Mathématiques

CLASSE DE 3^{e}

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis **FROT**

ellipses

Mathématiques

CLASSE DE 3e

Pour ceux
qui veulent comprendre

Jean-Louis FROT

ellipses

Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du XVI^e^ siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du V^e^ siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au VII^e^ siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du IX^e^ siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du XV^e^ siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Toriccelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat, etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du XVII^e^ siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au XVI^e^ siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note [1], je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maîtriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6^e, 5^e, 4^e, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2e édition révisée*, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note [2]).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématiques introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **apprises** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles qui ont été introduits dans les classes précédentes, et qui seront revus cette année. Voyons-en ici quelques-uns :

Symbole	Lecture	Exemple	Traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	A est un point de d.
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul.
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	Si $x = 1$ alors il n'est pas nul.
$\Leftrightarrow$	équivaut	$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$	a^2 est nul équivaut à a est nul.
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
$/\!/$	parallèle	$d_1 /\!/ d_2$	d_1 et d_2 sont parallèles.

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon, 6ᵉ à 3ᵉ , 2ᵉ édition révisée*, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

Théorème 1. (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites* ***du plan*** *sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles d_1, d_2, d désignant des droites du plan :

$$\boxed{(d_1 \perp d \text{ et } d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \mathbin{/\!/} d_2}$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

" Les droites d_1 et d_2 sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1). "

" $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1). "

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

Le livre de troisième

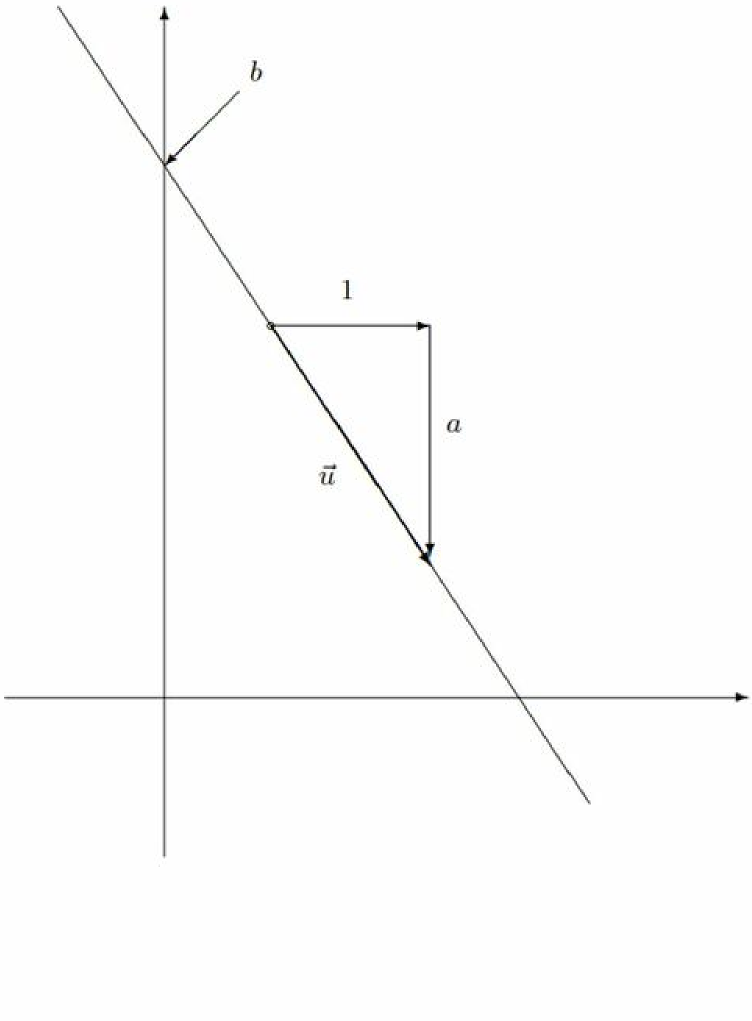
La grande affaire de la classe de troisième ce sont les **équations de droites** et les **fonctions affines**. Ces objectifs sont atteints grâce à un chapitre de géométrie analytique qui comporte des révisons sur les vecteurs, et l'introduction de la notion nouvelle de **colinéarité** de deux vecteurs (déf. 14, p. 89). Le critère de colinéarité permet de calculer facilement les équations de droites, et celles-ci débouchent sur les fonctions affines.

Nous étudions les propriétés de la racine carrée (§ 4, p. 35), ce qui nous donne l'aisance voulue pour exploiter le théorème de Pythagore et la formule de la longueur (th. 2, p. 83).

Le calcul algébrique et la géométrie nous permettent d'obtenir dans les exercices plusieurs résultats remarquables, comme les approximations classiques du nombre d'or (ex. 30, p. 46), l'utilisation de visées angulaires pour calculer des longueurs (ex. 11, p. 69), la construction d'un pavage du plan (ex. 6, p. 98), la droite d'Euler (ex. 28, p. 106), la détermination nocturne de la latitude sur la Terre (ex. 1, p. 135), etc.

Le livre s'ouvre sur un court chapitre d'introduction à la **logique** mathématique (chap. 1, p. 25).

Alors, hardi petits !



b
1
a
$\vec{u}$

Table des matières

Rappels de quelques résultats

Chapitre 1

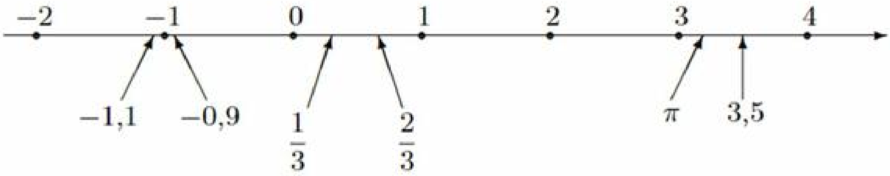
Algèbre

1 Les nombres réels

Un **nombre réel** peut être représenté par une **écriture décimale illimitée**, éventuellement précédée du signe moins. Cette écriture peut se terminer par une infinité de 0 répétés. On a la notion de réel positif et de réel négatif.

Définition 1. *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est exactement l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée :



$$-2 = -2{,}0000\ldots \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \qquad \pi = 3{,}1415926\ldots \qquad 3{,}5 = 3{,}5000\ldots$$

Théorème 2. (règle d'annulation) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$a \times b = 0 \;\Leftrightarrow\; (a = 0 \;\text{ ou }\; b = 0)$$

Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit qu'**un de ses facteurs** soit nul.

2 Puissances d'exposant entier

Proposition 3. (identités remarquables) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ATTENTION ! $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ $(a-b)^2 \neq a^2-b^2$

On peut utiliser les identités remarquables **à l'envers**, pour factoriser :

$a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$ $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

Définition 4. *Soit u un réel, α un entier ≥ 1, on pose :*

$$u^\alpha = \underbrace{u \times u \times \cdots \times u}_{\alpha \text{ facteurs}}$$

Les **entiers relatifs** sont tous les entiers positifs ou négatifs :

$$\ldots, -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$$

Proposition 5. *Soient u, v des **réels** $\neq 0$, et α, β des entiers relatifs. On a :*

$1^\alpha = 1$	$u^\alpha \times u^\beta = u^{\alpha+\beta}$
$u^0 = 1$	$(uv)^\alpha = u^\alpha v^\alpha$
$u^1 = u$	$(u^\alpha)^\beta = u^{\alpha\beta}$
$u^{-\alpha} = \dfrac{1}{u^\alpha}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)^\alpha = \dfrac{u^\alpha}{v^\alpha}$

3 Inégalités

• *On peut **ajouter ou retrancher un même nombre** des deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas :*

Proposition 6. *Pour tous réels a, b, c on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a+c \leq b+c$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a-c \leq b-c$$

• *On peut **multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif** les deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas :*

Proposition 7. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c > 0$ on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ac \leq bc$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

• *On peut **multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif** les deux côtés d'une inégalité, et **le sens change**.*

Proposition 8. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c < 0$ on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ac \geq bc$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

Chapitre 2

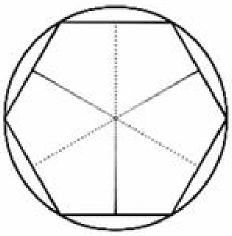
Géométrie plane

1 Polygones

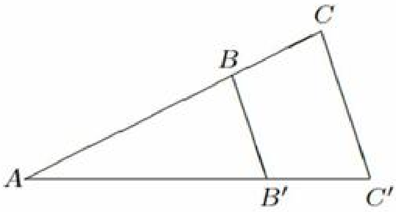
Définition 1. *Un polygone (non croisé) est une* ***ligne brisée fermée*** *qui ne se recoupe pas, et qui est composée d'un nombre fini de segments. Ces segments sont les* ***côtés*** *du polygone, leurs extrémités sont les* ***sommets*** *du polygone.*

Définition 2. *Un polygone est dit* ***régulier*** *si tous ses côtés ont même longueur et si tous ses angles sont égaux.*

Proposition 3. *Dans un polygone* ***régulier*** *les médiatrices des côtés sont concourantes en un même point, appelé* ***centre*** *du polygone. Il existe un cercle centré en ce point, et qui contient tous les sommets du polygone. On l'appelle le* ***cercle circonscrit*** *au polygone.*



2 Théorème de Thalès



Théorème 4. (théorème de Thalès) *Soit ACC' un triangle, et soient des points $B \in (AC)$ et $B' \in (AC')$. Alors :*

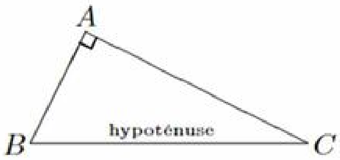
$$(BB') \mathbin{/\!\!/} (CC') \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'} \right)$$

Noter que les deux égalités sont du type :

$$\frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}}$$

3 Théorème de Pythagore

Définition 5. *Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté situé en face de l'angle droit, c'est **le plus grand** des côtés.*



Théorème 6. (théorème de Pythagore) *Dans un triangle rectangle le **carré de l'hypoténuse** est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

Proposition 7. *La diagonale d'un carré de côté a vaut* $a\sqrt{2}$

Proposition 8. *La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut* $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

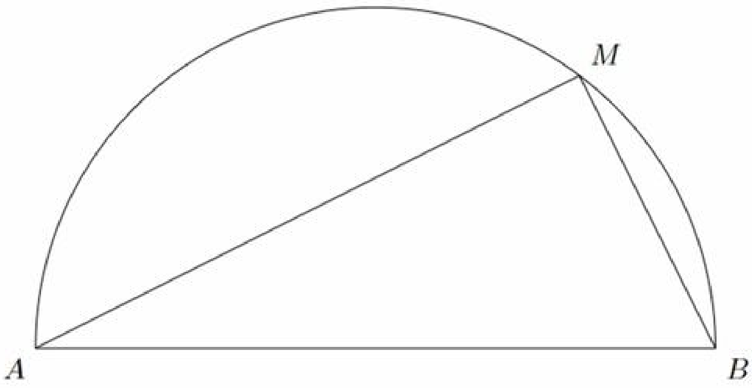
Théorème 9. (réciproque du théorème de Pythagore) *Si dans un triangle ABC on a :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

alors ABC est rectangle en A.

4 Théorème du demi-cercle

Théorème 10. (théorème du demi-cercle) *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[AB]$, si $M \neq A$ et $M \neq B$, alors $(MA) \perp (MB)$.*



Théorème 11. (réciproque du théorème du demi-cercle) *Si un triangle MAB est rectangle en M, son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.*

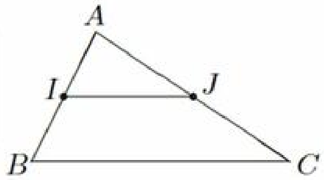
Autrement dit : *Si un triangle est rectangle, son cercle circonscrit a pour diamètre son **hypoténuse**.*

5 Droite des milieux, médiane

Définition 12. *La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est appelée* ***droite des milieux*** *de ce triangle.*

Théorème 13. (droite des milieux) *Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.*

Proposition 14. *Dans un triangle, la droite issue du milieu d'un côté, et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.*

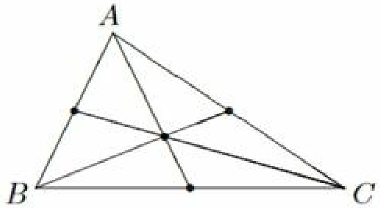


Proposition 15. *Si I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ on a :*

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Définition 16. *Dans un triangle on appelle* ***médiane*** *toute droite issue d'un sommet et passant par le milieu du côté opposé.*

Proposition 17. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un même point appelé* ***centre de gravité du triangle****.*



Proposition 18. *Le centre de gravité d'un triangle est situé au tiers de chaque médiane en partant des milieux des côtés.*

6 Angle, arc, cosinus

On a vu en classe de 6^e qu'un ***angle*** est l'***écart*** qui existe entre deux segments ayant une extrémité commune, ou entre deux demi-droites de même origine. Au collège, on ne considère que des angles dont la mesure α en degrés vérifie :

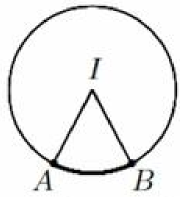
$$0 \leq \alpha \leq 180$$

Généralement, on ne fait pas de différence entre un angle et sa mesure. Donc, si ABC est un triangle, écrire :

$$\widehat{BAC} = 30°$$

signifie que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

Définition 19. *Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et soient A et B deux points de $\mathscr{C}$, distincts. On dit que $\widehat{AIB}$ est* ***l'angle au centre*** *qui* ***intercepte l'arc*** $\overset{\frown}{AB}$.



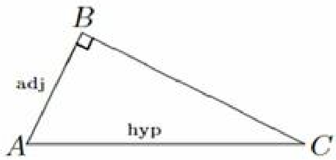
Dans cette définition, on suppose implicitement que A et B ne sont pas diamétralement opposés, et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ dont il est question est le **petit** morceau du cercle $\mathscr{C}$, situé entre A et B.

Proposition 20. *Sur un cercle, les longueurs des arcs sont* ***proportionnelles*** *aux angles qui les interceptent.*

Le **cosinus** d'un angle est une **grandeur abstraite** qu'on ne peut pas mesurer avec un rapporteur, et qui remplace l'angle lui-même.

Définition 21. *Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose :*

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$



Théorème 22. (théorème de la projection orthogonale) *La projection orthogonale entre deux axes formant un angle aigu α multiplie les distances par* $\cos\alpha$.

Corollaire 23. *La projection du milieu de deux points est le milieu des projections de ces deux points.*

Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

1 Droites et plans

Définition 1. *Un plan est une **surface plate**, illimitée de tous les côtés.*

Axiome 2. *Par trois points non alignés, il passe un plan et un seul.*

Le plan qui contient trois points A, B, C non alignés est souvent désigné par (ABC) ou ABC (comme un triangle).

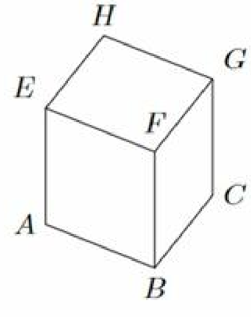
Définition 3. *On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à **deux droites sécantes** de ce plan.*

Proposition 4. *Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.*

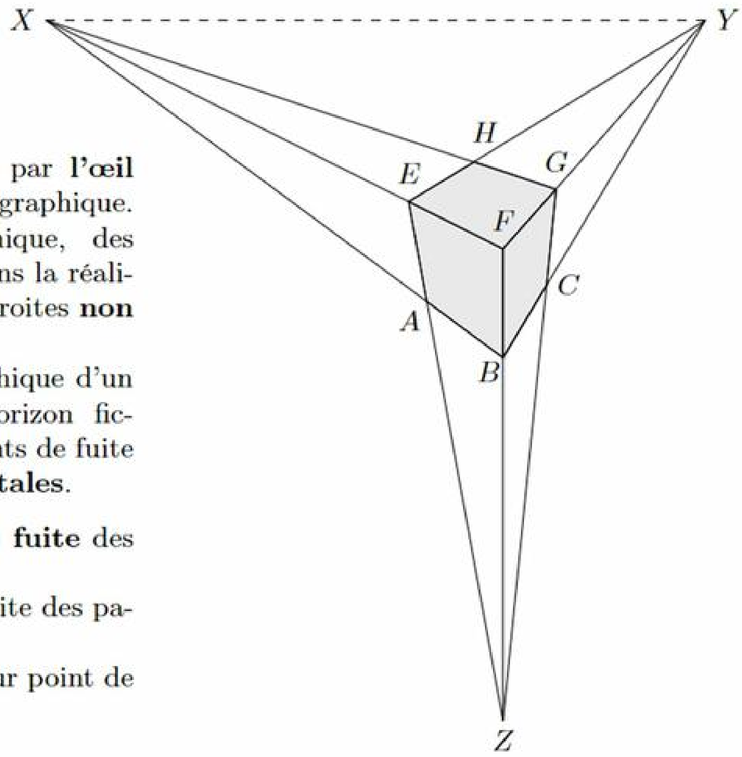
2 Les perspectives

Perspective cavalière

C'est une fausse perspective, mais elle est rassurante et facile à utiliser car les droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.



Perspective conique



C'est la perspective produite par **l'œil humain** et l'appareil photographique. Sur une plaque photographique, des droites qui sont **parallèles** dans la réalités sont représentées par des droites **non parallèles**.
Ainsi, dans l'image photographique d'un **cube**, il y a une ligne d'horizon fictive (XY) qui contient les points de fuite de toutes les **droites horizontales**.

• Le point X est le **point de fuite** des parallèles à (BA).
• Le point Y est le point de fuite des parallèles à (BC).
Les **droites verticales** ont leur point de fuite en Z.

Cette perspective sera utilisée dans l'ex 8, p. 139.

3 Sphère et boule

La lettre grecque $\boxed{\Omega}$ se lit “grand oméga”.

Définition 5. *Soient Ω un point de l'espace, r un réel > 0. La* **boule** *de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $\Omega M \leq r$.*

Une boule est un solide **plein** alors qu'une sphère est une surface **creuse** (*voir* figure et déf. 4, p. 132). La sphère de rayon r est la surface qui enveloppe la boule de rayon r. Dans la pratique, on dit indifféremment **volume d'une sphère** (*voir* prop. 8, p. 134) ou volume d'une boule.

Classe de troisième

Chapitre 1

Éléments de logique

La logique décrit les règles qui gouvernent les **raisonnements** et les **déductions**. L'essentiel en a été codifié par Aristote au IV[e] siècle avant Jésus-Christ, puis renouvelé par Arnauld et Nicole dans *La Logique ou l'art de penser*, 1662. Les énoncés logiques dont il est question dans ce chapitre sont à prendre au sens naïf.

1 Implication logique

Soient E et F des énoncés logiques. Dire que l'implication :

$$E \Rightarrow F$$

est **vraie** signifie (au niveau élémentaire) que si E est vrai alors F est vrai. On sait que :

$$\boxed{\text{quand il va y avoir de l'orage, les poules rentrent au poulailler}}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\text{orage} \Rightarrow \text{poulailler}}$$

De même, l'énoncé suivant :

$$\boxed{\text{si un entier se termine par 5 alors il est divisible par 5}}$$

peut s'écrire :

$$\boxed{\text{se termine par 5} \Rightarrow \text{est divisible par 5}}$$

2 Condition nécessaire et condition suffisante

$\boxed{E \Rightarrow F}$ revient à dire :

pour que F soit vrai, **il suffit** que E soit vrai.
E vrai est une **condition suffisante** pour que F soit vrai

et encore :

pour que E soit vrai, **il faut** que F soit vrai.
F vrai est une **condition nécessaire** pour que E soit vrai

Ainsi, pour qu'un entier soit divisible par 5 il **suffit** qu'il se termine par 5, mais ce n'est pas **nécessaire**, puisque 10 est divisible par 5, mais ne se termine pas par 5.

Autre exemple : à l'école primaire, pour bien multiplier, **il faut** connaître ses tables :

$$\boxed{\text{bien multiplier} \Rightarrow \text{connaître ses tables}}$$

Mais ce n'est **pas suffisant**, car **il faut aussi** connaître le mécanisme des retenues, et beaucoup d'autres choses.

3 Implication, réciproque, équivalence

Si on considère :

$$E \Rightarrow F$$

comme **implication directe**, alors

$$F \Rightarrow E$$

est appelée **implication réciproque**. Soit par exemple un entier n quelconque. L'implication :

$$\boxed{(n \text{ est multiple de } 4) \Rightarrow (n \text{ est multiple de } 2)}$$

est vraie. Mais sa réciproque est fausse, car un multiple de 2 n'est pas nécessairement multiple de 4, comme on le voit en prenant $n = 6$. Donnons un autre exemple. Soient A, B, M des points quelconques du plan. L'implication :

$$\boxed{(M \text{ est milieu de } [AB]) \Rightarrow (MA = MB)}$$

est vraie. Mais sa réciproque est fausse, car l'hypothèse $MA = MB$ signifie simplement que le triangle AMB est isocèle.

Parmi les deux implications $E \Rightarrow F$ et $F \Rightarrow E$ il se peut donc que l'une soit vraie et l'autre fausse. Si elles sont **toutes deux vraies** on écrit :

$$E \Leftrightarrow F$$

et on dit que les énoncés E et F sont **équivalents**. Par exemple, soient A, B des points distincts, M un point quelconque plan, d la médiatrice de $[AB]$. On a :

$$(MA = MB) \Leftrightarrow M \in d$$

4 Connecteurs et / ou

Les connecteurs relient des énoncés logiques. Dire que l'énoncé $\boxed{F \textbf{ et } G}$ est vrai signifie que les énoncés F et G sont **vrais tous les deux à la fois**.

Proposition 1. *Soient A, B et I trois points. On note $[AB]$ le segment d'extrémités A et B. On a :*

$$(I \text{ est milieu de } [AB]) \;\Leftrightarrow\; (IA = IB \;\textbf{ et }\; I \in [AB])$$

Proposition 2. (somme des carrés) *Soient a et b des nombres. On a :*

$$(a^2 + b^2 = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \;\textbf{ et }\; b = 0)$$

Démonstration : comme un carré est toujours positif, la somme de deux carrés est positive. Pour qu'elle soit nulle il faut et il suffit donc que **les deux carrés** soient nuls :

$$(a^2 + b^2 = 0) \Leftrightarrow (a^2 = 0 \ \ \textbf{et} \ \ b^2 = 0)$$

La conclusion résulte alors de ce que :

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Et de même $b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Proposition 3. *Soient a et b deux nombres. On a :*

$$(a \times b \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \ \ \textbf{et} \ \ b \neq 0)$$

Passons maintenant à l'autre connecteur. Dire que l'énoncé $\boxed{F \textbf{ ou } G}$ est vrai signifie que, parmi F et G, **l'un au moins est vrai**, c'est-à-dire, l'un est vrai, ou les deux sont vrais : le $\boxed{\textbf{ou}}$ n'est pas exclusif.

Définition 4. *Soient a et b des nombres. La relation $a \leq b$ signifie $a < b$ **ou** $a = b$*

Ici, les énoncés : $a < b$, $a = b$, ne peuvent pas être vrais tous les deux à la fois.

Théorème 5. (règle d'annulation) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$a \times b = 0 \ \Leftrightarrow \ (a = 0 \ \ \textbf{ou} \ \ b = 0)$$

Ici, les énoncés : $a = 0$, $b = 0$, peuvent être vrais tous les deux à la fois.

5 Exercices

Exercice 1 (*implication directe / implication réciproque*).

Voici quatre **énoncés vrais** :

1. Si l'orage s'annonce, les poules rentrent au poulailler.

$$\boxed{\text{orage} \Rightarrow \text{poulailler}}$$

2. Si une figure du plan admet deux axes de symétrie perpendiculaires alors elle a un centre de symétrie.

$$\boxed{\text{deux axes de symétrie perpendiculaires} \Rightarrow \text{centre de symétrie}}$$

3. Si un nombre est multiple de 4 alors il est multiple de 2.

$$\boxed{\text{multiple de } 4 \Rightarrow \text{multiple de } 2}$$

4. Si un nombre se termine par 5 alors il est divisible par 5.

$$\boxed{\text{se termine par } 5 \Rightarrow \text{divisible par } 5}$$

Pour chacun de ces énoncés, dire si l'**énoncé réciproque** est vrai ou faux.

Exercice 2 (*implication directe / implication réciproque*).

1. Dans un parallélogramme les diagonales ont même milieu :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Rightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

   La réciproque est-elle vraie ?

2. Un parallélogramme a deux côtés de même longueur.

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Rightarrow \text{deux côtés de même longueur}}$$

   La réciproque est-elle vraie ? justifier.

Exercice 3.

Voici trois énoncés sur le modèle "**nécessaire**" mais "**pas suffisant**" :
a/ Pour calculer, il faut connaître ses tables de multiplications, mais ce n'est pas suffisant.
b/ Pour être aimable, il faut être poli, mais ce n'est pas suffisant.
c/ Pour plaire à Dieu, il faut prier, mais ce n'est pas suffisant.

1. Justifier ces trois énoncés.
2. Fabriquer deux énoncés sur le même modèle.

Exercice 4.

Voici trois énoncés sur le modèle "**suffisant**" mais "**pas nécessaire**".
a/ Si tu veux savoir s'il est content, il suffit de l'interroger.
b/ Pour qu'un cheval soit content, il suffit de lui donner une carotte.
c/ Si tu veux me déplaire, il suffit que tu fasses une grosse colère.

1. Justifier ces énoncés. Pourquoi, dans chacun, la condition n'est pas nécessaire ?
2. Fabriquer deux énoncés sur le même modèle.

Exercice 5.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier :

1. Pour qu'un fruit ait bon goût il faut qu'il soit mûr.
2. Pour qu'un fruit ait bon goût il suffit qu'il soit mûr.
3. Pour réussir, il faut avoir du courage.
4. Pour réussir, il suffit d'avoir du courage.

Exercice 6.

Utiliser la règle d'annulation (th. 5, p. 27) pour résoudre les équations suivantes :

1. $(2x+3)(-x+7)=0$
2. $5(-2x+3)(4x+7)=0$
3. $-(x-3)^2=0$
4. $x(2x-5)=0$

Exercice 7.

Utiliser la règle de la somme des carrés (prop. 2, p. 26) pour calculer les couples $(x; y)$ qui sont solutions de chacune des équations suivantes :

$$(2x+3)^2 + (-y+7)^2 = 0 \quad (1)$$
$$(2x-3)^2 + (y-x)^2 = 0 \quad (2)$$
$$(y+x)^2 + (y-x)^2 = 0 \quad (3)$$

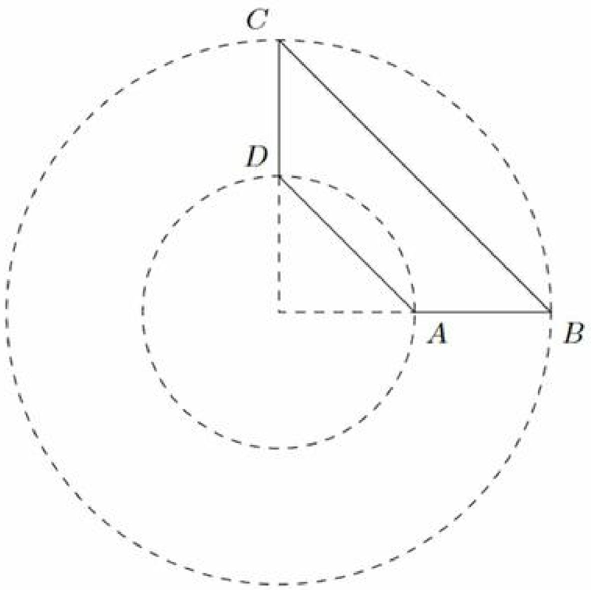
6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 27 Dans cet exercice, **tous les énoncés réciproques sont faux**. En effet :
1. "poulailler ⇒ orage" est faux, car les poules rentrent au poulailler tous les soirs, même s'il n'y a pas d'orage.
2. "centre de symétrie ⇒ deux axes de symétrie perpendiculaires" est faux car la lettre **Z** a un centre de symétrie, mais pas d'axes de symétrie.
3. "multiple de 2 ⇒ multiple de 4 " est faux car le nombre 6 est multiple de 2 mais pas multiple de 4.
4. "divisible par 5 ⇒ se termine par 5 " est faux car le nombre 10 est divisible par 5 mais ne se termine pas par 5.

Ex. 2, p. 28 1. "diagonales de même milieu ⇒ parallélogramme" est **vrai**. On l'a vu en classe de 5e où le **critère**[1] suivant est expliqué :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

2. "deux côtés de même longueur ⇒ parallélogramme" est **faux** comme on peut le voir sur le trapèze $ABCD$ ci-dessous, où $AB = DC$ mais $(AB) \not\parallel (DC)$:



1. Un critère est une équivalence.

CORRIGÉS

Ex. 3, p. 28 1. **a**/ Nous pensons qu'il est superflu de persuader le lecteur qu'il faille connaître ses tables de multiplications pour calculer. Mais pour ceux qui en douterait, nous reproduisons ci-dessous un exemple de calcul, extrait de la correction de l'ex. 10, p. 100, que l'on peut trouver p. 115 :

$$\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & -x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \times 4 - 3 \times (-x) = -8 + 3x$$

Si certains pensent que la **calculette** a remplacé les tables de multiplications, c'est qu'ils ignorent qu'une grande partie du **raisonnement mathématique** se fait de tête, les yeux fermés. Et avant que de rédiger une démonstration, il faut l'avoir imaginée, et pour cela, connaître $2 \times 2 = 4$ ou $3 \times 7 = 21$ est aussi indispensable que de savoir les règles du calcul algébrique. De plus, un peu de **calcul mental** préliminaire permet souvent de prévoir si le choix de la méthode de résolution envisagée est judicieux ou s'il faut en changer. Ceci dit, nous ne sommes pas ennemis de la calculette : elle est commode pour certains usages : racines carrées, cosinus, etc.

Terminons à présent la correction de 1. **a**/. Il n'est pas suffisant de connaître ses tables de multiplications pour calculer, il faut aussi connaître de nombreuses règles algébriques. Par exemple, si j'écris :

$$(a^2)^3 = a^6$$

j'utilise la règle algébrique $(a^2)^3 = a^{2\times3}$ et **ensuite** la multiplications $2 \times 3 = 6$.

Les questions 1. **b**/ et 1. **c**/ que nous allons corriger maintenant sont vues ici sous leur aspect logique. Mais comme elles portent sur des sujets non mathématiques, leur solution ne peut qu'être partiale. D'autres seraient envisageables, peut-être. Notre but est seulement de montrer que l'énoncé logique :

"**nécessaire**" mais "**pas suffisant**"

apparaît dans des situations très variées.

b/ La politesse fait partie des agréments qui concourent à rendre une personne aimable. Un goujat et une pimbèche ne sont pas aimables. Mais la politesse ne suffit pas. Et même, une politesse froide et hautaine n'est pas aimable.

c/ Pour qui croit en Dieu, au Christ et à son enseignement, adresser des prières à Dieu pour lui plaire est nécessaire et légitime. Mais ce n'est pas suffisant, il faut beaucoup plus, en particulier "aimer son prochain".

2. Sur le même modèle : "pour vivre heureux vivons cachés", "il faut manger pour vivre".

Ex. 4, p. 28 1. **a**/ En effet, s'il est content, il acceptera sûrement de le dire et on le saura. Mais ce n'est pas nécessaire, sa physionomie peut parler pour lui.

b/ Les chevaux sont contents de manger des carottes. Mais pour qu'un cheval soit content, les carottes ne sont pas nécessaires. Il peut être content qu'on lui flatte la nuque.

c/ Si tu fais une grosse colère, ça me déplaira. Mais tu peux me déplaire autrement, par exemple, en faisant des grimaces.

2. Sur le même modèle : "il suffit d'une étincelle pour déclencher un incendie", "il suffit d'être riche pour faire des envieux".

Ex. 5, p. 28 1. Vrai, car un fruit qui n'est pas mûr est dur et a un goût aigre.

2. Faux, car même mûrs, certains fruits ne sont pas assez sucrés ou sont fades ou ne sont pas assez juteux.

3. Faux. On peut réussir pas chance, ou du fait de circonstances qui nous sont favorables.

4. Faux, car même avec beaucoup de courage, certains obstacles sont insurmontables.

Ex. 6, p. 28 1. La règle d'annulation (th. 5, p. 27) permet d'écrire :

$$(2x+3)(-x+7)=0 \Leftrightarrow (2x+3=0 \ \boxed{\textbf{ou}} \ -x+7=0) \Leftrightarrow (x=-\frac{3}{2} \ \boxed{\textbf{ou}} \ x=7)$$

L'équation a donc deux solutions. Si on note $\mathscr{S}$ **l'ensemble des solutions**, on écrit :

$$\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{2},7\right\}$$

2. On a de même :

$$5(-2x+3)(4x+7)=0 \Leftrightarrow (5=0 \text{ ou } -2x+3=0 \text{ ou } 4x+7=0)$$

Or $5 \neq 0$, donc :

$$5(-2x+3)(4x+7)=0 \Leftrightarrow (-2x+3=0 \text{ ou } 4x+7=0) \Leftrightarrow (x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=-\frac{7}{4})$$

L'équation a donc deux solutions, l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right\}$$

3. Puisqu'on a : $-a=0 \Leftrightarrow a=0$ et $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$, il vient :

$$-(x-3)^2=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

L'équation a donc une seule solution, on écrit :

$$\mathscr{S}=\{3\}$$

4. Enfin, par la règle d'annulation, on a :

$$x(2x-5)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } 2x-5=0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=\frac{5}{2})$$

L'équation a donc deux solutions, l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}=\left\{0,\frac{5}{2}\right\}$$

Ex. 7, p. 29 1. Par la règle de la somme des carrés (prop. 2, p. 26) on a :

$$(1) \Leftrightarrow (2x+3)^2+(-y+7)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x+3=0 \; \boxed{\textbf{et}} \; -y+7=0) \Leftrightarrow (x=-\frac{3}{2} \; \boxed{\textbf{et}} \; y=7)$$

L'équation (1) a donc un couple solution unique : $\boxed{(x;y)=(-\frac{3}{2};7)}$ Ce sont les coordonnées d'un **unique** point du plan.

2. On a de même :

$$(2) \Leftrightarrow (2x-3)^2+(y-x)^2=0 \Leftrightarrow (2x-3=0 \text{ et } y-x=0) \Leftrightarrow (x=\frac{3}{2} \text{ et } y=\frac{3}{2})$$

L'équation (2) a donc un couple solution unique : $\boxed{(x;y)=(\frac{3}{2};\frac{3}{2})}$

3. On a de même :

$$(3) \Leftrightarrow (y+x)^2+(y-x)^2=0 \Leftrightarrow (y+x=0 \text{ et } y-x=0)$$

Pour y voir plus clair, on dispose ces deux équations sous la forme d'un **système** :

$$\begin{cases} y+x & = & 0 \\ y-x & = & 0 \end{cases}$$

On ajoute les deux équations du système, et on obtient :

$$2y=0 \Leftrightarrow y=0$$

On reporte cette valeur de y dans la première équation du système, et on obtient :

$$0+x=0 \Leftrightarrow x=0$$

On a donc montré :

$$(3) \Rightarrow (x;y)=(0;0)$$

Montrons maintenant la **réciproque** :

$$(x;y)=(0;0) \Rightarrow (3)$$

Il suffit de faire $x=0$ et $y=0$ dans l'équation (3), on obtient : $0^2+0^2=0$. Donc $(0;0)$ est bien solution de (3). Finalement, l'équation (3) a un couple solution unique :

$$\boxed{(x;y)=(0;0)}$$

Chapitre 2

Algèbre

1 Vocabulaire de l'algèbre

Dans l'expression :

$$\frac{2}{3} + 100x - 2x^3$$

- $\frac{2}{3}$ est le **terme constant** : il est isolé et ne contient pas de variable,
- 100 et -2 sont des **coefficients** qui multiplient x et x^3,
- x est une **variable**, x^3 est la puissance de x, d'exposant 3.

Dans l'expression :

$$7ab^3$$

- 7 est le **coefficient** de ab^3 qui est la **partie littérale** (formée de lettres).

2 Équations et inéquations étranges

Soient a et b des réels, et soit l'équation d'inconnue x :

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

dont on note $\mathscr{S}$ **l'ensemble des solutions**. Si $a \neq 0$ on a (1) $\Leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{a}$ donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-\frac{b}{a}\}}$$

Si $a = 0$, l'équation (1) équivaut à :

$$b = 0 \tag{2}$$

équation qui ne contient plus l'inconnue x. Si b est nul, elle équivaut donc à :

$$0 = 0$$

qui est une vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$$

si b est non nul, l'équation (2) est toujours fausse. Elle n'a donc **aucune solution** :

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$$

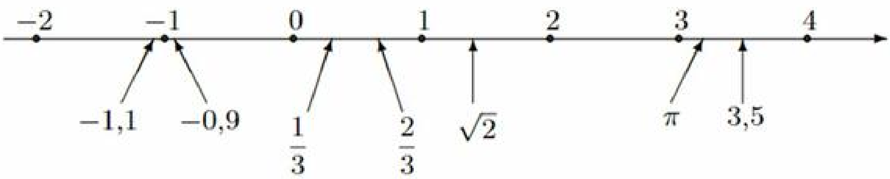
$\emptyset$ désignant l'**ensemble vide** qui n'a aucun élément.

Donnons des exemples :

- $2x - 3 = 4 + 2x \Leftrightarrow -3 = 4$. Cette égalité est fausse, donc $\mathscr{S} = \emptyset$.
- $2x - 3 = -3 + 2x$. Cette équation est toujours vraie, donc $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.
- $2x - 3 > 4 + 2x \Leftrightarrow -3 > 4$. Cette inégalité est fausse, donc $\mathscr{S} = \emptyset$.
- $2x - 3 \leq 3 + 2x \Leftrightarrow -3 \leq 3$. Cette inégalité est toujours vraie, donc $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

3 Rappels et compléments sur les inégalités

Un réel **négatif** est situé à **gauche** de 0, un réel **positif** est situé à **droite** de 0



Définition 1. *Pour tous réels a, b, on dit que a **est inférieur à** b, et on écrit $a \leq b$ si a est **à gauche** de b sur l'axe réel :*

Si on note $b \geq a$ la relation "b est supérieur à a", on a :

$$\boxed{a \leq b \;\Leftrightarrow\; b \geq a}$$

Proposition 2. *Pour tous réels a et b, $\quad b \geq a \;\Leftrightarrow\; b - a$ est positif ou nul.*

Proposition 3. *Soient a, b, a', b' des réels, on a :*

$$a \leq b \text{ et } a' \leq b' \Rightarrow a + a' \leq b + b'$$

ATTENTION ! On ne peut pas **retrancher** entre elles des inégalités de même sens.

Proposition 4. *Soient a, b, a', b' des réels. On a :*

$$0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq a' \leq b' \quad \Rightarrow \quad aa' \leq bb'$$

ATTENTION ! On ne peut pas **diviser** entre elles des inégalités de même sens.

Proposition 5. *Soient a, b des réels. On a :*

$$0 < a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Ce qui montre que plus un nombre est grand, plus son inverse est petit. Plus un nombre est petit, plus son inverse est grand.

4 Racine carrée

La racine carrée a été découverte (ou inventée) par les mathématiciens de la Grèce antique. Elle est née de l'étude de certains rapports de nombres : diagonale et côté d'un carré (th. de Pythagore), carré dans un rectangle (*voir* nombre d'or, ex. 30 p. 46)

Définition 1. *Si a est un réel ≥ 0 on note $\sqrt{a}$ le nombre ≥ 0 dont le carré vaut a :*

$$\boxed{x \geq 0 \text{ et } x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}}$$

ATTENTION ! $\sqrt{0} = 0$ mais **un nombre négatif n'a pas de racine**.

Remarque : Ma fille Anastasia dit que la racine carrée :

$$\sqrt{a}$$

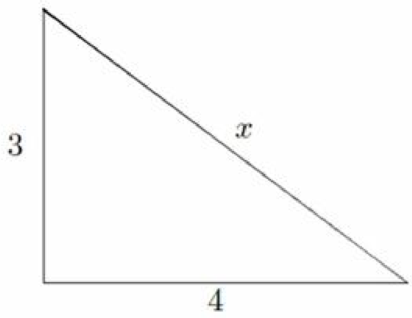
c'est comme un **petit toit** qui protège le nombre a de la pluie...

Théorème 2. (théorème de Pythagore) *Dans un triangle rectangle le **carré de l'hypoténuse** est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Par le th. de Pythagore, dans le triangle rectangle ci-contre, l'hypoténuse x vérifie :

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

On en déduit $x = \sqrt{25} = 5$



En général, la racine carrée d'un entier n'est pas entière :

a	0	1	2	3	4	5	9	10
$\sqrt{a}$	0	1	1,41...	1,73...	2	2,23...	3	3,16...

Il faut connaître par cœur les approximations suivantes :

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}7 \qquad \sqrt{5} \approx 2{,}2$$

et connaître aussi les **carrés parfaits**. Ce qui permet d'écrire :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

$$\sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{36} = 6 \quad \ldots$$

Les quatre propriétés de base de la racine carrée sont les suivantes :

Proposition 3. *Pour tous* ***réels positifs*** *a et b on a :*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{a} & \geq & 0 \\ (\sqrt{a})^2 & = & a \\ \sqrt{a^2} & = & a \\ a \leq b & \Leftrightarrow & \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \end{array}$$

Ainsi :

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \qquad\qquad \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$$

La quatrième propriété signifie que les racines carrées sont classées dans le **même ordre** que les nombres eux-mêmes. Ceci permet en particulier de prévoir l'**ordre de grandeur** d'une racine carrée.

Ainsi, pour $\sqrt{2}$, on encadre 2 entre deux carrés successifs :

$$1 \leq 2 \leq 4$$

donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{4}$ c'est-à-dire :

$$1 \leq \sqrt{2} \leq 2$$

Cet encadrement est conforme à la valeur exacte :

$$\sqrt{2} = 1{,}414...$$

fournie par la calculette.

Les deux principales propriétés algébriques de la racine carrée sont les suivantes :

Proposition 4. *Pour tous* ***réels positifs*** *a et b on a :*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{a \times b} & = & \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \text{si} \quad b \neq 0, \ \sqrt{\dfrac{a}{b}} & = & \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{array}$$

Par exemple,

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4 \times 36} & = & \sqrt{4} \times \sqrt{36} \ = \ 2 \times 6 \ = \ 12 \\ \sqrt{9a^2} & = & \sqrt{9} \times \sqrt{a^2} \ = \ 3 \times a \ = \ 3a \\ \sqrt{\dfrac{a^2}{100}} & = & \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{100}} \ = \ \dfrac{a}{10} \end{array}$$

ATTENTION ! Il n'y a pas de formule pour la racine d'une somme ou d'une différence, en particulier :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Proposition 5. *Pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier n* ***positif*** *ou* ***négatif****, on a :*

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n$$

Par exemple :

$$\sqrt{10\,000} = \sqrt{10^4} = 10^2 = 100$$

$$\sqrt{10^{-6}} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad \sqrt{13^6} = 13^3 = 2197$$

Pour **sortir un carré** d'une racine il faut connaître la liste des **carrés parfaits** :

$$4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49 \quad \ldots$$

Si on peut écrire :

$$a = b^2 \times c$$

alors :

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 \times c} = \sqrt{b^2}\sqrt{c} = b\sqrt{c}$$

Ainsi :

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

On verra dans ex. 25, p. 45 comment on peut transformer par exemple :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad B = \frac{1}{4 - \sqrt{7}} \qquad C = \frac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}$$

Un nombre est dit **rationnel**, s'il peut s'écrire comme quotient de deux entiers. Les Anciens, à l'époque d'Euclide, considéraient avec **stupeur** les nombres qui n'étaient pas rationnels. On va montrer le résultat suivant :

Proposition 6. *Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

La démonstration se trouve dans les *Éléments* d'Euclide : on raisonne **par l'absurde**. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. On va montrer qu'on aboutit alors à une **contradiction**, ce qui prouvera que cette supposition est absurde (c'est-à-dire fausse). Il existe donc des entiers $a, b > 0$, tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

On peut supposer que cette fraction est irréductible, c'est-à-dire que a **et** b **n'ont pas de diviseurs communs autre que** 1. On élève au carré les deux membres de (1) :

$$2b^2 = a^2 \tag{2}$$

Donc a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair aussi, car le carré d'un impair est impair. On peut donc écrire $a = 2A$ où A est entier. Reportons cette expression de a dans la relation (2). Il vient :

$$2b^2 = (2A)^2 = 4A^2$$

d'où $b^2 = 2A^2$. On en déduit que b^2 est pair, donc aussi b. Ainsi a et b sont pairs, et admettent donc 2 comme diviseur commun, ce qui contredit l'hypothèse que a et b n'ont pas de diviseurs communs autre que 1. C'est la **contradiction annoncée**.

Le théorème de Pythagore permet de montrer que $\sqrt{2}$ est la diagonale d'un carré de côté 1. En effet, si on note x cette diagonale, on a :

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

On en déduit bien qu'on a : $x = \sqrt{2}$

On peut montrer qu'on a :

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

On va donner une méthode pour **approcher** $\sqrt{2}$ avec des nombres rationnels. Considérons la suite d'égalités équivalentes :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ x^2 &= 2 \\ x^2 - 1 &= 1 \\ (x-1)(x+1) &= 1 \\ x - 1 &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x = 1 + \frac{1}{1+x} \tag{1}$$

Cette relation va nous permettre de fabriquer une suite de rationnels de plus en plus proches de $\sqrt{2}$. Calculons d'abord cette expression en y remplaçant x par 1. Notons x_0 le résultat :

$$x_0 = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Calculons maintenant l'expression (1) en y remplaçant x par x_0. Notons x_1 le résultat :

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

On continue ainsi :

$$x_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{17}{12}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

On pourrait continuer ainsi, indéfiniment. Mais déjà, avec les fractions x_0, x_1, x_2, x_3 on va voir qu'on approche $\sqrt{2}$ d'assez près. On a :

$$x_0 = 1{,}5 \qquad x_1 = 1{,}4 \qquad x_2 = 1{,}416... \qquad x_3 = 1{,}413...$$

Représentation graphique sur l'axe réel :

Un calcul facile donne :

$$x_0^2 = 2 + \frac{1}{4} \qquad x_1^2 = 2 - \frac{1}{25} \qquad x_2^2 = 2 + \frac{1}{144} \qquad x_3^2 = 2 - \frac{1}{841}$$

ce qui montre que les nombres x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont de plus en plus proches de 2, et donc que les nombres x_0, x_1, x_2, x_3 sont de plus en plus proches de $\sqrt{2}$.

5 Exercices

Exercice 1.

Réduire les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a+1} \qquad g(x) = \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2-1} \qquad h(x) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$$

Exercice 2.

La SNCF propose deux abonnements annuels pour les trajets de Saverne à Nancy :

- l'abonnement A comporte un forfait annuel de 40 euros, et 10 euros par voyage.
- l'abonnement B comporte un forfait annuel de 80 euros, et 6 euros par voyage.

Un voyageur qui doit faire x voyages dans l'année **hésite** entre les deux possibilités.

1. Calculer l'expression $A(x)$ du prix qu'il devra payer s'il choisit l'abonnement A.
2. Calculer l'expression $B(x)$ du prix qu'il devra payer s'il choisit l'abonnement B.
3. Résoudre l'inéquation :
$$A(x) \leq B(x)$$
4. Quels conseils donneriez-vous au voyageur pour **lever ses hésitations** ?

Exercice 3.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{4+x}{5} \leq \dfrac{29+x}{6} & -x+11 \leq 3x+31 & 2x-1 > x-2 \\
13x+15 > 6x-6 & \dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x}{6}+5 & \dfrac{x-3}{4}+1 \leq x+\dfrac{x+1}{2}
\end{array}$$

Exercice 4.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{1+x}{3} \leq -5x+4 & 2(1-x) > \dfrac{-x}{2}+3 & 2x-\dfrac{1}{2} > x+2 \\
-3x+15 > x-6 & \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3} \leq 2x+5 & \dfrac{x-3}{3}+1 \leq x+\dfrac{x+1}{3}
\end{array}$$

Exercice 5.

Résoudre les inéquations suivantes, sachant que $x > 0$:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{2}{x}-3 < \dfrac{1}{x} & \dfrac{5}{x+1}-3 < \dfrac{2}{x+1}-2 & \dfrac{2}{x}+5 > \dfrac{3}{x} \\
-\dfrac{2}{3}-x < \dfrac{1}{3} & \dfrac{5}{x+1} < \dfrac{2}{x+1} & \dfrac{2}{3}+5x > \dfrac{5}{3}
\end{array}$$

Exercice 6.

Montrer que pour tout réel $a > 0$ on a :

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Exercice 7 (partiellement résolu).

(distances en km, vitesses en km/h, temps en heures) Un automobiliste doit parcourir 100 km pour aller de la ville A à la ville B. Sur les 50 premiers km, il roule à 3 km/h. Sur les 50 derniers km, il roule à la vitesse v.

1. Montrer que sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est :

$$m = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{v}}$$

2. Montrer que :

$$m < 6$$

3. On suppose que l'automobiliste a quitté la ville A à 0 h. Montrer que, dans les conditions du parcours, et quelle que soit sa vitesse v sur les 50 derniers km, il ne pourra pas arriver en B avant 16 h 40.
4. Montrer que cet exercice illustre l'adage : "**Le temps perdu ne se rattrape plus**."

Solution partielle : on traite la question 2. Puisque $\frac{1}{v} > 0$, on a :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{v} > \frac{1}{3}$$

Comme tous ces nombres sont > 0, on peut prendre les inverses, et l'inégalité change de sens, par la prop. 5, p. 34 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{v}} &< \frac{1}{\frac{1}{3}} \\ &< 3 \end{aligned}$$

On multiplie par 2 des deux côtés, et on obtient :

$$\frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{v}} < 6$$

Exercice 8 (d'après brevet 2017).

Un certain TGV est composé de deux rames accrochées l'une derrière l'autre. Chaque rame comporte deux motrices encadrant cinq voitures. Chaque motrice mesure 19 m de long, et chaque voiture mesure 18,3 m.

1. Schématiser le TGV, par une suite de lettres M (= motrice) et V (= voiture).
2. Calculez la longueur totale du TGV. Vérifiez qu'on trouve 259 m.
3. J'attendais mon train en gare de Saverne quand ce TGV est passé devant moi à toute vitesse, sans s'arrêter, en 2,5 secondes. À quelle vitesse roulait-il ?

Exercice 9 (un peu rude ; à n'aborder qu'avec prudence).

En classe de 6^e^, on a introduit les nombres premiers et donné cette définition :

*Un **nombre premier** est un entier positif qui a exactement deux diviseurs.*

Ces nombres ont des **propriétés mystérieuses**, on en verra quelques-unes en classe de Terminale... Dans une fameuse démonstration par l'absurde, Euclide a prouvé qu'il y a une infinité de nombres premiers. Le début de la liste est :

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41, \ldots,\ 1999,\ \ 2003,\ \ 2011,\ 2017,\ 2027, \ldots$$

Euclide a aussi démontré le :

Théorème 1. (théorème d'Euclide) *Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.*

On se propose de prouver l'énoncé suivant : Si un entier $n \geq 2$ n'est divisible par aucun nombre premier qui soit $\leq \sqrt{n}$ alors **il est premier**. Soit donc n un entier ≥ 2.

1. Montrer que si b est un diviseur de n, et si $b \geq \sqrt{n}$ alors $\dfrac{n}{b}$ est un diviseur de n et $\dfrac{n}{b} \leq \sqrt{n}$
2. En déduire que si aucun nombre premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ ne divise n alors n est premier.
3. Sachant que $\sqrt{337} = 18{,}35...$, quels sont les nombres premiers qu'il suffit d'essayer pour prouver que 337 est premier ?

Exercice 10.

1. Utiliser le modèle :
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
pour terminer les calculs suivants :
$$\begin{aligned} \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} &= ? \\ \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} &= ? \\ \sqrt{1000} = \sqrt{100 \times 10} = \sqrt{100} \times \sqrt{10} &= ? \end{aligned}$$

2. Utiliser le modèle :
$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
pour terminer les calculs suivants :
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} &= ? \\ \sqrt{\frac{10}{72}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} &= ? \end{aligned}$$

Exercice 11.

Réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{36}+\sqrt{100} \qquad B = \sqrt{25}-\sqrt{100} \qquad C = \sqrt{81}+\sqrt{36}$$

$$D = \sqrt{64}-3\sqrt{4}-\sqrt{16} \qquad E = 5\sqrt{49}-\sqrt{49} \qquad F = \sqrt{100}+\sqrt{10\,000}$$

Exercice 12.

1. Calculer les nombres suivants :

$$A = (1+\sqrt{3})^2 \qquad B = (1+\sqrt{7})\times(1-\sqrt{7}) \qquad C = (5-\sqrt{3})^2$$

2. Pour chacun d'eux, donner aussi une valeur approchée.

Exercice 13.

Réduire et simplifier le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{3^2\times 81} \qquad B = \sqrt{49\times 5^2} \qquad C = \sqrt{400}$$

$$D = \sqrt{3^2\times 5^4} \qquad E = \sqrt{10^2} \qquad F = \sqrt{7^2\times 2^2}$$

Exercice 14.

Soit la fonction $f(x) = 3x^2 + x - 1$.

1. Calculer et réduire le plus possible les nombres :

$$f(0) \qquad f(1) \qquad f(\sqrt{5}) \qquad f(\sqrt{2}) \qquad f(-\sqrt{2})$$

2. Pour les trois derniers, donner en plus une valeur approchée.

Exercice 15.

Résoudre les équations suivantes :

$$2x+\sqrt{3}=0 \qquad 4x-\sqrt{7}=0 \qquad x-3\sqrt{7}=0 \qquad x\sqrt{7}=5$$

Exercice 16.

Utiliser la règle d'annulation (th. 5, p. 27) pour résoudre les équations suivantes :

$$(2x+\sqrt{3})(-x+7)=0 \qquad (-2x+3)(4x+\sqrt{7})=0 \qquad (x-3\sqrt{7})^2=0$$

$$x\sqrt{7}(2x-5)=0 \qquad (x^2+3)(4x+\sqrt{7})=0 \qquad (x\sqrt{7}-3\sqrt{7})^2=0$$

Exercice 17 (résolu partiellement).

Réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{25}+\sqrt{49} \qquad B = \sqrt{5}+\sqrt{20} \qquad C = \sqrt{7}-\sqrt{63}$$

$$D = \sqrt{50}+3\sqrt{2}-\sqrt{8} \qquad E = 8\sqrt{3}-2\sqrt{48} \qquad F = \sqrt{10}+\sqrt{1000}$$

Solution partielle : Le calcul de A est évident. Pour réduire $C = \sqrt{7}-\sqrt{63}$ on fait apparaître 7 dans la deuxième racine. On écrit :

$$63 = 7\times 9$$

on en déduit :

$$\sqrt{63} = \sqrt{7\times 9} = \sqrt{7}\times\sqrt{9} = 3\sqrt{7}$$

On reporte et on obtient :

$$C = \sqrt{7}-3\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

De façon semblable, on obtient :

$$D = \sqrt{50}+3\sqrt{2}-\sqrt{8} = \sqrt{2\times 25}+3\sqrt{2}-\sqrt{2\times 4} = 5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Les réductions de B, E, F se font de même.

