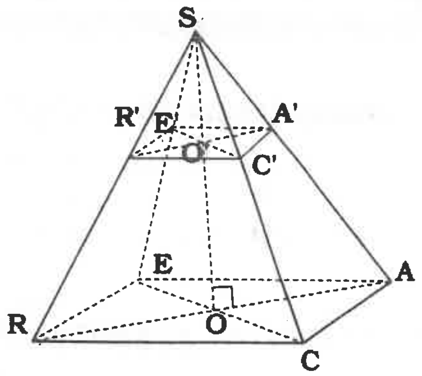
Partie C : *Les volumes*

1. Exprime le volume V du grand cône à l'aide de B et de SO.
2. Exprime le volume V' du petit cône à l'aide de B' et de SO'.
3. Utilise la réponse à la question de la partie A et celle à la question 3b) de la partie B pour exprimer V en fonction de B' et SO'.
4. a) Utilise les réponses obtenues à la question 1 de la partie C pour exprimer V en fonction de V'.
   b) Déduis-en une expression de V' à l'aide de V.

Activité 2.

SACRE est une pyramide régulière à base carrée ACRE. La section de cette pyramide par un plan parallèle à sa base est A'C'R'E'. Le point O est le centre de la base ACRE et [SO] la hauteur. On donne

$SA' = \frac{1}{3} SA$.



1. Reproduis cette figure.

2. a) Utilise Thalès pour démontrer que $SO' = \frac{1}{3} SO$

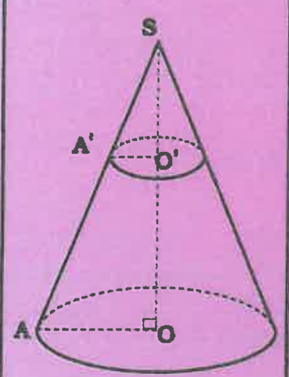
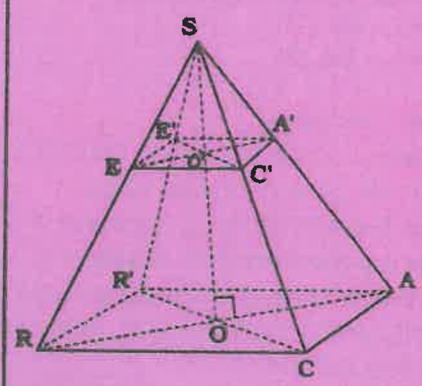
et $A'C' = \frac{1}{3} AC$.

b) Déduis-en que A'C'R'E' est un carré.

3. Exprime l'aire B' de A'C'R'E' en fonction de l'aire B de ACRE.

4. Exprime le volume V' de la pyramide SA'C'R'E' en fonction du volume V de la pyramide SACRE.

À Retenir

VOCABULAIRE	CONFIGURATIONS	
– Le petit cône et la petite pyramide sont respectivement des réductions du grand cône et de la grande pyramide. – Le grand cône et la grande pyramide sont respectivement des agrandissements du petit cône et de la petite pyramide. – La partie du cône ou celle de la pyramide comprise entre la base et le plan de section est appelée respectivement tronc de cône ou tronc de pyramide.		

Si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3. Si $\frac{SO'}{SO} = K$, alors $\mathscr{A}' = K^2 \times \mathscr{A}$ et $V' = K^3 \times V$.

B. Exercices d'application

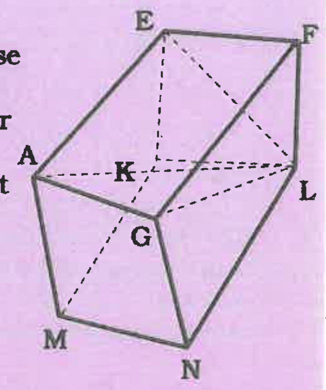
1. On considère un cône de 20 cm de rayon de base et 14 cm de hauteur. Détermine le volume de ce cône. On coupe ce cône par un plan parallèle à la base à 8 cm de la base. Détermine le volume de ce tronc de cône.

2. Un flacon a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases sont des carrés ayant pour côtés 12 cm et 5 cm. Sa hauteur mesure 9 cm. Détermine la contenance de ce flacon.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

AEFGNMKL est un pavé droit dont la base est un rectangle dont la longueur, la largeur et la profondeur ont respectivement 9, 7 et 5 cm. Détermine le volume de ce pavé droit et celui de la pyramide LAEFG, de base AEFG et de sommet L.



Exercice 2

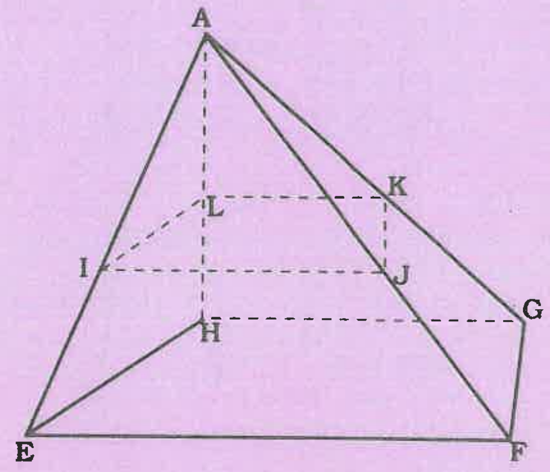
Un cône de révolution a un rayon de base de 12 cm et une hauteur de 15 cm. Détermine le volume de ce cône.

Exercice 3

Un cône a pour rayon de base 4 cm et une hauteur de 13 cm. On coupe ce cône par un plan parallèle à la base selon un cercle de 1,5 cm de rayon. On obtient ainsi un tronc de cône servant de flacon à parfum. Détermine la contenance de ce flacon.

Exercice 4

1. Une cage a la forme d'une pyramide à étage de hauteur AH = 85 cm. La pyramide a une base en forme de trapèze rectangle de hauteur HE = 30 cm. L'étage est obtenu en coupant la pyramide par un plan parallèle à la base à la distance AL = 35 cm du sommet A.
Détermine le volume de chaque partie de cette cage.



2. Le trapèze EFGH a pour bases HG = 65 cm et EF = 105 cm. Détermine l'aire de chaque plate-forme.

Exercice 5

Un entonnoir a la forme d'un cône de rayon de base de 5 cm et une hauteur de 12 cm. Quel volume de liquide peut contenir cet entonnoir ?

Exercice 6

Un prisme droit a une base en forme d'hexagone régulier de 7 cm de côté et 16 cm de hauteur.

1. Détermine le volume de ce prisme.

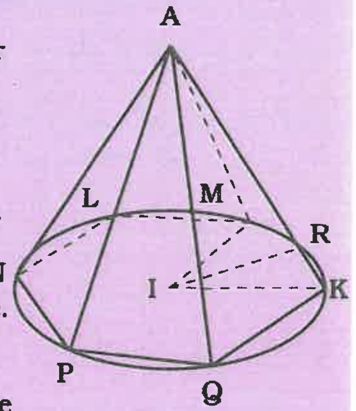
2. Ce prisme contient un médicament liquide qu'on veut mettre dans des flacons de 5 cm^3. Combien de flacons pourra-on remplir ?

3. Quelle quantité de médicament restera-il ?

Exercices de synthèse

Exercice 7
Un prisme droit a pour base un carré inscrit dans un cercle de 12 cm de diamètre. Sa hauteur mesure 21 cm. Fais le schéma de cette pyramide en prenant une échelle convenable. Détermine :
- L'aire de base de cette pyramide.
- L'aire latérale de cette pyramide.
- Le volume de cette pyramide.

Exercice 8
Une pyramide a une base en forme d'hexagone régulier inscrite dans un cercle de 11 cm de rayon. Cette pyramide a une hauteur de 23 cm. Détermine :
- L'aire de base de cette pyramide.
- L'aire latérale de cette pyramide.
- Le volume de cette pyramide.

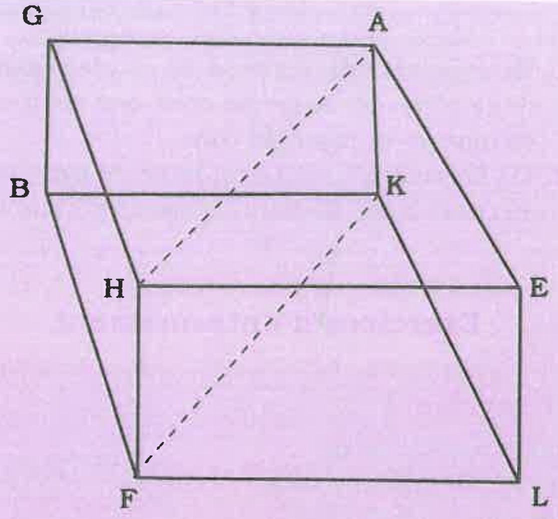


Exercice 9
Un tétraèdre régulier a pour arête 25 cm. On entoure ce solide par une boule telle que les sommets du tétraèdre soient éléments de la sphère. Quelle est le volume de boule qui est non occupé par le tétraèdre ?

Exercice 10
Une tente de campement a la forme d'un prisme dont les bases sont des triangles équilatéraux de 7 m de côté. Cette tente a une longueur de 30 m. Quel est le volume emprisonné dans cette tente lorsqu'elle est tendue ?

Exercice 11
Un aquarium a la forme d'un pavé droit de 85 cm de longueur, 55 cm de largeur et 35 cm de profondeur. On veut y mettre deux espèces différentes de poissons. Pour cela on sépare l'aquarium en deux comparti-ments à l'aide du rectangle FHAK.

1. Détermine l'aire de ce rectangle.



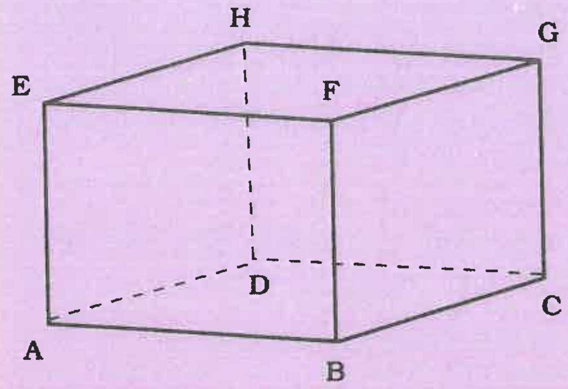
2. Quel volume d'eau peut contenir cet aquarium ?
3. Dans un premier temps, on n'utilise que l'un des compartiments. Détermine de deux façons différentes la quantité d'eau qu'il faut pour le remplir si l'on néglige le volume des poissons.

Exercice 12
Le monument de l'indépendance a la forme d'une pyramide régulière dont la base est un carré de 60 m de côté, chaque face étant un triangle isocèle de 40 m de hauteur. Détermine la hauteur de cette pyramide et son volume.

Exercice 13
Une pyramide SABC a pour base un triangle ABC. On marque les points E sur [SA], F sur [SB] et G sur [SC]. Construis ce tétraèdre et détermine en justifiant tes constructions, les intersections du plan FEG avec les faces du tétraèdre.

Exercice 14
Soit quatre points de l'espace PQRT non tous coplanaires et trois à trois non alignés. Ces quatre poins forment un tétraèdre de sommet T. On marque trois points G, A et F respectivement sur les faces TPQ, TRQ et TRP. Construis ce tétraèdre et détermine en justifiant tes constructions, les intersections du plan FAG avec les faces du tétraèdre.

Exercice 15
On considère le pavé droit ci-dessous dans lequel AB = 8 cm ; BF = 6 cm et BC = 5 cm. Détermine les longueurs EB et EC ainsi que le volume de la pyramide de base BFGC, de sommet D.



Exercice 16
Un cône a une hauteur de 25 cm et un rayon de base de 8 cm. Détermine l'aire de base de ce cône et le volume de ce cône. Fais un schéma.

Exercice 17
Un silo de graines d'arachide a la forme d'un cône de 70 m de diamètre de base et de 15 m de hauteur. Détermine l'aire occupée par ce silo et le volume de graines d'arachide ainsi emmagasinées.

Exercice 18
Un entonnoir a la forme d'un tronc de cône. Il a été obtenu en coupant un cône de 12 cm de diamètre de base et 18 cm de hauteur par un plan parallèle à la base à 13 cm de celle-ci. Détermine la contenance de cet entonnoir.

Exercice 19
Construis le cube ABCDEFGH (figure de l'exercice 15) de 9 cm d'arête. Marque les points P,Q,R milieux respectifs des arêtes [AB], [AD] et [AE].
1. Détermine l'aire du triangle PQR.
2. Quelle est la nature du solide APQR ? Détermine son volume.

Exercice 20
Un chapeau de paille a la forme d'un cône de révolution de 20 cm rayon de base et 40 cm de hauteur. Détermine l'aire de base de ce chapeau et le volume qu'il délimite, si on le pose sur une surface plane.

Exercice 21
Une cloche en forme de cône a pour dimensions : hauteur 15 cm, génératrice 25 cm. Détermine l'aire de base de cette cloche et le volume d'air qu'elle peut emmagasiner, si on la pose sur une surface plane.

Exercice 22
Le rayon de base d'un cône de révolution mesure 13 cm et fait un angle de 60° avec l'une quelconque de ses génératrices. Détermine le volume de ce cône.

Exercice 23
Un cône de révolution a une génératrice qui mesure 38 cm et qui fait un angle de 30° avec sa hauteur. Détermine l'aire de base de ce cône et son volume.

Exercices d'approfondissement

Exercice 24
Une case ronde a 4,5 m de rayon de base et 2,5 m de hauteur. La toiture de chaume de cette case a la forme d'un cône de 5 m de rayon de base et de 2 m de hauteur. Détermine l'aire latérale de cette case, celle de la toiture et le volume de la case recouverte de sa toiture.

Exercice 25
On considère un rectangle PQRS tel que PQ = 12 cm et PS = 8 cm, un point A de l'espace tel que la droite (AP) soit perpendiculaire au plan contenant le rectangle PQRS et AP = 12 cm. Fais une figure et détermine les longueurs AQ et AR. Calcule le volume de la pyramide de sommet A et de base PQRS.

Exercice 26

On considère une droite (AB) avec AB = 15 cm. On fait tourner autour de cette droite le segment [AE] de 30 cm et qui fait un angle de 30° avec [AB].

1. Quelle est la nature du triangle AEB ?
2. Quelle est la nature du solide ainsi engendré ? Détermine son aire de base et son volume.

Exercice 27

ABCDEFGH est un pavé droit tel que l'angle $\widehat{ABD}$ soit égal à 30°. AD = 4 cm, DE = 6 cm. On prendra sin 30° = 0,5 ; cos 30° = 0,87 ; tan 30° = 0,58.

1. Calcule BD.
2. Dessine le triangle ADE en vraie grandeur puis calcule AE.
3. On note M le milieu de [ED] et N le milieu de [EB]. Démontre que (MN) est parallèle à (DB).
4. Calcule le volume de la pyramide dont la base est le triangle ADE et qui a pour sommet le point B.
5. Dessine son patron.

Exercice 28

Un récipient a la forme d'un tronc de cône de 8,4 m de diamètre de base et 5 m de hauteur.

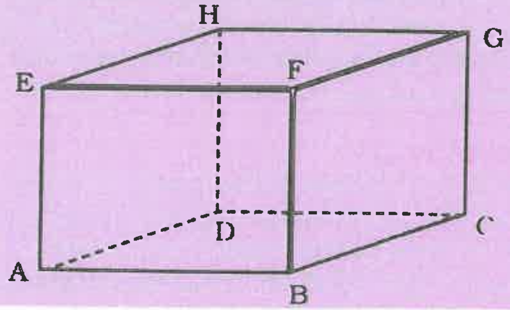
On veut le remplir avec un robinet qui débite 7,5 L par minute. Combien de temps cela prendra-t-il ?

Exercice 29

Un industriel dispose d'un cylindre dont le diamètre et la hauteur sont respectivement 18 et 15 cm. Il est rempli de crème glacée. On met cette crème dans des cornets coniques de 5 cm de diamètre de base et 15 cm de hauteur. Combien de cornets pourra-t-on remplir ?

Exercice 30

Un aquarium a une base carrée de 0,3 m de côté et 1 m de hauteur. On le coupe par un plan parallèle à la base à 0,25 m du sommet. Détermine la contenance de cet aquarium. Pour le remplir, on se sert de pots cylindriques de 15 cm de hauteur et 18 cm de diamètre. Combien de pots faut-il déverser pour remplir l'aquarium ?



Solution de la situation problème

Les triangles SHB et SOA étant en position de Thalès, on a : $\frac{BH}{AO} = \frac{SH}{SO}$.

Ce qui permet d'écrire :

$BH \times SO = SH \times AO$; $BH\,(SH + HO) = SH \times AO$; $SH\,(AO - BH) = BH \times HO$

$$SH = \frac{BH \times HO}{AO - BH} = 84{,}375 \text{ cm}$$

SO = SH + HO = 84,375 cm + 27 cm = 111,375 cm.

Volume du seau : V_s ; volume du grand cône : V_{gc} ; volume du petit cône : V_{pc}.

$V_s = V_{gc} - V_{pc}$; $V_{gc} = \frac{1}{3} \times \beta \times OS$; $V_{pc} = \frac{1}{3} \times \beta' \times SH$

- Calcul de β : $\beta = \pi \times OA^2$; $\beta = 272{,}25\pi$
- Calcul de β' : $\beta' = \pi \times BH^2$; $\beta' = (12{,}5)^2\pi$

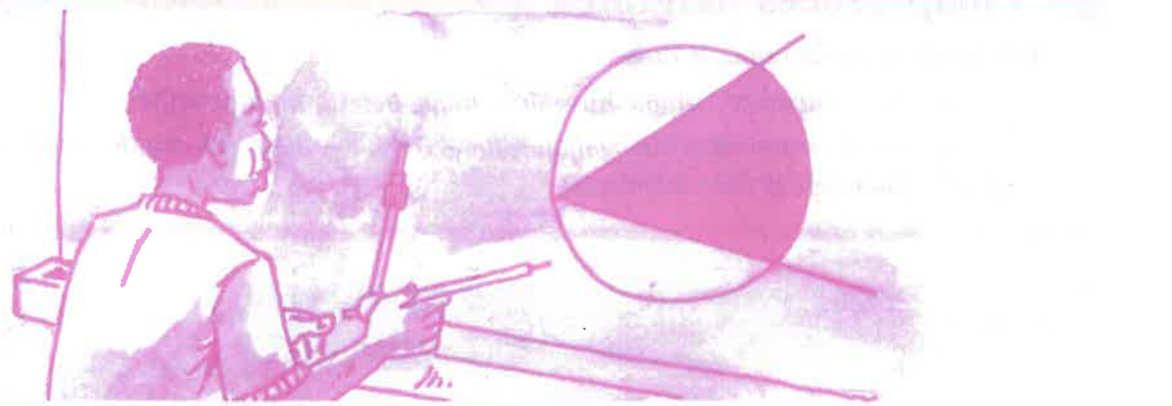
$$V_{gc} = \frac{1}{3} \times \beta \times OS = \frac{1}{3} \times 272{,}25\pi \times 111{,}375 = 31\,736{,}863 \text{ cm}^3$$

$$V_{pc} = \frac{1}{3} \times \beta' \times SH = \frac{1}{3} \times (12{,}5)^2\pi \times 84{,}375 = 13\,798{,}83 \text{ cm}^3$$

$$V_s = 31\,736{,}863 \text{ cm}^3 - 13\,798{,}83 \text{ cm}^3 = 17\,938{,}0330 \text{ cm}^3$$

CHAPITRE

4 ANGLE INSCRIT



Sommaire

Introduction

Les notions « d'angle au centre » et « d'angle inscrit » sont très utilisées chez les sportifs et plus particulièrement chez les footballeurs qui s'en servent pour déterminer l'angle de tir optimal par rapport au milieu du terrain ou à la ligne de touche.

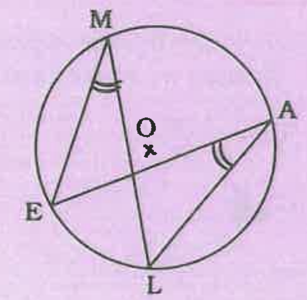
Ce chapitre consacré aux « angles inscrits » est un prolongement du chapitre intitulé « angle au centre » étudié en classe de quatrième.

Son étude sera poursuivie en classe de seconde.

Situation problème

Soit la figure suivante.

Démontre que $\widehat{EML} = \widehat{EAL}$



4.1 Présentation - Définition

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

– connaître le vocabulaire : angle au centre, angle inscrit, arc intercepté ;

– être capable de reconnaître les configurations dans les différents cas de l'angle au centre avec l'angle inscrit et l'arc intercepté.

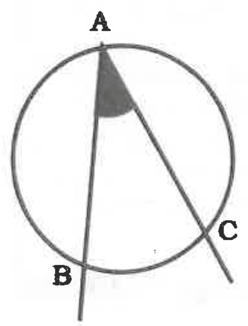
A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Trace un cercle $\mathscr{C}$ (o ; r).
2. Place deux poins distincts A et B sur ($\mathscr{C}$) tels que AB ne soit pas un diamètre.
3. Recopie et complète : le sommet de $\widehat{AOB}$ coïncide avec le ..... du cercle ($\mathscr{C}$).
   L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre.
4. Marque en rouge l'intersection du secteur angulaire $\widehat{AOB}$ avec le cercle ($\mathscr{C}$).

Activité 2.

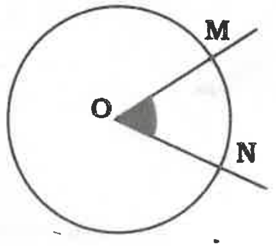
Considère la figure suivante :

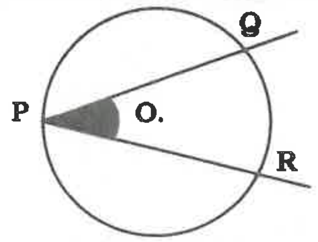


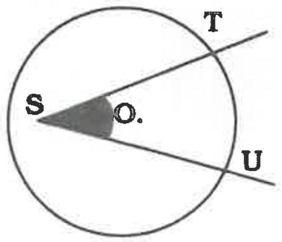
1. Où se trouve le sommet de l'angle $\widehat{BAC}$?
2. En combien de points distincts les côtés de l'angle $\widehat{BAC}$ coupent-ils le cercle ? Quels sont ces points ?
3. Marque en rouge l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point A. L'angle $\widehat{BAC}$ qui a pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts B et C est appelé angle inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$).
   On dit que l'angle $\widehat{BAC}$ intercepte sur ($\mathscr{C}$) l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point A.

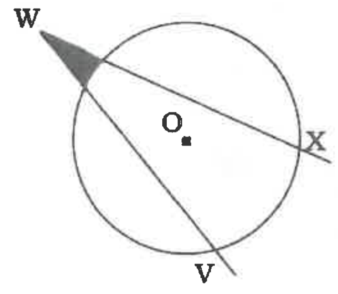
Activité 3.

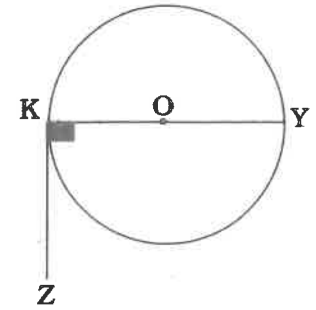
Pour chacune des figures suivantes, indique si l'angle marqué est un angle inscrit. Justifie ta réponse. Marque en rouge l'arc intercepté par l'angle inscrit.

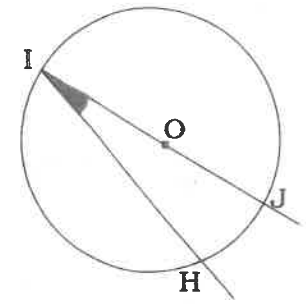










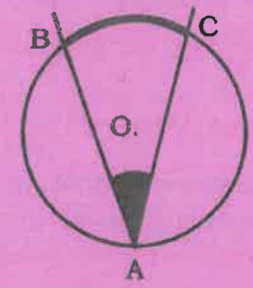


À Retenir

Définition

On appelle **angle inscrit** dans un cercle, un angle qui a pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts. Un angle inscrit intercepte dans un cercle l'arc ne contenant pas son sommet.

L'angle $\widehat{BOC}$ ayant pour sommet le centre du cercle est un angle au centre.



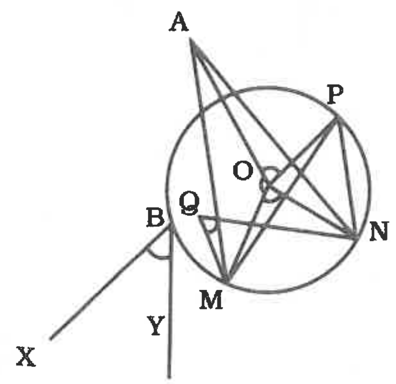
L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

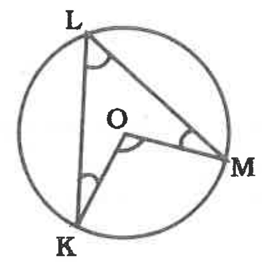
B. Exercices d'application

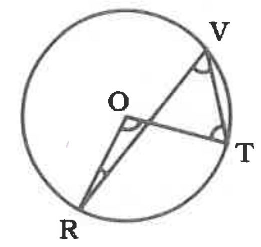
Exercice 1.

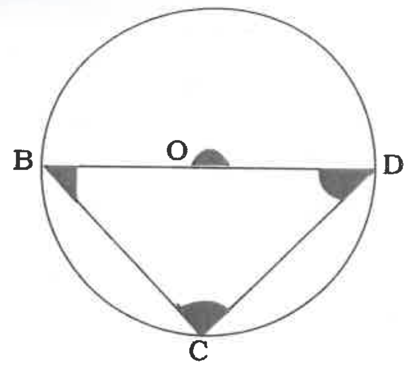
Pour chacune des figures suivantes, donne :

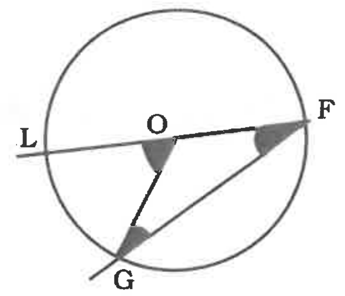
1. Parmi les angles marqués :
   a) les angles inscrits,
   b) les angles au centre.
2. L'arc intercepté par l'angle inscrit ou par l'angle au centre donné au point 1.











4.2 Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre associé

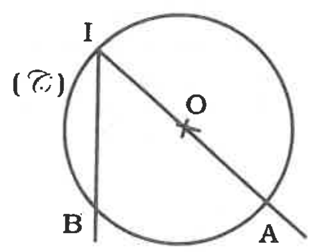
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de comparer un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Le point O est sur l'un des côtés de l'angle inscrit
Soit la figure suivante.



Recopie et complète :

a) $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOI}$ sont des angles ....

b) $\widehat{AOB}$ + $\widehat{BOI}$ = ...°

d'où $\widehat{BOI}$ = ...° − $\widehat{AOB}$ (1).

c) La somme des angles d'un triangle est égale à ....°.

d) Dans le triangle OIB, on a :

$\widehat{OIB}$ + $\widehat{IBO}$ + $\widehat{BOI}$ = ...°.

Donc $\widehat{BOI}$ = ...° − ($\widehat{......}$ + $\widehat{.......}$) (2).

À partir des égalités (1) et (2), montre que :

180° − $\widehat{AOB}$ = 180° - ($\widehat{OIB}$ + $\widehat{IBO}$).

Déduis-en : $\widehat{AOB}$ = $\widehat{......}$ + $\widehat{......}$ (3).

e) [OI] et [OB] sont deux .... du cercle (𝒞), donc le triangle OIB est ..... en O.

f) Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont ....

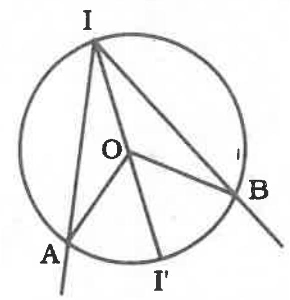
donc $\widehat{OIB}$ = $\widehat{......}$ (4).

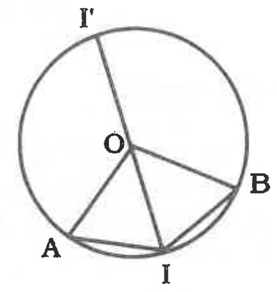
À partir des égalités (3) et (4), déduis-en

$\widehat{AOB}$ = ... × $\widehat{OIB}$, or $\widehat{OIB}$ = $\widehat{AIB}$, donc $\widehat{AOB}$ = ... $\widehat{AIB}$ ou $\widehat{AIB}$ = ... × $\widehat{AOB}$.

Activité 2.

Le point O est à l'intérieur de l'angle inscrit
Soit les deux figures suivantes :

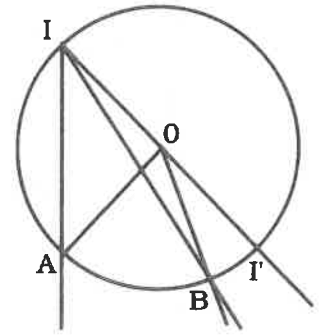




1. Sur chaque figure, marque en couleur l'arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AIB}$.
2. Sous chaque figure, précise si l'angle au centre interceptant le même arc est saillant ou rentrant.
3. Cite un angle au centre et un angle inscrit interceptant l'arc
en te servant du résultat final de l'activité 1. Complète : $\widehat{AOI'}$ = 2 × $\widehat{......}$ (1).
4. Cite un angle au centre et un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{I'B}$.
Complète : $\widehat{I'OB}$ = 2 × $\widehat{......}$ (2).
5. À partir des égalités (1) et (2), complète : $\widehat{AOI'}$ + $\widehat{I'OB}$ = 2($\widehat{.......}$ + $\widehat{.......}$) (3).
6. En te servant de la figure, complète :
$\widehat{AOI'}$ + $\widehat{I'OB}$ = $\widehat{......}$ (4).
$\widehat{AII'}$ + $\widehat{I'IB}$ = $\widehat{......}$ (5).
7. En te servant des égalités (3) ; (4) et (5), complète :
$\widehat{AOB}$ = ... × $\widehat{AIB}$ ou $\widehat{AIB}$ = ... × $\widehat{AOB}$.

Activité 3.

Le point O est à l'extérieur de l'angle inscrit
Soit la figure ci-contre :

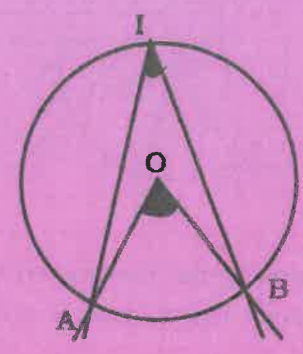


1. Donne un angle au centre et un angle inscrit interceptant le même arc $\overset{\frown}{AI'}$.
Complète : $\widehat{AOI'}$ = 2 × $\widehat{......}$ (1).
2. Donne un angle au centre et un angle inscrit interceptant le même arc $\overset{\frown}{I'B}$.
Complète : $\widehat{I'OB}$ = 2 × $\widehat{......}$ (2).
3. À partir des égalités (1) et (2),
complète : $\widehat{AOI'}$ − $\widehat{I'OB}$ = 2($\widehat{......}$ − $\widehat{.......}$) (3).
4. En te servant de la figure, complète :
$\widehat{AOI'}$ − $\widehat{I'OB}$ = $\widehat{......}$ (4).
$\widehat{AII'}$ − I'IB = $\widehat{......}$ (5).
5. À partir des égalités (3) ; (4) ; et (5), complète :
$\widehat{AOB}$ = ... × $\widehat{AIB}$ ou $\widehat{AIB}$ = ... × $\widehat{AOB}$.

À Retenir

Théorème de l'angle inscrit

Tout angle inscrit dans un cercle est la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc. Un angle au centre est le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.

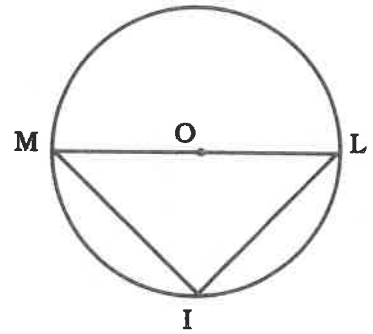


L'angle inscrit $\widehat{AIB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$.
On a donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AIB}$ ou $\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$.

B. Exercices d'application

Exercice

Cas particulier où l'angle inscrit est droit
Considère la figure suivante :



a) Que représente [ML] pour le cercle ($\mathscr{C}$) ?
Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{MOL}$?
b) Quelle est la nature du triangle $\widehat{MIL}$? Justifie ta réponse.
Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{MIL}$.
c) Cite l'angle inscrit et un angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{ML}$ ne contenant pas le point I.
d) Compare les angles $\widehat{MIL}$ et $\widehat{MOL}$.
Conclus.

4.3 Comparaison d'angles inscrits qui interceptent le même arc

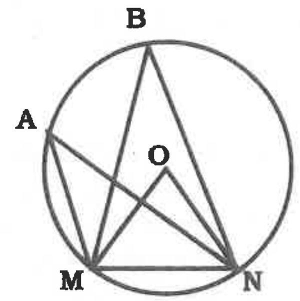
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc pour justifier une égalité d'angles et déterminer la mesure d'un angle.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

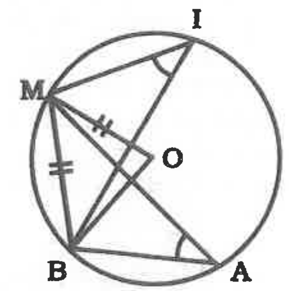
Considère la figure ci-contre :



1. Donne l'angle au centre interceptant le petit arc $\overset{\frown}{MN}$
2. Donne les angles inscrits de la figure interceptant le même arc $\overset{\frown}{MN}$.
3. En te servant du théorème de l'angle inscrit, recopie et complète :
$\widehat{MON}$ = ... × $\widehat{MAN}$
$\widehat{MON}$ = ... × $\widehat{MBN}$, d'ou $\widehat{MAN}$ =...........
4. Les angles inscrits $\widehat{MAN}$ et $\widehat{MBN}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{...}$.
Ils sont ....

Activité 2.

Considère la figure ci-contre où OM et MB ont la même mesure :



1. Quelle est la nature du triangle MBO ?
En déduire la mesure de l'angle $\widehat{MOB}$.
2. Donne l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{MB}$ ne contenant pas le point I.
3. Donne les angles inscrits de la figure interceptant le même arc $\overset{\frown}{MB}$.
4. Compare les angles $\widehat{MOB}$ et $\widehat{MIB}$.
Déduis-en que : $\widehat{MIB} = \widehat{MAB} = 30°$.

À Retenir

Théorème des angles inscrits

Deux angles inscrits d'un même cercle interceptant le même arc sont égaux.
L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc $\overset{\frown}{AB}$.
L'angle inscrit $\widehat{ANB}$ intercepte le même petit arc $\overset{\frown}{AB}$.
On a $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

B. Exercices d'application

Soit un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon r. Soit [MN] et [PQ] deux diamètre de ($\mathscr{C}$).

1. Donne l'angle au centre de la figure interceptant le petit arc $\overset{\frown}{MQ}$.
2. Donne tous les angles inscrits de cette figure interceptant le même petit arc $\overset{\frown}{MQ}$.
3. Compare l'angle au centre cité à la question 1 et chaque angle inscrit cité à la question 2.
4. Déduis-en l'égalité des angles $\widehat{MPQ}$ et $\widehat{MNQ}$.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

1. Trace un triangle quelconque ABC.
2. Trace le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O circonscrit à ce triangle.
3. Donne tous les angles inscrits et tous les angles au centre de cette figure.
4. Donne l'arc intercepté par l'angle inscrit ou par l'angle au centre déjà donné.

Exercice 2

1. Trace le cercle ($\mathscr{C}$) de centre I, circonscrit au triangle équilatéral ABC.
2. Trouve l'angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$.
3. Trouve l'angle au centre interceptant le même arc $\overset{\frown}{BC}$.
4. Compare $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BIC}$.

Exercice 3

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O ; [NN'] un diamètre de ce cercle ; M un point de ($\mathscr{C}$) avec M ≠ N et M ≠ N'.
Établis une relation entre $\widehat{MNN'}$ et $\widehat{MON'}$.

Exercice 4

Soit [AA'] et [BB'] deux diamètres d'un cercle de centre O.

1. Compare $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AA'B}$ puis $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ABB'}$.
2. Déduis-en une relation entre AA'B et $\widehat{ABB'}$.

Exercice 5

Trace le cercle ($\mathscr{C}$) (I ; r) circonscrit au triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2AC. Démontre que $\widehat{BIC} = 180°$.

Exercice 6

1. Trace un triangle équilatéral $\widehat{ABC}$ de côté 4 cm.
2. Trace le cercle($\mathscr{C}$) de centre O circonscrit à ce triangle.
3. Démontre que $\widehat{BOC} = 120°$

Exercice 7

Soit ABC un triangle tel que selon le cm AB = 6 ; AC = 4 ; BC = 5. Soit O le point de rencontre des médiatrices de ce triangle.
Soit E le symétrique de C par rapport à O.
Montre que $\widehat{BEC} = \widehat{CAB}$.

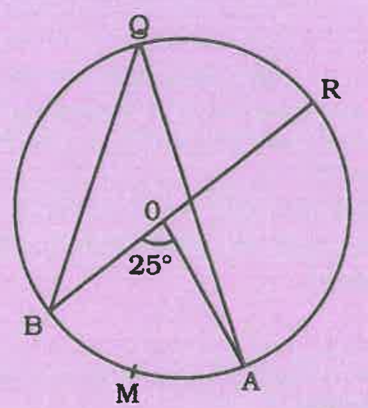
Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{BAC} = 90°$; AB = AC.
Le point I est milieu de [BC].

1. Montre que $\widehat{AIC} = 90°$.
2. Trace le cercle ($\mathscr{C}$) (I ; IB).
3. Calcule la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AC}$.

Exercice 9

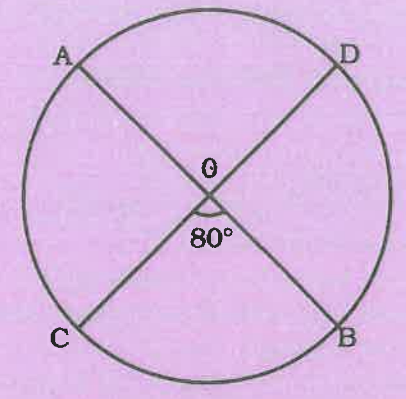
À partir de la figure ci-dessous :



1. Calcule $\widehat{AQB}$ puis en déduire $\widehat{AMB}$.
2. Calcule $\widehat{ROA}$, $\widehat{ARO}$ et $\widehat{RAO}$.

Exercice 10

À partir de la figure ci-dessous :



1. Montre que $\widehat{BAC} = \widehat{CDB} = 40°$.
2. Calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Exercices de synthèse

Exercice 11

On considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon r. A, S, I et E sont quatre points de ce cercle ($\mathscr{C}$) et M est un point situé à l'extérieur du cercle ($\mathscr{C}$) tel que les points M, I, E d'une part et M, A, S d'autre part sont alignés.
Compare $\widehat{SIE}$ et $\widehat{EAS}$; $\widehat{MEA}$ et $\widehat{MSI}$; $\widehat{ESI}$ et $\widehat{IAE}$; $\widehat{IOE}$ et $\widehat{IAE}$; $\widehat{AOS}$ et $\widehat{AES}$.

Exercice 12

Soit T un point d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de diamètre [CI]. Soit K un point de ce cercle ($\mathscr{C}$) tel que $\widehat{TIK} = \widehat{KIC}$

1. Que représente (IK) pour $\widehat{TIC}$?
2. Démontre que $\widehat{TIC} = \widehat{KOC}$.

Exercice 13

[MN] et [PQ] sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon r. A est un point du « petit arc » $\overset{\frown}{MP}$.

1. Calcule $\widehat{MAP}$; $\widehat{MPN}$; $\widehat{MAN}$; $\widehat{PAN}$.
2. Démontre que $\widehat{NAP} = \widehat{PMN}$.

Exercice 14

M, A et N sont trois points d'un cercle $(\mathscr{C})$ (o ; r).
La bissectrice de l'angle $\widehat{AON}$ coupe $\overset{\frown}{AN}$ en I.

1. Démontre que $\widehat{AMI} = \widehat{IMN}$.
2. Que représente (MI) pour $\widehat{AMN}$?

Exercice 15

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O.
[AC] et [BD] sont deux diamètres non perpendiculaires du cercle $(\mathscr{C})$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère admettant [AC] et [BD] pour diagonales ? Justifie ta réponse.
2. Ce quadrilatère peut-il être un carré ?
3. Compare $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$; $\widehat{BOC}$ et $\widehat{ACD}$; $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$; $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ABD}$.