Exercice 18.

Réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{36}-\sqrt{100} \qquad B = \sqrt{5}+\sqrt{80} \qquad C = \sqrt{28}+\sqrt{63}$$

$$D = \sqrt{72}-3\sqrt{2}-\sqrt{8} \qquad E = 5\sqrt{3}+\sqrt{48} \qquad F = \sqrt{100}+\sqrt{10\,000}$$

Exercice 19.

Réduire et simplifier le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{3^2\times 11} \qquad B = \sqrt{7\times 5^4} \qquad C = \sqrt{2\times 10^6}$$

$$D = \sqrt{3^2\times 5^4} \qquad E = \sqrt{5^3\times 2^3} \qquad F = \sqrt{2^{-3}\times 2^5}$$

Exercice 20.

Réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{500}+3\sqrt{5} \qquad B = 3\sqrt{5}-\sqrt{45} \qquad C = \sqrt{98}-\sqrt{32}$$

$$D = \sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{5} \qquad E = \sqrt{150}-\sqrt{100}+\sqrt{50} \qquad F = \sqrt{10}+\sqrt{1000}$$

Exercice 21 (résolu partiellement).

Réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{\frac{20}{11}} \times \sqrt{\frac{44}{5}} \qquad B = \sqrt{\frac{30}{7}} \times \sqrt{\frac{21}{40}} \qquad C = \sqrt{\frac{15}{14}} \times \sqrt{\frac{35}{6}}$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{6} \qquad E = \sqrt{\frac{24}{12}} - \sqrt{\frac{18}{9}} \qquad F = \sqrt{32} - \sqrt{8}$$

Solution partielle : Pour réduire A on écrit :

$$A = \sqrt{\frac{20}{11}} \times \sqrt{\frac{44}{5}} = \sqrt{\frac{20 \times 44}{11 \times 5}}$$

On calcule ensuite :

$$\frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{44}{11} = 4$$

On en déduit :

$$A = \sqrt{4 \times 4} = 4$$

Les expressions B, C, D se calculent de même. Les calculs de E et F sont faciles.

Exercice 22.

Sachant que $a, b > 0$, réduire le plus possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{4b}{a^3}} \qquad B = \sqrt{\frac{3a}{b}} \times \sqrt{\frac{b^3}{4a}} \qquad C = \sqrt{\frac{4b}{3a}} \times \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$D = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{ab} \qquad E = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad F = \sqrt{4a} - \sqrt{a}$$

Exercice 23.

Calculer les nombres suivants :

$$A = \sqrt{4 \times 10^2} \qquad B = \sqrt{81 \times 10^8} \qquad C = \sqrt{49 \times 10^6}$$

$$D = \sqrt{25 \times 10^4} \qquad E = \sqrt{10^3 \times 10^5} \qquad F = \sqrt{10^{-13} \times 10^{19}}$$

Vérifier qu'on trouve :

$$A = 20 \qquad B = 90\,000 \qquad C = 7\,000$$

$$D = 500 \qquad E = 10\,000 \qquad F = 1\,000$$

Exercice 24.

Soit la fonction $f(x) = x^4 - x^2 + x$. Calculer et réduire le plus possible les nombres :

$$f(0) \qquad f(\sqrt{5}) \qquad f(-\sqrt{5}) \qquad f(\sqrt{2}) \qquad f(-\sqrt{2})$$

Exercice 25 (résolu partiellement).

Faire **remonter la racine** au numérateur dans les expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad B = \frac{1}{4-\sqrt{7}} \qquad C = \frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} \qquad D = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

Vérifier qu'on trouve :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad B = \frac{4+\sqrt{7}}{9} \qquad C = \frac{-4-\sqrt{7}}{3} \qquad D = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Solution partielle : Le calcul de A se fait de la façon suivante : pour supprimer le $\sqrt{3}$ qui figure en bas, on multiplie haut et bas par $\sqrt{3}$. Il vient :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pour transformer B, on multiplie haut et bas par l'expression $\boxed{4+\sqrt{7}}$ obtenue en changeant le signe devant la racine, et qu'on appelle **expression conjuguée** de $\boxed{4-\sqrt{7}}$

$$B = \frac{1}{4-\sqrt{7}} = \frac{1 \times (4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7}) \times (4+\sqrt{7})} = \frac{4+\sqrt{7}}{16-7} = \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

Ce qui fait tout marcher pour B, c'est l'identité remarquable :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

et la formule :

$$(\sqrt{7})^2 = 7$$

Les transformations de C et D se font de façon semblable.

Exercice 26.

Faire remonter la racine au numérateur dans les expressions suivantes :

$$A = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad B = \frac{3}{4-\sqrt{7}} \qquad C = \frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} \qquad D = \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

Exercice 27.

On pose :

$$a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{7})$$

Calculer a^2. Montrer qu'on a :

$$8a^2 = 4a + 3$$

Exercice 28.

On pose :

$$a = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \qquad b = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

Vérifier qu'on a :

$$a^2 + b^2 = 1$$

Exercice 29.

On pose :

$$a = \sqrt{5} - 1$$

Calculer a^2. En déduire qu'on a :

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

Exercice 30.

La lettre grecque φ se prononce "phi". On considère le **nombre d'or** :

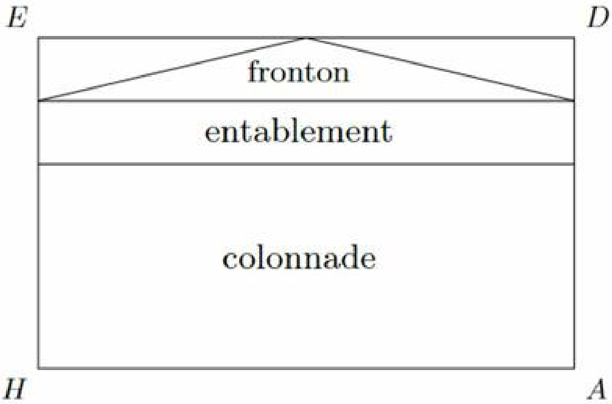
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ainsi désigné en hommage à **Phidias**. Ce nombre vaut environ 1,618. Il apparaît dans la nature : disposition des feuilles sur une branche, enroulement des écailles d'une pomme de pin, etc. Il est utilisé en architecture pour donner des **proportions harmonieuses** aux bâtiments, tels le **Parthénon** construit sur l'Acropole d'Athènes par **Phidias** (*voir* ex. 4 p. 89 du livre de 5[e]). Voici une photographie actuelle[1] :

Sa façade s'inscrit dans un rectangle $HADE$. On peut montrer (*voir* ex. 7.15, p. 229, du livre[a]) qu'on a :

$$\frac{HA}{AD} = \varphi$$

a. J.-L. Frot : *Mathématiques - Exercices et problèmes de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2[e] édition révisée*, Ellipses (2018).



1. Calculer φ^2. Vérifier qu'on a :

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

2. En déduire la relation :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

1. Site : polyxenia.net

3. En déduire ensuite :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}} \qquad \text{etc.}$$

4. Calculer sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a = 1 + \frac{1}{1} \qquad b = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} \qquad c = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} \qquad d = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$$

5. Vérifier qu'on trouve :

$$a = \frac{2}{1} \qquad b = \frac{3}{2} \qquad c = \frac{5}{3} \qquad d = \frac{8}{5}$$

et trouver un moyen simple de passer de a à b, de b à c, de c à d.

6. Si on continue de la même façon, que trouvera-t-on pour les nombres suivants ?
7. Placer les nombres φ, a, b, c, d sur l'axe réel (prendre une grande échelle).

6 Correction des exercices

Ex. 1, p. 39. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} \\
g(x) &= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} + \frac{2}{a^2-1} = \frac{a+1}{a^2-1} \\
h(x) &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1}{a^2-1} + \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{2a}{a^2-1}
\end{aligned}$$

Ex. 2, p. 39. 1. Les prix sont en euros. Dans l'abonnement A, outre le forfait, un voyage coûte 10. Donc x voyages coûtent $10x$. Le prix total de x voyages est donc :

$$A(x) = 40 + 10x$$

2. On raisonne de façon semblable et on trouve :

$$B(x) = 80 + 6x$$

3. On a alors

$$A(x) \leq B(x) \;\Leftrightarrow\; 40 + 10x \leq 80 + 6x \;\Leftrightarrow\; 10x - 6x \leq 80 - 40 \;\Leftrightarrow\; 4x \leq 40 \;\Leftrightarrow\; x \leq 10$$

4. On en déduit que si on fait peu de voyages (moins de 10), la formule A est plus économique que la formule B. Si on fait beaucoup de voyages (plus de 10), c'est la formule B qui est la plus économique des deux.

Ex. 3, p. 39. a/ Dans la première inéquation, on remarque que 30 est un multiple commun des dénominateurs 5 et 6, en fait leur ppcm. On réduit au dénominateur 30 les deux quotients et on multiplie ensuite des deux côtés par 30. On obtient :

$$\frac{4+x}{5} \leq \frac{29+x}{6} \Leftrightarrow \frac{6(4+x)}{30} \leq \frac{5(29+x)}{30} \Leftrightarrow 6(4+x) \leq 5(29+x)$$

et on continue :

$$6(4+x) \leq 5(29+x) \Leftrightarrow 6x+24 \leq 5x+145 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 121}$$

b/ Pour résoudre la deuxième inéquation $-x+11 \leq 3x+31$, on la retourne pour éviter le signe $-$ devant x, puis on résout par équivalences :

$$3x+31 \geq -x+11 \Leftrightarrow 3x+x \geq 11-31 \Leftrightarrow 4x \geq -20 \Leftrightarrow x \geq -\frac{20}{4} \Leftrightarrow \boxed{x \geq -5}$$

c/ La troisième :

$$2x-1 > x-2 \Leftrightarrow x > 1-2 \Leftrightarrow \boxed{x > -1}$$

d/ La quatrième :

$$13x+15 > 6x-6 \Leftrightarrow 13x-6x > -6-15 \Leftrightarrow 7x > -21 \Leftrightarrow x > -\frac{21}{7} \Leftrightarrow \boxed{x > -3}$$

e/ Pour la cinquième inéquation, on a les équivalences :

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3} \leq \frac{x}{6}+5 \Leftrightarrow \frac{3x}{6}-\frac{2x}{6} \leq \frac{x}{6}+5 \Leftrightarrow \frac{x}{6} \leq \frac{x}{6}+5 \Leftrightarrow \cancel{\frac{x}{6}} \leq \cancel{\frac{x}{6}}+5 \Leftrightarrow 0 \leq 5$$

Or cette inégalité est toujours vraie pour tout réel x (*voir* § 2, p. 33). Donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de cette inéquation est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$$

f/ Pour résoudre $\frac{x-3}{4}+1 \leq x+\frac{x+1}{2}$, on chasse les dénominateurs en multipliant par 4 des deux côtés. On obtient :

$$x-3+4 \leq 4x+2x+2 \Leftrightarrow x+1 \leq 6x+2 \Leftrightarrow x-6x \leq 2-1 \Leftrightarrow -5x \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{5}}$$

la dernière inégalité est changée de sens car on a divisé des deux côtés par -5 qui est négatif.

Ex. 4, p. 39. a/ On multiple par 3 les deux côtés la première équation pour chasser le dénominateur :

$$\frac{1+x}{3} \leq -5x+4 \Leftrightarrow 1+x \leq -15x+12 \Leftrightarrow 16x \leq 11 \Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{11}{16}}$$

b/ Pour la deuxième inéquation, on multiplie par 2 les deux côtés :

$$2(1-x) > \frac{-x}{2}+3 \Leftrightarrow 4(1-x) > -x+6 \Leftrightarrow 4-4x > -x+6 \Leftrightarrow -3x > 2 \Leftrightarrow \boxed{x < -\frac{2}{3}}$$

La dernière inégalité est changée de sens car on a divisé des deux côtés par -3 qui est négatif.

c/ Pour la troisième, on multiple par 2 les deux côtés :

$$2x - \frac{1}{2} > x + 2 \Leftrightarrow 4x - 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{5}{2}}$$

d/ La quatrième se résout directement :

$$-3x + 15 > x - 6 \Leftrightarrow -4x > -21 \Leftrightarrow \boxed{x < \frac{21}{4}}$$

La dernière inégalité est changée de sens car on a divisé des deux côtés par -4 qui est négatif.
e/ Pour la cinquième, on multiple par 6 les deux côtés pour chasser les dénominateurs :

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3} \leq 2x+5 \Leftrightarrow 6\times\frac{x}{2}+6\times\frac{x}{3} \leq 12x+30 \Leftrightarrow 5x \leq 12x+30 \Leftrightarrow -7x \leq 30 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -\frac{30}{7}}$$

La dernière inégalité est changée de sens car on a divisé des deux côtés par -7 qui est négatif.
f/ Pour la dernière, on multiple par 3 les deux côtés pour chasser les dénominateurs :

$$\frac{x-3}{3}+1 \leq x+\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow x-3+3 \leq 3x+x+1 \Leftrightarrow x \leq 4x+1 \Leftrightarrow -3x \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{3}}$$

La dernière inégalité est changée de sens car on a divisé des deux côtés par -3 qui est négatif.

Ex. 5, p. 39. a/ Dans la première inéquation, on regroupe d'abord les x :

$$\frac{2}{x} - 3 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 3 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{1}{3}}$$

À la dernière étape, on a pris les inverses, ce qui renverse l'ordre, par la prop. 5, p. 34.
b/ Pour la deuxième inéquation, on regroupe d'abord les x :

$$\frac{5}{x+1} - 3 < \frac{2}{x+1} - 2 \Leftrightarrow \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x+1} < 3 - 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} < 1$$

On prend alors les inverses, ce qui renverse l'ordre :

$$\frac{3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} > 1 \Leftrightarrow x + 1 > 3 \Leftrightarrow \boxed{x > -2}$$

c/ Pour la troisième, on retourne l'inégalité pour n'avoir que des positifs :

$$\frac{2}{x} + 5 > \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{x} < \frac{2}{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 5 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{1}{5}}$$

d/ Dans la quatrième on fait passer $-\frac{2}{3}$ à droite :

$$-\frac{2}{3} - x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -x < \frac{1}{3} + -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow \boxed{x > -1}$$

La dernière inégalité est changée de sens car on a multiplié des deux côtés par -1 qui est négatif.

e/ Pour la cinquième, on multiple par $x+1$ des deux côtés. Comme $x+1>0$ le sens ne change pas :

$$\frac{5}{x+1}<\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow 5<2$$

Or cette inégalité est fausse. Donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de cette cinquième équation est vide :

$$\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$$

f/ Pour la dernière, on multiple par 3 les deux côtés pour chasser les dénominateurs :

$$\frac{2}{3}+5x>\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2+15x>5 \Leftrightarrow 15x>3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{15} \Leftrightarrow \boxed{x>\frac{1}{5}}$$

Ex. 6, p. 39. On multiplie des deux côtés par a. Le sens ne change pas car $a>0$:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

et ceci est toujours vrai, car le carré d'un nombre réel est toujours ≥ 0.

Ex. 7, p. 40. 1. On connaît la relation :

$$\boxed{d=v\times t}$$

(*voir* ex. 16, p. 166) qui donne la distance d parcourue par un mobile pendant un temps t, lorsqu'il est animé d'une vitesse constante v. On déduit :

$$t=\frac{d}{v}$$

Donc le temps t_1 mis pour parcourir les 50 premiers km est :

$$t_1=\frac{50}{3}$$

et le temps t_2 mis pour parcourir les 50 derniers km est :

$$t_2=\frac{50}{v}$$

La durée totale du parcours est donc :

$$t=t_1+t_2=\frac{50}{3}+\frac{50}{v}=50\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{v}\right)$$

La vitesse moyenne m cherchée est la vitesse **constante** qui donne la même durée t_1+t_2 pour parcourir 100 km. On a donc :

$$m=\frac{100}{t_1+t_2}=100\times\frac{1}{t_1+t_2}=100\times\frac{1}{50\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{v}\right)}=\frac{100}{50}\times\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{v}}=\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{v}}$$

c'est bien ce qui était annoncé.
3. On sait que le temps total du parcours en heures est :

$$t=\frac{50}{3}+\frac{50}{v}>\frac{50}{3}$$

ce que l'on convertit de la façon suivante, en heures et minutes :

$$\frac{50}{3}=\frac{48+2}{3}=\frac{48}{3}+\frac{2}{3}=16\text{ h}+\frac{2}{3}\text{ h}$$

Or $\dfrac{2}{3}$ h $= \dfrac{2}{3} \times 60$ min $= 2 \times \dfrac{60}{3}$ min $= 40$ min. Finalement le temps total du parcours est au minimum de 16 heures et 40 minutes. L'automobiliste ne sera donc pas arrivé avant 16 h 40 en B.
4/ À la question 2., il a été montré que le moyenne m des deux vitesses 3 et v est < 6, quelle que soit la vitesse v. Cette valeur 6 km/h correspond à $t_2 = 0$. En effet :

$$t_2 \Rightarrow m = \frac{100}{t_1 + 0} = 100 \times \frac{1}{t_1} = 100 \times \frac{3}{50} = 6$$

$t_2 = 0$ signifie que les 50 derniers km ont été parcourus avec une vitesse infinie. On ne peut donc aller plus vite ! Et malgré cela, la moyenne des vitesses est faible : 6 km/h au maximum. Ceci montre bien que, quelque soit la rapidité de la deuxième partie du trajet, on ne peut pas rattraper la lenteur (3 km/h) de la première partie : le temps qu'on a **perdu** dans cette première partie (embouteillages, bouchons, ou autres) ne peut pas se **rattraper**.

Ex. 8, p. 40. 1. Voici le schéma du TGV :

M V V V V V M M V V V V V M

2. La longueur du TGV en mètres est donc :

$$4 \times 19 + 10 \times 18{,}3 = 76 + 183 = 259$$

3. Entre le moment où l'avant du TGV est passé devant moi, et le moment où l'arrière du TGV est passé devant moi, il s'est écoulé 2,5 secondes. Autrement dit, l'arrière du TGV a parcouru 259 m en 2,5 secondes. La vitesse v en m par seconde de l'arrière du TGV, ou du TGV lui-même, est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{259}{2{,}5} = 103{,}6$$

Exprimons v par une vitesse v' en km/h. Notons d' la distance en km et t' le temps en h. On a :

$$d' = 0{,}259 \qquad t' = \frac{2{,}5}{3600}$$

On en déduit :

$$v' = \frac{0{,}259}{\dfrac{2{,}5}{3600}} = \frac{0{,}259 \times 3600}{2{,}5} \simeq 373$$

Ex. 9, p. 41. 1. Si b est un diviseur de n, il existe un entier q tel que $n = bq$. Donc q divise n, c'est-à-dire $\dfrac{n}{b}$ divise n. De plus :

$$b \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{b} \leq \sqrt{n}$$

Pour la deuxième équivalence, on a multiplié par n des deux côtés, et utilisé la relation :

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

2. On raisonne **par l'absurde**. On fait l'**hypothèse** qu'aucun nombre premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ ne divise n. Supposons que cependant, n **ne soit pas premier**. On va montrer que cette supposition conduit à une **contradiction**.

Par le th. d'Euclide (th. 1, p. 41), n admet au moins un diviseur premier b qui est $< n$ sinon, n serait premier. Il existe donc un entier $q > 1$ tel que $n = bq$. Donc q divise n, et $q = \frac{n}{b}$. De plus, d'après l'hypothèse, $b > \sqrt{n}$. Par la question 1, on a donc $q \leq \sqrt{n}$. Par le th. d'Euclide, q admet au moins un diviseur premier r. On a donc $r \leq \sqrt{n}$ et r divise q qui divise n, donc r divise n. Ceci contredit l'hypothèse, la supposition que n n'est pas premier est donc absurde.

3. Puisque $\sqrt{337} = 18{,}35...$, pour montrer que 337 est premier, il suffit de montrer qu'il n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Les critères de divisibilité classiques montrent que 337 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Il ne reste donc qu'a voir que les divisions de 337 par 7, 11, 13, 17 ne tombent pas juste, ce qui peut se faire à la calculette.

Ex. 10, p. 41. 1. On met donc en évidence des **carrés parfaits** dans chaque racine, et on utilise ensuite la propriété : la **racine d'un produit** est le produit des racines :

$$\begin{aligned} \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} &= 5\sqrt{2} \\ \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} &= 4\sqrt{3} \\ \sqrt{1000} = \sqrt{100 \times 10} = \sqrt{100} \times \sqrt{10} &= 10\sqrt{10} \end{aligned}$$

2. On utilise donc la propriété : la **racine d'un quotient** est le quotient des racines :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} &= \frac{\sqrt{2}}{5} \\ \sqrt{\frac{10}{72}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} &= \frac{\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

Ex. 11, p. 42. Il y a des **carrés parfaits** dans toutes les racines :

$$\begin{aligned} A = \sqrt{36} + \sqrt{100} = 6 + 10 &= 16 \\ B = \sqrt{25} - \sqrt{100} = 5 - 10 &= -5 \\ C = \sqrt{81} + \sqrt{36} &= 9 + 6 = 15 \\ D = \sqrt{64} - 3\sqrt{4} - \sqrt{16} = 8 - 3 \times 2 - 4 = 4 - 6 &= -2 \\ E = 5\sqrt{49} - \sqrt{49} = 4\sqrt{49} = 4 \times 7 &= 28 \\ F = \sqrt{100} + \sqrt{10\,000} = 10 - 100 &= -90 \end{aligned}$$

Ex. 12, p. 42. 1 et 2. On utilise les identités remarquables (prop. 3, p. 15) :

$$\begin{aligned} A &= (1 + \sqrt{3})^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46 \\ B &= (1 + \sqrt{7}) \times (1 - \sqrt{7}) = 1^2 - \sqrt{7}^2 = 1 - 7 = -6 \\ C &= (5 - \sqrt{3})^2 = 5^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 28 - 10\sqrt{3} \approx 10{,}68 \end{aligned}$$

Ex. 13, p. 42. On utilise les formules du cours p. 36, en particulier la formule :

$$\sqrt{a^2} = a$$

valable pour tout réel positif a :

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{3^2 \times 81} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{81} = 3 \times 9 = 27 \\
B &= \sqrt{49 \times 5^2} = \sqrt{49} \times \sqrt{5^2} = 7 \times 5 = 35 \\
C &= \sqrt{400} = 20 \\
D &= \sqrt{3^2 \times 5^4} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^4} = 3 \times 5 = 15 \\
E &= \sqrt{10^2} = 10 \\
F &= \sqrt{7^2 \times 2^2} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{2^2} = 7 \times 2 = 14
\end{aligned}$$

Ex. 14, p. 42. 1. et 2. Puisque $f(x) = 3x^2 + x - 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(0) &= 3 \times 0^2 + 0 - 1 = -1 \\
f(1) &= 3 \times 1^2 + 1 - 1 = 3 \\
f(\sqrt{5}) &= 3 \times \sqrt{5}^2 + \sqrt{5} - 1 = 15 + \sqrt{5} - 1 = 14 + \sqrt{5} \approx 16{,}24 \\
f(\sqrt{2}) &= 3 \times \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - 1 = 6 + \sqrt{2} - 1 = 5 + \sqrt{2} \approx 6{,}41 \\
f(-\sqrt{2}) &= 3 \times (-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 1 = 6 - \sqrt{2} - 1 = 5 - \sqrt{2} \approx 3{,}59
\end{aligned}$$

Pour $f(-\sqrt{2})$ on a utilisé $(-\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}^2 = 2$.

Ex. 15, p. 42. On a les équivalences :

$$2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4x - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow 4x = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$x - 3\sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{7}$$

$$x\sqrt{7} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{7}}$$

Ex. 16, p. 42. La règle d'annulation (th. 5, p. 27) permet d'écrire :

$$(2x + \sqrt{3})(-x + 7) = 0 \;\Leftrightarrow\; (2x + \sqrt{3} = 0 \;\text{ ou }\; -x + 7 = 0) \;\Leftrightarrow\; \left(x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\text{ ou }\; x = 7\right)$$

L'équation a donc deux solutions. Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions, on a :

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 7\right\}$$

Pour la **deuxième** équation, on a de même :

$$(-2x + 3)(4x + \sqrt{7}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (-2x + 3 = 0 \;\text{ ou }\; 4x + \sqrt{7} = 0) \;\Leftrightarrow\; \left(x = \frac{3}{2} \;\text{ ou }\; x = -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

L'équation a donc deux solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{4} \right\}$$

Pour la **troisième** équation, on applique la règle $\boxed{a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0}$ On en déduit :

$$(x - 3\sqrt{7})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 3\sqrt{7} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3\sqrt{7}$$

La troisième équation a donc une seule solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ 3\sqrt{7} \right\}$$

Passons à la **quatrième** équation

$$x\sqrt{7}(2x - 5) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x\sqrt{7} = 0 \;\text{ ou }\; 2x - 5 = 0) \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \;\text{ ou }\; x = \frac{5}{2})$$

Cette équation a donc deux solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$$

Passons à la **cinquième** équation

$$(x^2 + 3)(4x + \sqrt{7}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 + 3 = 0 \;\text{ ou }\; 4x + \sqrt{7} = 0) \;\Leftrightarrow\; (x^2 = -3 \;\text{ ou }\; x = -\frac{\sqrt{7}}{4})$$

Mais $x^2 = -3$ est impossible car un carré est toujours ≥ 0. Donc la cinquième équation n'a qu'une seule solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{\sqrt{7}}{4} \right\}$$

Passons à la **dernière équation**, on raisonne comme pour la troisième :

$$(x\sqrt{7} - 3\sqrt{7})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{7}(x - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$$

La dernière équation n'a donc qu'une solution :

$$\mathscr{S} = \{3\}$$

Ex. 17, p. 43. On applique la méthode indiquée dans la solution partielle : pour réduire l'expression $B = \sqrt{5} + \sqrt{20}$, on fait apparaître 5 dans la seconde racine :

$$B \;=\; \sqrt{5} + \sqrt{5 \times 4} \;=\; \sqrt{5} + \sqrt{5} \times \sqrt{4} \;=\; \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 2 \;=\; 3\sqrt{5}$$

Pour réduire $E = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{48}$, on fait apparaître 3 dans la seconde racine :

$$E \;=\; 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3 \times 16} \;=\; 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{16} \;=\; 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 4 \;=\; 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \;=\; 0$$

Pour réduire $F = \sqrt{10} + \sqrt{1000}$, on fait apparaître 10 dans la seconde racine :

$$F \;=\; \sqrt{10} + \sqrt{10 \times 100} \;=\; \sqrt{10} + \sqrt{10} \times \sqrt{100} \;=\; \sqrt{10} + \sqrt{10} \times 10 \;=\; 11\sqrt{10}$$

Ex. 18, p. 43. On remarque que 36 et 100 sont des carrés parfaits. On a donc :

$$A = \sqrt{36} - \sqrt{100} = 6 - 10 = -4$$

On a ensuite :

$$B = \sqrt{5} + \sqrt{80} = \sqrt{5} + \sqrt{5 \times 16} = \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 4 = 5\sqrt{5}$$

$$C = \sqrt{28} + \sqrt{63} = \sqrt{4 \times 7} + \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} + \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned} D = \sqrt{72} - 3\sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{2 \times 36} - 3\sqrt{2} - \sqrt{2 \times 4} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{36} - 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{4} \\ &= \sqrt{2} \times 6 - 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$E = 5\sqrt{3} + \sqrt{48} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3 \times 16} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{16} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} \times 4 = 9\sqrt{3}$$

On remarque que $100 = 10^2$ et $10\,000 = 100^2$. On en déduit donc :

$$F = \sqrt{100} + \sqrt{10\,000} = 10 + 100 = 110$$

Ex. 19, p. 43. On rapplique la règle : "racine d'un produit=produit des racines" :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3^2 \times 11} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11} \\ B &= \sqrt{7 \times 5^4} = \sqrt{7}\sqrt{5^4} = \sqrt{7} \times 5^2 = 25\sqrt{7} \\ C &= \sqrt{2 \times 10^6} = \sqrt{2}\sqrt{10^6} = \sqrt{2} \times 10^3 = 1000\sqrt{2} \\ D &= \sqrt{3^2 \times 5^4} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^4} = 3 \times 5^2 = 75 \\ E &= \sqrt{5^3 \times 2^3} = \sqrt{5 \times 5^2 \times 2 \times 2^2} = 5 \times 2 \times \sqrt{5 \times 2} = 10\sqrt{10} \\ F &= \sqrt{2^{-3} \times 2^5} = \sqrt{2^{-3+5}} = \sqrt{2^2} = 2 \end{aligned}$$

Ex. 20, p. 43. On rapplique la règle : "racine d'un produit=produit des racines" :

$$A = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5 \times 100} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5} \times \sqrt{100} + 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$$

$$B = 3\sqrt{5} - \sqrt{45} = 3\sqrt{5} - \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 0$$

$$\begin{aligned} C = \sqrt{98} - \sqrt{32} &= \sqrt{2 \times 49} - \sqrt{2 \times 16} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{49} - \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} &= \sqrt{5 \times 9} - \sqrt{5 \times 16} + \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \times \sqrt{9} - \sqrt{5} \times \sqrt{16} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = \sqrt{150} - \sqrt{100} + \sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 6} - 10 + \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{25} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 10 = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 10 \end{aligned}$$

$$F = \sqrt{10} + \sqrt{1000} = \sqrt{10} + \sqrt{10 \times 100}$$
$$= \sqrt{10} + \sqrt{10} \times \sqrt{100} = \sqrt{10} + 10\sqrt{10} = 11\sqrt{10}$$

Ex. 21, p. 44. On permute les dénominateurs :

$$B = \sqrt{\frac{30}{7}} \times \sqrt{\frac{21}{40}} = \sqrt{\frac{30}{40}} \times \sqrt{\frac{21}{7}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \times 3}{4}} = \frac{\sqrt{3 \times 3}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$C = \sqrt{\frac{15}{14}} \times \sqrt{\frac{35}{6}} = \sqrt{\frac{15}{6}} \times \sqrt{\frac{35}{15}} = \sqrt{\frac{15 \times 35}{6 \times 15}} = \sqrt{\frac{\cancel{15} \times 35}{6 \times \cancel{15}}} = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

On regroupe en une seule racine :

$$D = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2 \times 6}{3}} = \sqrt{2 \times 2} = 2$$

On transforme séparément chaque racine :

$$E = \sqrt{\frac{24}{12}} - \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$F = \sqrt{32} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 16} - \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{16} - \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

On peut aussi faire :

$$F = \sqrt{32} - \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 8} - \sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{8} - \sqrt{8} = 2\sqrt{8} - \sqrt{8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ex. 22, p. 44. On permute les dénominateurs :

$$A = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{4b}{a^3}} = \sqrt{\frac{a}{a^3}} \times \sqrt{\frac{4b}{b}} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} \times \sqrt{4} = \frac{1}{a} \times 2 = \frac{2}{a}$$

$$B = \sqrt{\frac{3a}{b}} \times \sqrt{\frac{b^3}{4a}} = \sqrt{\frac{3a}{4a}} \times \sqrt{\frac{b^3}{b}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{b} = \frac{\sqrt{3b}}{2}$$

On regroupe en une seule racine :

$$C = \sqrt{\frac{4b}{3a}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{4b^2}{3a^2}} = \frac{2b}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{b}{a}$$

$$D = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2 b}{b}} = \sqrt{\frac{a^2 \cancel{b}}{\cancel{b}}} = \sqrt{a^2} = a$$

$$E = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ab}{ba}} = \sqrt{1} = 1$$

Calcul immédiat :

$$F = \sqrt{4a} - \sqrt{a} = 2\sqrt{a} - \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

Ex. 23, p. 44. On a :

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{4\times 10^2}=\sqrt{4}\sqrt{10^2}=2\times 10=20\\
B &= \sqrt{81\times 10^8}=\sqrt{81}\sqrt{10^8}=9\times 10^4=90\,000\\
C &= \sqrt{49\times 10^6}=\sqrt{49}\sqrt{10^6}=7\times 10^3=7\,000\\
D &= \sqrt{25\times 10^4}=\sqrt{25}\times\sqrt{10^4}=5\times 10^2=500\\
E &= \sqrt{10^3\times 10^5}=\sqrt{10^8}=10^4=10\,000\\
F &= \sqrt{10^{-13}\times 10^{19}}=\sqrt{10^{-13+19}}=\sqrt{10^6}=10^3=1000
\end{aligned}$$

Ex. 24, p. 44. Puisque $f(x)=x^4-x^2+x$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0^4-0^2+0=0\\
f(\sqrt{5}) &= \sqrt{5}^4-\sqrt{5}^2+\sqrt{5}=((\sqrt{5})^2)^2-5+\sqrt{5}=5^2-5+\sqrt{5}=20+\sqrt{5}\\
f(-\sqrt{5}) &= (-\sqrt{5})^4-(-\sqrt{5})^2-\sqrt{5}=\sqrt{5}^4-\sqrt{5}^2-\sqrt{5}=5^2-5-\sqrt{5}=20-\sqrt{5}\\
f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}=((\sqrt{2})^2)^2-2+\sqrt{2}=2^2-2+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}\\
f(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^4-(-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}=\sqrt{2}^4-\sqrt{2}^2-\sqrt{2}=2^2-2-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Pour calculer $f(-\sqrt{2})$ et $f(-\sqrt{5})$ on a utilisé les formules, valables pour tout $a\geq 0$:

$$\begin{aligned}
(-\sqrt{a})^2 &= \sqrt{a}^2=a\\
(-\sqrt{a})^4 &= \sqrt{a}^4=\sqrt{a^4}=a^2
\end{aligned}$$

Ex. 25, p. 45. Pour transformer C, on multiplie haut et bas par l'expression $\boxed{1+\sqrt{7}}$ qui est l'**expression conjuguée** du dénominateur $\boxed{1-\sqrt{7}}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
C=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}=\frac{(1+\sqrt{7})\times(1+\sqrt{7})}{(1-\sqrt{7})\times(1+\sqrt{7})}&=\frac{(1+\sqrt{7})^2}{1-7}\\
&=\frac{1+7+2\sqrt{7}}{-6}=\frac{-8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{-4-\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}$$

Pour transformer D, on multiplie haut et bas par $\sqrt{3}$. On obtient :

$$D=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

Ex. 26, p. 45. Pour transformer A, on multiplie haut et bas par $\sqrt{2}$:

$$A=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Pour transformer B, on multiplie haut et bas par $4+\sqrt{7}$ qui est l'expression conjuguée du dénominateur $4-\sqrt{7}$. On obtient :

$$B=\frac{3}{4-\sqrt{7}}=\frac{3\times(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})\times(4+\sqrt{7})}=\frac{3\times(4+\sqrt{7})}{16-7}=\frac{3\times(4+\sqrt{7})}{9}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

Pour transformer C et D, on procède encore en multipliant haut et bas par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$C = \frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} = \frac{(1-\sqrt{7})\times(1-\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})\times(1-\sqrt{7})} = \frac{(1-\sqrt{7})^2}{1-7}$$
$$= \frac{1+7-2\sqrt{7}}{-6} = \frac{-8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4+\sqrt{7}}{3}$$

$$D = \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})\times(2+\sqrt{5})} = \frac{(2+\sqrt{5})^2}{4-5} = \frac{4+5+4\sqrt{5}}{-1} = -9-4\sqrt{5}$$

Ex. 27, p. 45. On calcule d'abord a^2 :

$$a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{7}) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{16}(1+\sqrt{7})^2 = \frac{1}{16}(1+7+2\sqrt{7}) = \frac{1}{16}(8+2\sqrt{7}) = \frac{1}{8}(4+\sqrt{7})$$

On en déduit :

$$8a^2 = 4+\sqrt{7}$$

D'autre part :

$$4a+3 = 4\times\frac{1}{4}(1+\sqrt{7})+3 = 1+\sqrt{7}+3 = 4+\sqrt{7}$$

On a donc montré que $8a^2 = 4a+3$.

cqfd

Ex. 28, p. 45. On calcule a^2 et b^2 :

$$a = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16}(6+2-2\sqrt{6}\sqrt{2}) = \frac{1}{16}(8-2\sqrt{6}\sqrt{2}) = \frac{1}{8}(4-\sqrt{6}\sqrt{2})$$

$$b = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16}(6+2+2\sqrt{6}\sqrt{2}) = \frac{1}{16}(8+2\sqrt{6}\sqrt{2}) = \frac{1}{8}(4+\sqrt{6}\sqrt{2})$$

On en déduit :

$$a^2+b^2 = \frac{1}{8}(4-\sqrt{6}\sqrt{2})+\frac{1}{8}(4+\sqrt{6}\sqrt{2}) = \frac{1}{8}(4-\cancel{\sqrt{6}\sqrt{2}})+\frac{1}{8}(4+\cancel{\sqrt{6}\sqrt{2}}) = \frac{4}{8}+\frac{4}{8} = 1$$

Ex. 29, p. 46. On calcule a^2 :

$$a = \sqrt{5}-1 \Rightarrow a^2 = 5+1-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$$

Comme on sait que $\sqrt{5}\approx 2{,}2$, on voit que $\sqrt{5}\geq 1$ donc $a\geq 0$. Alors, la définition 1, p. 35 s'applique :

$$a\geq 0 \text{ et } a^2 = 6-2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

Ex. 30, p. 46. 1. On calcule φ^2 :

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \Rightarrow \varphi^2 &= \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})^2\\ &= \frac{1}{4}(1+5+2\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(6+2\sqrt{5})\\ &= \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(1+2+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{2}{2} = \varphi + 1\end{aligned}$$

2. On part de la relation :

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

On la divise par φ des deux côtés, et on obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\boxed{\varphi}} \tag{1}$$

3. On reporte l'expression (1) de φ que l'on vient d'obtenir, **dans l'expression elle-même** à la place de $\boxed{\varphi}$. Il vient :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\boxed{\varphi}}}$$

et on peut continuer :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\boxed{\varphi}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\boxed{\varphi}}}}} \qquad \text{etc.}$$

4. On calcule a puis b à partir de a :

$$a = 1 + \frac{1}{1} = 2 \qquad b = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

puis on calcule c à partir de b :

$$c = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{b} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

et d à partir de c :

$$d = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{c} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

5. On examine les nombres :

$$a = \frac{2}{1} \qquad b = \frac{3}{2} \qquad c = \frac{5}{3} \qquad d = \frac{8}{5}$$

et on voit qu'on peut écrire :

$$a = \frac{2}{1} \qquad b = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{3} \qquad c = \frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} \qquad d = \frac{8}{5} = \frac{5+3}{5}$$

c'est-à-dire qu'on passe d'un quotient $\frac{u}{v}$ au quotient suivant $\frac{u+v}{u}$. Ainsi :

$$\frac{u}{v} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{u+v}{u} = \frac{8+5}{8} = \frac{13}{8}$$

6. Si on continue, on trouvera pour les suivants :

$$\frac{8}{5} \to \frac{8+5}{8} = \frac{13}{8} \to \frac{13+8}{13} = \frac{21}{13} \to \frac{34}{21} \to \frac{55}{34} \to \frac{89}{55} \to \frac{144}{89} \qquad \text{etc.}$$

7. Voici la figure :

On voit que les réels successifs :

$$2 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{8}{5} \qquad \frac{13}{8} \qquad \frac{21}{13}$$

sont alternativement à droite ou à gauche de φ et s'en rapprochent. Par exemple :

$$\frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad \frac{21}{13} = 1{,}615... \qquad \varphi = 1{,}61803.... \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad \frac{5}{3} = 1{,}66...$$

Chapitre 3

Géométrie plane

L'essentiel de la géométrie pratiquée au collège a été exposé pour la première fois par Euclide dans ses *Éléments*, aux environs de 300 avant Jésus-Christ.

En géométrie, on utilise parfois, pour nommer les angles, les premières lettres de l'**alphabet grec** : $\boxed{\alpha}$ se prononce "alpha", $\boxed{\beta}$ se prononce "béta", $\boxed{\gamma}$ se prononce "gamma". Pour certains points, comme les centres de cercles, on utilise aussi la lettre grecque $\boxed{\omega}$ qui se lit "petit oméga" et la lettre $\boxed{\Omega}$ qui se lit "grand oméga".

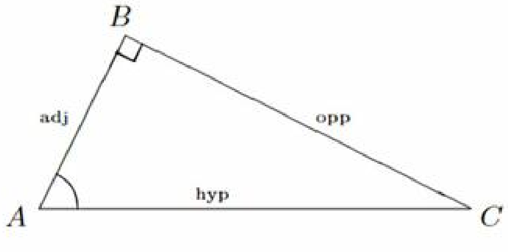
1 Cosinus, sinus, tangente

Définition 1. *Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose :*

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$



Dans ce cours, nous écrivons traditionnellement $\operatorname{tg} A$ alors que certains écrivent $\tan A$.

Proposition 2. *Si deux angles **aigus** ont même cosinus ou même sinus ou même tangente alors ils sont égaux.*

Proposition 3. (relation fondamentale de la trigonométrie) *Si α est aigu, on a :*

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Proposition 4. (angles complémentaires) *Soit α un angle aigu. On a :*

$$\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha \qquad \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

Proposition 5. (tableau des valeurs usuelles) *On a les valeurs usuelles suivantes :*

α	0	30	45	60	90
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

On a vu en classe de 4ᵉ, que la touche $\boxed{\text{cos}}$ d'une calculette donne **le cosinus** d'un angle, tandis que la touche $\boxed{\text{acos}}$ donne **l'angle** dont on connaît le cosinus.
Si par exemple, on a :

$$\cos\alpha = 0{,}2$$

pour trouver la valeur de α, on tape la touche $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette :

$$\alpha = \text{acos}(0{,}2) = 78°4630...$$

et on peut vérifier que cette valeur est correcte en prenant son cosinus :

$$\cos\alpha = \cos(78{,}4630...) = 0{,}2$$

On dit que la touche $\boxed{\text{cos}}$ est **directe** et que la $\boxed{\text{acos}}$ est sa **réciproque**.

Noter que sur certaines calculettes, la touche $\boxed{\text{acos}}$ est nommée $\boxed{\text{arccos}}$ ou $\boxed{\cos^{-1}}$

Dans le cas du sinus et de la tangente, on a aussi les touches directes et réciproques. Donc la touche $\boxed{\text{asin}}$ donne **l'angle** dont on connaît le sinus, et la touche $\boxed{\text{atan}}$ donne **l'angle** dont on connaît la tangente. Un exemple concret se trouve dans ex. 7, p. 67.

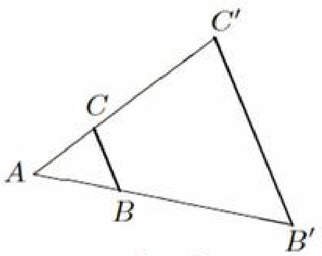
	touche directe	touche réciproque
cosinus	$\boxed{\text{cos}}$	$\boxed{\text{acos}}$
sinus	$\boxed{\text{sin}}$	$\boxed{\text{asin}}$
tangente	$\boxed{\text{tan}}$	$\boxed{\text{atan}}$

2 Réduction et agrandissement

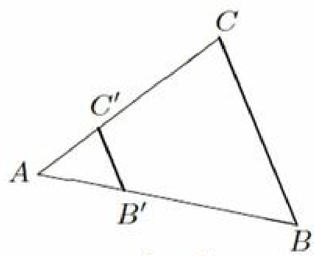
Définition 6. *Soit ABC un triangle. Sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, on considère des points B' et C', tels que $B' \neq B$ et $(BC) \parallel (B'C')$. On pose :*

$$k = \frac{AB'}{AB}$$

*Si $k > 1$, on dit que $AB'C'$ est un **agrandissement** de ABC dans le rapport k. Si $k < 1$, on dit que $AB'C'$ est une **réduction** de ABC dans le rapport k.*



$k > 1$



$k < 1$

L'énoncé suivant résulte du **théorème de Thalès**, *voir* th. 4, p. 17 :

Proposition 7. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$AB' = kAB \qquad AC' = kAC \qquad B'C' = kBC$$

Corollaire 8. *Dans ces conditions, on a :*

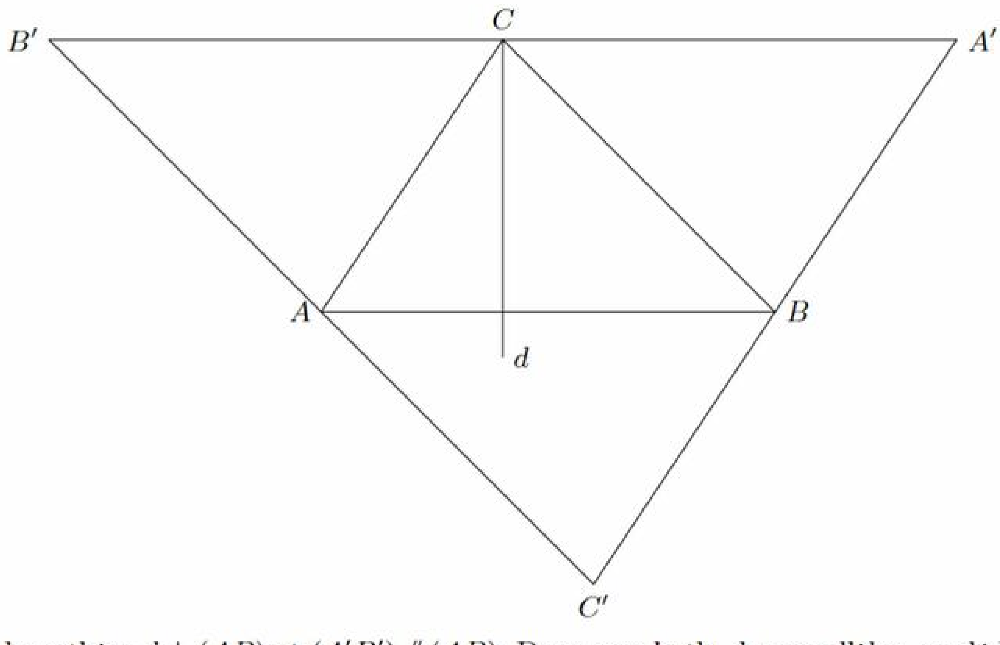
$$\begin{aligned} \text{périmètre}\, AB'C' &= k \times \text{périmètre}\, ABC \\ \text{aire}\, AB'C' &= k^2 \times \text{aire}\, ABC \end{aligned}$$

3 Orthocentre

Proposition 9. *Dans un triangle, les trois hauteurs sont* ***concourantes****.*

Définition 10. *L'intersection des trois hauteurs est appelé* ***orthocentre*** *du triangle.*

Démonstration : Notons ABC le triangle. Soit d la hauteur de ABC relative à C. Considérons la droite issue de A, et parallèle à (BC), la droite issue de B, et parallèle à (CA), la droite issue de C, et parallèle à (AB). Ces droites se coupent en A', B', C', comme marqué sur la figure :



Par hypothèse $d \perp (AB)$ et $(A'B') \parallel (AB)$. Donc, par le th. des parallèles, on déduit :

$$d \perp (A'B')$$

Par ailleurs, le quadrilatère $ABA'C$ est un parallélogramme. Donc :

$$CA' = AB$$

De même, $ABCB'$ est un parallélogramme. Donc :

$$CB' = BA$$

On en déduit que $CA' = CB'$, et donc C est milieu de $[A'B']$. La droite d est perpendiculaire à $[A'B']$ et passe par son milieu, c'est donc la médiatrice de $[A'B']$.

On a donc montré qu'une hauteur du triangle ABC est médiatrice d'un côté du triangle $A'B'C'$. On démontrerait que c'est vrai aussi pour les deux autres hauteurs.

Donc, les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$. Or on sait que **les médiatrices** de $A'B'C'$ sont **concourantes**, donc les hauteurs de ABC sont **concourantes**.

4 Exercices

Pour réviser le cours de 4e

Exercice 1.

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit H le pied de la hauteur relative à C.

1. Faire une figure avec $[AB]$ horizontal. Tracer le triangle ABC et la hauteur (CH).
2. En calculant de deux façons différentes, montrer qu'on a :

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

3. En déduire qu'on a la formule :

$$\boxed{AC^2 = AH \times AB} \tag{1}$$

Exercice 2.

On reprend les données de l'exercice précédent (ex. 1, p. 64). Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit H le pied de la hauteur relative à C.

1. Faire une figure avec $[AB]$ horizontal. Tracer le triangle ABC et la hauteur (CH).

On élève au carré l'égalité $AH + HB = AB$, et on obtient la relation :

$$AH^2 + HB^2 + 2AH \times HB = AB^2$$

2. Dans cette relation, remplacer chaque carré AH^2, HB^2, AB^2 par son expression donnée par **théorème de Pythagore** (*voir* th. 6, p. 18) appliqué dans l'un des triangles rectangles AHC, HBC, ABC.
3. Vérifier qu'on obtient après simplification :

$$\boxed{CH^2 = AH \times HB}$$

4. Remplacer dans cette formule CH^2 par son expression donnée par le th. de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle AHC. Vérifier qu'on obtient :

$$AC^2 - AH^2 = AH \times HB$$

5. Isoler AC^2 dans cette formule, mettre AH en facteur. Vérifier qu'on obtient :

$$\boxed{AC^2 = AH \times AB}$$

C'est la formule (1), démontrée dans l'exercice précédent (ex. 1, p. 64) par un tout autre moyen.

Exercice 3.

Soit ACB' un triangle, et soit $B \in [AC]$ un point distinct de A et C.
- La parallèle à (BB') issue de C coupe (AB') en C'.
- La parallèle à $(B'C)$ issue de C' coupe (AC) en D.
- La parallèle à (CC') issue de D coupe (AB') en D'.
- La parallèle à $(C'D)$ issue de D' coupe (AC) en E.

1. Tracer le triangle ACB' pas trop grand. Placer B plus près de A que de C. Compléter la figure.
2. Montrer, par le **théorème de Thalès** (*voir* th. 4, p. 17) qu'on a :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$
3. Montrer qu'on a de même :
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB'}{AC'}$$
4. En déduire :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \tag{1}$$
5. Calculer de même les quotients $\dfrac{AC}{AD}$ et $\dfrac{AD}{AE}$ et en déduire :
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \tag{2}$$
6. Déduire des relations (1) et (2) qu'on a :
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$
7. On suppose $AB = 1$. Montrer que, si on note $AC = x$, on a alors :
$$AD = x^2 \qquad\qquad AE = x^3$$

Exercice 4.

(unité au choix) Soit ABC un triangle tel que :
$$AB = 3 \qquad\qquad BC = 4 \qquad\qquad CA = 5$$

1. Tracer ABC avec $[CA]$ horizontal. Démontrer que ABC est rectangle en B.
2. Soit $J \in [CA]$ tel que $CJ = 3$. La parallèle à (AB) issue de J coupe (BC) en I. La parallèle à (CA) issue de I coupe (AB) en K. Compléter la figure.
3. a/ Montrer qu'on a :
$$\frac{BI}{BC} = \frac{2}{5}$$
b/ En déduire que le triangle KBI est une **réduction** de ABC dans le rapport $\dfrac{2}{5}$

c/ Montrer qu'on a :
$$\frac{CJ}{CA} = \frac{3}{5}$$

d/ En déduire que le triangle JIC est une réduction de ABC dans le rapport $\frac{3}{5}$

4. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut 6. En déduire, par la prop. 8, p. 63, qu'on a :

$$\text{aire}\, KBI = 6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \qquad \text{aire}\, JIC = 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

5. Montrer qu'on a :

$$\text{aire}\, AKIJ = \frac{72}{25}$$

Exercice 5.

Soit ABC un triangle. On note H le pied de la hauteur relative à A. On pose comme d'habitude $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. On note $h = AH$. On suppose :

$$\widehat{ABC} = 60° \qquad \widehat{ACB} = 45°$$

On rappelle le formulaire :

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

1. Tracer $[BC]$ horizontal, de longueur arbitraire. Construire le point A. Tracer les côtés $[AB]$ et $[AC]$.
2. Montrer qu'on a :

$$\widehat{HAB} = 30° \qquad \widehat{HAC} = 45°$$

3. En déduire les formules :

$$h = b \cos 45 \qquad h = c \cos 30$$

4. Déduire des formules précédentes qu'on a

$$c\sqrt{3} = b\sqrt{2}$$

5. Montrer qu'on a :

$$a = c \times \cos 60 + b \times \cos 45$$

6. En déduire :

$$2a = c + b\sqrt{2}$$

puis

$$2a = c(1 + \sqrt{3})$$

7. Conclure de tout ceci qu'on a :

$$c = a \times \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \qquad b = c \times \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Exercice 6 (*symétrique de l'orthocentre*).

(prendre une grande unité) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(2;3)$, $\Omega(2.5, 0.5)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, dont on admet qu'il a pour centre Ω. Soit H l'**orthocentre** de ABC, et soit H' le symétrique de H par rapport à (AB).

On se propose de démontrer le **résultat classique** suivant :

$$H' \in \mathscr{C}$$

1. Tracer le triangle ABC, ses trois hauteurs, son orthocentre. La hauteur relative à C coupe (AB) en C'. Marquer ce point. Tracer $\mathscr{C}$.
2. Soit D le symétrique de C par rapport à Ω. Marquer D, tracer $[CD]$ en pointillés.

Les coordonnées ci-dessus ont servi à obtenir une figure grande et lisible. Elles ne servent plus dorénavant ; **elles ne doivent pas être utilisées dans les démonstrations**.

3. Montrer que les droites (AH) et (DB) sont perpendiculaires à (BC).
4. Montrer que les droites (BH) et (DA) sont perpendiculaires à (AC).
5. Déduire des deux questions précédentes que $HADB$ est un parallélogramme.
6. On note I le milieu commun des diagonales $[HD]$ et $[AB]$. Montrer que :
$$(C'I) \mathbin{/\!\!/} (H'D)$$
7. Conclure.

$$\boxed{\cos,\ \sin,\ \text{tg}}$$

Exercice 7.

(unité le cm) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A et de rayon 4. Soit un point $M \in \mathscr{C}$, tel que (AM) ne soit ni horizontale ni verticale. Sur la tangente d à $\mathscr{C}$ en M, on place **un** point B, tel que $AB = 7$.

1. Dessiner la figure.
2. Calculer $\sin B$
3. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{B}$, puis une valeur approchée de $\widehat{A}$.
4. Vérifier les valeurs trouvées en mesurant les angles sur la figure.

Exercice 8 (d'après brevet 2018).

(unité le cm) On considère un triangle rectangle ABC dont l'angle A est droit. On note S son aire.

1. On suppose :
$$AB = 4 \qquad\qquad AC = 3{,}5$$
   a/ Tracer le triangle.
   b/ Calculer $\text{tg}\, B$.
   c/ En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{B}$. Vérifier sur la figure.
   d/ Calculer S

2. On suppose :

$$BC = 5 \qquad\qquad CA = 3$$

a/ Tracer le triangle.
b/ Calculer $\sin B$.
c/ En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{B}$. Vérifier sur la figure.
d/ Calculer AB. Calculer S

3. On suppose :

$$BC = 6 \qquad\qquad \widehat{CBA} = 45°$$

a/ Montrer que ABC est isocèle en A. Tracer ABC.
b/ Calculer BA
c/ Calculer S

Exercice 9.

(unité le cm) Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AC = 7$, $CB = 9$.

1. Tracer $[AC]$ puis la perpendiculaire à (AC) issue de A. Compléter la figure.
2. Calculer AB.
3. Montrer qu'on a :

$$\cos B = \frac{4}{9}\sqrt{2} \qquad\qquad \sin B = \frac{7}{9}$$

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos C$ et $\sin C$.
5. Calculer $\operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} C$.
6. Donner les valeurs approchées des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
7. Vérifier ces valeurs en mesurant les angles sur la figure.

Exercice 10.

Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{A}$ est aigu. On note comme d'habitude : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. La hauteur relative à B coupe (AC) en H. On note $h = BH$ et S l'aire de ABC.

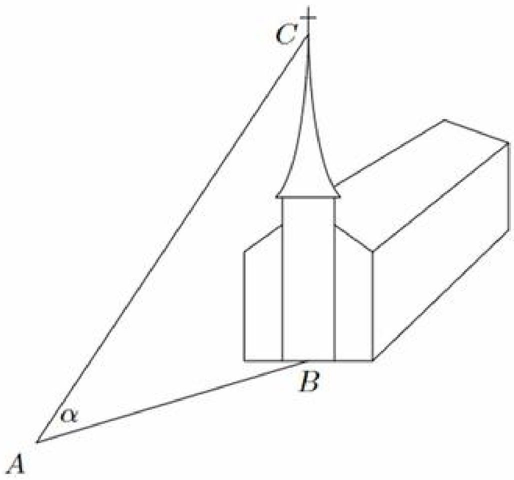
1. Dessiner la figure.
2. Calculer $\sin A$ dans le triangle AHB
3. En déduire qu'on a :

$$h = c \sin A \qquad\qquad S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Exercice 11 (*l'arpenteur-géomètre* (i)).

J'ai tendu des cordes de clocher à clocher ; des guirlandes de fenêtre à fenêtre ; des chaînes d'or, d'étoile à étoile, et je danse. (**Rimbaud**, *Les Illuminations*)

La figure ci-dessous est en perspective, et il faut imaginer que (AB) est horizontale.



1. On suppose donc que ABC est un triangle rectangle en B. Calculer $\operatorname{tg}\alpha$ en fonction de certains des côtés de ABC.
2. En déduire
$$BC = AB \times \operatorname{tg}\alpha$$
3. Quelle est la hauteur du **clocher** si $AB = 15$ m et $\alpha = 35°$? On donnera une valeur approchée au dixième.

Exercice 12 (*l'arpenteur-géomètre* (ii)).

Un **goniomètre** est un instrument de visée qui permet de mesurer des angles. La scène que l'on va décrire se déroule sur un plan **horizontal**. Pour mesurer la hauteur d'un clocher, un **arpenteur-géomètre** place son goniomètre sur un pied, à 1,50 m du sol, et à 30 m du bas de la tour du clocher. Il procède ensuite ainsi : il fait une visée à l'horizontal vers la tour du clocher, puis remonte le viseur de son instrument jusqu'à viser le sommet du clocher : on suppose qu'il a remonté son viseur de 25°. On se propose de calculer la hauteur du clocher.

1. Dessiner la figure. Marquer les points : B = bas de la tour du clocher, H = point de la tour visé à l'horizontal, S = sommet du clocher, G = position du goniomètre.
2. On a $\widehat{HGS} = 25°$. Montrer que
$$\operatorname{tg}\widehat{HGS} = \frac{HS}{HG}$$
3. En déduire
$$HS = HG \times \operatorname{tg} 25$$
4. En déduire la hauteur du clocher : valeur exacte, puis valeur approchée.

Exercice 13.

(unité au choix) On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient les points $A(-5;2)$, $B(0;5)$, $C(0;0)$. Le point A se projette orthogonalement en H sur (BC).

1. Placer les points. Tracer $[AB]$, $[AC]$, $[AH]$.
2. Calculer les valeurs exactes de $\operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} C$.
3. En déduire des valeurs approchées des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
4. En déduire une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.
5. Vérifier ces valeurs en mesurant les angles sur la figure.

Exercice 14.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On considère un point $D \in [AC]$. On note :

$$\alpha = \widehat{ABD} \qquad\qquad \beta = \widehat{DBC}$$

1. Dessiner une figure assez grande, avec $[AB]$ horizontal.
2. Calculer $\operatorname{tg}\alpha$ dans le triangle ABD.
3. Calculer $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ dans le triangle ABC.
4. En déduire qu'on a :
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AB}$$

Exercice 15.

Soit ACD un triangle rectangle en C. On considère un point $B \in [AC]$. On note :

$$\alpha = \widehat{CAD} \qquad\qquad \beta = \widehat{CBD}$$

1. Dessiner une figure assez grande, avec $[AC]$ **horizontal**.
2. Calculer $\operatorname{tg}\alpha$ dans le triangle ACD.
3. Calculer $\operatorname{tg}\beta$ dans le triangle BCD.
4. En déduire qu'on a :
$$AB = CD \times \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)$$

Exercice 16.

1. Tracer une demi-droite **horizontale** $[Ax)$. Sur cette demi-droite, marquer un point B.
2. Au-dessus de $[Ax)$, tracer la demi-droite $[Ay)$ telle que :
$$\widehat{BAy} = 22^\circ$$
Au-dessus de $[Ax)$, tracer la demi-droite $[Bz)$ telle que :
$$\widehat{xBz} = 34^\circ$$
3. Les demi-droites $[Ay)$ et $[Bz)$ se coupent en D. Le point D se projette orthogonalement en C sur $[Ax)$. Compléter la figure. On voit que cette figure est un cas particulier de celle de l'ex. 15, p. 70. On a donc :
$$AB = CD \times \left(\frac{1}{\operatorname{tg}22} - \frac{1}{\operatorname{tg}34}\right)$$
4. Calculer :
$$\frac{1}{\operatorname{tg}22} \qquad\qquad \frac{1}{\operatorname{tg}34} \qquad\qquad \frac{1}{\operatorname{tg}22} - \frac{1}{\operatorname{tg}34}$$
5. Mesurer AB et CD. Vérifier qu'ils sont presque égaux. Pouvait-on le prévoir ?

5 Correction des exercices

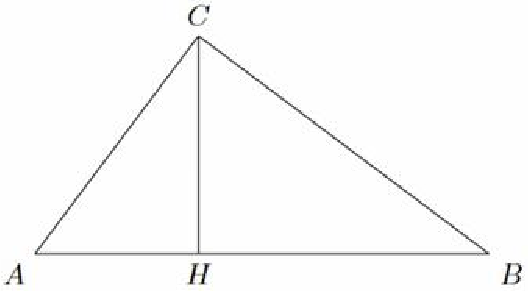
Ex. 1, p. 64.

2. Dans le triangle AHC qui est rectangle en H, on a :

$$\cos A = \frac{AH}{AC}$$

Dans le triangle ABC qui est rectangle en C, on a :

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$



Si on compare, il vient :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

3. On égale les produits en croix, et on obtient la formule cherchée :

$$AC^2 = AH \times AB$$

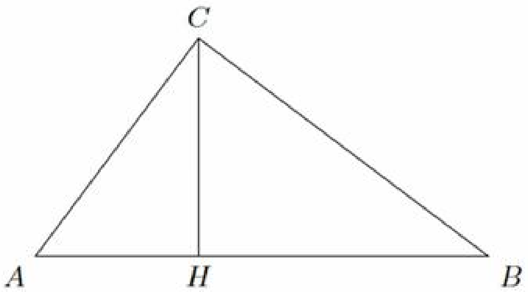
Ex. 2, p. 64.

2. et 3. Dans la relation :

$$AH^2 + HB^2 + 2AH \times HB = AB^2$$

on remplace les carrés par leur expression provenant du th. de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles AHC, HBC, ABC :

$AH^2 = CA^2 - CH^2 \qquad HB^2 = CB^2 - CH^2$
$AB^2 = CA^2 + CB^2$



On obtient :

$$\begin{aligned} CA^2 - CH^2 + CB^2 - CH^2 + 2AH \times HB &= CA^2 + CB^2 \\ \cancel{CA^2} - CH^2 + \cancel{CB^2} - CH^2 + 2AH \times HB &= \cancel{CA^2} + \cancel{CB^2} \\ -2CH^2 + 2AH \times HB &= 0 \\ CH^2 &= AH \times HB \end{aligned}$$

4. Par le th. de Pythagore appliqué dans le triangle AHC, on a :

$$CH^2 = AC^2 - AH^2$$

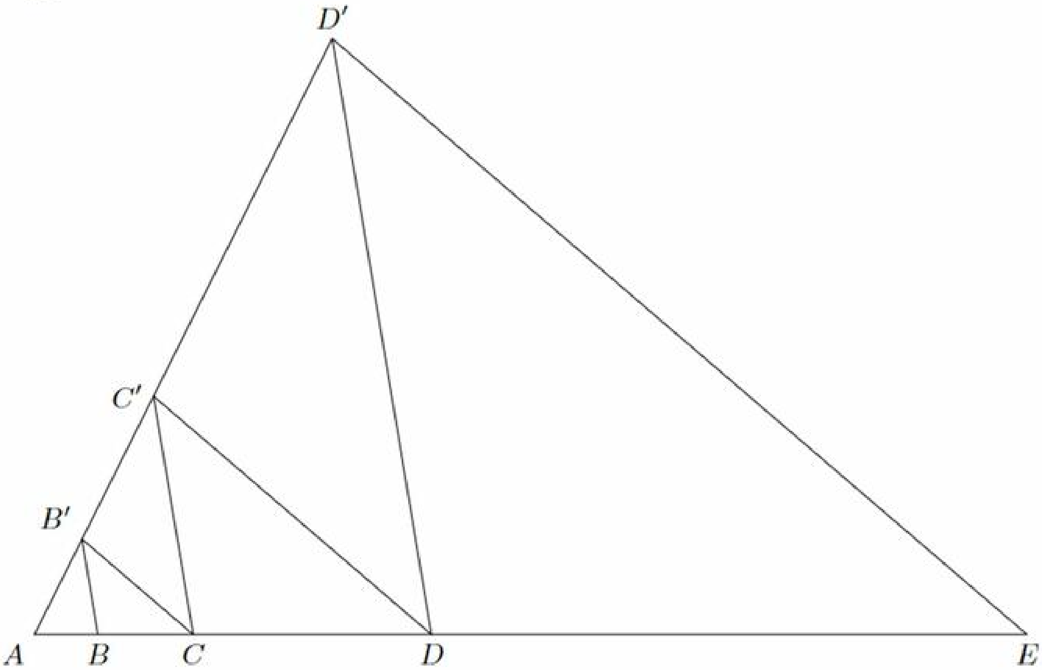
On reporte, et on obtient :

$$AC^2 - AH^2 = AH \times HB$$

5. Ceci se réécrit :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + AH \times HB \\ &= AH \times (AH + HB) \\ &= AH \times AB \end{aligned}$$

Ex. 3, p. 65.



2. et 3. On applique le th. de Thalès dans les triangles ACC' et ADC'. On obtient :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} \qquad\qquad \frac{AC}{AD} = \frac{AB'}{AC'}$$

4. Les quatre quotients sont donc égaux, et en particulier :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \tag{1}$$

5. On applique le th. de Thalès dans les triangles ADD'' et AED'. On obtient :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AC'}{AD'} \qquad\qquad \frac{AD}{AE} = \frac{AC'}{AD'}$$

Les quatre quotients sont donc égaux, et en particulier :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \tag{2}$$

6. Les relations (1) et (2) conduisent aux deux égalités :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

7. Si $AB = 1$ et $\boxed{AC = x}$, ces égalités se réécrivent :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{AD} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

On fait les produits en croix, et on obtient :

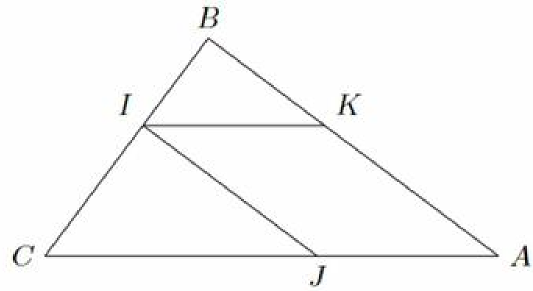
$$\boxed{AD = x^2} \qquad \text{et} \qquad xAE = AD^2 \Leftrightarrow xAE = x^4 \Leftrightarrow \boxed{AE = x^3}$$

Ex. 4, p. 65.

1. Puisque

$$BC^2 + BA^2 = 9 + 16 = 25 = CA^2$$

la réciproque du th. de Pythagore prouve que ABC est rectangle en B.



3. a/ On va calculer CI, et en déduire BI. Ceci nous permettra de calculer le quotient en vue.

Par le th. de Thalès, on a :

$$\frac{CI}{CB} = \frac{CJ}{CA} \Leftrightarrow \frac{CI}{3} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow CI = \frac{9}{5}$$

On en déduit :

$$BI = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$$

puis :

$$\frac{BI}{BC} = BI \times \frac{1}{BC} = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

b/ Puisqu'on a $(IK) /\!\!/ (CA)$, et $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{2}{5}$, on peut dire que le triangle KBI est une réduction de ABC dans le rapport $\dfrac{2}{5}$.

c/ et d/ Puisque $CJ = 3$ et $CA = 5$, on a $\dfrac{CJ}{CA} = \dfrac{3}{5}$. Comme de plus, $(JI) /\!\!/ (AB)$, le triangle JIC est une réduction de ABC dans le rapport $\dfrac{3}{5}$.

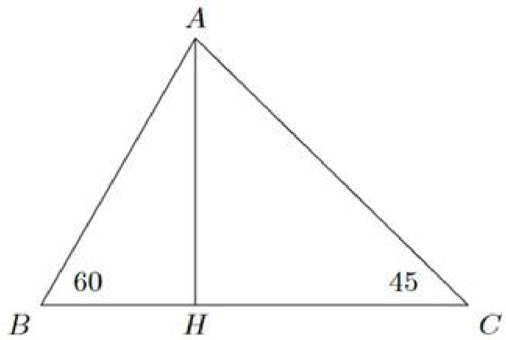
4. L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{1}{2} \times BC \times BA = 6$. Par la prop. 8, p. 63, on a donc :

$$\text{aire}\, KBI = 6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \qquad \text{aire}\, JIC = 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

5. L'aire du parallélogramme $AKIJ$ s'obtient par différence :

$$\begin{aligned} \text{aire}\, AKIJ = \text{aire}\, ABC - \text{aire}\, KBI - \text{aire}\, JIC &= 6 - 6 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 6 \times \left(1 - \frac{4}{25} - \frac{9}{25}\right) \\ &= 6 \times \frac{12}{25} = \frac{72}{25} \end{aligned}$$

Ex. 5, p. 66.



2. Notons :

$$x = \widehat{HAB} \qquad y = \widehat{HAC}$$

Dans le triangle rectangle HAB, la somme des angles aigus vaut 90 :

$$60 + x = 90 \iff x = 30^\circ$$

On montre pareillement que $y = 45^\circ$.

3. Le point H est la projection orthogonale de B sur (AH). Le **théorème de la projection orthogonale** (th. 22, p. 20) donne donc :

$$AH = AB \cos \widehat{HAB}$$

c'est-à-dire $h = c \cos 30$. On démontre de même la formule $h = b \cos 45$.
4. On évalue les cosinus, et on obtient :

$$c \cos 30 = b \cos 45 \iff c\frac{\sqrt{3}}{2} = b\frac{\sqrt{2}}{2} \iff c\sqrt{3} = b\sqrt{2}$$

5. Puisque $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus, le point H est situé entre B et C. Donc $BC = BH + HC$. Par théorème de la projection orthogonale (th. 22, p. 20), on a :

$$BH = c \cos 60 \qquad HC = b \cos 45.$$

D'où on déduit :

$$a = c \times \cos 60 + b \times \cos 45 = c \times \frac{1}{2} + b \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. et donc :

$$2a = c + b\sqrt{2}$$

On remplace $b\sqrt{2}$ par $c\sqrt{3}$, et on obtient :

$$2a = c + c\sqrt{3} = c(1 + \sqrt{3})$$

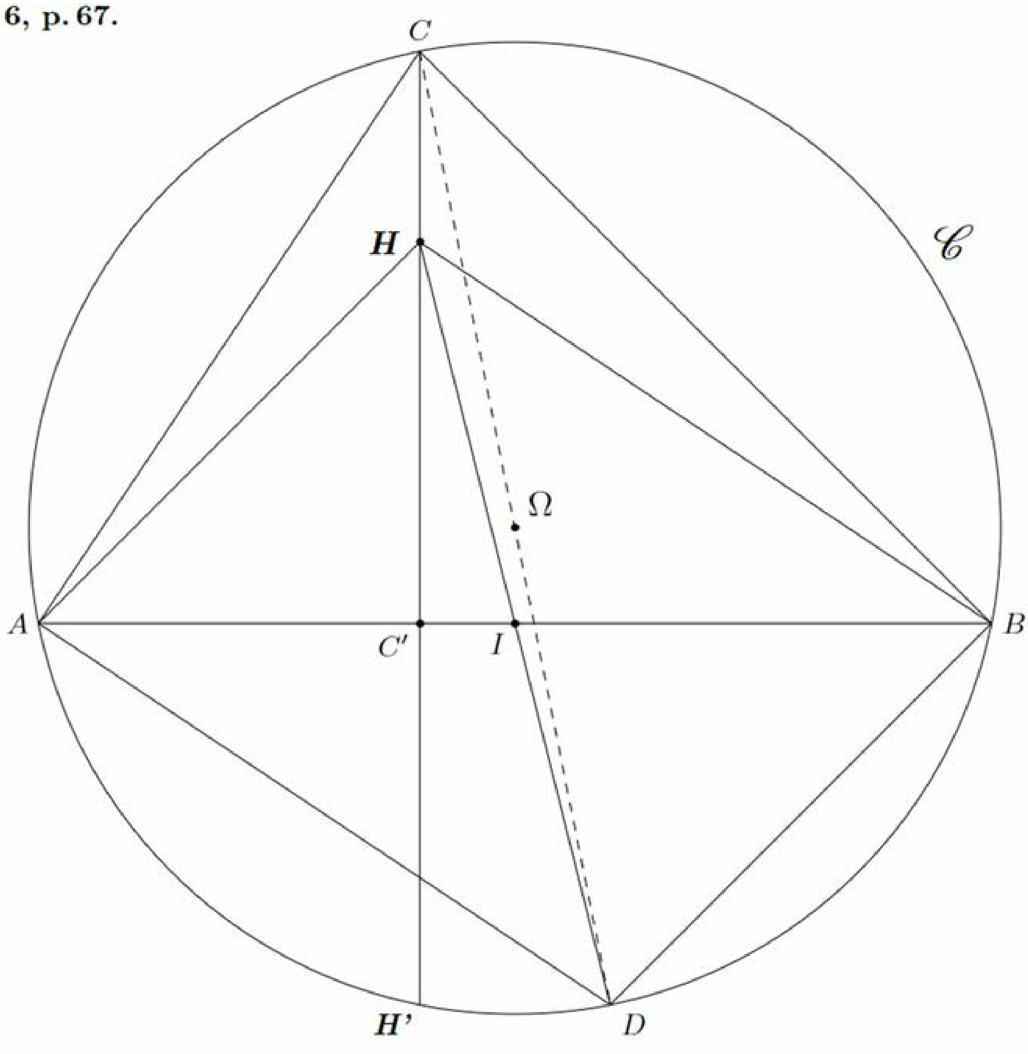
7. ce qui équivaut à :

$$c = \frac{2a}{1 + \sqrt{3}} = a \times \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$$

Par ailleurs :

$$b\sqrt{2} = c\sqrt{3} \iff b = c \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = c \times \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ex. 6, p. 67.



3. La droite (AH) est hauteur de ABC relative à A, elle est donc perpendiculaire à (BC). Le point B appartient au cercle de diamètre $[CD]$ donc, par le th. du demi-cercle (*voir* th. 10, p. 18), on a :

$$(BD) \perp (BC)$$

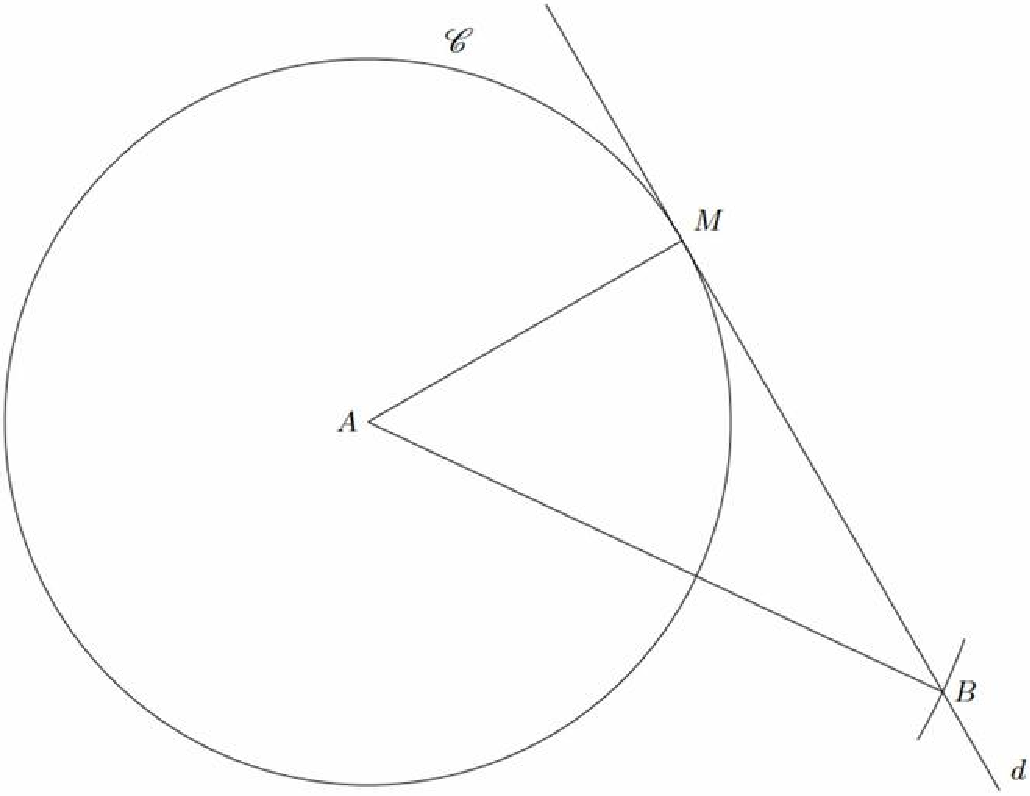
4. Avec des arguments analogues, on montre que les droites (BH) et (DA) sont perpendiculaires à (AC).
5. On sait, par le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1, p. 8), que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles. On déduit donc des deux questions précédentes que

$$(AH) /\!/ (DB) \qquad \text{et} \qquad (BH) /\!/ (DA)$$

donc $HADB$ est un parallélogramme.
6. On sait que H et H' sont symétriques par rapport à (AB). Donc C' est milieu de $[HH']$. D'autre part, I est milieu de $[HD]$. La droite $(C'I)$ est donc droites des milieux du triangle $H'HD$. Par le th. 13, p. 19, elle est donc parallèle à $(H'D)$.
7. Par le th. des parallèles, $(C'I) /\!/ (H'D)$ et $(C'I) \perp (H'C) \Rightarrow (H'D) \perp (H'C)$. On en déduit, par la réciproque du th. du demi-cercle (th. 11, p. 18) que H' appartient au cercle de diamètre $[CD]$, c'est-à-dire à $\mathscr{C}$.

Ex. 7, p. 67.

1. On trace d'abord $\mathscr{C}$ et M. Ensuite, pour que d soit tangente en M à $\mathscr{C}$, il faut que d soit perpendiculaire à (AM). On trace donc d avec une équerre. Ensuite, on pique en A, on ouvre le compas de 7 cm et on trace un petit arc de cercle. Cet arc coupe d en B :



2. Puisque $d \perp (AM)$, et puisque $B \in d$, le triangle AMB est rectangle en M. Donc :

$$\sin B = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AM}{BA} = \frac{4}{7}$$

3. On en déduit :

$$B = \text{asin}\left(\frac{4}{7}\right) = 34{,}849... \approx 35^\circ$$

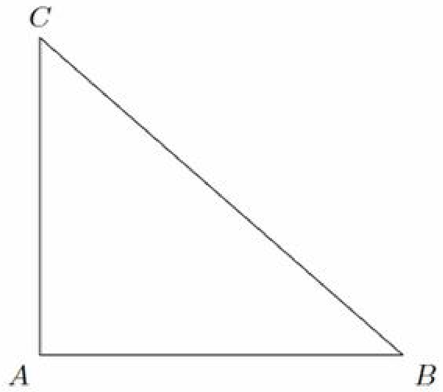
On sait que dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. On a donc :

$$\widehat{A} = 90 - \widehat{B} \approx 90 - 35 = 55^\circ$$

Ex. 8, p. 67.

1. b/ On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3{,}5}{4} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$



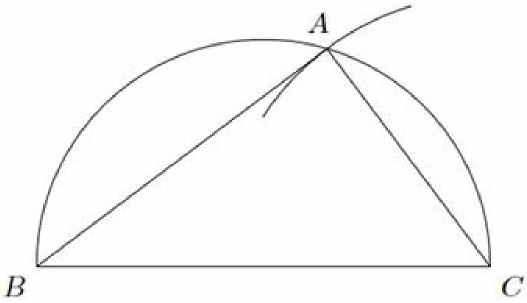
c/ On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{7}{8} \Leftrightarrow B = \operatorname{atan}\left(\frac{7}{8}\right) = 41{,}185... \approx 41°$$

d/ On connaît la formule donnant l'aire d'un triangle rectangle :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3{,}5 = 7 \text{ cm}^2$$

2. a/ On trace $[BC]$ de 5 cm ; puis le demi-cercle supérieur de diamètre $[BC]$. On pique en C, on ouvre le compas de 3 cm, on trace un arc de cercle. Il coupe le demi-cercle en A.



b/ On a :

$$\sin B = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

c/ On a :

$$\sin B = \frac{3}{5} \Leftrightarrow B = \operatorname{asin}\left(\frac{3}{5}\right) = 36{,}869... \approx 37°$$

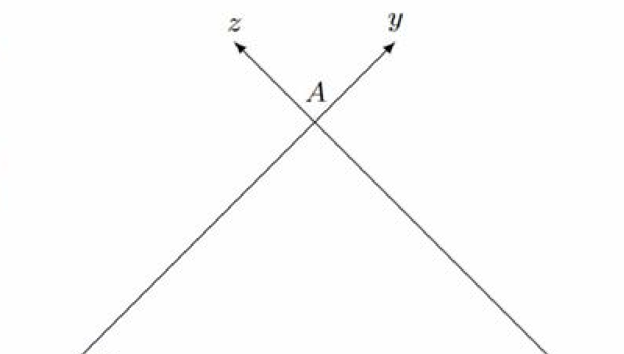
d/ Par le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

Donc : $AB = \sqrt{16} = 4$. On en déduit :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$$

3. a/ On trace $[BC]$ de longueur 6 cm. Le triangle ABC est rectangle en A et son angle en B vaut 45°. Puisque la somme des angles aigus d'un triangle rectangle vaut 90°, son angle en C vaut aussi 45°. Donc $\widehat{B} = \widehat{C}$. On en déduit que le triangle est isocèle en A.
On peut tracer A comme intersection de deux demi-droites $[By)$ et $[Cz)$ faisant un angle de 45° avec $[BC]$.



b/ Par le théorème de la projection orthogonale (th. 22, p. 20), on a :

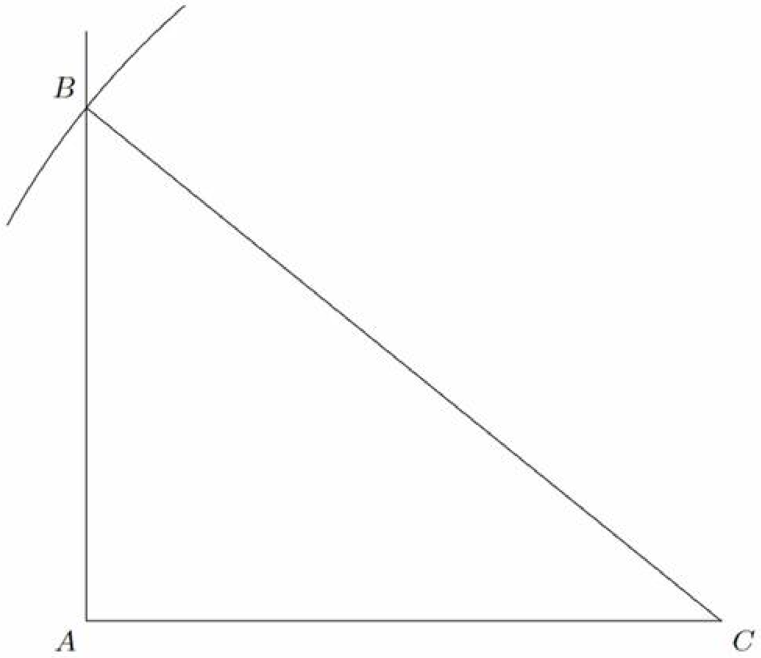
$$BA = BC \cos 45 = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = 4{,}242... \approx 4{,}2$$

c/ On a :

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 9 \times 2 = 9 \text{ cm}^2$$

Ex. 9, p. 68.

1. Après avoir tracé $[AC]$ et la perpendiculaire à (AC) issue de A, on pique en C, on ouvre le compas de 9 cm, et on trace un arc de cercle. Il coupe la perpendiculaire en B.



2. Par le th. de Pythagore, on a :

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 81 - 49 = 32$$

On en déduit : $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
3. On a :

$$\cos B = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{4}{9}\sqrt{2} \qquad \sin B = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{9}$$

4. Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont les angles aigus d'un triangle rectangle. Ils sont donc complémentaires. On sait que si deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est le cosinus de l'autre (*voir* prop. 4, p. 61). On a donc :

$$\cos C = \sin B = \frac{7}{9} \qquad \sin C = \cos B = \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

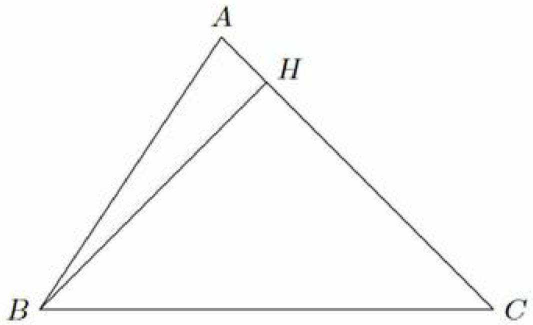
5. On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \sin B \times \frac{1}{\cos B} = \frac{7}{9} \times \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{7}{8}\sqrt{2}$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

6. On en déduit :

$$B = \operatorname{atan}\left(\frac{7}{8}\sqrt{2}\right) = 51{,}057... \approx 51^\circ$$
$$C = 90 - B \approx 90 - 51 = 39^\circ$$

Ex. 10, p. 68.



2. Dans le triangle rectangle AHB on a :

$$\sin A = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{c}$$

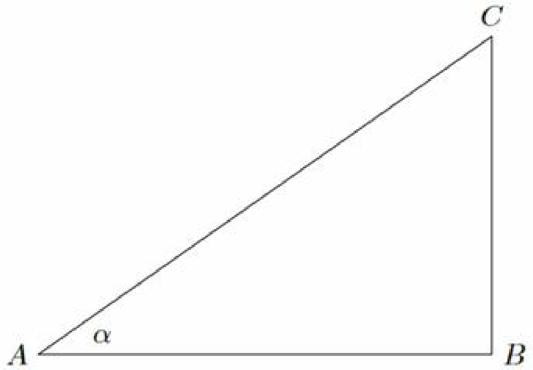
3. a/ Ensuite :

$$\frac{h}{c} = \sin A \Rightarrow h = c \sin A$$

b/ On utilise la formule donnant l'aire d'un triangle :

$$S = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2}AC \times BH = \frac{1}{2}bc \sin A$$

Ex. 11, p. 69.



1. On a redressé le triangle ABC pour mieux comprendre. On a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$

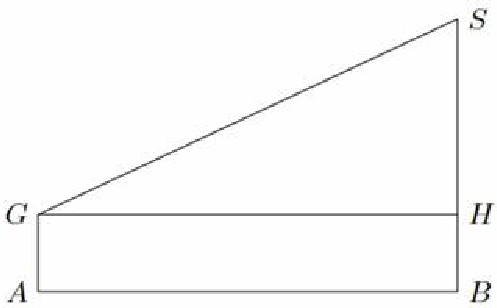
2. Et ensuite :

$$\frac{BC}{AB} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow BC = AB \times \operatorname{tg}\alpha$$

3. La hauteur du clocher est donc :

$$BC = AB \times \operatorname{tg}\alpha = 15 \times \operatorname{tg} 35 = 10{,}503 \approx 10{,}5 \text{ m}$$

Ex. 12, p. 69.



1. Le goniomètre G est posé sur un pied $[AG]$. Le sol horizontal est représenté par le segment $[AB]$, la tour par le segment $[BS]$. La quadrilatère $ABHG$ est un rectangle de longueur $HG = 30$ m, de largeur $HB = 1{,}5$ m.
2. On a :

$$\operatorname{tg}\widehat{HGS} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{HS}{HG}$$

3. On écrit :

$$\frac{HS}{HG} = \operatorname{tg}\widehat{HGS} \Rightarrow HS = HG \times \operatorname{tg}\widehat{HGS}$$

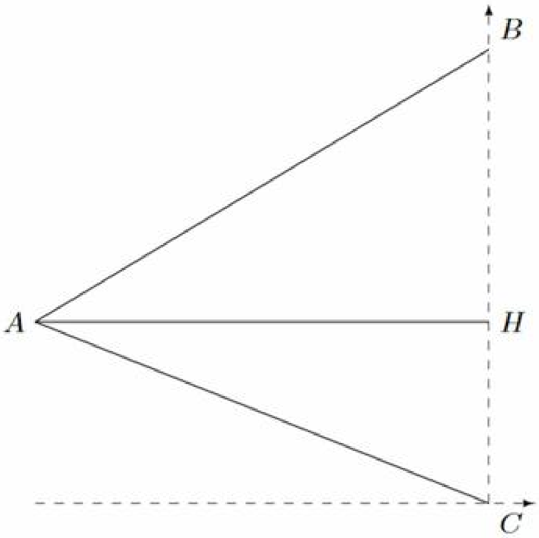
soit encore

$$HS = HG \times \operatorname{tg} 25 = 30 \times \operatorname{tg} 25$$

4. La hauteur du clocher est donc :

$$BS = HB + HS = 1{,}5 + 30 \times \operatorname{tg} 25 = 15{,}489... \approx 15{,}5 \text{ m}$$

Ex. 13, p. 70.



2. A et H ont pour ordonnée 2. H et B ont la même abscisse. On a donc :

$$BH = y_B - y_H = 5 - 2 = 3$$

On prouve de même que $CH = 2$. Les triangles AHB et AHC étant rectangles en H, on a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AH}{BH} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AH}{CH} = \frac{5}{2}$$

3. On en déduit :

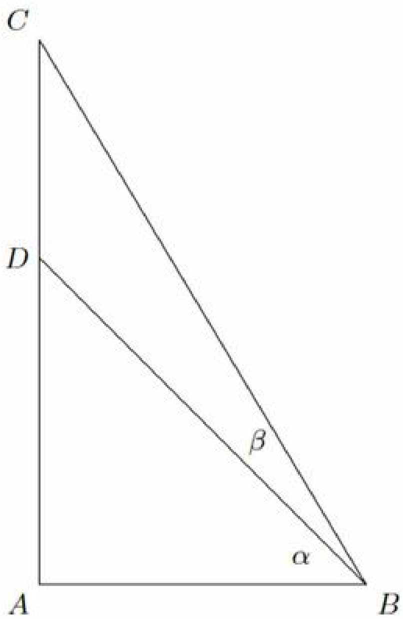
$$B = \operatorname{atan}\left(\frac{5}{3}\right) = 59{,}036... \approx 59^\circ$$

$$C = \operatorname{atan}\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}198... \approx 68^\circ$$

4. Et comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, il vient :

$$\widehat{BAC} = 180 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 180 - 59 - 68 = 53^\circ$$

Ex. 14, p. 70.



2. Dans le triangle ABD, on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AD}{AB}$$

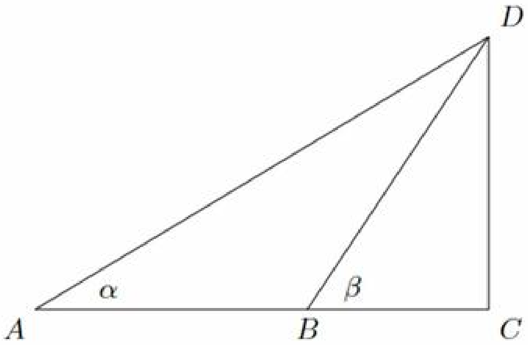
3. Dans le triangle ABC, on a $\widehat{ABC} = \alpha + \beta$. On en déduit :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB}$$

4. Par différence, il vient :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} - \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AB}$$

Ex. 15, p. 70.



2. Dans le triangle ACD, rectangle en C, on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AC}$$

3. Dans le triangle BCD, rectangle en C, on a :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{BC}$$

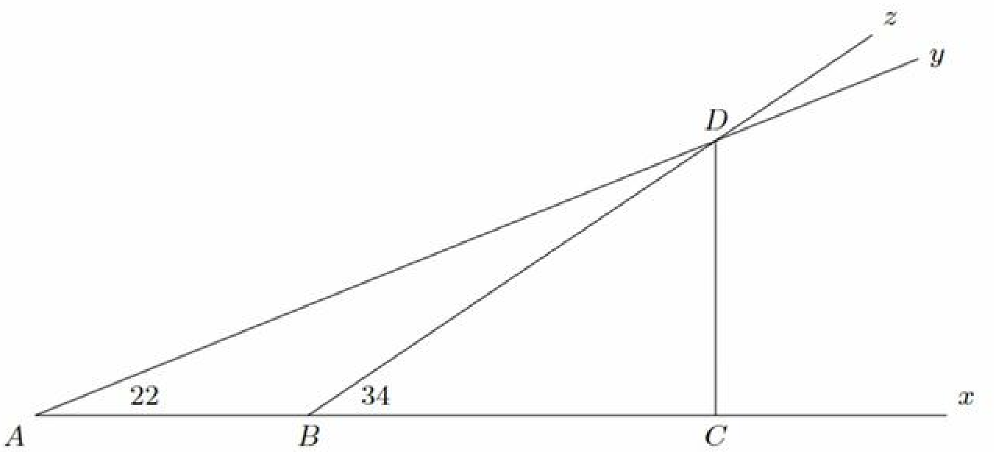
4. On prend les inverses des deux tangentes pour avoir le **même dénominateur** CD. Il vient alors :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{AC}{CD} - \frac{BC}{CD} = \frac{AC - BC}{CD} = \frac{AB}{CD}$$

D'où on déduit :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \Rightarrow AB = CD \times (\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta})$$

Ex. 16, p. 70.



4. La calculette donne :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 22} = 2{,}475... \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} 34} = 1{,}482... \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} 22} - \frac{1}{\operatorname{tg} 34} = 0{,}992... \approx 1$$

6. Pour construire notre figure, on a pris $AB = 3$. Après avoir placé D, et l'avoir projeté en C sur $[Ax)$, on mesure et on trouve $CD \approx 3$. Donc :

$$AB \approx CD$$

C'était prévisible, puisque $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 22} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} 34} \approx 1$

CORRIGÉS

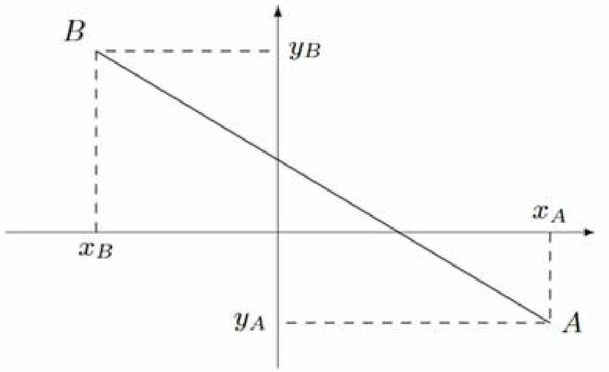
Chapitre 4

Géométrie analytique plane

La géométrie analytique a été inventée au XVII$^{\text{e}}$ siècle par Descartes et Fermat. Elle permet de remplacer certains **raisonnements** géométriques compliqués par des **calculs** algébriques simples. On note $\mathscr{P}$ le plan de la géométrie plane.

1 Coordonnées, longueur, milieu

Définition 1. *Un **repère orthonormé** du plan est constitué de deux axes perpendiculaires, de même origine, sur chacun desquels on a la même unité de longueur. L'un des axes et horizontal, orienté vers la droite, c'est l'axe des abscisses. L'autre est vertical, orienté vers le haut, c'est l'axe des ordonnées. L'intersection des deux axes est **l'origine du repère**.*

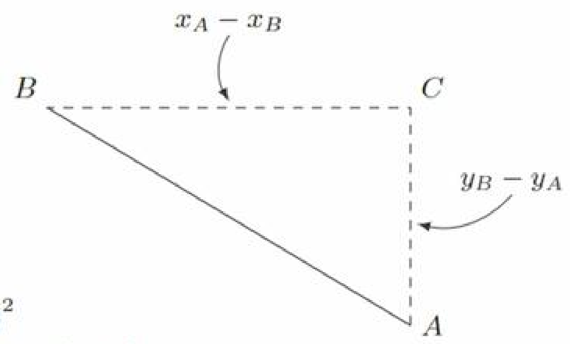


Théorème 2. (formule de la longueur) *Dans un **repère orthonormé** du plan, pour tous points A, $B \in \mathscr{P}$ on a :*

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dans cette formule, on peut remplacer $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ par les opposés $x_A - x_B$ et $y_A - y_B$. La valeur n'est pas changée car deux nombres opposés ont les mêmes carrés.

Démonstration : On place le point C de coordonnées $(x_A; y_B)$. Le triangle BCA est rectangle en C, et on a :



$$CB = x_A - x_B \qquad CA = y_B - y_A$$

On applique le **théorème de Pythagore** :

$AB^2 = CB^2 + CA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2$
C'est la **formule de la longueur** que l'on voulait démontrer.

Lorsque l'on veut calculer ensuite explicitement la longueur AB, on est amené à utiliser la racine carrée :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ATTENTION ! Cette formule ne se simplifie pas **en général**, et on ne peut pas la couper en deux :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

Théorème 3. (coordonnées d'un milieu) *Si A et B sont deux points du plan et si I est leur milieu, on a :*

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2}} \qquad \boxed{y_I = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

2 Rappels sur les vecteurs

Définition 1. *Un vecteur du plan est un couple de réels.*

Le symbole d'un vecteur est surmonté généralement d'une flèche, ainsi :

$$\vec{u} = (a; b) \qquad \vec{\imath} = (1; 0) \qquad \vec{\jmath} = (0; 1) \qquad \vec{v} = (-1{,}5\,; 3)$$

Le **vecteur nul** est noté :

$$\vec{0} = (0; 0)$$

L'**opposé** du vecteur $\vec{u} = (a; b)$ est le vecteur :

$$-\vec{u} = (-a\,; -b)$$

ATTENTION ! Les vecteurs $(a; b)$ et $(b; a)$ ne sont pas égaux sauf si $a = b$.

Définition 2. *À tout vecteur $\vec{u} = (a; b)$ est associé le schéma suivant :*

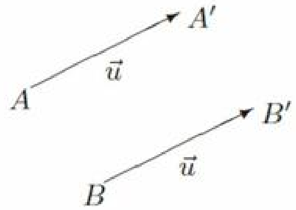
$$A(x; y) \quad \mapsto \quad A'(x + a\,;\, y + b)$$

Ce schéma est appelé ***translation***. Il est noté t. On écrit $t(A) = A'$, et encore :

$$\boxed{A + \vec{u} = A'} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{AA'} = \vec{u}}$$

Le point A' est appelé **translaté** de A par $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ est un **objet algébrique** (couple de réels), mais l'écriture $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donne une **représentation géométrique** de $\vec{u}$ que l'on peut imaginer comme une flèche allant de A jusqu'à A'.
De plus, on peut montrer que les deux relations algébriques :

$$t(A) = A' \quad \text{et} \quad t(B) = B'$$

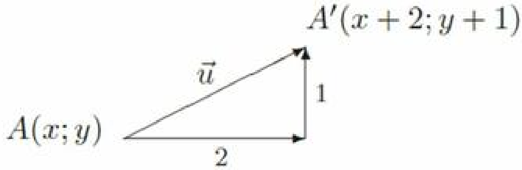


impliquent les deux relations géométriques suivantes :

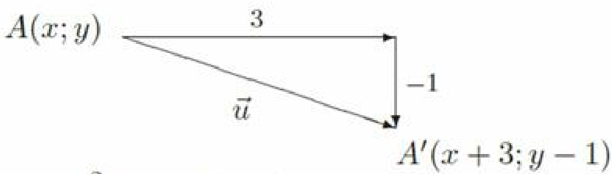
$$\begin{array}{rcl} (AA') & /\!\!/ & (BB') \\ AA' & = & BB' \end{array}$$

Un vecteur et sa translation associée sont définis par une **direction**, un **sens**, une **longueur**. La direction est celle de la droite (AA'), le sens va de A vers A', la longueur est AA'. Donnons quelques exemples :

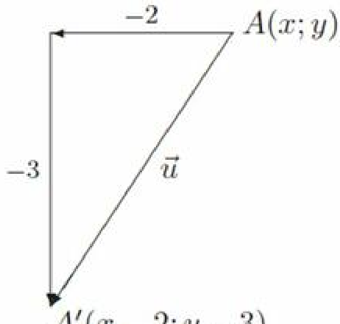
Supposons $\vec{u} = (2; 1)$



Supposons $\vec{u} = (3; -1)$



Supposons $\vec{u} = (-2; -3)$

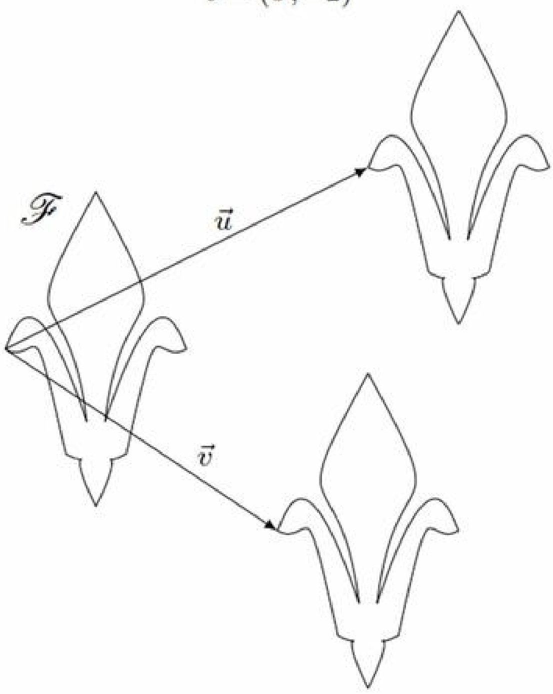


À l'**école primaire**, on utilise des translations lorsque l'on veut répéter des figures. Ci-dessous, une figure $\mathscr{F}$ a été translatée vers la droite suivant le vecteur qui **monte** :

$$\vec{u} = (4; 2)$$

et suivant le vecteur qui **descend** :

$$\vec{v} = (3\,; -2)$$



Quand on écrit un vecteur sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on dit que A est son **origine** et que B est son **extrémité**.

Proposition 3. *Soient A et B deux points et $\vec{u} = (a; b)$ un vecteur. On a :*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad B = A + \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_B & = & x_A + a \\ y_B & = & y_A + b \end{cases}$$

Corollaire 4. *Pour tous points A et B on a :*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,; y_B - y_A)$$

Pour retenir l'ordre $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$, on pense "**extrémité moins origine**". Du cor. 4, on déduit que pour tout point A on a :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Corollaire 5. *Pour tous points A et B on a :*

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Définition 6. *Si $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (a'; b')$ sont des vecteurs, leur* ***somme*** *est le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, défini par :*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + a'; b + b')$$

Proposition 7. (relation de Chasles) *Pour tous points A, B, C on a :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

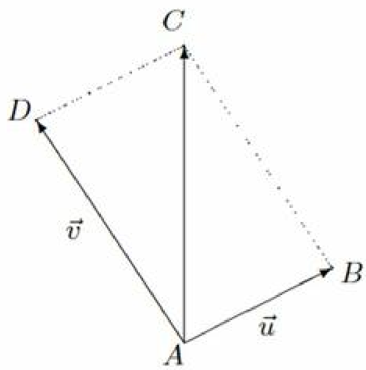
Proposition 8. *Soient A, B, I des points. On a :*

$$I \text{ est milieu du segment } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Corollaire 9. *Soient des points A, B, C, D. On a :*

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Cet énoncé permet de **construire la somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la **règle du parallélogramme**.



On procède ainsi : on considère des points A, B, D, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. On construit ensuite le point C, tel que $ABCD$ soit un **parallélogramme**. On a donc $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, et on en déduit :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

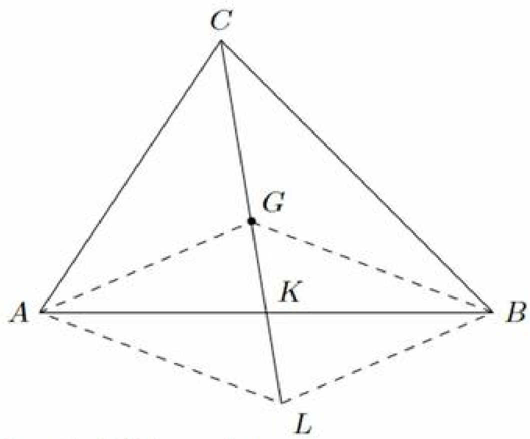
La relation de Chasles donne alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

Proposition 10. *Si G est le centre de gravité du triangle ABC on a :*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Démonstration : Soient K le milieu de $[AB]$, et L le symétrique de G par rapport à K. Puisque ses diagonales ont même milieu, $ALBG$ est un parallélogramme. Par la **règle du parallélogramme**, on en déduit :



$$\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} \qquad (1)$$

Par la prop. 18, p. 19, on sait que

$$GK = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{2}CG$$

Donc $GL = CG$, ce qui prouve que G est le milieu de $[CL]$, et donc :

$$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Par la relation (1), il vient alors :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

3 Norme d'un vecteur

Définition 11. *Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur. La longueur du segment $[AB]$ est appelée* ***norme*** *(ou* ***longueur****) du vecteur $\vec{u}$. Elle est notée $\|\vec{u}\|$. On a donc :*

$$\|\vec{u}\| = AB$$

et aussi :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

Remarque : Anastasia dit que, quand on prend la norme d'un vecteur :

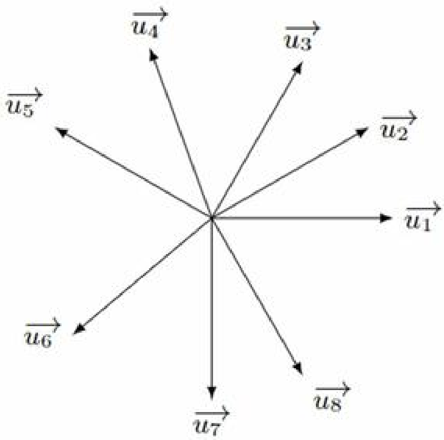
$$\left\|\vec{u}\right\|$$

il a l'air d'être en prison...

On a dessiné ci-contre des vecteurs :

$$\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{u_8}$$

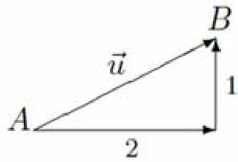
tous de même origine, de même **norme** (2 cm), mais de directions différentes.



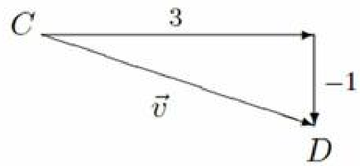
Proposition 12. *Si $\vec{u} = (a; b)$ on a :*

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2; 1)$ alors $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{5} \approx 2{,}2$



Si $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (3; -1)$ alors $\|\vec{v}\| = CD = \sqrt{10} \approx 3{,}2$



En physique, si $\vec{F}$ est une force, le nombre $\|\vec{F}\|$ est appelé **mesure** ou **intensité** de la force. Les physiciens notent simplement F cette intensité.

4 Direction d'un vecteur

On va caractériser **algébriquement** la propriété pour deux vecteurs d'avoir même direction, et d'avoir des directions perpendiculaires (on dit aussi directions orthogonales).