Exercice 16

Soit [AB] et [CD] deux diamètres perpendiculaires d'un cercle de centre O. La tangente en un point M de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ coupe (CD) en P.
Compare les angles $\widehat{MPC}$; $\widehat{MOA}$ et $\widehat{MBA}$.

Exercice 17

Soit un cercle de centre O ;
[AB] et [A'B'] sont deux cordes qui se coupent en I à l'intérieur de ce cercle.
Démontre que $\widehat{AIA'} = \widehat{IBA'} + \widehat{IA'B}$.
Déduis-en que $\widehat{AIA'} = \frac{1}{2}(\widehat{AOA'} + \widehat{BOB'})$.

Exercice 18

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.
A, B, C et D sont quatre points de ce cercle $(\mathscr{C})$ tels que $\widehat{AOC} = 180°$, AB = OA et $\widehat{COD} = 80°$.
Détermine la mesure de chaque angle du quadrilatère ABCD.

Exercice 19

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants en M et N, de même rayon r, et de centres respectifs I et I'.
A est un point du « grand arc » $\overset{\frown}{MN}$ du cercle $(\mathscr{C})$ et B est un point du « grand arc » $\overset{\frown}{MN}$ du cercle $(\mathscr{C}')$.

1. Démontre que $\widehat{MIN} = \widehat{MI'N}$.
2. Déduis-en que $\widehat{MAN} = \widehat{MBN}$.

Exercice 20

Démontre que deux angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

Exercice 21

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.
Soit [MN] et [NP] deux cordes de même longueur MN avec MN supérieure à r.
On pose $\widehat{MNP} = y$.

1. Exprime $\widehat{MOP}$ en fonction de y.
2. Démontre que $\widehat{NOM} = \widehat{NOP}$ et exprime $\widehat{NOM}$ en fonction de y.

Exercice 22

Trace le cercle $(\mathscr{C})$ (o ; r) circonscrit à un triangle MNP. La bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$ recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M'. La parallèle à (MP) passant par M' recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en N'.
Démontre que (MM') // (N'N).

Exercice 23

[MN] et [MP] sont deux cordes de même longueur d'un cercle $(\mathscr{C})$ (o ; r).
Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{MNP}$ et $\widehat{MPN}$ se coupent en I et recoupent $(\mathscr{C})$ respectivement en T et S.

1. Quelle est la nature du quadrilatère MTIS ?
2. On donne $\widehat{NMP} = 70°$. Détermine la mesure de chaque angle du quadrilatère MTIS.

Exercice 24

N, U et L sont trois points d'un cercle $(\mathscr{C})$.
(NI) est la tangente en N à ce cercle $(\mathscr{C})$.
Une droite (Δ) parallèle à (NI) coupe (NU) en S et (NL) en E.

1. Démontre que $\widehat{NSE} = \widehat{ULN}$ et $\widehat{SEN} = \widehat{NUL}$.
2. Déduis-en que le quadrilatère LUSE est inscriptible.

Exercice 25

MIL est un triangle inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
Soit A le pied de la hauteur issue de M et B, le pied de la hauteur issue de I.
Soit H, l'orthocentre de ce triangle MIL.
La droite (MA) recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en S.

1. Compare $\widehat{MHB}$ et $\widehat{HMB}$; $\widehat{MHB}$ et $\widehat{IHA}$; $\widehat{HMB}$ et $\widehat{LIS}$.
2. Que représente (IL) pour l'angle $\widehat{IHS}$. Justifie ta réponse.
3. Quelle est la nature du triangle IHS ?
4. Déduis-en la position des points H et S par rapport à (IL).

Exercice 26

MNP est un triangle d'orthocentre H inscrit dans un cercle de centre O. La droite (MH) recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en A.

1. Démontre que HNA est un triangle isocèle.
2. Quelle est la position des points H et A par rapport à (NP) ? Que peut-on déduire des symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle relativement au cercle ?
3. Soit O' le symétrique de O par rapport à (NP) ?

a) Démontre que O'H = OA.
b) Déduis-en que O' est le centre du cercle circonscrit au triangle NPH et que ce cercle est « égal » au cercle circonscrit au triangle MNP.
c) Démontre que les cercles circonscrits aux triangles PMH et MNH sont « égaux » aux deux cercles cités ci-dessus.

Exercice 27

A', B' et C' sont les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C et d'un triangle quelconque ABC. Soit H l'orthocentre de ce triangle.

1. Montre que les points B, C', H et A' appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre M.
2. Compare $\widehat{C'BH}$ et $\widehat{HA'C}$.
3. Montre que les points C, B', H et A' appartiennent à un même cercle que l'on tracera.
4. Trouve un angle de même mesure que $\widehat{HA'B'}$.
5. Démontre que (AA') et (BB') sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{C'A'B'}$ et $\widehat{C'B'A'}$. Que représente H pour le triangle? Déduis-en que (CC') est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'B'C'}$.

Exercice 28

[MN] ; [PQ] et [RS] sont trois cordes parallèles entre elles d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
T est un point de $(\mathscr{C})$ tel que (NP) // (QR) et (QR) // (ST).
Démontre que $\widehat{MOP} = \widehat{ROT}$.

Exercice 29

Soit (*xx'*) et (*yy'*) deux droites strictement parallèles coupées par une sécante (Δ).
(Δ) n'est pas perpendiculaire à (*xx'*).
Soit M et N les points d'intersection respectifs de (Δ) avec (*xx'*) et (*yy'*).
La bissectrice de $\widehat{xMN}$ et celle de $\widehat{MNy}$ se coupent en I.
La bissectrice de $\widehat{x'MN}$ et celle de $\widehat{MNy'}$ se coupent en E.

1. Démontre que le quadrilatère MINE est un rectangle.

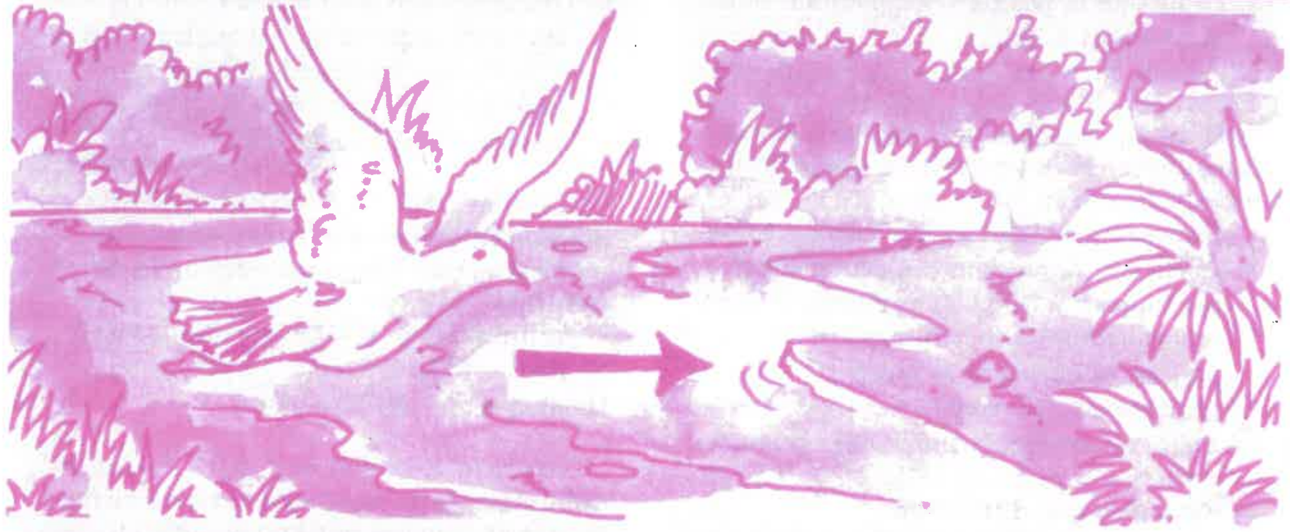
Solution de la situation problème

– L'angle inscrit $\widehat{EML}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{EL}$.
– L'angle inscrit $\widehat{EAL}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{EL}$.

Les angles $\widehat{EML}$ et $\widehat{EAL}$ étant deux angles inscrits d'un même cercle interceptant le même arc $\overset{\frown}{EL}$ sont égaux d'après le théorème des angles inscrits.
Donc $\widehat{EML} = \widehat{EAL}$.

CHAPITRE 5

VECTEURS



Sommaire

Introduction

L'étude des vecteurs commencée en classe de quatrième est poursuivie en troisième avec l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un réel, deux opérations que nous devons maîtriser pour la résolution de certains problèmes.

Situation problème

1. Dessine un triangle ABC.
2. Construis le point E tels que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

5.1 Addition vectorielle (construction et définition)

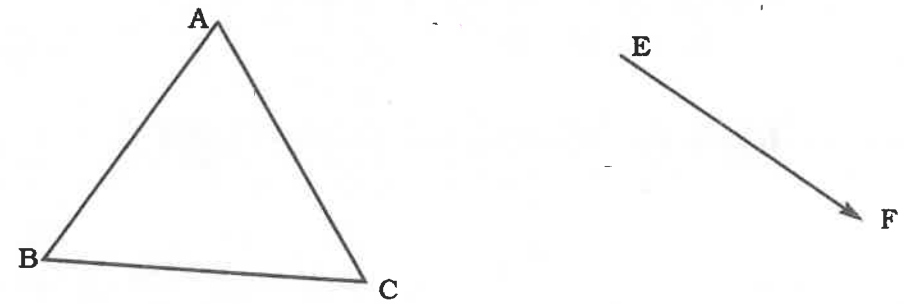
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois connaître et être capable d'utiliser la relation de Chasles pour construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Construction d'image d'un point par translation



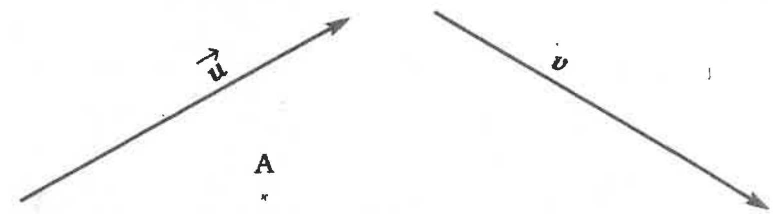
1. Reproduis les figures ci-dessus.
2. Dessine le triangle A'B'C', image du triangle ABC par la translation qui transforme E en F (translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$).
3. Dessine le triangle A"B"C", translaté du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Notation

La translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ se note $t_{\overrightarrow{BC}}$. L'écriture $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = A'$ signifie que A' est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Activité 2.

On considère la figure suivante où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et A un point du plan.



Les points B et C sont tels que $t_{\vec{u}}(A) = B$ et $t_{\vec{v}}(B) = C$.

1. Sachant que $t_{\vec{u}}(A) = B$ signifie que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, complète : $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ signifie que $t_{\vec{...}}(...) = ...$
2. a) Reproduis la figure et construis les points B et C.
   b) Sur la même figure, place un point E différent de A. Construis les points F et G tels que $t_{\vec{u}}(E) = F$ et $t_{\vec{v}}(F) = G$.
   c) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$ (sens, longueur et direction).

À Retenir

Définition

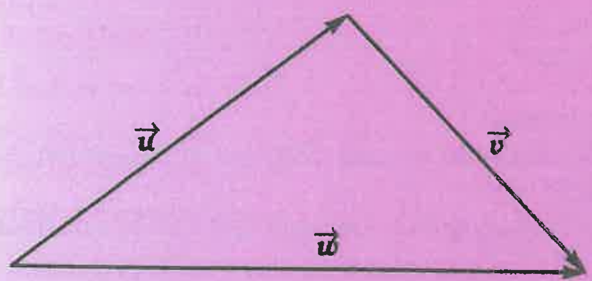
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point du plan. Soit B l'image de A obtenue par la translation de vecteur $\vec{u}$ et C, l'image de B obtenue par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ est le vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On écrit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Théorème

Le vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne dépend pas du choix du point A.

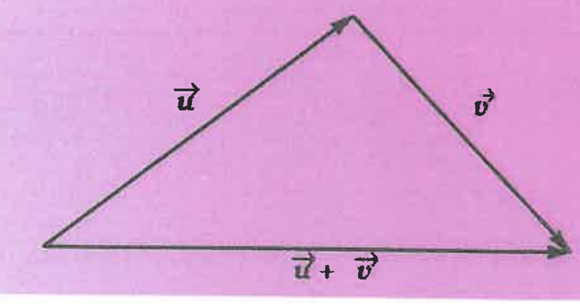
Configuration



Méthodes

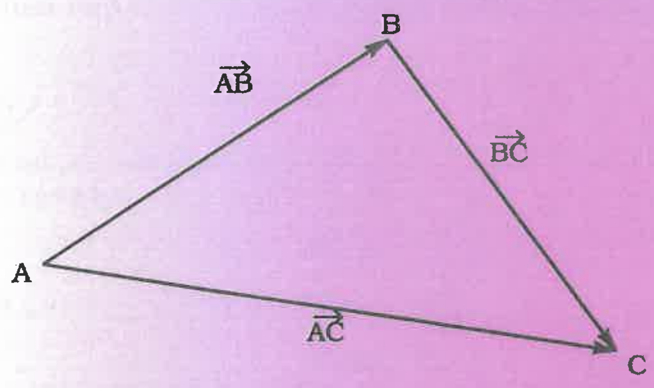
Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs dont l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité de l'autre, je joins le bout du premier vecteur à l'extrémité du deuxième vecteur.

Configuration



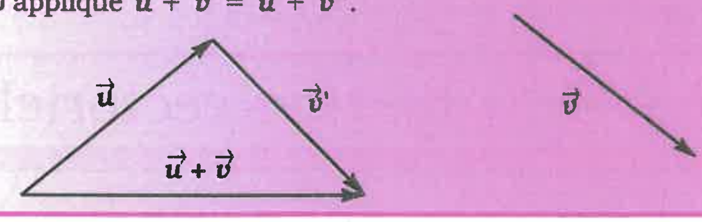
Configuration de Chasles

1.



L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée relation de Chasles.

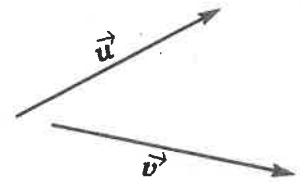
2. Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs quelconques, $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
   – Je trace à partir de l'extrémité de $\vec{u}$ un vecteur $\vec{v}'$ égal à $\vec{v}$.
   – J'applique $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$.

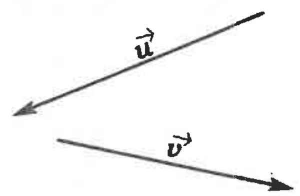


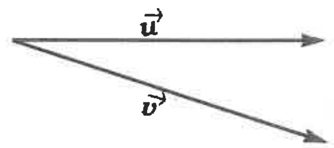
B. Exercices d'application

Exercice 1.

Reproduis les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis construis le vecteur somme dans chacun des cas suivants :

a)


b)


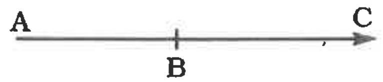
c)


d)


$\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$

e)


$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

f)


$\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

Exercice 2.

1. En utilisant la relation de Chasles, écris le plus simplement possible :

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA}$;

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$.

2. Recopie puis complète:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ .... ; $\overrightarrow{MO} +$ .... $= \overrightarrow{MN}$;

.... $+ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}$; .... $+ \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{EC}$.

5.2 Propriétés de l'addition vectorielle

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les propriétés de l'addition vectorielle et être capable de les utiliser.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Dans chacun des cas suivants, calcule les sommes a et a' puis compare les résultats obtenus.

1er cas : $a = 37 + 3$ et $a' = 3 + 37$.

2e cas : $a = 16 + (-4)$ et $a' = (-4) + 16$.

2. Quelle propriété de l'addition dans IR as-tu ainsi vérifiée ?

3. Reprends les questions 1 et 2 pour les cas suivants :

1er cas : $b = (42+4) + (-21)$ et $b' = 42 + (4+(-21))$.

2e cas : $b = (-6+7) + (+2)$ et $b' = (-6) + (7+2)$.

4. Recopie et complète :

$(+3) + (-3) =$ ....

$(+3) + opp\ (...) = 0$

$(+3)$ et (-3) sont dits ....

Si la somme de deux nombres est égale à ...., alors ces deux nombres sont opposés.

Si deux nombres sont ...., alors leur somme est égale à zéro.

Activité 2.

1. Construis un parallélogramme ABCD.

2. Recopie et complète :

$\overrightarrow{AB} =$; $\overrightarrow{AD} =$ ....

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ .... ; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} =$ ....

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} =$ ....

Déduis-en que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.

3. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

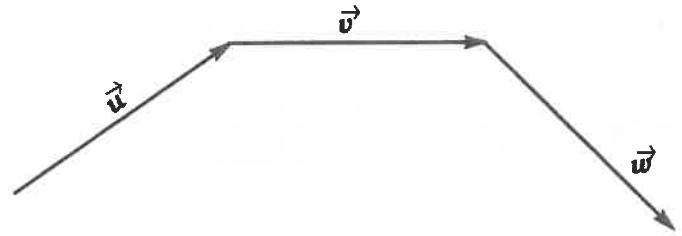
Alors : $\vec{u} + \vec{v} =$ ...... et $\vec{v} + \vec{u} =$ ......

Que peux-tu dire des sommes vectorielles $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$?

Tu viens de vérifier que l'addition vectorielle est une opération ....

Activité 3.

1. Reproduis la figure ci-dessous où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs.



2. Construis le vecteur $\vec{w}_0 = \vec{u} + \vec{v}$ puis le vecteur $\vec{S}_0 = \vec{w}_0 + \vec{w}$.

3. Construis le vecteur $\vec{w}_1 = \vec{v} + \vec{w}$ puis le vecteur $\vec{S}_1 = \vec{u} + \vec{w}_1$.

Compare les résultats obtenus.

4. Recopie et complète : $(\vec{u} + \vec{v}) +$ ...... $=$ ...... $+ (v + \vec{...})$.

Tu viens de vérifier que l'addition des vecteurs est une opération ....

Activité 4.

1. Construis trois points A, B et C tels que A soit le milieu du segment [BC].

2. Compare le sens, la longueur et la direction des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}$.

3. Recopie et complète :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{...} = \overrightarrow{...}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont opposés.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

À Retenir

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs.

Propriété 1
L'addition des vecteurs est une opération commutative.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Propriété 2
L'addition des vecteurs est une opération associative.

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Propriété 3
Tout vecteur dont la longueur est nulle est un vecteur nul. On le note $\vec{0}$.

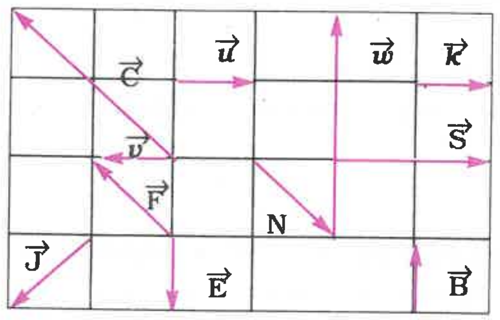
$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Propriété 4
Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même longueur, la même direction, mais des sens contraires.

- Si la somme de deux vecteurs distincts est nulle, alors ces vecteurs sont opposés.

B. Exercices d'application

1. Trouve le vecteur somme : $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} + \vec{J}$; $\vec{u} + \vec{K}$; $\vec{v} + \vec{E}$; $\vec{K} + \vec{E}$.
2. Donne deux par deux les vecteurs opposés de la figure suivante.



3. Recopie et complète à l'aide de la figure.

$\vec{S} = 2$ ...... ou $\vec{S} = 2 \times$ ......

$\vec{C} =$ ...... $\times \vec{N}$; $\vec{C} =$ ...... $\times \vec{F}$; $\vec{w} =$ ...... $\times \vec{B}$.

5.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel (construction et définition)

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable de construire le vecteur produit d'un vecteur par un réel.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Construis un vecteur $\vec{u}$.
2. Construis le vecteur $\vec{w}$ de même sens et de même direction que $\vec{u}$ et dont la longueur est 3 fois plus grande que celle de $\vec{u}$.

Tu as ainsi construit le vecteur 3 fois $\vec{u}$ (produit de $\vec{u}$ par le nombre réel 3). On écrit : $\vec{w} = 3\vec{u}$.

Activité 2.

1. Construis un vecteur $\vec{u}$.
2. Construis le vecteur $\vec{w}$ tel que :
   - $\vec{w}$ et $\vec{v}$ aient la même direction ;
   - $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires ;
   - la longueur de $\vec{w}$ soit deux fois plus grande que celle de $\vec{v}$.

Tu as ainsi construit le vecteur -2 fois $\vec{v}$.
Cette opération s'écrit $\vec{w} = -2\vec{v}$.

À Retenir

Définition
Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est appelé vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.

Remarque
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $k > 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.
- Si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens contraires.

Méthode

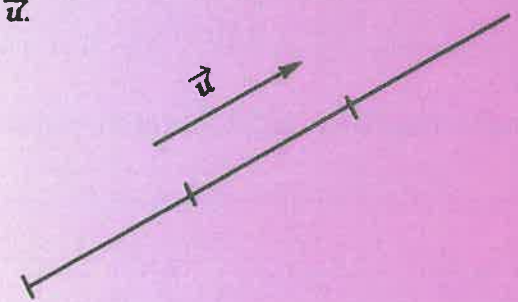
Pour construire le vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, on peut procéder comme suit :

- Construire le vecteur $\vec{u}$.
- Tracer un segment de support ayant la même direction que celle de $\vec{u}$ et de longueur égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.
- Orienter le segment de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et dans le sens contraire si $k < 0$.

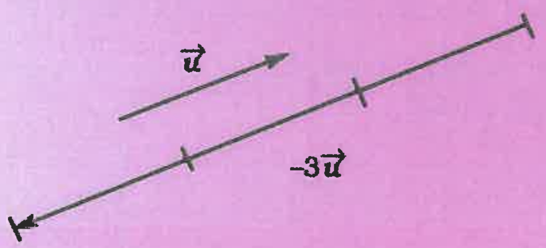
Dans l'exemple suivant, nous appliquons la méthode pour le vecteur $-3\,\vec{u}$.

1. Je trace $\vec{u}$.

2. Je trace un segment de support parallèle à celui de $\vec{u}$ et de longueur $|-3| \times$ longueur de $\vec{u}$.



3. -3 étant un nombre négatif, $-3\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire.



5.4 Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A, un point du plan.

1. a) Construis le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

b) Recopie et complète chacune des égalités vectorielles suivantes :

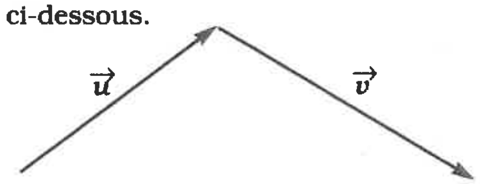
$\vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \vec{u}$

2. a) Construis un vecteur $\vec{u}$.

b) Construis et compare les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{W}$ tels que $\vec{S} = -6\vec{u}$ et $\vec{w} = 2(-3\vec{u})$.

Activité 2.

1. Reproduis la figure ci-dessous.



2. Construis sur la même figure les vecteurs suivants :

$2\vec{u}$, $2\vec{v}$ puis $2\vec{u} + 2\vec{v}$;

$\vec{u} + \vec{v}$ puis $2(\vec{u} + \vec{v})$.

3. Que peux-tu dire des vecteurs $2\vec{u} + 2\vec{v}$ et $2(\vec{u} + \vec{v})$?

Activité 3.

Soit $\vec{v}$ un vecteur.

1. Construis les vecteurs $2\vec{v}$, $5\vec{v}$, $-3\vec{v}$ puis $5\vec{v} + (-3)\vec{v}$.

2. Que peux-tu dire des vecteurs $2\vec{v}$ et $5\vec{v} + (-3)\vec{v}$?

À Retenir

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et deux vecteurs et k et k', deux réels :

$\vec{U} = 1\vec{U}$;

$k(k'\vec{U}) = (k \times k')\vec{U}$;

$(k+k')\vec{U} = k\vec{U} + k'\vec{U}$;

$k(\vec{U} + \vec{V}) = k\vec{U} + k\vec{V}$.

B. Exercices d'application

On pose $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{j} - \vec{i}$, $\vec{w} = \frac{7}{5}\vec{i}$, $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{k} = 3\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{p} = 5\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u}$

Exprime les vecteurs $\vec{S}$, $\vec{p}$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

5.5 Vecteurs colinéaires

Compétences exigibles

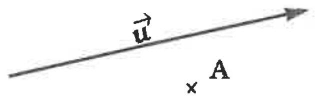
À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition de deux vecteurs colinéaires et être capable d'utiliser une égalité vectorielle pour démontrer :

- *la colinéarité de vecteurs ;*
- *le parallèlisme de droites ;*
- *l'alignement de points.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A un point.

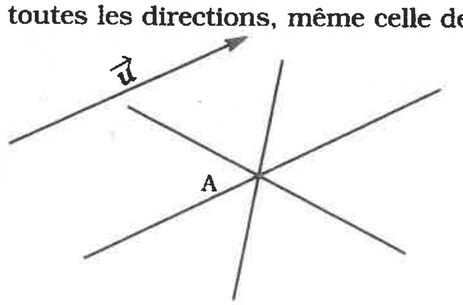


1. Reproduis la figure puis construis les points B, C et E tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE} = -\vec{u}$
2. Cite les vecteurs :
   - de même direction et de même sens que $\vec{u}$;
   - de même direction mais de sens contraire à celui de $\vec{u}$.

   Tous les vecteurs qui ont la même direction que $\vec{u}$ sont dits colinéaires à $\vec{u}$.

Remarque

Le vecteur nul $\overrightarrow{AA}$ a toutes les directions, même celle de $\vec{u}$. Donc, il est colinéaire à $\vec{u}$.



À Retenir

Définition

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils sont tous deux de même direction ou si l'un de ces vecteurs est nul.

Activité 2.

1. Place trois points non alignés A, B et C puis construis le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Place le point D tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ aient la même direction.
3. Place le point F tels que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ aient la même direction.
4. Quelle est la position relative des droites (AB) et (BF) ?
5. Que peux-tu dire des points A, B et F ?
   Justifie ta réponse.

À Retenir

Propriétés

Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Activité 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et M, deux points distincts du plan.

1. Construis le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = 2\vec{u}$.
2. Construis le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -3\overrightarrow{AA'}$.
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$. Déduis-en que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

À Retenir

Méthodes

- Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on peut exprimer l'un d'eux en fonction de l'autre, c'est-à-dire trouver un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

B. Exercices d'application

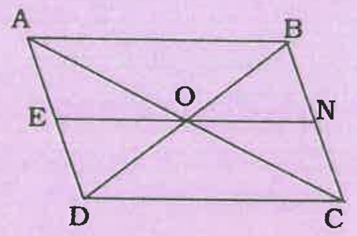
Soit ABC un triangle rectangle en A, E, K et F sont trois points du plan tels que :
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$; $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$.

1. Construis le triangle ABC puis place les points A, K et F.
2. Trouve une relation vectorielle entre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{KF}$. En déduire que les points E, F et K sont alignés.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Soit la figure suivante où ABCD est un parallélogramme de centre O. Reproduis cette figure puis complète les égalités vectorielles suivantes :



$\overrightarrow{AB} =$ .... ;

$\overrightarrow{BA} = 2$ .... ;

$\overrightarrow{AC} = 2 \times$ .... ;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} +$ ....

Exercice 2

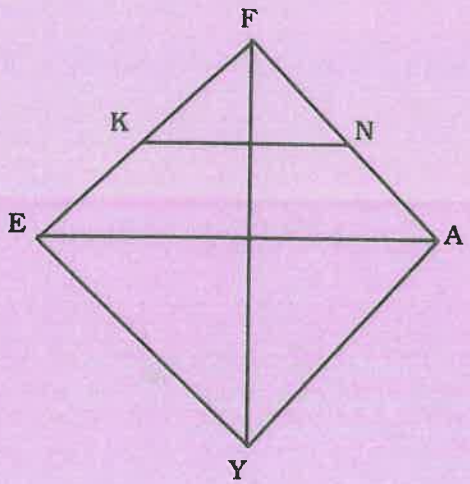
En observant la figure ci-dessous où EFAY est un carré et (KN) //(EA), complète les énoncés suivants :

$\overrightarrow{FA}$ et .... sont opposés ;

.... et $\overrightarrow{YA}$ sont égaux ;

$\overrightarrow{EA} =$ .... $\overrightarrow{NK}$;

$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE} =$ ....



Exercice 3

FORA est un rectangle. M est le milieu de [FO] et N celui de la diagonale [FR].

1. Dessine le rectangle FORA sachant que FO = 5 cm, OR = 3 cm puis place les points M et N.
2. Complète les égalités suivantes :

$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OR} =$ .... + ... ;

$\overrightarrow{RO} =$ .... $\overrightarrow{NM}$;

$2\overrightarrow{FM} =$ .... ;

$\overrightarrow{AR} +$ .... $= \vec{0}$.

Exercice 4

En utilisant la relation de Chasles, écris le plus simplement possible les vecteurs sommes de vecteurs suivants :

$\vec{V}_0 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$;

$\vec{V}_1 = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}$;

$\vec{V}_2 = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KF} + 2\overrightarrow{CK}$;

$\vec{V}_3 = \overrightarrow{BF} + 2\,\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$;

$\vec{V}_4 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC}$;

$\vec{V}_5 = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$;

$\vec{V}_6 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{EA}$;

$\vec{V}_7 = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AC}$;

$\vec{V}_8 = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EX}$;

$\vec{V}_9 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{BF}$.

Exercice 5

1. ABC est un triangle. Construis E, et D tels que :
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$;
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.
2. Montre que les points A, D et E sont alignés.
3. Quelle est la nature du quadrilatère BDEC ?
Justifie ta réponse.

Exercice 6

1. Construis un triangle équilatéral ABC de 3 cm de côté.
2. Construis les points D et E de telle sorte que $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.
3. Montre que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 7

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Montre que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Exercice 8

ABCD est un parallélogramme et M un point du plan tel que $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$.

Montre que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Exercice 9

En utilisant la relation de Charsles, écris le plus simplement possible les vecteurs sommes $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

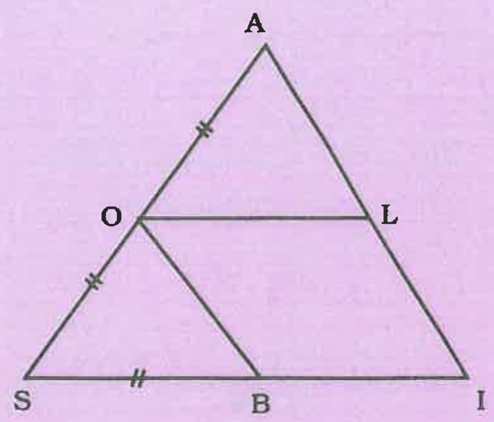
$\vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$;

$\vec{u}_2 = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK}$;

$\vec{u}_3 = 2\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AB}$.

Exercice 10

ASI est un triangle équilatéral.

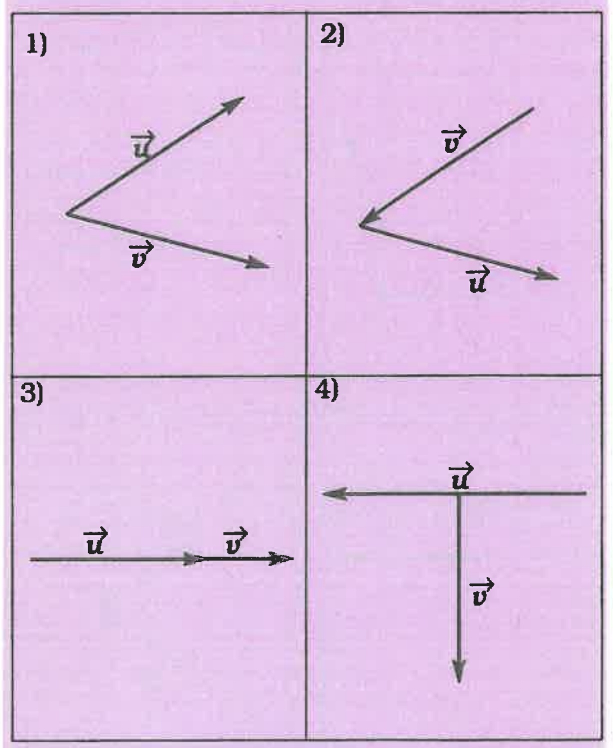


En observant le dessin ci-dessus, réponds aux questions suivantes :
Donne :

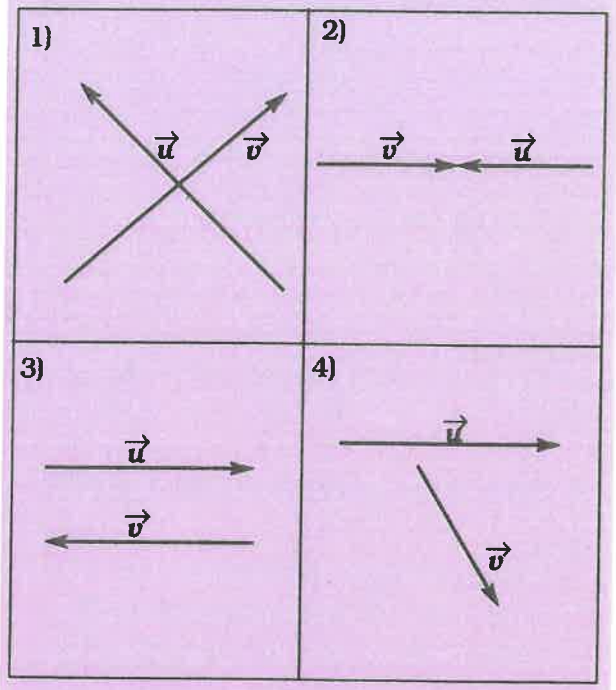
1. Un vecteur égal à $\overrightarrow{BI}$; $\overrightarrow{LA}$.
2. Donne tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{BO}$.
3. Donne tous les vecteurs opposés à $\overrightarrow{IB}$.

Exercice 11

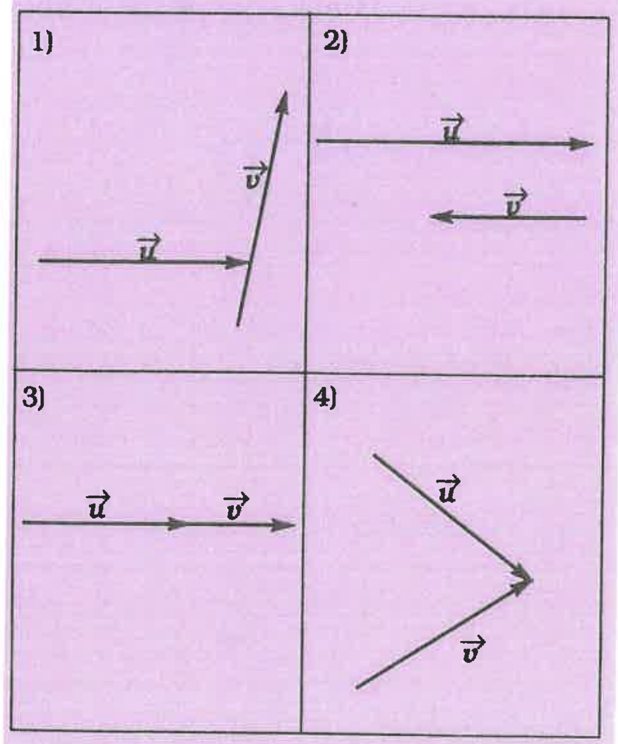
Dans les cas suivants, construis le vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Exercice 12
Même question qu'à l'exercice 11.

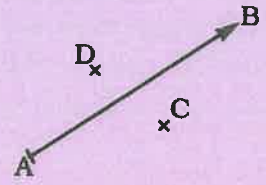


Exercice 13
Même question qu'à l'exercice 12.



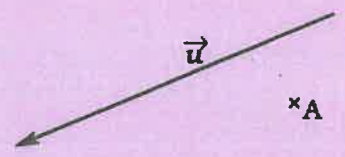
Exercice 14
A, B, C, D et F sont cinq points du plan.
1. Dessine les parallélogrammes ABCD et ABFC.
2. Montre que les points D, C et F sont alignés.
3. Montre que le point C est le milieu du segment [DF].
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABFD ? Justifie ta réponse.

Exercice 15
Soit A, B, C, D, quatre points distincts du plan non alignés.



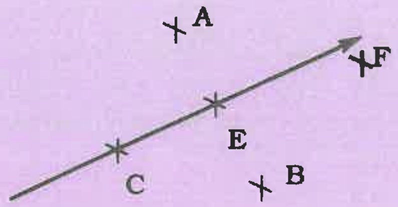
Reproduis la figure puis :
1. Construis le vecteur $\overrightarrow{IB}$ tel que $\overrightarrow{IB}$ = 3DC.
2. Construis le vecteur $\overrightarrow{ED}$ tel que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 16
A et B sont deux points distincts et $\vec{u}$, un vecteur (voir figure).



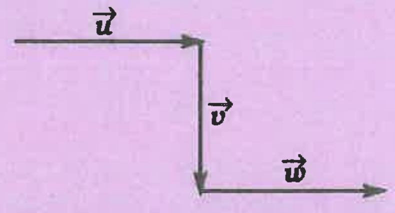
1. Reproduis la figure.
2. M et N étant deux points du plan, construis :
   - le vecteur $\overrightarrow{AN} = -\vec{u}$;
   - le vecteur $\overrightarrow{AM} = -5\vec{u}$;
   - complète : $\overrightarrow{NM} = \dots \times \vec{u}$.

Exercice 17
A, B, C, E et F sont cinq points distincts du plan.



Place les points D, N et M tels que :
$\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$.

Exercice 18
Soit les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ (voir figure).



1. Reproduis la figure.
2. Construis les vecteurs $\vec{S} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ et $\vec{K} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
3. Les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{K}$ sont-ils égaux ? Justifie.

Exercice 19
On pose :
$\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{v} = 3\vec{i}$; $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
$\vec{A} = 3\vec{u} - \vec{v}$; $\vec{B} = \vec{u} + \vec{v} - 7\vec{w}$;
$\vec{C} = \vec{v} + 5\vec{w}$.
Exprime $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

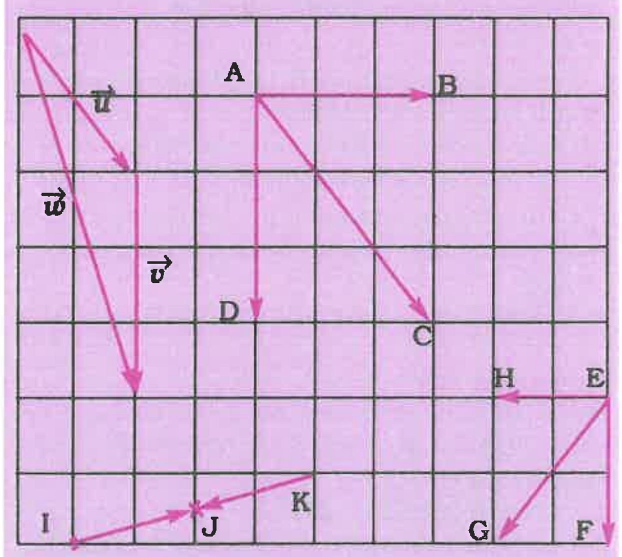
Exercice 20
On pose :
$\vec{u} = 4\vec{i}$; $\vec{v} = \frac{7\vec{i}}{2} + \vec{j}$; $\vec{w} = \frac{\vec{i}}{2} - \frac{7\vec{j}}{3}$.
$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$; $\vec{B} = \frac{1}{4}\vec{u} - 2\vec{w}$;
$\vec{C} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
Exprime $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exercice 21
On pose :
$\vec{u} = -\vec{i}$; $\vec{v} = 2\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$; $\vec{w} = \frac{3\vec{i}}{5} + \vec{j}$.
$\vec{A} = \vec{u} - 4\vec{v}$; $\vec{B} = \vec{u} + \vec{v} - 5\vec{w}$;
$\vec{C} = a\vec{w} - b\vec{u}$.
Exprime les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exercices de synthèse

Exercice 22
Soit ABC un triangle. E et F sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à A.
1. Fais une figure de ce triangle.
2. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont égaux.
3. Quelle est la nature du quadrilatère BCEF ? Justifie.

Exercice 23



Observe bien la figure ci-dessus et mets une croix à la bonne réponse du tableau de la page suivante.

Relation vectorielle	Vrai	Faux
$\vec{v} + \vec{v} = \vec{w}$		
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$		
$\vec{w} - \vec{v} = \vec{u}$		
$\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$		
$\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$		
$\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{KJ}$		
$\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$		

Exercice 24

Réponds aux affirmations suivantes par vrai ou faux.