Définition 13. *Soient $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur et α un réel. Le* ***produit*** *de $\vec{u}$ par α est le vecteur :*

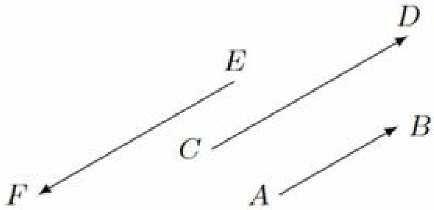
$$\alpha.\vec{u} = (\alpha a, \alpha b)$$

Définition 14. (colinéarité) *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel α, tel que :*

$$\vec{v} = \alpha.\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \alpha.\vec{v}$$

Intuitivement, deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont la **même direction**. On a dessiné ci-contre des vecteurs colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{CD}, \ \overrightarrow{EF}$$



Proposition 15. *Soient A, B, C, D quatre points. On a :*

$$(AB) /\!\!/ (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires}$$

Définition 16. (déterminant) *Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (a', b')$ est le réel, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, qui vaut :*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Théorème 17. (critère de colinéarité) *Soient $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (a', b')$ deux vecteurs du plan. On a l'équivalence :*

$$\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0}$$

Démonstration : pour simplifier, notons D le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour prouver l'équivalence, on va prouver séparément le **sens direct** et le **sens réciproque** :

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Rightarrow D = 0}$ $\boxed{D = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$

Le premier sens est facile. En effet, par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Supposons par exemple qu'on ait : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. On en déduit :

$$a = \alpha a' \qquad b = \alpha b'$$

Portant ces expressions de a et b dans D, on obtient :

$$D = ab' - a'b = (\alpha a')b' - a'(\alpha b') = \alpha a'b' - \alpha a'b' = 0$$

Le second sens est subtil. Par hypothèse, $ab' - a'b = 0$, ce qui équivaut à :

$$ab' = a'b \tag{1}$$

On voudrait pouvoir exprimer $\vec{u}$ sous la forme $\alpha.\vec{v}$. Il faut pour cela calculer a en fonction de a', et donc diviser par b' des deux côtés de l'égalité (1), ce qui n'est pas possible si $b' = 0$. Il y a deux possibilités :

1^er^ cas : $\boxed{b' = 0}$. Alors la relation (1) devient :

$$a'b = 0$$

Donc $a' = 0$ ou $b = 0$. Supposons d'abord $\boxed{a' = 0}$. Comme on sait que $b' = 0$, on a :

$$\vec{v} = (0;0) = \vec{0}$$

Donc :

$$\vec{v} = 0.\vec{u}$$

Supposons maintenant $\boxed{a' \neq 0}$. Alors $b = 0$ donc $\vec{u} = (a;0)$. On écrit :

$$(a;0) = \frac{a}{a'}(a';0)$$

c'est-à-dire $\vec{u} = \frac{a}{a'}\vec{v}$.

Passons maintenant au :

2e cas : $\boxed{b' \neq 0}$. On déduit de la relation (1) :

$$a = \frac{a'b}{b'} = \frac{b}{b'} \times a'$$

Calculons ensuite :

$$\frac{b}{b'}.\vec{v} = (\frac{b}{b'}a'; \frac{b}{b'}b') = (a;b) = \vec{u}$$

Donc :

$$\frac{b}{b'}.\vec{v} = \vec{u}$$

cqfd

Théorème 18. (critère d'orthogonalité) *Soient $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$ deux vecteurs du plan. On a l'équivalence :*

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \ \Leftrightarrow\ aa' + bb' = 0}$$

Démonstration : on va prouver ensemble sens direct : $\boxed{\Rightarrow}$ et sens réciproque : $\boxed{\Leftarrow}$ en raisonnant par équivalences. Considérons un point A. Soient les points B et C tels que B soit le translaté de A par $\vec{u}$, et C, le translaté de A par $\vec{v}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

On a donc

$$\vec{u} \perp \vec{v} \ \Leftrightarrow\ \text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A$$

D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, on sait que :

$$ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

On a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = (-a;-b) + (a';b') = (a-a';b-b')$$

On sait que : $BC = \|\overrightarrow{BC}\|$. On en déduit : $BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$, et donc :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (a-a')^2 + (b-b')^2 \\ &= a^2 + a'^2 - 2aa' + b^2 + b'^2 - 2bb' \\ &= a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 - 2(aa' + bb') \\ &= AB^2 + AC^2 - 2(aa' + bb') \end{aligned}$$

Finalement,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \ \Leftrightarrow\ aa' + bb' = 0$$

cqfd

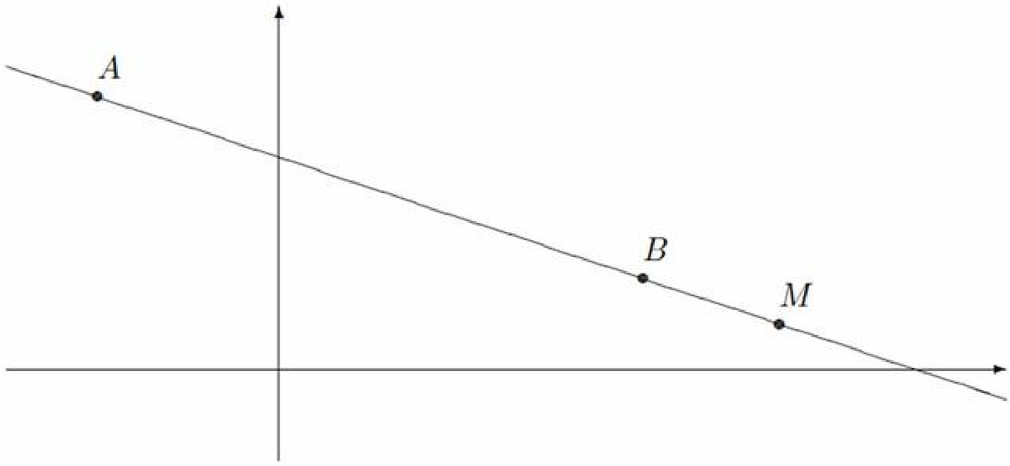
5 Un exemple d'équation de droite

Soient d une droite, et M un point quelconque de coordonnées $(x; y)$. On cherche à traduire la relation **géométrique** $M \in d$ par une relation **algébrique** $\mathscr{R}$ portant sur $(x; y)$. On doit donc avoir :

$$M \in d \Leftrightarrow \mathscr{R}$$

La **relation mystérieuse** $\mathscr{R}$ est appelée **équation** de la droite d. Nous allons voir comment on peut la calculer.

Soient par exemple les points $A(-2; 3)$ et $B(4; 1)$. On s'intéresse à la droite (AB).



Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. On a :

$$\boxed{M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0}$$

On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AM} = (x - (-2); y - 3) = (x + 2; y - 3) \qquad \overrightarrow{AB} = (4 - (-2); 1 - 3) = (6; -2)$$

On calcule le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x+2 & 6 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times (x + 2) - 6 \times (y - 3) = -2x - 6y + 14$$

On a donc :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow -2x - 6y + 14 = 0$$

On simplifie, et on isole y :

$$\begin{aligned} -2x - 6y + 14 &= 0 \\ -x - 3y + 7 &= 0 \\ 3y &= -x + 7 \\ y &= \frac{-x}{3} + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Finalement, on a montré l'équivalence :

$$\boxed{M \in (AB) \Leftrightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{7}{3}}$$

La relation algébrique :

$$\boxed{y = \frac{-x}{3} + \frac{7}{3}} \qquad (1)$$

est la relation mystérieuse $\mathscr{R}$ que l'on cherchait, c'est **l'équation de la droite** (AB). Grâce à cette équation, on peut **calculer** tous les points de la droite.

En particulier on peut calculer les points où (AB) coupe les axes de coordonnées. Notons I le point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses. L'ordonnée de I est nulle, donc les coordonnées de I sont de la forme $(x; 0)$. Pour calculer x, on dit que **les coordonnées de I satisfont l'équation** (1). On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-x}{3} + \frac{7}{3} \\ 0 &= -x + 7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Notons J le point d'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées. L'abscisse de J est nulle, donc les coordonnées de J sont de la forme $(0; y)$. Pour calculer y, on dit que **les coordonnées de J satisfont** l'équation (1). On a donc :

$$y = \frac{-0}{3} + \frac{7}{3} = 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}3$$

En **mesurant sur la figure**, on vérifie en effet que l'abscisse de I vaut 7 et que l'ordonnée de J vaut environ 2,3.

6 Forme générale de l'équation d'une droite

Définition 1. *Une droite est dite* ***verticale*** *si elle est parallèle à l'axe des ordonnées. Une droite qui n'est pas verticale est dite* ***oblique****.*

Définition 2. *L'équation d'une droite est la* ***condition algébrique*** *nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour qu'un point de coordonnées $(x; y)$ appartienne à cette droite.*

Théorème 3. (équation réduite d'une droite oblique) *Toute droite oblique du plan a une équation du type :*

$$\boxed{y = ax + b}$$

Autrement dit, si d est une droite oblique du plan, il existe des réels a et b, tels que, pour tout point M de coordonnées $(x; y)$, on ait :

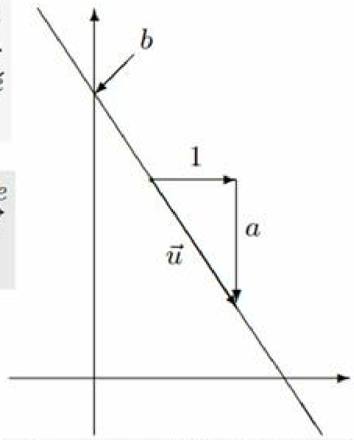
$$\boxed{M \in d \iff y = ax + b}$$

Proposition 4. (réciproque du précédent) *Soient a et b des réels quelconques. L'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que :*

$$x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad y = ax + b$$

est une droite oblique.

Définition 5. *Pour une droite d d'équation $y = ax + b$, le nombre a est appelé* ***pente*** *ou* ***coefficient directeur****, le nombre b est appelé* ***ordonnée à l'origine****.*



Proposition 6. *Soit d la droite d'équation $y = ax + b$. Le vecteur $\vec{u} = (1; a)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ pour tous les points A, $B \in d$.*

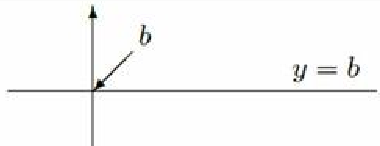
On dit que :

$$\boxed{\vec{u} = (1; a)}$$

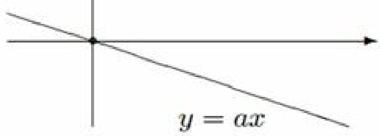
est un ***vecteur directeur*** de d.

Définition 7. *On dit qu'une droite est* ***horizontale*** *si elle est parallèle à l'axe des abscisses.*

Proposition 8. *Une droite est horizontale si et seulement si son équation est de la forme $y = b$.*



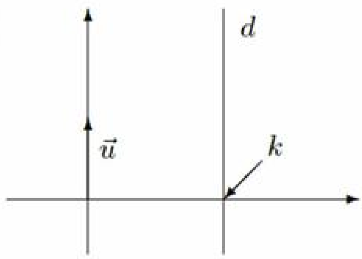
Proposition 9. *Une droite* ***passe par l'origine*** *du repère si et seulement si son équation est de la forme $y = ax$.*



Proposition 10. *Soient d et d' deux droites d'équations réduites respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. On a :*

$$d \parallel d' \quad \Leftrightarrow \quad a = a'$$
$$d \perp d' \quad \Leftrightarrow \quad aa' = -1$$

Proposition 11. *Si une droite d est verticale, tous ses points ont la même abscisse k. L'équation de d est $x = k$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u} = (0; 1)$*



Proposition 12. *Soient a un réel, A un point. Soit d la droite issue de A et de coefficient directeur a. Alors pour tout point B différent de A on a :*

$$B \in d \Leftrightarrow a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Corollaire 13. *Soient A et B deux points distincts. Soit M un point variable de coordonnées $(x; y)$. On a :*

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

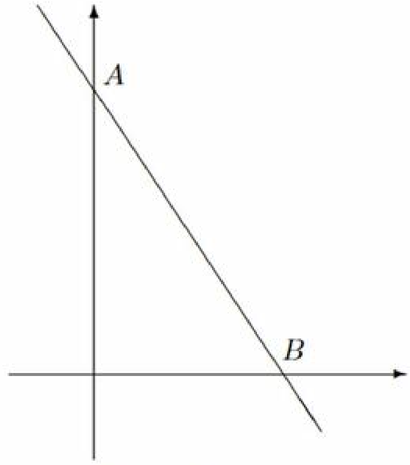
On peut interpréter l'égalité des quotients en disant que dans le tableau ci-contre, les **accroissements** des y sont proportionnels aux accroissements des x.

x	x_B	x_A
y	y_B	y_A

7 Méthode des accroissements proportionnels

Considérons par exemple les points $A(0;3)$, $B(2;0)$. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan. D'après le cor. 13, p. 93, le point M appartient à (AB) si et seulement si le tableau suivant a des **accroissements proportionnels** :

x	2	0
y	0	3



ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{y-3}{x-0} &= \frac{0-3}{2-0} \\ y-3 &= -\frac{3}{2}x \\ y &= -\frac{3}{2}x+3 \end{aligned}$$

On constate que cette méthode est **rapide**. C'est la méthode utilisée en physique et dans les sciences expérimentales.

8 Méthode du déterminant

Le point $M(x,y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui se traduit par :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AM} = (x-0; y-3) = (x; y-3) \qquad \overrightarrow{AB} = (2-0; 0-3) = (2; -3)$$

On en déduit :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x & 2 \\ y-3 & -3 \end{vmatrix} = x \times (-3) - 2 \times (y-3) = -3x - 2y + 6$$

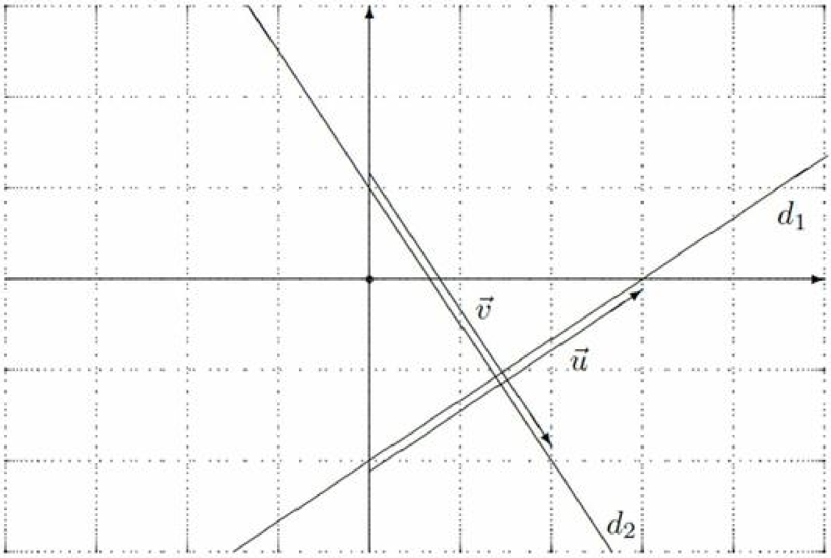
L'équation de (AB) est donc :

$$\begin{aligned} -3x - 2y + 6 &= 0 \\ 2y &= -3x + 6 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Cette méthode est **abstraite**, mais on s'y habitue vite. De plus, elle est **généralisable**. C'est de cette façon que l'on calcule les équations de plans dans l'espace.

9 Lecture graphique d'une équation de droite

On va voir comment on peut trouver **graphiquement** le coefficient directeur d'une droite à partir d'un vecteur directeur. Dans les cas simples, on peut alors déduire graphiquement l'équation de la droite. Sur la figure ci-dessous, on a tracé deux droites d_1 et d_2, et un repère orthonormé.



On sait que si une droite admet un vecteur directeur $\vec{w} = (1; a)$ alors a est son coefficient directeur. Ceci va nous permettre de calculer le coefficient directeur à partir d'un vecteur directeur quelconque.

Prenons d_1. On a repéré sur la figure un vecteur directeur $\vec{u} = (3; 2)$. Si on multiplie ce vecteur par $\frac{1}{3}$, on ne change pas sa direction, mais sa première coordonnée devient 1 :

$$\frac{1}{3}\vec{u} = (1; \frac{2}{3})$$

Le vecteur $(1; \frac{2}{3})$ est un vecteur directeur de d_1, donc $\frac{2}{3}$ est son coefficient directeur. Pour déterminer l'équation de d_1, on voit sur la figure que son ordonnée à l'origine est -2. On en déduit que l'équation de d_1 est :

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Faisons de même pour d_2. On a repéré sur la figure un vecteur directeur $\vec{v} = (2; -3)$. Si on multiplie ce vecteur par $\frac{1}{2}$, on ne change pas sa direction, mais sa première coordonnée devient 1 :

$$\frac{1}{2}\vec{v} = (1; -\frac{3}{2})$$

Le vecteur $(1; -\frac{3}{2})$ est un vecteur directeur de d_2, donc $-\frac{3}{2}$ est son coefficient directeur. Pour déterminer l'équation de d_2, on voit sur la figure que son ordonnée à l'origine est 1. On en déduit que l'équation de d_2 est :

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

10 Intersection de deux droites

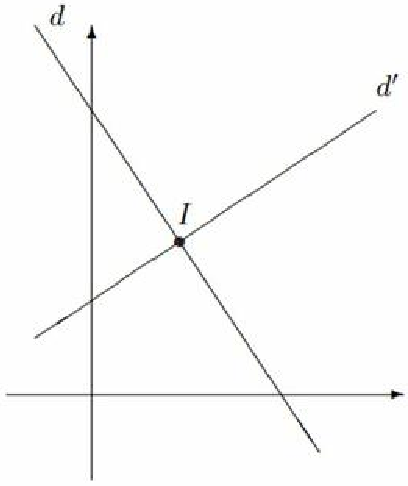
On sait que si deux **droites du plan** ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point unique, appelé **point d'intersection** des deux droites. Soit par exemple les droites d et d' d'équations respectives :

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \qquad\qquad y = \frac{2}{3}x + 1$$

On cherche leur point I d'intersection. Notons $(x; y)$ ses coordonnées. Le point I appartient à d et d' si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations des deux droites, c'est-à-dire le **système** suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\frac{3}{2}x + 3 \\ y & = & \frac{2}{3}x + 1 \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système, on calcule d'abord x en égalant les valeurs de y :



$$\begin{array}{rcl} -\frac{3}{2}x + 3 & = & \frac{2}{3}x + 1 \\ \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)x & = & 3 - 1 \\ \frac{13}{6}x & = & 2 \\ x & = & \frac{12}{13} \end{array}$$

Reportant cette valeur de x dans l'équation de d ou dans celle de d', on obtient facilement :

$$y = \frac{21}{13}$$

Finalement, les droites d et d' se coupent au point I de coordonnées :

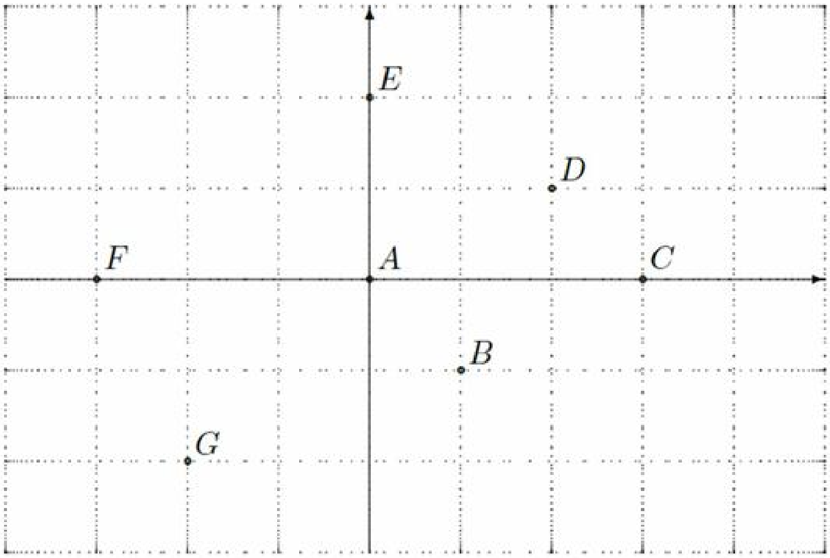
$$\left(\frac{12}{13}; \frac{21}{13}\right)$$

11 Exercices

Distances et angles

Exercice 1.

Sur un quadrillage en cm, on a tracé un repère orthonormé de centre A, et placé des points :



1. Déterminer les coordonnées des sept points marqués.
2. Calculer les distances BD, BE, BF, BG (valeurs exactes, puis approchées).
3. Vérifier ces distances sur la figure.
4. Montrer que B appartient à la médiatrice de $[EG]$.
5. Montrer, par les vecteurs, que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 2.

(unité le cm) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(1;2)$, $B(-3;2)$, $C(-3;-1)$.

1. Placer A, B, C. Tracer le triangle ABC.
2. Calculer les côtés du triangle ABC. Montrer que ce triangle est rectangle.
3. Calculer $\cos C$.
4. En déduire une valeur approchée de $\widehat{C}$. Vérifier sur la figure.

Exercice 3.

(unité le cm) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-2;1)$, $B(1;3)$, $C(5;-3)$.

1. Placer les points A, B, C. Tracer le triangle ABC
2. Calculer les côtés du triangle ABC. Montrer que ce triangle est rectangle.
3. Calculer $\cos A$.
4. En déduire une valeur approchée de $\widehat{A}$. Vérifier sur la figure.

Exercice 4 (*cercle circonscrit*).

(unité le cm) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(2;3)$, $\Omega(2{,}5;0{,}5)$.

1. Placer les points A, B, C, Ω. Tracer le triangle ABC.
2. Calculer les nombres ΩA^2, ΩB^2, ΩC^2.
3. Que peut-on en déduire pour le point Ω ?
4. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.

Vecteurs

Exercice 5 (*pavage* (i)).

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :
$$A(-2;0) \qquad B(0;-3) \qquad C(2;0) \qquad D(0;3)$$
2. Tracer le losange $ABCD$. Le colorier en bleu. On note $\mathscr{L}$ ce losange.
3. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Calculer $\vec{u}$ et $\vec{v}$
4. On considère la translation $\boxed{f \text{ de vecteur } \vec{u}}$ et la translation $\boxed{g \text{ de vecteur } \vec{v}}$
   a/ Calculer les coordonnées des points D' et B' définis par :
$$D' = f(D) \qquad B' = g(B)$$
   et placer les points D' et B' sur la figure.
   b/ Construire le losange $f(\mathscr{L})$, image de $\mathscr{L}$ par f. Le colorier en rouge.
   c/ Construire le losange $g(\mathscr{L})$, image de $\mathscr{L}$ par g. Le colorier en jaune.
   d/ Construire le losange $fg(\mathscr{L})$, image de $g(\mathscr{L})$ par f. Le colorier en vert.
5. Les quatre losanges précédents se raccordent entre eux : ils forment le début d'un **pavage du plan**. Compléter ce début de pavage avec trois autres losanges obtenus en translatant par f et g certains des losanges déjà tracés.

Exercice 6 (*pavage* (ii)).

(unité au choix) On repère les points par abscisse et ordonnée.

1. Placer les points suivants :
$$A(0;0) \qquad B(3;1) \qquad C(2;2) \qquad D(0;2)$$
2. Soit I le milieu de $[BC]$. On désigne par A' et D' les symétriques de A et D par rapport à I. Placer A' et D'.
3. Tracer l'hexagone $ABD'A'CD$. Le colorier en bleu. On note $\mathscr{H}$ cet hexagone.
4. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$. Calculer $\vec{u}$ et $\vec{v}$
5. On considère la translation $\boxed{f \text{ de vecteur } \vec{u}}$ et la translation $\boxed{g \text{ de vecteur } \vec{v}}$
   a/ Construire l'hexagone $f(\mathscr{H})$, image de $\mathscr{H}$ par f.
   b/ Construire l'hexagone $g(\mathscr{H})$, image de $\mathscr{H}$ par g. Le colorier en jaune.
   c/ Construire l'hexagone $fg(\mathscr{H})$, image de $g(\mathscr{H})$ par f. Le colorier en vert.
6. Les quatre hexagones précédents se raccordent entre eux : ils forment le début d'un pavage du plan. Compléter ce début de pavage avec trois autres hexagones obtenus en translatant par f et g certains des quatre hexagones.

Exercice 7.

(unité le cm). On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient les vecteurs $\vec{u} = (2;1)$ et $\vec{v} = (-3;2)$. Soient de plus les points O, A, B définis par :

$$O(0;0) \qquad \overrightarrow{OA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

1. Représenter les points O, A, B. Marquez les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Calculer les nombres $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$. On donnera les valeurs exactes, puis des valeurs approchées.
3. Vérifier les valeurs trouvées en mesurant OA et OB sur la figure.

Exercice 8.

(unité le cm) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-2;3)$, $B(1;5)$, $C(2;-4)$.

1. Représenter les points A, B, C. Dessiner les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Soit D le point tel que :
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
Construire le point D par la **règle du parallélogramme**.
4. Calculer $\overrightarrow{AD}$
5. Calculer $\|\overrightarrow{AD}\|$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée.
6. Vérifer la valeur trouvée en mesurant AD sur la figure.

Exercice 9 (*le testament de l'alchimiste*, d'après Blake et Mortimer)**.**

(unité assez grande) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points :

$$A(0;0) \quad I(1;0) \quad B(2;0) \quad J(2;1) \quad C(2;2) \quad K(1;2) \quad D(0;2) \quad L(0;1)$$

On note :
$$\alpha = \widehat{IDJ} \qquad \beta = \widehat{CID}$$

1. Placer les points précédents et tracer les huit segments suivants :
$$[AJ] \quad [JD] \quad [DI] \quad [IC] \quad [CL] \quad [LB] \quad [BK] \quad [KA]$$
On obtient un **octogone étoilé** (*octo* = huit, *gonia* = angle)
2. Calculer la longueur ID. Vérifier qu'on trouve :
$$ID = \sqrt{5}$$
On admet que tous les côtés de l'octogone ont pour longueur $\sqrt{5}$
3. Démontrer que le triangle DKI est rectangle en K, et que la droite (KI) est bissectrice de $\widehat{DIC}$.
4. Montrer qu'on a
$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
5. En déduire :
$$\frac{\beta}{2} = 26{,}56... \qquad \text{et} \qquad \beta \approx 53°$$

6. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{DJ}$. Par le test d'orthogonalité, montrer que ces vecteurs sont perpendiculaires.
7. En déduire qu'on a :
$$\alpha \approx 37^\circ$$
8. Vérifier sur la figure les valeurs trouvées pour α et β.

Exercice 10.

(unité le cm) Soit x un réel inconnu. Dans un repère orthonormé du plan on considère les points :
$$A(0;0) \qquad B(x;0) \qquad C(0;4) \qquad D(-2;3)$$

1. Placer les points A, C, D. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer le vecteur $\overrightarrow{AD}$
3. Calculer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction de x.
4. Déterminer x de sorte que les droites (AD) et (BC) soient parallèles. On pourra remarquer que :
$$(AD) \mathbin{/\!/} (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ colinaires}$$
et utiliser le **déterminant**.
5. Sur la figure, placer le point B, en prenant pour x la valeur trouvée à la question précédente.
6. Vérifier sur la figure que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 11.

(unité le grand carreau) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points :
$$A(0;0) \qquad B(-4;1) \qquad C(-1;-3) \qquad D(2;-2) \qquad E(4;2)$$
$$F(2;0) \qquad G(2;1) \qquad H(0;3) \qquad I(1;0) \qquad J(-3;3)$$

1. Placer les points précédents et tracer les sept vecteurs suivants :
$$\overrightarrow{HI} \qquad \overrightarrow{HB} \qquad \overrightarrow{CJ} \qquad \overrightarrow{CD} \qquad \overrightarrow{AG} \qquad \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{EF}$$
2. Vérifier qu'on a :
$$\det(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{CJ}) = 0$$
3. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires. Vérifier qu'on a :
$$\overrightarrow{CJ} = -2.\overrightarrow{HI}$$
4. Calculer :
$$\det(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CD})$$
5. En déduire que les droites (AG) et (CD) ne sont pas parallèles.
6. Utiliser les déterminants pour prouver les relations suivantes :
$$(HB) \mathbin{/\!/} (AG) \qquad (EF) \not\mathbin{/\!/} (CD) \qquad (EF) \not\mathbin{/\!/} (AG)$$

Équations de droites

Exercice 12.

(unité le cm)

1. Sur une figure, placer les points suivants :

$$A(3;5) \qquad B(-2;-1)$$

2. Tracer la droite (AB). Calculer son **équation réduite**.
3. Cette droite coupe l'axe des abscisses en I et l'axe de ordonnées en J. Placer ces deux points sur la figure.
4. Calculer les coordonnées de I et J.
5. Vérifier sur la figure.

Exercice 13.

(unité le cm)

1. Sur une figure, placer les points suivants :

$$A(-4;-1) \qquad B(2;2)$$

2. Tracer la droite (AB). Calculer son équation réduite.
3. Cette droite coupe l'axe des abscisses en I et l'axe de ordonnées en J. Placer ces deux points sur la figure.
4. Calculer les coordonnées de I et J.
5. Vérifier sur la figure.

Exercice 14.

(unité le cm)

1. Sur une figure, placer les points suivants :

$$A(-4;1) \qquad B(2;-2)$$

2. Tracer la droite (AB). Calculer son équation réduite.
3. Cette droite coupe l'axe des abscisses en I et l'axe de ordonnées en J. Placer ces deux points sur la figure.
4. Calculer les coordonnées de I et J.
5. Vérifier sur la figure.

Exercice 15.

(unité au choix) On considère les droites d_1 et d_2 données par les équations suivantes :

$$d_1 : \quad y = -\frac{x}{2} + 1$$
$$d_2 : \quad y = -\frac{x}{2} + 2$$

1. La droite d_1 coupe l'axe des abscisses en I et l'axe des ordonnées en J. Calculer les coordonnées des points I et J.
2. Placer les points I et J sur une figure. Tracer la droite d_1.
3. La droite d_2 coupe l'axe des abscisses en K et l'axe des ordonnées en L. Calculer les coordonnées des points K et L.
4. Placer les points K et L sur la figure. Tracer la droite d_2.
5. Montrer que d_1 et d_2 sont **parallèles**.

Exercice 16.

(unité le cm)

1. Sur une figure, placer les points suivants :

$$A(-4;-1) \qquad B(2;2) \qquad C(2;-3) \qquad D(4;0)$$

2. Tracer la droite (AB). Vérifier que son équation est :

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

3. Tracer la droite (CD). Calculer son équation. Vérifier qu'on trouve :

$$y = \frac{3}{2}x - 6$$

4. Les droites (AB) et (CD) se coupent en un point qu'on note I. Placer ce point.
5. Calculer les coordonnées de I. Vérifier sur la figure.

Exercice 17.

(unité au choix)

1. Tracer un repère orthonormé et construire sur la même figure les droites suivantes :

$$d_1 : y = -2x + 3 \qquad d_2 : y = x$$

2. Calculer l'intersection I de d_1 et d_2. Vérifier la position de I sur la figure.

Exercice 18.

(unité au choix)

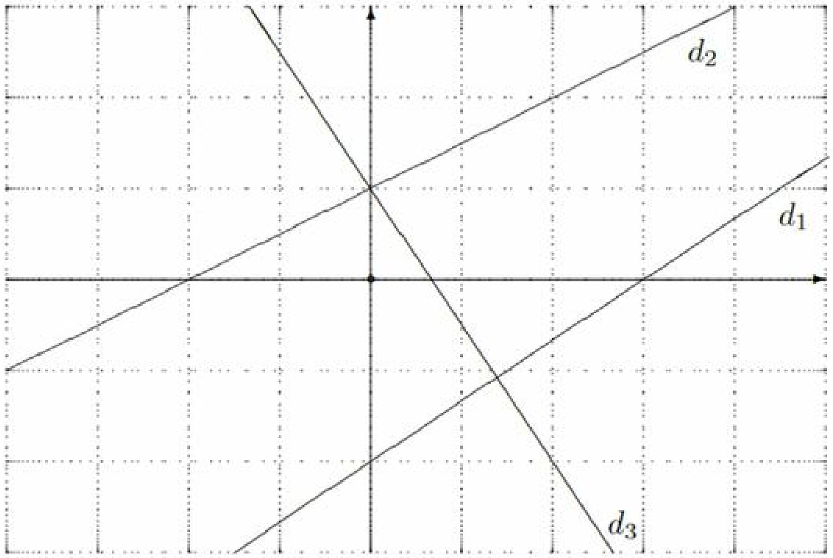
1. Tracer un repère orthonormé et construire sur la même figure les droites suivantes :

$$d_1 : y = 2x \qquad d_2 : y = 2x-1 \qquad d_3 : y = 2x+1 \qquad d_4 : y = 2x-4$$

2. Comment pouvait-on prévoir que les quatre droites seraient parallèles entre elles ?

Exercice 19.

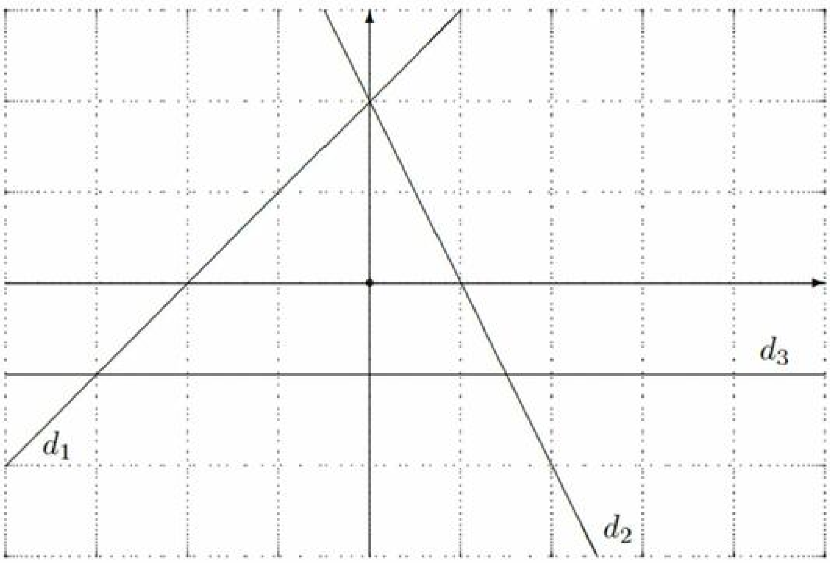
La figure ci-dessous est quadrillée en cm.



1. En lisant la figure, déterminer l'ordonnée à l'origine de d_1 et un vecteur directeur.
2. En déduire la pente puis l'équation de d_1.
3. Reprendre les mêmes questions pour d_2, puis pour d_3.
4. Calculer l'intersection I de d_1 et d_2. Vérifier qu'on trouve $I(18;10)$
5. Calculer l'intersection J de d_1 et d_3. Vérifier les coordonnées de J sur la figure.
6. Les droites d_1 et d_3 sont-elles perpendiculaires ? Justifier votre réponse par un calcul.

Exercice 20.

La figure ci-dessous est quadrillée en cm.



1. En lisant la figure, déterminer l'ordonnée à l'origine de d_1 et un vecteur directeur.
2. En déduire la pente puis l'équation de d_1.
3. Reprendre les mêmes questions pour d_2.
4. Calculer l'équation de d_3
5. Les droites d_1 et d_2 sont-elles perpendiculaires ? Justifier votre réponse par un calcul.

Exercice 21.

(unité au choix) On considère le point $I(-3;2)$ et la droite d, issue de I, et de coefficient directeur :

$$a = -\frac{1}{2}$$

1. Déterminer le vecteur directeur $\vec{u}$ de d.
2. Montrer que le vecteur $\vec{v} = (2;-1)$ a la même direction que $\vec{u}$.
3. Soit J le translaté de I suivant le vecteur $\vec{v}$. Calculer les coordonnées de J.
4. Placer le point J et tracer la droite d.

Exercice 22.

(unité au choix) On considère le point $I(-1;3)$ et la droite d, issue de I, et de coefficient directeur :

$$a = -\frac{2}{3}$$

1. Calculer l'équation de d.
2. Soit le point $L(2;1)$. Vérifier que $L \in d$.
3. Tracer la droite d.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes de coordonnées.
5. Vérifier sur la figure.

Exercice 23.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soit d la droite d'équation :

$$y = -\frac{2}{5}x + 1$$

Soit d' la droite issue de l'origine du repère, et perpendiculaire à d. Ces deux droites se coupent en I.

1. Construire les deux droites et le point I.
2. Calculer l'équation de d'.
3. Calculer les coordonnées de I. Vérifier sur la figure.

Exercice 24.

On se place dans un repère orthonormé du plan. La droite d d'équation :

$$y = 2x - 3$$

coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.

1. Construire d. Placer A et B.
2. Calculer les coordonnées de ces deux points. Vérifier sur la figure.

Exercice 25.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soit la droite d d'équation :

$$y = 3x + 2$$

On considère le point $A(2;3)$. La droite d', issue de A, et perpendiculaire à d, coupe d en I. On se propose de calculer le point A', symétrique A par rapport à d.

1. Construire la droite d.
2. Compléter la figure.
3. Calculer l'équation de d'.
4. Calculer les coordonnées de I. Vérifier qu'on trouve :

$$I(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$$

5. On note $(x;y)$ les coordonnées de A'. Écrire les équations qui traduisent que I est milieu de $[AA']$.
6. Résoudre ces équations. Vérifier qu'on trouve finalement : $A'(-1;4)$

Exercice 26.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient les points $A(3;0)$, $B(0;1)$. On note d la médiatrice de $[AB]$, et I le milieu de $[AB]$.

1. Soit un point quelconque $M(x;y)$. On sait que :

$$M \in d \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$$

Utiliser cette relation et la **formule de la longueur** (*voir* th. 2, p. 83) pour calculer l'équation de d. Vérifier qu'on trouve :

$$y = 3x - 4$$

2. Tracer d. Vérifier avec l'équerre qu'on a bien : $d \perp (AB)$.
3. Calculer les coordonnées de I.
4. Vérifier, grâce à l'équation de d, qu'on a : $I \in d$
5. Calculer l'équation de (AB). Vérifier qu'on trouve :

$$y = -\frac{x}{3} + 1$$

Exercice 27.

(unité le cm) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(2;5)$.

1. Tracer le triangle ABC.
2. Soit d la médiatrice de $[AC]$, d' celle de $[AB]$. On note Ω l'intersection de ces deux médiatrices. Construire d et d'. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

3. Déterminer l'abscisse de Ω. Vérifier qu'on trouve $x_\Omega = \dfrac{5}{2}$.
4. Calculer l'équation de d en utilisant la propriété suivante :

$$M \in d \Leftrightarrow AM^2 = CM^2$$

5. Déterminer l'ordonnée de Ω. Vérifier qu'on trouve $y_\Omega = \dfrac{19}{10}$.
6. Soit r le rayon de $\mathscr{C}$. Calculer r^2, puis r. Vérifier qu'on trouve :

$$r = \frac{1}{10}\sqrt{986} \approx 3{,}14$$

7. Vérifier sur la figure.

Exercice 28 *(la droite d'Euler)***.**

(prendre une grande unité) Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(2;3)$.

1. Tracer le triangle ABC.
2. Calculer les longueurs de ses côtés. Montrer que ce n'est pas un triangle rectangle.
3. On note H l'**orthocentre** (*voir* § 3, p. 63) du triangle ABC, et d_1 la **droite** hauteur relative à B.
   a/ Déterminer l'abscisse de H. Vérifier qu'on trouve $x_H = 2$.
   b/ Calculer le vecteur $\overrightarrow{AC}$. En déduire le coefficient directeur de la droite (AC).
   c/ Calculer le coefficient directeur de d_1, puis l'équation de d_1.
   d/ Déterminer l'ordonnée de H. Vérifier qu'on trouve $y_H = 2$.
4. On note Ω l'intersection des médiatrices de ABC, et d_2 la médiatrice de $[AC]$
   a/ Déterminer l'abscisse de Ω. Vérifier qu'on trouve $x_\Omega = \dfrac{5}{2}$.
   b/ Calculer l'équation de d_2 en utilisant la propriété suivante :

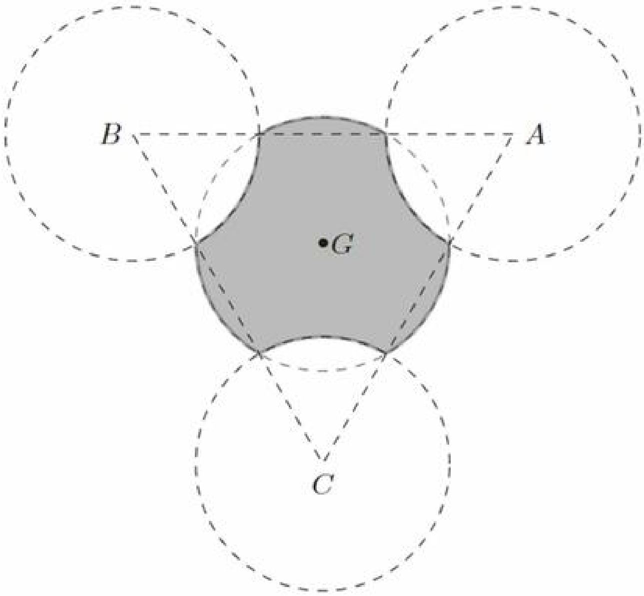
$$M \in d_2 \quad \Leftrightarrow \quad AM = CM \quad \Leftrightarrow \quad AM^2 = CM^2$$

   c/ Déterminer l'ordonnée de Ω. Vérifier qu'on trouve $y_\Omega = \dfrac{1}{2}$.
5. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Utiliser la prop. 10, p. 87 pour calculer les coordonnées de G. Vérifier qu'on trouve $G(\frac{7}{3};1)$.
6. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega G}$ et $\overrightarrow{\Omega H}$ sont colinéaires. En déduire que les trois points H, G, Ω sont alignés.
7. Vérifier que ces trois points appartiennent à la **droite d'Euler** d'équation :

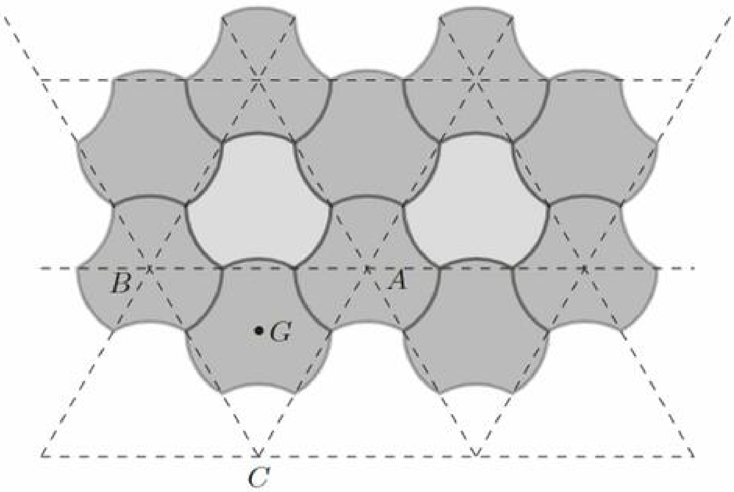
$$y = -3x + 8$$

Récréation 29 (*pavage* (iii)).

On considère le motif grisé $\mathscr{M}$ ci-contre, dont le contour est formé de six arcs de cercles, alternativement sortants et rentrants.
Pour le construire, on trace, comme ci-dessous, un **triangle équilatéral** ABC, de côté 3, son centre de gravité G, puis le cercle de centre G et de rayon 1. Ce cercle donne les trois **arcs sortants** du motif.
On trace ensuite les cercles de centres A, B, C et de rayon 1. Ces trois cercles donnent les trois **arcs rentrants** du motif.



On a esquissé ci-dessous un **pavage du plan** avec $\mathscr{M}$ et des translatés. Pour ce faire, on construit d'abord un empilement de triangles équilatéraux comme ABC, et on marque leur centre de gravité. On trace ensuite les arcs de cercles des contours. Ils sont centrés aux centres de gravité ou aux sommets des triangles.



12 Correction des exercices

Ex. 1, p. 97. 1. Voici les coordonnées :

	A	B	C	D	E	F	G
x	0	1	3	2	0	-3	-2
y	0	-1	0	1	2	0	-2

2. Les carrés des distances s'obtiennent par la formule de la longueur (th. 2, p. 83) :

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ &= (2-1)^2 + (1+1)^2 \\ &= 1+4 \;=\; 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BE^2 &= (x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 \\ &= (0-1)^2 + (2+1)^2 \\ &= 1+9 \;=\; 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BF^2 &= (x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2 \\ &= (-3-1)^2 + (0+1)^2 \\ &= 16+1 \;=\; 17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BG^2 &= (x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2 \\ &= (-2-1)^2 + (-2+1)^2 \\ &= 9+1 \;=\; 10 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$BD = \sqrt{5} \approx 2{,}2 \qquad BE = \sqrt{10} \approx 3{,}2 \qquad BF = \sqrt{17} \approx 4{,}1 \qquad BG = \sqrt{10} \approx 3{,}2$$

4. On constate que $BE = BG = \sqrt{10}$, ce qui prouve que B est équidistant de E et G. Il appartient donc à la médiatrice de $[EG]$.
5. On calcule :

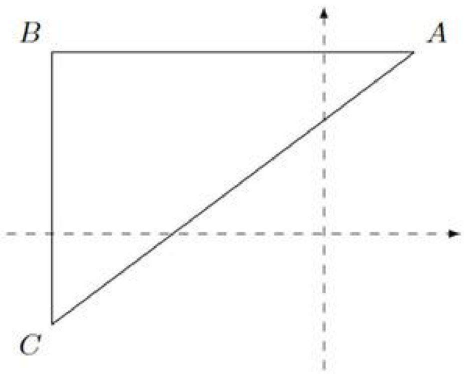
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= (x_D - x_A; y_D - y_A) \;=\; (2-0; 1-0) \;=\; (2;1) \\ \overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B; y_C - y_B) \;=\; (3-1; 0+1) \;=\; (2;1) \end{aligned}$$

On constate :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Donc, par le cor. 9, p. 87, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Ex. 2, p. 97. 1. Voici la figure :



2. Les carrés des côtés s'obtiennent par la formule de la longueur (th. 2, p. 83) :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (-3-1)^2 + (2-2)^2 \\ &= 16 + 0 \;=\; 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (-3+3)^2 + (-1-2)^2 \\ &= 0 + 9 \;=\; 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA^2 &= (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \\ &= (1+3)^2 + (2+1)^2 \\ &= 16 + 9 \;=\; 25 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$AB = \sqrt{16} = 4 \qquad BC = \sqrt{9} = 3 \qquad CA = \sqrt{25} = 5$$

On constate que :

$$AB^2 + BC^2 = 19 + 9 = 25 = CA^2$$

Donc, par la réciproque du th. de Pythagore, on conclut que ABC est rectangle en B.
3. On a :

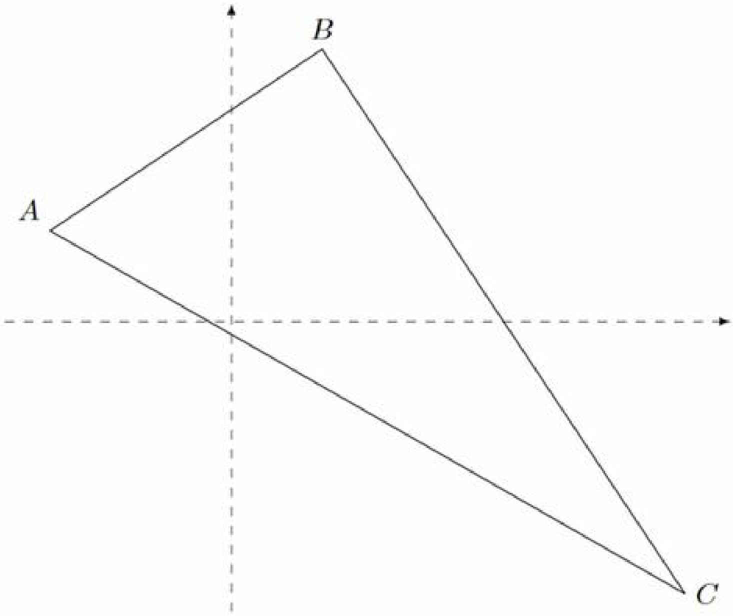
$$\cos C = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{CA} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

4. Pour calculer l'angle C, on utilise la touche $\boxed{\text{acos}}$ de la calculette. Sur certaines calculette, cette touche est nommée $\boxed{\text{arccos}}$ ou $\boxed{\cos^{-1}}$

On a :

$$\cos C = 0{,}6 \;\Leftrightarrow\; C = \text{acos } 0{,}6 = 53,13... \approx 53^\circ$$

Ex. 3, p. 97. 1. Voici la figure :



2. Les carrés des côtés s'obtiennent par la formule de la longueur (th. 2, p. 83) :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (1+2)^2 + (3-1)^2 \\ &= 9 + 4 \ = \ 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (5-1)^2 + (-3-3)^2 \\ &= 16 + 36 \ = \ 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA^2 &= (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \\ &= (-2-5)^2 + (1+3)^2 \\ &= 49 + 16 \ = \ 65 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$AB = \sqrt{13} \qquad BC = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13} \qquad CA = \sqrt{65} = \sqrt{5 \times 13} = \sqrt{5}\sqrt{13}$$

On constate que :

$$AB^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65 = CA^2$$

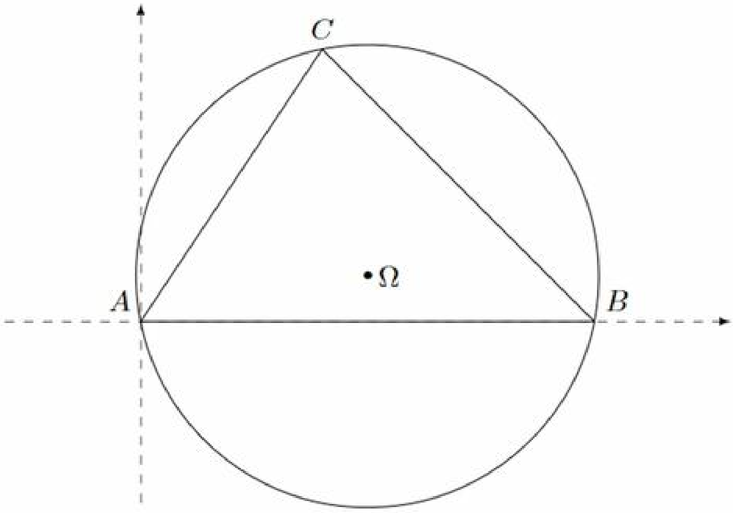
Donc, par la réciproque du th. de Pythagore, on conclut que ABC est rectangle en B.
3. On a :

$$\cos A = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{CA} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}4472...$$

4. Pour calculer A, on utilise l'expression exacte de cos A. On obtient :

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \Leftrightarrow \ A = \text{acos}\ \frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43... \approx 63^\circ$$

Ex. 4, p. 98. 1. Voici la figure :



2. Les carrés des longueurs s'obtiennent par la formule de la longueur :

$$\begin{aligned}\Omega A^2 &= (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 \\ &= (-2{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 \\ &= 6{,}25 + 0{,}25 = 6{,}5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega B^2 &= (x_B - x_\Omega)^2 + (y_B - y_\Omega)^2 \\ &= (5 - 2{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 \\ &= 6{,}25 + 0{,}25 = 6{,}5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega C^2 &= (x_C - x_\Omega)^2 + (y_C - y_\Omega)^2 \\ &= (2 - 2{,}5)^2 + (3 - 0{,}5)^2 \\ &= (-0{,}5)^2 + (2{,}5)^2 \\ &= 0{,}25 + 6{,}25 = 6{,}5\end{aligned}$$

3. On constate :

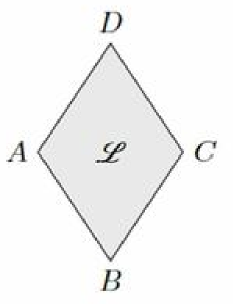
$$\Omega A^2 = \Omega B^2 = \Omega C^2 = 6{,}5$$

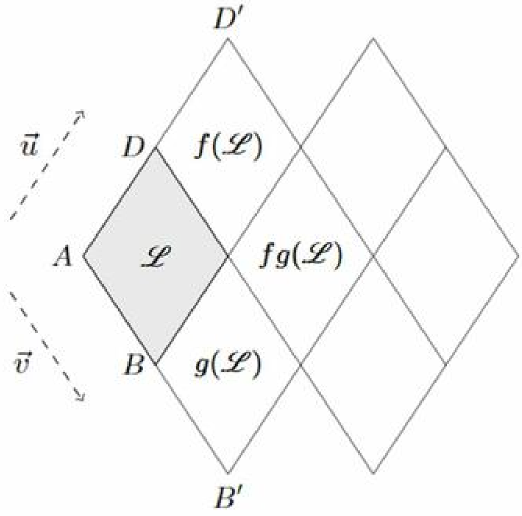
Donc :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C$$

Le point Ω est donc équidistant de A, B, C. C'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Pour tracer le cercle circonscrit, on pique en Ω, on ouvre jusqu'au point A, et on tourne. Si le tracé est précis, le cercle passe aussi par B et C.

Ex. 5, p. 98. Voici les figures :





3. On calcule :

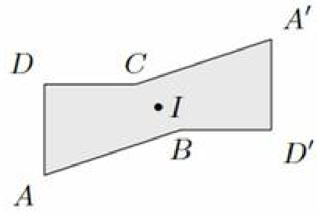
$$\begin{array}{rcl} \vec{u} = \overrightarrow{AD} & = & (x_D - x_A; y_D - y_A) = (0-(-2); 3-0) = (2;3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} & = & (x_B - x_A; y_B - y_A) = (0-(-2); -3) = (2;-3) \end{array}$$

4. a/ Puisque f est la translation de vecteur $\vec{u}$ on a (*voir* déf. 2, p. 85) :

$$D' = f(D) \Leftrightarrow \boxed{D' = D + \vec{u}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_{D'} & = & x_D + 2 \\ y_{D'} & = & y_D + 3 \end{array} \right.$$

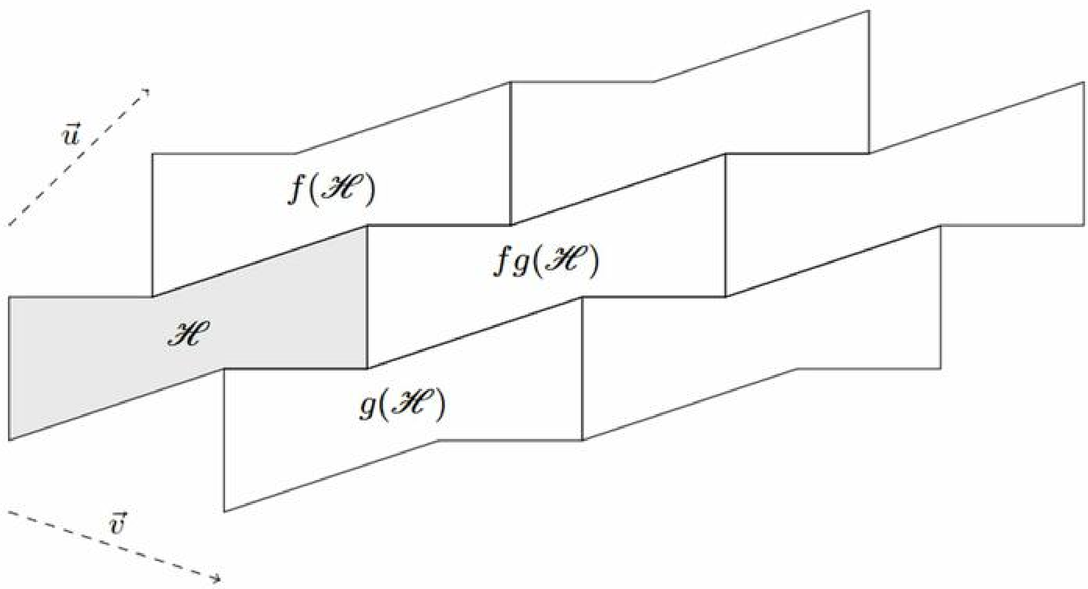
Or $D(0;3)$, on en déduit donc $D'(2;6)$. On démontrerait de même $B'(2;-6)$

Ex. 6, p. 98.

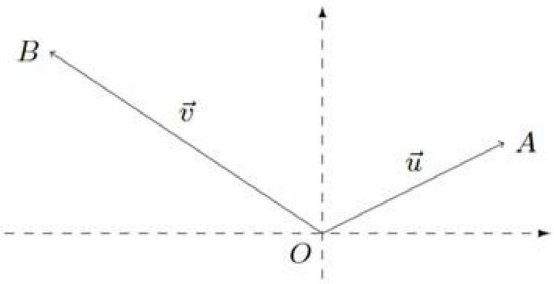


4. On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (x_C - x_A; y_C - y_A) = (2,2) \\ \vec{v} & = & (x_B - x_D; y_B - y_D) = (3; 1-2) = (3;-1) \end{array}$$



Ex. 7, p. 99.



1. Les coordonnées de A et B sont celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$A(2; 1) \qquad B(-3; 2)$

En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} = \vec{u} &\Leftrightarrow (x_A - 0; y_A - 0) = (x_A; y_A) = (2; 1)\\ \overrightarrow{OB} = \vec{v} &\Leftrightarrow (x_B - 0; y_B - 0) = (x_B; y_B) = (-3; 2)\end{aligned}$$

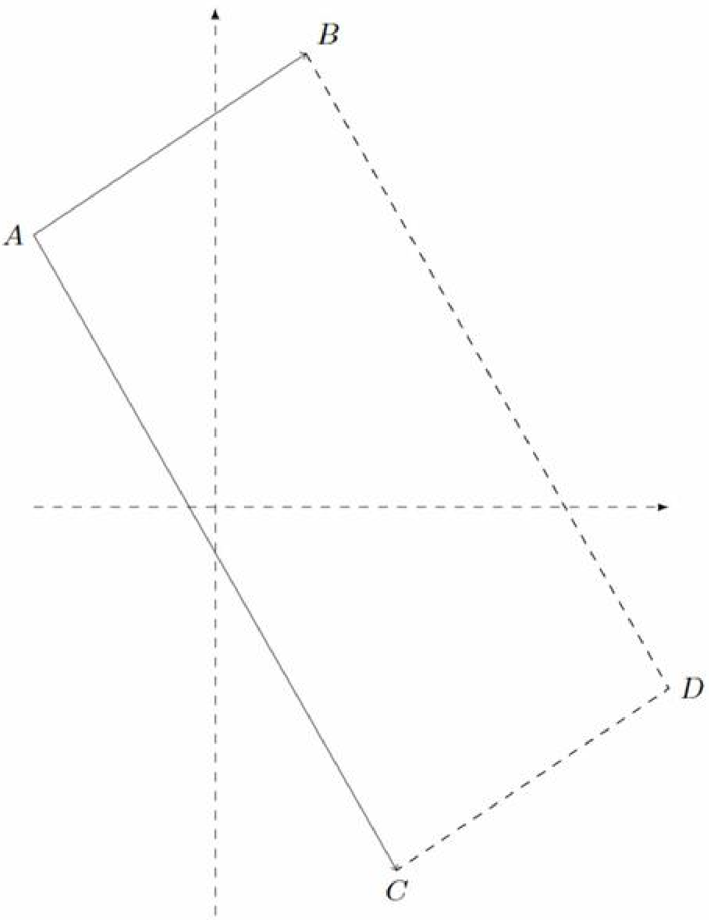
2. On a :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2 \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$

Ex. 8, p. 99.

2. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A)\\ &= (1 - (-2); 5 - 3)\\ &= (3; 2)\\ \overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A)\\ &= (2 - (-2); -4 - 3)\\ &= (4; -7)\end{aligned}$$



3. Le point D est à l'intersection de la parallèle à (AC) issue de B, et de la parallèle à (AB) issue de C.

4. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &= (3; 2) + (4; -7)\\ &= (7; -5)\end{aligned}$$

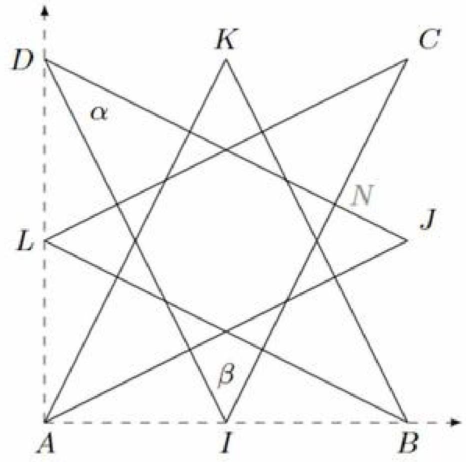
5. On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AD}\| &= \sqrt{7^2 + (-5)^2}\\ &= \sqrt{49 + 25}\\ &= \sqrt{74}\\ &\approx 8{,}6\end{aligned}$$

Ex. 9, p. 99.

2. On a :

$$\begin{aligned} ID &= \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$



3. Puique K et D ont la même ordonnée, la droite (KD) est horizontale. Puisque K et I ont la même abscisse, la droite (KI) est verticale. Donc :

$$(KD) \perp (KI)$$

ce qui montre que le triangle DKI est rectangle en K. La droite (KI) est hauteur principale du triangle isocèle DIC, elle est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{DIC}$. Donc :

$$\widehat{DIK} = \frac{\beta}{2}$$

4. Dans le triangle rectangle DKI, on a $IK = y_K - y_I = 2$. Donc :

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{IK}{ID} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

5. On en déduit :

$$\frac{\beta}{2} = \text{acos}\frac{2}{\sqrt{5}} = 26{,}56... \qquad \text{donc} \qquad \beta \approx 53°$$

6. On a :

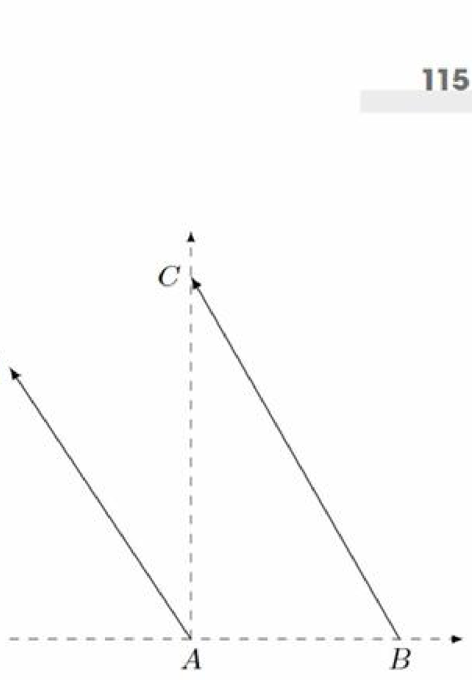
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} &= (x_I - x_C; y_I - y_C) \\ &= (1-2; 0-2) \\ &= (-1; -2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{DJ} &= (x_J - x_D; y_J - y_D) \\ &= (2; 1-2) \\ &= (2; -1) \end{aligned}$$

On constate $-1 \times 2 + (-2) \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{DJ}$, d'après le critère d'orthogonalité (*voir* th. 18, p. 90).

7. Notons N le point d'intersection des droites (CI) et (DJ). Ces droites sont perpendiculaires puisque $\overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{DJ}$. Et donc le triangle DNI est rectangle en N. Il s'ensuit que ses angles aigus α et β sont complémentaires, et donc :

$$\alpha = 90 - \beta \approx 90 - 53 \approx 37°$$

Ex. 10, p. 100.



2. On calcule :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= (x_D - x_A ; y_D - y_A)\\ &= (-2;3)\end{aligned}$$

3. Et de même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B ; y_C - y_B)\\ &= (0-x;4-0)\\ &= (-x;4)\end{aligned}$$

4. On connaît le critère algébrique de parallélisme (*voir* prop. 15, p. 89 et th. 17, p. 89) :

$$(AD) /\!\!/ (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ colinaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0$$

Calculons le déterminant :

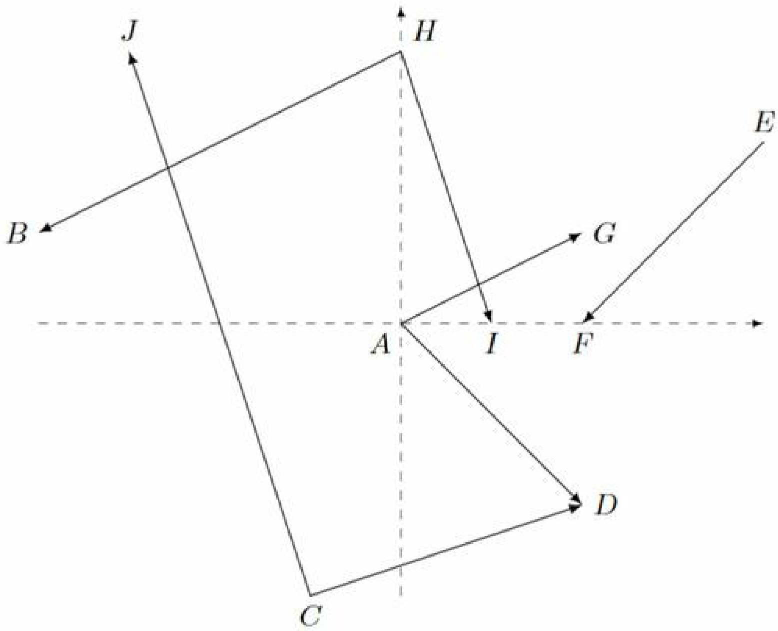
$$\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -2 & -x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)\times 4 - 3 \times (-x) = -8 + 3x$$

La condition algébrique de parallélisme des droites (AD) et (BC) est donc :

$$\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow -8+3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \approx 2{,}3$$

5. et 6. Sur la figure, on place B en $(2{,}3;0)$ et on vérifie le parallélisme avec la règle.

Ex. 11, p. 100.



2. On calcule :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HI} &= (x_I - x_H ; y_I - y_H)\\ &= (1;0-3)\\ &= (1;-3)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overrightarrow{CJ} &= (x_J - x_C ; y_J - y_C)\\ &= (-3-(-1);3-(-3))\\ &= (-2;6)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\det(\overrightarrow{HI},\overrightarrow{CJ}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 6 - (-2)\times(-3) = 0$$

3. Comme ce déterminant est nul, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires. Plus précisément, on a :

$$-2\overrightarrow{HI} = -2.(1;-3) = (-2;6) = \overrightarrow{CJ}$$

4. On calcule :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= (x_G - x_A; y_G - y_A)\\ &= (2;1)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= (x_D - x_C; y_D - y_C)\\ &= (2-(-1); -2-(-3))\\ &= (3;1)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 1 - 3\times 1 = -1$$

5. Ce déterminant étant $\neq 0$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, et donc les droites (AG) et (CD) ne sont pas parallèles.
6. Les propriétés à prouver résultent des calculs suivants :

$$\det(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4+4 = 0 \qquad \det(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6 \neq 0$$

$$\det(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2+4 \neq 0$$

Ex. 12, p. 101. 2. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan. On utilise la méthode du déterminant (*voir* p. 91) :

$$\boxed{M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0}$$

On calcule les vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= (x-3; y-5)\\ \overrightarrow{AB} &= (-2-3; -1-5) = (-5;-6)\end{aligned}$$

On calcule le déterminant :

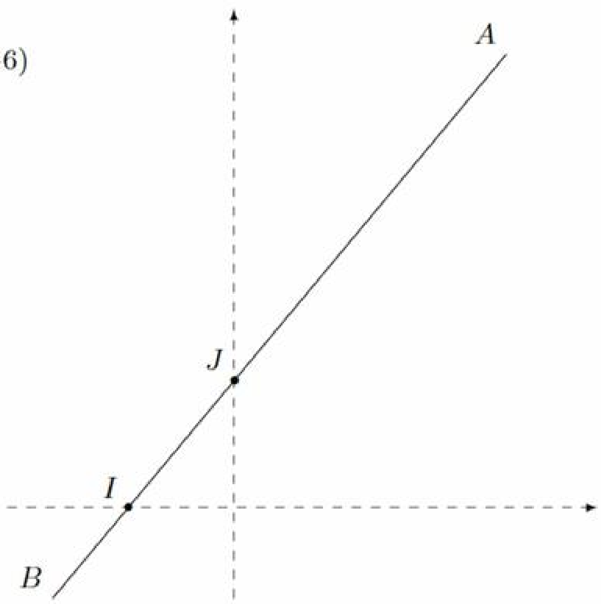
$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) &= \begin{vmatrix} x-3 & -5 \\ y-5 & -6 \end{vmatrix}\\ &= -6\times(x-3) + 5\times(y-5)\\ &= -6x + 5y + 18 - 25\\ &= -6x + 5y - 7\end{aligned}$$

On a donc :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow -6x + 5y - 7 = 0$$

On isole y :

$$\begin{aligned}5y &= 6x + 7\\ y &= \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}\end{aligned}$$



Finalement, l'équation réduite cherchée est :

$$\boxed{y = \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}}$$

4. a/ On sait que l'ordonnée de I est nulle. On a donc $I(x;0)$ et on cherche x :

$$I \in (AB) \Leftrightarrow 0 = \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$$

ce qui équivaut à :

$$6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6}$$

b/ On sait que l'abscisse de J est nulle. On a donc $J(0;y)$ et on cherche y :

$$J \in (AB) \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} \times 0 + \frac{7}{5}$$

c'est-à-dire : $y = \frac{7}{5}$.

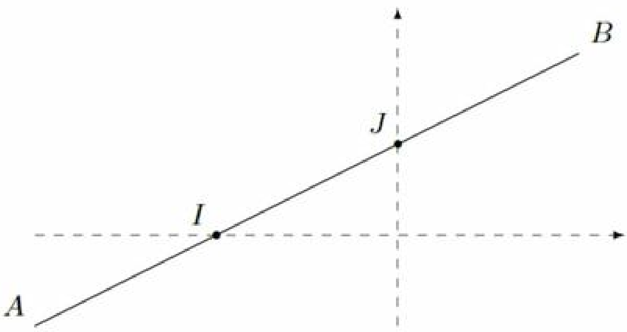
5. On vérifie sur la figure, l'abscisse de I : $\boxed{x \approx -1{,}2}$ et l'ordonnée de J : $\boxed{y = 1{,}4}$

Ex. 13, p. 101. 2. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan. On utilise la méthode du déterminant (*voir* p. 91) :

$$M \in (AB) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires } \;\Leftrightarrow\; \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

On calcule les vecteurs :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM} & = & (x-(-4); y-(-1)) \\ & = & (x+4; y+1) \\ \overrightarrow{AB} & = & (2+4; 2+1) = (6;3) \end{array}$$



On calcule le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rl} = & 3 \times (x+4) - 6 \times (y+1) \\ = & 3x - 6y + 12 - 6 \\ = & 3x - 6y + 6 \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} M \in (AB) & \Leftrightarrow & 3x - 6y + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x - 2y + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & 2y = x + 2 \\ & \Leftrightarrow & y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}$$

C'est l'équation réduite cherchée.

4. a/ On sait que l'ordonnée de I est nulle. On a donc $I(x;0)$ et on cherche x :

$$I \in (AB) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x + 1$$

CORRIGÉS

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

b/ On sait que l'abscisse de J est nulle. On a donc $J(0; y)$ et on cherche y :

$$J \in (AB) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \times 0 + 1$$

c'est-à-dire : $y = 1$.

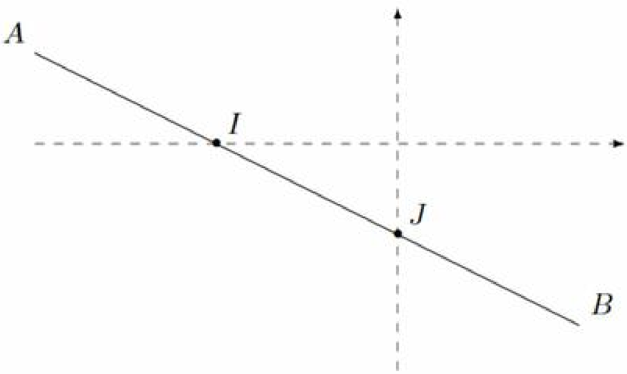
5. On vérifie sur la figure, l'abscisse de I : $\boxed{x = -2}$ et l'ordonnée de J : $\boxed{y = 1}$

Ex. 14, p. 101. 2. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. On a :

$$M \in (AB) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires } \;\Leftrightarrow\; \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

On calcule les vecteurs :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM} & = & (x - (-4); y - 1) \\ & = & (x + 4; y - 1) \\ \overrightarrow{AB} & = & (2 + 4; -2 - 1) \\ & = & (6; -3) \end{array}$$



On remplace $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur colinéaire $\vec{u} = (2; -1)$. On a :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x + 4 & 2 \\ y - 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rl} = & -(x + 4) - 2 \times (y - 1) \\ = & -x - 2y - 2 \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} M \in (AB) & \Leftrightarrow & -x - 2y - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & 2y = -x - 2 \\ & \Leftrightarrow & y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{array}$$

C'est l'équation réduite cherchée.

4. a/ On sait que l'ordonnée de I est nulle. On a donc $I(x; 0)$ et on cherche x :

$$I \in (AB) \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}x - 1$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

b/ On sait que l'abscisse de J est nulle. On a donc $J(0; y)$ et on cherche y :

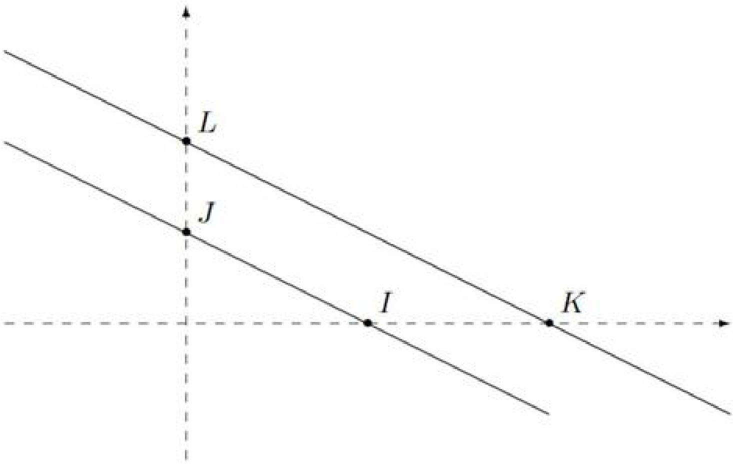
$$J \in (AB) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \times 0 - 1$$

c'est-à-dire : $y = -1$.

5. On vérifie sur la figure, l'abscisse de I : $\boxed{x = -2}$ et l'ordonnée de J : $\boxed{y = -1}$

Ex. 15, p. 101.

1. a/ On cherche $I \in d_1$ de coordonnées $(x;0)$:



$$I \in (d_1) \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 1$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

b/ On cherche $J \in d_1$ de coordonnées $(0;y)$:

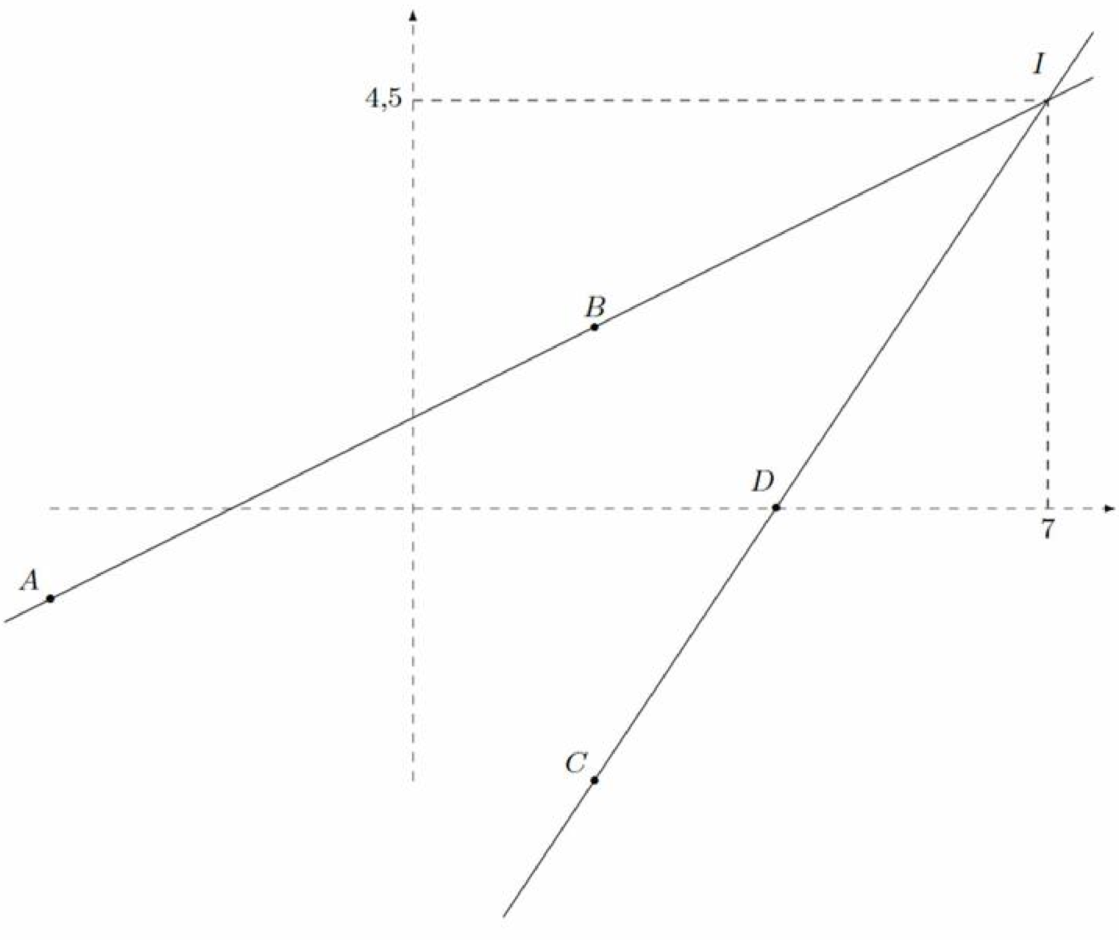
$$J \in (d_1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\times 0 + 1$$

c'est-à-dire : $y = 1$.

3. On montre de façon analogue qu'on a : $K(4;0)$ et $L(0;2)$

5. Sur leur équation, on voit que les droites d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur. On en conclut qu'elles sont parallèles d'après la prop. 10, p. 93.

Ex. 16, p. 102.



2. Puisqu'une droite n'a qu'une équation réduite, pour montrer que (AB) a pour équation réduite $y = \frac{x}{2} + 1$, il suffit de prouver que les coordonnées de A et de B vérifient cette équation. Faisons-le pour A. On calcule $\frac{x}{2} + 1$ lorsque $x = x_A$. On trouve :

$$\frac{x_A}{2} + 1 = \frac{-4}{2} + 1 = -2 + 1 = -1$$

et c'est bien la valeur $y_A = -1$ attendue. Le calcul est analogue pour B.
3. De même, pour monter que (CD) a pour équation réduite $y = \frac{3}{2}x - 6$, il suffit de prouver que les coordonnées de C et de D vérifient cette équation. Faisons-le pour C. On calcule $\frac{3}{2}x - 6$ lorsque $x = x_C$. On trouve :

$$\frac{3}{2}x_C - 6 = \frac{3}{2} \times 2 - 6 = -3$$

et c'est bien la valeur $y_C = -3$ attendue. Le calcul est analogue pour D.
5. On procède comme expliqué dans le cours au § 10, p. 96 : notons $(x; y)$ les coordonnées du point I d'intersection de (AB) et (CD). Ce point appartient à ces deux droites si et seulement si, ses coordonnées vérifient leurs équations, c'est-à-dire vérifient le **système** suivant :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on calcule d'abord x en égalant les valeurs de y :

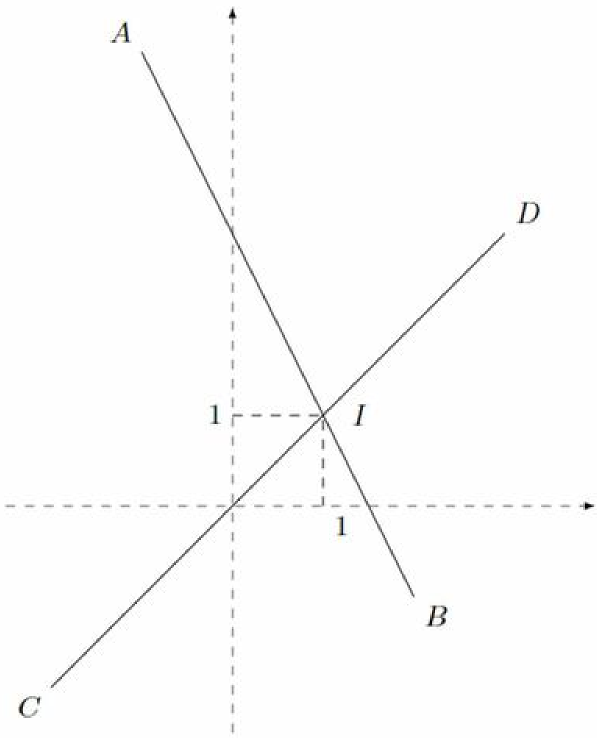
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= \frac{x}{2} + 1 \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)x &= 6 + 1 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Reportant cette valeur de x dans l'équation de (AB), on obtient :

$$y = \frac{7}{2} + 1 = 4{,}5$$

Les coordonnées de I sont donc $(7; 4{,}5)$. On le vérifie sur la figure.

Ex. 17, p. 102.



1. a/ Pour tracer d_1 d'équation $y = -2x + 3$, deux points suffisent.

Si on fait $x = -1$ dans son équation, on obtient $y = -2 \times (-1) + 3 = 5$. Ceci nous donne un premier point $A(-1; 5)$.

Si on fait $x = 2$ dans cette même équation, on obtient $y = -2 \times 2 + 3 = -1$. Ceci nous donne un deuxième point $B(2; -1)$.

On a donc $d_1 = (AB)$

b/ La droite d_2 d'équation $y = x$ est remarquable : c'est l'ensemble des points dont les deux coordonnées sont les mêmes :

$$d_2 = \{M(x; x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

Si on prend par exemple $C(-2; -2)$ et $D(3; 3)$, on a $d_2 = (CD)$.

2. On procède comme expliqué dans le cours au § 10, p. 96 : notons $(x; y)$ les coordonnées du point I d'intersection de d_1 et d_2. Ce point appartient à ces deux droites si et seulement si, ses coordonnées vérifient leurs équations, c'est-à-dire vérifient le **système** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x + 3 \\ y & = & x \end{array} \right.$$

On résout ceci en égalant les valeurs de y. On obtient :

$$x = -2x + 3 \ \Leftrightarrow\ 3x = 3 \ \Leftrightarrow\ x = 1$$

Les coordonnées de I sont donc $(1; 1)$. On le vérifie sur la figure.

CORRIGÉS

Ex. 18, p. 102. 1. On a choisi de tracer la partie des droites située dans la bande horizontale comprise entre $y = 3$ et $y = -3$. On calcule donc les deux points extrêmes sur chacune des quatre droites. Pour d_1 dont l'équation est $y = 2x$, on prend :

$$y = -3 \Rightarrow x = -1{,}5 \qquad\qquad y = 3 \Rightarrow x = 1{,}5$$

Pour d_2 dont l'équation est $y = 2x - 1$, on prend :

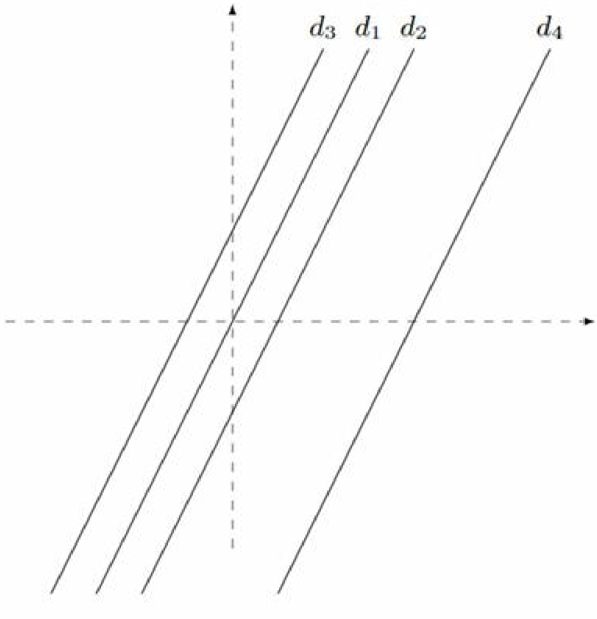
$$y = -3 \Rightarrow x = -1 \qquad\qquad y = 3 \Rightarrow x = 2$$

Pour d_3 dont l'équation est $y = 2x + 1$, on prend :

$$y = -3 \Rightarrow x = -2 \qquad\qquad y = 3 \Rightarrow x = 1$$

Pour d_4 dont l'équation est $y = 2x - 4$, on prend :

$$y = -3 \Rightarrow x = 0{,}5 \qquad\qquad y = 3 \Rightarrow x = 3{,}5$$



2. Les quatre droites ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles d'après la prop. 10, p. 93.

Ex. 19, p. 103. 1. L'ordonnée à l'origine de d_1 est -2. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (3; 2)$
2. On met 3 en facteur dans les coordonnées de $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 3.(1; \frac{2}{3})$$

On en déduit que la pente (ou coefficient directeur) de d_1 est $\frac{2}{3}$. L'équation réduite est :

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

3. a/ L'ordonnée à l'origine de d_2 est 1. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (2; 1)$. On met 2 en facteur dans les coordonnées de $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 2.(1; \frac{1}{2})$$

On en déduit que la pente de d_2 est $\frac{1}{2}$. Son équation réduite est donc :

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

b/ L'ordonnée à l'origine de d_3 est 1. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (2; -3)$. On met 2 en facteur dans les coordonnées de $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 2.(1; -\frac{3}{2})$$

On en déduit que la pente de d_3 est $-\frac{3}{2}$. Son équation réduite est donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

4. On résout le système formé des équations de d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{3}x - 2 \\ y &= \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

On calcule d'abord x en égalant les valeurs de y :

$$\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x = 3 \Leftrightarrow x = 18$$

On porte ensuite cette valeur dans la deuxième équation :

$$y = \frac{1}{2} \times 18 + 1 = 10$$

L'intersection de d_1 et d_2 est bien le point $I(18; 10)$

5. On résout le système formé des équations de d_1 et d_3 :

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{3}x - 2 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$$

On calcule d'abord x en égalant les valeurs de y :

$$\frac{2}{3}x - 2 = -\frac{3}{2}x + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)x = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{18}{13}$$

On porte ensuite cette valeur dans la première équation :

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{18}{13} - 2 = \frac{12}{13} - 2 = -\frac{14}{13}$$

L'intersection de d_1 et d_3 est donc le point J de coordonnées $\left(\frac{18}{13}; -\frac{14}{13}\right) \approx (1{,}4; -1{,}1)$

6. Le produit des coefficients directeurs de d_1 et d_3 vaut :

$$\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Ces droites sont donc perpendiculaires d'après la prop. 10, p. 93.

Ex. 20, p. 103. 1. L'ordonnée à l'origine de d_1 est 2. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (1;1)$
2. La pente (ou coefficient directeur) de d_1 est 1. L'équation réduite est donc :

$$y = x + 2$$

3. L'ordonnée à l'origine de d_2 est 2. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (1;-2)$. On en déduit que la pente de d_2 est -2. Son équation réduite est donc :

$$y = -2x + 2$$

4. La droite d_3 est horizontale, et son ordonnée à l'origine est -1. Son équation est donc :

$$y = -1$$

5. Le produit des coefficients directeurs de d_1 et d_2 vaut :

$$1 \times (-2) = -2 \neq -1$$

Ces droites ne sont donc pas perpendiculaires, d'après la prop. 10, p. 93.

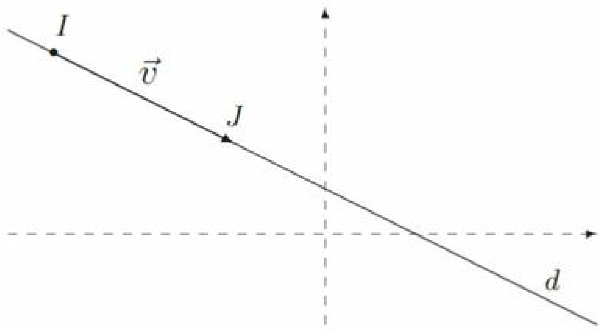
Ex. 21, p. 104.

1. Un vecteur directeur d'une droite de coefficient directeur a est :

$$\vec{u} = (1;a)$$

Ici, on a donc

$$\vec{u} = (1;-\frac{1}{2})$$



2. On a $\vec{v} = 2\vec{u}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires. On en déduit qu'ils ont la même direction.

3. Puisque J est le translaté de I par $\vec{v}$ on a :

$$\boxed{J = I + \vec{v}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J & = & x_I + 2 \\ y_J & = & y_I - 1 \end{cases}$$

Or on a $I(-3;2)$, donc les coordonnées de J sont $(-1;1)$.

Ex. 22, p. 104.

1. L'équation réduite de d est de la forme :

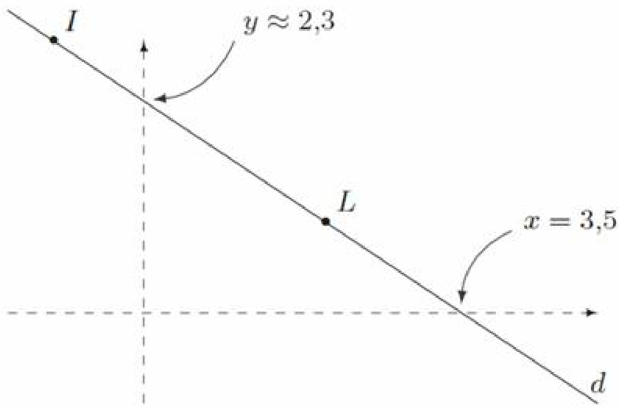
$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Pour déterminer le réel b, on traduit algébriquement la relation $I \in d$:

$$I \in d \Leftrightarrow 3 = \frac{2}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

L'équation de d est donc :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$



2. Pour que $L \in d$ il faut et il suffit que les coordonnées de L, à savoir $x_L = 2$ et $y_L = 1$ satisfassent l'équation de d. On on a :

$$-\frac{2}{3} \times 2 + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \times x_L + \frac{7}{3} = y_L$$

Donc $L \in d$.
4. a/ L'intersection de d avec l'axe des abscisses est le point d'ordonnée 0 qui satisfait l'équation de d. Son abscisse est donc solution de l'équation :

$$0 = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow -2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

b/ L'intersection de d avec l'axe des ordonnées est le point d'abscisse 0 qui satisfait l'équation de d. Son ordonnée vaut donc :

$$y = -\frac{2}{3} \times 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}3$$

Ex. 23, p. 104.

2. Le coefficient directeur de d vaut $-\frac{2}{5}$. Notons a' celui de d'. Puisque $d' \perp d$, on déduit, par la prop. 10, p. 93 :

$$-\frac{2}{5} \times a' = -1 \Leftrightarrow a' = \frac{5}{2}$$

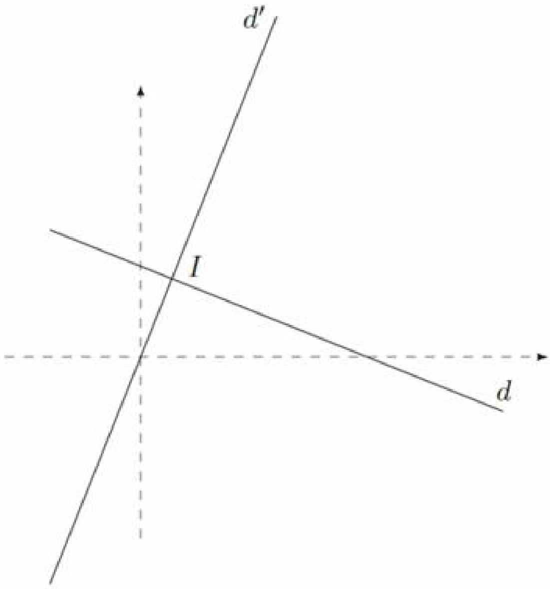
De plus, d' passe par l'origine, donc son équation est :

$$y = \frac{5}{2}x$$

3. On résout le système formé des équations de d et d' :

$$\begin{cases} y &= -\frac{2}{5}x + 1 \\ y &= \frac{5}{2}x \end{cases}$$

On égale les valeurs de y :



CORRIGÉS

$$\frac{5}{2}x = -\frac{2}{5}x + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}\right) \times x = 1 \Leftrightarrow \frac{29}{10} \times x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{29} \approx 0{,}3$$

On reporte dans la deuxième équation :

$$y = \frac{5}{2} \times \frac{10}{29} = \frac{25}{29} \approx 0{,}9$$

On peut vérifier ces coordonnées sur la figure avec une règle graduée.

Ex. 24, p. 104.

1. Pour construire d il suffit de calculer deux points satisfaisant son équation. Par exemple :

$$\begin{aligned} x = -0{,}5 &\Rightarrow y = 2 \times (-0{,}5) - 3 = -4 \\ x = 2{,}5 &\Rightarrow y = 2 \times 2{,}5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

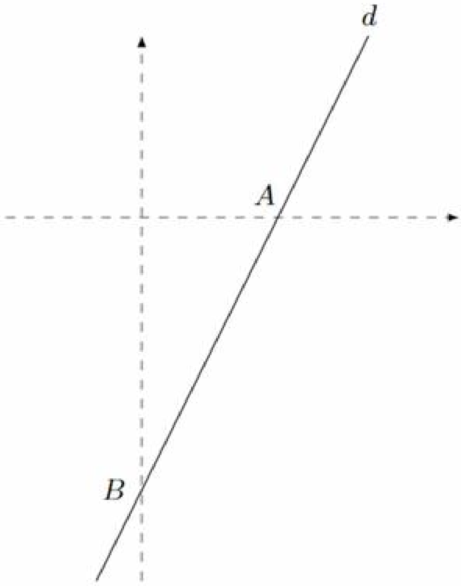
2. a/ On cherche sur d le point $A(x;0)$. On a :

$$A \in d \Leftrightarrow 0 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

b/ On cherche sur d le point $B(0;y)$. On a :

$$B \in d \Leftrightarrow y = 2 \times 0 - 3 = -3$$

On peut vérifier ces coordonnées sur la figure avec une règle graduée.



Ex. 25, p. 105.

1. Pour construire d il suffit de calculer deux points satisfaisant son équation. Par exemple :

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow y = 3 \times (-1) + 2 = -1 \\ x = 1{,}5 &\Rightarrow y = 3 \times 1{,}5 + 2 = 6{,}5 \end{aligned}$$

3. Le coefficient directeur de d vaut 3. Notons a' celui de d'. Puisque $d' \perp d$, on déduit, par la prop. 10, p. 93 :

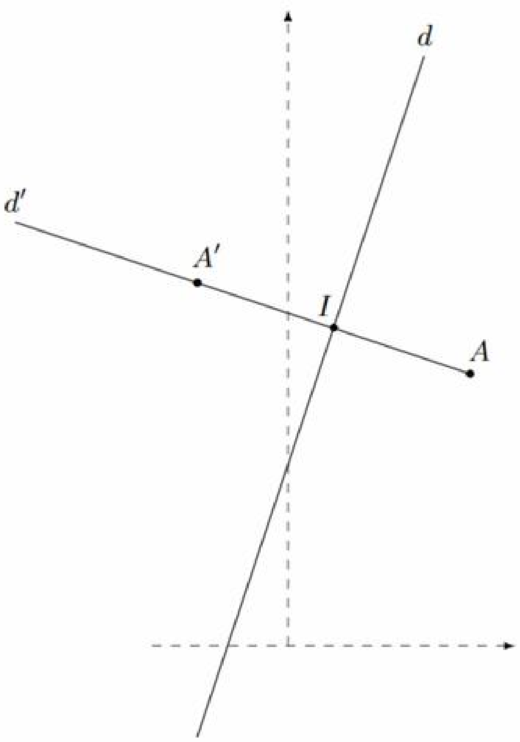
$$3 \times a' = -1 \Leftrightarrow a' = -\frac{1}{3}$$

L'équation de d' est donc de la forme :

$$y = -\frac{1}{3}x + b$$

où b est un réel inconnu. Pour le calculer, on traduit l'hypothèse que d' passe par $A(2;3)$:

$$A \in d' \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{3}\times 2 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$



Finalement, l'équation réduite de d' est :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

4. Les coordonnées $(x; y)$ de I sont obtenues en résolvant le système formé des équations de d et d' :

$$\begin{cases} y &= 3x + 2 \\ y &= -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases}$$

On égale les valeurs de y :

$$3x + 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \Leftrightarrow \left(3 + \frac{1}{3}\right)x = \frac{11}{3} - 2 \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On reporte ceci dans la première équation, et on obtient :

$$y = 3 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

5. Puisque I est milieu de $[AA']$, on a, par le th. 3, p. 84 :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_{A'}) \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_{A'})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2 + x) \qquad \text{et} \qquad \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(3 + y)$$

6. On multiplie par 2 ces deux équations pour **chasser les dénominateurs** et on obtient :

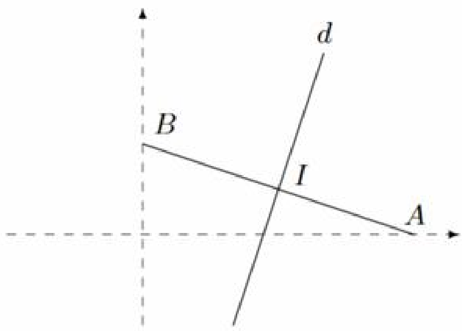
$$2 + x = 1 \Leftrightarrow x = -1 \qquad \text{et} \qquad 3 + y = 7 \Leftrightarrow y = 4$$

On vérifie sur la figure que les coordonnées du symétrique A' de A sont bien $(-1; 4)$.

Ex. 26, p. 105.

1. On a :

$$\begin{aligned} AM^2 &= BM^2 \\ (x-3)^2 + y^2 &= x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + 9 - 6x + y^2 &= x^2 + y^2 + 1 - 2y \\ \cancel{x^2} + 9 - 6x + \cancel{y^2} &= \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 1 - 2y \\ 1 - 2y &= 9 - 6x \\ -2y &= 8 - 6x \\ y &= 3x - 4 \end{aligned}$$



3. Par le th. 3, p. 84, on a :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. On calcule $3x_I - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$. Comme $y_I = \frac{1}{2}$, ceci prouve que $I \in d$.

5. Pour calculer l'équation de (AB), on peut utiliser le déterminant ou procéder ainsi : le coefficient directeur de d vaut 3. Notons a' celui de (AB). Puisque $(AB) \perp d$, on déduit, par la prop. 10, p. 93 :

$$3 \times a' = -1 \Leftrightarrow a' = -\frac{1}{3}$$

L'équation de (AB) est donc de la forme :

$$y = -\frac{1}{3}x + b$$

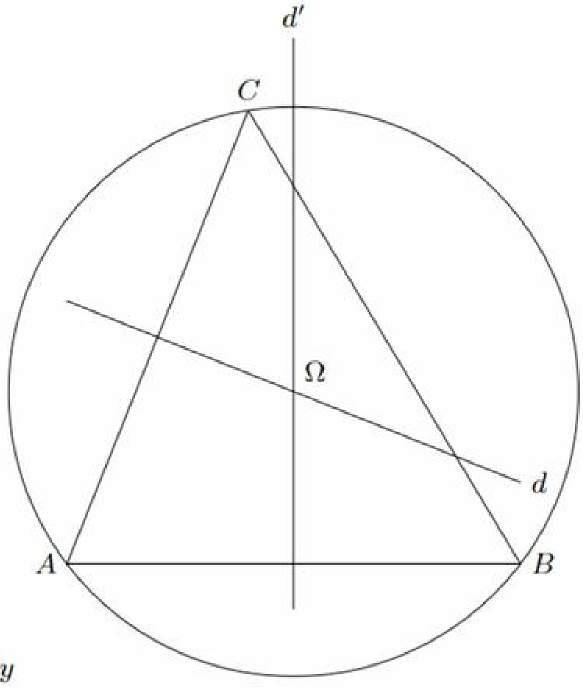
où b est un réel inconnu. On traduit l'hypothèse que (AB) passe par $A(3;0)$:

$$A \in (AB) \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 1$$

Finalement, l'équation réduite de (AB) est :

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

Ex. 27, p. 105.



3. Puisque A et B ont la même ordonnée, le segment $[AB]$ est horizontal. La médiatrice de $[AB]$ est donc verticale. Elle passe par le milieu de $[AB]$ qui a pour abscisse :

$$\frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$$

et pour ordonnée 0. Donc l'équation de la médiatrice de $[AB]$ est :

$$x = 2{,}5$$

et donc $x_\Omega = 2{,}5$

4. On a :

$$\begin{aligned}
AM^2 &= CM^2 \\
x^2 + y^2 &= (x-2)^2 + (y-5)^2 \\
x^2 + y^2 &= x^2 + 4 - 4x + y^2 + 25 - 10y \\
\cancel{x^2} + \cancel{y^2} &= \cancel{x^2} + 4 - 4x + \cancel{y^2} + 25 - 10y
\end{aligned}$$

Soit encore :

$$0 = 29 - 4x - 10y \Leftrightarrow 10y = -4x + 29 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$$

5. On calcule $y_\Omega = -\frac{2}{5} \times x_\Omega + \frac{29}{10} = -\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} + \frac{29}{10} = -1 + \frac{29}{10} = \frac{19}{10}$

6. On a

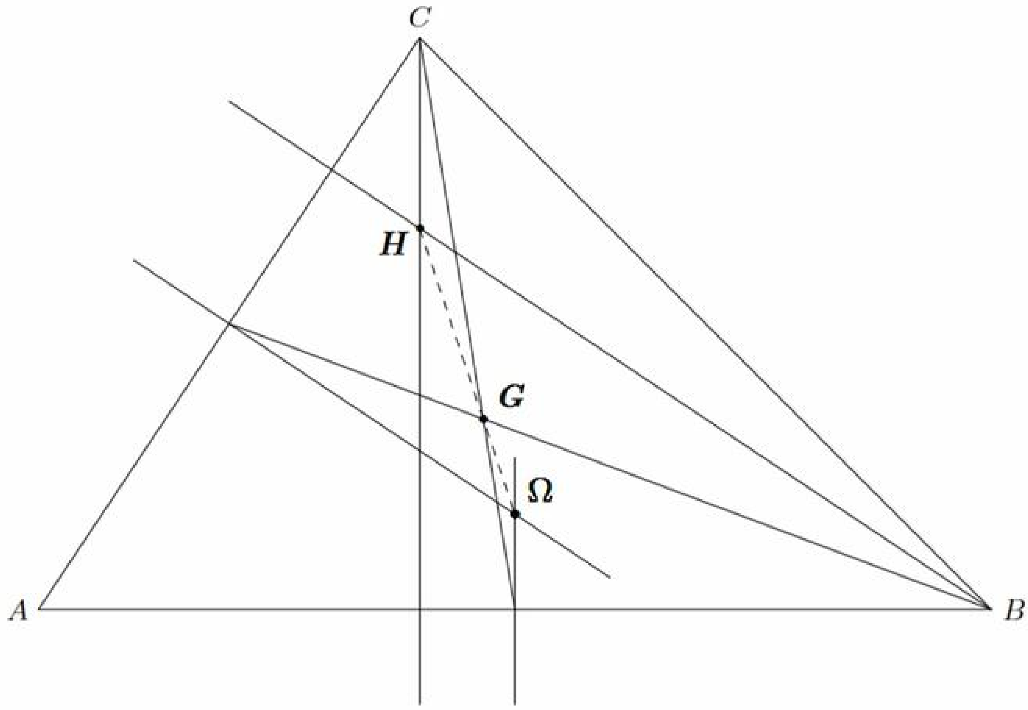
$$r^2 = A\Omega^2 = \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{19}{10} - 0\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{361}{100} = \frac{625 + 361}{100} = \frac{986}{100}$$

ce qui implique :

$$r = \sqrt{\frac{986}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{986} \approx 3{,}14$$

7. On vérifie cette valeur de r sur la figure en mesurant ΩA.

Ex. 28, p. 106.



2. Par la formule de la longueur, on trouve :

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 4 + 9 = 13$$

On trouve de même $AB^2 = 25$, $BC^2 = 18$. Si le triangle ABC était rectangle, la somme des deux plus petits de ces trois nombres vaudrait le troisième. Ce n'est pas le cas ici.
3. a/ Puisque (AB) est horizontale, la hauteur relative à C est verticale. Elle a donc pour équation $x = x_C$, c'est-à-dire, $x = 2$. Puisque H appartient à cette hauteur, on a $x_H = 2$.
b/ On a :

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (2; 3) = 2.(1; \frac{3}{2})$$

Le coefficient directeur de la droite (AC) est donc $\frac{3}{2}$.
c/ On sait que si deux droites sont perpendiculaires le produit de leur coefficients directeurs vaut -1. Donc, le coefficient directeur de d_1 est $-\frac{2}{3}$. L'équation de cette droite est donc de la forme :

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

De plus :

$$B \in d_1 \Leftrightarrow y_B = -\frac{2}{3}x_B + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{10}{3}$$

Finalement, l'équation de d_1 est :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

d/ Le point H est sur d_1, et son abscisse vaut 2. Son ordonnée vaut donc :

$$y_H = -\frac{2}{3} \times 2 + \frac{10}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

4. a/ Puisque (AB) est horizontale, la médiatrice de $[AB]$ est verticale. Le milieu de $[AB]$ ayant pour abscisse :

$$\frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{5}{2}$$

la médiatrice de $[AB]$ a pour équation $x = \frac{5}{2}$. Comme Ω appartient à cette médiatrice, on a bien $x_\Omega = \frac{5}{2}$.

b/ Puisqu'on a :

$$M \in d_2 \;\Leftrightarrow\; AM = CM \;\Leftrightarrow\; AM^2 = CM^2$$

l'équation de d_2 s'obtient par équivalences. Soit donc $M(x; y)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} AM^2 & = & CM^2 \\ x^2 + y^2 & = & (x-2)^2 + (y-3)^2 \\ x^2 + y^2 & = & x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} & = & \cancel{x^2} + 4 - 4x + \cancel{y^2} + 9 - 6y \\ 0 & = & -4x - 6y + 13 \\ y & = & -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6} \end{array}$$

c/ Le point Ω est sur d_2, et son abscisse vaut $\frac{5}{2}$. Son ordonnée vaut donc :

$$y_\Omega = -\frac{2}{3} \times \frac{5}{2} + \frac{13}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5. La prop. 10, p. 87 affirme que G vérifie la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On applique la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

On calcule :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (5:0) + (2;3) = (7;3) \qquad\qquad \overrightarrow{AG} = (x_G; y_G)$$

Donc :

$$(x_G; y_G) = \frac{1}{3}(7;3) = (\frac{7}{3}; 1)$$

6. On a :

$$\overrightarrow{\Omega G} = (\frac{7}{3} - \frac{5}{2}; 1 - \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}) \qquad\qquad \overrightarrow{\Omega H} = (2 - \frac{5}{2}; 2 - \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$$

On constate que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega G}$ sont donc colinéaires, ce qui prouve que H, G, Ω sont alignés.

7. Puisque les trois points sont alignés, il suffit de prouver que deux d'entre eux, par exemple H et G, vérifient l'équation $y = -3x + 8$ de la droite d'Euler. Ceci résulte des deux calculs suivants :

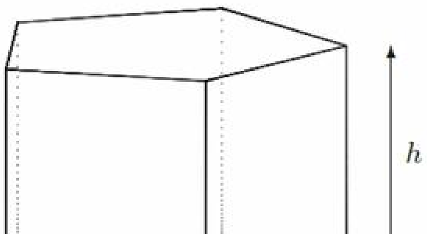
$$-3x_H + 8 = -3 \times 2 + 8 = 2 = y_H \qquad\qquad -3x_G + 8 = -3 \times \frac{7}{3} + 8 = -7 + 8 = 1 = y_G$$

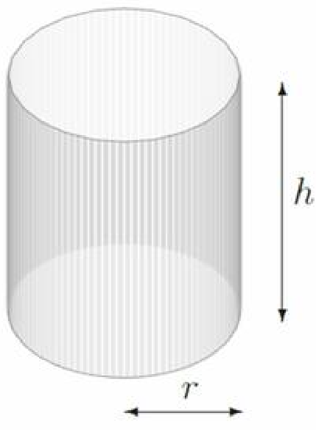
Chapitre 5

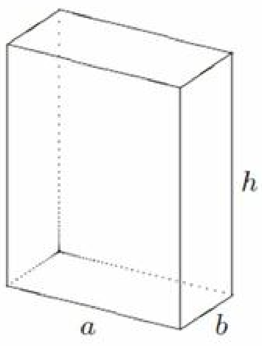
Géométrie dans l'espace

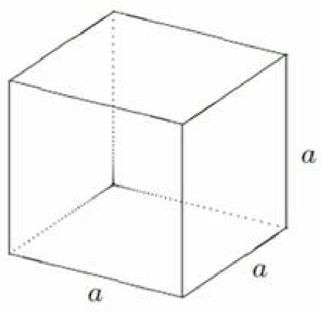
1 Prisme, cylindre, pyramide

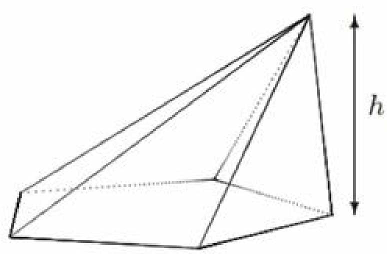
On a vu dans les classes précédentes le prisme, le cylindre, la pyramide. La base d'un prisme ou d'une pyramide est un polygône. Le **pavé droit** est un prisme à base rectangulaire, le **cube** est un prisme dont toutes les faces sont des carrés. La base d'un cylindre est un cercle.