- Deux vecteurs opposés ont même longueur.
- Un vecteur et son produit par un réel non nul peuvent être opposés.
- Deux vecteurs égaux sont opposés.
- A, B et C étant trois points, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Deux vecteurs égaux sont colinéaires.
- La somme de deux vecteurs peut être nulle.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors B et C sont confondus.

Exercice 25

Soit ABCD un carré et E un point tel que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DA}$. La parallèle à (DC) passant par E coupe (BD) en F.

1. Montre que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère AEFB ? Justifie ta réponse.

Exercice 26

ABC est un triangle rectangle en A. E, F et K sont trois points du plan tels que :
$2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$; $2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$; $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$.

1. Construis le triangle ABC puis place le point E, F et K.
2. Montre que :
   a) Les points E, F et K sont alignés.
   b) Le point K est le milieu du segment [EF].
3. Donne, en le justifiant, la nature exacte du quadrilatère BEKC.

Exercice 27

FORT est un rectangle tel que FO = 6 cm et RO = 4 cm. On considère les points K et A tels que $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FA}$ et $\dfrac{\overrightarrow{FO}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{FR}}{2} = \overrightarrow{FK}$.

1. Construis le rectangle FORT et place les points A et K.
2. À partir des égalités vectorielles ci-dessus, montre que les points A, K et F sont alignés.
3. a) Montre que le point K appartient au segment [OR].
   b) Montre que K est le milieu de [OR].
4. Quelle est la nature du quadrilatère FRAO ? Justifie ta réponse.

Exercice 28

1. Construis un triangle équilatéral ABC de 3 cm de côté.
2. Construis les points E, F et Y tels que : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$; $S_C(B) = Y$.
3. Montre que :
   a) Les droites (BY) et (EF) sont parallèles.
   b) Le quadrilatère BAYE est un rectangle.
   c) FBYE est un parallélogramme.
4. Quelle est alors la nature exacte du quadrilatère FAYE ? Justifie ta réponse.
5. a) Montre que le cercle ($\mathscr{C}$) (C ; AC) passe par les points B, Y et E.
   b) Ce cercle coupe la droite (FE) en I. Montre que I est le milieu du segment [FE].
6. Les droites (AI) et (BE) sont sécantes en G. Montre que le point G appartient à la droite (FC).

Exercice 29

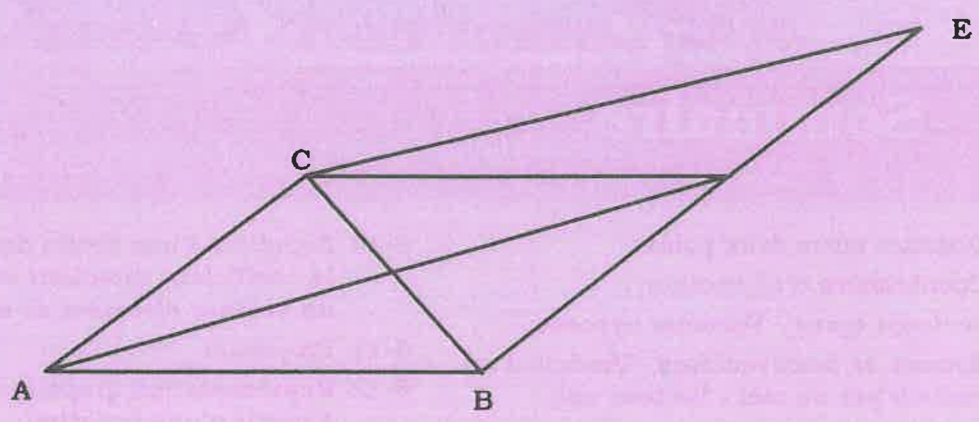
A et B sont deux points du plan et M un point tel que $3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construis le point M.

Exercice 30

Reprends l'exercice 29 avec :
$2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Solution de la situation problème



CHAPITRE

6 REPÉRAGE DANS LE PLAN

Sommaire

Introduction

Il s'agit dans ce chapitre d'introduire l'aspect numérique de la géométrie. Ce volet de la géométrie est appelé géométrie analytique. En clair, il s'agira de traduire des propriétés géométriques par des relations numériques. Descartes disait que « la géométrie analytique n'est autre que l'art de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul numérique ».
La géométrie analytique (ou géométrie avec coordonnées) traduit l'interconnexion entre le calcul numérique et la géométrie pure. Dans la vie de tous les jours, le repérage est utilisé pour représenter des phénomènes physiques (en cartographie notamment).

Situation problème

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(2 ; 3) et B(4 ; 2) et exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

6.1 Distance entre deux points

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de calculer la distance de deux points dans un repère orthonormal du plan.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Calcule $\sqrt{9+16}$, $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ puis compare les deux résultats obtenus.

Activité 2.

1. Place les deux points A(2 ; 1) et B(4 ; 3) dans un repère orthonormal du plan.
2. Calcul AB^2 (carré de la distance AB).
3. Déduis-en la distance AB.

À Retenir

Dans un plan muni d'un repère orthonormal la distance de deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ est : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

B. Exercices d'application

1. Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(4 ; 3) ; B(−2 ; 5) ; C(−3 ; −1) ; D(6 ; −3) ; E(0 ; −7) et F(5 ; 0).
2. Calcule les distances AB, BC, CD, DA, AC, CE, EF et OF.

6.2 Coordonnées d'un vecteur

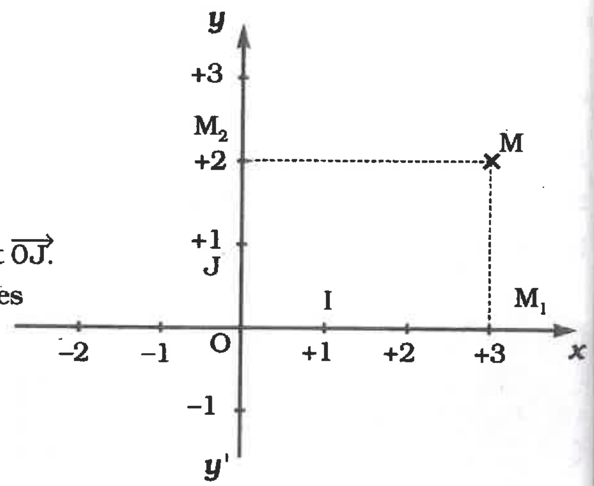
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Sur la figure suivante où M est le point de coordonnées (3,2), place le point M_1 projeté orthogonal de M sur (OI).



1. Écris le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ à l'aide de $\overrightarrow{OI}$.
2. Écris le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ à l'aide de $\overrightarrow{OJ}$.
3. Complète l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{\ldots M_2}$.
4. Déduis-en une écriture de $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
   Le couple de réels (3 ; 2) est appelé les coordonnées (ou composantes) de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, I, J).

Activité 2.

1. Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(2 ; 1), B(4 ; 5), C $\left(-4 ; \frac{3}{2}\right)$.
2. Place les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OF} = -3\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$.
3. Écris $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
4. Donne le couple de coordonnées de chacun des points E et F.

Activité 3.

Soit A et B, deux points d'un repère orthonormal tels que A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

1. Recopie puis complète :
   $\overrightarrow{OA} = \ldots \overrightarrow{OI} + \ldots \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{O} \ldots + \overrightarrow{OB}$
   $\overrightarrow{OB} = \ldots \overrightarrow{OI} + \ldots \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{AB} = (- \ldots \overrightarrow{OI} - \ldots \overrightarrow{OJ}) + (\ldots \overrightarrow{OI} + \ldots \overrightarrow{OJ})$.
2. En supprimant les parenthèses puis en réduisant cette dernière égalité, tu en déduis que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$.
   Quelles sont alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J) ?

À Retenir

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on appelle coordonnées ou composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de réels $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
$x_B - x_A$ est la première composante (ou première coordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.
$y_B - y_A$ est la deuxième composante (ou deuxième coordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.

On note $\overrightarrow{AB}$ $(x_B - xA, y_B - yA)$ ou $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque : distance entre deux points.
Dans l'égalité $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ où A et B sont deux points du plan muni d'un repère orthonormal, les réels $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Méthode
Pour déterminer la distance entre deux points A et B du plan muni d'un repère orthonormal, on calcule :
– les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
– les carrés de ses coordonnées ;
– la somme des carrés de ses coordonnées ;
– la racine carrée de cette somme.

B. Exercices d'application

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points R(3 ; 4) ; S(5 ; −1) ; Q(−2 ; −3) et T(1 ; 6).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$; $\overrightarrow{RT}$; $\overrightarrow{RO}$; $\overrightarrow{SQ}$; $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TI}$.
2. Calcule les distances RS, RT, RO, SQ, TS, et TI.

6.3 Vecteurs égaux - Vecteurs opposés

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal :
– deux vecteurs égaux ;
– deux vecteurs opposés.

A. Activités préparatoires

Rappel des coordonnées du milieu I d'un segment [AB] : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Activité 1.

1. Dans un repère orthonormal, place les points A(3 ; 4), B(6 ; 0), C(0 ; −5) et D(−3 ; −1).
2. Calcule les coordonnées du point M milieu du segment [AC].
3. Justifie que M est milieu du segment [BD] et déduis-en la nature de ABCD. Recopie et complète :
   a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D...}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{...}$
   b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C...}$ sont des vecteurs opposés ; $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{...}$ sont opposés.
4. Calcule puis compare les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   Fais de même pour $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MD}$.

À Retenir

Dans un repère orthonormal :

- Deux vecteurs opposés ont leurs coordonnées respectivement opposées :
  soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$, $\vec{u} = -\vec{v}$ signifie $x = -x'$ et $y = -y'$.
- Deux vecteurs égaux ont leurs coordonnées respectivement égales :
  soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$, $\vec{u} = \vec{v}$ signifie que $x = x'$ et $y = y'$.

B. Exercices d'application

On trouve dans un repère orthonormal du plan les points A(2 ; 3), B(−1 ; 2) et C(−2 ; −1).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. Déduis-en les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calcule les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

6.4 Somme de deux vecteurs - Produit d'un vecteur par un réel - Vecteur nul

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :

– calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs ;

– calculer les coordonnés du vecteur produit d'un vecteur par un réel ;

– reconnaître le vecteur nul.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Place les points suivants dans un repère orthonormal : A(2 ; 3) ; B(4 ; 5) et C(6 ; 2).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{AC}$.
3. Recopie et complète $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ...$
4. Calcule la somme des premières coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   Compare ce résultat à la première composante de $\overrightarrow{AC}$.
5. Calcule la somme des deuxièmes composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   Compare ce résultat avec la deuxième composante de $\overrightarrow{AC}$.
   Tu constates que chaque composante de $\overrightarrow{AC}$ est une somme des composantes correspondantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Activité 2.

1. Place dans un repère orthonormal les points E(1 ; 3), F(0 ; 1) et G(−3 ; −5), puis vérifie que EG = 4EF.
2. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.
3. Calcule le produit 4 × 1re composante de $\overrightarrow{EF}$. Compare ce résultat avec la 1re composante de $\overrightarrow{EG}$.
4. Calcule le produit 4 × 2e composante de $\overrightarrow{EF}$. Compare ce résultat avec la 2e composant de $\overrightarrow{EG}$.
5. Recopie et complète : $x_{\overrightarrow{EG}} = 4 \times ...$; $y_{\overrightarrow{EG}} = ...$

Activité 3.

1. Dans un repère orthonormal, place les points A(3 ; 4) et B(5 : -2).
2. Soit M le milieu du segment [AB], recopie et complète : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = ...$
3. Calcule les coordonnées du point M.
4. On pose $\vec{w} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Calcule les coordonnées de $\vec{w}$.
   Déduis-en les coordonnées du vecteur nul.

À Retenir

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

  Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, alors $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$.
- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$.

  Si $\vec{w} = k\vec{u}$, alors $\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$
- Le vecteur nul a pour coordonnées (0 ; 0) : $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

B. Exercices d'application

On trouve dans un repère orthonormal les vecteurs $\vec{u}(-\frac{1}{2} ; 3)$; $\vec{v}(2 ; 4)$; $\vec{a}(-3 ; -1)$; $\vec{b}(-5 ; 7)$ et $\vec{c}(-2 ; -4)$.
Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{a}$; $\vec{v} + \vec{a}$; $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{a})$; $2\vec{u}$; $\vec{v} + \vec{c}$ et $-3\vec{b}$.

6.5 Vecteurs colinéaires

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître deux vecteurs colinéaires à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs colinéaires.
On sait que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} = k\vec{v}$.
Recopie puis complète ;

$x = \ldots ; y = \ldots ;$

$k = \frac{x}{\ldots} = \frac{\ldots}{y}$.

Déduis-en la relation $xy' - x'y = 0$.

À Retenir

Soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs dans un repère orthonormal :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

B. Exercices d'application

On donne les vecteurs $\vec{u}(2 ; 3)$; $\vec{v}(3 ; 4{,}5)$; $\vec{r}(1{,}5 ; 2)$; $\vec{s}(3 ; 4)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. En est-il de même pour $\vec{u}$ et $\vec{r}$; $\vec{r}$ et $\vec{s}$?

6.6 Vecteurs orthogonaux

Compétences exigibles

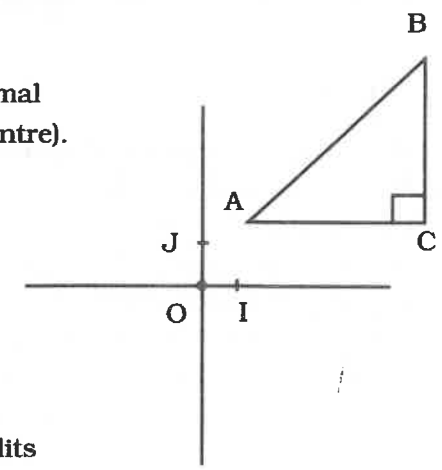
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître deux vecteurs orthogonaux à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

A, B, C sont trois points du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tels que ABC soit un triangle rectangle en C (fig. ci-contre).

On pose $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.



1. Recopie puis complète $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \ldots$
   Déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule AC^2, AB^2 puis CB^2.
3. Applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC puis montre que $xx' + yy' = 0$.

NB : Si ABC est rectangle en C, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dits orthogonaux.

À Retenir

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, deux vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

B. Exercices d'application

Dans les expressions suivantes, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

a) $\vec{u}(-6\,;\,2)$; $\vec{v}(3\,;\,9)$ b) $\vec{u}(1\,;\,4)$; $\vec{v}(2\,;\,3)$ c) $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;\,3\right)$; $\vec{v}\left(4\,;\,-\frac{1}{2}\right)$

6.7 Équation d'une droite dont on connaît deux points

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer une équation de droite à partir des coordonnées de deux de ses points.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Place dans un repère orthonormal les points A(1 ; 2) et B(3 ; 4) et trace la droite (AB).
2. En te servant de la figure que tu viens de tracer, donne la position de la droite (AB) par rapport aux axes de coordonnées.
3. Soit M(x ; y) un point de la droite (AB), recopie et complète : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont ....
4. Exprime en fonction de x et y les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et calcule celles de $\overrightarrow{AB}$.
5. Déduis-en la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
6. Écris cette relation sous la forme $ax + by + c = 0$.

Tu viens de trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

Activité 2.

1. Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(2 ; 3) et B(2 ; −5) puis trace la droite (AB).
2. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, recopie et complète : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont ....
3. Soit M(x ; y) un point de la droite (AB), recopie et complète : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont ....
4. Exprime en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
5. Écris la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
6. Écris cette relation sous la forme $ax + c = 0$.

Tu viens de trouver une équation cartésienne de la droite (AB) parallèle à l'axe (yy').

Activité 3.

1. Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(4 ; 3) et B(-1 ; 3).
2. En te servant de la figure, recopie et complète : les droites (AB) et (OI) sont ....
3. a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b) Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). Recopie et complète : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont ....

   c) Exprime en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

   d) Déduis-en la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
4. Écris cette relation sous la forme $by + c = 0$.

Tu viens de trouver une équation cartésienne de la droite (AB) parallèle à l'axe (OI).

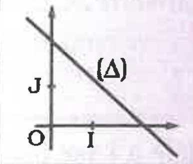
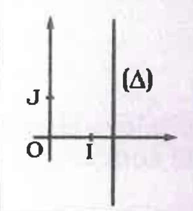
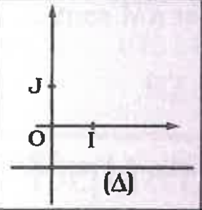
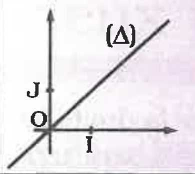
Activité 4.

1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) le point A(3 ; 2) puis trace la droite (OA).
2. Soit M(x ; y) un point de la droite (OA). Recopie et complète : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont ....
3. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ et exprime en fonction de x et y les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$.
4. Déduis-en la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$.
5. Écris cette relation sous la forme $ax + by = 0$.

Tu viens de trouver une équation cartésienne de la droite (OA) passant par l'origine.

À Retenir

Une équation cartésienne d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$, a, b et c étant des réels fixés non tous nuls appelés coefficients et x et y étant des variables désignant les coordonnées d'un point M quelconque de cette droite.
Si (D) a pour équation $ax + by + c = 0$, on note :
(D) : $ax + by + c = 0$.

Configuration	Équation	Coefficients	Position par rapport aux axes
	$ax + by + c = 0$	$a \neq 0 \quad b \neq 0$ $c \neq 0$	(D) : $ax + by + c = 0$ est sécante aux axes
	$ax + c = 0$	$a \neq 0 \quad b = 0$ $c \neq 0$	(D) : $ax + c = 0$ est parallèle à (OJ)
	$by + c = 0$	$a = 0 \quad b \neq 0$ $c \neq 0$	(D) : $by + c = 0$ est parallèle à (OI)
	$ax + by = 0$	$a \neq 0 \quad b \neq 0$ $c = 0$	(D) : $ax + by = 0$ passe par l'origine O

Méthode

Pour déterminer une équation générale (ou équation cartésienne) d'une droite passant par deux points A et B du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on peut procéder comme suit :

- Considérer un point M(x ; y) quelconque de la droite (AB).
- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer celle de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
- Traduire la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de leurs coordonnées.
- Écrire cette relation sous la forme $ax + by + c = 0$. Cette formule constitue l'équation générale (ou équation cartésienne) de la droite (AB).

B. Exercices d'application

1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points E(-3 ; 0) et F(0 ; 5) et C (2 ; 2).
2. Détermine une équation générale de chacune des droites suivantes : (OE) et (OF) ; (OC) et (EF).

6.8 Équation réduite d'une droite

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :

- *déterminer l'équation réduite d'une droite ;*
- *passer de l'équation réduite d'une droite à l'une de ses équations générales et inversement si possible.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation générale $2x - y + 5 = 0$.

1. Exprime y en fonction de x.
   L'équation ainsi obtenue est appelée équation réduite de la droite (D).
2. Donne l'équation réduite de chacune des droites suivantes :
   (D1) : $3x + 2y + 7 = 0$
   (D2) : $5x + 2y = 0$
   (D3) : $-3x - 1 = 0$
   (D4) : $3y - 5 = 0$

Activité 2.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation réduite $y = x - 5$.

1. À partir de cette équation réduite, écris une équation générale de la droite (D).
2. Donne une équation générale de chacune des droites suivantes :
   (D1) : $y = 3x$
   (D2) : $y = \sqrt{2}\,x + 3$
   (D3) : $y = \dfrac{5}{3}$

À Retenir

- Une équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$, m et p étant deux réels fixés. Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation réduite de la forme $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$).
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).
- Toute droite passant par l'origine des axes a une équation réduite de la forme $y = k\,x$ ($k \in \mathbb{R}$).

B. Exercices d'application

1. Donne si possible l'équation réduite de chacune des droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) d'équations générales respectives suivantes : $6x - 2y + 10 = 0$; $2x + 4y - 8 = 0$; $3x - 5 = 0$; $4y + 6 = 0$
2. Donne une équation générale de chacune des droites (L_1), (L_2) et (L_3) d'équations réduites respectives suivantes : $y = -x - 1$; $y = \frac{1}{2}x + 2$; $x = 5$.
3. Précise la position de chacune de ces droites par rapport aux axes.

6.9 Coefficient directeur et vecteur directeur

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

– être capable de reconnaître et de déterminer le coefficient directeur d'une droite ;

– connaître et être capable de déterminer un vecteur directeur d'une droite.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit (D) une droite d'équation $y = 2x + 1$ du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

1. Vérifie que les points A(0 ; 1), B($-\frac{1}{2}$; 0) et C(2 ; 5) appartiennent à la droite (D).
2. Calcule les quotients $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.
3. Compare les résultats au coefficient de x dans l'équation réduite de (D).
   Le coefficient 2 de x dans l'équation réduite de (D) est appelé coefficient directeur de la droite (D).

Activité 2.

Considère la droite (D) de l'activité 1.

1. Place les points A, B et C puis trace la droite (D).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et montre que chacun de ces vecteurs est colinéaire à $\vec{u}$(1 ; 2).
3. Construis $\vec{u}$ à partir de l'origine O.
   Tu constates que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ ont même direction que (D). Ce sont des vecteurs directeurs de (D).

À Retenir

(D) étant une droite d'équation $y = mx + p$ et A et B, deux points quelconques de (D) :

a) Le réel m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est appelé coefficient directeur de la droite (D)
avec ($x_B - x_A \neq 0$) (m ne dépend pas des points A et B choisis sur (D)).

b) Le vecteur $\vec{u}$(1 ; m) est appelé vecteur directeur de la droite (D). Tout vecteur ayant même direction que la droite (D) est aussi appelé vecteur directeur de (D).

B. Exercices d'application

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne les points A(6 ; 1), B(2 ; 3) et C(1 ; 3).
   a) Calcule le coefficient directeur de chacune des droites (AB), (BC) et (AC).
   b) Détermine une équation générale puis l'équation réduite de chacune de droites (AB), (BC) et (AC).
2. (L) et (R) sont deux droites d'équations réduites respectives $y = \frac{1}{3}x - 3$, $y = 5x + 2$.
   Détermine un vecteur directeur de chacune de ces droites.

6.10 Équation d'une droite dont on connaît le coefficient directeur et un point ou un vecteur directeur et un point

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer une équation de droite connaissant les coordonnées d'un de ses points et son coefficient directeur ou les coordonnées d'un de ses points et d'un de ses vecteurs directeurs.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit (D) une droite de coefficient directeur 2 et A(−3 ; 2), un point de (D).
L'équation de (D) est de la forme $y = mx + p$.

1. Réécris cette équation en remplaçant m par sa valeur.
2. Dans cette nouvelle équation, remplace x et y respectivement par −3 et 2.

3. Déduis-en la valeur de p.
L'équation obtenue en remplaçant m et p par leurs valeurs respectives dans l'équation de départ constitue l'équation réduite de la droite (D).

Activité 2.

Soit (D) une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}(2 ; 3)$ et A(5 ; 3), un point de (D).

1. Dans un repère orthonormal :
   a) place le point A,
   b) construis le vecteur $\vec{u}$,
   c) trace la droite (D).
2. Soit M(x ; y) un point quelconque de (D), recopie et complète : $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont ....
3. Exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
4. Traduis la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de leurs coordonnées.
5. Déduis-en une équation générale de (D).

À Retenir

Méthode

- Pour déterminer une équation réduite $y = mx + p$, d'une droite (D) dont on connaît un point A(x_A ; y_A) et le coefficient directeur m :
  1. On remplace :
     – m par sa valeur dans l'équation,
     – x et y respectivement par x_A et y_A dans l'équation qu'on vient d'obtenir.
  2. On calcule la valeur de p.
  3. On écrit une équation de la droite (D) en remplaçant m et p par leurs valeurs.
- Pour déterminer une équation générale d'une droite (D) dont on connaît un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A(x_A ; y_A) :
  1. On considère un point M(x ; y) de (D).
  2. On exprime les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
  3. On traduit la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ à l'aide de leurs coordonnées pour en déduire une équation générale de (D).

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Détermine une équation réduite de la droite (Δ) passant par le point $A\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur 2.

Exercice 2.

Détermine une équation générale de la droite (Δ) passant par B(−1 ; 1) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\left(1 ; \frac{1}{3}\right)$.

6.11 Propriétés

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître deux droites parallèles et deux droites perpendiculaires connaissant leurs coefficients directeurs ou un vecteur directeur de chaque droite.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit les droites (D) : $y = 2x + 1$, (D') : $y = 2x - 3$ et (Δ) : $y = 2x + 4$.

1. Compare les coefficients directeur de (D) et (D') puis ceux de (D) et (Δ).
2. Calcule les ordonnées respectives des points A et B de (D) d'abscisses respectives 0 et 1 puis déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Fais de même pour les points A' et B' de (D') d'abscisses respectives 2 et 1.
4. Calcule les ordonnées des points E et F de (Δ) d'abscisses respectives 0 et 1 puis déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.
5. Vérifie si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ d'une part et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ d'autre part sont colinéaires.
   Déduis-en la position de (D) et (D') puis celle de (D) et (Δ).

Activité 2.

Soit les droites (Δ) : $y = 2x - 3$, (Δ') : $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et (L) : $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

1. Calcule le produit des coefficients directeurs de (Δ) et (Δ') et celui des coefficients directeurs de (Δ) et (L).
2. Calcule les ordonnées des points A et B de (Δ) d'abscisses respectives 1 et 2 puis déduis-en les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
3. Fais de même pour les points A' et B' de (Δ') d'abscisses respectives 1 et 2.
4. Calcule les ordonnées des points E et F de (L) d'abscisses −3 et 2 puis les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$.
5. Vérifie si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ d'une part et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ d'autre part sont orthogonaux.
   Déduis-en la position de (Δ) et (Δ') puis celle de (Δ) et (L).

Activité 3.

Soit (Δ) $y = ax + b$ et (Δ') : $y = a'x + b'$.

1. Trouve les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectifs de (Δ) et (Δ').
2. Trouve une relation entre a et a' pour que (Δ) et (Δ') soient parallèles.
3. Trouve une relation entre a et a' pour que (Δ) et (Δ') soient perpendiculaires.

À Retenir

– Soit (D) et (D') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

• Si $m = m'$, alors (D) est parallèle à (D')

(D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$
si $m = m'$, alors (D) // (D').

• Si (D) est parallèle à (D'), alors $m = m'$

(D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$
si (D) // (D'), alors $m = m'$.

– Soit (Δ) et (Δ') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

• Si $mm' = -1$, alors (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

(D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$
si $mm' = -1$, alors (D) ⊥ (D').

• Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires, alors $mm' = -1$

(D) : $y = mx + p$; (D') : $y = m'x + p'$
si (D) ⊥ (D'), alors $mm' = -1$.

B. Exercices d'application

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les droites (Δ), (Δ') et (Δ'') d'équations respectives $2x - 3y + 5 = 0$, $\frac{3}{2}x + y + 1 = 0$ et $4x - 6y + 7 = 0$.

Sans faire la représentation graphique, justifie que (Δ) est parallèle à (Δ'') et que (Δ) est perpendiculaire à (Δ').

6.12 Représentation graphique d'une droite à partir d'une équation

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter dans un repère orthonormal une droite à partir d'une de ses équations générales.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on trouve une droite (D) d'équation $2x + 3y - 1 = 0$.

1. Calcule les coordonnées des points A et B d'abscisses respectives 2 et -1.
2. Le point C $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ appartient-il à la droite (D) ?
3. Construis les points A, B et C dans le repère (O, I, J) puis trace la droite (AB).
La droite que tu viens de tracer est la représentation graphique de la droite (D).

À Retenir

Méthode

Pour représenter une droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal (O, I, J), on peut procéder comme suit :

- Calculer les coordonnées de trois points quelconques A, B et C d'abscisses respectives x_A, x_B et x_C (ou d'ordonnées y_A, y_B et y_C respectivement) à partir de l'équation générale donnée.
- Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J).
- Tracer la droite (AB) (cette droite passe par C).
La droite (AB) est alors la représentation graphique de la droite (D).

B. Exercices d'application

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), représente graphiquement les droites (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) et (Δ_4) d'équations respectives $3x - 2y + 5 = 0$, $3x - 2y = 0$, $3x - 5 = 0$ et $2y + 5 = 0$.

6.13 Représentation graphique d'une droite à partir d'un de ses points et de son coefficient directeur

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter dans un repère orthonormal une droite à partir d'un de ses points et de son coefficient directeur.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit (D) une droite de coefficient directeur 3 et A(2 ; 1) un point de (D).

1. Trouve l'équation réduite de (D).
2. Trouve les ordonnées des points B(1 ; …) et C(0 ; …) de (D). Puis construis cette droite dans un repère orthonormal (O, I, J).

À Retenir

Méthode

Pour représenter dans un repère orthonormal une droite dont on connaît un de ses points et son coefficient directeur, on peut procéder comme suit :

- Déterminer son équation réduite à l'aide du coefficient directeur et les coordonnées du point donné.
- Déterminer les coordonnées de deux autres points quelconques de la droite à partir de son équation réduite.
- Placer les trois points dans un repère orthonormal.
- Tracer la droite passant par ces points (les points sont alignés).

On vient ainsi de tracer une représentation graphique de la droite.

B. Exercices d'application

Représente graphiquement dans un repère orthonormal (O, I, J) du plan, la droite (Δ) passant par E $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de coefficient directeur 2.

6.14 Représentation graphique d'une droite à partir d'un de ses points et d'un vecteur directeur

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter dans un repère orthonormal une droite à partir d'un de ses points et d'un de ses vecteurs directeurs.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on trouve une droite (D) contenant le point A(3 ; 5) et de vecteur directeur $\vec{u}(-2\ ;\ -3)$.

1. Construis dans un repère orthonormal le vecteur $\vec{u}$ et place le point A.
2. À l'aide de la règle et de l'équerre, trace la droite parallèle au support du vecteur $\vec{u}$ passant par A.

Tu viens ainsi de tracer une représentation graphique de la droite (D).

À Retenir

Méthode

Dans un repère orthonormal, pour représenter graphiquement une droite à partir d'un de ses points et d'un de ses vecteurs directeurs, on peut procéder comme suit :
- Construire le vecteur directeur dans le repère.
- Placer le point donné.
- Tracer la droite parallèle au support du vecteur directeur construit et passant par le point donné.

B. Exercices d'application

Dans un repère orthonormal (O, I, J), construis les droites suivantes :
(D) de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2)$ passant par A(−2 ; −3) ;
(D) de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 5)$ passant par l'origine O du repère.

Exercices d'entraînement

Exercice 1
1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points E(2 , 3), A(7 ; 8), F(−2 ; 3), G(4 ; 2), H(−3 ; −2) et R(4 ; −3).
2. Calcule les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ER}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HF}$.

Exercice 2
On considère les points A(4 ; −2), B(0 ; 1) et C(3 ; 0) du plan muni d'un repère orthonormal.
Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3
Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points G(−4 ; 2), P(4 ; 3) et H(4 ; 0).
Calcule les distances GH, PH et HP.

Exercice 4
On considère les points A(−2 ; 2), B(2 ; 4) et C(8 ; −2).
1. Détermine les coordonnées des points A', B', C' milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
2. Calcule BC, CA, AB, AA', BB' et CC'.

Exercice 5
On considère les vecteurs $\vec{u}(3 ; 4)$ et $\vec{v}(6 ; 8)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
Détermine les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Exercice 6
On considère les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}(4 ; 6)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 7
1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points A(3 ; 6), C(−3 ; 4), E(4 ; −2) et F(−1 ; −2).
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AF}$.
3. Détermine une équation de chacune des droites (AC), (AE), (AF) et (EF).

Exercice 8
On considère un repère orthonormal (O, I, J) et les points A, B et C. Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite (AB) et l'équation de la droite parallèle à (AB) qui passe par le point C :

A(2 ; 0), B(3 ; 5) et C(1 ; −1).

A(5 ; 2), $B\left(\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ et C(5 ; −3).

A(3 ; 5), $B\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ et C (3 ; 10).

Exercice 9
Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points $S\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{4}\right)$, T(3 ; −3) et R(−3 ; 2).
1. Détermine l'équation générale de la droite (RT).
2. Détermine l'équation générale de la droite perpendiculaire à (RT) et passant par S.

Exercice 10
On considère les droites(Δ) et (Δ') d'équations respectives $2x - 3y + 2 = 0$ et $6x + 4y - 1 = 0$.
1. Détermine un vecteur directeur de (Δ) et un vecteur directeur de (Δ').
2. Les droites (Δ) et (Δ') sont-elles perpendiculaires ?
3. Détermine le coefficient directeur de (Δ) et celui de (Δ').
4. Détermine une équation générale de la droite parallèle à (Δ) et passant par le point A(1 ; 3).

Exercice 11
Soit les droites (D) et (D') d'équations générales respectives
$4x - \frac{y}{2} + \frac{1}{3} = 0$ et $x - \frac{y}{8} + \frac{1}{3} = 0$.
1. Donne une équation réduite de chacune des droites (D) et (D').
2. Détermine le coefficient directeur de chacune des droites (D) et (D').
3. Les droites (D) et (D') sont-elles parallèles ?
4. Détermine une équation de la droite perpendiculaire à la droite (D) passant par le point A(2 ; 1).

Exercice 12
Soit les droites (Δ), (Δ') et (Δ'') d'équations respectives
$y = x + 4$, $y = -\frac{3}{2}x - 1$ et $y = -4x + 9$.
1. Détermine une équation générale de chacune des droites (Δ), (Δ') et (Δ'').
2. Détermine un vecteur directeur de chacune des droites.
3. Représente dans un même repère orthonormal les droites (Δ), (Δ') et (Δ'').

Exercice 13
1. Représente dans un même repère orthonormal les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = -\frac{1}{2}x - 2$ et $y = \frac{x}{5} - \frac{17}{5}$.
2. Détermine les coordonnées du point d'intersection F des droites (Δ) et (Δ').

Exercice 14
On considère deux droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = 5x + 2$ et $y = -x - 1$ dans un repère orthonormal (O, I, J).
1. Trace les droites (Δ) et (Δ') et détermine graphiquement les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et (Δ'). Calcule les coordonnées de A.

Exercices de synthèse

Exercice 15
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A(3 ; 2), B(−1 ; −2) et C(3 ;−2).
Démontre que le triangle ABC est un rectangle isocèle.

Exercice 16
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, place les points A(−2 ; 1), B(1 ; 2), C(2 ; −1) et D(−1 ; −2).
1. Montre que :
   a) O est milieu des segments [AC] et [BD].
   b) OA = OB = OC = OD.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 17
Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points A(1 ; 4), B(−1 ; 8) et D(9 ; 8).
1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$?
2. Calcule les longueurs AB, AD et BD.
3. Montre que le triangle ABD est rectangle en A.
4. Construis le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
5. Montre que ABCD est un parallélogramme.
6. Calcule les coordonnées de C.

Exercice 18
1. Dans un repère orthonormal (O, I, J), trace les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) d'équations respectives : $y = 2x + 3$, $y = -\frac{x}{2} + 8$ et $y = 1$.
2. Détermine les coordonnées des points A, B et C définis par $\{A\} = (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$, $\{B\} = (\Delta_3) \cap (\Delta_1)$ et $\{C\} = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$.
3. Donne les coefficients directeurs des droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3).
4. Montre que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.
5. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 19
Dans un repère orthonormal (O, I, J) :
1. Trace la droite (Δ) d'équation réduite $y = -x + 3$.
2. Détermine l'équation réduite de la droite (Δ') passant par le point A(3 ; −3) et parallèle à (Δ).
3. Détermine l'équation de la droite (Δ'') passant par A(3 ; −3) et perpendiculaire à (Δ).

Exercice 20

Dans un repère orthonormal :

1. Trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = -3x - 2$ et $y = x + 2$.
2. Détermine les coordonnées du point d'intersection A, de (D_1) et (D_2).
3. Vérifie que le point B(0 ; 2) est un point de (D_2).
4. Détermine l'équation de la droite (D_3) perpendiculaire à (D_2) en B.
5. Vérifie que le point E(-2 ; 4) appartient à (D_1) et à (D_3).
6. Quelle est alors la nature du triangle ABE ?
7. Calcule les distances AE, AB, BE puis déduis-en le cosinus de $\widehat{AEB}$.

Exercice 21

1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points $A\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$, B(3 ; 6) et C(−1 ; 2).
2. Calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Détermine l'équation de la parallèle à (AB) passant par C.
4. Détermine l'équation de la perpendiculaire à (AB) en C.

Exercice 22

1. Place dans un repère orthonormal (O, I, J) les points A(−4 ; 3), B(0 ; −1), C(4 ; 3) et E(2 ; −3).
2. Montre que les points A, B et E sont alignés.
3. Calcule les distances AB, AC et BC.
4. Quelle est la nature du triangle ABC ?
5. Détermine les coordonnées du point E' tel que CBEE' soit un parallélogramme.

Exercice 23

1. Place dans un repère orthonormal les points A(6 ; 5), B(7 ; 2) et C(−3 ; 2).
2. Calcule les coefficients directeurs des droites (AC) et (AB).
3. Montre que le triangle ABC est rectangle en A.
4. Calcule les longueurs AC, AB et BC.
5. Calcule les coordonnées des milieux respectifs des segments [AC] et [BA].

Exercice 24

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, place les points A(−1 ; −2), B(3 ; 2) et C(5 ; 0).

1. Calcule les coordonnées de I milieu de [AC].
2. Calcule les coordonnées de D symétrique de B par rapport à I.
3. Détermine la nature du quadrilatère ABCD.
4. Construis le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$. Quelle est la nature du quadrilatère DBEA ?

Exercice 25

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, place les points A(2 ; 5), B(8 ; 2) et C(−2 ; −3).

1. Calcule les distances AB, AC et BC.
2. Détermine les coordonnées de D image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la nature du quadrilatère ABDC ainsi que les coordonnées de I, centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

Exercice 26

1. Place dans un repère orthonormal, les points A(2 ; −1), B(3 ; −2) et C(1 ; −4).
2. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calcule les distances AB, AC et BC.
4. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Exercice 27

1. Place dans un repère orthonormal le point A(4 ; −2).
2. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre A et de rayon r = 5. Le point B(1 ; 2) appartient-il au cercle $(\mathscr{C})$?
3. Détermine l'équation de la droite perpendiculaire à (AB) en B. Que représente-t-il pour le cercle $(\mathscr{C})$?

Exercice 28

1. Trace dans un repère orthonormal (O, I, J) les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = -2x + 2$ et $y = x - 1$.
2. Place les points E(−2 ; 1), F(2 ; 3) et G(4 ; 1).

3. Détermine les coordonnées des points H et K, milieux respectifs de [EF] et [FG].
4. Montre que H appartient à (d) et K appartient à (d').
5. Montre que (EF) ⊥ (d) et (FG) ⊥ (d').
6. Quelle est la transformation qui associe E à G ?

Exercice 29

1. Place les points M(3 ; 2), N(1 ; -3) et A(6 ; -5) dans un repère orthonormal.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{NA}$.
3. Calcule les longueurs MN, MA, et AN.
4. Montre que le triangle MAN est rectangle.
5. Précise le centre et le rayon du cercle circonscrit à MAN.
6. Détermine l'équation de la tangente au cercle en M.

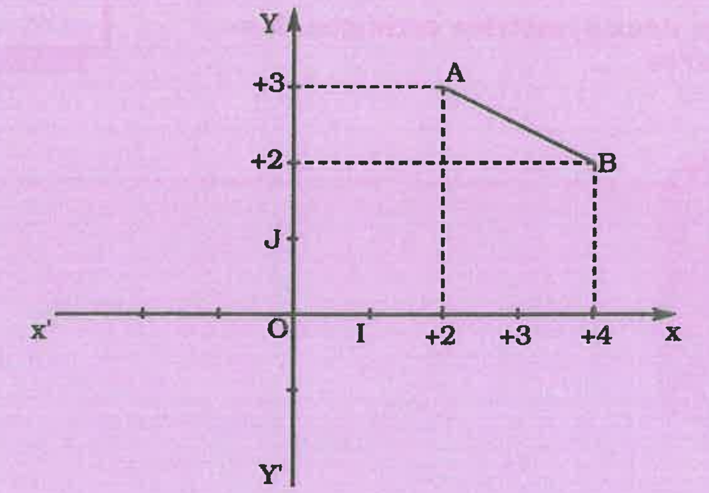
Exercice 30

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on présente les points A(2 ; 4), B(2 ; −2), C(1 ; 3) et D(7 ; 3).
   a) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
   b) Détermine les coordonnées du point K, intersection des droites (AB) et (CD).
2. Soit A' le symétrique de A par rapport à (CD).
   a) Calcule les coordonnées de A'.
   b) Montre que (CA') est une hauteur du triangle BCD.
   c) En déduire que A' est l'orthocentre du triangle BCD.
3. a) Montre que (CA) // (BD).
   b) Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils colinéaires ? Justifie ta réponse.
   c) Calcule les distances CB et AD.
   d) En déduire la nature du quadrilatère ADBC.

Solution de la situation problème

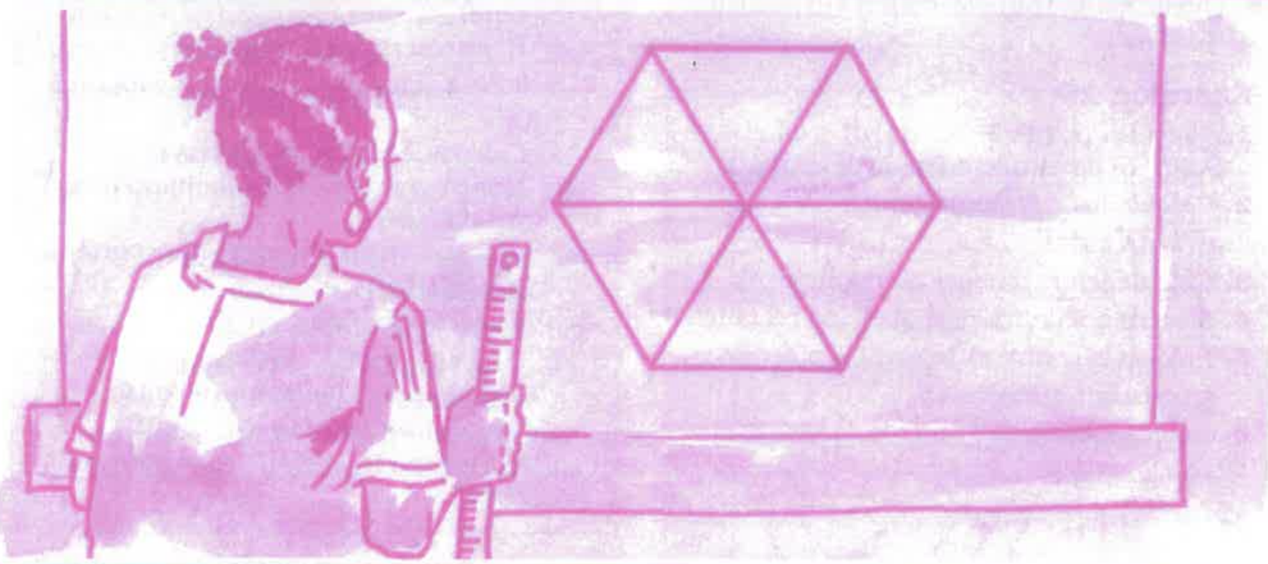
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JO} + 2\overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$$



CHAPITRE

7 TRANSFORMATIONS DU PLAN

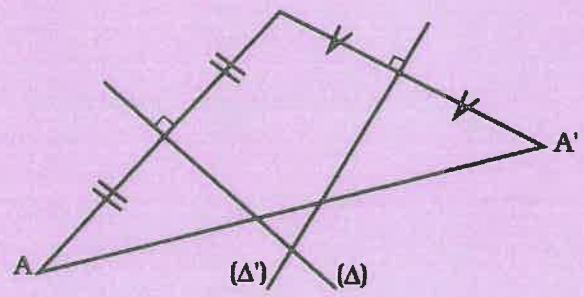


Sommaire

Introduction

Les symétriques de figures donnent avec leurs antécédents de belles formes utilisées souvent en architecture, en tapisserie et dans les arts décoratifs.

Situation problème



Par quelles transformations le point A' est-il l'image du point A ?

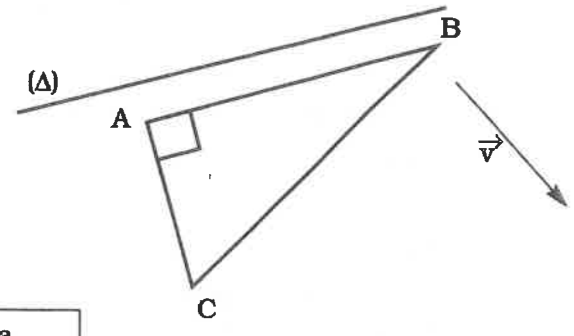
7.1 Exemples de transformations

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître une transformation, de connaître et d'utiliser ses propriétés pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

Activité 1.



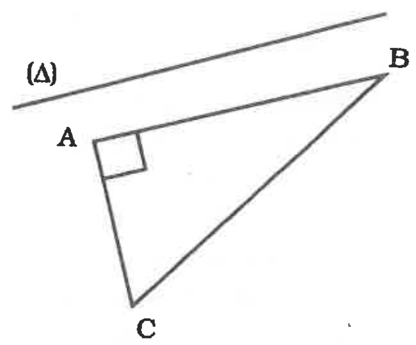
Soit (F) la figure formée du triangle ABC et de la droite (Δ) parallèle à (AB).

1. Reproduis la figure ci-contre.
2. Construis l'image (F') de la figure (F) par la translation de vecteur $\vec{v}$.
3. Recopie et complète le tableau suivant :

	a pour image par la translation de vecteur $\vec{v}$
A	
B	
C	
(Δ)	
ABC	

4. Recopie et complète les énoncés suivants :
   (Δ) // (AB), donc (Δ') .... (A'B')
   $\widehat{A} = 90°$; $\widehat{A'}$ = ...
   AB = ... ; AC = ... ; BC = ...
   Donc, la translation conserve ....

Activité 2.



Soit (F) la figure formée du triangle ABC et de la droite (Δ) parallèle à (AB).

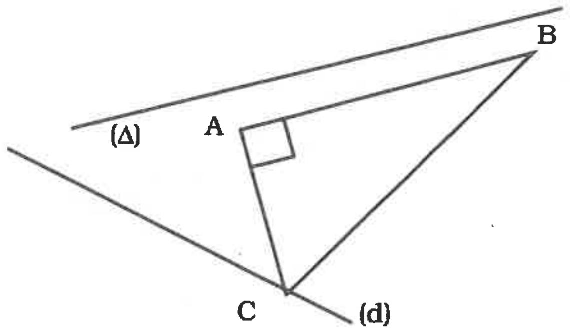
1. Reproduis la figure ci-contre :
2. Construis le symétrique (F') de la figure (F) par la symétrie centrale de centre C.

3. Recopie et complète le tableau :

	a pour image par la symétrie de centre C
A	
B	
C	
(Δ)	
ABC	

4. Recopie et complète les énoncés suivants :
(Δ) // (AB), donc (Δ') .... (A'B')
$\widehat{A} = 90°$; $\widehat{A'}$ = ...
AB = ... ; AC = ... ; BC = ...
Donc, la symétrie centrale conserve ...., ... et ....
C est son propre ....

Activité 3.



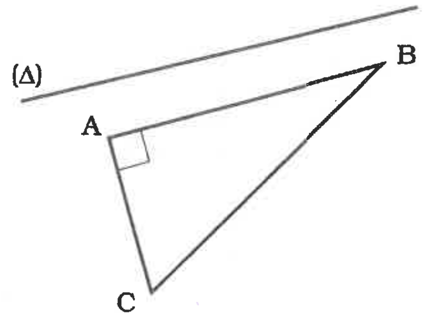
Soit (F) la figure formée du triangle ABC et de la droite (Δ) parallèle à (AB).

1. Reproduis la figure ci-contre.
2. Construis le symétrique (F') de la figure (F) par rapport à la droite (d).
3. Recopie et complète le tableau :

	a pour image par la symétrie d'axe (d)
A	
B	
C	
(Δ)	
ABC	

4. Recopie et complète les énoncés suivants :
(Δ) // (AB), donc (Δ') .... (A'B')
$\widehat{A} = 90°$; $\widehat{A'}$ = ...
AB = ... ; AC = ... ; BC = ...
Donc, la symétrie axiale conserve ...., ... et ....
Tout point de la droite (d) est son propre ....
Donc, la droite (d) est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe (d).

Activité 4.



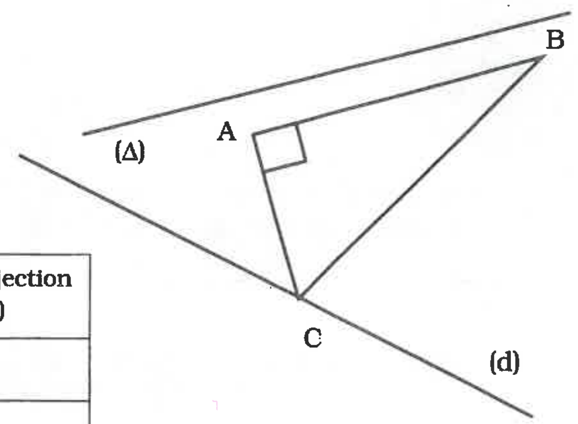
Soit (F) la figure formée du triangle ABC et de la droite (Δ) parallèle à (AB).

1. Reproduis la figure ci-contre.
2. Construis l'image (F')de la figure (F) par la rotation de centre C et d'angle 60° dans le sens direct.
3. Recopie et complète le tableau :

	a pour image par la rotation de centre C et d'angle 60°
A	
B	
C	
(Δ)	
ABC	

4. Recopie et complète les énoncés suivants :
(Δ) // (AB), donc (Δ') .... (A'B')
$\widehat{A} = 90°$; $\widehat{A'}$ = ...
AB = ... ; AC = ... ; BC = ...
Donc, la rotation conserve ....
Donc, la rotation axiale conserve ....
C est sa propre ....

Activité 5.



Soit (F) la figure formée du triangle ABC et de la droite (Δ) parallèle à (AB).

1. Reproduis la figure ci-contre.
2. Construis l'image (F') de la figure (F) par la projection orthogonale sur la droite (d).
3. Recopie et complète le tableau :

	a pour image par la projection orthogonale sur (d)
A	
B	
C	
(Δ)	
ABC	

4. Recopie et complète les énoncés suivants :
(Δ) // (AB), donc (Δ') .... (A'B').

5. Compare $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$; AB et A'B' ; BC et B'C' ; AC et A'C'.
a) On a (AB) // (Δ). A-t-on (A'B') // (Δ') ?
b) Recopie et complète : C est sa propre .... Tout point de (d) est ....
c) La projection orthogonale conserve-t-elle les angles ? les longueurs ? le parallélisme ?

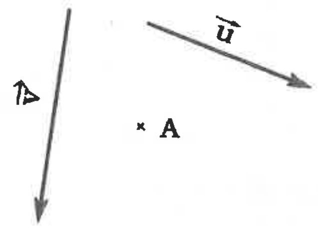
7.2 Étude de deux translations successives

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et d'utiliser la transformation résultant de l'application de deux translations successives pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

1. Reproduis la figure ci-dessous où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs distincts et A, un point du plan.
2. Construis l'image A' de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, puis construis l'image A" de A' par la translation de vecteur $\vec{v}$.
3. Recopie et complète :
$t_{\vec{u}}(A) = A'$ signifie $\overrightarrow{A...} = \vec{u}$; $t_{\vec{v}}(A') = ...$ signifie $\overrightarrow{A'...} = \vec{v}$
$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + ...$.
$\overrightarrow{AA''} = \vec{u} + ...$ signifie $A'' = t_{\vec{u}+\vec{v}}(A)$.



À Retenir

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Faire la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à faire la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Marque trois points A, B et C non alignés et construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes.
2. Construis les images des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.
3. Compare les figures obtenues avec les images et le triangle ABC.

Exercice 2.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même direction tels que $\vec{v} = 2\vec{u}$. Soit A un point du plan.
1. Construis l'image A" de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.
2. Montre que $\overrightarrow{AA''}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

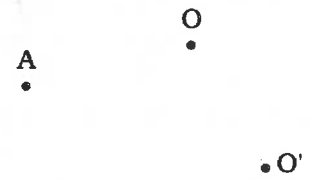
7.3 Étude de deux symétries centrales successives

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître la transformation résultant de l'application de deux symétries centrales successives et de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

A. Activités préparatoires

1. Reproduis la figure ci-contre où O et O' sont deux points du plan et A, un point quelconque.
2. Construis l'image A' de A par la symétrie de centre O.
3. Construis l'image A" de A' par la symétrie de centre O'.
4. Complète $\overrightarrow{AA''} = ... + ...$.
5. Montre que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$.



À Retenir

Soit O et O' deux points distincts du plan. Faire une symétrie de centre O suivie d'une symétrie de centre O' revient à faire une translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

B. Exercices d'application

Soit ABC un triangle quelconque.
1. Construis le point A' image du point A par la symétrie de centre B.
2. Construis le point A" image du point A' par la symétrie de centre C.
3. Justifie que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{BC}$.

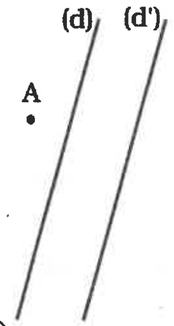
7.4 Étude de deux symétries orthogonales successives

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître la transformation résultant de deux symétries orthogonales successives et de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

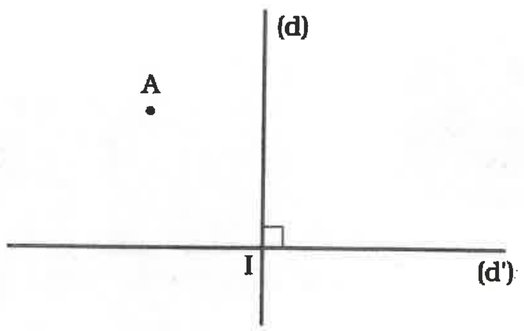
A. Activités préparatoires

Activité 1.



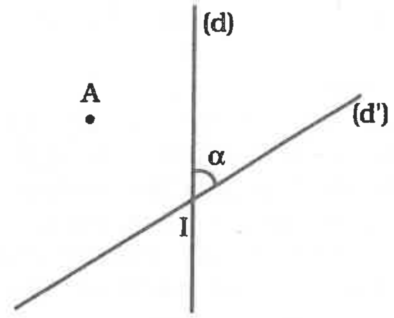
1. Reproduis la figure ci-contre où (d) et (d') sont deux droites parallèles strictement et A, un point du plan.
2. Construis le point A' symétrique de A par la symétrie orthogonale d'axe (d) et construis le point A'' symétrique de A' par la symétrie orthogonale d'axe (d').
3. Construis le point I et le point J tels que {I} = (d) ∩ (AA'), {J} = (d') ∩ (A'A'').
4. Recopie et complète en remplaçant le point par la lettre qui convient :
$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{\bullet A'}$; $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{\bullet A'}$; $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{\bullet A'} + \overrightarrow{A'\bullet} = 2\overrightarrow{\bullet A'} + 2\overrightarrow{A'\bullet} = 2\,(\overrightarrow{\bullet\bullet} + \overrightarrow{\bullet\bullet}) = 2\,\overrightarrow{\bullet\bullet}$.
A'' est l'image de A par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

Activité 2.



1. Reproduis la figure ci-contre où (d) et (d') sont deux droites perpendiculaires en I et A, un point du plan.
2. Construis le point A' symétrique de A par rapport à (d).
3. Construis le point A'' symétrique de A' par rapport à (d').
4. Place les points J et K tels que {J} = (d) ∩ (AA'), {K} = (d') ∩ (A'A'').
5. Recopie et complète les énoncés suivants :
Le quadrilatère IJA'K qui a trois angles droits est un ....
A' est le .... de A par rapport à (d), donc (d) est la médiatrice de ....
I appartient à (d) médiatrice de ...., donc IA = ... (1).
De même, A'' est le .... de A' par rapport à (d'), médiatrice de .... donc IA' = ... (2).
À partir des égalités (1) et (2), on peut dire que le point I est équidistant des sommets A, A' et A''.
Or A A'A'' est un triangle rectangle en A' donc le milieu de son hypoténuse [AA''] est équidistant des sommets A, A' et A''. Par conséquent I, point d'intersection des droites (d) et (d') est le milieu de .... d'où A'' est l'image de A par la symétrie ....

Activité 3.



1. Reproduis la figure ci-contre où (d) et (d') sont deux droites sécantes en I en formant un angle aigu α et A un point du plan.
2. Construis A' symétrique de A par rapport à (d).
3. Construis A'' symétrique de A' par rapport à (d').
4. Place les points J et K tels que {J} = (d) ∩ (AA') et {K} = (d') ∩ (A'A'').
5. Recopie et complète :
A' est le symétrique de ...... par rapport à (IJ), donc (IJ) est la médiatrice de ....., d'où IA = ...
Dans le triangle AIA' isocèle en I, (IJ) est en même temps la bissectrice de l'angle AI ..... ,
donc $\widehat{AIA'} = 2 \times \widehat{JIA'}$.
A'' est le symétrique de ..... par rapport à (IK), donc (IK) est la médiatrice de ......, d'où IA' = ...
Dans le triangle $\widehat{A'IA''}$ isocèle en I, (IK) est en même temps la bissectrice de l'angle $\widehat{A'I}$ ..... ,
donc $\widehat{A'IA''} = 2\widehat{A'I}$ .... . Montre que $\widehat{AIA''} = 2\alpha$ et que AI = IA''. A'' est l'image de A par ...... de centre ...... et d'angle ......

À Retenir

- Soit (d) et (d') deux droites strictement parallèles. Faire une symétrie orthogonale d'axe (d) suivie d'une symétrie orthogonale d'axe (d') revient à faire une translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$, IJ étant la distance des deux droites (d) et (d').
- Soit (d) et (d') deux droites perpendiculaires en I. Faire une symétrie orthogonale d'axe (d) suivie d'une symétrie orthogonale d'axe (d') revient à faire une symétrie centrale de centre I.
- Soit (d) et (d') deux droites sécantes en I et formant un angle aigu α. Faire une symétrie d'axe (d) suivie d'une symétrie d'axe (d') revient à faire une rotation de centre I et d'angle 2α.

Remarque

La symétrie où (d) est perpendiculaire à (d') est un cas particulier de la symétrie où (d) et (d') sont sécantes.

B. Exercices d'application

1. Place trois points A, B, et C distincts dans le plan.
2. Trace deux droites (D) et (D') sécantes en O et formant un angle aigu de 45°.
3. Construis le point B' image de B par la symétrie d'axe (d) puis construis le point B'' image de B' par la symétrie d'axe (D'). Que représente B'' pour B ?
4. Reprends la question 3 pour les points A et C.

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Soit un triangle ABC et (D), (D') et (D''), les médiatrices des côtés de ce triangle.
1. Quel est l'axe de la symétrie permettant de passer de A à B ? de B à C ?
2. Trouve deux façons différentes permettant de passer de A à C par des transformations.

Exercice 2
Soit deux triangles ABC et AB'C' en position de Thalès tels que $\frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{2}$.
1. Fais une figure de ces deux triangles.
2. Nomme la transformation permettant de passer de ABC à AB'C'.

Exercice 3
ABC est triangle équilatéral de côté 3 cm. O et O' sont deux points extérieurs au triangle ABC tels que OO' = 6 cm.
1. Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie de centre O et l'image A''B''C'' du triangle A'B'C' par la symétrie de centre O'.
2. Établis les égalités de vecteurs suivants : $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{BB''} = 2\overrightarrow{OO'}$, et $\overrightarrow{CC''} = 2\overrightarrow{OO'}$.
3. Compare les longueurs des segments [AB] et [A'B'] ; [BC] et [B'C'].
4. Justifie ta réponse.

Exercice 4
($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de rayon r = 3 cm. Soit [AB] un diamètre de ce cercle et O', un point extérieur à ($\mathscr{C}$). Construis l'image du cercle ($\mathscr{C}$) par la symétrie de centre O'.

Exercice 5
Soit ABCD un quadrilatère.
1. Construis les images A',B',C' et D' des sommets de ce quadrilatère par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis les images A'', B'', C'' et D'' des points A', B', C' et D' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.
2. Quelle est la translation qui associe A'' à A ?

Exercice 6
Soit ABCD un rectangle.
1. Construis les images des sommets de ce quadrilatère par la symétrie de centre I où I est le point d'intersection de ses diagonales.
2. Quelle est la nature de la figure ainsi obtenue ?

Exercice 7
Soit A et B deux points distincts. E et F sont deux autres points quelconques. On note E' et F' leurs symétriques par rapport à A , puis E'' et F'', les symétriques de E' et F' par rapport à B. Montre que E E''F''F est un parallélogramme.

Exercice 8
Soit E et R deux points distincts. À tout point M du plan, on associe le point M' tel que EMRM' soit un parallélogramme. Quelle est la transformation qui associe ainsi M à M' ?

Exercice 9
A,B,C sont trois points non alignés. M étant un point du plan, construis les points M' et M'' tels que M' = S_A(M) et M'' = S_B(M').
1. Établis l'égalité des vecteurs suivants : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Si M''' = S_C(M''), établis alors que $\overrightarrow{MM'''} = 2\overrightarrow{DC}$ où D est le milieu de [MM''].

Exercice 10
($\mathscr{C}$) est un cercle de rayon 3 cm et de centre O. [AB] est un de ses diamètres.
1. Construis l'image ($\mathscr{C}'$) de ($\mathscr{C}$) par la symétrie de centre A et l'image ($\mathscr{C}''$) de ($\mathscr{C}'$) par la symétrie de centre A', image de A par la symétrie de centre B.
2. Compare les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) d'une part et les cercles ($\mathscr{C}'$) et ($\mathscr{C}''$) d'autre part.

Exercice 11
ABC est un triangle.
Construis les images A', B' et C' des points A, B et C par la rotation de centre A et d'angle α = 30°.

Exercice 12
On considère un point I et une droite (d) ne passant pas par I. Soit A, B, C, et D des points de (d).

1. Construis les points A', B', C' et D' images respectives de A, B, C et D par la rotation de centre I et d'angle α = 90°.
2. Peux-tu conjecturer pour les points A', B', C' et D' ?

Exercices de synthèse

Exercice 13
(D) et (D') sont deux droites parallèles et ABC, un triangle dont l'intersection avec chacune des droites (D) et (D') est vide.
1. Construis les points A', B' et C', images respectives des points A, B et C par la symétrie d'axe (D).
2. Construis les points A'', B'' et C'', images respectives des points A', B' et C' par la symétrie d'axe (D').
3. Quelle est la transformation qui associe A à A'' ? B à B'' ? C à C'' ?

Exercice 14
(D) et (D') sont deux droites sécantes en I et A et B, deux points n'appartenant ni à (D) ni à (D').
1. Construis les images A' et B' des points A et B par la symétrie d'axe (D).
2. Construis les images A'' et B'' des points A' et B' par la symétrie d'axe (D').

Exercice 15
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et ABC, un triangle quelconque.
1. Construis les images A', B' et C' des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Construis les images A'', B'' et C'' des points A', B' et C' par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Quelle est la transformation qui associe A à A'' ? B à B'' ? C à C'' ?

Exercice 16
Soit un triangle ABC équilatéral. On prolonge chaque côté d'une longueur AA' = BB' = CC'.
Démontre que le triangle A'B'C' est équilatéral.

Exercice 17
On considère deux droites parallèles (Δ) et (Δ') et une droite (Δ'') perpendiculaire à (Δ) en O. (Δ'') coupe (Δ') en O'. Soit $S_Δ$, $S_Δ'$, $S_Δ''$ les symétries d'axes respectifs (Δ) et (Δ') et (Δ'') et S_O et $S_{O'}$, les symétries de centres respectifs O et O'.
1. Démontre que $S_Δ'$ suivie de S_O et $S_{O'}$ suivies de $S_Δ$ sont égales.
2. Démontre que S_O suivie de $S_{O'}$ est égal à $t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

Exercice 18
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J), trace les droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = \frac{-3}{2}x + 1$ et $y' = \frac{2}{3}x - 2$.
2. Place le point A (–4 ; 2) et détermine les coordonnées du point A' tel que (D) soit la médiatrice de [A'A].
3. Détermine les coordonnées du point A'' telles que (D') soit la médiatrice de [A'A''].
4. Montre que A'' = S_O'(A) où O' est le point d'intersection de (D) et (D').

Exercices d'approfondissement

Exercice 19
Place dans un repère (O, I, J) orthonormal les points A(−2, 5), B(−1, 1) et D(2, 4). Soit K le milieu de [BD].
1. Calcule les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à K.
2. Écris une équation de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à la droite (BD).
3. Démontre que B et D sont symétriques par rapport à (Δ).
4. Justifie que C est un point de (Δ).

Exercice 20
Construis un rectangle ABCD de centre O, les points A' et C' sont les transformés respectifs des points A et C par rapport à l'axe (BD).
Démontre que (AA') ⊥ (A'C) en utilisant une transformation.

Exercice 21
Soit un carré ABCD.
1. Construis le triangle équilatéral ABE intérieur au carré.
2. Construis le triangle équilatéral BCF extérieur au carré.
3. Construis le triangle équilatéral BDG tel que A lui soit intérieur.
On note r la rotation de centre B qui transforme A en E.
4. Démontre que les points A, C et G sont alignés.
5. Démontre que les points E, D et F sont alignés.

Exercice 22
Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre [BC] de centre O et A, un point du cercle distinct de B et C. La tangente (D) au cercle en B coupe la tangente (D') au cercle en A en un point I.
1. Fais une figure.
2. D est le symétrique du point A par rapport à O. Justifie que D appartient au cercle. En déduire que BDCA est un rectangle.
3. Démontre que (OI) est un axe de symétrie du rectangle.

Solution de la situation problème

C'est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ') qui transforme A en A'.

CHAPITRE 1

RACINE CARRÉE

Sommaire

Introduction

Nous avons vu que l'insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels pour exprimer certains nombres avait entraîné la naissance de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. C'est ainsi que fut créée au XIII^{e} siècle la notion de racine carrée qui est également très utilisée en sciences physiques.

Situation problème

Devenu plus grand, Birame ne peut plus se coucher correctement dans le sens des dimensions de son lit rectangulaire de longueur 150 cm et de largeur 100 cm. Se couchant suivant une des diagonales de ce lit, il se rend compte que sa taille correspond à 1 cm près à la longueur de celle-ci. Calcule la taille de Birame à 1 cm près.

1.1 Valeur exacte, valeur approchée, définition et notation de la racine carrée

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Développe puis réduis les expressions suivantes :
$A = (2x + 5)^2$; $B = (3x - 7)^2$
$C = (4 - x)(4 + x)$; $D = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
2. FAX est un triangle rectangle en A tel que : FX = 10 cm et FA = 6 cm.
Calcule la longueur XA.

Activité 2.

Recopie puis complète le tableau suivant :

Valeur approchée de	À une unité près par		Au 1/10 près par		Au 1/1000 près par	
	Défaut	Excès	Défaut	Excès	Défaut	Excès
2,465713						
$\frac{74}{13}$						

Activité 3.

1. Calcule la longueur d'un carré de 9 cm² d'aire.
2. Appelle x la longueur de la diagonale de ce carré.
a) Détermine la valeur de x^2.
b) Encadre x par deux nombres entiers naturels consécutifs.
c) Donne une valeur approchée de x à une unité près par défaut.

À Retenir

a étant un nombre réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a, le nombre positif ou nul dont le carré est a.
On le note $\sqrt{a}$.
Par conséquent, $(\sqrt{a})^2 = a$.
Le symbole « $\sqrt{\ }$ » est appelé radical et le réel a est le radicande.
$\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a » ($a \in \mathbb{R}+$).

Exemple

La racine carrée de 81 se note $\sqrt{81}$.
La racine carrée de 7 se note $\sqrt{7}$. La valeur exacte de ce nombre est égale à $\sqrt{7}$.
2,64 est la valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 0,01 près par défaut.
2,65 est la valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 0,01 près.

Remarque

a et b étant deux nombres réels positifs ou nuls, si $\sqrt{a} = b$, alors $a = b^2$.

B. Exercices d'application

Complète le tableau ci-dessous :

x	3	-3	0	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
x^2					

1.2 Nombres irrationnels : ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un nombre irrationnel et je dois connaître la notation $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Recopie et complète par oui ou non le tableau suivant :

Ce nombre appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
$\frac{1}{6}$				
26				
$-\frac{1}{4}$				
π				
-19				
$\frac{1}{3}$				

2. Recopie et complète par le symbole $\subset$ ou $\not\subset$ qui convient :

$\mathbb{N}$ .... $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$ .... $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ .... $\mathbb{N}$

$\mathbb{D}$ .... $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ .... $\mathbb{Z}$.

Activité 2.

1. À l'aide de la calculatrice, détermine : $\sqrt{3}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{5}$; π ; $\sqrt{144}$; $\sqrt{49}$.

2. Parmi les nombres ci-dessus, quels sont ceux qui ne sont pas des nombres rationnels ? Ceux qui sont des nombres rationnels ?

À Retenir

- Tout nombre non rationnel est appelé nombre irrationnel.
- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs.
- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble des nombres réels négatifs non nuls.

B. Exercices d'application

1. Quels sont les nombres irrationnels parmi les nombres suivants ?

$\sqrt{16}$; π ; $\sqrt{5}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{\pi}$.

2. Recopie et complète par $\in$ ou $\notin$:

$\sqrt{3}$ ... $\mathbb{R}$; π ... $\mathbb{Q}$; $\sqrt{5}$ ... $\mathbb{R}$; $-\sqrt{3}$ ... $\mathbb{Q}$

$\sqrt{121}$ ... $\mathbb{Q}$; $\sqrt{\pi}$ ... $\mathbb{R}$; 5 ... $\mathbb{R}$; $-\sqrt{3}$ ... $\mathbb{Q}$

Remarque

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.3 Calcul numérique dans $\mathbb{R}$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer la valeur numérique d'une expression littérale dans $\mathbb{R}$.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans $\mathbb{Q}$, on donne les expressions littérales suivantes :

$A = 3x^2 - 2x + 4$; $B = -5x + 2y + 1$.

1. Calcule A pour : $x = 4$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$; $x = \frac{3}{5}$.

2. Calcule B pour : $x = -3$ et $y = +2$; $x = 0$ et $y = -\frac{5}{2}$.

Activité 2.

Dans $\mathbb{R}$, on considère $C = 4x^2 - 2x + 1$.

Calcule la valeur numérique exacte de C pour $x = \sqrt{5}$.

À Retenir

Pour une valeur donnée de la variable, le calcul de la valeur numérique d'une expression littérale dans $\mathbb{R}$ s'effectue de la façon suivante :
– D'abord, je remplace la variable réelle par la valeur numérique donnée dans l'expression littérale.
– Ensuite, j'effectue les calculs.

B. Exercices d'application

Soit les expressions $A = x^3 - 4$; $B = 16x^2 - 8x + 1$; $C = (x - 4)(x + 7)$.
Calcule :

1. A et B pour $x = \sqrt{3}$; $x = -2 + \sqrt{2}$.
2. B et C pour $x = 0$; $x = -1$ et $x = 2\sqrt{7}$.
3. A et C pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \dfrac{5}{4}$.

1.4 Propriétés de la racine carrée

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés de la racine carrée.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit les nombres $a = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$, $b = \sqrt{4 \times 25}$, $c = \sqrt{49 \times 9}$ et $d = \sqrt{49} \times \sqrt{9}$.

1. Calcule a et b et compare les résultats obtenus.
2. Fais de même pour c et d.

Activité 2.

Recopie et complète par le nombre positif qui convient :
$\sqrt{16} = \sqrt{2} \times \sqrt{\ldots}$; $\sqrt{\ldots} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{63} = \sqrt{7} \times \sqrt{\ldots}$; $\sqrt{\ldots} = \sqrt{13} \times \sqrt{3}$.
Pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$:
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{\ldots}$; $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{\ldots}$.

Activité 3.

1. Recopie et complète le tableau suivant en utilisant une calculatrice.

a	b	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
			Au $\frac{1}{100}$ près par défaut			
6	2					
5	3					
4	8					

2. Compare $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour chaque cas.

À Retenir

- La racine carrée du produit de deux nombres réels positifs est égale au produit des racines carrées de ces deux réels.
  Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Le quotient des racines carrées de deux nombres réels positifs est égal à la racine carrée du quotient de ces deux réels.
  Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Calcule de deux manières :
$\sqrt{24} \times \sqrt{6}$; $\sqrt{27} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$; $\sqrt{4 \times 9}$.

Exercice 2.

Calcule de deux manières :
$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; $\sqrt{\dfrac{121}{25}}$; $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$; $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$.

Applications des propriétés

1. Écris $\sqrt{20}$ et $\sqrt{45}$ sous la forme $...\sqrt{5}$.

2. Complète : $\sqrt{20} + \sqrt{45} = ...\sqrt{5} + ...\sqrt{5}$
$= (..... + ...)\sqrt{5}$
$= ....\sqrt{5}$.

Remarque

m et n étant deux nombres quelconques et a un nombre positif.
On a : $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m + n)\sqrt{a}$.

Exercice 3.

Écris A, B et C sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

$A = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$,

$B = 2\sqrt{7} - \sqrt{343} + \sqrt{63}$,

$C = 2\sqrt{27} - 8\sqrt{75}$.

1.5 Rendre rationnel un dénominateur irrationnel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Calcule les nombres réels suivants :

$D = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$; $E = 2\sqrt{7} \times \sqrt{7}$;

$F = (\sqrt{5} - 4)(\sqrt{5} + 4)$; $G = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$.

Activité 2.

Soit les nombres : $A = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $B = \dfrac{-5}{2\sqrt{7}}$; $C = \dfrac{6}{\sqrt{5}-4}$; $D = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Multiplie chacun de ces nombres par le nombre qui convient pour obtenir un dénominateur sans radical.

À Retenir

- Deux expressions telles que $(\sqrt{2} - 3)$ et $(\sqrt{2} + 3)$ sont dites conjuguées l'une de l'autre.
- Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux, je multiplie les termes de ce quotient par l'expression conjuguée de son dénominateur.

Exemple

Rends rationnel le dénominateur du réel $E = \dfrac{7\sqrt{13}}{3-\sqrt{5}}$.

$$E = \frac{7\sqrt{13}}{3-\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{13}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{7\sqrt{13}(3+\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2} = \frac{7\sqrt{13}(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{21\sqrt{13}+7\sqrt{65}}{4}.$$

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Écris sans radical au dénominateur :

$A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $B = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$; $C = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$; $D = \dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$;

$E = \dfrac{4\sqrt{17}}{7-\sqrt{2}}$; $F = \dfrac{4\sqrt{7}+3}{2\sqrt{7}-6}$; $G = \dfrac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ avec $x \geq 0$.

1.6 Comparaison des réels comportant des radicaux

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de comparer des nombres réels comportant des radicaux.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Compare les nombres rationnels $\dfrac{13}{9}$ et $\dfrac{22}{9}$.

2. Fais de même pour $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{7}{4}$; $\dfrac{13}{9}$ et 2 ; $\dfrac{7}{13}$ et $\dfrac{4}{5}$; $-9{,}503$ et $-9{,}530$.

Activité 2.

On donne $x = \sqrt{11}$ et $y = \sqrt{7}$.

1. Calcule x^2 et y^2.
2. En utilisant une calculatrice, donne une valeur approchée à 1/100 près par défaut de x et y.
3. Recopie puis complète par le symbole $>$ ou $<$ qui convient :
   $x^2 \dots y^2$; $x \dots y$.

   Fais de même pour : $x = 2\sqrt{10}$ et $y = 3\sqrt{5}$
   $x = -\sqrt{10}$ et $y = -\sqrt{7}$
   $x = -2\sqrt{10}$ et $y = -3\sqrt{5}$.

À Retenir

- Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
  Si $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $x^2 > y^2$, alors $x > y$.
  Si $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $x^2 < y^2$, alors $x < y$.

- Deux nombres réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de celui de leur carrés.
  Si $x \in \mathbb{R}^-$, $y \in \mathbb{R}^-$ et $x^2 < y^2$, alors $x > y$.
  Si $x \in \mathbb{R}^-$, $y \in \mathbb{R}^-$ et $x^2 > y^2$, alors $x < y$.

• Comparaison de réels - Méthode 1

Pour comparer deux nombres réels comportant des radicaux, je compare d'abord leurs carrés, j'en déduis ensuite une comparaison de ces nombres en utilisant les propriétés précédentes.

• Comparaison de réels - Méthode 2

Pour comparer deux nombres réels comportant des radicaux, je calcule leurs valeurs approchées en utilisant la calculatrice, puis je compare les résultats obtenus.

Exemples

Exemple 1

1. Sans utiliser la calculatrice, compare $8\sqrt{11}$ et $7\sqrt{13}$.
2. Fais de même pour $-\sqrt{1{,}44}$ et $-\sqrt{2}$.

Réponses

1. $(8\sqrt{11})^2 = 64 \times 11 = 704$
   $(7\sqrt{13})^2 = 49 \times 13 = 637$
   $704 > 637$, donc $(8\sqrt{11})^2 > (7\sqrt{13})^2$
   On a $8\sqrt{11} > 0$, $7\sqrt{13} > 0$ et $(8\sqrt{11})^2 > (7\sqrt{13})^2$, alors $(8\sqrt{11}) > (7\sqrt{13})$.

2. $(-\sqrt{1{,}44})^2 = 1{,}44$; $(-\sqrt{2})^2 = 2$.
   Comme $1{,}44 < 2$, donc $(-\sqrt{1{,}44})^2 < (-\sqrt{2})^2$
   $-\sqrt{1{,}44} < 0$, $-\sqrt{2} < 0$ et $(-\sqrt{1{,}44})^2 < (-\sqrt{2})^2$, alors $-\sqrt{1{,}44} > -\sqrt{2}$.

Exemple 2

À l'aide de la calculatrice, compare les réels $A = 1 - \sqrt{5}$ et $B = 3 - 2\sqrt{7}$.
Je détermine la valeur de A au $\frac{1}{100}$ près.

Réponses

$A = 1 - \sqrt{5}$
$A = 1 - 2{,}23$
$A = -1{,}23$
Je détermine la valeur de B au $\frac{1}{100}$ près.
$B = 3 - 2\sqrt{7}$
$B = 3 - 2 \times 2{,}64$
$B = 3 - 5{,}28$
$B = -2{,}28$
$-1{,}23 > -2{,}28$, donc $A > B$.

B. Exercices d'application

Compare les nombres suivants :

1. Sans calculatrice :
   $7\sqrt{7}$ et $6\sqrt{8}$; $-6\sqrt{13}$ et $-4\sqrt{13}$; $11 - 4\sqrt{2}$ et $13 - \sqrt{5}$;
   $\sqrt{132}$ et $7\sqrt{97}$; $-\sqrt{17}$ et $\sqrt{2}$; 4 et $\sqrt{17}$.
2. À l'aide de la calculatrice :
   $\sqrt{27}$ et $3\sqrt{3}$; 6 et $3\sqrt{5}$; -41 et $-\sqrt{207}$;
   $\sqrt{97}$ et $8\sqrt{82}$; $-17 - \sqrt{32}$ et $-42 + \sqrt{28}$.

1.7 Valeur absolue d'un nombre réel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel et être capable de les utiliser.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	$\frac{5}{4}$	$-4{,}5$	6	-200	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$
$\lvert x\rvert$							

2. Recopie et complète.

$|a| =$ ...... si a est positif.

$|a| =$ opp (a) si a est ....

Activité 2.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert a \times b\rvert$	$\lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	$\frac{a}{b}$	$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
-3	-5						
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{7}$						
$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$						

2. Pour chaque cas, compare $|a \times b|$ et $|a| \times |b|$,

puis $\left|\frac{a}{b}\right|$ et $\frac{|a|}{|b|}$ avec $b \neq 0$.

À Retenir

- La valeur absolue du produit de deux nombres réels est égale au produit des valeurs absolues de ces deux réels.
  Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $|a \times b| = |a| \times |b|$.
- La valeur absolue du quotient de deux nombres réels est égale au quotient des valeurs absolues de ces réels.
  Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Exemples

Exemple 1

$|-7 \times 4| = |-28|$
$= 28$

$|-7| \times |4| = 7 \times 4$
$= 28$

Donc $|-7\times 4| = |-7| \times |4|$.

Exemple 2

$\left|\frac{\sqrt{7}}{-3}\right| = \left|-\frac{\sqrt{7}}{3}\right| = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{|\sqrt{7}|}{|-3|} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, d'où $\left|\frac{\sqrt{7}}{-3}\right| = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Calcule sans le symbole de la valeur absolue.

$|7| \times |\sqrt{2}|$; $|-13\sqrt{2}| \times |4|$; $|-3 \times -9|$; $|x \times y|$ ($x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^-$).

Exercice 2.

Calcule sans le symbole de la valeur absolue.

$\left|\frac{-7}{6}\right|$; $\left|\frac{7}{\sqrt{7}}\right|$; $\left|\frac{11}{-4}\right|$; $\left|\frac{76}{-76}\right|$; $\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right|$; $\left|\frac{7120}{-432}\right|$; $\left|\frac{x}{y}\right|$ ($x \in \mathbb{R}^+$; $y \in \mathbb{R}^*_+$).