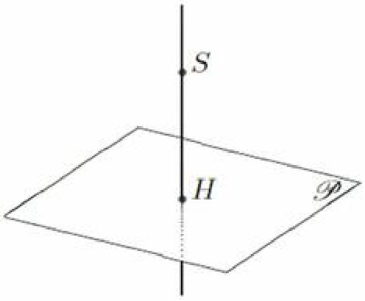


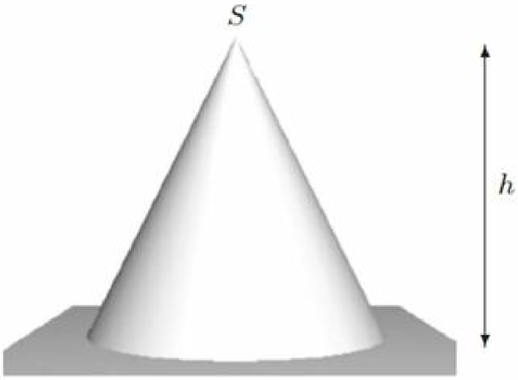






2 Cône et pyramide droite

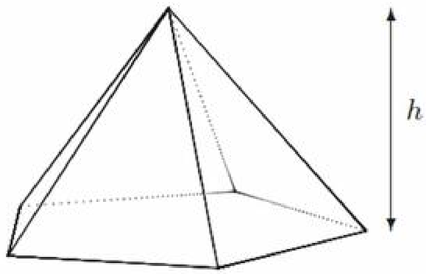




Définition 1. *Soient $\mathscr{P}$ un plan et S un point de l'espace. Il existe une droite unique issue de S, et orthogonale à $\mathscr{P}$. Cette droite coupe $\mathscr{P}$ en un point H appelé* **projection orthogonale** *de S sur $\mathscr{P}$.*

Définition 2. *Un point S se projette orthogonalement au centre H d'un cercle situé dans un plan $\mathscr{P}$. Le* **cône**, *dont la base est le cercle, et le sommet le point S, est l'ensemble de tous les segments joignant S aux points du cercle. La distance SH est appelée* **hauteur** *du cône.*

Définition 3. *Une pyramide est dite* **droite** *si sa base est un polygone régulier (voir déf. 2, p. 17), et si la projection orthogonale de son sommet sur le plan de base est le centre de ce polygone.*

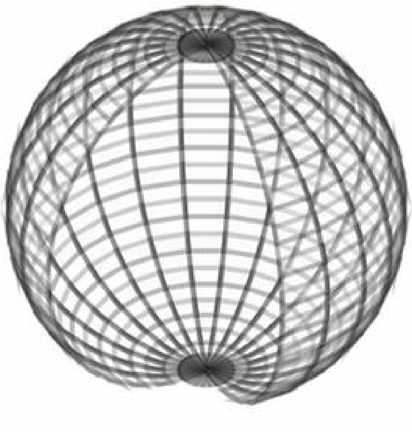


3 Sphère

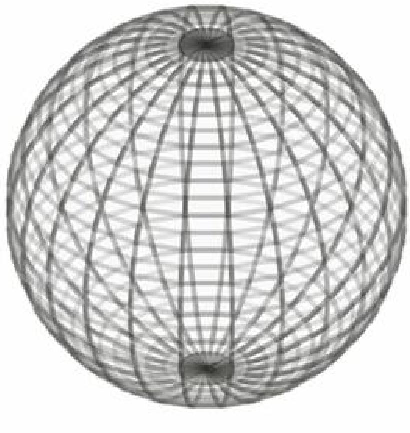
On a vu, en classe de 6^{e}, la définition suivante, que nous rappelons :

Définition 4. *Soient Ω un point de l'espace, r un réel > 0. La* **sphère** *de centre Ω et de rayon r est la* **surface** *formée des points M tels que $\Omega M = r$.*

Sur les représentations en perspective, on voit que la sphère est une **surface creuse**.



sphère **ouverte**

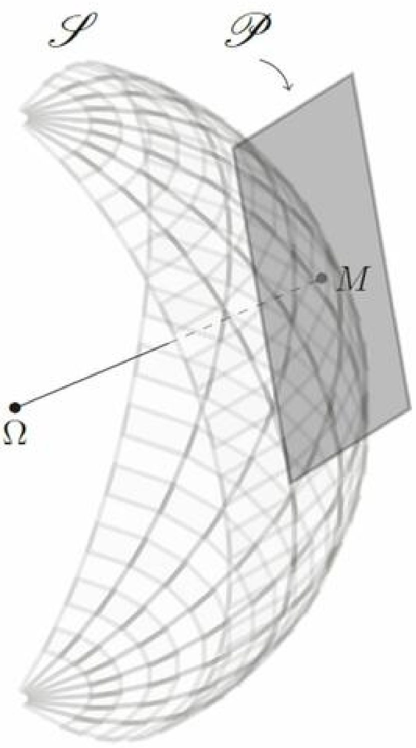


sphère **fermée**

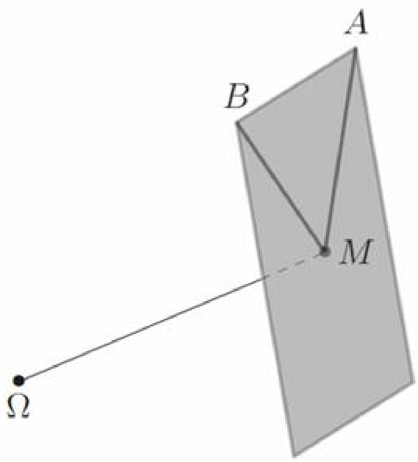
On sait ce que signifie qu'un plan et une droite de l'espace sont perpendiculaires (*voir* déf. 3, p. 21). Ceci permet de poser :

Définition 5. *Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω, et M un point de $\mathscr{S}$. Le* ***plan tangent*** *à $\mathscr{S}$ en M est le plan $\mathscr{P}$ issu de M et perpendiculaire à (ΩM).*

On a schématisé ci-dessous un morceau de la sphère $\mathscr{S}$ et son plan tangent $\mathscr{P}$ en M. Il faut imaginer que $\mathscr{P}$ est situé **devant**, et la sphère derrière.



$M \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \perp (\Omega M)$



$(\Omega M) \perp (MA)$ et $(\Omega M) \perp (MB)$

4 Volumes

Commençons par quelques rappels de la classe de 6$^{\text{e}}$:

Proposition 6. *Le volume V d'un pavé droit est égal au produit de ses trois dimensions :*

$$V = a \times b \times h$$

et le volume V d'un cube d'arête a est :

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Les volumes se mesurent en **centimètre cube** qui s'écrit cm^3, **décimètre cube** qui s'écrit dm^3, **mètre cube** qui s'écrit m^3. Le dm^3 est aussi appelé **litre**, de symbole ℓ.

Définition 7. *Le* cm^3 *est le volume d'un cube d'arête* 1 cm. *Le* dm^3 *est le volume d'un cube d'arête* 1 dm. *Le* m^3 *est le volume d'un cube d'arête* 1 m.

On a les formules :

$$\boxed{1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3}$$

$$\boxed{1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \ \ell}$$

Revenons à la classe de 3[e]. Pour un prisme, un cylindre, une pyramide ou un cône, le volume V ne dépend que de l'aire $\mathscr{B}$ de la base et de la hauteur h :

Proposition 8. *On considère un prisme, un cylindre, une pyramide et un cône d'aire de la base $\mathscr{B}$ et de hauteur h. Soit de plus, une sphère de rayon r. Leur volume V est donné par les formules suivantes :*

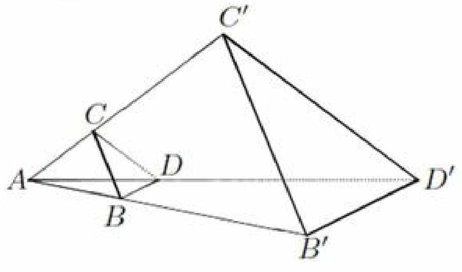
	prisme	cylindre	pyramide	cône	sphère
V	$\mathscr{B}h$	$\mathscr{B}h$	$\frac{1}{3}\mathscr{B}h$	$\frac{1}{3}\mathscr{B}h$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

5 Réduction et agrandissement

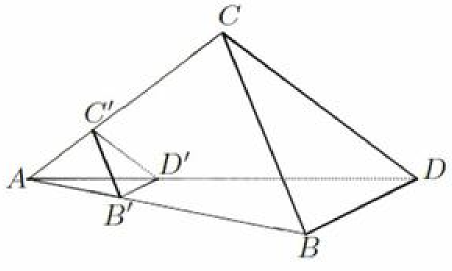
Définition 9. *Soit $ABCD$ une **pyramide** de sommet A. Sur les demi-droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AD)$, on considère des points B', C' et D', tels que $B' \neq B$ et $(BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$ et $(BD) \mathbin{/\!/} (B'D')$. On pose :*

$$k = \frac{AB'}{AB}$$

*Si $k > 1$, on dit que $AB'C'D'$ est un **agrandissement** de $ABCD$ dans le rapport k.*
*Si $k < 1$, on dit que $AB'C'D'$ est une **réduction** de $ABCD$ dans le rapport k.*



$k > 1$



$k < 1$

L'énoncé suivant résulte du **théorème de Thalès** (*voir* th. 4, p. 17) appliqué dans les plans ABC, ADB, ACD :

Proposition 10. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$AB' = kAB$ $\quad AC' = kAC$ $\quad AD' = kAD$ $\quad B'C' = kBC$ $\quad D'B' = kDB$ $\quad C'D' = kCD$

Corollaire 11. *Dans ces conditions, on a :*

$$\begin{aligned} \text{aire } B'C'D' &= k^2 \times \text{aire } BCD \\ \text{volume } AB'C'D' &= k^3 \times \text{volume } ABCD \end{aligned}$$

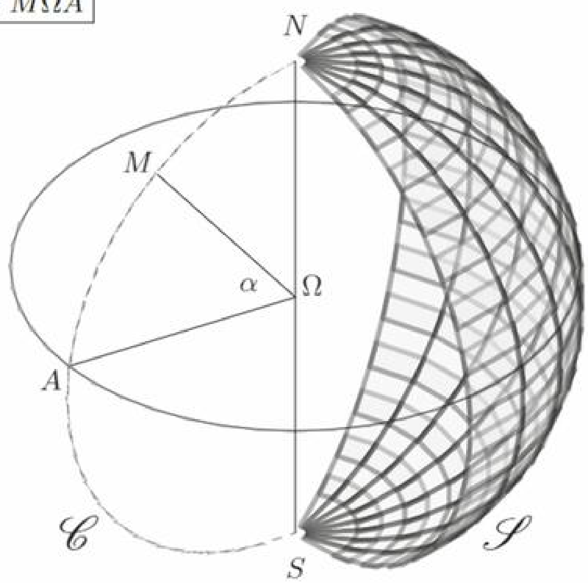
6 Exercices

Exercice 1.

On assimile la surface de la Terre à une sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω. On note N le pôle Nord, S le pôle Sud. Tout demi-cercle de centre Ω et d'extrémités N et S est appelé **méridien** [on en a tracé un en pointillés, noté $\mathscr{C}$]. On définit l'**équateur** comme étant l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan issu de Ω et perpendiculaire à (ΩN) [on a représenté l'équateur par un cercle horizontal, vu en perspective]. L'équateur est un grand cercle de $\mathscr{S}$. Il partage $\mathscr{S}$ en deux hémisphères. L'hémisphère contenant le pôle Nord est appelé **hémisphère nord**.

Soit M un point de l'hémisphère nord, qui n'est pas sur l'équateur et est différent de N. Le méridien de M coupe l'équateur en A. On appelle **latitude** de M l'angle α défini par :

$$\boxed{\alpha = \widehat{M\Omega A}}$$



On se propose de déterminer cette latitude par une **visée astronomique** nocturne, suivant une méthode utilisée par les **navigateurs** depuis le Moyen-Âge, et que nous allons décrire maintenant :

- Avec un instrument (astrolabe, sextant) placé en M, on évalue l'angle aigu $\boxed{\beta}$ qui mesure l'élévation de **l'étoile polaire** au-dessus de l'horizon.
- Supposant que la **direction** de l'étoile polaire soit celle de (ΩN), on va montrer :

$$\boxed{\beta = \alpha}$$

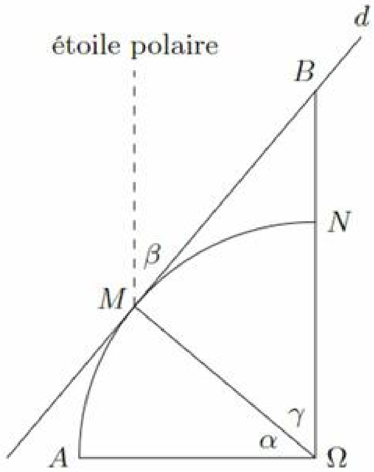
Pour ce faire, appelons **plan méridien** de M, le plan qui contient le méridien de M.

On remarque que le **plan horizontal contenant** M est le **plan tangent** à $\mathscr{S}$ en M (*voir* déf. 5, p. 133).

Le plan tangent et le plan méridien se coupent suivant une droite d.

Dans le plan méridien, d est la tangente en M au demi-cercle $\mathscr{C}$, donc $d \perp (M\Omega)$.

La figure ci-contre est dessinée dans le plan méridien. La droite d coupe la droite (ΩN) en B. On note $\gamma = \widehat{M\Omega B}$.



1. Montrer que $\widehat{MB\Omega} = \beta$.
2. Montrer que $\gamma + \beta = 90°$ et $\gamma + \alpha = 90°$. En déduire $\beta = \alpha$.

Exercice 2.

On coupe la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω et de rayon r par un plan $\mathscr{P}$. Le point Ω se projette **orthogonalement** en I sur $\mathscr{P}$. On note :

$$h = \Omega I$$

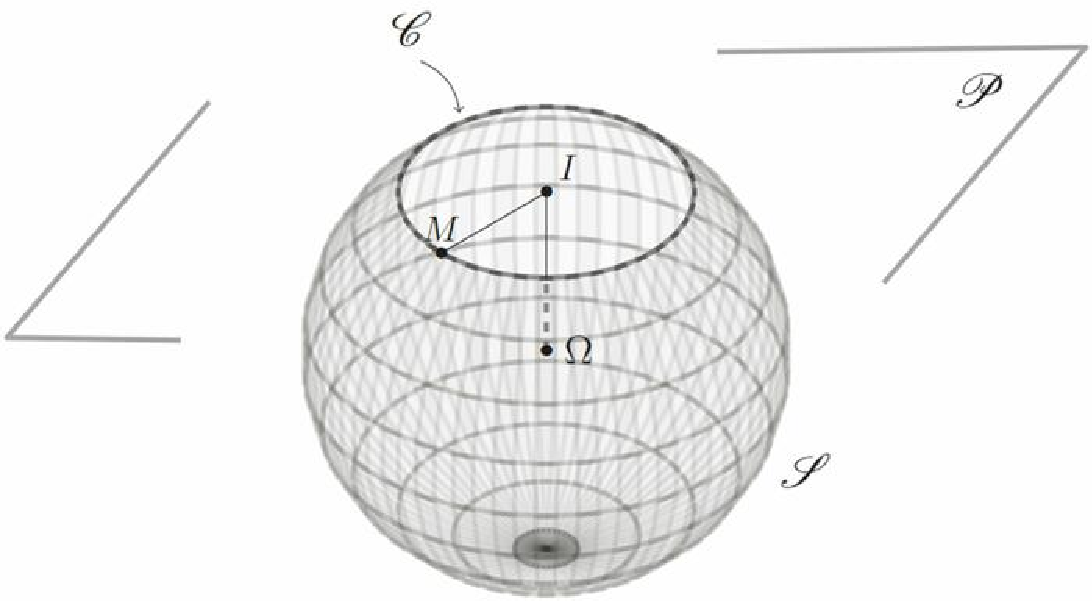
et on suppose que $h < r$. On note $\mathscr{C}$ l'**intersection** de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$, c'est-à-dire l'ensemble des points qu'ils ont **en commun**.

1. Soit M un point de $\mathscr{C}$. Utiliser la prop. 4, p. 21, pour montrer qu'on a :

$$(\Omega I) \perp (IM)$$

2. Dessiner une figure plane du triangle ΩIM montrant bien son angle droit.
3. Calculer IM par le théorème de Pythagore (on pourra remarquer que $\Omega M = r$).
4. En déduire que M appartient au **cercle** du plan $\mathscr{P}$, de centre est I, et dont le rayon vaut :

$$\sqrt{r^2 - h^2}$$



Remarque : au stade où nous sommes, nous n'avons pas démontré que $\mathscr{C}$ est un cercle. Nous avons seulement prouvé que si $M \in \mathscr{C}$, il est à distance fixe du point I, ce qui prouve que $\mathscr{C}$ est un **morceau de cercle**.

Pour prouver que $\mathscr{C}$ est un cercle complet, il faudrait démontrer l'implication **réciproque**, (*voir* § 3, p. 26), à savoir que si $M \in \mathscr{P}$, et si :

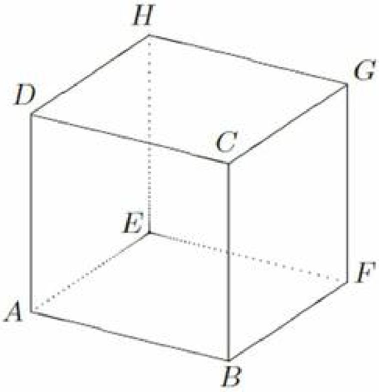
$$IM = \sqrt{r^2 - h^2}$$

alors $M \in \mathscr{C}$. Mais ceci résulte de l'équivalence suivante, qui résulte du th. de Pythagore :

$$IM = \sqrt{r^2 - h^2} \Leftrightarrow \Omega M = r$$

Exercice 3.

(unité au choix) On a représenté un cube dont l'arête vaut 1



1. Montrer que le quadrilatère $AFGD$ est un rectangle.
2. Que vaut AF ?
3. Tracer en vraie grandeur le rectangle $AFGD$.
4. Soit I le milieu de $[AF]$. Les droites (AG) et (DI) se coupent en J. Compléter la figure.
5. On se propose de montrer que les droites (AG) et (DI) sont **perpendiculaires**. On note :

   $\alpha = \widehat{IDA} \quad \alpha' = \widehat{IDG} \quad \beta = \widehat{AGF} \quad \beta' = \widehat{AGD}$
6. Calculer $\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{tg} \beta$.
7. Montrer que si γ est un angle aigu, alors :

$$\operatorname{tg}(90 - \gamma) = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}$$

8. Déduire de cette formule qu'on a $\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{2}$.
9. On admet que si deux angles aigus ont la même tangente alors ils sont égaux. En déduire que $\alpha' = \beta$.
10. Montrer que $\alpha' + \beta' = 90$
11. Conclure.

Exercice 4.

Dans un cylindre de diamètre 10 cm, et contenant de l'eau, on plonge une pyramide dont la base est un carré de côté 5 cm et dont la hauteur vaut 5 cm. La pyramide se trouve entièrement immergée, sans que l'eau du cylindre ne déborde. De quelle hauteur l'eau a-t-elle monté dans le cylindre ?

1. Calculer le volume de la pyramide.
2. Noter x la hauteur cherchée. Écrire la formule donnant le volume d'un cylindre de rayon 10 cm et de hauteur x.
3. Déterminer une équation satisfaite par x.
4. Résoudre cette équation. Vérifier qu'on trouve :

$$x = \frac{5}{3\pi} \approx 0{,}5 \text{ cm}$$

Exercice 5.

Un cylindre de rayon R, fermé au fond, contient de l'eau. On y plonge une bille sphérique de rayon r, tel que $r < R$. La bille descend jusqu'au fond, et se trouve entièrement immergée, sans que l'eau du cylindre ne déborde. De quelle hauteur l'eau a-t-elle monté dans le cylindre ?

1. Écrire le volume d'une sphère de rayon r.
2. Noter x la hauteur cherchée. Écrire le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur x.
3. Déterminer une équation satisfaite par x.
4. Résoudre cette équation. Vérifier qu'on trouve :

$$x = \frac{4}{3}\frac{r^3}{R^2}$$

Exercice 6.

On considère une pyramide à base carrée $ABCD$ et de sommet S, et telle que :

$$(SA) \perp (ABCD)$$

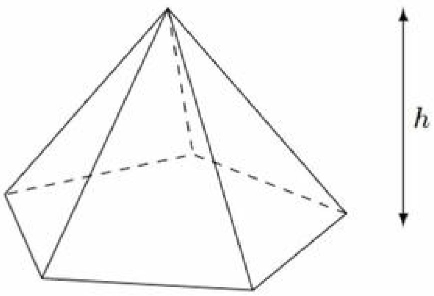
1. Dessiner cette pyramide en perspective en prenant, par exemple, les coordonnées **fictives** suivantes sur la feuille de papier :

	A	B	C	D	S
x	0	3	6	3	0
y	0	-1	0	1	5

2. On suppose : $AB = 3$ cm et $SA = 4$ cm. Calculer le volume de la pyramide.
3. Soient A', B', C', D' les milieux respectifs des arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$. Placer ces points.
4. Colorier la pyramide de base $A'B'C'D'$ et de sommet S. Calculer son volume.

Exercice 7 (*pyramide tronquée*)**.**

On considère une grande **pyramide droite** $\mathscr{P}$ de hauteur h. On la coupe par le plan issu du milieu de sa hauteur et parallèle à sa base. On obtient une petite pyramide $\mathscr{P}'$ et un **tronc de pyramide** $\mathscr{P}''$, dont la réunion est $\mathscr{P}$.
On se propose de calculer le volume de $\mathscr{P}''$. Notons V le volume de $\mathscr{P}$, V' celui de $\mathscr{P}'$, V'' celui de $\mathscr{P}''$.



1. Reproduire le dessin de la pyramide $\mathscr{P}$. Le compléter en traçant les cinq arêtes de la base de $\mathscr{P}'$
2. Montrer qu'on a :

$$V' = \frac{1}{8}V$$

3. En déduire qu'on a :

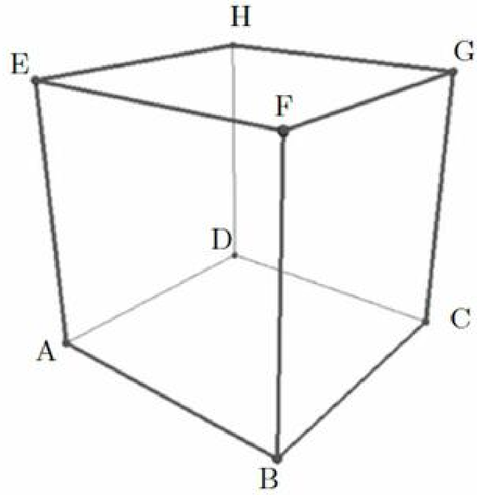
$$V'' = \frac{7}{8}V$$

Exercice 8 (*un cube partagé en trois pyramides*).

1. Reproduire en grand le cube ci-dessous, vue en **perspective conique** (*voir* p. 22), en prenant les coordonnées **fictives** suivantes en cm sur la feuille de papier :

	A	B	C	D	E	F	G	H
x	$-4{,}3$	$-0{,}2$	3	-1	-5	0	3,6	-1
y	2,4	0	3	4,2	8	6,8	8	8,8

On considère les trois pyramides $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ de sommet F et de base $(DAEH)$, $(DCGH)$, $(DABC)$.

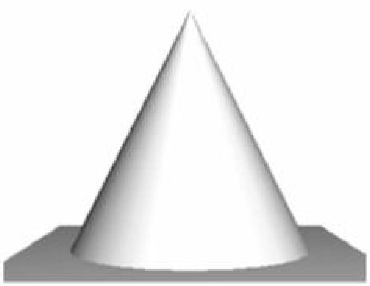


2. Tracer les segments $[FH]$, $[FA]$, $[FD]$, $[FC]$, et colorier les trois pyramides avec des couleurs différentes.
3. Montrer que :
$$(FE) \perp (AEH)$$
4. Notant a l'arête du cube, montrer que le volume V de chacune des trois pyramides est :
$$V = \frac{a^3}{3}$$
5. Montrer que ce résultat est compatible avec le volume du cube.

Exercice 9.

Question préliminaire : Montrer qu'un triangle rectangle qui a un angle de 45° est isocèle. On pourra raisonner sur les angles.

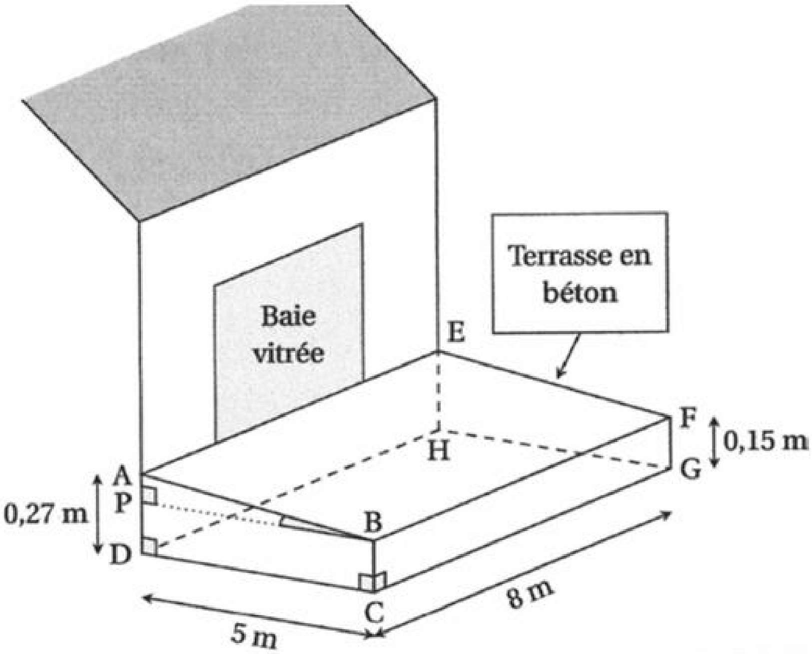
On considère un cône de demi-angle au sommet 45°, de hauteur h, de volume V. Prendre garde que la figure ci-contre n'est qu'indicative : les angles n'y sont pas respectés.



1. Dessiner la section de ce cône par un plan passant par son axe.
2. Montrer que l'aire de son disque de base vaut :
$$\mathscr{B} = \pi h^2$$
3. Calculer V en fonction de h.

Exercice 10 (d'après brevet 2018).

On souhaite faire construire une terrasse en béton devant une maison. Cette terrasse aura la forme d'un **prisme** couché, de base $ABCD$ et de hauteur $[CG]$. Sur le plan, le point P est la projection orthogonale de B sur (AD).
Pour ce faire, on contacte un maçon dont l'entreprise est située à 23 km de la maison.



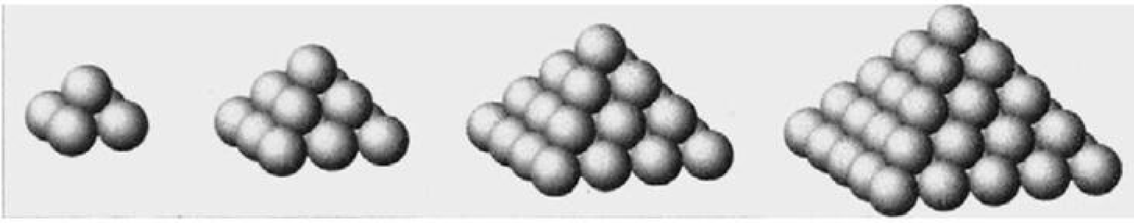
Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'à la **fabrication** et au **transport** du béton par camion-toupie. Les données fournies par le maçon sont les suivantes :

- prix de fabrication du m^3 de béton : 95 euros
- capacité maximum du camion-toupie : 6 m^3
- frais de transport : 5 euros par km.

1. **Volume de la terrasse**. On note V le volume du prisme et $\mathscr{B}$ l'aire de sa base.
   a/ Calculer l'aire du triangle BPA
   b/ Calculer l'aire du rectangle $BCDP$
   c/ En déduire qu'on a :
   $$\mathscr{B} = 1{,}05 \text{ m}^2$$
   d/ Montrer qu'on a :
   $$V = 8{,}4 \text{ m}^3$$
2. **Calcul du coût**
   a/ Combien d'aller et retour le camion doit-il faire ?
   b/ Calculer le prix du transport du béton.
   c/ Calculer le prix du béton.
   d/ En déduire le montant de la facture présentée par le maçon.

Exercice 11 (*empilements*, d'après brevet 2019).

On a représenté ci-dessous quatre empilements de **boulets de canon**. Ces empilements sont à base carrée. Le premier comporte 2 niveaux, les suivants ont 3, 4, 5 niveaux. Pour un empilement ayant n niveaux, on note b le nombre de boulets qu'il contient.



1. Sur la première des quatre figures, on voit que si $n = 2$ alors $b = 5$. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	2	3	4	5
b	5			

   Indication : si on compte les boulets à partir du sommet de l'empilement, on voit que b s'écrit :
$$b = 1 + 2^2 + \cdots$$
2. On suppose que tous les boulets sont des boules de rayon $r = 6$ cm. Calculer le volume d'un boulet.
3. On suppose que tous les boulets sont en fonte, dont la masse volumique est :
$$\rho = 7{,}3 \text{ kg/dm}^3$$
   Calculer la masse d'un boulet.
4. On admet que si $n = 5$ alors $b = 55$. Calculer la masse d'un empilement à 5 niveaux. Vérifier qu'on trouve environ :
$$363 \text{ kg}$$

Exercice 12 (*la confiture d'abricots*).

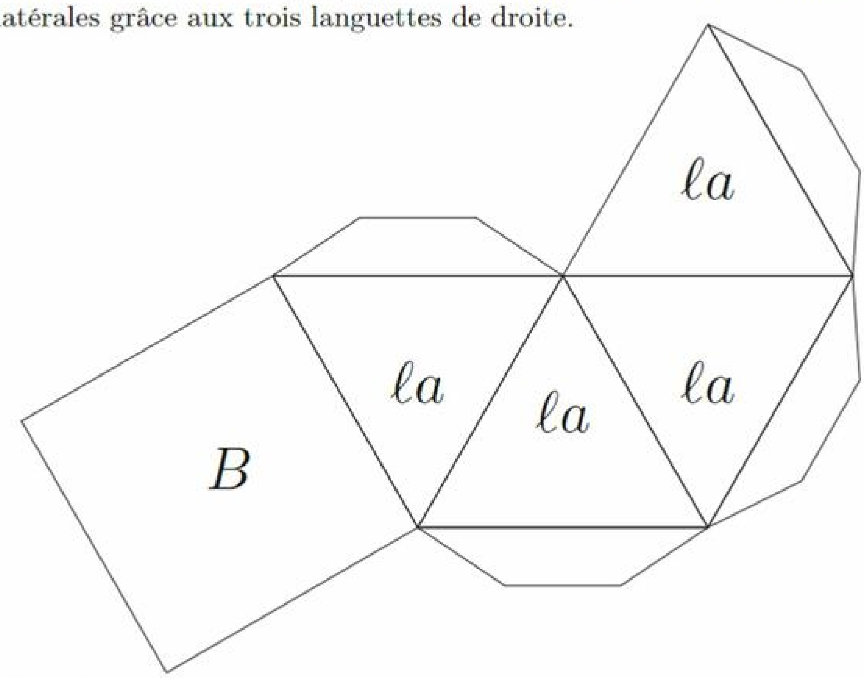
Une bassine à confiture cylindrique a pour diamètre intérieur 24 cm, et pour profondeur 14 cm. On dispose d'un grand nombre de petits pots à confiture cylindriques de 7 cm de diamètre et 8 cm de hauteur.

1. Calculer le volume exact V_1 de la bassine en cm^3. Donner aussi une valeur approchée en litre. Vérifier qu'on trouve :
$$V_1 = 12^2 \times 14 \times \pi \text{ cm}^3 = 6\,333{,}45... \text{ cm}^3 \approx 6{,}3\ \ell$$
2. Calculer le volume V_2 d'un petit pot à confiture en cm^3. Vérifier qu'on trouve :
$$V_2 = 98 \times \pi \text{ cm}^3$$
3. On veut remplir les petits pots avec la confiture d'abricots bouillante que l'on vient de cuire dans la bassine. Sachant qu'elle est pleine aux deux tiers, combien de pots pourra-t-on remplir ?

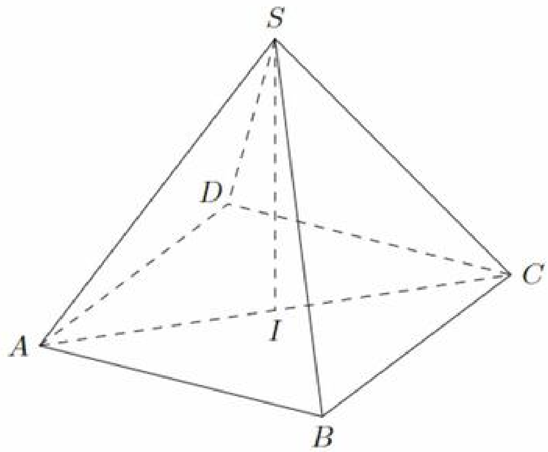
Exercice 13.

On considère une pyramide $\mathscr{P}$ de sommet S, à base carrée $ABCD$, et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux de côté 1.

1. Reproduire puis découper le **patron** de $\mathscr{P}$ ci-dessous. Pour construire $\mathscr{P}$, plier les quatre faces latérales $\boxed{\ell a}$ suivant leurs trois arêtes communes. Les assembler ensuite avec la languette supérieure. La base $\boxed{B}$ est ensuite repliée suivant son arête commune avec la face $\boxed{\ell a}$ qui est à sa droite. Puis on l'assemble avec les faces latérales grâce aux trois languettes de droite.



2. Soit I le centre du carré $ABCD$
   a/ Montrer que la droite (SI) est la médiatrice de $[AC]$ dans le plan (SAC). En déduire :
   $$(SI) \perp (AC)$$
   b/ Montrer de même qu'on a :
   $$(SI) \perp (BD)$$
   c/ En déduire :
   $$(SI) \perp (ABCD)$$
   et donc que $[SI]$ est la hauteur de $\mathscr{P}$ relative à S.



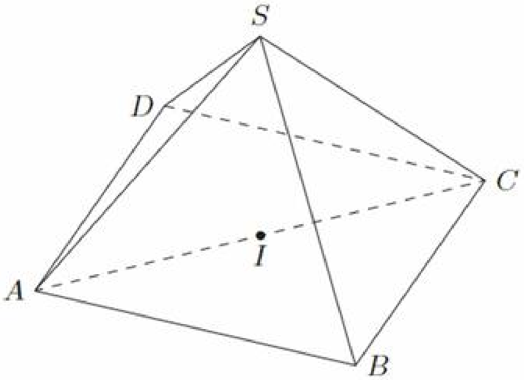
3. Montrer par la réciproque du th. de Pythagore (*voir* th. 9, p. 18) que ASC est un triangle rectangle.
4. En déduire qu'on a :
$$SI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
5. Calculer le volume V de $\mathscr{P}$. Vérifier qu'on trouve :
$$V = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Exercice 14.

On reprend la pyramide $\mathscr{P}$ de l'exercice 13, p. 142. Elle a pour sommet S, sa base $(ABCD)$ est un carré de centre I, ses faces latérales sont équilatérales de côté 1.

1. Calculer IA. Vérifier qu'on trouve :

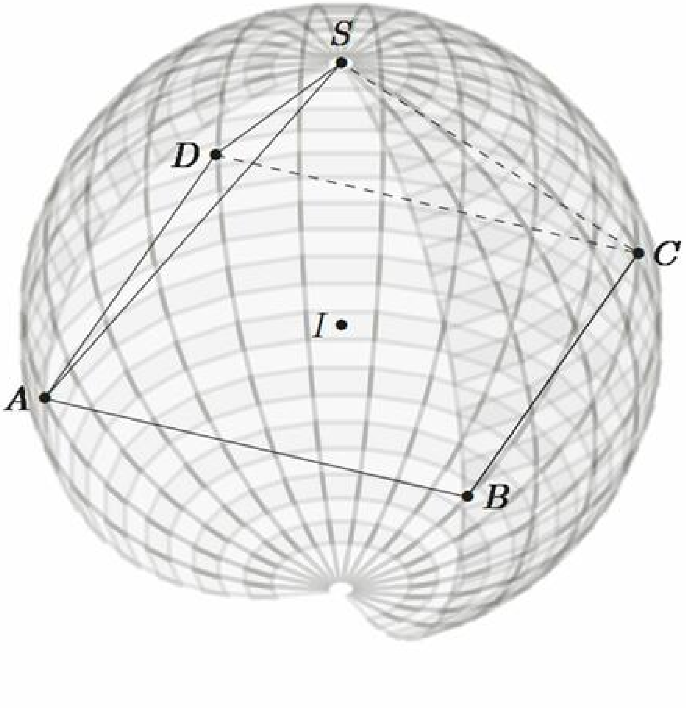
$$IA = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



2. Montrer que la droite (IS) est médiatrice de $[AC]$ dans le plan (SAC)
3. En déduire qu'on peut calculer IS par le th. de Pythagore, et qu'on trouve :

$$IS = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. En déduire que la sphère de centre I et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ passe par S, A, B, C, D. On l'appelle la **sphère circonscrite** à la pyramide.

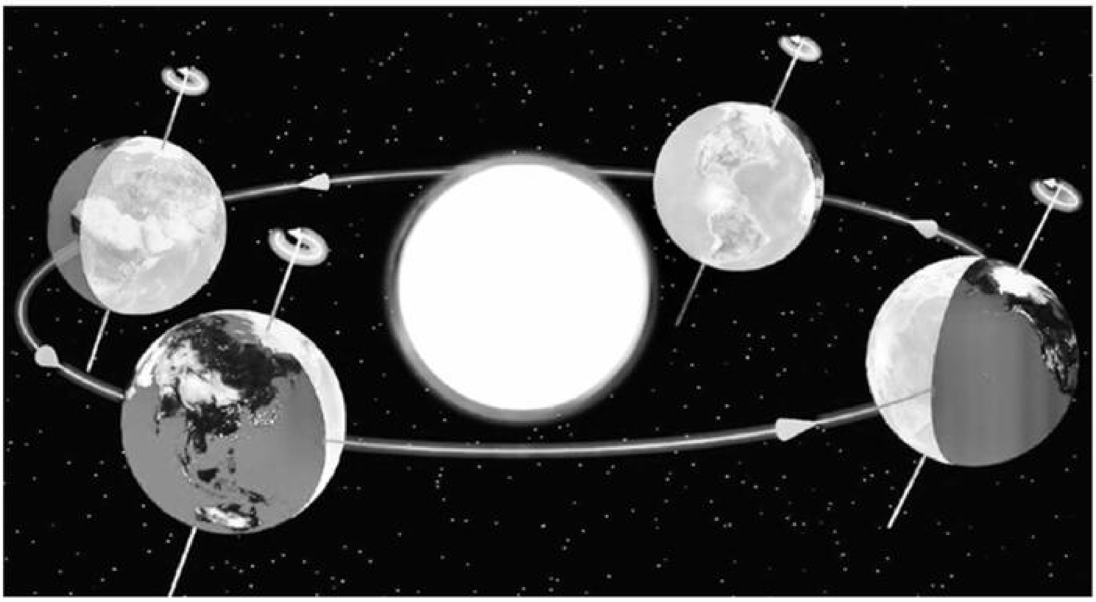


Récréation 15 (*répartition de l'énergie du Soleil*).

On se propose de montrer par le calcul, que les régions polaires de la Terre reçoivent beaucoup moins d'**énergie** du Soleil que les régions équatoriales. Pour éviter de faire intervenir l'**inclinaison** de l'axe de la Terre, on raisonne en période d'**équinoxe**.

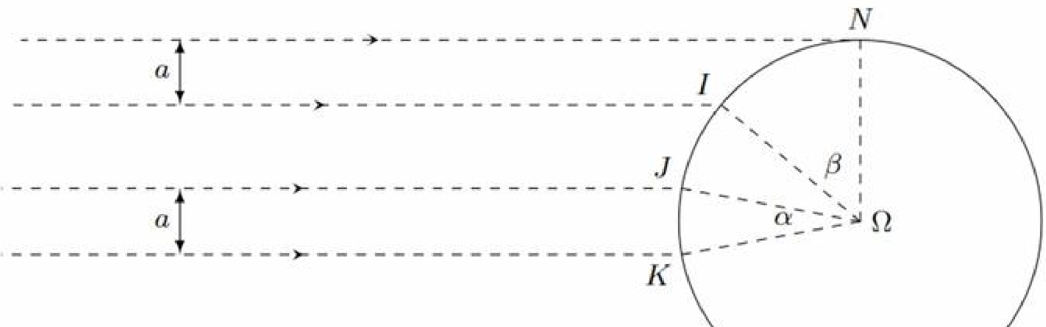
On sait qu'en ces périodes, c'est-à-dire aux environs du 20 mars pour le Printemps, et du 20 septembre pour l'Automne, le Soleil éclaire autant l'hémisphère Nord que l'hémisphère Sud. Ceci correspond aux positions **P** et **A** de la Terre sur la figure ci-dessous :

P = Printemps



A = Automne

On s'intéresse à la position **P** de la Terre. La Terre, supposée sphérique, est à droite, le Soleil à gauche, très loin, donc non visible sur la figure ci-dessous. On suppose que ses rayons arrivent **horizontalement** sur la Terre. Le centre de la Terre est noté Ω, le pôle Nord est noté N. Sur un méridien, on considère un point I, et les points J et K symétriques par rapport au plan de l'équateur :



On suppose de plus que I, J, K sont placés sur le méridien de sorte que la même **quantité d'énergie**, mesurée par l'écart a entre les rayons dessinés, arrive sur l'arc de cercle $\widehat{NI}$ et sur l'arc $\widehat{JK}$.

On note R le rayon de la Terre. On a alors :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{R} = \frac{a}{2R} \qquad \cos\beta = \frac{R-a}{R} = 1 - \frac{a}{R}$$

Pour fixer les idées, prenons $a = \dfrac{R}{12}$. Il vient successivement :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{R} = \frac{R}{24} \times \frac{1}{R} = \frac{1}{24} \qquad \cos\beta = 1 - \frac{a}{R} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \text{asin}\,\frac{1}{24} = 2{,}36... \Rightarrow \alpha \approx 4°8 \qquad \beta = \text{acos}\,\frac{11}{12} = 23{,}55... \approx 23°6$$

Le raisonnement qui va suivre est intuitif. Le rendre rigoureux demanderait des développements longs et pénibles dont **nous ferons grâce au lecteur**.

On constate que $\beta \approx 5 \times \alpha$. Par la prop. 20, p. 20, on en déduit que l'arc $\widehat{NI}$ est environ 5 fois plus long que l'arc $\widehat{JK}$. De plus, si α et β sont assez petits, on a :

$$\text{longueur }(\widehat{JK}) \approx JK \qquad \text{longueur }(\widehat{NI}) \approx NI$$

Donc :

$$NI \approx 5 \times JK$$

Comme $5^2 = 25$, on en déduit qu'**à la surface de la Terre**, le disque de diamètre NI, qui touche le pôle Nord, et est situé dans le **cercle polaire**, a une aire vingt-cinq fois plus grande que le disque de diamètre JK traversé par l'équateur. Et puisque la même quantité d'énergie (mesurée par a) est dispersée sur le grand disque et sur le petit disque, les points du grand disque reçoivent **beaucoup moins d'énergie**[1] que ceux du petit disque. Ceci explique en partie la différence des **climats** entre les zones polaire et équatoriale.

7 Correction des exercices

Ex. 1, p. 135.

1. Puisque la direction de l'étoile polaire est celle de (ΩN), les angles $\widehat{MB\Omega}$ et β sont en position alterne-interne. Ils sont donc égaux : $\widehat{MB\Omega} = \beta$

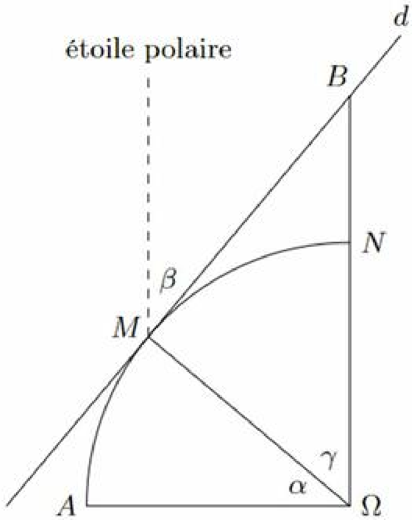
2. a/ Puisque $d \perp (M\Omega)$, le triangle $MB\Omega$ est rectangle en M. On sait que dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. Donc :

$$\gamma + \beta = 90°$$

b/ Le plan de l'équateur est perpendiculaire à (ΩN). Donc :

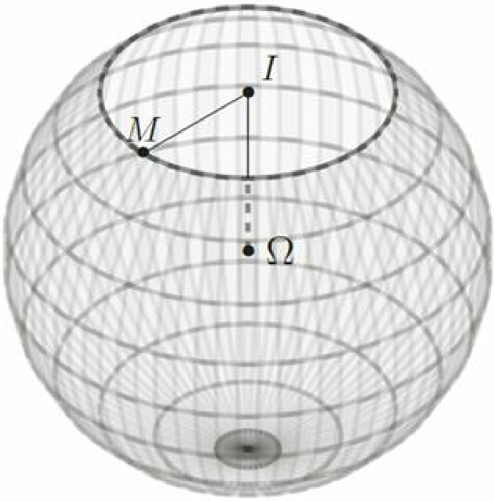
$$(\Omega A \perp (\Omega N)$$

On en déduit : $\gamma + \alpha = 90°$. Finalement $\gamma + \beta = \gamma + \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$.



1. En période d'équinoxe, le pôle Nord ne reçoit aucune énergie du Soleil, car les rayons solaires qui l'atteignent sont rasants.

Ex. 2, p. 136.

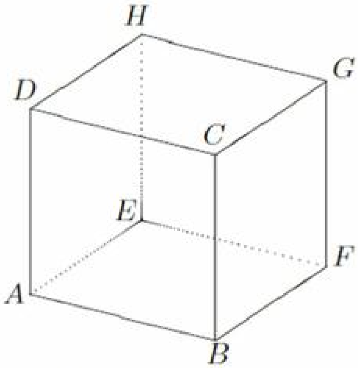


1. Puisque I est la projection orthogonale de Ω sur $\mathscr{P}$, la droite (ΩI) est perpendiculaire à $\mathscr{P}$. Elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier à (IM).
3. et 4. Le triangle ΩIM est rectangle en I. Son hypoténuse est $[\Omega M]$. Or $\Omega M = r$, puisque $M \in \mathscr{S}$. Par le th. de Pythagore, il vient donc :

$$IM^2 = \Omega M^2 - \Omega I^2 = r^2 - h^2$$

Donc $IM = \sqrt{r^2 - h^2}$. On voit que cette expression ne dépend pas de M, mais seulement de $\mathscr{S}$ (à cause de r) et $\mathscr{P}$ (à cause de h). Ceci montre que M est sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{r^2 - h^2}$.

Ex. 3, p. 137.



1. Toutes les faces du cube sont des carrés. Sur la face droite, on a donc :

$$(GF) \perp (FB)$$

Sur la face arrière droite, on a aussi :

$$(GF) \perp (FE)$$

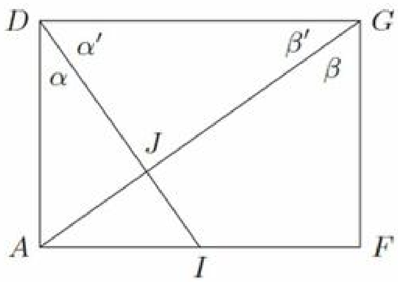
Donc (GF) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan FEB. On en déduit que (GF) est perpendiculaire à toute droite de ce plan, donc :

$$(GF) \perp (FA)$$

Donc le quadrilatère $AFGD$ a un angle droit en F. On montrerait de même que ses trois autres angles sont droits. C'est donc un rectangle.
2. Le triangle ABF est rectangle en B. Le th. de Pythagore donne :

$$AF^2 = 1^2 + 1^2$$

Donc $AF = \sqrt{2}$



6. On a :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AI}{DA} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{FA}{GF} = \sqrt{2}$$

7. On a :

$$\operatorname{tg}(90-\gamma) = \frac{\sin(90-\gamma)}{\cos(90-\gamma)} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

8. On a $\alpha + \alpha' = \widehat{GDA} = 90$, donc $\alpha' = 90 - \alpha$. On en déduit :

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{2}$$

9. On constate que α' et β ont la même tangente, ils sont donc égaux.
10. On a $\beta + \beta' = \widehat{FGD} = 90$. Et puisque $\beta = \alpha'$, cette relation se réécrit :

$$\alpha' + \beta' = 90$$

11. Dans le triangle GJD on a alors :

$$\widehat{GJD} = 180 - (\alpha' + \beta') = 180 - 90 = 90$$

On en déduit : $(JG) \perp (JD)$.

cqfd

Ex. 4, p. 137. 1. La prop. 8, p. 134 donne le volume V_1 d'une pyramide dont l'aire de base est $\mathscr{B}$ et la hauteur h :

$$V_1 = \frac{1}{3}\mathscr{B}h = 5^2 \times \frac{5}{3}$$

2. Par la même prop. 8, le volume du cylindre de rayon 5 et de hauteur x est :

$$V_2 = \mathscr{B}x = \pi \times 5^2 \times x$$

3. et 4. La colonne d'eau de hauteur x a le même volume que la pyramide, donc $V_2 = V_1$:

$$\pi \times 5^2 \times x = 5^2 \times \frac{5}{3} \Leftrightarrow \pi x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3\pi}$$

Ex. 5, p. 138. 1. La prop. 8, p. 134 donne le volume V_1 d'une sphère de rayon r :

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Par la prop. 8, p. 134, le volume du cylindre de rayon R et de hauteur x est :

$$V_2 = \mathscr{B}x = \pi R^2 x$$

3. et 4. La colonne d'eau de hauteur x a le même volume que la sphère, donc $V_2 = V_1$:

$$\pi R^2 x = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow R^2 x = \frac{4}{3} r^3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\frac{r^3}{R^2}$$

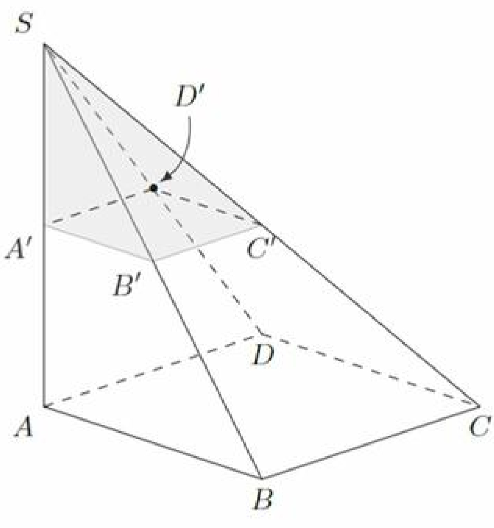
Ex. 6, p. 138.

2. On applique la formule du volume d'une pyramide d'aire de base $\mathscr{B}$ et de hauteur h :

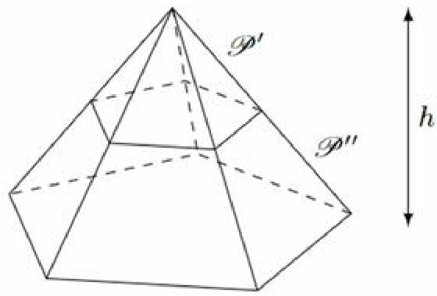
$$V_1 = \frac{1}{3}\mathscr{B}h = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 4 = 12$$

4. Puisque $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{1}{2}$, la petite pyramide de base $A'B'C'D'$ et de sommet S est une **réduction** de rapport $\dfrac{1}{2}$ de la grande. Par le cor. 11, p. 134, le volume V_2 de la petite est donc :

$$V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_1 = \frac{1}{8} \times 12 = \frac{3}{2}$$



Ex. 7, p. 138.



2. La petite pyramide $\mathscr{P}'$ est une **réduction** de rapport $\dfrac{1}{2}$ de la grande $\mathscr{P}$. Par le cor. 11, p. 134, le volume V' de la petite est donc :

$$V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V = \frac{1}{8}V$$

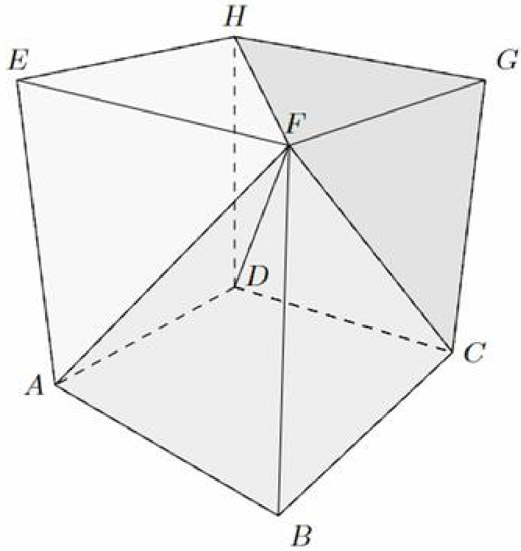
3. D'après l'énoncé, on peut imaginer que la grande pyramide $\mathscr{P}$ est obtenue en posant la petite $\mathscr{P}'$ sur le tronc de pyramide $\mathscr{P}''$. On a donc :

$$V = V' + V''$$

On en déduit :

$$V'' = V - V' = V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$$

Ex. 8, p. 139. 1. et 2. Voir la figure ci-contre :



3. Toutes les faces du cube sont des carrés. Sur la face avant gauche, on a donc :

$$(FE) \perp (EA)$$

Sur la face supérieure, on a aussi :

$$(FE) \perp (EH)$$

Donc (FE) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan AEH. On en déduit que (FE) est perpendiculaire à ce plan.

4. Puisque $(FE) \perp (AEH)$, le segment $[FE]$ est hauteur de $\mathscr{P}_1$. Le volume V de $\mathscr{P}_1$ est donc :

$$V = \frac{1}{3}\text{aire}\, DAEH \times FE = \frac{a^3}{3}$$

On trouverait la même chose pour les deux autres pyramides.

5. La somme des volumes des trois pyramides vaut donc :

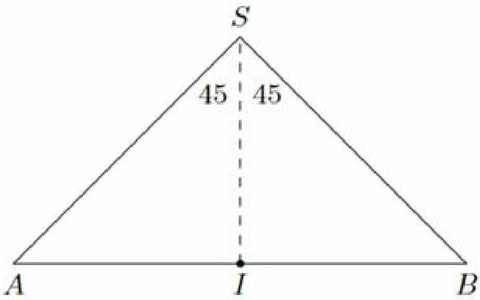
$$3 \times \frac{a^3}{3} = a^3$$

On trouve le volume du cube. C'est **logique**, puisque les trois pyramides sont accolées et remplissent le cube.

Ex. 9, p. 139. Question préliminaire : on sait que dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus vaut 90°. Ici, comme l'un des angles aigus vaut 45°, l'autre vaut donc aussi 45°. Ce triangle a donc deux angles égaux. On en déduit qu'il est isocèle.