1.8 Racine carrée du carré d'un réel

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'écrire la racine carrée du carré d'un nombre réel sans radical.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Compare 3 et $\sqrt{2}$ puis 31 et $2\sqrt{13}$.
2. Déduis-en le signe de $3 - \sqrt{2}$ et celui de $31 - 2\sqrt{13}$.

Activité 2.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	x^2	$\sqrt{x^2}$	$\lvert x \rvert$
-5			
5			
0			
$\sqrt{5}$			
$-\sqrt{2}$			

2. Compare $\sqrt{x^2}$ et $\lvert x \rvert$ pour chaque cas.

À Retenir

Pour tout nombre réel, la racine carrée de son carré est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.

Exemples

Écris sans radical :

1. $\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5 \rvert = 5$.

2. $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = \begin{cases} x, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -x, \text{ si } x < 0. \end{cases}$

3. $\sqrt{(1-x)^2} = \lvert 1-x \rvert = \begin{cases} 1 - x \text{ si } 1 - x > 0, \text{ c'est-à-dire } 1 > x \\ 0 \text{ si } 1 = x \\ -1 + x \text{ si } 1 - x < 0, \text{ c'est-à-dire } 1 < x. \end{cases}$

B. Exercice d'application

Écris sans radical les nombres réels suivants :

$\sqrt{(-13)^2}$; $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$; $\sqrt{(2x+3)^2}$; $\sqrt{(x^2)}$; $\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$.

1.9 Encadrement d'une expression comportant un radical

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'encadrer une expression comportant un radical.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Recopie et encadre :

a) 2,35 entre deux entiers naturels consécutifs.

b) −24,467 entre deux entiers relatifs consécutifs.

c) $\frac{27}{13}$ à 0,001 près.

Activité 2.

1. À l'aide de la calculatrice, donne les valeurs approchées par excès et par défaut de : $\sqrt{3}$ à 0,001 près $\sqrt{7}$, à 10^{-1} près $\sqrt{13}$ et à 10^{-2} près.

2. Encadre $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$ par les valeurs approchées que tu viens de donner. Tu as ainsi encadré $\sqrt{3}$ à 0,001 près, $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près et $\sqrt{13}$ à 10^{-2} près.

Activité 3.

1. Multiplie les trois membres de l'encadrement de $\sqrt{3}$ par 2. Tu obtiens ainsi l'encadrement de $2\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.
2. Fais de même pour $\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$.

Activité 4.

Ajoute 5 aux trois membres de chacun des résultats de l'activité 3. Tu obtiens alors l'encadrement de $2\sqrt{3}+5$, $2\sqrt{7}+5$ et $2\sqrt{13}+5$ aux précisions indiquées.

B. Exercices d'application

Recopie et encadre :

$\sqrt{5}$ à 0,001 près ; $7\sqrt{9}$ à 10^{-2} près ; $3+2\sqrt{6}$ à 10^{-1} près ;

$7-10\sqrt{5}$ à 10^{-4} près ; $-2-9\sqrt{14}$ à une unité près ;

$4\sqrt{3}-3$ à 0,01 près ; $-4+\frac{7}{2}\sqrt{5}$ à 0,01 près.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Sans utiliser une calculatrice, écris sans radical :

a) $\sqrt{9}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{49}$.

b) $\sqrt{400}$; $\sqrt{1\,600}$; $\sqrt{8\,100}$; $\sqrt{1\,000}$; $\sqrt{4\,900}$.

c) $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}169}$.

d) $\sqrt{\frac{16}{49}}$; $\sqrt{\frac{8}{18}}$; $\sqrt{\frac{12}{147}}$; $\sqrt{\frac{3}{12}}$.

Exercice 2

Écris sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ les nombres réels suivants :

a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{32}$;

b) $\sqrt{0{,}169}$; $\sqrt{6{,}4}$.

c) $\sqrt{2\,299}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{1\,250}$.

d) $2\sqrt{8}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$; $2\sqrt{15}\times\sqrt{8}\times\sqrt{5}$.

e) $\sqrt{125}\times 7\sqrt{21}\times\sqrt{14}$; $8\sqrt{13}\times\sqrt{26}\times\sqrt{39}$.

f) $\sqrt{12}-14\sqrt{75}-6\sqrt{48}$; $2\sqrt{3}-\sqrt{300}+12\sqrt{12}$.

g) $\sqrt{40}+\sqrt{1\,210}+7\sqrt{490}$.

Exercice 3

1. On donne $a=\sqrt{3}-2$ et $b=2-\sqrt{3}$. Calcule $a+b$. Que représente a pour b ? Justifie ta réponse.
2. On pose $a=4+\sqrt{15}$ et $b=4-\sqrt{15}$. Calcule le produit ab. Que représente a pour b ? Justifie ta réponse.

Exercice 4

Soit les nombres réels $x=5-2\sqrt{6}$, $y=5+2\sqrt{6}$ et $z=-5+2\sqrt{6}$. Montre que :

1. x et y sont des inverses.
2. x et z sont des opposés.

Exercice 5

En te servant d'une calculatrice donne :

- la valeur approchée de $\sqrt{13}$ à l'ordre 7 ;
- la valeur approchée par excès de $\sqrt{132}$ à 10^{-5} près ;
- la valeur approchée par défaut de $\sqrt{0{,}124}$ à 0,01 près ;
- la valeur approchée par excès de $\sqrt{310}$ à l'ordre 6.

Exercice 6

Écris sans valeur absolue :

$|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{7}-7|$; $|7\sqrt{11}+4|$;

$|71-\sqrt{129}|$; $|113-\sqrt{163}|$; $|\sqrt{27}-13|$.

Exercice 7

1. Développe puis réduis :
$(7-\sqrt{3})^2$; $(4-\sqrt{5})^2$; $(\sqrt{2}-1)^2$;
$(\sqrt{6}-3\sqrt{5})^2$; $(\sqrt{11}+13)^2$; $(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2$
et $(\sqrt{5}-\sqrt{12})^2$.
2. À partir de ces résultats, écris le plus simplement possible les réels suivants :
$a=\sqrt{52-14\sqrt{3}}$; $b=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;
$c=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$; $d=\sqrt{51-6\sqrt{30}}$.

Exercice 8

Développe puis réduis :

a) $(5+\sqrt{3})^2$; $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$; $(3-\sqrt{7})^2$;
$(-3-\sqrt{7})^2$; $(-3+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})$.

b) $(3\sqrt{2}-1)^2$; $(5\sqrt{5}-7)^2$;
$(4\sqrt{3}-2\sqrt{5})(4\sqrt{3}+2\sqrt{5})$;
$(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$; $(4\sqrt{1\,000}+1)^2$;
$(7\sqrt{17}+2\sqrt{15})^2$; $(-7\sqrt{2}-2\sqrt{7})^2$.

Exercice 9

Compare les réels suivants :

a) $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{7}$; $\sqrt{5}$ et $2\sqrt{3}$;
-2 et $-\sqrt{5}$; 7 et $3\sqrt{5}$; 0 et $-\sqrt{3}$.

b) $-\sqrt{3}+5$ et $\sqrt{3}-5$; $3+\sqrt{2}$ et 7 ;
$3\sqrt{6}$ et $4\sqrt{3}$; $-7\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{7}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{-5}{\sqrt{13}}$ et $\frac{-4}{\sqrt{13}}$;
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{7}}$; $\frac{-3}{\sqrt{7}}$ et $\frac{-3}{\sqrt{2}}$;
10 et $13-2\sqrt{3}$; 4 et $\sqrt{21}$;
$3-\sqrt{2}$ et $5-\sqrt{3}$.

Exercice 10

Écris sans radical au dénominateur les réels suivants :

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\frac{7}{\sqrt{7}}$; $\frac{3\sqrt{2}}{-\sqrt{5}}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; $\frac{13-\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$.

b) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{-4}{3+\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{7}}$; $\frac{-3\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{7}}{-1-\sqrt{5}}$.

c) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{-5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-4}$; $\frac{7+\sqrt{2}}{-5-\sqrt{2}}$.

d) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; $\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$; $\frac{41\sqrt{27}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Exercice 11

On considère les expressions algébriques

$A=2x^2-7x+1$, $B=x^3-4$ et $C=\frac{x^2-x}{\sqrt{2}}$

1. Calcule A pour $x=0$ puis $x=-\sqrt{3}$.
2. Calcule A, B et C pour $x=1-\sqrt{2}$.

Exercice 12

On pose $A=\frac{7}{1-x}$ et $B=\frac{-x\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x}$ avec $x\neq 1$ et $x\neq-\sqrt{3}$.

1. Calcule A pour $x=\sqrt{3}+2$ puis $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$.
2. Calcule B pour $x=\sqrt{3}$ puis $x=3$.
(On donnera les résultats sans radical au dénominateur.)

Exercice 13

Écris sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{N}$.

$A=\sqrt{12}-3\sqrt{27}-5\sqrt{48}$;

$B=4\sqrt{5}-6\sqrt{75}-\sqrt{121}$;

$C=11\sqrt{1\,210}+\sqrt{1\,000}-131\sqrt{10}$.

Exercice 14

Encadre à l'aide de la calculatrice :

a) $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près ; $\sqrt{176}$ à 0,1 près ;
$\sqrt{333}$ à une unité près ; $-\sqrt{43}$ à 10^{-2} près.

b) $3\sqrt{2}$ à une 0,1 près ; $4\sqrt{3}$ à 10^{-3} près ;
$-2\sqrt{2}$ à 10^{-1} près.

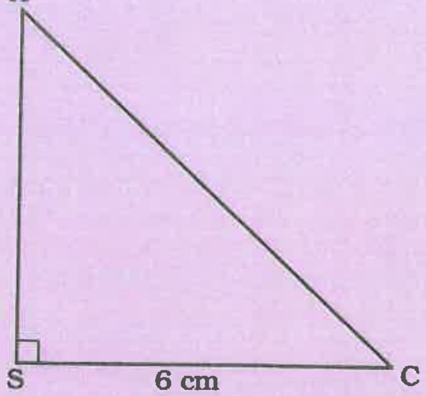
Exercice 15

On pose $x = 3 + \sqrt{7}$ et $y = 3 - \sqrt{7}$.

Calcule $x + y$; $y - x$; xy et $\frac{x}{y}$.

Exercice 16

SAC est un triangle, rectangle et isocèle en S.



1. Calcule la valeur exacte de la longueur AC.
2. Calcule la valeur exacte du périmètre p du triangle SAC.
3. Donne la valeur approchée par défaut de p à 10^{-2} près.

Exercice 17

On pose $a = \sqrt{5} - 2$ et $b = \sqrt{5} + 2$.

1. Calcule ab. Les réels a et b sont-ils inverses ? Justifie.
2. Calcule a^2 et b^2.
3. a) Calcule $x^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
   b) Détermine x sachant que x est négatif.
4. Écris à l'aide d'un radical le réel
   $y = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
5. Montre que le réel $z = \dfrac{7\sqrt{5} - 14}{-\sqrt{5} + 2}$ est un entier relatif que tu donneras.

Exercice 18

JDAB est un losange tel que les diagonales JA et BD mesurent respectivement $\sqrt{5} + 2\sqrt{20}$ et $\sqrt{125}$.

1. Montre que ce losange est un carré.
2. Calcule le périmètre et l'aire de ce carré.

Exercice 19

Soit $a = 2\sqrt{3} - 3$, $b = 3 - \sqrt{3}$ et $c = 2\sqrt{2} + 1$.

1. Calcule a^2, b^2 et c^2.
2. Détermine le signe de chacun des réels a, b, et c.
3. Donne une écriture simplifiée des réels :
   $A = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$;
   $B = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$;
   $C = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$.

Exercice 20

Écris sans radical les réels A, B et C selon les valeurs de x que l'on précisera.

$A = \sqrt{(x-3)^2}$; $B = \sqrt{(3x-6)^2}$; $C = \sqrt{(5x)^2}$.

Exercice 21

Soit les expressions algébriques suivantes :

$f(x) = 3x^2 - 4$ et $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$.

1. Factorise $f(x)$ et $g(x)$.
2. Calcule $f(\sqrt{5})$ et $g(\sqrt{5})$.
3. Calcule $g(1 - \sqrt{7})$. Encadre le résultat à 10^{-2} près sachant que $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$.

Exercice 22

On donne les expressions algébriques :

$A = 250x^2 - 300x + 90$; $B = (2x - 7)^2 - 4$

$C = 4x^2 - 28x + 45 - (2x - 5)(1 - 2x)$.

1. Factorise A et B.
2. a) Développe, réduis puis ordonne B.
   b) En déduire une factorisation de C.
3. Calcule B pour $x = \sqrt{7}$.
4. Résous l'équation $A = 90$.
5. Développe, réduis puis ordonne C.
6. Calcule C pour $x = -3\sqrt{2}$. Donne la valeur approchée par défaut du résultat à 10^{-1} près.

Exercice 23

On considère les expressions algébriques suivantes :

$A = 36x^2 - 60x + 25$.

$B = (7x - 2)(4 - x) + (2 - 7x)$.

$C = 4x^2 - 25 + (2x + 5)(4 - 7x)$.

1. Développe, réduis puis ordonne B et C.
2. Factorise A, B et C.
3. a) Calcule A pour $x = \frac{1}{6}$ puis $x = \sqrt{2}$.
   b) Encadre la valeur de A pour $x = \sqrt{2}$ à 0,01 près.

Exercice 24

On considère les expressions f et g définies dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 1 - 2x$.

1. Calcule les réels $r_1 = f(\sqrt{8})$ et $r_2 = g(\sqrt{2})$.
2. a) Calcule le réel $r = f(\sqrt{8}) + g(\sqrt{2})$.
   b) Donne un encadrement de r à 0,01 près sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
3. Soit le réel $q = \frac{r_1}{r_2}$. Montre que q peut s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Exercice 25

1. Écris l'expression
   $B = 2\sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 7\sqrt{192}$ sous la forme $B = a\sqrt{b}$, a et b étant deux réels qu'on déterminera.
2. Calcule la valeur numérique exacte de l'expression $C = \dfrac{2x}{2-x} - \dfrac{2-x}{x}$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 26

1. Calcule l'expression
   $x = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$.
   Donne le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels.
2. On donne deux réels A et B tels que $A = 2 + \sqrt{6}$ et $B = 1 - \sqrt{6}$.
   Calcule A^2 et B^2 puis $A \times B$.
   Donne chaque résultat sous la forme $p + q\sqrt{6}$ où p et q sont des entiers relatifs.

Exercice 27

Soit les expressions suivantes :

$p = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1\right]\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 1\right]$ et

$q = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

1. Calcule p puis rends rationnel le dénominateur de q.
2. Montre que $\dfrac{p + q^2}{p - 2q} \in \mathbb{D}$.
3. Résous l'équation $px^2 + q^2 - 3 = 0$.

Exercice 28

On pose $a = 1 + \sqrt{5}$ et $b = 1 - \sqrt{3}$.
Calcule a^2 et b^2.

1. Simplifie $c = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}}$ puis rends rationnel son dénominateur. Effectue le produit $a \times c$. Que représente a pour c ?
2. Montre que $d = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$ est un entier relatif que l'on déterminera.

Exercice 29

On donne $A = (\sqrt{2} - 3)^2$ et $B = \dfrac{5\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

1. Calcule A puis rends rationnel le dénominateur de B.
2. Simplifie $\sqrt{B}$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$: $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 5\sqrt{2} + 1 = 0$.

Solution de la situation problème

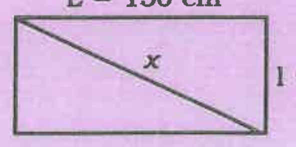
Soit x la taille de Birame en cm.

$x^2 = (150)^2 + (100)^2 = 22\,500 + 10\,000$

$x^2 = 32\,500$ d'où $x = \sqrt{32\,500}$

$x = \sqrt{5^2 \times 13 \times 10^2}$

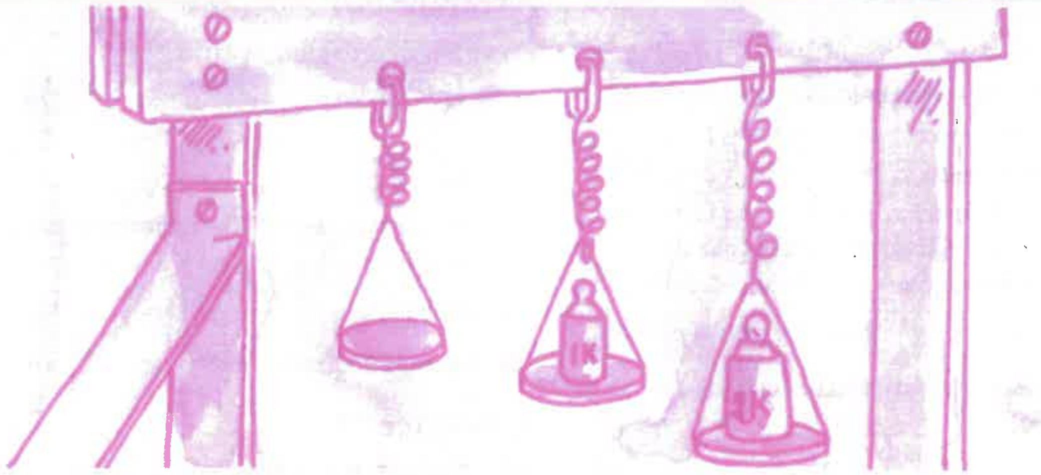
$x = 50\sqrt{13}$



La taille de Birame est de $50\sqrt{13}$ cm ou $\sqrt{13} \simeq 3{,}6$ donc Birame mesure environ 1,80 m.

CHAPITRE 2

APPLICATIONS AFFINES ET APPLICATIONS AFFINES PAR INTERVALLES



Sommaire

Introduction

L'utilisation des applications affines en démographie (taux de natalité), en économie (taux de production) et en physique (calcul de distance) leur a donné une grande importance. Les applications affines constituent un prolongement des applications linéaires.

Situation problème

Quel est le prix marqué par un taximètre après 7 km de course si la prise en charge est de 100 F au départ et si 1 km correspond à 250 F ?

2.1 Application affines - Présentation

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître l'expression littérale d'une application affine et être capable de reconnaître une application affine et de déterminer l'application linéaire associée.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On donne le tableau de correspondances suivant :

y	-3	-2	-1	1	2	4
x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2

1. Montre que ce tableau de correspondances est un tableau de proportionnalité.
2. Trouve le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des valeurs de x à celles de y.
3. Exprime y en fonction de x.
4. Soit f l'application linéaire ainsi définie.
   Recopie et complète : $f : x \mapsto \dots x$; $f(x) = \dots x$.

Activité 2.

Pour être demi-pensionnaire d'une école (être bénéficiaire d'un repas par jour), un élève doit verser 500 F de droit d'adhésion et payer 100 F par repas.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de repas dans l'année	2	6	15	35	60	100
Dépense						

2. Si x est le nombre de repas pris dans l'année et y, la dépense correspondante, alors recopie et complète : $y = \dots x + \dots$.

À Retenir

Définition

Une application f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine si à tout nombre réel x elle fait correspondre le nombre réel $ax + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

On note $f : x \mapsto f(x) = ax + b$

$f(x)$ où y est appelé l'image de x par l'application f et x est l'antécédent de y.

B. Exercices d'application

Reconnais parmi les applications suivantes celles qui définissent des applications affines en donnant a et b :

$f : x \mapsto 3x - 1$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$; $h : x \mapsto 6$;

$l : x \mapsto 2x^2 + 1$; $t : x \mapsto -x - 4$;

$u : \mapsto \dfrac{x+1}{x}$; $w : x \mapsto 2x + 7 - \sqrt{3}x$.

À Retenir

Méthode

Pour reconnaître une application affine f, je dois pouvoir identifier a et b dans l'expression $f(x)$ écrite sous la forme $ax + b$.

Remarque

Dans l'activité précédente, on suppose que les élèves orphelins ne payent pas de droit d'adhésion. Pour ces élèves, si x est le nombre de repas pris dans l'année et $g(x)$, la dépense correspondante, recopie et complète :

$g(x) = \dots x + \dots$

$f(x) = g(x) + \dots$.

On dit que g est l'application linéaire associée à l'application affine f et que

$g : x \mapsto ax$ est l'application linéaire associée à l'application affine $f : x \mapsto ax + b$.

Exemple

$f : x \mapsto -7x + 2$ $g : x \mapsto -7x$ est l'application linéaire associée à f.

2.2 Représentation graphique d'une application affine

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Représente dans un repère orthonormal (O, I, J) la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$.
2. Soit f l'application affine définie par $f(x) = 2x + 1$.
3. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$					

a) Vérifie graphiquement que les points de coordonnées $(x, f(x))$ figurant dans le tableau ci-dessus appartiennent à la droite (D).

b) Détermine graphiquement les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et de l'axe des ordonnées.

c) Choisis une valeur de x ne figurant pas dans le tableau de valeurs ci-dessus. Calcule $f(x)$ et vérifie que le point de coordonnées $(x, f(x))$ obtenu appartient à (D) d'équation $y = 2x + 1$.

À Retenir

Définition

Dans un repère orthonormal, la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est appelée la représentation graphique de l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$.

L'ordonnée b du point d'intersection de la droite (D) d'équation $y = ax + b$ avec l'axe des ordonnées est appelée ordonnée à l'origine.

Méthode

Pour représenter une application affine f définie par $f(x) = ax + b$ dans un repère orthonormal, j'utilise l'une des méthodes suivantes :

1re méthode : je détermine les coordonnées de deux points A et B de (D) (par exemple A(0 ; b) et B(1 ; $a + b$)) et je trace la droite (AB) qui correspond à la droite (D).

2e méthode : je détermine les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; a) et celles d'un point C de la droite (D). Ensuite, je trace la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

B. Exercice d'application

Représente dans un repère orthonormal l'application affine définie par :

$f : x \mapsto 3x - 2$; $g : x \mapsto 3$; $h : x \mapsto -2x + 4$; $l : x \mapsto 2x + 1$.

2.3 Variations d'une application affine

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer les variations d'une application affine.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

x_1 et x_2 sont deux réels tels que $x_1 < x_2$.

1. Compare $2x_1$ et $2x_2$ puis $2x_1 + 3$ et $2x_2 + 3$.
2. Compare $-4x_1$ et $-4x_2$ puis $-4x_1 + 2$ et $-4x_2 + 2$.

Activité 2.

f, *g* et *h* sont des applications affines définies par les tableaux suivants :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	3	1	-1	-3	-5

x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	1	1	1	1	1	1

1. Les valeurs de $f(x)$ sont-elles rangées dans le même ordre que celles de x ?
2. En est-il de même pour les valeurs de $g(x)$? $h(x)$?

À Retenir

Dans un tableau de valeurs obtenu à partir d'une application affine :
- Si les valeurs de x et $f(x)$ sont rangées dans le même ordre, alors l'application f est dite croissante.
- Si les valeurs de x et celles de $f(x)$ sont rangées dans des ordres contraires, alors l'application f est dite décroissante.
- Si les valeurs de x sont rangées dans un certain ordre alors que celle de $f(x)$ restent constantes, alors l'application f est dite constante.

Remarque

Déterminer le sens de variation d'une application affine, c'est déterminer si elle est croissante, décroissante ou constante.

Dans un tableau de valeurs, il faut toujours prendre soin de ranger les valeurs de x soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant.

Activité 3.

Soit *f*, *g*, et *h* et les applications affines définies par : $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = -3x + 5$ et $h(x) = 2$.

1. Quel est le signe du coefficient de f ?
2. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-5	-2	0	2	3
$f(x)$					

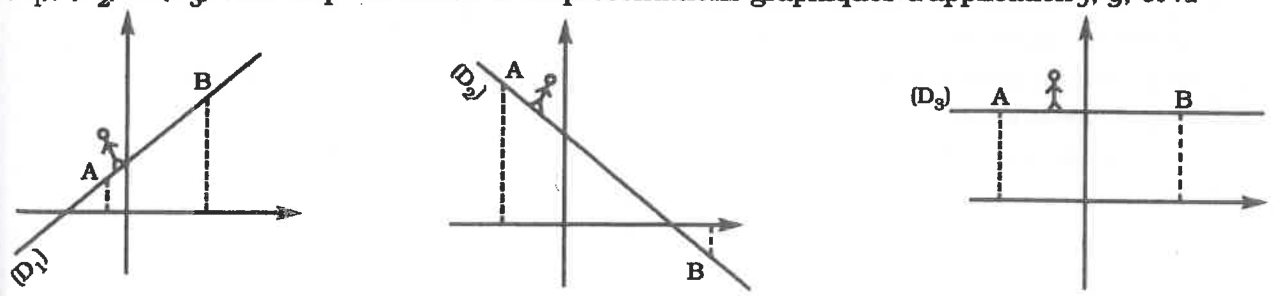
3. Quel est le sens de variation de f ?
4. Répond aux mêmes questions pour g et h.
5. Recopie et complète.
   - Si le signe du coefficient directeur d'une application affine est ..., alors cette application est croissante.
   - Si le signe du coefficient directeur d'une application affine est ..., alors cette application est décroissante.
   - Si le coefficient directeur d'une application affine est égal à 0, alors l'application est dite ... .

À Retenir

Soit f une application affine définie par $f(x) = ax + b$.
- f est croissante si a est positif.
- f est décroissante si a est négatif.
- f est constante si a est nul.

Activité 4.

(D_1), (D_2) et (D_3) sont respectivement les représentations graphiques d'application f, g, et h.



1. Sur chaque droite, Modou se déplace de A vers B.
Indique dans chaque cas s'il va dans le sens ascendant ou dans le sens descendant.

2. Si Modou va de A à B, les valeurs de x et celles de $f(x)$ varient-elles dans le même sens ?
Déduis-en le sens de variation de chacune de ces applications.

B. Exercices d'application

Détermine les variations de f, g, h, et l définies par :
$f(x) = -\sqrt{2}\,x + 5$; $g(x) = 4x - \frac{1}{2}$; $h(x) = 3$; $l(x) = \frac{x-2}{-2}$.

2.4 Détermination de l'expression littérale d'une application affine

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de déterminer l'expression littérale d'une application affine.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit f l'application affine de représentation graphique la droite (D) ayant pour coefficient directeur 2 et telle que $f(3) = 1$.
Détermine l'expression littérale de $f(x)$.

Activité 2.

Soit f l'application affine définie par : $f(1) = 7$ et $f(3) = 13$. Étant donné que $f(x) = mx + p$:

1. Complète : $f(1) = \ldots + \ldots$ ou $7 = \ldots + \ldots$ (1) ; $13 = 3\,m + p$
   $f(3) = \ldots + \ldots$ ou $13 = \ldots + \ldots$ (2).
2. De l'égalité (1), donne m en fonction de p.
3. Dans l'égalité (2), remplace m par sa valeur trouvée dans le point 1 et déduis de l'égalité obtenue la valeur de p.
4. Calcule alors la valeur de m.

À Retenir

Déterminer l'expression littérale $f(x) = mx + p$ de l'application affine f revient à trouver m et p. Pour cela, je procède de la manière suivante :

1. Si je connais l'image d'un réel donné et le coefficient directeur de l'application f :
   – Je détermine p.
   – J'en déduis $f(x)$.
2. Si je connais les images de deux réels donnés :
   – Je remplace, dans $f(x) = mx + p$, $f(x)$ et x par leurs valeurs respectives.
   – J'écris le système formé de deux équations ainsi obtenues.
   – Je résous le système.
   – J'en déduis l'expression $f(x)$.

B. Exercices d'application

Détermine les expressions littérales des applications affines f et g dont les droites (représentations graphiques) respectives (D) et (D') sont telles que :
– (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(3\ ;\ 2)$ et passe par le point A(5 ; 6).
– (D') passe par les points C(6 ; 2) et E(−3 ; 1).

2.5 Utilisation des applications affines

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'utiliser l'expression littérale d'une application affine pour calculer des images et être capable d'utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit f l'application affine définie par $f(x) = 2x - 3$
Recopie et complète le tableau suivant :

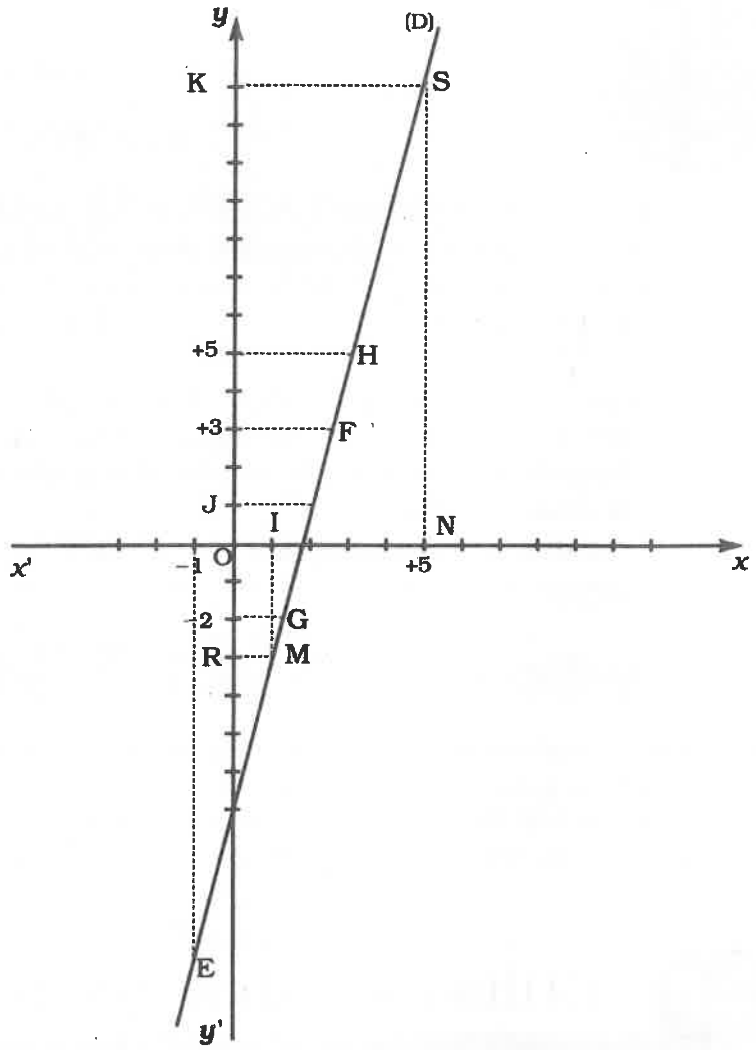
x	-1	0	2		
$f(x)$			1	-2	5

Activité 2.

La droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f (voir figure).

1. Détermine l'abscisse des points F, G et H puis les ordonnées des points E et S.

2. Par l'application f que représente :
- l'ordonnée 3 du point F pour l'abscisse de F ?
- l'abscisse -1 du point E pour l'ordonnée de E ?



À Retenir

Méthode

- Pour calculer l'image d'un nombre réel par une application affine f définie par $f(x) = ax + b$ (a et b étant deux réels fixés), je procède comme suit :
  - Je remplace x par ce réel dans l'expression $ax + b$.
  - Je calcule la valeur numérique de $ax + b$.
- À l'aide de la représentation graphique (D) d'une application affine f, j'utilise la méthode pratique suivante pour déterminer l'image de 5 :
  - Je trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point N. Elle coupe la droite (D) au point S.
  - Je projette orthogonalement S en K sur l'axe des ordonnées. L'ordonnée de K dans ce repère est l'image de 5 par l'application affine f.
- Pour déterminer l'antécédent de -3 :
  - Je trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point R. Elle coupe la droite (D) au point M.
  - Je projette orthogonalement M en I sur l'axe des abscisses.

  L'abscisse de I est l'antécédent de -3 par l'application affine f.

B. Exercices d'application

f est l'application affine définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 6$.

1. Calcule $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.

2. Représente f dans un repère orthonormal (O, I, J).

3. Détermine graphiquement l'image de 1 et l'antécédent de 3 par l'application affine f.

2.6 Application affine par intervalles du type $f : x \mapsto |ax + b|$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter une application affine par intervalle du type $f(x) = |ax + b|$.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit f l'application affine définie par $f(x) = |2x - 1|$.

1. Écris $f(x)$ sans la valeur absolue dans l'intervalle $]-\infty ; \frac{1}{2}]$.

2. Dans un repère orthonormal (O, I, J), représente $f(x)$ en te limitant à l'intervalle $]-\infty ; \frac{1}{2}]$.

3. Écris $f(x)$ sans la valeur absolue dans l'intervalle $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

4. Dans le repère précédent, représente $f(x)$ en te limitant à l'intervalle $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

À Retenir

Méthode

Pour représenter graphiquement une application affine f du type $f(x) = |ax + b|$, je procède comme suit :

- J'exprime $f(x)$ sans la valeur absolue sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{b}{a}]$ puis dans un repère orthonormal (O, I, J), je représente f en me limitant à cet intervalle.
- J'exprime $f(x)$ sans la valeur absolue sur l'intervalle $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$ puis dans le repère précédent, je représente f en me limitant à l'intervalle $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$.

B. Exercices d'application

Représente dans un repère othonormal l'application affine définie par :

$f(x) = |x - 3|$;

$f(x) = |-2x - 4|$.

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Soit f la fonction affine définie par :

$f : x \rightarrow ax + b$.

Écris l'expression de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$a = 0$ et $b = 0$;

$a = 0$ et $b = 2$;

$a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$;

$a = -5$ et $b = 3$.

Exercice 2

Donne le coefficient et l'ordonnée à l'origine de f dans chaque cas :

$f(x) = 2x - 1$; $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{4})$;

$f(x) = -7x - 3$; $f(x) = \frac{x}{3} + 5$;

$f(x) = 2x$; $f(x) = 6$.

Exercice 3

Détermine parmi les expressions suivantes celles qui représentent chacune une application affine :

$f(x) = -2x - 1$; $f(x) = \frac{x+1}{x}$;

$f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$; $f(x) = (2 - x) + (5x - 1)$;

$f(x) = x^2 - 1$.

Exercice 4

Soit l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$.

À l'aide des tableaux de valeurs suivants, détermine a et b dans chaque cas :

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−5	−2	1	4	7	10

x	−5	−4	−3	1	2	3
$f(x)$	7	5	3	−5	−7	−9

Exercice 5

D'après les tableaux suivants, dis si $f(x)$ représente une application affine.

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	7	9	11	13	15	17

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	2	3	6	11	18	27

Exercice 6

Représente graphiquement les applications affines suivantes :

$f : x \mapsto 3x$;

$f : x \mapsto -2x + 1$;

$f : x \mapsto 3$;

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$;

$f : x \mapsto x - 2$;

$f : x \mapsto -5$.

Exercice 7

1. Place dans un repère du plan les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ donnés dans le tableau suivant :

x	−2	0	3
$f(x)$	−5	1	10

2. Trace la droite passant par ces points.

Exercice 8

Parmi les applications affines suivantes, indique celles qui sont croissantes et celles qui sont décroissantes :

$f : x \mapsto 2x + 3$;

$f : x \mapsto -2x + 3$;

$f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 5$;

$f : x \mapsto \frac{1}{4}x - 3$;

$f : x \mapsto 2 - x$;

$f : x \mapsto -3(1 - x)$.

Exercice 9

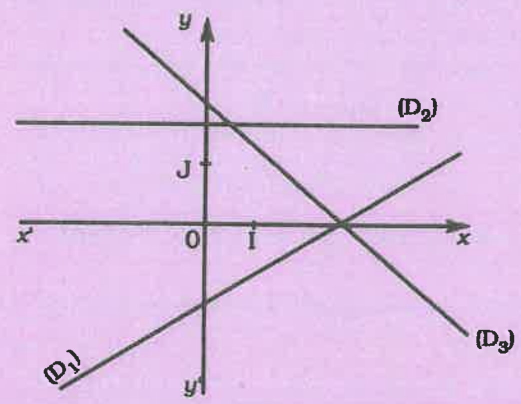
Dis si f est croissante ou décroissante dans chacun des cas suivants :

x	−4	−2	0	2	4
$f(x)$	−5	1	3	7	11

x	−4	−3	−1	1	2
$f(x)$	13	11	7	3	1

Exercice 10

Détermine les variations de f, g, et h représentées par les droites respectives (D_1), (D_2) et (D_3) suivantes :



Exercice 11

Détermine l'application affine f dans chacun des cas suivants :

$f(2) = 3$ et $f(4) = 7$;

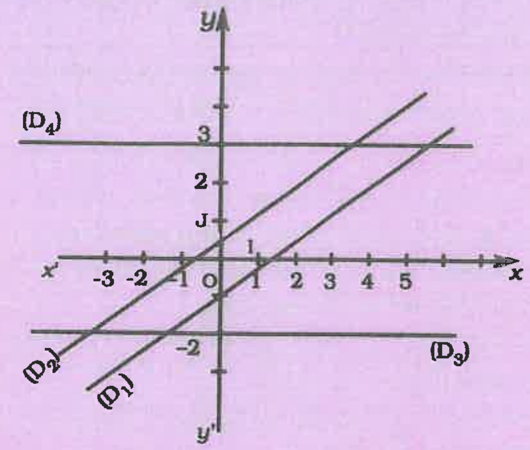
$f(0) = 4$ et $f(4) = 4$;

$f(x) = 2x + b$ et $f(2) = 6$.

f est représentée par la droite parallèle à $(D) : y = x - 3$ et passant par le point $A(2\,;4)$.

Exercice 12

Détermine les expressions des applications affines représentées par les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) telles que $(D_1)//(D_2)$, $(D_4)//(OI)$ et $(D_3)//(OI)$.



Exercice 13

Détermine l'application affine f dans chacun des cas suivants :

x	−6	−4	0	2
$f(x)$	−1	0	2	3

x	−3	−2	0	2
$f(x)$	3	1	−3	−7

Exercice 14

f et g sont des applications affines définies par $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 5$ et $g : x \rightarrow 3x - 4$.

1. Complète les tableaux suivants :

x	−10	0	5	7
$f(x)$				

x	−9	−7	−5	$\sqrt{3}$	4
$g(x)$					

2. Détermine les réels x associés aux valeurs suivantes de y :

$y = -1$; $y = +15$; $y = 10$.

Exercices de synthèse

Exercice 15

Le prix $f(x)$ à payer pour un parcours de x mètres en taxi est tel que $f(x) = 2x + 100$.

1. Calcule le prix pour un parcours de 500 m ? 2 km ?
2. Quelle est la distance parcourue pour un prix à payer de 200 F ? 410 F ? 1 000 F ?

Exercice 16

J'ai acheté deux poussins A et B de 200 g et 250 g. Avec une alimentation régulière bien équilibrée, ils grossissent de 50 g et 55 g, respectivement par jour.

1. En combien de jours pèseront-ils respectivement 1 kg ? 1,5 kg ?
2. Quel est le poids de chaque poulet en un mois ? en 45 jours ?

Exercice 17

On considère la fonction affine définie par : $f : x \to |2x + 3|$.

1. Montre que f est affine dans chacun des intervalles suivants :
$]-\infty, -\frac{3}{2}]$ et $[-\frac{3}{2}, +\infty[$.
2. Représente f graphiquement dans un repère orthonormal.

Exercice 18

On considère la fonction affine suivante : $f : x \to |x + 1| - 2$.

1. Écris $f(x)$ sans valeur absolue.
2. En déduire que f est affine par intervalles et précise ses intervalles de définition.
3. Représente f dans un repère orthonormal.

Exercices d'approfondissement

Exercice 19

On considère les applications affines f, g et h définies par :

$f : x \mapsto 2x - 2$;
$g : x \mapsto 2x + 3$;
$h : x \mapsto -\frac{3}{2}x + 1$.

1. Donne le coefficient directeur de chacune des applications affines f, g, et h puis donne leurs ordonnées à l'origine.
2. Détermine les variations de chacune de ces applications affines.
3. Représente f, g, et h dans un même repère.
4. Détermine les coordonnées des points d'intersection de la représentation graphique de f et celle de h.

Exercice 20

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère l'application affine définie par : $f(x) = -\frac{3}{2}x + 13$.

Soit (D) la représentation graphique de f.

1. Détermine les points d'intersection entre (D) et les axes de coordonnées.
2. f est-elle croissante ou décroissante ?

Exercice 21

1. Construis dans un même repère orthonormal les droites d'équations
$y = \frac{1}{3}x - 2$ et $x = -3$.
2. Détermine par le calcul les coordonnées de leurs points d'intersection et vérifie tes résultats sur le graphique.

Exercice 22

On considère dans un repère orthonormal les droites (D), (D') et(D'') telles que :

- (D) passe par A(1 ; 5) et est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 1$;
- (D') passe par B(3 ; 7) et est perpendiculaire à la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x + 2$;
- (D'') est la droite passant par les points E(3 ; 2) et F(5 ; −1).

Détermine une équation pour chacune de ces droites.

Exercice 23

Soit ABCD un trapèze rectangle tel que l'angle $\widehat{BAD} = 90°$, AB = 4 cm, DC = 6 cm et AD = x cm. (AB) et (DC) sont les bases.

1. Exprime en fonction de x l'aire du trapèze ABCD.

Soit ABEF un autre trapèze tel que l'angle BAF = 90°, BE = 3 cm, AF = x cm et ABE = 90°.

2. Exprime en fonction de x l'aire du trapèze ABEF.
3. Pour quelle valeur de x ces deux trapèzes ont-ils même aire ?
4. Pour quelle valeur de x l'aire du trapèze ABEF est-elle strictement supérieure à l'aire du trapèze ABCD ?

Exercice 24

Un employé a gagné 18 000 F pour 15 h de travail.

1. Calcule son salaire horaire.
2. Détermine la relation qui lie son salaire y et le nombre x d'heures de travail.
3. Construis la représentation graphique de la fonction ainsi obtenue.
4. Détermine graphiquement ;
   - le salaire correspondant à 11 h de travail ;
   - le nombre d'heures de travail correspondant à un salaire de 10 800 F.
5. Cet employé consacre 21% de son salaire à l'achat d'un meuble ; détermine le prix de ce meuble.
6. Il donne 2 250 F à un parent. Quel pourcentage de son salaire lui a-t-il donné ?

Exercice 25

Soit a et b, a' et b', quatre réels donnés et f et g, les applications affines définies par :
$f : x \mapsto ax + b$; $g : x \mapsto a'x + b'$.

1. Montre que f est une application affine. Quel est son coefficient directeur ? Son ordonnée à l'origine ?
2. h' est l'application définie par :
$h' : x \mapsto [f(x)] \times [g(x)]$.
h est-elle affine ?

Exercice 26

On définit l'application f dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2 - x|$.

1. Montre que f est une application affine dans les intervalles $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.
2. Détermine les variations de f dans les intervalles $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.
3. Représente f dans un repère orthonormal.

Exercice 27

On définit l'application affine f par : $f(x) = ax + b$.

1. On suppose que $a > 0$. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
   a) Compare $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
   b) Calcule $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1) - (x_2)}$.
2. On suppose que a < 0. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
   a) Compare $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
   b) Calcule $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1) - (x_2)}$.
3. Selon le signe de a, comment sont rangés les réels x_1, x_2 et leurs images par f ?

Exercice 28

On considère un repère orthonormal (O, I, J) du plan. Soit le point A(2, −3) et f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 4$.

1. Trace la droite (D_1) représentative de f et marque le point A.
2. Détermine l'application affine représentée par la droite (D_2) passant par A et parallèle à (D_1).
3. Détermine l'application affine représentée par la droite (D_2) passant par A et perpendiculaire à (D_1).

Exercice 29

1. Trace un segment [CD] de longueur 5 cm. Place sur ce segment un point M et construis un rectangle CMKS tel que MK = 2,5 cm. Construis de l'autre côté de la droite (CD) le triangle équilatéral MED.
2. Le point M varie sur le segment [CD]. On pose CM = x. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
Soit $P_1(x)$ le périmètre du rectangle CMKS et $P_2(x)$, le périmètre du triangle MED.
3. Représente dans un repère orthonormé les applications P_1 et P_2.
4. Détermine graphiquement puis par le calcul la valeur de x pour laquelle les deux périmètres sont égaux.

Exercice 30

u et v sont deux applications définies dans $\mathbb{R}$ telles que $u(x) = |x + 2|$ et $v(x) = |1 - 2x|$.

1. Montre que u et v sont deux applications affines par intervalles.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $u(x) = v(x)$?

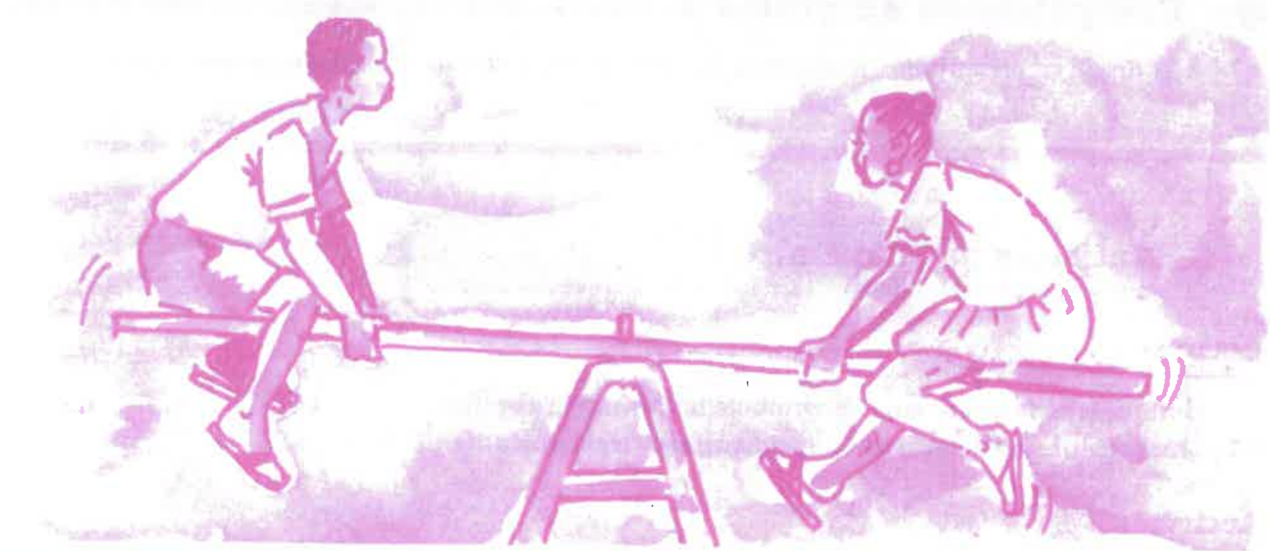
3. Construis les représentations graphiques de u et v dans l'intervalle $[-2, \frac{1}{2}]$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

Solution de la situation problème

Le prix p à payer pour un parcours de x km est $p = 250x + 100$.
Ici $x = 7$ km, d'où $p = 250 \times 7 + 100 = 1750 + 100$.
Le prix indiqué par le taximètre est 1850 F.

CHAPITRE

3 ÉQUATION ET INÉQUATION À UNE INCONNUE



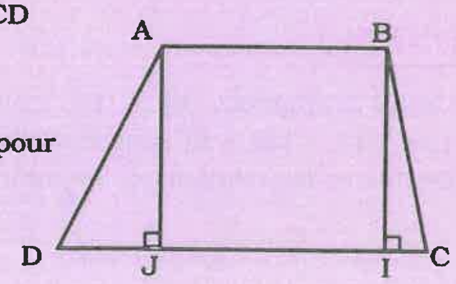
Sommaire

Introduction

Ce chapitre aborde l'étude de certaines équations de type «valeur absolue» et des équations et inéquations du second degré dont la résolution fait appel à des factorisations vues en collège. Elles nous serviront à résoudre des problèmes concrets.

Situation problème

La figure ci-contre est un trapèze ABCD dont la petite base [AB] a la même longueur que la hauteur. CI = 1 cm et DJ = 3 cm.
Calcule les dimensions de ce trapèze pour que son aire mesure 35 cm².



3.1 Équation du type $|ax + b| = |cx + d|$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations du type :

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Écris une expression sans le symbole de la valeur absolue.
2. Quelle est la valeur absolue de chacun des réels suivants : (−2) ; (+2) ?

Activité 2.

Exprime sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

$|\sqrt{3} - 1| =$; $|2 - \sqrt{5}| =$; $|a| =$ pour $a \in \mathbb{R}$

Activité 3.

1. Trace une droite graduée et place sur cette droite le point A d'abscisse 3.
2. Place ensuite un point M d'abscisse x tel que la distance de A à M soit égale à 2.
   Combien de points M trouves-tu ? Quelles sont leurs abscisses ?
   Les nombres que tu as trouvés sont les solutions de l'équation $|x - 3| = 2$.

Activité 4.

1. Place sur une droite graduée un point B d'abscisse (−4) puis un point N d'abscisse x tels que la distance de B à N soit égale à 3.
   Combien de points N trouves-tu ? Quelles sont leurs abscisses ?
2. Les nombres que tu viens de trouver sont les solutions d'une équation avec valeur absolue.
   Écris cette équation.

Activité 5.

1. Utilise la propriété $|A| = |B|$, équivalent à $A = -B$ ou $A = B$, pour exprimer $|2x - 1| = |3x + 5|$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Déduis-en les solutions de l'équation $|2x - 1| = |3x + 5|$.

À Retenir

Méthode
Pour résoudre une équation du type $|ax + b| = |cx + d|$,
j'utilise la propriété $|A| = |B|$ équivalente à $A = -B$ ou $A = B$.

J'applique la méthode
Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| = |3x - 4|$.
$|x + 2| = |3x - 4|$ équivaut à $x + 2 = 3x - 4$ ou $x + 2 = -3x + 4$
soit $x = 3$ ou $x = 0,5$.
Les solutions de l'équation proposée sont 0,5 et 3.
On peut aussi écrire S = {0,5 ; 3}.

B. Exercice d'application

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$|x - 6| = 4$; $|x + 1| = |x - 5|$; $|2x - 1| = |5 - 3x|$; $|7x - 6| = -5$.

3.2 Équations du type $ax^2 + b = 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant au type $ax^2 + b = 0$, a et b étant des réels donnés.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Applique la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

1. Développe et réduis chacune des expressions suivantes :
   $(2x + 5)^2$; $(y - 3)^2$; $(3t + 2)(3t - 2)$.
2. Factorise chacune des expressions suivantes :
   $2ab - 3ac$; $3ab(b + 1) - c(b + 1)$; $x^2 - 6x + 9$; $4x^2 - 4x + 1$;
   $4 - 9x^2$; $x^2 - 4 + (3x + 5)(x + 2)$.

Activité 2.

Résous des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $5(2x + 3) = 0$; $x(x + 2) = 0$; $3x(x - 1) = 0$; $(x + 1)(x - 4) = 0$.

Activité 3.

On donne l'expression $A = 4x^2 - 9$.

1. Calcule la valeur numérique de A lorsque $x = -1$; $x = 0$; $x = \frac{2}{3}$; $x = \sqrt{5}$; $x = \frac{3}{2}$.
   As-tu trouvé toutes les valeurs de x pour lesquelles $A = 0$?
2. Factorise A puis résous l'équation $A = 0$.

À Retenir

Méthode

Pour résoudre une équation se ramenant au type $ax^2 + b = 0$, a et b étant des réels donnés :

- Je factorise si possible le 1er membre (l'écrire sous la forme : $(ax + b)(cx + d)$).
- J'utilise la propriété « Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul » ce qui signifie : **AB = 0 si A = 0 ou B = 0.**
- J'écris les solutions de l'équation.

Application de la méthode

Résous dans $\mathbb{R}$: $100x^2 - (64x^2 + 144) = 0$. Pour y parvenir :

- Je supprime les parenthèses et j'obtiens $36x^2 - 144 = 0$.
- Je reconnais l'identité $36x^2 - 144 = (6x - 12)(6x + 12)$.
- J'obtiens alors $(6x - 12)(6x + 12) = 0$.
- J'applique la propriété $AB = 0$ équivalant à $A = 0$ ou $B = 0$.

$(6x - 12)(6x + 12) = 0$ équivalent à $6x - 12 = 0$ ou $6x + 12 = 0$.

soit $x = 2$ ou $x = -2$.

Les solutions de l'équation donnée sont **−2** et **2**.

On peut écrire aussi **S = {−2 ; 2}**.

B. Exercice d'application

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis vérifie pour chacune d'elles que les réels obtenus sont bien des solutions de l'équation initiale :
$9x^2 - 16 = 0$; $2x^2 + 7x = 0$; $(x + 5)(x - 3) = x^2 - 11$; $x^2 + 3 = 0$.

3.3 Inéquation - Produit du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.

NB : $\leq$ peut être remplacée par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Trouve le signe d'un produit

On donne les expressions suivantes où k et m sont des réels non nuls :
A = 5k B = −3k C = mk D = −mk

1. Trouve le signe (+ ou −) de chacune de ces expressions dans les cas suivants :
   1er cas : k et m sont positifs ;
   2e cas : k et m sont négatifs ;
   3e cas : k et m sont de signes contraires.
2. Trouve les signes de k et m dans les cas suivants : $D < 0$; $D > 0$.

Activité 2.

Écris en fonction de 0 le signe d'un réel

Complète les énoncés suivants en remplaçant les pointillés par le terme positif ou négatif qui convient :
$x < 0$ signifie : le signe de x est ...
$x + 3 > 0$ signifie : le signe de $x + 3$ est ...
$x - 2 \leq 0$ signifie : le signe de $x - 2$ est ...

Activité 3.

Écris autrement un système de deux inéquations du 1er degré à une inconnue

1. Donne une autre écriture du système d'inéquations suivant : $x + 1 \geq 2$ et $x - 1 < 1$.
2. Même question pour $x - 5 < -2$ et $x + 4 \geq 0$.

Activité 4.

Résous un système de deux inéquations du 1er degré à une inconnue

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants : $\begin{cases} x + 4 < 7 \\ x + 2 > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -x + 1 \geq 0 \\ x + 2 > 0. \end{cases}$

Activité 5.

1. Applique la règle des signes d'un produit pour écrire les systèmes d'inéquations équivalents à l'inéquation $(x + 3)(x - 2) < 0$.
2. a) Résous chacun de ces systèmes dans $\mathbb{R}$.
   b) Déduis-en les solutions de l'inéquation $(x + 3)(x - 2) < 0$.

À Retenir

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, je peux résoudre les systèmes d'inéquations équivalents ($\leq$ peut être remplacée par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés).

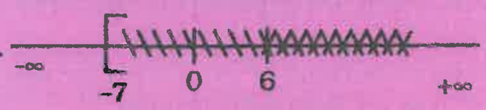
J'applique la méthode

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x - 6)(x + 7) > 0$

$(x - 6)(x + 7) > 0$ équivaut à (I) $\begin{cases} x - 6 < 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases}$ ou (II) $\begin{cases} x - 6 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases}$

Résolution du système (I)

La résolution de ce système donne $x < 6$ et $x < -7$.

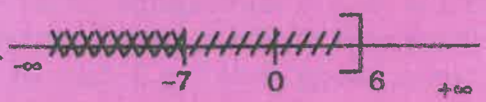


Soit $x < -7$.

L'ensemble des solutions est $S_1 =]-\infty\,;\,-7[$.

Résolution du système (II)

La résolution de ce système donne $x > 6$ et $x > -7$.



Soit $x > 6$.

L'ensemble des solutions est $S_2 =]6\,;\,+\infty[$.

Les solutions de l'inéquation $(x - 6)(x + 7) > 0$ sont les solutions du système (I) ou celles du système (II), c'est-à-dire les réels x tels que $x < -7$ ou $x > 6$.

Donc, l'ensemble S des solutions de l'inéquation $(x - 6)(x + 7) > 0$ est S_1 ou S_2.

Cela se note $S_1 \cup S_2$. On lit S_1 **union** S_2.

D'où $S =]-\infty\,;\,-7[\cup]6\,;\,+\infty[$.

Quelques vérifications

Pour $x = -7$, le 1^er^ membre de l'inéquation proposée devient $(-7 - 6)(-7 + 7) > 0$.

-7 ne vérifie pas l'inéquation puisque que $0 > 0$ est faux.

De la même manière, 6 n'est pas une solution mais -8 et 10 sont des solutions.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(x + 3)(x - 1) < 0$; $(2 - x)(x + 1) \geq 0$; $x(x - 2) > 0$; $x^2 - 6x + 9 \leq 0$.

3.4 Inéquations du type $ax^2 + b \leq 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations se ramenant au type : $ax^2 + b \leq 0$.

NB : $\leq$ peut être remplacée par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x - 4)(x + 1) \leq 0$.

Activité 2.

1. a) Calcule $B = 4x^2 - 9$ pour chacune des valeurs suivantes de x :
   $x = -3$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1{,}2$; $x = 2$.
   b) Peux-tu donner toutes les valeurs de x pour lesquelles $4x^2 - 9 < 0$?
2. Factorise $B = 4x^2 - 9$ et résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $B < 0$.

À Retenir

Méthode

Pour résoudre une inéquation se ramenant au type $ax^2 + b \leq 0$

($\leq$ peut être remplacée par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés) :

- Je factorise le 1^er^ membre.
- Je résous l'inéquation produit obtenue.

Application de la méthode

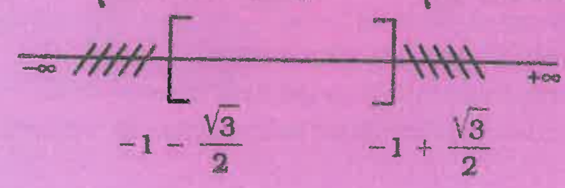
Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4(x + 1)^2 - 3 \leq 0$. Pour y parvenir :

- Je factorise le 1^er^ membre $4(x + 1)^2 - 3$.
- J'obtiens $[2(x + 1)]^2 - (\sqrt{3})^2 \leq 0$ ou $[2(x + 1) - (\sqrt{3})][2(x + 1) + (\sqrt{3})] \leq 0$
  soit $(2x + 2 - \sqrt{3})(2x + 2 + \sqrt{3}) \leq 0$.
  $(2x + 2 - \sqrt{3})(2x + 2 + \sqrt{3}) \leq 0$ équivaut à (I) $\begin{cases} 2x + 2 - \sqrt{3} \leq 0 \\ 2x + 2 + \sqrt{3} \geq 0 \end{cases}$ ou (II) $\begin{cases} 2x + 2 - \sqrt{3} \geq 0 \\ 2x + 2 + \sqrt{3} \leq 0 \end{cases}$

Résolution du système (I)

La résolution de ce système donne

$x \leq -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \geq -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Les solutions sont les réels x tels que $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'ensemble des solutions est $S_1 = \left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} ; -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Résolution du système (II)

La résolution de ce système donne $x \geq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \leq -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il n'existe pas de réels x tels que $x \geq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \leq -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'ensemble des solutions est $S_2 = \emptyset$.

Les solutions de l'inéquation $(2x + 2 - \sqrt{3})(2x + 2 + \sqrt{3}) \leq 0$ sont les solutions du système (I) ou celles du système (II), c'est-à-dire les réels x tels que :

$-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où, $S = \left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} ; -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$25x^2 - 16 \leq 0$; $x^2 - 2x > 0$; $x^2 - 6x + 9 < 0$.

3.5 Résolution de problèmes

Compétences exigibles

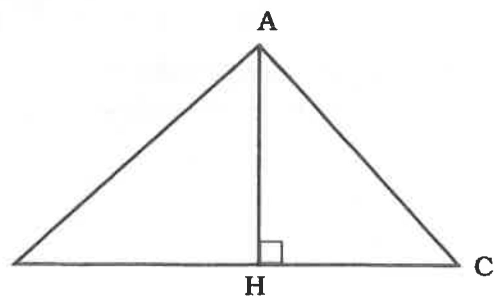
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre des problèmes en utilisant les équations, inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue.

A. Activités préparatoires

Sur la figure ci-contre :

BH = 6 cm et AH = HC = x.

1. Précise le signe du nombre x.
2. Exprime l'aire du triangle ABC à l'aide de x.
3. Calcule x lorsque l'aire du triangle ABC est 20 cm².



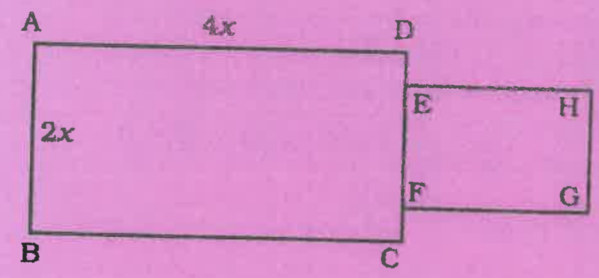
À Retenir

Méthode

- Je fais une lecture sélective de l'énoncé.
- Je choisis l'inconnue, guidé par ce qu'on me demande.
- Je mets en équation (inéquation) sous les contraintes des données.
- Je résous.
- Je donne les solutions mathématiques.
- Je vérifie les solutions trouvées.
- Je donne les solutions du problème en interprétant les solutions mathématiques.

Application de la méthode

Sur la figure ci-contre, ABCD et EFGH sont des rectangles dont les dimensions en centimètres sont :
AB = $2x$; AD = $4x$; EF = 2 et FG = **3**.
Calcule x sachant que l'aire totale de la figure est 38 cm².



Solution

Choix de l'inconnue

x est l'inconnue (la question posée).

Contraintes

x est un nombre positif (x est une longueur et l'aire de la figure n'est pas nulle).

Mise en équation

L'aire totale de la figure est donnée par :

$(4x \times 2x) + (3 \times 2) = 38$.

Résolution

$(4x \times 2x) + (3 \times 2) = 38$

ou $8x^2 + 6 = 38$

ou encore $4x^2 + 3 = 19$

soit $4x^2 - 16 = 0$

Ce qui est équivalent à $(2x + 4)(2x - 4) = 0$.

Il en résulte que $x = -2$ ou $x = 2$.

Les solutions de l'équation sont -2 et 2.

Interprétation

x étant un nombre positif, -2 n'est donc pas solution du problème posé.

La solution est 2.

B. Exercices d'application

1. Si on augmente le côté d'un carré de 2 cm, son aire devient égale à 9 cm².
   Calcule la longueur initiale du côté de ce carré.
2. Le produit de deux entiers naturels consécutifs est 6. Peux-tu calculer ces entiers ?

Exercices d'entraînement

Exercice 1
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$19 - 15(3x + 1) = 36 - 6(5x - 3) - 5(x + 7)$;
$23x + 17(x - 3) = 8(1 - 5x) - 59$.

Exercice 2
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x^2 - 4 = 0$; $x^2 + 1 = 0$;
$7x + 4{,}5 + 3(x - 4) = 4(3x - 0{,}25) + 6{,}5$;
$x(x - 1) = 0$;
$(2x - 1)^2 + (3x + 5)^2 = 13(x + 1)(x - 1) + 143$;
$(3x + 1)(x - 2) = 0$;
$7(5 - 2x) - 5(x - 2)(2x - 5) = (5x - 7)(5 - 2x)$;
$(2x + 1)(2x - 1)^2 = (x + 3)^2(2x + 1)$;
$3x - 7 = x + 2(x + 1)$;
$x + 3(x - 1) = -5x + 2$;
$1 + \frac{x}{3} - 2x(1 + 2x) = 4x - 1$;
$(4x^2 - 9) - (2x - 3)^2 + (2x - 3)(x + 5) = 0$;
$(4x - 3)^2 - (x - 3)^2 = 0$;
$\frac{(5x + 3)}{4} + 2x = \frac{(3x + 5)}{2}$.

Exercice 3
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$4(x + 4) - 7x + 10 > 8(5x + 4) + 166$;
$5(x + 2) + 3{,}5 + (3x + 2) > 7x + 14 - 3(x + 1{,}5)$;
$x^2 + (x + 4)^2 > 2(x - 1)(x + 2) + 38$;
$4(x - 1) + 6 \geq 2(x + 3) + 2x - 4$;
$2(x - 3) + 5x - 1 > 4(2x - 3) - 5 + x$;
$3(x - 2) + 4x - 1 < 5(2x - 2) - 3(x + 3)$;
$x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq 0$;
$\frac{(2x - 5)}{3} > \frac{(2 - x)}{5}$;
$(x - 7)(x + 3) \leq 0$;
$2x(x + 1) \geq (1 - 3x)(x + 1)$;
$\frac{(3x - 2)}{(x - 3)} \geq 0$.

Exercice 4
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$|2x - 3| = |5x + 1|$; $|-3x - 4| = |x + 1|$;
$|-x + 3| = |2x + 1|$; $|-5x + 4| = |x - 8|$.

Exercice 5
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x(3 - x) = 0$; $3x(4 + 2x) = 0$; $(3x - 5)(x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x^2 - 2x - 8 = 0$
$4x^2 - 9 = 0$; $18x^2 - 50 = 0$;
$x^2 - 4x - 5 = 0$; $(3x - 7)(2 - x) = 0$.

Exercice 6
Détermine deux nombres entiers naturels consécutifs dont le produit est 42.

Exercice 7
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$x - 1 < 0$; $2x + 5 > 0$; $3x - 7 < x + 3$;
$3x - 5 \leq x + 3$; $5x + 3 \geq 3x - 7$;
$(3x - 1)(x + 5) \leq 0$;
$(x - 5)(2x + 3) \geq 0$.

Exercice 8
Trouve trois nombres consécutifs dont la somme est 129.

Exercice 9
Un père a 29 ans et son fils 5 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ?

Exercices de synthèse

Exercice 10
Un mètre de drap coûte 720 F de plus qu'un mètre de toile; sachant que 10 m de drap et 12 m de toile ont coûté ensemble 25 680 F, trouve le prix du mètre de chaque étoffe.

Exercice 11
Une mère a 37 ans et ses enfants 8, 10 et 13 ans. Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Exercice 12
On a un triangle équilatéral ABC de côté AB = x. Sur le côté [BC], on construit un rectangle de 3,5 cm de largeur et de longueur égale au côté du triangle. Pour quelles valeurs de x le périmètre du rectangle est-il plus petit que celui du triangle ?

Exercice 13
On trace un triangle ABC rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 9 cm. On place un point M sur [BC] et on construit le rectangle ABMN.

1. On pose BM = x ; détermine l'aire du rectangle ABMN en fonction de x.
2. Comment choisir BM = x pour que l'aire du rectangle ABMN soit les $\frac{2}{3}$ de l'aire du triangle ABC ?

Exercice 14
Un propriétaire de voitures à louer propose deux formules :
- On peut louer une voiture chez lui et payer 10 000 F de forfait ensuite 300 F par kilomètre parcouru.
- On peut aussi payer un forfait de 15 000 F et ensuite 250 F par kilomètre parcouru.

1. Un client doit parcourir une distance de 150 km. Quelle est la formule la plus avantageuse pour lui ?
2. Quelle est la distance à parcourir pour laquelle les deux formules sont équivalentes ?

Exercice 15
Un cycliste B roule à la vitesse de 70 km/h et un cycliste A à la vitesse de 50 km/h. Ils roulent dans le même sens, B derrière A.
À un moment donné, les deux cyclistes sont séparés par une certaine distance et il reste au cycliste A une distance de 120 km à parcourir avant d'arriver à destination.
Quelle est la distance minimale qui doit séparer ces deux cyclistes au moment où B s'élance à la poursuite de A pour que B le rattrape au plus tard quand A arrivera à destination ?

Exercice 16
On considère la fraction $\frac{21}{25}$. Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de cette fraction pour que sa forme réduite soit $\frac{7}{8}$?

Exercice 17
Un père a 34 ans et son fils 8 ans.
Combien d'années lui reste t-il à vivre avant que son âge ne devienne supérieur au double de celui de son enfant ?
Quel sera alors l'âge de chacun lorsqu'il sera arrivé à ce tournant décisif ?

Exercice 18
Un père âgé de 45 ans promet à son fils âgé de 13 ans de l'amener en vacances à l'étranger lorsque son âge aura triplé celui du fils. Ce sera dans combien d'années ?

Exercice 19
Un troupeau de moutons compte 136 têtes de bétail, rien que des brebis et des béliers. Le nombre de brebis est trois fois plus grand que celui des béliers.
1. Détermine le nombre de brebis et le nombre de béliers.
2. Cette année, l'éleveur décide de vendre le tiers des brebis et la moitié des béliers. Il constate cependant que 19 des brebis restantes ont mis bas soit un agneau, soit deux agneaux. Encadre le nombre des têtes de bétail de ce troupeau après la naissance de ces agneaux.

Exercices d'approfondissement

Exercice 20
J'ai dans ma poche des pièces de 100 F et de 50 F, soit un total de 45 pièces. Je sais qu'il y a au moins 25 pièces de 50 F et au plus 30 pièces de 50 F. Encadre la somme d'argent que j'ai en poche.

Exercice 21
Un cylindre a un diamètre intérieur de 11 cm et une hauteur de 19 cm. Ce cylindre contient de l'eau sur une hauteur de 15 cm.
1. Quel volume d'eau peut-il contenir ?
2. On y plonge une bille en acier de même diamètre. L'eau va-t-elle se déverser ? Si oui, de combien de cm^3 ?
3. Quelle quantité d'eau maximale pouvait contenir ce cylindre pour qu'en y plongeant la boule, l'eau ne déborde pas ?

Exercice 22
Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 10 cm et 9 cm et une hypoténuse qui mesure 15 cm de longueur. Détermine la longueur de la hauteur issue de l'angle droit.

Exercice 23
Dessine un triangle ABC rectangle en A et construis la hauteur [AH]. Précise la nature de ABC pour que les triangles ABH et AHC aient la même aire.

Exercice 24

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{A}$ vaut 12° de plus que $\widehat{C}$ et l'angle $\widehat{B}$, le double de l'angle $\widehat{A}$. Détermine la mesure de chaque angle de ce triangle.

Exercice 25

Un trapèze est tel que la petite base a même longueur que le côté oblique adjacent à cette base. Détermine les valeurs des angles de ce trapèze si le triangle isocèle formé a un angle à la base de 50°.

Exercice 26

Un éleveur voyage avec 5 animaux, des moutons et des poules. Il sait qu'il a au total 14 pattes. Détermine le nombre de moutons et de poules.

Exercice 27

Dans une classe de troisième de 40 élèves, les $\frac{2}{5}$ du premier groupe des élèves on eu le nombre de points requis pour réussir au 1er brevet blanc organisé par l'administration. Les élèves qui peuvent prétendre au 2e groupe ont eu un effectif qui fait les $\frac{5}{4}$ de ceux du premier groupe et le reste de la classe est dans le lot des recalés. Détermine l'effectif de chaque groupe d'élèves.

Exercice 28

On construit un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires. Démontre que le périmètre de ce quadrilatère est supérieur à la somme des longueurs de ses diagonales.

Exercice 29

Les longueurs des côtés d'un triangle sont a, b et c. Soit h, la hauteur relative au côté de longueur a. D'après les données suivantes : $5 < a < 7{,}5$; $6{,}5 < b < 8$; $4{,}5 < c < 6{,}5$ et $5{,}5 < h < 8$, donne un encadrement du périmètre puis de l'aire de ce triangle.

Exercice 30

On considère l'expression
$E(x) = (2x - 3)(3 - 4x) - (3x - 4{,}5)(1 - 5x)$.
Résous dans $\mathbb{R}$:
- l'équation $E(x) = 0$;
- l'inéquation $E(x) > 0$.

Solution de la situation problème

L'aire $\mathcal{A}$ du trapèze ABCD est : $\frac{(AB + DC) \times AJ}{2}$.

Or, AB = AJ = JI = BI et DC = DJ + JI + IC = 3 + AB + 1 = 4 + AB.

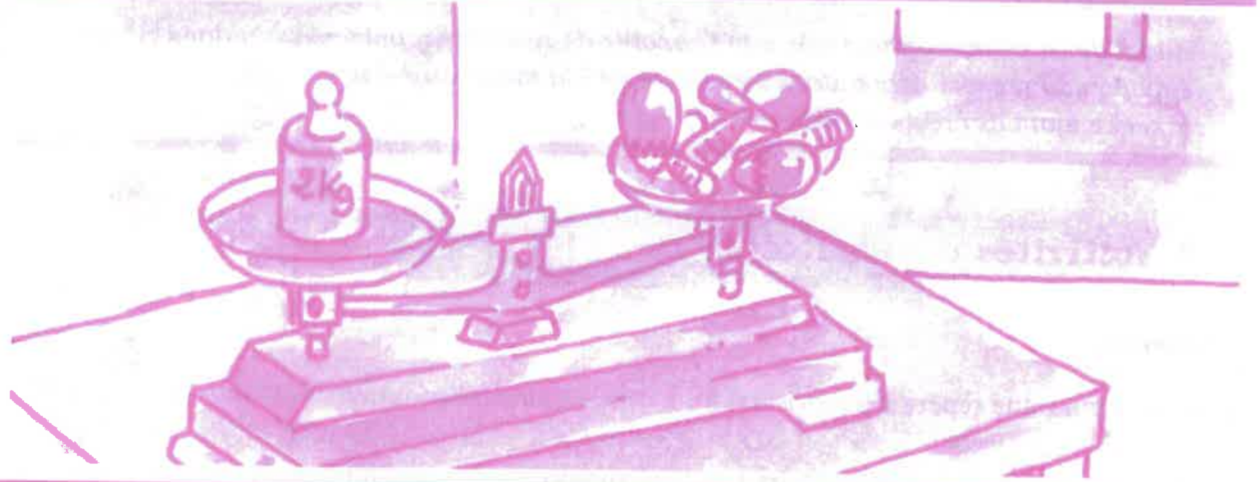
$$\mathcal{A} = \frac{(AB + 4 + AB) \times AB}{2}$$

$$\mathcal{A} = AB^2 + 2AB$$

On veut que l'aire $\mathcal{A}$ de ce trapèze mesure 35 cm².
d'où $AB^2 + 2AB = 35$
$AB^2 + 2AB - 35 = 0$
$(AB + 7)(AB - 5) = 0$.
Or, AB > 0 (car AB est une distance), d'où AB = 5.
On sait que DC = 4 + AB = 4 + 5 = 9.
Pour que l'aire de ce trapèze mesure 35 cm², on doit avoir AB = AJ = 5 cm et DC = 9 cm.

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES



Sommaire

Introduction

L'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues nous permettra de résoudre des problèmes concrets auxquels nous sommes souvent confrontés en économie, en astronomie, etc.

Situation problème

Aïda dit à son fils Ibrahima : « Quels sont ces deux nombres réels qui ont pour somme 240 et pour différence de leurs carrés 10 800 ? »
Aide Ibrahima à les déterminer.

4.1 Résolution graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues : $ax + by + c = 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ *une équation du premier degré à deux inconnues de la forme :* $ax + by + c = 0$ *;*
a, b *et* c *étant des réels donnés.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

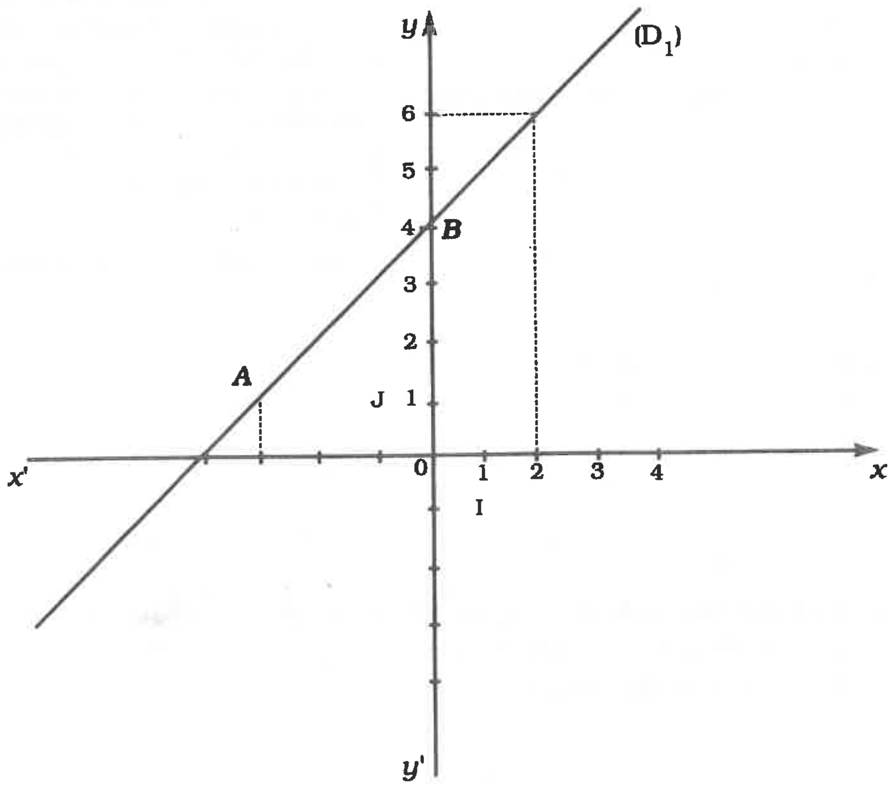
Construis dans une repère orthonormal (O, I, J) les droites d'équations suivantes :

$(D_1) : x + y + 1 = 0$; $(D_2) : -3x + y = 2$; $(D_3) : 2y + 3 = 0$;

$(D_4) : x - 2 = 0$; $(D_5) : -x + 3y = 0$.

Activité 2.

Détermine par simple lecture graphique (voir figure) l'ordonnée du point A de (D_1) d'abscisse (-3) puis l'abscisse du point B de (D_1) d'ordonnée $(+4)$.



Activité 3.

Dans *La boutique du coin*, le prix de trois crayons noirs dépasse de 50 F celui d'un stylo.

1. En désignant par x le prix d'un crayon noir et par y celui d'un stylo, traduis la phrase ci-dessus par une équation.
2. En choisissant comme échelle 2 cm pour 50 F, trace dans un repère orthonormal un axe des abscisses où l'on représentera le prix des crayons noirs et sur l'axe des ordonnées, celui des stylos. Trace ensuite la droite (Δ) dont tu viens de trouver l'équation au point 1.
3. En utilisant la représentation graphique, réponds aux questions suivantes :
   - si un crayon noir coûtait 50 F, quel serait le prix d'un stylo ?
   - si un crayon noir coûtait 100 F, quel serait le prix d'un stylo ?
   - si un stylo coûtait 400 F, quel serait le prix d'un crayon noir ?
4. Les points de coordonnées (50 ; 100), (100, 250), (150 ; 400) se trouvent-ils sur la droite (Δ) ?
5. Trouve graphiquement d'autres couples de réels qui vérifient l'équation de la droite (Δ).

À Retenir

Une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax + by + c = 0$ obtenue graphiquement est un couple de réels, coordonnées d'un point de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Une telle équation admet une infinité de couples solutions.

Méthode

- Pour trouver graphiquement une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax + by + c = 0$, je procède de la manière suivante :
  - Je trace d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
  - Je choisis ensuite un point sur cette droite.
  - Je le projette orthogonalement sur les deux axes et je lis le couple de coordonnées obtenu.
  - Les solutions de l'équation $ax + by + c = 0$, sont les couples (x, y) coordonnées des points de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
- Pour vérifier graphiquement qu'un couple de réels donnés est une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax + by + c = 0$, je procède de la manière suivante :
  - Je trace d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
  - Je place ensuite dans le même repère, le point ayant pour coordonnées ce couple de réels donnés.

Si le point que je viens de placer se trouve sur la droite déjà tracée, alors ses coordonnées sont une solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

Cependant, si le point ne se trouve pas sur la droite tracée, alors ses coordonnées ne sont pas une solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

1. Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

   $-3x + 2y - 1 = 0$; $3y + 5 = 0$; $x - 2 = 0$; $2x + 3y = 0$.

2. Vérifie graphiquement si les couples de réels suivants sont des solutions de chacune des équations ci-dessus :

   $(2 ; 0)$; $\left(\frac{5}{2} ; -\frac{5}{3}\right)$; $(1 ; 2)$; $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

4.2 Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par substitution

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système d'équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par substitution.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans la boutique du coin, Dado a payé pour 450 F quatre stylos et un crayon noir.
Aïda a payé 150 F un crayon noir et un stylo.

1. Si x est le prix d'un crayon noir et y celui d'un stylo, traduis chacune des phrases ci-dessus par une équation.
2. Écris le système formé par ces deux équations.

Activité 2.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x - 3 = 0$.

Activité 3

1. Soit l'expression $E = 2a + 5$.
   Calcule E si $a = +4$ puis si $a = -3$.
   Calcule a si $E = 21$ puis si $E = 0$.
2. Soit l'expression $F = 2x + y + 5$.
   Calcule F si $x = -5$ et $y = 4$ puis si $x = y = 0$.
   Calcule y si $F = 0$ et $x = 3$.
   Calcule x si $F = -5$ et $y = +2$.

Activité 4.

1. Dans l'équation traduisant l'achat de Aïda (voir Activité 1), exprime y en fonction x.
2. Remplace dans l'autre équation (celle traduisant l'achat de Dado) y par son expression en fonction de x que tu viens de trouver à la question précédente et résous l'équation obtenue.
3. Remplace x par cette valeur dans l'expression de y obtenue au point 2 pour calculer y.
4. Remplace x par 50 et y par 100 dans les équations $x + 4y = 450$ et $x + y = 150$.
   Que constates-tu ?
   Ce couple que tu viens de trouver est appelé solution du système :
   $$\begin{cases} x + 4y = 450 \\ x + y = 150. \end{cases}$$

À Retenir

Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par substitution il faut :

- Exprimer y en fonction de x dans l'une des équations.
- Substituer à y cette expression ainsi obtenue dans l'autre équation.
- Résoudre l'équation en x ainsi obtenue.
- Remplacer x dans l'expression de y trouvée dans la première étape et x par sa valeur réelle **si elle existe** pour obtenir celle de y.
- **Vérifier que le couple** $(x ; y)$ de réels obtenu (s'il existe) est à la fois solution des deux équations.
- Donner la solution mathématique du système.