1. On a noté S le sommet du cône, $[AB]$ un diamètre de sa base, I le centre du disque de base. Le triangle SAB est isocèle en S.
2. Puisque I est le centre du disque de base, le segment $[SI]$ est hauteur du cône. Donc :

$$SI = h$$



Le triangle SIB rectangle en I, et a un angle de 45°. Il est donc isocèle en I, d'après la question préliminaire. On en déduit que le rayon IB du disque de base vaut h. L'aire de ce disque vaut donc :

$$\mathscr{B} = \pi h^2$$

3. Et le volume du cône vaut :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h = \frac{1}{3}\pi h^2 \times h = \frac{\pi h^3}{3}$$

Ex. 10, p. 140. 1. **Volume de la terrasse**. On sait que le volume V du prisme d'aire de base $\mathscr{B}$ et de hauteur h est :

$$V = \mathscr{B}h$$

On calcule $\mathscr{B}$ en deux morceaux :

$$\mathscr{B} = \text{aire}\, BPA + \text{aire}\, BCDP$$

a/ Comme il est sous-entendu que :

$$DP = CB = GF = 0{,}15$$

on peut calculer PA par différence :

$$PA = DA - DP = 0{,}27 - 0{,}15 = 0{,}12$$

Le triangle BPA est rectangle en P. Son aire vaut donc :

$$\text{aire}\, BPA = \frac{1}{2} \times PA \times PB = \frac{0{,}12 \times 5}{2} = 0{,}3 \text{ m}^2$$

b/ Le quadrilatère $BCDP$ est un rectangle, donc :

$$\text{aire}\, BCDP = DP \times PB = 0{,}15 \times 5 = 0{,}75 \text{ m}^2$$

c/ On en déduit :

$$\mathscr{B} = 0{,}3 + 0{,}75 = 1{,}05 \text{ m}^2$$

d/ On a enfin :

$$V = \mathscr{B}h = 1{,}05 \times 8 = 8{,}4 \text{ m}^3$$

2. **Calcul du coût.** a/ Le camion ne peut livrer que 6 m^3 de béton à la fois. Il doit donc faire deux livraisons pour en apporter 8,4 m^3. Ce qui fait 2 allers et retours, donc $4 \times 23 = 92$ km.

b/ Le transport coûtera donc :

$$92 \times 5 = 460 \text{ euros}$$

c/ Le béton coûtera :

$$8{,}4 \times 95 = 798 \text{ euros}$$

d/ Le montant de la facture, comprenant le coût du transport + le coût du béton, est :

$$460 + 798 = 1258 \text{ euros}$$

Ex. 11, p. 141. 1. Les valeurs successives de b sont :

$$\begin{aligned} 1+2^2 &= 5 \\ 1+2^2+3^2 &= 5+9 = 14 \\ 1+2^2+3^2+4^2 &= 14+16 = 30 \\ 1+2^2+3^2+4^2+5^2 &= 30+25 = 55 \end{aligned}$$

2. Le **volume d'un boulet** est :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = \frac{4 \times 216}{3} \times \pi = 288\pi \text{ cm}^3 = 288\pi \times 10^{-3}\text{dm}^3$$

ce qui fait environ 900 cm^3 soit 0,9 dm^3, c'est-à-dire 0,9 ℓ, donc presque **un litre**.

3. La **masse d'un boulet** est :

$$288\pi \times 10^{-3} \times 7{,}3 \text{ kg}$$

ce qui fait environ **7 kg**.

4. La masse de 55 boulets est donc :

$$288\pi \times 10^{-3} \times 7{,}3 \times 55 \approx 363 \text{ kg}$$

Ex. 12, p. 141. 1. On applique la formule donnant le volume d'un **cylindre** d'aire de base $\mathscr{B}$ et de hauteur h :

$$V = \mathscr{B} \times h$$

Pour la bassine, on a :

$$\mathscr{B} = \pi r^2 = \pi \times 12^2$$

Donc :

$$V_1 = \mathscr{B} \times h = \pi \times 12^2 \times 14 \text{ cm}^3 = 6\,333{,}45... \text{ cm}^3$$

Les conversions d'unités sont **toujours pénibles**. Par définition $1\ell = 1\text{dm}^3$. De plus :

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ dm}^3 \Rightarrow 6\,333{,}45... \text{ cm}^3 = \frac{6\,333{,}45...}{1000} \text{ dm}^3$$

On a donc :

$$V_1 = \frac{6\,333{,}45...}{1000} \text{ dm}^3 = 6{,}33345... \text{ dm}^3 \approx 6{,}3 \text{ dm}^3 = 6{,}3\ \ell$$

2. Pour un petit pot cylindrique, on a :

$$\mathscr{B} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \times \pi$$

Donc :

$$V_2 = \mathscr{B} \times h = \frac{49}{4} \times \pi \times 8 = 98 \times \pi \text{ cm}^3$$

3. Le volume V_3 de confiture contenu dans la bassine est :

$$V_3 = \frac{2}{3} \times V_1 = \frac{2}{3} \times \pi \times 12^2 \times 14 = \pi \times 2^6.3.7$$

Le nombre de pots qu'on pourra remplir est donc :

$$\frac{\text{volume de la confiture}}{\text{volume d'un pot}} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{\pi \times 2^6.3.7}{\pi \times 2.7^2} = \frac{2^5 \times 3}{7} = \frac{96}{7} = 13{,}71...$$

On pourra donc remplir complètement **13 pots**, et un 14[e] plus qu'à demi.

Ex. 13, p. 142.

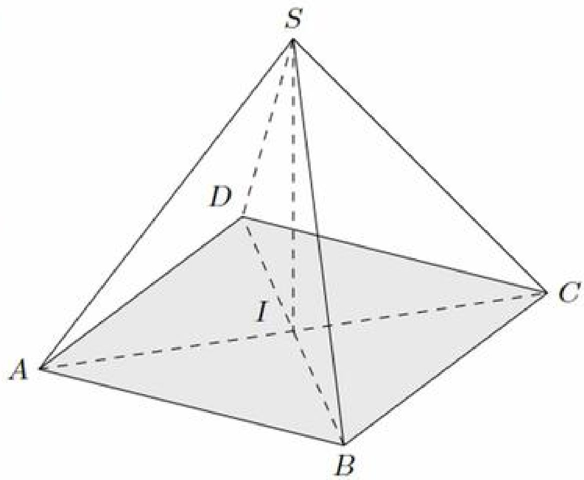
2. a/ On a $SA = SC$. De plus, $ABCD$ est un parallélogramme, donc $IA = IC$. On en déduit que, dans le plan (SAC), (SI) est la médiatrice de $[AC]$, et donc :

$$(SI) \perp (AC)$$

b/ Par un raisonnement analogue, on montre :

$$(SI) \perp (BD)$$

c/ La droite (SI) étant perpendiculaire à deux droites sécantes du plan $(ABCD)$, elle est perpendiculaire à ce plan. On en déduit que $[SI]$ est la hauteur de $\mathscr{P}$ relative à S.



3. Puisque $ABCD$ est un carré de côté 1, on a $AC = \sqrt{2}$. Or $SA = SB = 1$. Donc :

$$AC^2 = SA^2 + SB^2$$

on en déduit, par la réciproque du th. de Pythagore, que ASC est rectangle en S.
4. Par la réciproque du th. du demi-cercle (th. 11, p. 18), le cercle circonscrit au triangle rectangle ASC a pour centre le milieu de son hypoténuse $[AC]$. Or I est milieu de $[AC]$, donc :

$$SI = IC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Le volume d'une pyramide d'aire de base $\mathscr{B}$ et de hauteur h est :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$$

Comme ici, $\mathscr{B} = 1$ et $h = SI$, on en déduit que le volume de notre pyramide $\mathscr{P}$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times SI = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Ex. 14, p. 143. 1. Puisque $ABCD$ est un carré de côté 1, sa diagonale $[AC]$ vaut :

$$AC = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Le point I étant le centre du carré, c'est aussi le milieu des diagonales. Donc :

$$IA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Puisque :

$$SA = SC = 1 \qquad\qquad IA = IC$$

les points S et I sont équidistants de A et C. On en déduit que (IS) est médiatrice de $[AC]$ dans le plan (SAC).

3. Puisque (IS) est médiatrice de $[AC]$, on a :

$$(IS) \perp (AC)$$

Donc le triangle SIC est rectangle en I, et par le th. de Pythagore, il vient :

$$IS^2 = SA^2 - IA^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$IS = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. De plus, puisque I est le milieu des diagonales, et que les diagonales sont égales, on a :

$$IA = IB = IC = ID = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalement :

$$IS = IA = IB = IC = ID = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui montre que la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ passe par S, A, B, C, D

cqfd

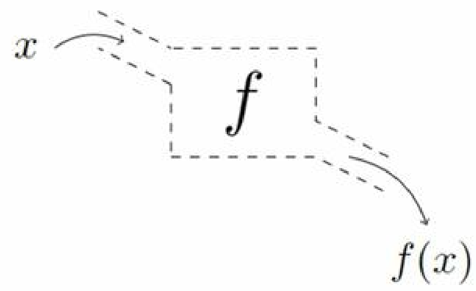
Chapitre 6

Fonctions réelles

Une **machine** $\boxed{f}$ fabrique pour tout réel $\boxed{x}$ une image réelle notée $\boxed{f(x)}$

$\mathbb{R}$ étant l'ensemble des réels (*voir* § 1, p. 15), cette machine est appelée fonction ou application $\boxed{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On la désigne par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$



Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la **fonction** f produit donc une **image** notée $f(x)$.

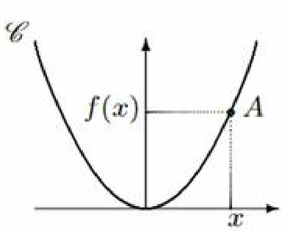
ATTENTION ! f n'est pas un nombre $\boxed{f(x) \neq f \times x}$ f est une machine.

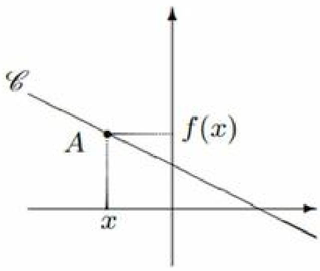
1 Graphe d'une fonction

Définition 1. *La **courbe représentative** $\mathscr{C}$ (ou **graphe**) d'une fonction :*

$$x \mapsto f(x)$$

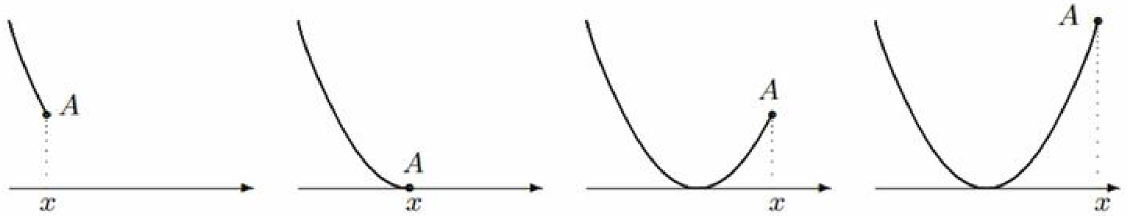
*de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est l'ensemble des points A de coordonnées $(x; f(x))$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$. On dit que $y = f(x)$ est **l'équation** de $\mathscr{C}$.*



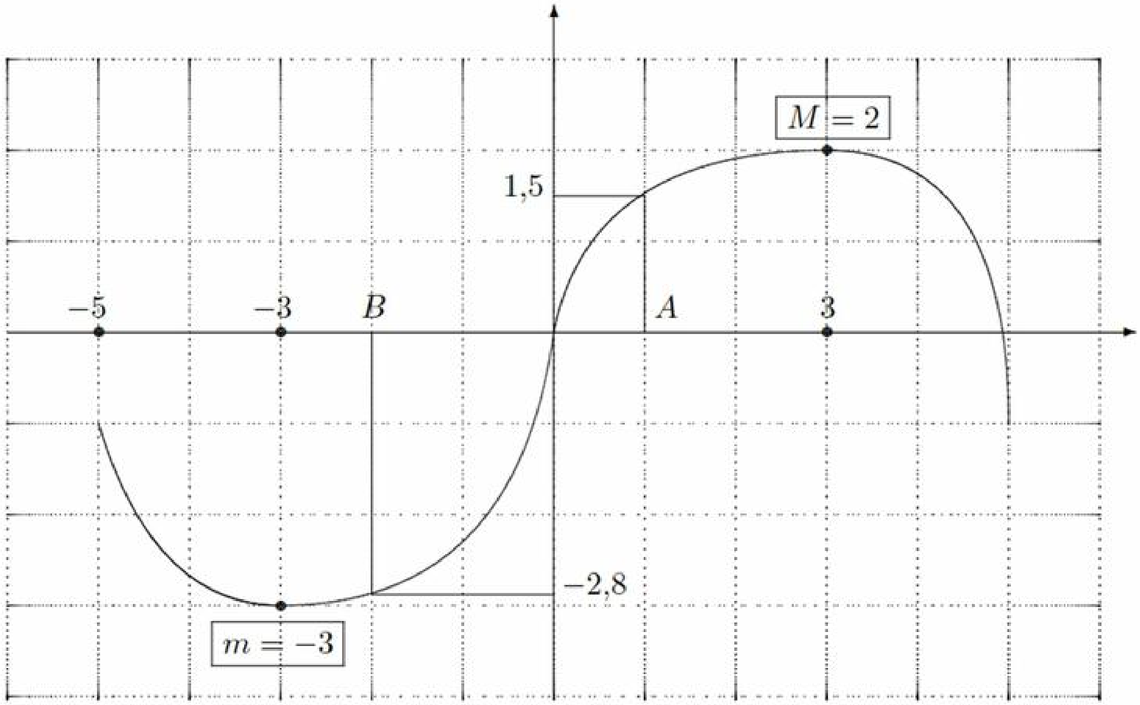


On lit un graphe dans le **sens croissant** des abscisses. Le premier graphe est une **courbe** qui descend puis remonte. Le second est une **droite** qui descend.

Il faut imaginer que la courbe $\mathscr{C}$ est **décrite** par le point $A(x; f(x))$ quand x **parcourt l'axe réel**, de gauche à droite, comme **un crayon qui trace** sur un papier :



2 Lecture graphique d'une image



On a dessiné ci-dessus un morceau du graphe d'une certaine fonction $x \mapsto f(x)$. On peut évaluer **l'image d'un réel** par f en traçant des segments de droites :

• Pour évaluer $f(1)$, on trace le segment vertical qui part du point $A(1; 0)$ et qui va **jusqu'à la courbe**. Il l'atteint en un point dont l'ordonnée est environ 1,5. On a donc :

$$\boxed{f(1) \approx 1{,}5}$$

• Pour évaluer $f(-2)$, on trace le segment vertical qui part du point $B(-2; 0)$ et qui va jusqu'à la courbe. Il l'atteint en un point dont l'ordonnée est environ $-2{,}8$. On a donc :

$$\boxed{f(-2) \approx -2{,}8}$$

• On montrerait de même $f(-5) = -1$

• On voit que pour les réels $x \geq 0$ la fonction f admet un **maximum** $M = 2$ et que ce maximum est atteint quand $x = 3$ car $f(3) = 2$.

• On voit aussi que pour les réels $x \leq 0$ la fonction f admet un **minimum** $m = -3$ et que ce minimum est atteint quand $x = -3$ car $f(-3) = -3$.

3 Lecture graphique d'un antécédent

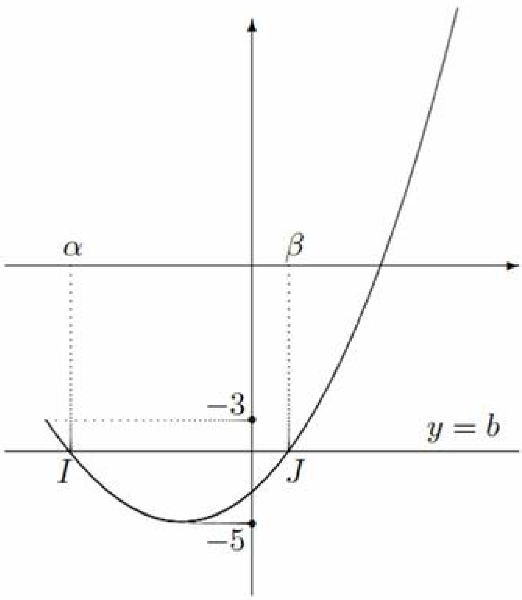
On a dessiné ci-contre le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$. On imagine un réel b sur l'axe des y. On voit que si b est tel que :

$$-5 < b \leq -3$$

la droite horizontale d'équation $y = b$ **coupe la courbe** en deux points I et J dont les abscisses sont α et β. On a donc :

$$f(\alpha) = b \qquad f(\beta) = b$$

On dit que α et β sont les **antécédents** de b par f.
Par contre, si $b < -5$, la droite horizontale d'équation $y = b$ **ne coupe pas la courbe**. Un tel nombre b **n'a pas d'antécédent** par f.



Ainsi, le nombre $b = -5{,}5$ n'a pas d'antécédent par f. Autrement dit, l'équation d'inconnue x :

$$f(x) = -5{,}5$$

n'a pas de solution.

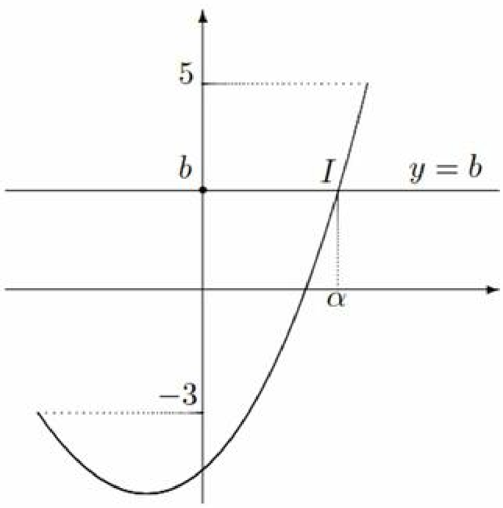
Explorons à présent la partie haute du graphe de f. On voit que si b est tel que

$$-3 < b \leq 5$$

la droite **horizontale** d'équation $y = b$ **coupe la courbe** en un point unique I dont l'abscisse est α. On a donc :

$$f(\alpha) = b$$

Le nombre α est donc l'unique **antécédent** de b par f.
Par contre, si $b > 5$, la droite horizontale d'équation $y = b$ **ne coupe pas la courbe**. Un tel nombre b **n'a pas d'antécédent** par f.



Ainsi le nombre $b = 5{,}5$ n'a pas d'antécédent par f. Autrement dit, l'équation d'inconnue x :

$$f(x) = 5{,}5$$

n'a pas de solution.

4 Polynômes

Définition 2. *Un **monôme** est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax^n$ où a est un réel ne dépendant pas de x, appellé le **coefficient**, et n est un entier ≥ 0 appelé le **degré**. Un **polynôme** est une somme de monômes.*

Exemple : $x \mapsto -3x^4$ est un monôme de degré 4, de coefficient -3.

Pour mieux comprendre la suite, on peut imaginer que f est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 - x^2 + 5x - x^3 - 4x$$

Réduire f c'est l'écrire comme somme de monômes de degrés tous différents, en appliquant autant de fois que nécessaire la règle :

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Une fois f réduit, il y a deux possibilités :

• soit tous les monômes de f se sont simplifiés, et alors $f(x) = 0$ pour tout réel x ;

• soit il reste au moins un monôme. On admet que les différents monômes restant ne dépendent pas de la façon dont on a réduit f. Cette écriture de f est **unique** (à l'ordre près des monômes). On l'appelle **l'écriture réduite** de f.

Le degré du monôme de plus haut degré figurant dans cette écriture réduite est appelé **degré** de f, on le note $\deg f$.

Sur l'exemple précédent :

$$f(x) = x^2 + 1 - x^2 + 5x - x^3 - 4x$$

on peut simplifier et réduire :

$$f(x) = \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 5x - x^3 - 4x = 1 + x - x^3$$

Donc f est de degré 3.

Définition 3. ***Factoriser*** *un polynôme f, c'est l'écrire comme produit de polynômes :*

$$f = g \times h$$

dont les degrés sont ≥ 1.

Exemple : Supposons que le polynôme f soit défini par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3(x-1)(2x-5)$$

On utilise l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, (*voir* prop. 3, p. 15). On a donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 - 3(x-1)(2x-5) \\ &= (x-1)(x-1-3(2x-5)) \\ &= (x-1)(-5x+14) \end{aligned}$$

On a factorisé f par deux facteurs, tous deux de degré 1. Précisons les notations. Si on désigne par g et h les polynômes :

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & x-1 \\ x & \mapsto & -5x+14 \end{array}$$

On voit qu'on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = g(x) \times h(x)$$

ce qu'on résume en écrivant :

$$f = g \times h$$

5 Fonctions affines

Définition 4. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le **taux d'accroissement** de f entre deux valeurs distinctes x_1 et x_2 de la variable x est le nombre :*

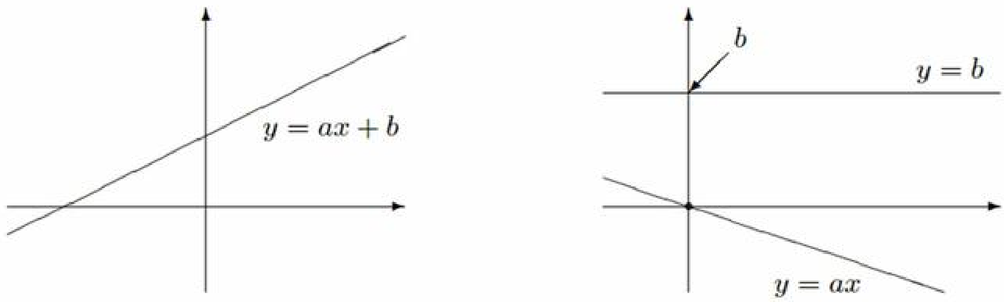
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Définition 5. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction affine** s'il existe des réels a et b ne dépendant pas de x, et tels que pour tout x :*

$$f(x) = ax + b$$

Si $a = 0$, la fonction affine prend toujours la même valeur b pour tous les réels x. On dit qu'elle est **constante**. Si $a \neq 0$, la fonction affine est un polynôme de degré 1.

Proposition 6. *Soient a et b des réels. Le graphe de la **fonction affine** $x \mapsto ax + b$ est la **droite** d'équation $\boxed{y = ax + b}$. Si $b = 0$ cette droite passe par l'origine. Si $a = 0$ elle est **horizontale**, si $a \neq 0$ elle est **oblique**.*



Proposition 7. *Le taux d'accroissement d'une fonction affine est **constant** entre deux réels distincts. Pour l'application affine $x \mapsto ax + b$ on a :*

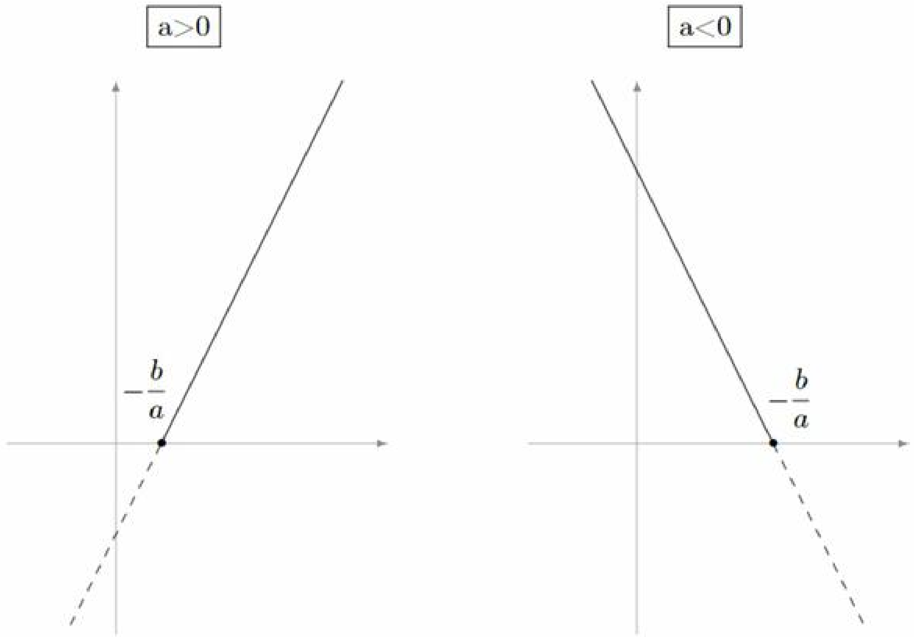
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

6 Signe de $ax+b$

Proposition 8. *Soient a, b des réels. Si $a>0$ alors* $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$

Si $a<0$ alors $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$

Ceci correspond aux deux cas de figure suivants :



7 Exercices

Exercice 1 (*parabole* (i))**.**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto x^2 - 1$$

1. Recopier et compléter le tableau de **valeurs arrondies** suivant (on pourra faire certains calculs avec la calculette) :

x	-1	$-0{,}4$	0	$0{,}3$	$0{,}6$	1	$1{,}5$
$f(x)$	0	$-0{,}8$					

2. Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère. Marquer ensuite les sept points dont les coordonnées sont :

$$(-1\ ;\ 0) \qquad (-0{,}4\ ;-0{,}8) \qquad \text{etc.}$$

3. Joindre au crayon ces sept points, dans l'ordre croissant des abscisses, en traçant une courbe bien lisse.

Exercice 2 (*représentation graphique d'une fonction* (i)).

On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (x+1)(x-1)^2$$

1. Recopier et compléter le tableau de **valeurs arrondies** suivant (on pourra faire certains calculs avec la calculette) :

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-3{,}1$	0					

2. Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère. Marquer ensuite les sept points dont les coordonnées sont :

$$(-1,5\ ;-3,1) \qquad (-1\ ;\ 0) \qquad \text{etc.}$$

3. Joindre au crayon ces sept points, dans l'ordre croissant des abscisses, en traçant une courbe bien lisse.

Exercice 3 (*représentation graphique d'une fonction* (ii)).

On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (5x+2)(-x+1)$$

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. On dispose donc de deux formules pour $f(x)$: l'une **factorisée**, donnée par l'énoncé, l'autre **développée** et réduite, que l'on vient d'obtenir. Calculer, par la formule de votre choix, les nombres :

$$f(0) \qquad f(1) \qquad f(-1) \qquad f\left(\frac{-2}{5}\right)$$

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on pourra faire certains calculs avec la calculette) :

x	-1	$-0{,}4$	0	$0{,}3$	$0{,}6$	1	$1{,}5$
$f(x)$	-6	0					

4. Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère. Marquer ensuite les sept points dont les coordonnées sont :

$$(-1\ ;-6) \qquad (-0{,}4\ ;0) \qquad \text{etc.}$$

5. Joindre au crayon ces sept points, dans l'ordre croissant des abscisses, en traçant une courbe bien lisse. Vérifier qu'on obtient une sorte de cloche.

Exercice 4 (*météorologie* (i)).

26 février 2018, midi. Un pâle soleil d'**hiver** illumine la cathédrale de **Strasbourg**, dont la flèche s'élance vers le ciel bleu. L'air qu'on respire est glacé, vif, tonique.

Le double tableau suivant fournit **heure par heure**, la température extérieure (en dégré), relevée à la station météorologique de Strasbourg/Entzheim :

heure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
temp.	-4,4	-4,6	-5,4	-6	-6,5	-7,1	-7,5	-7,1	-6	-5,1	-4,4	-3,6

heure	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
temp.	-3,6	-3,1	-2,8	-2,9	-3,8	-4,5	-5,2	-5,8	-5,6	-6,1	-6,4	-7

1. Tracer la courbe de ces températures. On prendra :
   - en abscisse : 1 h = 5 mm
   - en ordonnée : 1 degré = 1 cm. Faire commencer les ordonnées à 0.
2. Relever la plus haute température de ce jour, et la plus basse. À quelle heure ont-elles été atteintes ?
3. On sait que ce jour-là, le soleil s'est levé à 7 h 19 et s'est couché à 18 h 05. Expliquez pourquoi ces données sont cohérentes avec la courbe.

Exercice 5 (*météorologie* (ii)).

Cinq mois ont passé, nous sommes à **Strasbourg**, le 26 juillet 2018, il est midi. Le soleil d'**été** darde ses rayons brûlants. La chaleur est torride, l'air étouffant. On cherche un peu de fraîcheur à l'ombre de la cathédrale.

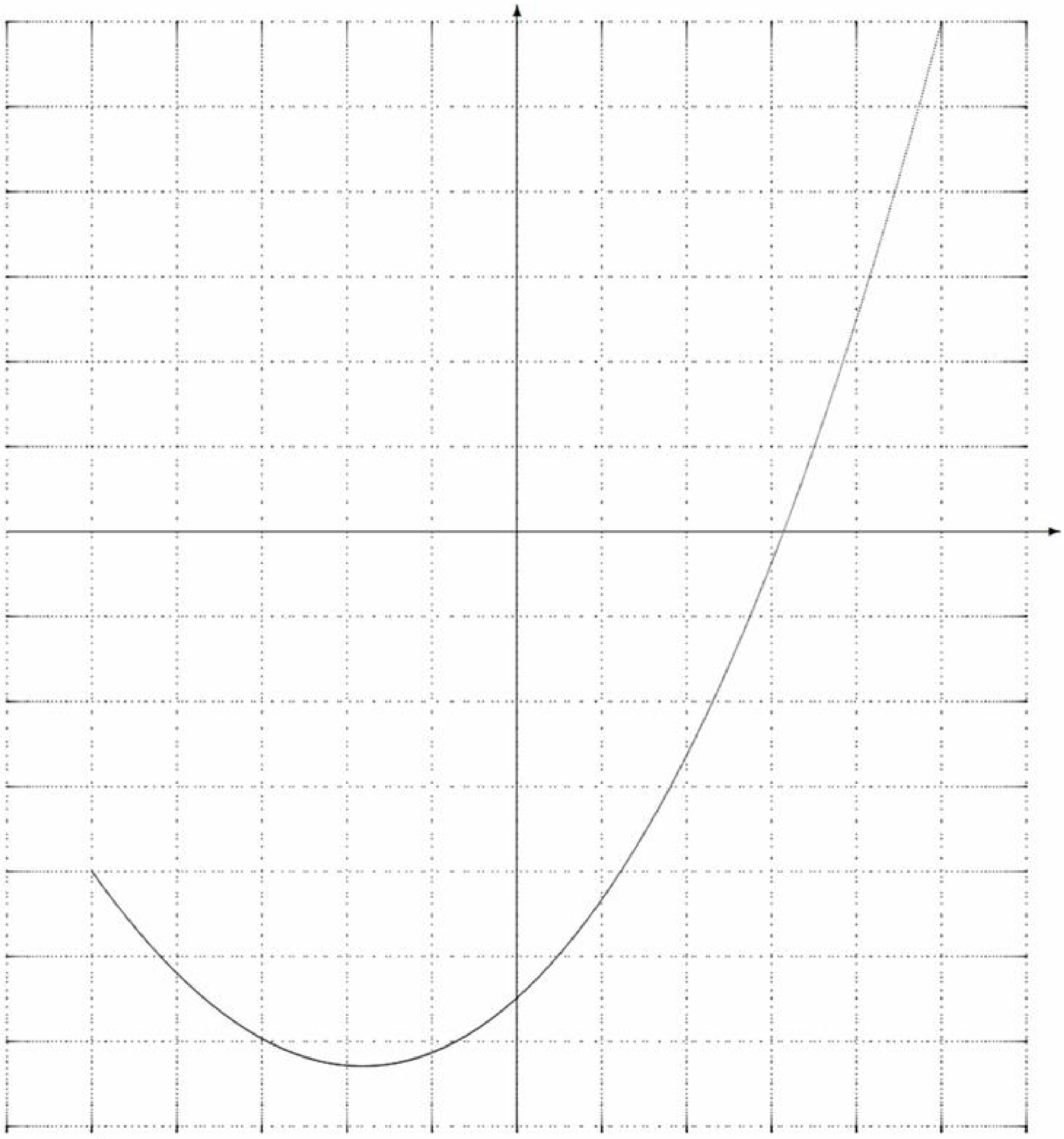
Le double tableau suivant fournit **heure par heure**, la température extérieure (en dégré), relevée à la station météorologique de Strasbourg/Entzheim :

heure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
temp.	21,1	20,1	19,6	18,9	18,7	17,7	19,5	22,6	24,7	26,9	28,6	30,2

heure	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
temp.	32,6	33,8	34,2	34,5	34,5	34,2	33,5	32,1	30,3	26,7	23,6	21,7

1. Tracer la courbe de ces températures. On prendra :
   - en abscisse : 1 h = 5 mm
   - en ordonnée : 1 degré = 1 cm. Faire commencer les ordonnées à 17 et non à 0.
2. Relever la plus haute température de ce jour, et la plus basse. À quelle heure ont-elles été atteintes ?
3. On sait que ce jour-là, le soleil s'est levé à 6 h et s'est couché à 19 h 11. Expliquez pourquoi ces données sont cohérentes avec la courbe.

Exercice 6 (*parabole* (ii)).

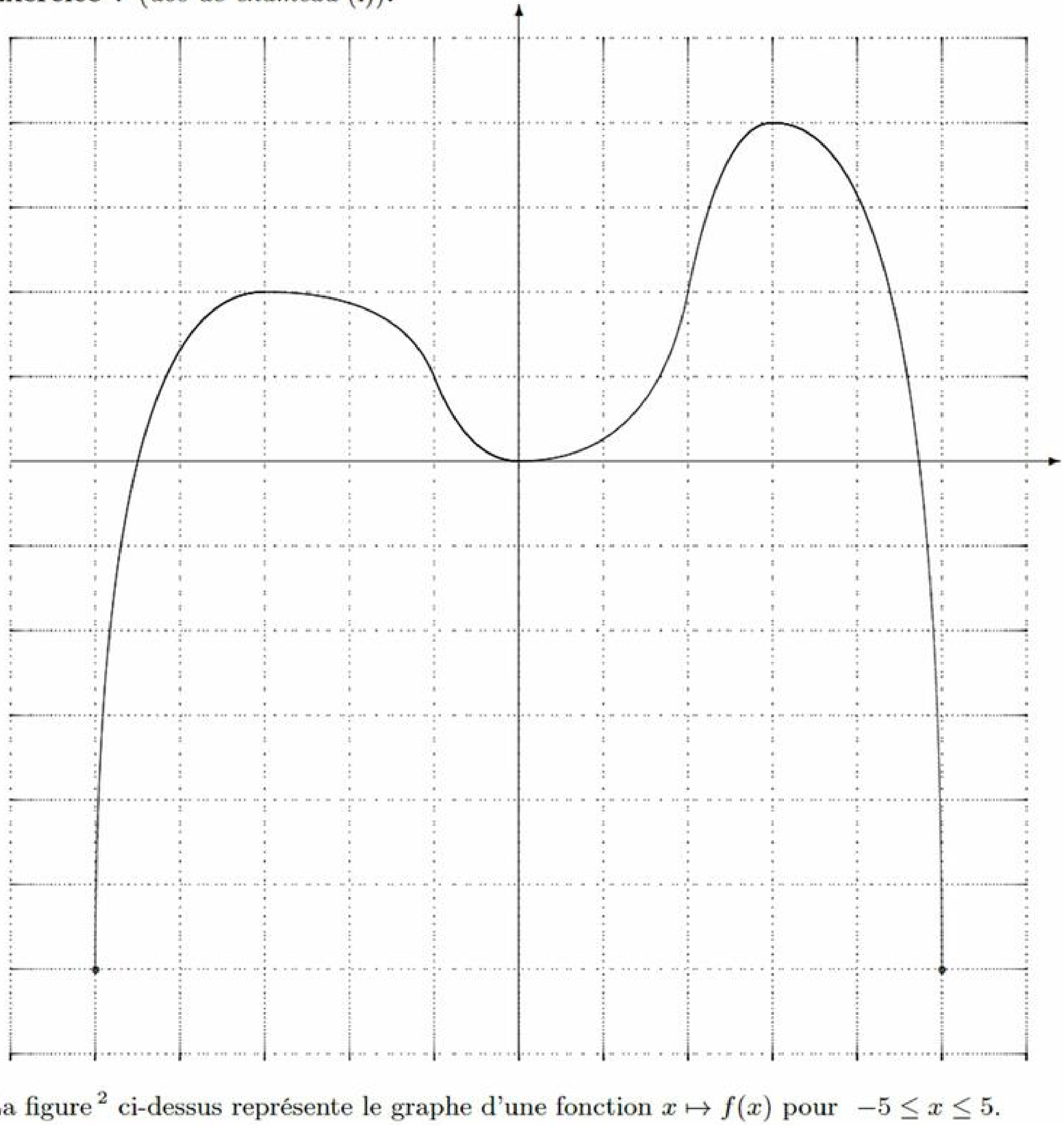


La figure[1] ci-dessus représente le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ pour $-5 \leq x \leq 5$.

1. Construire les segments qui permettent de déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(-4)$. Compléter :
$$f(-4) =$$
2. Construire de même les segments qui permettent de déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(2)$. Compléter :
$$f(2) =$$
3. Dresser un tableau donnant les valeurs approchées de $f(x)$ pour tous les entiers x allant de -5 à 5.

1. Il est conseillé de photocopier cette page et de réaliser les tracés demandés sur la photocopie.

Exercice 7 (*dos de chameau* (i)).



La figure[2] ci-dessus représente le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ pour $-5 \leq x \leq 5$.

1. Construire les segments qui permettent de déterminer $f(-3)$. Compléter :

$$f(-3) =$$

2. Construire de même les segments qui permettent de déterminer $f(2)$. Compléter :

$$f(2) =$$

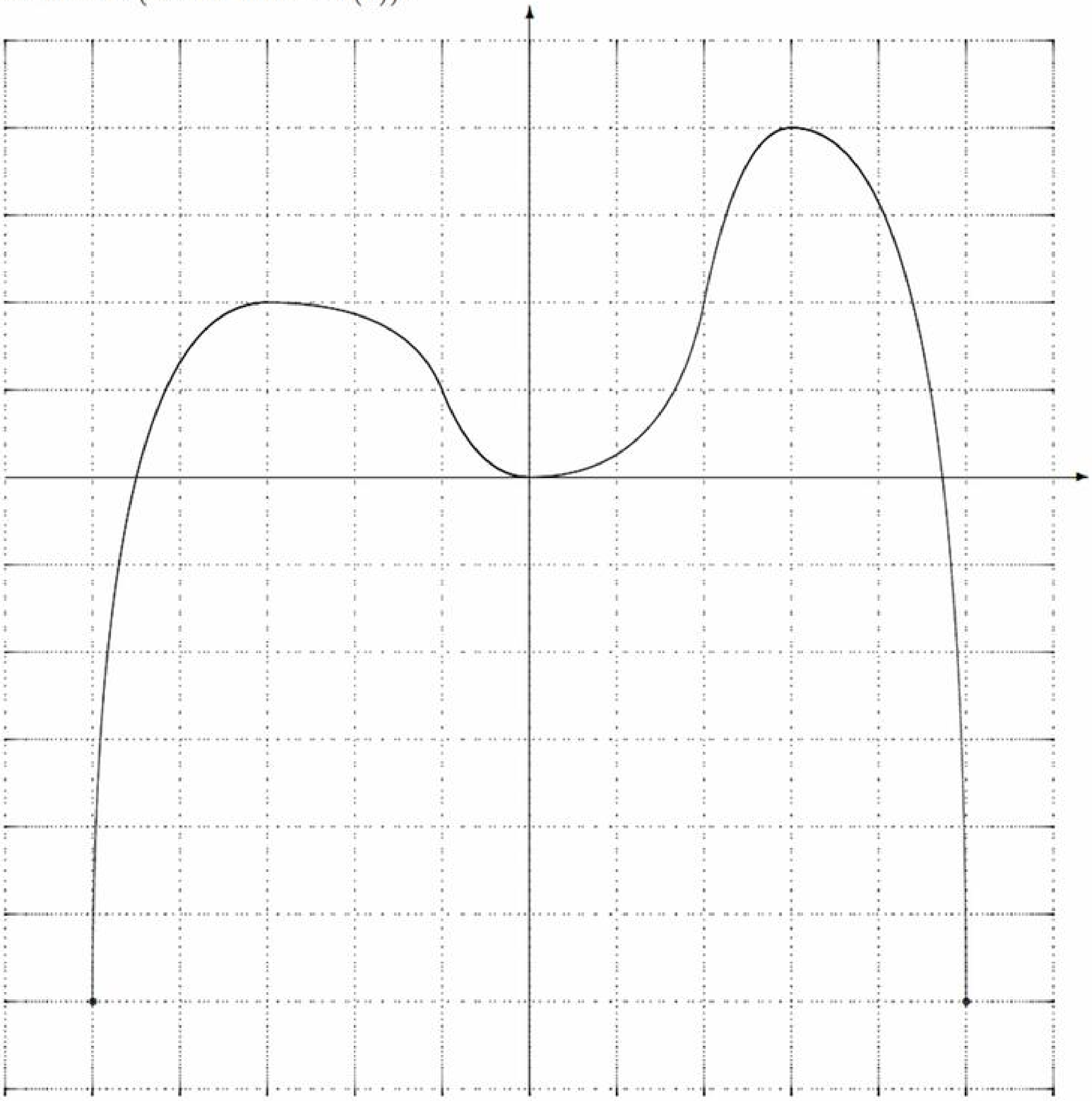
3. Dresser un tableau donnant les valeurs approchées ou exactes de $f(x)$ pour tous les x tels que :

$$x \in \{-5, -4, -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

4. D'après la figure, pour quelle valeur de x le nombre $f(x)$ est-il maximum ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

2. Il est conseillé de photocopier cette page et de réaliser les tracés demandés sur la photocopie.

Exercice 8 (*dos de chameau* (ii)).

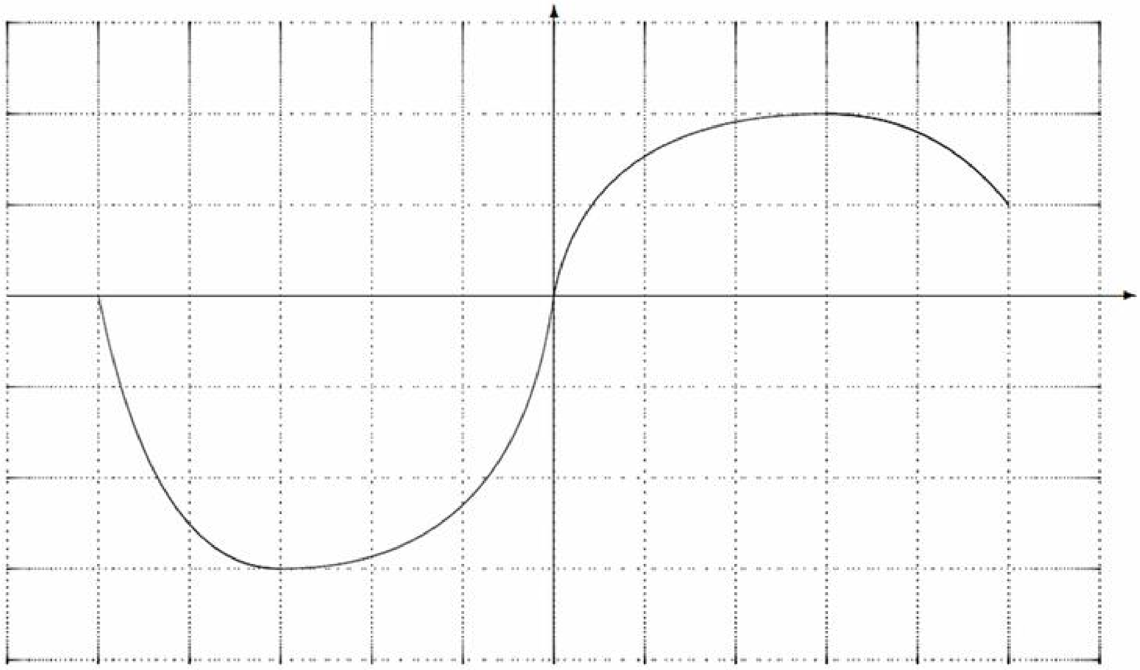


La figure [3] ci-dessus est une portion du graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ pour $-5 \leq x \leq 5$.

1. Tracer en rouge la droite d'équation $y = 1$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 1$.
2. Tracer en rouge la droite d'équation $y = -2$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = -2$.
3. Tracer en rouge la droite d'équation $y = 5$. En déduire qu'**il n'y a pas de valeurs** de x pour lesquelles $f(x) = 5$.

3. Il est conseillé de photocopier cette page et de réaliser les tracés demandés sur la photocopie.

Exercice 9 (*dos d'âne*).



La figure[4] ci-dessus est une portion du graphe $\mathscr{C}$ d'une fonction $x \mapsto f(x)$.

1. D'après la figure, évaluer approximativement ou exactement les nombres suivants :

$$f(-4) \qquad f(-3) \qquad f(-1{,}5) \qquad f(0) \qquad f(0{,}5) \qquad f(2) \qquad f(4{,}5) \qquad f(5)$$

2. Tracer en bleu la droite d'équation $y = -2$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = -2$.
3. Tracer en rouge la droite d'équation $y = 0{,}8$. Déterminer x tel que $f(x) = 0{,}8$
4. D'après la figure, quelle est la valeur maximum M de $f(x)$? Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?
5. D'après la figure, quelle est la valeur minimum m de $f(x)$? Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

Exercice 10.

Soient les polynômes f, g, h suivants :

$$f(x) = \frac{1}{3}x(6x-9) \qquad g(x) = \frac{x}{7}(28x+49) \qquad h(x) = (5x-4)(3x-2)$$

1. Utiliser la règle d'annulation (th. 5, p. 27) pour résoudre les trois équations :

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0 \qquad h(x) = 0$$

2. Développer, réduire et ordonner f, g, h.

4. Il est conseillé de photocopier cette page et de réaliser les tracés demandés sur la photocopie.

Exercice 11.

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants :

$$f(x) = \left(\frac{5}{2}x + \frac{4}{5}\right)\left(2x - \frac{5}{2}\right) \quad g(x) = \left(\frac{1}{2} + 2x\right)\left(\frac{1}{2} - 2x\right) \quad h(x) = \left(\frac{x}{5} - 12\right) \times \frac{x}{6}$$

Exercice 12.

1. Factoriser par x le polynôme suivant :

$$f(x) = x(3x-1) - x(4x+100) + x$$

2. Factoriser par $1-3x$ les polynômes suivants :

$$f(x) = 5x(3x-1) + (x-4)(2-6x) \qquad g(x) = (1-3x)^2 + (5x+3)(1-3x)$$

3. Utiliser certaines identités remarquables (prop. 3, p. 15) pour factoriser les polynômes suivants :

$$f(x) = 4x^2 - 9 \qquad g(x) = 4 - x^2 \qquad h(x) = x^2 - 6x + 9$$

Exercice 13.

Dans cet exercice et les deux suivants, on sera amené à utiliser certaines identités remarquables (prop. 3, p. 15) étudiées en classe de 4e.
Soit la fonction $x \mapsto f(x) = (4x-2)^2 - (2x-1)(x+3)$.

1. Factoriser $f(x)$ avec deux facteurs du premier degré.
2. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Calculer le plus simplement possible les nombres suivants :

$$f(0) \quad f(\frac{1}{2}) \quad f(-\frac{1}{2}) \quad f(\sqrt{7})$$

(On donnera les résultats sous la forme d'entiers ou de fractions irréductibles ou sous la forme $a + b\sqrt{7}$ avec a, b entiers relatifs, pour le dernier calcul).

Exercice 14.

Soit la fonction $x \mapsto f(x) = (-5x+2)^2 + (4-10x)(x+3)$.

1. Factoriser $f(x)$ avec deux facteurs du premier degré.
2. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Calculer le plus simplement possible les nombres suivants :

$$f(\frac{1}{5}) \quad f(\frac{1}{3}) \quad f(-1) \quad f(\sqrt{2}) \quad f(1-\sqrt{2})$$

(On donnera les résultats sous la forme d'entiers ou de fractions irréductibles ou sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a, b entiers relatifs, pour les deux derniers calculs).

Exercice 15.

Soit la fonction $x \mapsto f(x) = (5x-2)(x+1)+1-x^2$.

1. Factoriser $f(x)$ avec deux facteurs du premier degré.
2. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Calculer le plus simplement possible les nombres suivants :

$$f(1) \quad f(0) \quad f(-\frac{1}{4}) \quad f(\frac{1}{2}) \quad f(\sqrt{2})$$

(On donnera les résultats sous la forme d'entiers ou de fractions irréductibles ou sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a, b entiers relatifs, pour le dernier calcul).

Exercice 16 (*Matthieu et Justine*).

Introduction : cet exercice aborde (en petit) la **cinématique**, c'est-à-dire l'étude mathématique des mouvements. Il faut connaître la relation :

$$\boxed{d = v \times \boldsymbol{t}}$$

qui donne la distance d parcourue pendant un temps $\boldsymbol{t}$, lorsqu'on est animé d'une vitesse constante v (avec des unités convenables). Dans les fonctions de la cinématique, la variable n'est pas notée x comme d'habitude : elle est notée $\boldsymbol{t}$ initiale de **temps**.

Énoncé : les villes A et B sont distantes de 4 km. Matthieu part de A à 8 h et se dirige à pied vers B à la vitesse de 6 km/h. À la même heure Justine part de B en courant pour aller en A à la vitesse de 10 km/h. Les distances sont mesurées en km. On compte les heures de course à partir de 8 h. On définit les fonctions :

- $t \mapsto M(t) =$ distance parcourue par Matthieu au bout de t heures de course.
- $t \mapsto J(t) =$ distance parcourue par Justine au bout de t heures de course.

1. Faire un schéma du trajet entre A et B. Sur ce trajet, placer les points M et J représentant Matthieu et Justine à un certain moment de leur course.
2. Calculer les fonctions $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto J(t)$.
3. Calculer au bout de combien de temps le croisement aura lieu. En déduire l'heure de ce croisement en heures + minutes.
4. Calculer au bout de combien de temps Matthieu arrivera en B. En déduire son heure d'arrivée en heures + minutes.
5. Calculer **de même** l'heure d'arrivée de Justine en A.

Exercice 17 (d'après brevet 2016, simplifié).

Il faut limiter ses efforts durant des activités sportives, afin de ménager son cœur. La relation entre l'âge x d'une personne (en année) et la fréquence cardiaque maximale recommandée **(FCMR)** notée $f(x)$ (en pulsations par minute), est donnée par la formule :

$$f(x) = 220 - x$$

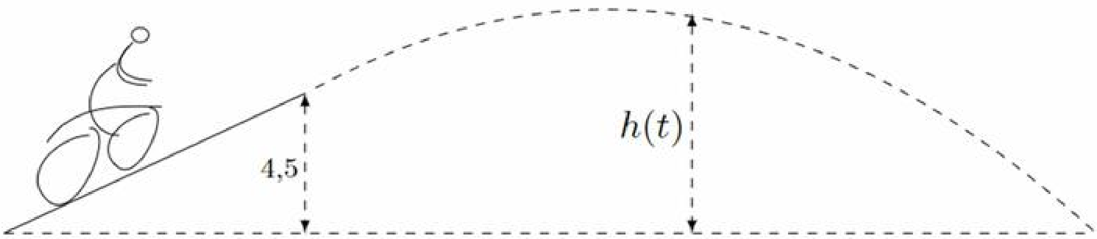
1. Avec cette formule, quelle est la FCMR pour un enfant de 10 ans ? Pour un adulte de 20 ans ? De 50 ans ?

2. Sur une feuille de papier millimétré, on considère un repère ayant comme unités :
   - en abscisse : 1 cm pour une 10 années. Commencer les abscisses à $x = 0$;
   - en ordonnée : 5 cm pour 100 pulsations. Commencer les ordonnées à $y = 100$.

   Tracer le graphe de la fonction f, pour les abscisses telles que $0 \leq x \leq 70$.
3. Vérifiez que les points correspondant à la question 1. sont bien sur le graphe.

Exercice 18 (d'après brevet 2016).

(hauteurs en m, temps en s) Lors d'une course de moto-cross, Gaëtan a fait un saut en moto. Il a pris son élan à l'aide d'un tremplin qui monte à 4,5 m de hauteur, puis **il s'est envolé**. Le temps est mesuré à partir du moment où Gaëtan s'est envolé. Au temps t, on note $h(t)$ la hauteur de sa position, depuis le niveau du sol. Attention, le schéma suivant n'est pas à l'échelle :



On suppose qu'on a :

$$h(t) = (5t + 1{,}5) \times (3 - t)$$

1. Recopier puis compléter le tableau suivant des valeurs de la fonction $t \mapsto h(t)$:

t	0	0,2	0,5	1	1,2	1,5	2	2,2	2,5	3
$h(t)$	4,5	7								0

2. Utiliser ces valeurs pour tracer le graphe de la fonction $t \mapsto h(t)$ pour $0 \leq t \leq 3$ dans un repère bien choisi.
3. Combien de temps dure le saut de Gaëtan ?
4. À quelle hauteur culmine-il environ ?

Exercice 19.

(*voir* ex. 2, p. 39) La SNCF propose deux abonnements annuels pour les trajets de Saverne à Nancy :

- l'abonnement A comporte un forfait annuel de 40 euros et 10 euros par voyage ;
- l'abonnement B comporte un forfait annuel de 80 euros et 6 euros par voyage.

Un voyageur qui doit faire x voyages dans l'année **hésite** entre les deux possibilités.

1. Calculer l'expression $A(x)$ du prix qu'il devra payer s'il choisit l'abonnement A.
2. Calculer l'expression $B(x)$ du prix qu'il devra payer s'il choisit l'abonnement B.
3. Sur la même figure, tracer les graphes des fonctions $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ pour $0 \leq x \leq 15$. On prendra en abscisses, 1 carreau $=$ 2 voyages, et en ordonnées, 1 carreau $=$ 10 euros, et on commencera les ordonnées à $y = 40$.

4. Résoudre graphiquement l'équation :

$$A(x) = B(x)$$

5. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x on a $A(x) \leq B(x)$.
6. Quels conseils donneriez-vous au voyageur pour **lever ses hésitations ?**

Exercice 20 (d'après brevet 2015).

Pierre, Paul et Jacques sont livreurs de pizzas, avec trois contrats différents. Ainsi, chaque mois :
• Pierre reçoit un salaire fixe de 700 euros.
• Paul reçoit un salaire composé d'une partie fixe de 500 euros, à laquelle s'ajoute 1 euro par livraison faite.
• Jacques n'a pas de fixe, mais il est payé 2 euros par livraison.

1. Si durant un mois, la pizzeria ne reçoit que très peu de commandes, lequel des trois livreurs gagnera le plus ? Lequel gagnera le moins ?
2. Durant un mois, combien de livraisons Paul doit-il faire pour avoir le même salaire que Pierre ?
3. Durant un mois, combien de livraisons Jacques doit-il faire pour avoir le même salaire que Pierre ?
4. On suppose qu'un certain mois, Paul et Jacques ont fait le même nombre de livraisons. On note x ce nombre.
   a/ Calculer le salaire $P(x)$ reçu par Paul. Calculer le salaire $J(x)$ reçu par Jacques.
   b/ Représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto J(x)$ dans un même repère, pour $0 \leq x \leq 600$, avec l'**échelle** suivante :

abscisses : 1 carreau = 40 livraisons	ordonnées : 1 carreau = 100 euros

   c/ Résoudre l'inéquation :

   $$J(x) \geq P(x)$$

   d/ À partir de combien de livraisons Jacques gagnera-t-il plus que Paul ? Répondre à cette question par une phrase claire en français.

Récréation 21 (*images itérées d'un nombre*).

Soit la fonction f qui à tout **entier** ≥ 1 associe la somme des carrés de ses chiffres :

$$f(31) = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 \qquad f(5) = 25 \qquad f(89) = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$

1. Calculer de même les images :

$$f(1) \qquad f(7) \qquad f(49) \qquad f(10) \qquad f(27)$$

2. Vérifier qu'on a :

$$f(7) = 49 \qquad f(49) = 97 \qquad f(97) = 130$$

   Continuer ainsi et montrer qu'on a

$$f(130) = 10 \qquad f(10) = 1 \qquad f(1) = 1$$

On dit que 49, 97, 130, 10, 1 sont les **images itérées** de 7 par f.

La suite des itérées de $\boxed{7}$ est représentée par la **branche** ci-contre :

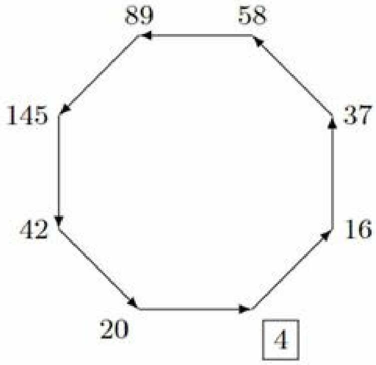
3. Vérifier qu'on a :

$$f(4) = 16 \qquad f(16) = 37 \qquad f(37) = 58$$

Montrer que les itérés suivants de 4 sont :

$$f(58) = 89 \qquad f(89) = 145 \qquad f(145) = 42 \qquad f(42) = 20 \qquad f(20) = 4$$

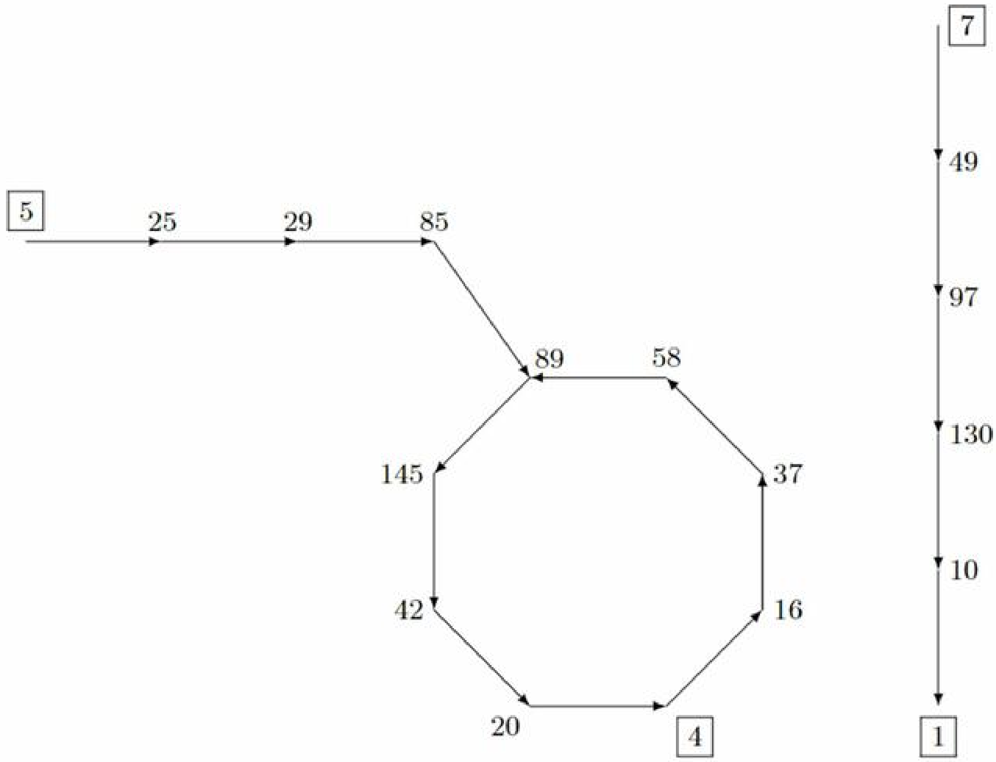
On représente la suite des itérés de $\boxed{4}$ par le **cycle d'ordre 8** suivant :



4. Montrer qu'on a

$$f(5) = 25 \qquad f(25) = 29 \qquad f(29) = 85 \qquad f(85) = 89$$

On représente toutes ces images sur le schéma suivant, où l'on voit que la branche des itérées de 5 se raccorde au cycle de 4 au point 89 :



5. Montrer que les images itérées de 3 sont :

$$f(3) = 9 \qquad f(9) = 81 \qquad f(81) = 65 \qquad f(65) = 61 \qquad f(61) = 37$$

6. Calculer les images itérées de 6 jusqu'à 25 :

$$f(6) = 36 \qquad f(36) = 45 \qquad \dots \qquad f(?) = 25$$

7. Calculer les images itérées de 8 jusqu'à 29 :

$$f(8) = 64 \qquad \dots \qquad f(?) = 29$$

8. Représenter les branches de 3, de 6, de 8 que l'on vient de calculer. Vérifier que la branche de 3 se raccorde au cycle de 4, et que les branches de 6 et de 8 se raccordent à la branche de 5 et aboutissent donc **finalement** au cycle de 4.
9. On peut montrer que les itérées de tous les entiers ≥ 1 se raccordent **finalement** soit au cycle de 4 soit à la branche qui aboutit à 1. Le **lecteur courageux** pourra vérifier cette propriété pour tous les entiers de 1 à 50.

8 Correction des exercices

Ex. 1, p. 158. 1. On évalue $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(0{,}3) &= 0{,}3^2 - 1 \\ &= 0{,}09 - 1 \\ &= -(1 - 0{,}09) \\ &= -0{,}91 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(0{,}6) &= 0{,}6^2 - 1 \\ &= 0{,}36 - 1 \\ &= -(1 - 0{,}36) \\ &= -0{,}64 \end{aligned}$$

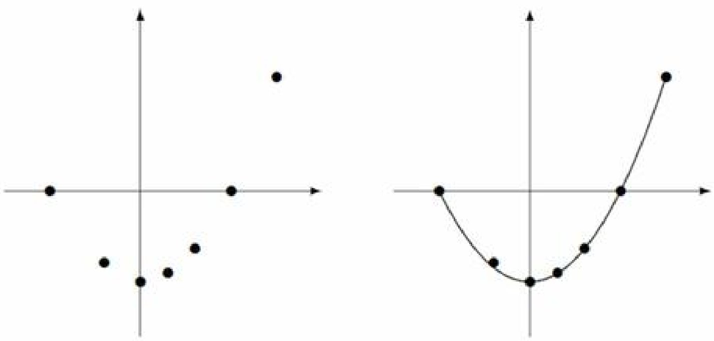
$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1{,}5) &= 1{,}5^2 - 1 \\ &= 2{,}25 - 1 \\ &= 1{,}25 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de valeurs complété :

x	-1	$-0{,}4$	0	$0{,}3$	$0{,}6$	1	$1{,}5$
$f(x)$	0	$-0{,}8$	-1	$-0{,}91$	$-0{,}64$	0	$1{,}25$

2. et 3. Voici les figures :

On a d'abord marqué les points dans un repère. Puis, on les a joints de façon **lisse**.



Ex. 2, p. 159. 1. On développe d'abord le carré :

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

On reporte dans l'expression de $f(x)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2-2x+1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^3 - x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

On évalue ensuite $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées :

$$\begin{aligned} f(-0{,}5) &= (-0{,}5+1)(-0{,}5-1)^2 \\ &= 0{,}5 \times (-1{,}5)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2{,}25 \\ &= 1{,}125 \\ f(0) &= 0 - 0 - 0 + 1 \\ &= 1 \\ f(1) &= 1 - 1 - 1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

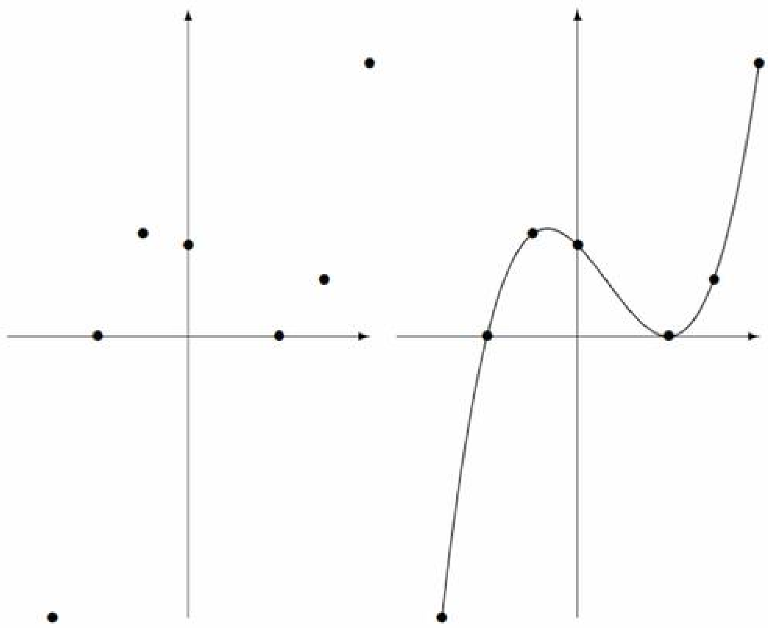
$$\begin{aligned} f(1{,}5) &= (1{,}5+1)(1{,}5-1)^2 \\ &= 2{,}5 \times 0{,}5^2 \\ &= 2{,}5 \times 0{,}25 \\ &= \frac{2{,}5^2}{10} \\ &= 0{,}625 \\ f(2) &= (2+1)(2-1)^2 \\ &= 3 \times 1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de valeurs complété :

x	$-1{,}5$	-1	$-0,5$	0	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-3{,}1$	0	$1{,}125$	1	0	$0{,}625$	3

2. et 3. Voici les figures :

On a d'abord marqué les points dans un repère. Puis, on les a joints de façon **lisse** dans l'ordre croissant des abscisses.



Ex. 3, p. 159. 1. On développe et on réduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x+2)(-x+1) \\ &= -5x^2+5x-2x+2 \\ &= -5x^2+3x+2 \end{aligned}$$

2. Par la formule développée, on obtient :

$$f(0)=2 \qquad f(-1)=-5-3+2=-6$$

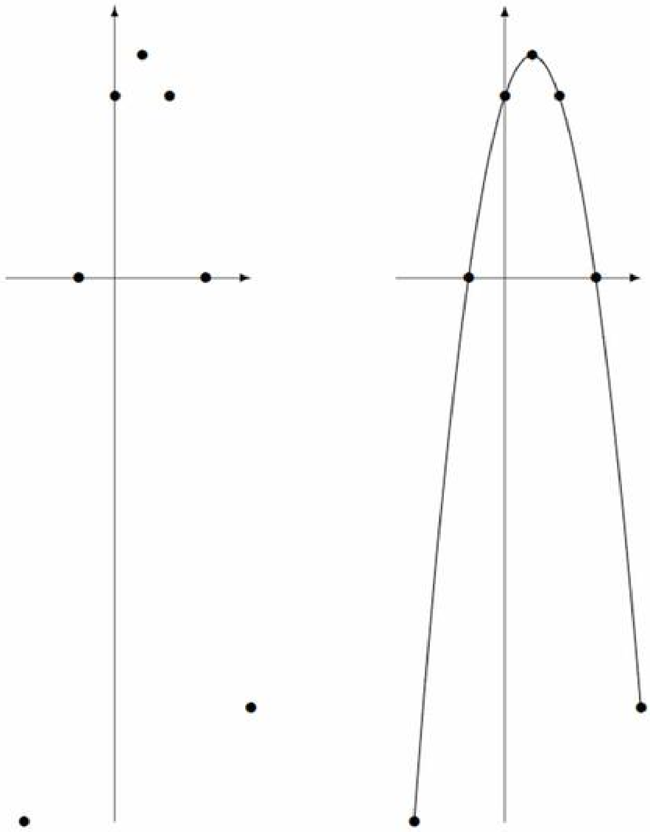
Par la formule factorisée, on obtient :

$$f(1)=0 \qquad f\left(\frac{-2}{5}\right)=0$$

car $-x+1$ s'annule en 1 et $5x+2$ s'annule en $\dfrac{-2}{5}$.
3. Voici le tableau de valeurs complété :

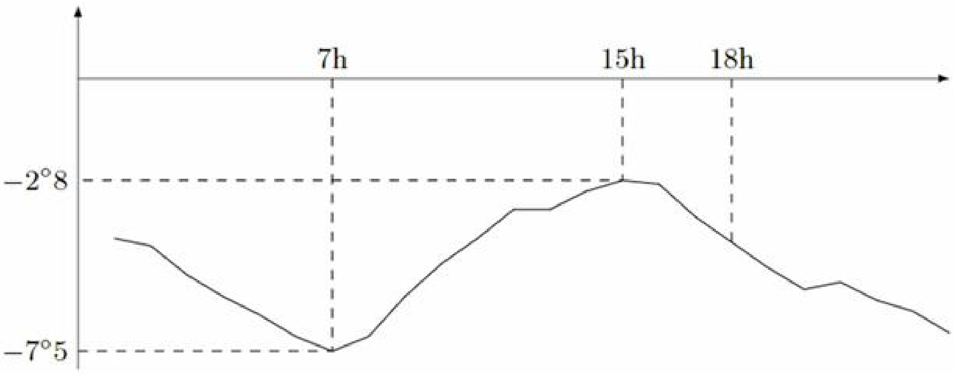
x	-1	$-0,4$	0	0,3	0,6	1	1,5
$f(x)$	-6	0	2	2,45	2	0	$-4,75$

4. et 5. Voici les figures :



On a d'abord marqué les points dans un repère. Puis, on les a joint de façon **lisse** dans l'ordre croissant des abscisses.

Ex. 4, p. 160. 1. Voici la courbe :

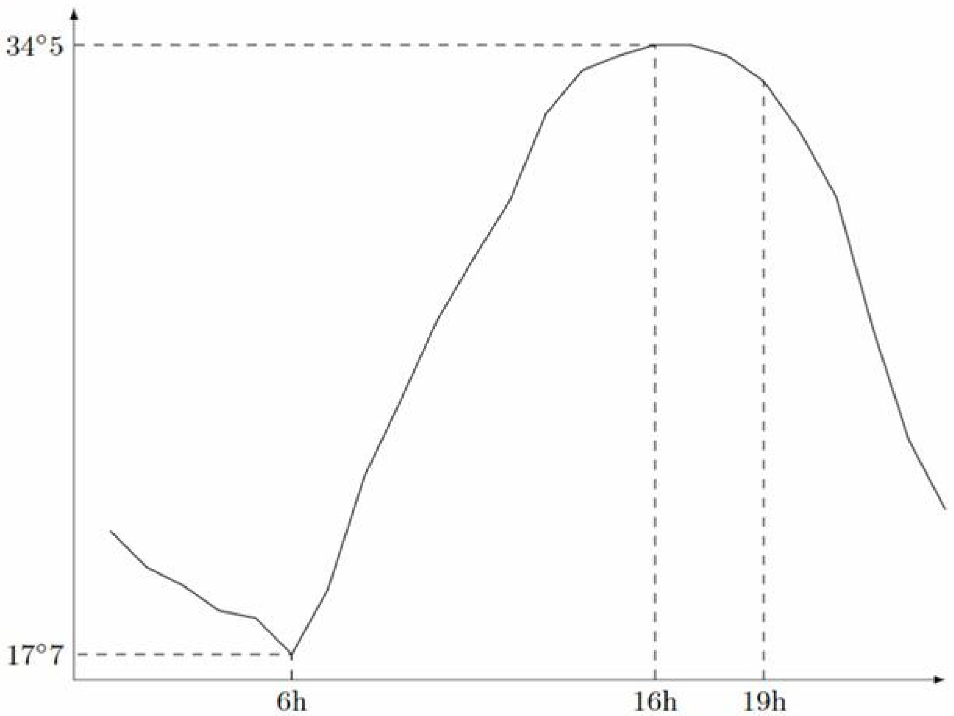


2. et 3. On voit sur la courbe que le minimum des températures est $-7°5$, atteint à 7 h, et que le maximum est $-2°8$, atteint à 15 h.

L'heure du lever du Soleil étant 7 h 19, on voit que c'est à peu près l'heure où la température était la plus basse. Ensuite, le Soleil réchauffant la Terre, la température a commencé d'augmenter.

L'heure du coucher du Soleil est 18 h 05, mais la température avait commencé à diminuer trois heures plus tôt, car vers 15 h, le Soleil était bas dans le ciel, et il chauffait déjà moins.

Ex. 5, p. 160. 1. Voici la courbe :



2. et 3. On voit sur la courbe que le minimum des températures est $17°7$, atteint à 6 h, et que le maximum est $34°5$, atteint à 16 h, et aussi à 17 h

L'heure du lever du Soleil étant 6 h, on voit que c'est l'heure où la température était la plus basse. Ensuite, le Soleil réchauffant la Terre, la température a commencé d'augmenter.

L'heure du coucher du Soleil est 19 h 11, mais la température avait commencé à diminuer trois heures plus tôt, car vers 16 h, le Soleil était plus bas dans le ciel, et il chauffait déjà moins.

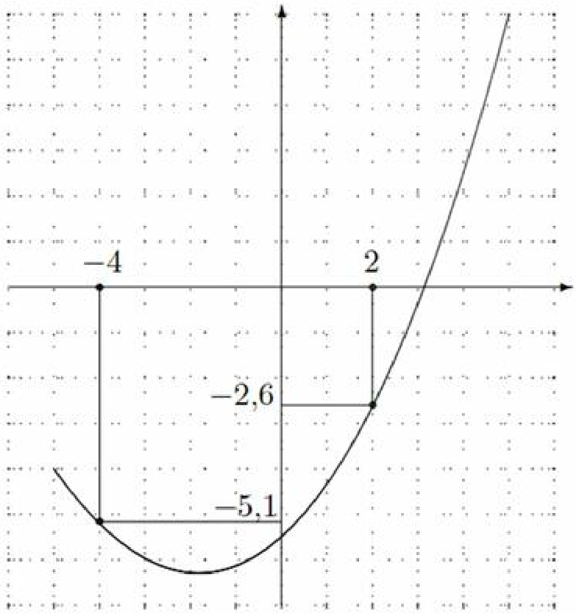
Ex. 6, p. 161.

1. On trace la verticale issue du point de l'axe des x d'abscisse -4. Cette verticale coupe le graphe en un point d'ordonnée $-5{,}1$. Donc :

$$f(-4) = -5{,}1$$

2. La verticale issue du point de l'axe des x d'abscisse 2 coupe le graphe en un point d'ordonnée $-2{,}6$. Donc :

$$f(2) = -2{,}6$$



3. Voici le tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-4	$-5{,}1$	-6	$-6{,}2$	$-6{,}1$	$-5{,}4$	$-4{,}2$	$-2{,}6$	$-0{,}2$	$2{,}2$	6

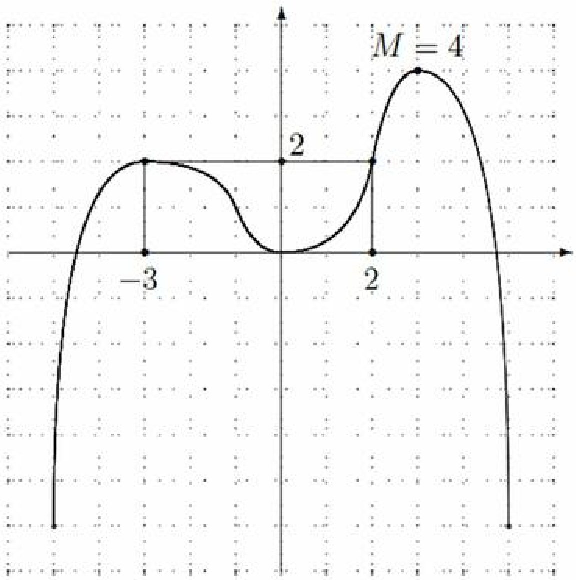
Ex. 7, p. 162.

1. On trace la verticale issue du point de l'axe des x d'abscisse -3. Cette verticale coupe le graphe en un point d'ordonnée 2. Donc :

$$f(-3) = 2$$

2. La verticale issue du point de l'axe des x d'abscisse 2 coupe le graphe en un point d'ordonnée 2. Donc :

$$f(2) = 2$$



3. Voici le tableau de valeurs :

x	-5	-4	-1	0	1	3	4	5
$f(x)$	-6	$1{,}2$	1	0	$0{,}2$	4	3	-6

4. On voit que f admet un maximum $M = 4$. Il est atteint en $x = 3$ puisque $f(3) = 4$.

Ex. 8, p. 163.

1. La droite d'équation $y = 1$ est horizontale. Elle coupe le graphe en quatre points, d'abscisses : $-4{,}1$, -1, $1{,}7$, $4{,}6$. On a donc :

$$f(-4{,}1) = f(-1) = f(1{,}7) = f(4{,}6) = 1$$

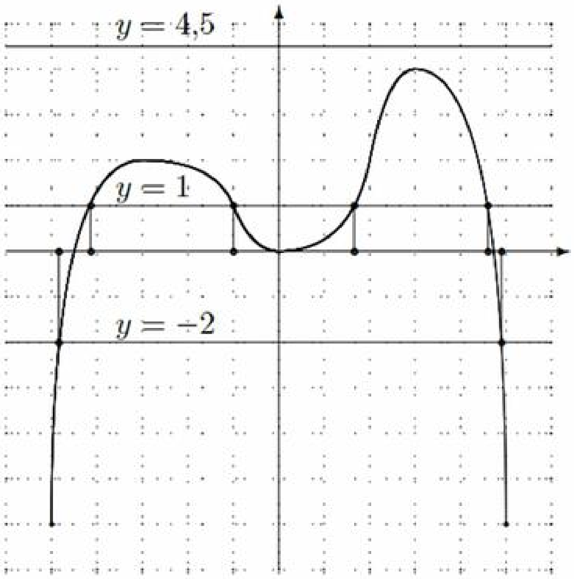
2. La droite d'équation $y = -2$ coupe le graphe en deux points, dont les abscisses sont : $-4{,}8$, $4{,}9$. On a donc :

$$f(-4{,}8) = f(4{,}9) = -2$$

3. La droite d'équation $y = 4{,}5$ ne coupe pas le graphe. Donc l'équation :

$$f(x) = 4{,}5$$

n'a pas de solutions.



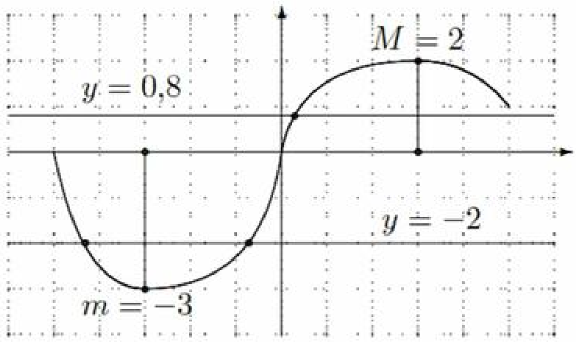
Ex. 9, p. 164.

1. On trouve :

$$\begin{array}{rl} f(-4) \approx -2{,}5 & f(-3) = -3 \\ f(-1{,}5) \approx -2{,}8 & f(0) = 0 \\ f(0{,}5) \approx 1{,}2 & f(2) \approx 1{,}9 \\ f(4{,}5) \approx 1{,}5 & f(5) = 1 \end{array}$$

2. On voit que la droite horizontale d'équation $y = -2$ coupe $\mathscr{C}$ en **deux points** dont les abscisses valent environ $-4{,}2$ et $-0{,}7$. Donc :

$$f(-4{,}2) = f(-0{,}7) = -2$$



3. On voit de même que la droite horizontale d'équation $y = 0{,}8$ coupe $\mathscr{C}$ en **un seul point** dont l'abscisse est environ 0,3. Donc :

$$f(0{,}3) = 0{,}8$$

4. Le graphe montre que le **maximum** de f vaut $M = 2$. Il est atteint en $x = 3$ car $f(3) = 2$

5. De même, on voit sur le graphe que le **minimum** de f vaut $m = -3$. Il est atteint en $x = -3$ car $f(-3) = -3$

Ex. 10, p. 164. 1. a/ Par la règle d'annulation (th. 5, p. 27) on a :

$$\frac{1}{3}x(6x-9) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } 6x - 9 = 0$$

Comme $\frac{1}{3}$ n'est pas nul, il reste :

$$x = 0 \text{ ou } 6x - 9 = 0$$

On a :

$$6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Finalement

$$\boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}}$$

b/ De façon analogue, on a :

$$\frac{x}{7}(28x + 49) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{7} = 0 \ \text{ ou } \ 28x + 49 = 0$$

On a :

$$\frac{x}{7} = 0 \Leftrightarrow x = 7 \times 0 = 0$$

et

$$28x + 49 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{49}{28} = -\frac{7}{4}$$

Finalement

$$\boxed{g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{7}{4}}$$

c/ On trouve :

$$\boxed{h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3}}$$

2. Développons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x(6x - 9) = \frac{1}{3} \times 6x^2 - \frac{1}{3} \times 9x = 2x^2 - 3x \\
g(x) &= \frac{x}{7}(28x + 49) = \frac{28}{7}x^2 + \frac{49}{7}x = 4x^2 + 7x \\
h(x) &= (5x - 4)(3x - 2) = 15x^2 - 10x - 12x + 8 = 15x^2 - 22x + 8
\end{aligned}$$

Ex. 11, p. 165. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{5}{2}x + 4\right)(2x - 5) = \frac{5}{2} \times 2 \times x^2 - \frac{25}{2}x + 8x - 20 \\
&= 5x^2 - \frac{25 - 16}{2}x - 20 = 5x^2 - \frac{9}{2}x - 20 \\
g(x) &= \left(\frac{1}{2} + 2x\right)\left(\frac{1}{2} - 2x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (2x)^2 = \frac{1}{4} - 4x^2 \\
h(x) &= \left(\frac{x}{5} - 12\right) \times \frac{x}{6} = \frac{x^2}{30} - \frac{12}{6}x = \frac{x^2}{30} - 2x
\end{aligned}$$

Pour développer $g(x)$, on a utilisé l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Ex. 12, p. 165. 1. Pour factoriser facilement, on remplace x par $x \times 1$ dans f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(3x - 1) - x(4x + 100) + x \\
&= x(3x - 1) - x(4x + 100) + x \times 1 \\
&= x(3x - 1 - 4x - 100 + 1) \\
&= x(-x - 100)
\end{aligned}$$

2. a/ On remarque que $3x-1=-(1-3x)$ et $2-6x=2(1-3x)$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x(3x-1)+(x-4)(2-6x) \\ &= -5x(1-3x)+2(x-4)(1-3x) \\ &= (1-3x)(-5x+2x-8) \\ &= (1-3x)(-3x-8) \end{aligned}$$

b/ On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-3x)^2+(5x+3)(1-3x) \\ &= (1-3x)(1-3x+5x+3) \\ &= (1-3x)(2x+4) \end{aligned}$$

3. Pour factoriser f et g, on fait apparaître la formule $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Pour h, on utilise la formule $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (*voir* prop. 3, p. 15) :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3) \\ g(x) &= 4-x^2=2^2-x^2=(2-x)2+x) \\ h(x) &= x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{aligned}$$

Ex. 13, p. 165. 1. On remarque $(4x-2)^2=\Big(2(2x-1)\Big)^2=4(2x-1)^2$. On peut donc factoriser $2x-1$ dans f :

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x-2)^2-(2x-1)(x+3)=4(2x-1)^2-(2x-1)(x+3) \\ &= (2x-1)\Big(4(2x-1)-(x+3)\Big)=(2x-1)(7x-7)=7(2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

2. Pour développer f, on utilise sa forme factorisée :

$$f(x)=7(2x-1)(x-1)=7(2x^2-3x+1)=14x^2-21x+7$$

3. Pour résoudre l'équation $f(x)=0$, on utilise la forme factorisée de f. Par la règle d'annulation (th. 5, p. 27) on a :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 7(2x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow 7=0 \text{ ou } 2x-1=0 \text{ ou } x-1=0$$

et puisque 7 n'est pas nul, on a :

$$\boxed{f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=1}$$

4. a/ Pour calculer $f(0)$, on utilise la forme développée de f :

$$f(0)=14\times 0^2-21\times 0+7=0+7=7$$

b/ D'après la question 3. $f(\frac{1}{2})=0$.

c/ Pour calculer $f(-\frac{1}{2})$ on utilise la forme factorisée de f :

$$f(-\frac{1}{2})=7\left(2\times(-\frac{1}{2})-1\right)(-\frac{1}{2}-1)=7\left(\cancel{2}\times(-\frac{1}{\cancel{2}})-1\right)(-\frac{3}{2})=7\times(-2)\times(-\frac{3}{2})=21$$

d/ Pour calculer $f(\sqrt{7})$, on utilise la forme développée de f :

$$f(\sqrt{7})=14\times\sqrt{7}^2-21\times\sqrt{7}+7=14\times 7-21\sqrt{7}+7=98+7-21\sqrt{7}=105-21\sqrt{7}$$

Ex. 14, p. 165. 1. On remarque $4 - 10x = 2(2 - 5x)$. On peut donc factoriser $-5x + 2$ dans f :

$$\begin{aligned} f(x) &= (-5x+2)^2 + (4-10x)(x+3) = (-5x+2)^2 + 2(2-5x)(x+3) \\ &= (-5x+2)\Big(-5x+2+2(x+3)\Big) = (-5x+2)(-3x+7) \end{aligned}$$

2. Pour développer f, on utilise sa forme factorisée :

$$f(x) = (-5x+2)(-3x+7) = 15x^2 - 41x + 14$$

3. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme factorisée de f. On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (-5x+2)(-3x+7) = 0 \Leftrightarrow -5x+2 = 0 \text{ ou } -3x+7 = 0$$

on obtient donc :

$$\boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \quad \text{ou } x = \frac{7}{3}}$$

4. a/ Pour calculer $f(\frac{1}{5})$ et $f(\frac{1}{3})$ on utilise la forme factorisée de f :

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{5}) &= (-5 \times \frac{1}{5} + 2)(-3 \times \frac{1}{5} + 7) = (-1+2)(-\frac{3}{5} + 7) = \frac{32}{5} \\ f(\tfrac{1}{3}) &= (-5 \times \frac{1}{3} + 2)(-3 \times \frac{1}{3} + 7) = (-\frac{5}{3} + 2)(-1+7) = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \end{aligned}$$

b/ Les trois derniers calculs se font sur la forme développée de f :

$$\begin{aligned} f(-1) &= 15 \times (-1)^2 - 41 \times (-1) + 14 = 15 + 41 + 14 = 70 \\ f(\sqrt{2}) &= 5 \times \sqrt{2}^2 - 41 \times \sqrt{2} + 14 = 10 - 41\sqrt{2} + 14 = 24 - 41\sqrt{2} \\ f(1-\sqrt{2}) &= 5 \times (1-\sqrt{2})^2 - 41 \times (1-\sqrt{2}) + 14 = 5(3-2\sqrt{2}) - 41 + 41\sqrt{2} + 14 \\ &= -12 + 31\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ex. 15, p. 166. 1. On remarque que $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$. On peut donc factoriser $1 + x$ dans f :

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x-2)(x+1) + 1 - x^2 = (5x-2)(x+1) + (1-x)(1+x) \\ &= (1+x)\Big(5x - 2 + 1 - x\Big) = (1+x)(4x-1) \end{aligned}$$

2. Pour développer f, on utilise sa forme factorisée :

$$f(x) = (1+x)(4x-1) = 4x^2 + 3x - 1$$

3. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme factorisée de f. On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \text{ ou } 4x - 1 = 0$$

on obtient donc :

$$\boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou } x = \frac{1}{4}}$$

4. a/ Pour calculer $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$ on utilise la forme développée de f :

$$\begin{aligned} f(1) &= 4\times 1^2+3\times 1-1=4+3-1=6 \\ f(0) &= 4\times 0^2+3\times 0-1=0-1=-1 \\ f(\sqrt{2}) &= 4\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}-1=4\times 2+3\sqrt{2}-1=7+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

b/ Pour calculer $f(-\frac{1}{4})$ et $f(\frac{1}{2})$, on utilise la forme factorisée de f :

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{4}) &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(4\times(-\frac{1}{4})-1\right)=\frac{3}{4}\times(-2)=-\frac{3}{2} \\ f(\frac{1}{2}) &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(4\times(\frac{1}{2})-1\right)=\frac{3}{2}\times(2-1)=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ex. 16, p. 166. 1. On a représenté ci-dessous les positions de Matthieu (M) et de Justine (J) au bout de t heures de course, ainsi que les distances parcourues.

2. On applique la formule :

$$d=v\times \boldsymbol{t}$$

Pour Matthieu, on a $v=6$, donc $M(t)=6t$. Pour Justine, on a $v=10$, donc $J(t)=10t$.

3. Matthieu et Justine se croiseront lorsque la somme des distances qu'ils auront parcourues sera égale à AB, c'est-à-dire à 4 km. Ceci se produira au bout de t heures de course, tel que :

$$\begin{aligned} M(t)+J(t) &= 4 \\ 6t+10t &= 4 \\ 16t &= 4 \\ t &= \frac{4}{16}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ils se rencontreront donc au bout d'un quart d'heure de course, et il sera 8 h 15.

4. Matthieu arrivera en B lorsqu'il aura parcouru les 4 km qui séparent les deux villes. Ceci se produira au bout de t heures de course, tel que :

$$\begin{aligned} M(t) &= 4 \\ 6t &= 4 \\ 3t &= 2 \\ t &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{2}{3}$ h $=\frac{2}{3}\times 60$ min $=40$ min. Matthieu arrivera donc en B à 8 h 40.

5. Justine arrivera en A lorsqu'elle aura parcouru les 4 km qui séparent les deux villes. Ceci se produira au bout de t heures de course, tel que :

$$J(t)=4$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 10t &= 4 \\ 5t &= 2 \\ t &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Or $\frac{2}{5}$ heures $= \frac{2}{5} \times 60$ min $= \frac{4}{10} \times 60 = 24$ min. Justine arrivera donc en A à 8 h 24.

Ex. 17, p. 166. 1. Pour un âge x, le nombre de pulsations est $f(x) = 220 - x$. Donc :

$$f(10) = 210 \text{ pulsations} \qquad f(20) = 200 \text{ pulsations} \qquad f(50) = 170 \text{ pulsations}$$

2. Puisque f est une fonction affine, son graphe est une droite, qui a pour équation :

$$y = 220 - x$$

On peut la tracer en joignant les points $(0; 220)$ et $(70; 150)$. Noter que les questions d'**unité de mesure** sont toujours **pénibles**, mais qu'elles sont incontournables si on veut avoir des figures lisibles. Ici, en abscisse, il n'y a pas de difficulté, car

$$10 \text{ années} = 1 \text{ cm} \Rightarrow 20 \text{ années} = 2 \text{ cm, etc.}$$

Mais en ordonnée, il vaut mieux dresser un tableau de proportionnalité : p est le nombre de pulsations, représenté par une ordonnée y sur la figure. On égale les produits en croix :

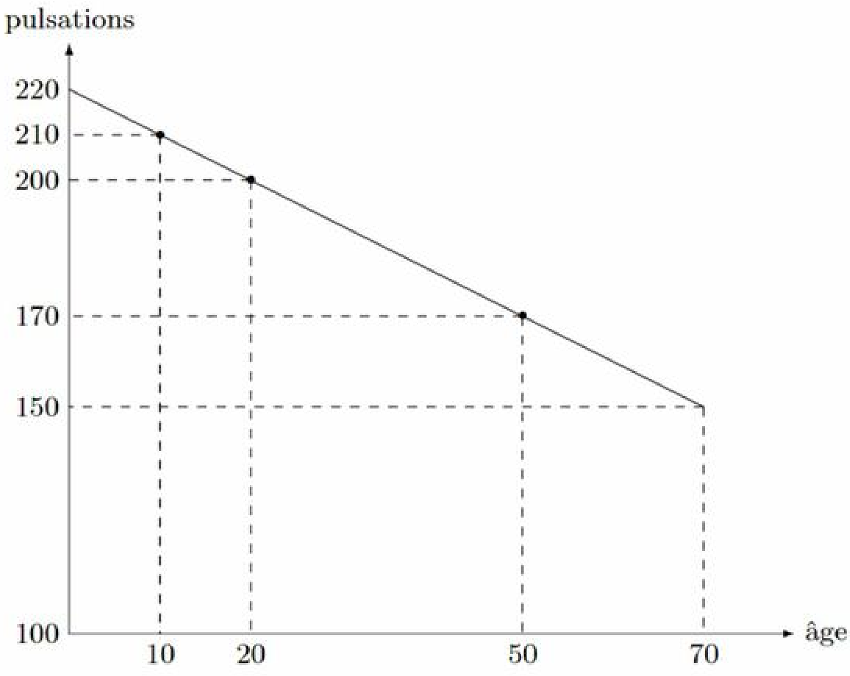
pulsations	100	p
cm	5	y

$$100 \times y = 5 \times p$$

On en déduit :

$$y = \frac{5p}{100} = \frac{p}{20}$$

Sur la figure, **l'ordonnée** y en cm, comptée à partir de 0, vaut donc le nombre de pulsations divisé par 20.



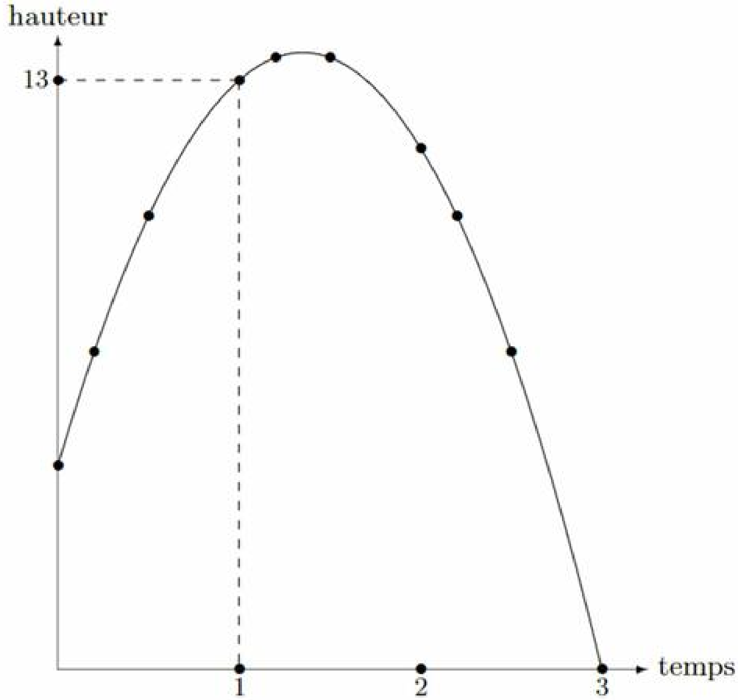
3. On a marqué les **pointillés de coordonnées** des points $(10; 210)$, $(20; 200)$, $(50; 170)$ qui ont été calculés dans la question 1. On voit qu'ils sont bien sur la droite.

Ex. 18, p. 167. 1 Voici le tableau complété des valeurs de h :

t	0	0,2	0,5	1	1,2	1,5	2	2,2	2,5	3
$h(t)$	4,5	7	10	13	13,5	13,5	11,5	10	7	0

2. Pour tracer le graphe de h, on a pris en abscisses 2 cm pour une unité, et en ordonnée, 1 cm pour deux unités. Ainsi, le graphe est large, et pas trop haut.
3. et 4. Le saut dure 3 secondes. Il culmine à environ 13,5 m.

Attention ! Le graphe ci-contre n'est pas la **trajectoire** de Gaëtan dans l'espace. En effet, l'axe des abscisses représente le **temps**, et non la distance horizontale parcouru que nous ne connaissons pas.



Ex. 19, p. 167. 1. Les prix sont en euros. Dans l'abonnement A, outre le forfait, un voyage coûte 10. Donc x voyages coûtent $10x$. Le prix total de x voyages est donc :

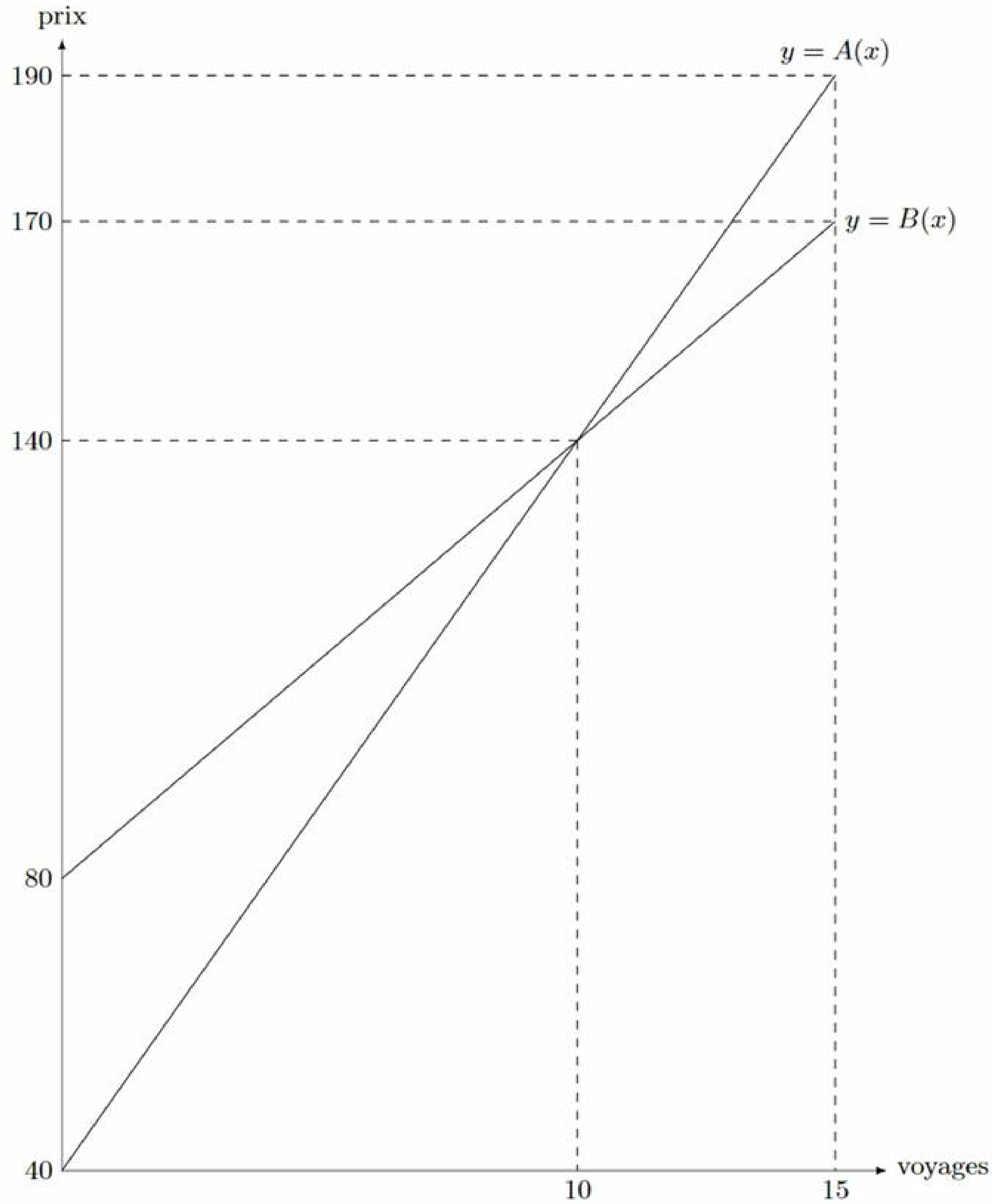
$$A(x) = 40 + 10x$$

2. On raisonne de façon semblable et on trouve :

$$B(x) = 80 + 6x$$

3. Les fonctions A et B sont donc **affines**, leurs graphes sont des **droites**. On les trace grâce au tableau de valeurs ci-contre :

x	0	15
$A(x)$	40	190
$B(x)$	80	170



4. et 5. On voit que les deux droites se coupent en $(10; 140)$. Á **gauche** de ce point, la droite représentant $x \mapsto A(x)$ est **en-dessous** de la droite représentant $x \mapsto B(x)$. Donc :

$$x \leq 10 \;\Rightarrow\; A(x) \leq B(x)$$

À **droite** du point $(10; 140)$, la droite représentant $x \mapsto A(x)$ est **au-dessus** de la droite représentant $x \mapsto B(x)$. Donc :

$$x \geq 10 \;\Rightarrow\; A(x) \geq B(x)$$

6. On en déduit que si on fait peu de voyages (moins de 10), la formule A est plus économique que la formule B. Si on fait beaucoup de voyages (plus de 10), c'est la formule B qui est la plus économique des deux.

Ex. 20, p. 168 1. Même si la pizzeria reçoit peu de commandes, Pierre continue de gagner 700 euros. Il gagne donc plus que les deux autres, et c'est Jacques qui gagne le moins.

2. Notons x le nombre cherché. Paul a gagné $500+x$ et Pierre 700. La condition demandée équivaut donc à :

$$500 + x = 700 \Leftrightarrow x = 200$$

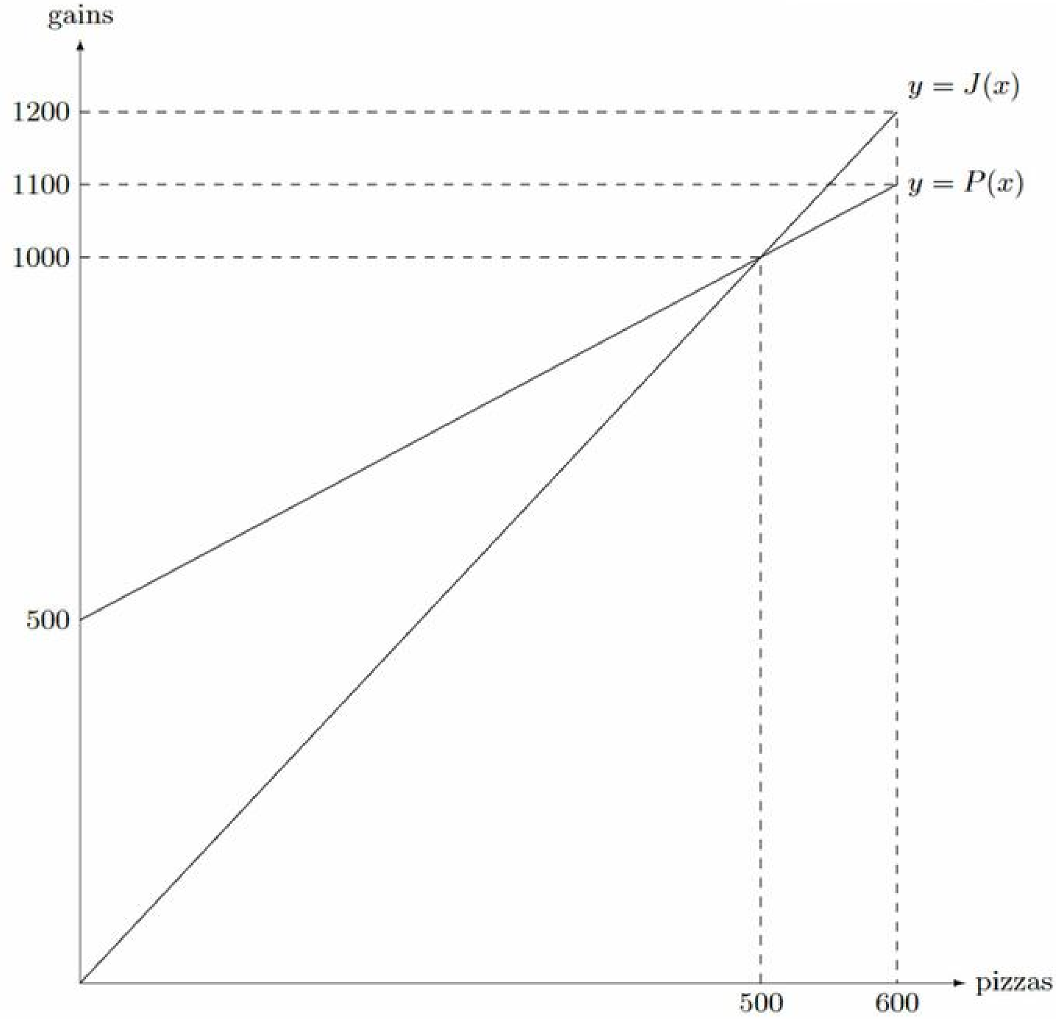
3. Notons x le nombre cherché. Jacques a gagné $2x$ et Pierre 700. La condition demandée équivaut donc à :

$$2x = 700 \Leftrightarrow x = 350$$

4. a/ Si Paul et Jacques ont fait x livraisons, Paul a gagné $P(x) = 550 + x$, Jacques a gagné $J(x) = 2x$

b/ Les fonctions P et J sont donc **affines**, leurs graphes sont des **droites**. On les trace grâce au tableau de valeurs ci-contre :

x	0	600
$P(x)$	500	1100
$J(x)$	0	1200



c/ et d/ On a :

$$J(x) \geq P(x) \Leftrightarrow 2x \geq 500 + x \Leftrightarrow x \geq 500$$

Donc si Jacques fait 500 livraisons il gagne autant que Paul, s'il fait plus de 500 livraisons, il gagne plus que Paul. On peut voir aussi cela sur la figure.

Épilogue

Il n'est pas nécessaire d'espérer
pour entreprendre

Le voilà terminé, ce chantier gigantesque. Commencé il y a cinq ans par une ébauche du livre de 6^{e}, le livre de 6^{e} est paru [5] il y a quelques jours. Les livres de 5^{e} et 4^{e} paraîtront au printemps, et le manuscrit du livre de 3^{e} est achevé aujourd'hui.

L'auteur s'étonne : toutes ces pages écrites, corrigées, réécrites, refondues depuis cinq ans ! Comment les a-t-il imaginées ? Et ces livres édités !

J'avais écrit, il y a cinq ans, que "la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier" et que mon intention était "d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants." Y suis-je parvenu ? Le lecteur trouvera-t-il dans ces pages "une nourriture intellectuelle vivifiante" ? C'est mon espoir.

Je pense à ces générations d'**élèves de collège** auxquels j'ai eu l'honneur de dispenser mes cours pendant quinze ans, au lycée Henri Bergson et au lycée Henri IV à Paris. La plupart étaient heureux de découvrir et de comprendre. Certains avaient une curiosité et une capacité déductive remarquables. Les élèves faibles étaient contents que je puisse m'occuper d'eux en plus, dans un petit groupe de soutien. Ce fut stimulant de répondre aux questions de tous les élèves, et de voir comment fonctionnaient leur intelligence et leur instinct. La plupart des exercices que j'ai conçus prolongeaient les échanges que nous avions en classe, et c'est à leur intention que j'ai écrit les schémas de cours que j'ai améliorés au fil des ans.

Bien avant, je revois mon **professeur** de 4^{e} et 3^{e} qui, dans mon petit collège, m'a ouvert la porte des mathématiques. Certains soirs, je rapportais à la maison un problème de géométrie dans l'espace. Je dessinais la figure et nous commencions à réfléchir, **ma mère**, qui avait son brevet élémentaire, un ami de la famille, bachelier, et moi. Et c'était à celui qui trouverait le premier la bonne idée pour résoudre chaque question...

Je remercie les éditions Ellipses qui ont accueilli mon texte avec bienveillance.

Terminons par un conseil au lecteur qui achève son année de 3^{e}. D'abord, profiter des grandes vacances pour se reposer l'esprit, et oublier **un peu** les mathématiques. Ensuite, prévoir une dizaine de jours fin août pour relire les quatre chapitres essentiels du cours de 3^{e} : • logique • géométrie analytique • géométrie dans l'espace • fonctions réelles. Cette lecture, accompagnée de la résolution de quelques exercices, constituera une bonne préparation au cours de mathématiques de 2de, tel qu'il est exposé par exemple dans le livre cité ci-dessous [6].

Ami lecteur, je vous souhaite :

Bonne réussite !

Bitche, en Lorraine, janvier 2021

5. J.-L. Frot : *Mathématiques - Classe de sixième - Pour ceux qui veulent comprendre*, Ellipses (2021).
6. J.-L. Frot : *Mathématiques - Classe de seconde - Pour ceux qui ont besoin d'être rassurés*, Ellipses (*à paraître*).

Index

Mathématiques

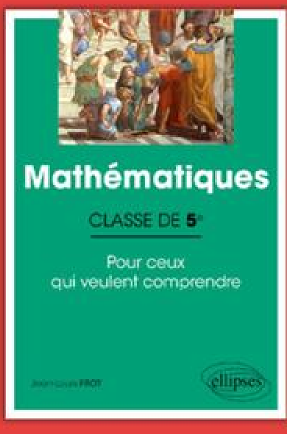
CLASSE DE 3e

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles du cours de mathématiques de troisième, ce livre comporte des explications concrètes, quelques démonstrations complètes et un chapitre sur la logique.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont corrigés entièrement avec des explications permettant aux élèves de comprendre les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base.

Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques exercices plus relevés, intéressants et instructifs, destinés à faire aimer les mathématiques, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre.

__Jean-Louis Frot__ a enseigné les mathématiques dans toutes les classes de la Sixième à la Terminale dans différents lycées, et en particulier seize ans au lycée Henri-IV à Paris. Il est auteur de plusieurs livres de mathématiques.



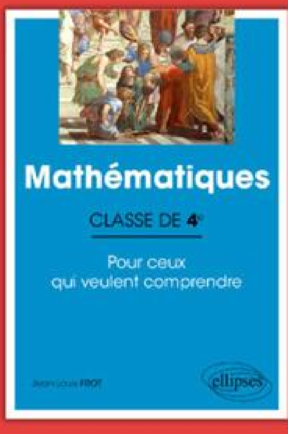


Illustration de couverture : Euclide représenté dans *La fresque de l'École d'Athènes* peinte par Raphaël, 1509-1511.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 056589