Remarque : Nous pouvons adopter la même démarche en exprimant à la première étape x en fonction de y.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution.

a) $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ y - 1 + 2x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 3y - 12 = 0 \\ -2x - y + 4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

4.3 Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par comparaison

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par comparaison.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Exprime x en fonction de y puis y en fonction de x dans chacune des équations suivantes :

$x + y + 5 = 0$; $-x + 2y = -3$; $2x - 3y = 5$.

Activité 2.

Soit $\begin{cases} y = 2 + x \\ y = 3x - 4. \end{cases}$

1. Compare $2 + x$ et $3x - 4$.
2. Résous l'équation en x obtenue.
3. Déduis-en y.
4. Vérifie que le couple $(x\,;\,y)$ obtenu est solution du système $\begin{cases} y = 2 + x \\ y = 3x - 4. \end{cases}$

Activité 3.

Soit le système $\begin{cases} x + 4y = 450 \\ x + y = 150. \end{cases}$

1. Dans chacune de ces deux équations, exprime x en fonction de y.
2. Compare ces deux expressions de x.
3. Résous l'équation en y obtenue. Déduis-en x.
4. Vérifie que le couple $(x\,;\,y)$ obtenu est une solution du système $\begin{cases} x + 4y = 450 \\ x + y = 150. \end{cases}$

À Retenir

Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier à deux inconnues en utilisant la méthode par comparaison, il faut :

- Exprimer y en fonction de x dans chacune des équations.
- Comparer (ici égaler) les deux expressions de y en fonction de x.
- Résoudre l'équation en x obtenue.
- Calculer y en remplaçant x par sa valeur réelle dans l'une des expressions de y en fonction de x.
- Vérifier que le couple de réels $(x\,;\,y)$ obtenu (s'il existe) est solution des deux équations du système.
- Donner la solution mathématique du système.

Remarque : on peut adopter la même démarche en exprimant x en fonction de y.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants en utilisant la méthode par comparaison :

a) $\begin{cases} x + 7 - y = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ y - 3 + 5x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x - 1 \\ 3x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = \dfrac{3}{2}x + 4 \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases}$

4.4 Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par addition (ou par combinaison)

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par addition (ou par combinaison).

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Soit l'égalité $a + 3 = b - 9$.

1. Additionne à chaque membre de l'égalité ci-dessus le réel $(+4)$.
2. Effectue les calculs.

Activité 2.

Soit $x = 5y + 3$ et $4y = -3x + 2$.

1. Additionne membre à membre ces deux expressions.
2. Fais de même pour les deux expressions suivantes :
   $4x = y - 9$ et $5y = -2x + 7$.

   Soit $x - 2y = 5$ et $x + 2y = -3$.

1. Additionne membre à membre les deux expressions.
2. Effectue les calculs.
3. Résous l'équation ainsi obtenue.

Activité 3.

Soit le système $\begin{cases} x + 4y = 450 \ (1) \\ x + y = 150 \ (2). \end{cases}$

1. Multiplie la deuxième équation par (-1) et nomme l'équation obtenue (3).
2. Additionne membre à membre les équations (1) et (3).
3. Résous l'équation en y obtenue.
4. Multiplie la deuxième équation par (-4) et nomme cette équation (4).
5. Additionne membre à membre les équations (1) et (4).
6. Résous l'équation en x obtenue.
7. Vérifie que le couple $(x ; y)$ obtenu est solution du système $\begin{cases} x + 4y = 450 \\ x + y = 150. \end{cases}$

À Retenir

Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par addition (ou par combinaison), je procède comme suit :

- Pour éliminer les x :
  - Je multiplie les membres de chaque équation par le nombre qui convient afin que les coefficients en x dans les deux équations soient opposés.
  - J'additionne membre à membre les nouvelles équations obtenues.
  - Je résous l'équation en y ainsi obtenue.
- Pour éliminer les y, je procède de la même manière :
  - Je vérifie que le couple $(x ; y)$ obtenu (s'il existe) est la solution du système proposé.
  - Je donne la solution mathématique du système.

Remarque : après avoir utilisé la méthode par addition pour trouver une valeur, on peut utiliser la méthode par substitution pour trouver l'autre valeur.

B. Exercices d'application

Résous dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode par addition :

a) $\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 7x + 1 = 0 \\ 2 - y + 7x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + 4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \\ 5x - y - 7 = 0 \end{cases}$

4.5 Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'équations du premier degré à deux inconnues.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

1. Représente dans un même repère orthonormal (O, I, J) les droites d'équations suivantes :
$(D_1) : x - y + 1 = 0$; $(D_2) : 2x + y - 1 = 0$; $(D_3) : 2x - y + 8 = 0$;
$(D_4) : 2x - y - 3 = 0$; $(D_5) : y = 4x + 1$; $(D_6) : \frac{1}{2}y - 2x - \frac{1}{2} = 0$.

2. Détermine la position relative des droites (D_1) et (D_2), (D_3) et (D_4), (D_5) et (D_6).

Activité 2.

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \ (1) \\ x - y + 4 = 0 \ (2). \end{cases}$

L'équation (1) est celle d'une droite (Δ_1). L'équation (2) est celle d'une droite (Δ_2).

1. Trace dans un même repère orthonormal les droites (Δ_1) et (Δ_2).
2. Combien y a-t-il de points communs à (Δ_1) et (Δ_2) ?
Chaque couple de coordonnées d'un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) est solution du système.
3. Combien y a-t-il de couples solutions du système ?
4. S'il y a un seul couple solution du système, trouve-le.

Activité 3.

On considère le système suivant : $\begin{cases} -3x + y + 1 = 0 \ (1) \\ -2 + y - 3x = 0 \ (2). \end{cases}$

L'équation (1) est celle de (Δ_1). L'équation (2) est celle de (Δ_2).

1. Trace dans un même repère orthonormal les droites (Δ_1) et (Δ_2).
2. Combien y a-t-il de points communs à (Δ_1) et (Δ_2) ?
Chaque couple de coordonnées d'un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) est solution du système.
3. Combien y a-t-il de couples solutions du système ?
4. S'il y a un seul couple solution du système, trouve-le.

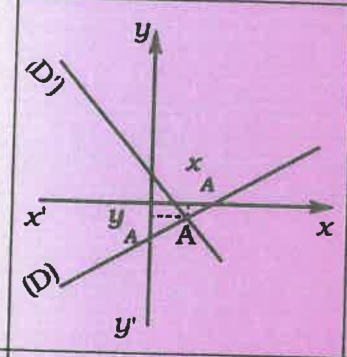
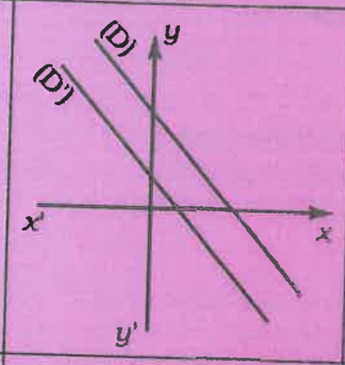
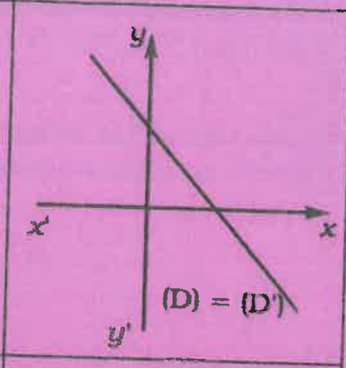
Activité 4.

On considère le système suivant : $\begin{cases} y = \frac{3}{5}x - 1 \quad (1) \\ 3x - 5y - 5 = 0 \ (2). \end{cases}$

L'équation (1) est celle de (Δ_1). L'équation (2) est celle de (Δ_2).

1. Trace dans un même repère orthonormal les droites (Δ_1) et (Δ_2).
2. Combien y a-t-il de points communs à (Δ_1) et (Δ_2) ?
Chaque couple de coordonnées d'un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) est solution du système.
3. Combien y a-t-il de couples solutions du système ?
4. S'il y a un seul couple solution du système, trouve-le.

À Retenir

Représentation graphique			
Positions relatives des droites	(D) ∩ (D') = {A $(x_A ; y_A)$} (D) et (D') sont sécantes en A.	(D) ∩ (D') = ∅ (D) et (D') sont strictement parallèles.	(D) ∩ (D') = (D) = (D') (D) et (D') sont confondues.
Conclusion	Le couple $(x_A ; y_A)$ est la solution du système.	Le système n'admet pas de solution.	Le système admet une infinité de couples solutions.

Méthode

Pour trouver graphiquement les solutions d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, il faut tracer les deux droites dans un même repère orthonormal.

- Si les deux droites sont sécantes, alors le couple $(x ; y)$, coordonnées de leur point d'intersection, est la solution du système.
- Si les deux droites sont strictement parallèles, alors le système n'admet pas de solution.
- Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de couples de réels solutions (tout couple de réels coordonnées d'un point de la droite est une solution du système).

B. Exercices d'application

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 1 - y = 0 \\ y - 1 + 2x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 3y - 12 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Exercice 1

1. Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $3x - y + 2 = 0$.
2. Les couples $(-2\,;\,-4)$, $(-3\,;\,-6)$ et $\left(\frac{-1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ sont-ils solutions de l'équation $3x - y + 2 = 0$?

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par substitution :

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par substitution :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y - 2 = -x \end{cases}$$

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par substitution :

$$\begin{cases} 3 = 2x - y \\ y - 3 + 2x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par comparaison :

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par comparaison :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y - 2 = -x \end{cases}$$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par comparaison :

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ -5 - y - x = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par comparaison :

$$\begin{cases} 3 = 2x - y \\ y - 3 + 2x = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par comparaison :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2} = 0 \\ x - 3 = 2y \end{cases}$$

Exercice 10

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 11

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} y + x = 3 \\ y - 2 = -x \end{cases}$$

Exercice 12

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 13

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{matrix} 3 = 2x - y \\ y - 3 + 2x = 0 \end{matrix}$$

Exercice 14

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 15

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ \frac{1}{3}y - x + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

Exercice 16

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$$

Exercice 17

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 18

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ y + 2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Exercice 19

1. Résous par substitution le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1\,375 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

2. Trouve deux nombres a et b sachant que leur différence est 25 et celle de leurs carrés est 1 375.

Exercice 20

Deux nombres entiers naturels ont pour carré de leur somme 100 et pour carré de leur différence 36.
Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 21

Deux nombres ont pour somme 38 et pour différence de leurs carrés 304.
Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 22

Soit a et b deux nombres réels et soit le système suivant :

$$\begin{cases} y = -2ax - 5b \\ y = -3a - 2bx \end{cases}$$

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système ci-dessus.

Exercice 23

a) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a - 4b + 7 = 0 \end{cases}$$

b) En déduire les coordonnées de I, point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $2x + y = 5$ et $3x - 4y = -7$.

Exercice 24

Soit (D_1) et (D_2) deux droites d'équations respectives $3x + y - 1 = 0$ et $3x + y = -\frac{5}{3}$.

1. Justifie la position relative de ces deux droites.

2. Déduis de la question 1 l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x + y + \dfrac{5}{3} = 0 \end{cases}$$

Exercice 25

Soit (L_1) et (L_2) deux droites d'équations respectives (L_1) : $3y = x + 3$ et

(L_2) : $y = \dfrac{1}{3}x - 2$.

1. Justifie la position relative de ces deux droites.

2. Déduis de la question 1 l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 3y = x + 3 = 0 \\ y = \dfrac{5}{3}\, y - 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 26

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

En déduire les coordonnées du point N, point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $x = 2$ et $y - 2x + 1 = 0$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 27

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} y\sqrt{3} - x\,2 = -1 \\ y\sqrt{27} - x\sqrt{50} + 7 = 0 \end{cases}$$

Exercice 28

Résous algébriquement le système (S_1)

$$\text{défini par :} \quad \begin{cases} -a + b = 3 \\ b - c = 6 \\ a + b + c = 15 \end{cases}$$

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), donne une interprétation géométrique de ta réponse.

Exercice 29

Résous algébriquement le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \\ -x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Exercice 30

Résous algébriquement le système suivant :

$$(S_2) \quad \begin{cases} a - b = 1 \\ 2a - b = -2 \\ -a + 3b = -9 \end{cases}$$

Interprète géométriquement ta réponse.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).

Exercice 31

1. Résous dans $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x + 2y = 625 \\ 6x + 13y = 3\,975 \end{cases}$

2. Rokhaya dit à sa fille : « Avec 6 250 F, j'achetais 10 kg de pommes de terre et 20 kg d'oignons. Après la dévaluation du franc CFA, je dois payer 7 950 F pour avoir les mêmes quantités. »
Trouve le prix d'un kilogramme de pommes de terre et celui d'un kilogramme d'oignons avant la dévaluation sachant que ces prix ont été multipliés respectivement par 1,2 et 1,3 après la dévaluation.

Exercice 32

Assane et Ousseynou désirent acheter en commun un magnétophone qui coûte 20 000 F.
Les économies d'Ousseynou représentent les 4/5 de celles d'Assane.
S'ils réunissent leurs économies, il leur manque 2 720 F pour pouvoir effectuer leur achat.

1. En prenant x et y comme économies respectives de Assane et Ousseynou, mets ce problème sous la forme d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues.

2. Calcule alors le montant des économies de chacun des deux garçons.

Solution de la situation problème

Deux nombres ont pour somme 240 et pour différence de leurs carrés 10 800.
Soit x et y les deux réels que veut déterminer Ibrahima.
Quels sont ces deux nombres ?

On a : $\begin{cases} x + y = 240 \\ x^2 - y^2 = 10\,800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ (240 - y)^2 - y = 10\,800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ 57\,600 - 480y + y^2 - y^2 = 10\,800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ 480y = 46\,800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ y = \dfrac{46\,800}{480} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{285}{2} \\ y = \dfrac{195}{2}. \end{cases}$

D'où $x = 142{,}5$ et $y = 97{,}5$.

$$S = \left\{\left(\frac{285}{2} ; \frac{195}{2}\right)\right\}$$

CHAPITRE 5

INÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Sommaire

Introduction

La résolution d'inéquations et de systèmes d'inéquations apportent des solutions aux problèmes liés à des contraintes tels que les problèmes de dépenses au-dessus d'un certain seuil, la maximisation d'un bénéfice, etc.

Situation problème

Gorgui dispose de 3 000 F pour acheter des oranges et des mangues. Sachant que le kilogramme de mangues coûte 300 F et celui des oranges 150 F, quelle est la quantité de mangues et d'oranges que Gorgui peut acheter sans dépasser cette somme ?

5.1 Inéquation du premier degré à deux inconnues (ou dans $\mathbb{R}^2$)

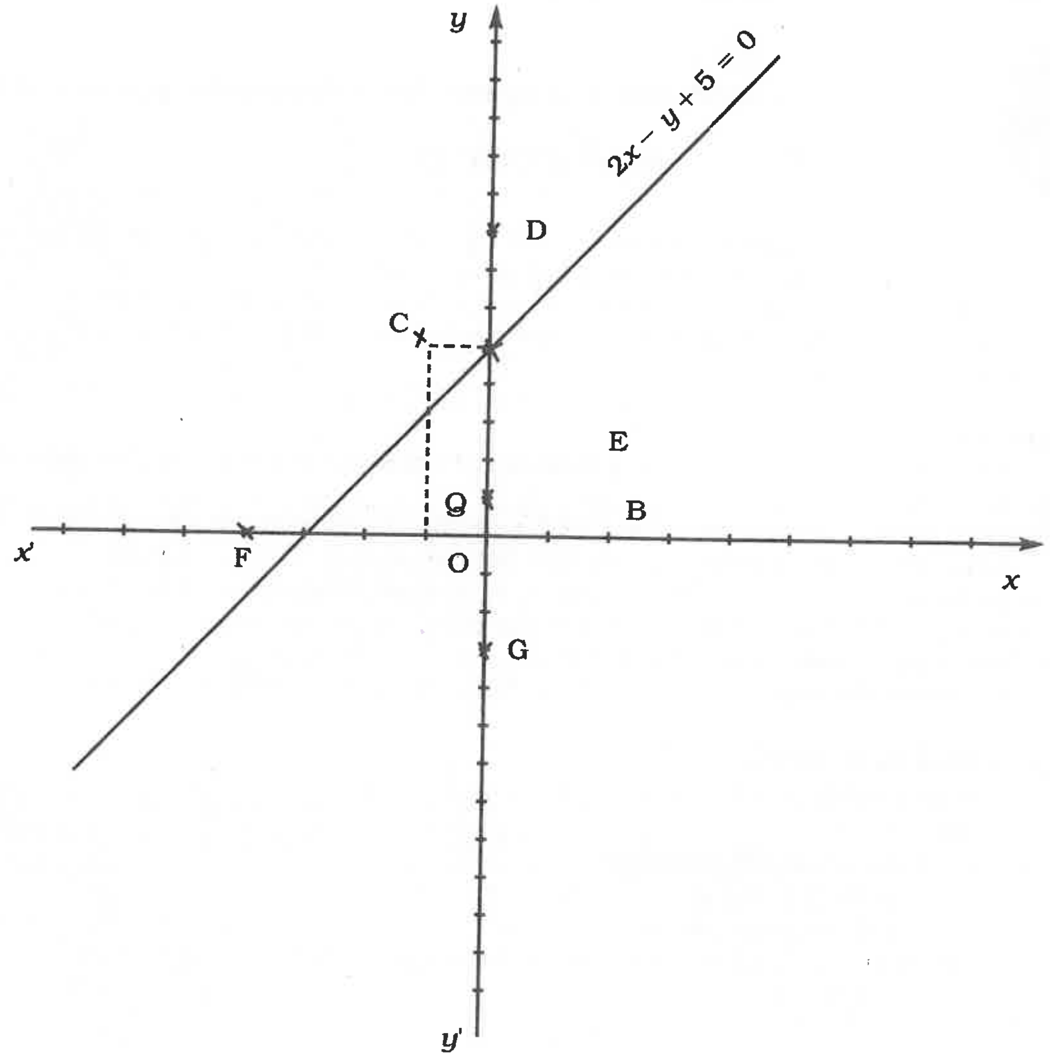
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du premier degré à deux inconnues.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), considère la figure suivante :



1. Nomme (P_1) le demi-plan de frontière (D) contenant (Q) et (P_2), l'autre demi-plan.
2. Complète le tableau suivant :

Point	Coordonnée	Appartient au demi-plan P_1	Valeur numérique de l'expression $2x - y + 5$	Signe de l'expression $2x - y + 5$
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G	(0 ; −3)			

3. Complète :
– Si N appartient à (P_1), alors l'expression $2x - y + 5$ ... 0.
– Si M appartient à (P_2), alors l'expression $2x - y + 5$ ... 0.
L'inégalité $2x - y + 5$ ... 0 est appelée inéquation du premier degré à deux inconnues.

À Retenir

Soit (D) une droite d'équation générale $ax + by + c = 0$ et A, un point de (D) tracé dans un repère orthogonal. La droite (D) partage le plan en deux demi-plans. Les coordonnées des points de l'un de ces demi-plans vérifient l'inéquation $ax + by + c > 0$ et les coordonnées des points de l'autre demi-plan vérifient l'inéquation $ax + by + c < 0$.

Méthode
Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à deux inconnues du type $ax + by + c > 0$ ou $(< 0 ; \geq 0 \text{ et } \leq 0)$:
- Je trace dans un repère orthogonal la droite (Δ) d'équation $ax + by + c = 0$.
- Je considère un point M $(x_1 ; y_1)$ de l'un des demi-plans de frontière (Δ).
- Je remplace x et y respectivement par x_1 et y_1 dans l'inéquation donnée.

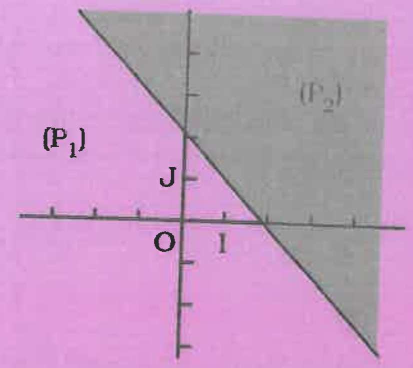
Si x_1 et y_1 vérifient l'inéquation, alors M appartient au demi-plan représentant l'ensemble des solutions de cette inéquation.
Si non, l'autre demi-plan représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Application de la méthode
- Je résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x + 3y - 4 < 0$.

x	−1	2	5
y	2	0	−2

- Je trace dans un repère orthogonal (O, I, J) la droite (D) d'équation générale $2x + 3y - 4 = 0$.
- Je nomme (P_1) le demi-plan de frontière (D) contenant O et (P_2) l'autre demi-plan.
- Je vérifie si le couple (0 ; 0) coordonnée de l'origine O vérifie l'inéquation $2x + 3y - 4 < 0$
$2(0) + 3(0) - 4 < 0$.

$0 + 0 - 4 < 0$ est vrai donc le couple (0 ; 0) vérifie l'inéquation. Le point O appartient au demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 3y - 4 < 0$.
– Je colorie le demi-plan (P_2).



NB : l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 3y - 4 < 0$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ de réels coordonnées des points du demi-plan ouvert (P_2) de frontière (D).

Remarque
- Si la droite (D) passe par l'origine du repère, alors tu choisis un point différent de O.
- Si l'inégalité est de type ≤ ou ≥, alors le demi-plan représentant l'ensemble des solutions est dit demi-plan fermé.

B. Exercices d'application

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

a) $x + y + 2 \leq 0$ b) $-x + y \geq 1$ c) $x + y > 0$
d) $2x - 3y + 4 < 0$ e) $6x > y - 3$ f) $y + 6 < 0$

5.2 Système d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on donne les inéquations :
$x + y - 3 < 0$ et $x - 2y + 5 > 0$.

1. Résous graphiquement l'inéquation $x + y - 3 < 0$ puis colorie en bleu le demi-plan correspondant à l'ensemble des solutions de cette inéquation.

2. Dans le même repère orthogonal, résous graphiquement l'inéquation $x - 2y + 5 > 0$ et colorie en rouge le demi-plan correspondant à l'ensemble des solutions de l'inéquation $x - 2y + 5 > 0$.

La partie du plan colorée à la fois en rouge et en bleu (ici un secteur angulaire) représente l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x - y - 3 < 0 \\ x - 2y + 5 < 0. \end{cases}$$

Activité 2.

Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

$x + y - 3 < 0$; $4x + 5y + 7 \geq 0$.

À Retenir

Méthode

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du type $\begin{cases} ax + by + c > 0 \\ a'x + b'y + c' < 0 \end{cases}$ je procède comme suit :

- Je trace un repère orthogonal (ou orthonormal).
- Je trace dans ce repère la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ puis je colorie le demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + by + c > 0$.
- Dans le même repère, je trace la droite (D') d'équation $a'x + b'y + c' = 0$ puis à l'aide d'une autre couleur, je colorie le demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation $a'x + b'y + c' < 0$.

L'ensemble solution du système est la partie du plan coloriée par les deux couleurs.

B. Exercices d'application

Exercice 1.

Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ 2x - 3y \geq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5 + y > 0 \\ -3x - 3y - 7 < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 2 \geq 0 \\ x - 5 \leq -y \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 5 - y < 0 \\ -2x + 0{,}5y + 1 < 0 \end{cases}$

Exercice 2.

1. Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :

a) Le couple (–10 ; 1) fait partie des solutions du système

$$\begin{cases} -3x + 6y \leq 15 \\ 2x - 5y \leq -8. \end{cases}$$

b) En est-il de même pour les couples suivants ?
(0 ; 4) ; $(-\frac{1}{2}$; 1) ; (–10 ; 1) ; (10 ; 10) ; (–4 ; 0).

2. Le système $\begin{cases} x + y < 2 \\ x + y > 0 \end{cases}$ n'a pas de solution. Vrai ou faux ?

3. Le couple (-3 ; 1) est une des solutions du système $\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$ Vrai ou faux ?

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Résous graphiquement les inéquations suivantes :

$x + y < 2$; $x - y > 2$; $-x - y \geq 0$;
$x + 2y + 5 \leq 0$; $3x - 2y + 1 \geq 0$.

Exercice 2

Résous graphiquement les inéquations suivantes :

$-x - y - 3 < 0$; $2 - y + 3x < 0$;
$x + 3 \leq 0$; $y - 1 > 0$;
$2(x + y - 3) - y + x > 0$.

Exercice 3

On donne l'inéquation suivante : $x - y < 2$.
Trouve parmi les couples suivants lequel est une solution de cette inéquation : (0 ; 0) ;
(1 ; 3) ; (–5 ; –7) ; (5 ; 7) ; (1,2 ; –1,2).

Exercice 4

On donne l'inéquation suivante :
$-x + y < -2$. Trouve parmi les couples suivants lequel ou lesquels sont des solutions de cette inéquation : (0 ; 0) ;
(1 ; 3) ; (–5 ; –7) ; (5 ; 7) ; (1,2 ; –1,2).

Exercice 5

On donne le système suivant $x - y \geq 2$ et on demande de trouver parmi les couples suivants lequel ou lesquels sont des solutions de l'inéquation : (0,0) ;
(1 ; 3) ; (–5 ; –7) ; (5 ; 7) ; (1,2 ; –1,2).

Exercice 6

Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :
Le système $\begin{cases} 3x + 6 \leq 15 \\ 2x - 5y \leq -8 \end{cases}$ admet parmi ses solutions le couple (1 ; 2).

Exercice 7

Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :
Le couple $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$ est une solution du système

$$\begin{cases} x + 3y \leq -\frac{1}{3} \\ 8x - 3y \geq 3. \end{cases}$$

Exercice 8

Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :
Le système $x + y \geq 2x > 0$ n'a pas de solution.

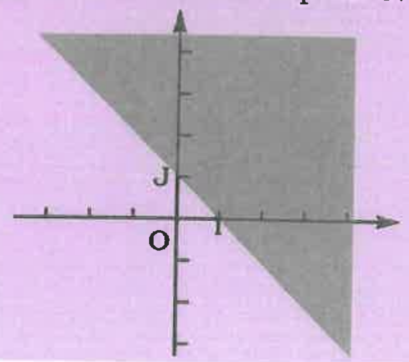
Exercice 9

Réponds par vrai ou faux en justifiant ta réponse :
Le couple (–3 ; 1) est une solution du système

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x + y > 0. \end{cases}$$

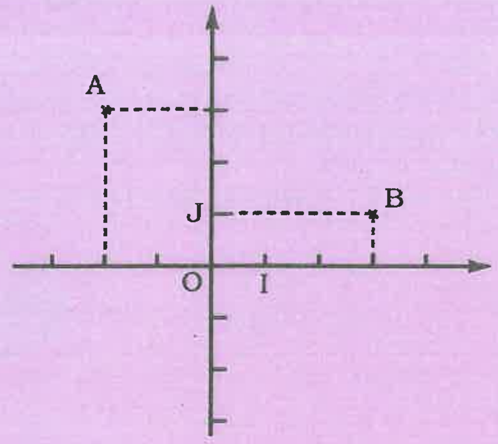
Exercice 10

Trouve l'inéquation dont la solution a été représentée graphiquement ci-dessous par le demi-plan ouvert contenant le point O.



Exercice 11

1. Sur la figure ci-dessous, détermine une équation de la droite (AB).
2. Détermine une inéquation dont l'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant le point O.
3. Détermine une inéquation dont l'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan ouvert de frontière (OB) contenant le point A.



Exercices de synthèse

Exercice 12

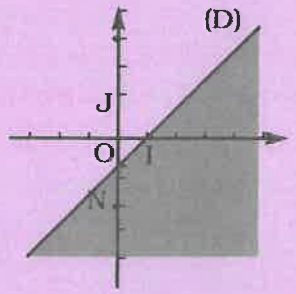
Dans chacun des cas suivants, il y a une seule bonne réponse. Indique-la.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
L'inéquation $2x - y - 1 > 0$ suivante admet un de ces couples parmi ses solutions. Lequel ?	$(0\ ;\ -5)$	$(5\ ;\ +10)$	$(-2\ ;\ -2)$
Le point $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un point de la solution graphique de l'une de ces inéquations. Laquelle ?	$x - y > 0$	$x + y < 0$	$y - x \geq 0$
Le point $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ appartient à la solution de l'un des systèmes. Lequel ?	$\begin{cases} x - y > 0 \\ -x + y + 1 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0 \\ y + 3 > 0 \end{cases}$
Le couple $(-1\ ;\ 1)$ est une solution de l'une de ces inéquations. Laquelle ?	$-x + 2y + 5 < 0$	$x - y + 5 < 0$	$x + y - 5 < 0$

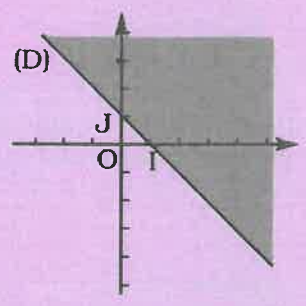
Exercice 13

L'une de ces représentations est celle de la solution de l'inéquation $x + y - 1 < 0$. Laquelle ?

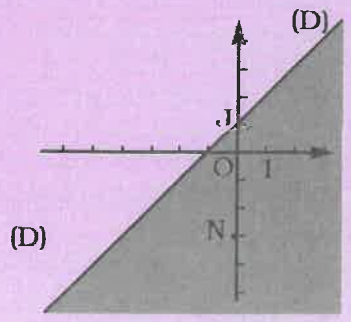
a)



b)



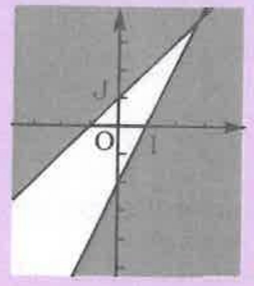
c)



Exercice 14

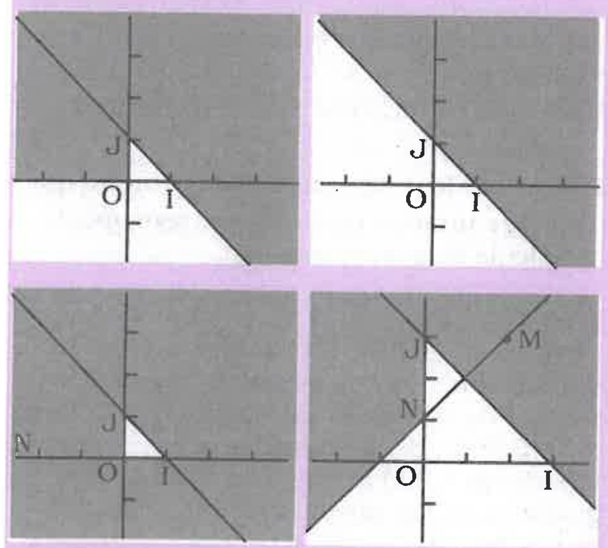
Lequel des systèmes ci-dessous a pour solution la partie non coloriée de la représentation graphique ci-dessous ?

$\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x - y - 2 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x - y - 2 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x - y - 2 > 0 \end{cases}$



Exercice 15

Le système suivant $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$ a pour solution graphique la partie non coloriée de l'une des représentations ci-dessous. Laquelle ?



Exercice 16

1. Place dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) les points A(−1 ; 2), B(0 ; 4) et C(3 ; 2).
2. Détermine une équation de la droite (AC).
3. Détermine l'inéquation dont la solution graphique est le demi-plan fermé de frontière (AC) ne contenant pas le point B.

Exercice 17

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points :
A(−2 ; 1), R(−1 ; 4) et E(5 ; 2).

1. Construis ce repère et place les points.
2. Détermine une équation des droites (RA), (RE) et (EA).
3. Détermine le système ayant pour solution cette partie du plan de frontières (RA) et (RE) ne contenant pas l'origine O du repère.

Exercice 18

Résous graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 3y \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \geq 3 \\ -x \geq y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \geq 3 \\ x \geq y \\ y \text{ v } 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y < 5 \\ x - y > 1 \end{cases}$

Exercice 19

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ x - 3 + y \geq 0 \end{cases}$

Exercice 20

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 1{,}3x + 3{,}6y \geq 0 \\ 7{,}5 - y + 0{,}5x \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ y - 3 \geq 0 \end{cases}$

Exercice 21

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x - y + 5 \leq 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \\ 3x - 2y + 6 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y > 0 \\ 3x - 2y - 4 < 0 \\ x - y < 3 \end{cases}$

Exercice 22

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x \leq x \\ x - y \geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - y + 1 > 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

Exercice 23

Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ y - 3 \geq 0 \end{cases}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 24

Résous les inéquations suivantes :

a) $x > y$;

b) $x(1 - y) + 3 > 5 - 2(x + \frac{1}{2}xy)$.

Exercice 25

Résous les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 2x - y < 0 \\ x + y - 7 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y + 3 < 0 \\ x > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$

Exercice 26

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J), on donne les points A(1 ; 1), B(−1 ; 1), C(−1 ; −1) et D(1 ; −1). Trouve un système d'inéquation dont la solution est formée de l'ensemble des points M(x ; y) intérieurs au carré ABCD.

Exercice 27

Résous les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ 3 \leq y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x \leq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 2y \leq 5 \\ 5x - y < 0 \\ 2 - 2x + y < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y + 0{,}5 < -1{,}5 + x - 3 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ y > 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 16 \\ 5y + 2x \geq 30 \end{cases}$

Exercice 28

Daouda le cordonnier fabrique deux types de sacs en cuir et en toile.

Le type A demande 0,8 m² de toile et 0,7 m² de cuir.

Le type B demande 0,9 m² de toile et 0,98 m² de cuir.

Par semaine, Daouda dispose de 18 m² de toile et 17 m² de cuir.

Par sac, il gagne 700 F pour le modèle A et 900 F pour le modèle B. Détermine l'ensemble des points M(x ; y) des points du plan pour lesquels la fabrication est possible.

1. Calcule en fonction de x et y le gain g réalisé par semaine.
2. Quel est le programme de fabrication qui assure un gain maximal par semaine ? Calcule ce gain si possible.

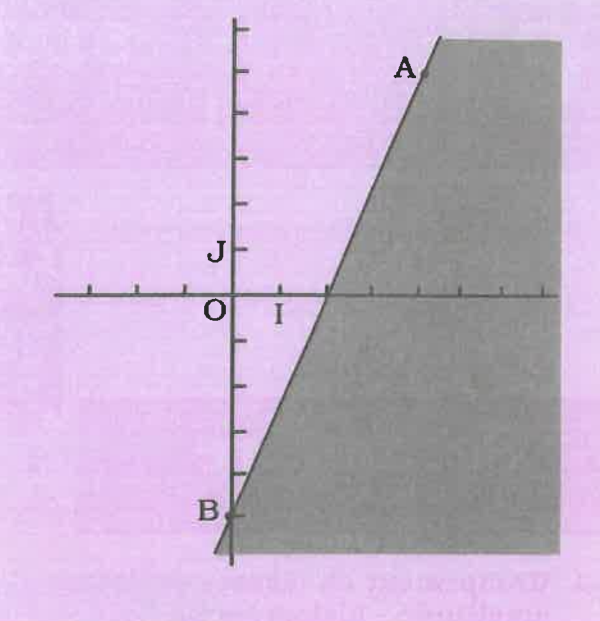
Exercice 29

x et y sont les dimensions d'un champ rectangulaire dont la longueur augmentée des 3/4 de la largeur est inférieure à 300 m et les 5/2 du demi-périmètre sont supérieurs à 200 m.

Quelles sont les valeurs entières possibles de x et de y ?

Exercice 30

La figure ci-contre est la représentation graphique d'une inéquation que tu détermineras (la partie non colorée est la solution).



Solution de la situation problème

Inéquation $x > 0$ et $y > 0$,

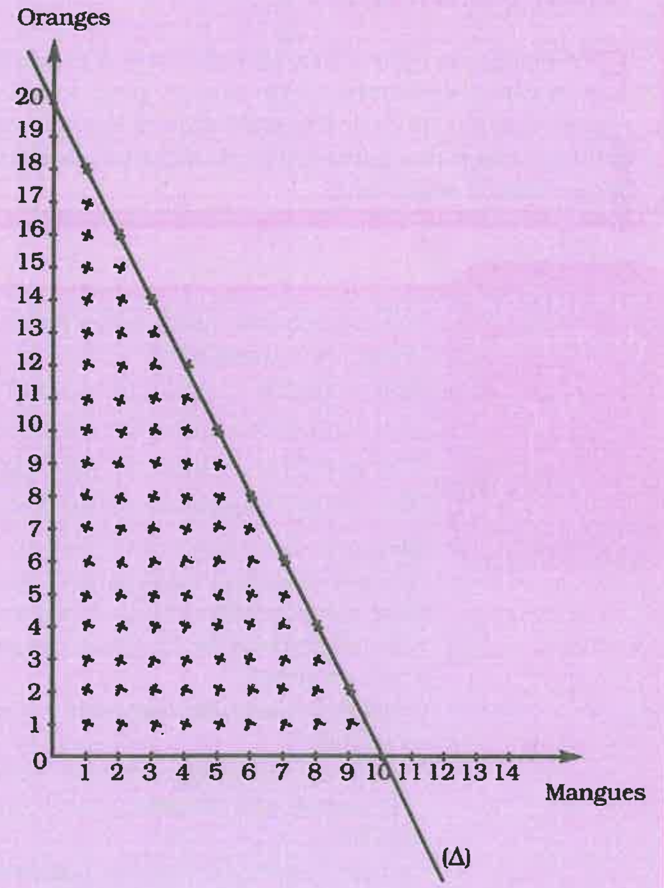
- soit x le nombre de kg de mangues ;
- soit y le nombre de kg d'oranges.

Le prix des quantités de mangues et d'oranges doit être inférieur à 3 000 F soit $300x + 150y \leq 3\,000$.

On simplifie et on obtient $2x + y \leq 20$ soit $2x + y - 20 \leq 0$.

Je trace la droite (Δ) d'équation $2x + y - 20 = 0$.

x	5	8	10
y	10	4	0



Toutes les quantités de mangues et d'oranges que Gorgui peut acheter sans dépasser 3 000 F sont matérialisées par les couples (x ; y), coordonnées des points marqués par des croix. Il y a 90 possibilités si on ne prend que des valeurs entières.

CHAPITRE

6 STATISTIQUES

Sommaire

Introduction

En classe de quatrième, tu as appris à organiser des données statistiques dans le cas de caractères discrets. Cette année, pour la classe de troisième, l'organisation et la représentation de données statistiques dans le cas de caractères continus ainsi que la détermination des paramètres de position doivent te permettre d'interpréter des résultats issus d'étude statistique.

Situation problème

Voici le prix du mètre carré pour chaque type de logement vendu par un promoteur immobilier :

- De 12 000 F à moins de 14 000 F pour les 97 logements de type T_1 ;
- De 14 000 F à moins de 16 000 F pour les 105 logements de type T_2 ;
- De 16 000 F à moins de 18 000 F pour les 71 logements de type T_3 ;
- De 18 000 F à moins de 20 000 F pour les 77 logements de type T_4.

Organise ces données dans un tableau avec les classes, les effectifs, les effectifs cumulés croissants et les centres des classes.
Quel est le nombre total de logements vendus par ce promoteur immobilier ?
Si le mètre carré pour chaque type de logement était vendu au même prix, quel serait ce prix ?
Combien y a-t-il de logements vendus à moins de 16 000 F ? à au moins 16 000 F ?
Construis le polygone des effectifs cumulés croissants puis détermine graphiquement la médiane en utilisant le théorème de Thalès. Interprète le résultat.
Calcule le pourcentage de logements de chaque type vendus par rapport au nombre total de logements vendus.

6.1 Groupement en classes de même amplitude - histogramme

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :

- *grouper des données brutes en classes de même amplitude ;*
- *présenter sous forme de tableau les classes obtenues avec leurs effectifs ou leurs fréquences ;*
- *construire un histogramme des effectifs ou des fréquences.*

A. Activités préparatoires

Activité 1.

On considère l'intervalle [2 ; 7[. Détermine les nombres entiers appartenant à cet intervalle.

1. Quelle est la borne inférieure ? Appartient-elle à l'intervalle [2 ; 7[?
2. Quelle est la borne supérieure ? Appartient-elle à l'intervalle [2 ; 7[?
3. Calcule l'amplitude de cet intervalle.
4. Écris, sous forme d'intervalle, l'ensemble des réels x tels que $5 \leq x < 11$.
5. Écris sept intervalles consécutifs d'amplitude 4 de cette forme (fermé à gauche et ouvert à droite).

Activité 2.

Voici les tailles en cm des cinquante bébés devant recevoir leur première dose de vaccin BCG dans un centre de PMI (Protection Maternelle et Infantile).

45	54	50	48	47	49	49	51	49	51
54	49	49	52	48	46	46	50	50	49
55	54	53	50	45	49	46	50	49	49
54	50	47	55	48	48	48	51	55	51
55	50	49	52	49	52	50	49	50	55

Ordonne cette série.

1. Forme trois intervalles consécutifs de même amplitude 5 cm et de même forme que le premier [45 ; 50[. Chacun de ces intervalles est appelé classe.
2. Détermine le nombre de bébés dont la taille appartient à chacune de ces classes. Dans la classe [45 ; 50[sont groupées les tailles allant de 45 à moins de 50 cm. Dans les autres classes de même amplitude (5 cm) sont groupées les tailles correspondantes : on dit que tu as fait un groupement en classes de même amplitude.
3. Organise ces données dans un tableau pour faire apparaître les classes et leurs effectifs.

À Retenir

On peut grouper les données d'une série statistique en intervalles appelés classes de même amplitude.
Le groupement en classes a pour intérêt de réduire la taille de la série et donc de faciliter l'exploitation des données.

Exemple

Pour faire le groupement en classes d'amplitude 5 des données du tableau de l'activité 2, je procède comme suit :

– J'ajoute l'amplitude 5 à la plus petite taille de la série qui est 45 pour obtenir la borne supérieure. Donc, ma première classe est [45 ; 50[.
D'une manière analogue, j'obtiens les classes [50 ; 55[et [55 ; 60[.

– J'ordonne la série si nécessaire puis je compte le nombre de tailles pour chaque classe, ce qui me donne :

	[45 ; 50[					[50 ; 55[					[55 ; 60[	
Tailles en cm	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	Total
Effectifs	2	3	2	5	12	9	4	3	1	4	5	50
	24					21					5	

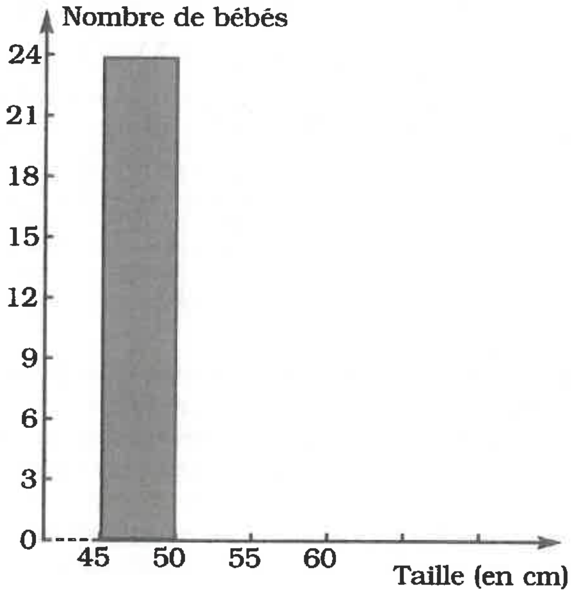
Activité 3.

Reprenons l'exemple précédent :

Taille en cm (classes)	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	Total
Effectifs	24	21	5	50

Reproduis ce repère d'axes perpendiculaires où :
- sur l'axe des abscisses, 1 cm représente une amplitude de 5 ;
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente un effectif de 3.

1. Pour la classe [45 ; 50[, le rectangle construit a pour largeur le segment correspondant à l'amplitude de cette classe et sa hauteur est proportionnelle à l'effectif 24 de cette même classe.
2. Procède de la même façon pour construire les autres rectangles.
Le diagramme obtenu est appelé histogramme des effectifs.



6.3 Classe modale, centre de classe, moyenne

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer :

– une classe modale ;

– un centre de classe ;

– une moyenne dans le cas d'une variable continue.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Le tableau suivant donne les tailles en mètres des élèves d'une classe de 5e d'un collège.

Tailles en m	[1,30 ; 1,40[	[1,40 ; 1,50[	[1,50 ; 1,60[	[1,60 ; 1,70[
Effectifs	10	12	28	5

Quelle est la classe qui a le plus grand effectif ? Elle est appelée la **classe modale**.

Activité 2.

Le tableau ci-dessous donne la gamme des prix du kilogramme d'oignons, prix pratiqués au marché Ndiobène-Taî de Thiaroye :

Prix en F	[400 ; 450[	[450 ; 500[	[500 ; 550[
Effectifs	12	35	18

1. En supposant que toutes les valeurs de caractère d'une classe sont égales à la demi-somme des bornes de cette classe (cette demi-somme des bornes de la classe est appelée **centre de la classe**) détermine les centres de classe de cette série.
2. Calcule la **moyenne** de cette série en prenant comme modalités les centres de classe et en procédant comme dans le cas d'une série discrète.

À Retenir

La classe modale d'une série statistique organisée est la classe qui a le plus grand effectif. Une série peut être unimodale ou comporter plusieurs modes.
Pour calculer une moyenne dans le cas d'une série groupée en classes :
– Je calcule d'abord les centres de classe de la manière suivante :

$$\text{centre d'une classe} = \frac{\text{borne inférieure de cette classe + borne supérieure de la même classe}}{2}$$

– Je calcule ensuite la moyenne $\overline{x}$ en utilisant la formule :

$$\text{la moyenne } \overline{x} = \frac{\text{somme des produits (centres de classes} \times \text{les effectifs correspondants)}}{\text{effectif total}}$$

$\overline{x}$ se lit « x barre ».

Méthode pour calculer la moyenne $\overline{x}$ d'une série statistique groupée en classes

Prix	[400 ; 450[	[450 ; 500[	[500 ; 550[	Total	Méthode
Effectifs	12	35	18	65	
Centres de classes	$\frac{400 + 450}{2} = 425$	475	525		Je calcule le centre de chaque classe.
Produits des centres de classes × les effectifs correspondants	425 × 12 = 5 100	475 × 35 = 16 625	525 × 18 = 9 450	31 175	Je fais le produit de chaque centre de classe par l'effectif de la classe. Je fais la somme de ces produits.

– Je calcule le quotient de cette somme par l'effectif total pour trouver la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{31\,175}{65} = 479{,}62 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}$$

• ***Utilisation de la fonction statistique de la calculatrice (exemple PORPO YH-105)***
Après avoir calculé les centres de classe, j'active la fonction Stat de la calculatrice (Stat s'affiche à l'écran) et successivement j'appuie sur :

$\boxed{425}\ \boxed{\times}\ \boxed{12}\ \boxed{\text{DATA}}\ \boxed{475}\ \boxed{\times}\ \boxed{35}\ \boxed{\text{DATA}}\ \boxed{525}\ \boxed{\times}\ \boxed{18}\ \boxed{\text{DATA}}\ \boxed{\overline{x}}$

et l'écran affiche **479,6153846** qui est la moyenne $\overline{x}$.

NB : Respecter l'ordre : centre de classe × effectif.

B. Exercices d'application

Exercice 1.
Considère le tableau suivant :

Classes	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 170[
Effectifs	53	12	27	71	16

Détermine la classe modale.

Exercice 2.
Complète le tableau suivant puis calcule la moyenne :

Intervalles	[0 ; 1000[	[1000 ; 2000[	[2000 ; 3000[	[3000 ; 4000[	[4000 ; 5000[	Total
Effectifs	12	43	39	10	4	...
Centres de classes	...	...	...	...	...	
Centres de classe multipliés par effectifs	...	...	...	...	...	...

6.4 Médiane

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer la médiane d'une série statistique.

A. Activités préparatoires

Activité 1.

Madame Ndiaye a relevé les notes de sept élèves de sa classe de cinquième et a obtenu la série suivante : 09 – 13 – 15 – 18 – 11 – 08 – 12.

1. Range ces notes dans l'ordre croissant.
Quelle est la note x telle qu'il y ait le même nombre de notes avant et après x ?
2. Réponds aux mêmes questions si Madame Ndiaye considère la série suivante appartenant à six autres de ses élèves : 14 – 04 – 16 – 07 – 13 – 19.

Activité 2.

Lors d'un séminaire de formation des professeurs de mathématiques, Gorgui a noté l'âge de 150 participants. Il a consigné ses notes dans le tableau suivant :

Âge (ans)	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[
Effectifs	12	30	36	45	27
Effectifs cumulés croissants					

1. Complète ce tableau puis construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
2. Construis le point P de l'axe des ordonnées correspondant à la moitié de l'effectif total 75. La perpendiculaire à cet axe passant par P coupe le polygone en C et la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par C coupe l'axe des abscisses en M.
3. Détermine l'intervalle auquel appartient l'âge correspondant au point M. On l'appelle **l'intervalle médian** ou **la classe médiane**.
4. Détermine l'âge associé au point M en utilisant des triangles de la figure en position de Thalès. C'est **l'âge médian** ou **médiane** de la série.

À Retenir

Définition

On appelle **médiane** d'une série ordonnée (ordre croissant ou décroissant) la valeur de la variable qui partage cette série en deux séries de même effectif.
Les trois valeurs qui partagent la même série en quatre séries de même effectif sont appelés les **quartiles.** La **médiane est le deuxième quartile.**

Exemples d'exercices résolus

Exercice 1 : cas d'un caractère discret

– Je détermine la note médiane dans chacun des cas de l'activité 1 précédente.
Les sept notes données sont : 09 ; 13 ; 15 ; 18 ; 11 ; 08 ; 12.

– En ordonnant ces notes, j'obtiens $\underbrace{08 ; 09 ; 11}_{\text{3 notes}} ; \underbrace{12}_{\text{Médiane}} ; \underbrace{13 ; 15 ; 18}_{\text{3 notes}}$.

Le nombre de notes ici impliquées (7) étant un nombre impair, la médiane est la 4ᵉ note, soit la 4ᵉ valeur de caractère.

• Dans le cas de six notes ainsi ordonnées 04 – 07 – 13 – 14 – 16 – 19, le nombre de notes (6) étant pair, il existe deux valeurs de caractère 13 et 14 tels qu'il y a deux notes avant 13 et deux notes après 14. Tout nombre strictement compris entre 13 et 14 est une médiane de cette série :

$$m = \frac{13 + 14}{2} = 13{,}5.$$

Exercice 2 : cas d'un caractère continu

– Pour le cas d'une série continue, je peux déterminer la classe médiane par simple lecture graphique sur le polygone des effectifs cumulés croissants ou par le calcul à partir du même polygone.
– Je trace le polygone des effectifs cumulés croissants correspondants à l'activité 2, dont le tableau est le suivant :

Âges (nombre d'années)	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[
Effectifs cumulés croissants	12	42	78	123	150

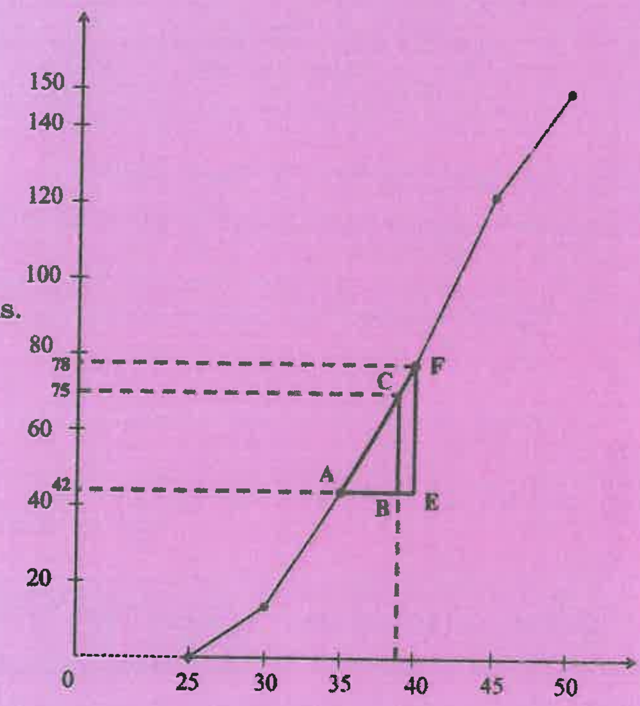
• Par simple lecture graphique, la classe médiane est [35 ; 40[.
• Les triangles ABC et AEF étant en configuration de Thalès,

je peux écrire : $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$.

$\frac{AB}{40-35} = \frac{75-42}{78-42}$; $\frac{AB}{5} = \frac{33}{36}$

d'où $AB = \frac{33 \times 5}{36} = \frac{55}{12}$ = 4 ans + 7 mois.

Médiane = 35 ans + 4 ans + 7 mois.
Âge médian : 39 ans et 7 mois. Gorgui en conclut que la moitié des participants à ce séminaire à moins de 39 ans et 7 mois tandis que l'autre moitié a plus de 39 ans et 7 mois.



B. Exercices d'application

Exercice 1.

Détermine la médiane pour chacune des séries de notes suivantes :

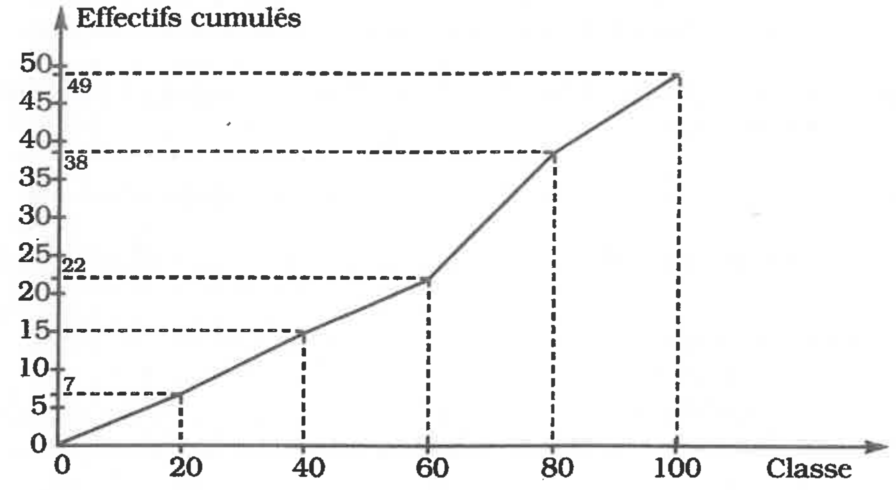
Série 1 : 05 – 06 – 09 – 13 – 14 – 16 – 17 – 18 – 19.

Série 2 : 01 – 02 – 07 – 08 – 11 – 12 – 14 – 15 – 17 – 18.

Série 3 : 02 – 17 – 01 – 00 – 06 – 16 – 18 – 20 – 08 – 13 – 07 – 14 – 15.

Exercice 2.

Considère le polygone des effectifs cumulés croissants suivant :



1. Détermine graphiquement la classe médiane.

2. Détermine graphiquement et par le calcul la médiane (utiliser le théorème de Thalès.)

6.5 Interprétation de résultats

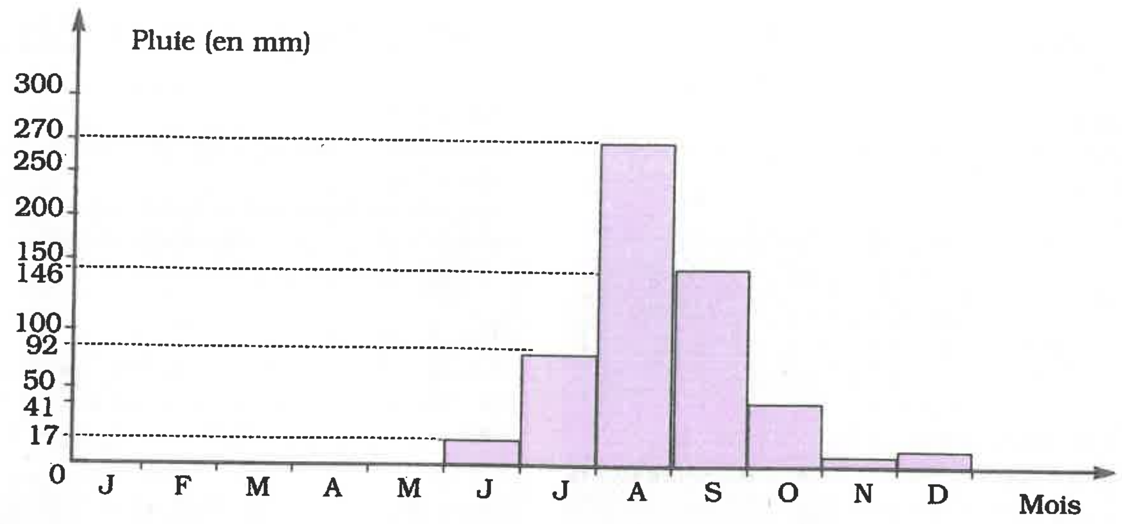
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'interpréter les résultats obtenus (graphique, tableau, etc.).

A. Activité préparatoire

Activité 1.

À la station météorologique de Dakar-Yoff, on a établi des moyennes pluviométriques mensuelles à partir de relevés effectués sur une durée de 30 ans.
Ces données pluviométriques ont permis de construire l'histogramme des pluies ci-dessous :



Interprète ce graphique.

À Retenir

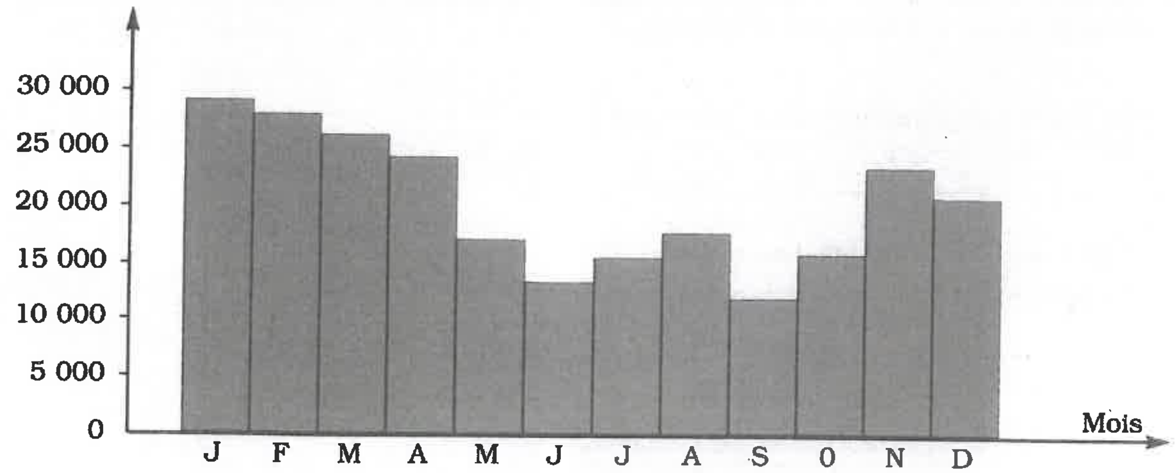
Pour interpréter un graphique ou un tableau, il faut bien l'observer et noter les éléments caractéristiques tels que la (les) classe(s) modale(s), les classes d'effectifs minimums, l'effectif total, etc.

Exemple

Pour l'histogramme précédent qui permet de visualiser le régime des pluies dans la région de Dakar, on peut noter :
– une faiblesse de la pluviométrie dans la région de Dakar avec un total de 576 mm ;
– une mauvaise répartition des pluies dans le temps.

B. Exercices d'application

Arrivées mensuelles des touristes au Sénégal en 1992.



Interprète ce graphique.

Exercice 1

Voici les tailles en cm des soixante élèves d'une classe de 3e.

160	147	156	159	146	143	157	160	170	174	173	172
178	170	175	175	177	182	170	175	165	165	167	177
178	176	175	178	153	170	158	176	171	172	179	167
159	172	175	160	159	149	171	167	178	165	158	177
172	161	163	170	171	172	168	165	159	175	177	163

1. Ordonne cette série puis groupe-la en classes d'amplitude 5 dans un tableau où apparaîtront les effectifs.
2. Groupe la série en classes d'amplitude 10 en notant pour chaque classe son effectif.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous représente les notes obtenues par les élèves d'une classe de 5e lors d'un contrôle :

Note sur 20	2	4	5	6	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19
Effectifs	1	1	3	2	3	2	1	2	4	2	1	3	2	1

Complète le tableau ci-dessous en utilisant la même amplitude que celle donnée en exemple.

Note	$0 \leq n < 5$			
Effectif	2			

Exercice 3

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une population par tranches d'âge :

Tranches d'âges (ans)	[0:15[	[15:30[	[30:45[	[45:60[	[60:75[	[75:90[
Effectifs	42	36	14	50	18	16

1. Construis l'histogramme des effectifs.
2. Détermine la classe modale.

Exercice 4

Considère le tableau de l'activité 3 précédente.

1. Calcule les centres de classes.
2. Calcule la moyenne d'âge de cette population.

Exercice 5

Au marché Sandaga de Dakar, un vendeur de réveils électroniques du même type les a classés selon leur durée de vie en années.

Durée de vie	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[
Nombre d'appareils	15	45	36	30	24

1. Ajoute au tableau la ligne des fréquences.
2. Détermine la classe modale puis calcule la durée de vie moyenne de ces réveils.
3. Construis l'histogramme des fréquences.

Exercice 6

Recopie et complète les tableaux ci-dessous :

Classes	[5 ;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[
Effectifs	48	37	11	23
Effectifs cumulés croissants				

Classes	[40;50[	[50;60[	[60;70[	[70;80[
Effectifs	12	5	48	13
Effectifs cumulés croissants				
Effectifs cumulés décroissants				

Classes	[0 ;15[	[15 ;30[	[30 ;45[
Fréquences	0.35	0.46	0.19
Fréquences cumulées croissantes			

Classes	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[
Fréquences	0.1	0.37	0.05	0.33	0.15
Fréquences cumulées croissantes					
Fréquences cumulées décroissantes					

Exercice 7

Soit la série statistique suivante :

Classes	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ; 80[
Effectifs	1	2	n	4	5	5

Sachant que la moyenne de cette série est 57,5, détermine l'effectif n de la classe [40 ; 50[.

Exercice 8

Lors d'une visite médicale dans un établissement scolaire de 400 élèves, on a relevé la masse de chaque élève. Les résultats suivants ont été enregistrés :

Classes (masse en kg)	[40 ;45[	[45 ;50[	[50 ;55[	[55 ;60[	[60 ;65[
Effectifs	15	25	70	70	85

Classes	[65 ;70[	[70 ;75[	[75 ;80[	[80 ;85[	[85 ;90[	[90 ;95[
Effectifs	75	20	22	10	6	2

1. Détermine le mode de cette série puis calcule la masse moyenne de ce groupe d'élèves.
2. Construis l'histogramme des effectifs.
3. Ajoute à ce tableau la ligne des effectifs cumulés croissants. Combien y a-t-il d'élèves dont la masse est strictement inférieure à 60kg ? à 95kg ?
4. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.

Exercice 9

Pour chacune des séries S_1, S_2, S_3 et S_4 suivantes, détermine la valeur médiane :

S_1 : 2 – 4 – 3 – 5 – 7 – 12 – 11 – 6 – 1.

S_2 : 3 – 4 – 4 – 5 – 7 – 10 – 9 – 4 – 13.

S_3 : 9 – 17 – 21 – 22 – 43 – 45 – 106 – 103 – 111 – 143.

S_4 : 1 – 3 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 13 – 14 – 15 – 17 – 19 – 20 – 21.

Exercice 10

Mot secret :

Chaque lettre de ce mot est codée par un signe : W0b03W03 < c.

Pour le découvrir, ajoute à ce tableau la ligne des effectifs que tu utiliseras :

Lettres	A	E	I	Q	S	T	U
Fréquences	0,09	0,09	0,18	0,09	0,18	0,28	0,09

Exercice 11

1. Complète ce tableau donnant la répartition des salaires des ouvriers d'une entreprise.

Salaire en F	[35 000 ; 40 000[	[40 000 45 000[	[45 000 ; 50 000[	[50 000 : 55 000[
Effectifs	50	120	60	30
Effectifs cumulés croissants				
Centres de classes				
Centres de classe × effectifs				

Salaire en F	[55 000; 60 000[	[60 000; 65 000[	[65 000: 70 000[	[70 000 ; 75 000[
Effectifs	10	16	14	16
Effectifs cumulés croissants				
Centres de classes				
Centres de classe × effectifs				

2. Calcule le salaire moyen des employés de cette entreprise.
3. Construis le diagramme cumulatif croissant puis détermine graphiquement la classe médiane.
4. En utilisant le graphique et le théorème de Thalès, calcule la médiane et le troisième quartile.

Exercice 12

À l'approche de la fête de Tabaski, Samba classe ses moutons selon leur prix. Il obtient le tableau ci-dessous :

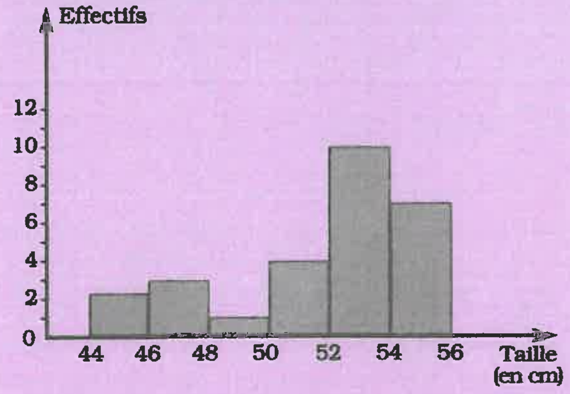
Prix en F	[40 000 ; 50 000[	[50 000 ; 60 000[	[60 000 ; 70 000[
Nombre de moutons	29	53	71

Prix en F	[70 000 ; 80 000[	[80 000 ; 90 000[	[90 000 ; 100 000[
Nombre de moutons	38	60	10

1. Détermine la classe modale.
2. Construis le diagramme circulaire puis l'histogramme des effectifs.
3. Construis dans un même repère orthogonal les deux polygones cumulatifs.
4. En utilisant le graphique et le théorème de Thalès, calcule la médiane.
Que constates-tu ?

Exercice 13

Dans une maternité, on a mesuré la taille des nouveaux-nés. L'histogramme ci-dessous donne la répartition de ces nouveaux-nés selon leur taille.



1. Organise les données dans un tableau où figureront les effectifs, les fréquences, les fréquences cumulées croissantes et les fréquences cumulées décroissantes.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes.

Exercice 14

Voici le nombre d'heures de travail effectuées chaque semaine (y compris les heures de cours) par 55 élèves d'un collège.

Heures de travail	[35 ;40[	[40 ;45[	[45 ;50[	[50 ;55[	[55 ;60[
Effectifs	12	20	13	5	5

1. Combien d'élèves travaillent moins de 45 heures par semaine ? Combien d'élèves travaillent 50 heures par semaine ou plus ?
2. Détermine la classe modale puis construis le polygone des effectifs cumulés décroissants. Déduis-en la classe médiane.

Exercice 15

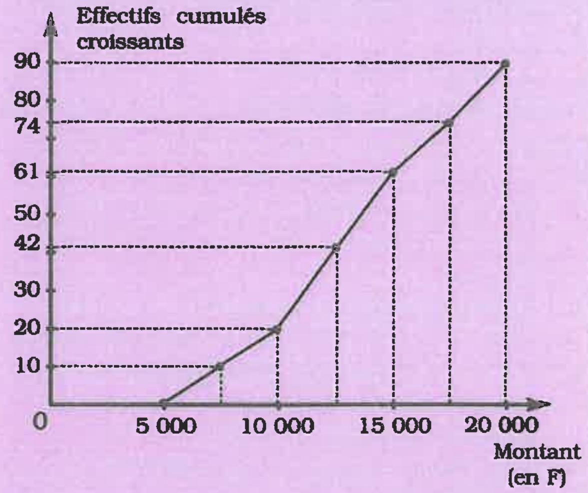
Le tableau ci-dessous représente la répartition des notes obtenues par des élèves lors d'un contrôle :

Note n/vingt	$0 \leq n < 5$	$5 \leq n < 10$	$10 \leq n < 15$	$15 \leq n < 20$
Effectifs	4	8	18	10

1. Construis l'histogramme des fréquences.
2. Calcule le pourcentage des élèves de la classe qui ont une note $n \geq 10$.

Exercice 16

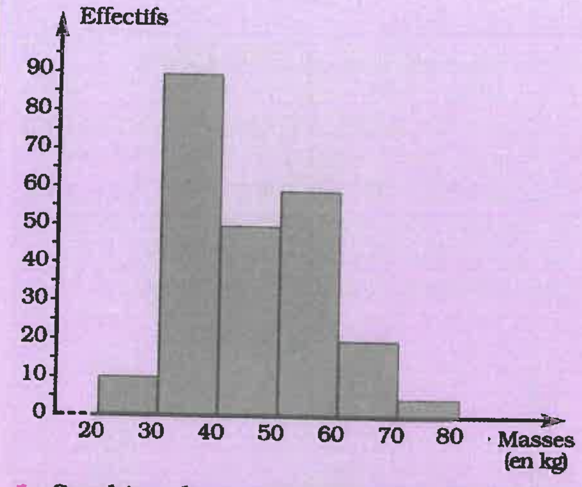
En fin de journée, la répartition des 90 chèques reçus par une caissière est représentée par le polygone des effectifs cumulés croissants ci-dessous :



1. Organise les données dans un tableau avec les effectifs, les effectifs cumulés croissants, les centres de classes.
2. Calcule le montant moyen d'un chèque.
3. À l'aide du graphique et du théorème de Thalès, calcule le 1er quartile.

Exercice 17

Au marché « bétail » hebdomadaire de Pass Darha, Malal Poulho classe ses moutons selon leurs masses.
L'histogramme suivant donne la répartition de ces moutons selon leur masse.



1. Combien de moutons possède Malal ?
2. À quelle classe correspond la bande la plus élevée de l'histogramme ?
Que représente cette classe ?
3. Quelle est la classe moyenne ?
4. Calcule le pourcentage de moutons dont la masse est comprise entre 40 kg et 50 kg ?

Exercice 18

Une enquête faite auprès de 50 élèves d'une classe de CE1 et portant sur la durée d du trajet nécessaire à chacun pour se rendre à l'établissement a permis d'établir le tableau suivant :

Durée d du trajet en minutes	Nombre d'élèves
$0 \leq d < 15$	8
$15 \leq d < 30$	17
$30 \leq d < 45$	16
$45 \leq d < 60$	9

1. Combien y a-t-il d'élèves dont le trajet dure moins de 30 minutes ?
2. Combien y a-t-il d'élèves dont le trajet dure au moins 30 minutes ?
3. Construis dans un même repère les deux polygones des fréquences cumulées puis déduis-en la classe médiane.

Exercice 19

Voici la répartition du nombre de colons dans un camp de vacances selon leur âge :

Classes (années)	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[
Effectifs	15	25	28	24

1. Ajoute à ce tableau la ligne des fréquences cumulées décroissantes.
2. Calcule le pourcentage de colons dont l'âge ≥ 10 ans.
3. Construis l'histogramme des fréquences cumulées décroissantes.

Exercice 20

Recopie et complète les tableaux ci-dessous :

Classes	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ;10[
Eff. cumulés croissants	2	7	14	27	40
Effectifs					

Classes	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;50[	[50;60[
Eff. cum. décroissants	53	27	12	10	6
Effectifs					

Classes	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[	[20;25[
Fréquences cum. décrois.	1	0,72	0,37	0,12	0,09
Fréquences					

Classes	[1;5[	[5;9[	[9;13[	[13;17[	[17;21[
Fréquences cum. crois.	0,05	0,13	0,32	0,82	1
Fréquences					

Exercices d'approfondissement

Exercice 21

Voici le mode d'emploi d'un sirop antitoussif pour enfants :
- Enfants de 3 ans à moins de 7 ans : 2 cuillérées-mesure par jour,
- Enfants de 7 ans à moins de 11 ans : 4 cuillérées-mesure par jour,
- Enfants de 11 ans à moins de 15 ans : 6 cuillérées-mesure par jour,
- Enfants de 15 ans à moins de 19 ans : 8 cuillérées-mesure par jour.

1. Sachant qu'une cuillérée–mesure a une capacité de 5 ml, organise ces données dans un tableau avec les classes (âges), les effectifs (nombre de ml par jour) et les effectifs cumulés croissants.
2. Construis l'histogramme des effectifs.
3. Sachant que le traitement doit durer 5 jours, combien de ml de ce sirop doit-on donner à un enfant de 7 ans ? 10 ans ?

Exercice 22

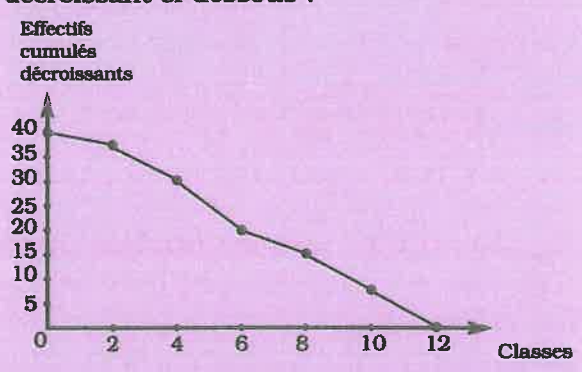
Voici le tableau de répartition des professeurs du CEM de Grand-Yoff selon le nombre d'heures de cours qu'ils effectuent par semaine :

Horaire hebdomadaire	[6;10[	[10;14[	[14;18[	[18;22[
Nombre de professeurs	2	5	7	13

1. Quel est le pourcentage de professeurs ayant moins de 18 heures de cours par semaine ?
2. Construis le diagramme circulaire des fréquences.
3. Détermine la classe modale.
4. Si l'horaire hebdomadaire normal d'un professeur est de 18 heures, peut-on dire que les professeurs de ce collège sont sous-employés ? Justifie ta réponse.

Exercice 23

Considère le polygone cumulatif décroissant ci-dessous :



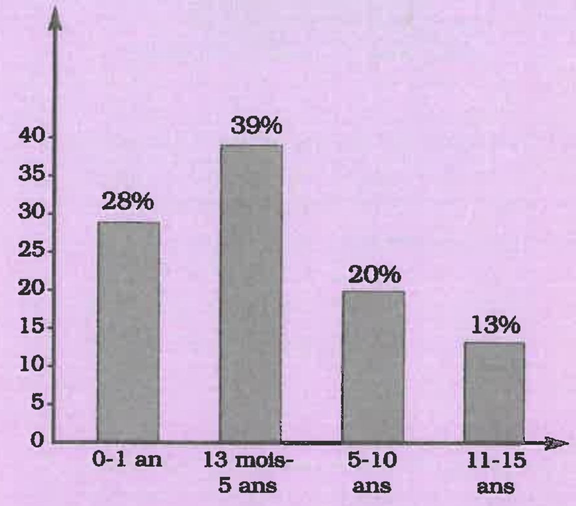
1. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Classes	[0;2[						Total
Effectifs cumulés décroissants	40						
Effectifs							
Centres de classes							
Centres de classes x effectifs							

2. Calcule la moyenne de cette série.
3. À l'aide de ce graphique et du théorème de Thalès, calcule la médiane.

Exercice 24

Une étude réalisée au CHU (Centre Hospitalier Universitaire) de Fann à Dakar analyse 150 dossiers d'enfants hospitalisés (pour tableau clinique) de pleuropneumonie (inflammation simultanée des poumons et de la plèvre). Elle a permis de tracer ce graphique au cours de deux années consécutives.



1. Quelle est la tranche d'âge la plus vulnérable à cette maladie ?
2. Quel est le pourcentage des enfants âgés de moins de 5 ans atteints par cette maladie ?
3. Interprète ce graphique.

Exercice 25

Selon la DPS (Direction de la prévision statistique), le tourisme est la principale source de recettes d'exportations en milliards de F.

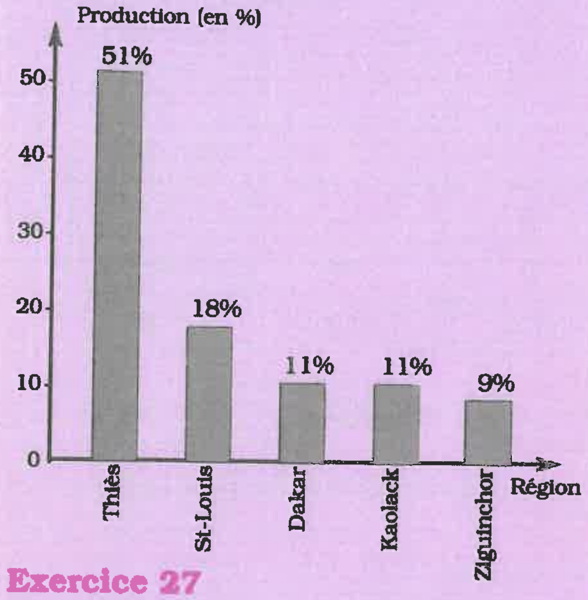
Produits \ Années	1988	1989	1990	1991	1992
Tourisme	42,4	43,7	39,8	37,9	39,2
Arachide	34,4	48,0	43,3	30,9	21,4
Phosphates	22,6	22,2	19,2	18,9	19,6
Pêche	45,8	57,1	55,1	61,3	64,8

Quels sont les deux produits d'exportation qui rapportent le plus de recettes ? Interprète ce tableau.

Exercice 26

Soit le tableau suivant présentant les productions de la pêche artisanale en 1972 au Sénégal selon les régions :

1. Détermine la production totale sachant que Ziguinchor seule a produit 10 000 tonnes de poisson.
2. Quelle est la région qui fournit le plus de poissons ? Pourquoi ?



Exercice 27

Voici les tailles d (en cm) des 25 élèves d'une classe de 3^e :

165 – 145 – 150 – 150 – 166 – 165 – 160 – 158 – 162 – 165 – 158 – 165 – 162 – 154 – 158 –160 –162 – 154 – 165 – 160 – 160 – 158 – 154 – 158 – 160.

1. Reproduis et complète le tableau suivant :

Tailles en cm	145	150	154	158	160	162	165	166
Effectifs	1	2	3					

2. Quelle est la taille moyenne d'un élève de cette classe ?
3. Reproduis et complète le tableau suivant :

Classes	[145 ; 153[	[153 ; 161[	[161 ; 169[
Centres de classes	149		
Effectifs	3		

4. Représente l'histogramme des effectifs.
5. Calcule la taille moyenne.

Exercice 28

Dans le registre des consultations du dispensaire d'un village, on a relevé les cas de paludisme. Le tableau suivant résume la répartition de ces cas suivant le mois :

Nombre de cas de paludisme	Mois
21	Janvier
12	Février
5	Mars
4	Avril
2	Mai
6	Juin
13	Juillet
68	Août
92	Septembre
53	Octobre
40	Novembre
30	Décembre

1. Ajoute au tableau la ligne des effectifs cumulés croissants.
2. Trace le diagramme en bâtons de cette série (1 cm représente 10 malades).
3. Le paludisme est la maladie qui tue le plus au Sénégal. Sachant que 10,5 % des malades du paludisme sont décédés et qu'ils représentaient 75 % de l'ensemble des cas de décès annuels de ce dispensaire, calcule :
   - Le nombre annuel de décès de malades du paludisme.
   - Le nombre total annuel de malades décédés dans ce dispensaire.

Exercice 29

Le tableau ci-dessous indique le classement de 100 véhicules sur lesquels on a relevé la distance parcourue au bout d'un an :

Distances parcourues en milliers de km	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[
Effectifs	10	18	n	20	12

1. Détermine n puis calcule la distance moyenne parcourue par un véhicule pendant un an.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants et construis la courbe représentative.
3. Détermine graphiquement la valeur médiane des distances parcourues par le calcul en utilisant le théorème de Thalès.
4. Organise ces données dans un tableau avec les classes, les effectifs, les effectifs cumulés croissants et les centres de classes.

Solution de la situation problème

Type de logements	T_1	T_2	T_3	T_4
Intervalles des prix du m² en F	[12 000 ; 14 000[	[14 000 ; 16 000[	[16 000 ; 18 000[	[18000 ; 20000[
Nombre de logements (effectifs)	97	105	71	77
Effectifs cumulés croissants	97	202	273	350
Centres de classes	13 000	15 000	17 000	19 000

1. Le nombre total de logements correspond à l'effectif total. Calcule-le.
2. Il s'agit de la moyenne. Calcule-la.
3. Le nombre de logements vendus à moins de 16 000 F est l'effectif cumulé croissant de la classe [14 000 ; 16 000[. Détermine-le.
   Au moins 16 000 F signifie supérieur ou égal à 16 000 F.
   C'est l'effectif cumulé décroissant de la classe [16000 ; 18000[.
4. Construis le polygone cumulatif en choisissant correctement une échelle puis calcule la médiane.
5. Exemple de calcul du pourcentage de logements de type T_1 :
   sur un total de 350 logements, 97 sont de type T_1. Donc, 350 correspond à 100 % et 97 correspond à x %.
   $$x = \frac{97 \times 100}{350} = 27{,}71\ \%$$
   Fais de même pour T_2, T_3 et T_4.

TABLE DES MATIÈRES

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES