Annales 3^e

Je M'exerce

Je M'exerce Annales 3^e

Mathématiques

$$\sqrt{7 \times \pi} = \sqrt{7} \times \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

- Rappels d
- Sélections
- Épreuves

PAPE MOR GUEYE

professeur de mathématiques

77 135 23 62

papemorrgueye@gmail.com

Édition 2024

Avant-propos

Ce document intitulé « Je M'exerce » a pour objet de mettre à la disposition des enseignants et des élèves de la classe de troisième, un outil pédagogique progressif, clairement et abondamment illustré par des nombreux exercices, en parfaite adéquation avec la référence de cette classe.
Toutefois, il est clair que ce manuel ne saurait se substituer aux professeurs dans leurs enseignements, ni empiéter sur les programmes ultérieurs, mais il vient en appoint aux activités déjà effectuées en classe.
Cette annales comprend trois parties : activités numériques, activités géométriques et des anciens sujets de BFEM au Sénégal (de 2010 à 2023) et chacune de ces deux premières parties est constituée des résumés de cours et des sélections d'exercices spécifiques au programme.
Ce manuel est perfectible. Toute suggestion ou jugement sera la bienvenue afin d'améliorer le contenu et d'en faire un outil de travail plus efficace.

« Formez-vous, armez-vous de sciences jusqu'aux dents (...) et arrachez votre patrimoine culturel. »

Cheikh Anta Diop

Table des matières

A- ACTIVITÉS NUMÉRIQUES 4

1 RACINE CARRÉE 5
I. Rappel de cours . . . 5
II. Exercices . . . 5

2 ÉQUATION À UNE INCONNUE 12
I. Rappel de cours . . . 12
II. Exercices . . . 13

3 INÉQUATION À UNE INCONNUE 16
I. Rappel de cours . . . 16
II. Exercices . . . 17

4 STATISTIQUE 19
I. Rappel de cours . . . 19
II. Exercices . . . 20

5 ÉQUATION ET SYSTÈME D'ÉQUATIONS À 2 INCONNUES 26
I. Rappel de cours . . . 26
II. Exercices . . . 29

6 INÉQUATION ET SYSTÈME D'INÉQUATIONS À 2 INCONNUES 33
I. Rappel de cours . . . 33
II. Exercices . . . 35

7 APPLICATIONS AFFINES 36
I. Rappel de cours . . . 36
II. Exercices . . . 39

B- ACTIVITÉS GÉOMÉTRIES 43

1 THÉORÈME DE THALÈS 44
I. Rappel de cours . . . 44
II. Exercices . . . 46

2 TRIGONOMÉTRIE 52
I. Rappel de cours . . . 52
II. Exercices . . . 54

3 ANGLE INSCRIT ANGLE AU CENTRE 62
I. Rappel de cours . . . 62
II. Exercices . . . 65

4 VECTEURS 70
I. Rappel de cours . . . 70
II. Exercices . . . 72

M. GUEYE 77 135 23 62

5 REPÉRAGE **77**
I. Rappel de cours . . . 77
II. Exercices . . . 81

6 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE **85**
I. Rappel de cours . . . 85
II. Exercices . . . 90

7 TRANSFORMATION DU PLAN **97**
I. Rappel de cours . . . 97
II. Exercices . . . 101

C- ÉPREUVES D'EXAMENS **104**
I. BFEM 2010 . . . 105
II. BFEM 2011 . . . 106
III. BFEM 2012 . . . 107
IV. BFEM 2013 . . . 108
V. BFEM 2014 . . . 110
VI. BFEM 2015 . . . 111
VII. BFEM 2016 . . . 113
VIII. BFEM 2017 . . . 114
IX. BFEM 2018 . . . 115
X. BFEM 2019 . . . 117
XI. BFEM 2020 . . . 118
XII. BFEM 2021 . . . 119
XIII. BFEM 2022 . . . 121
XIV. BFEM 2023 . . . 123

Première partie

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

I Rappel de cours

1 Définition

Soit a un réel ***positif*** ou ***nul.*** On appelle racine carrée de a notée $\sqrt{a}$ le réel positif ou nul x tel que $x^2 = a$.

Dans la notation $\sqrt{a}$: a s'appelle ***le radicande*** et le symbole « $\sqrt{\ }$ » ***le radical.***

NB : a est toujours ***positif*** ou ***nul.***.

2 Propriétés

- a et b étant deux réels positifs, nous avons :

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec $b \neq 0$.

- a étant un nombre réel et p un entier relatif supérieur ou égal à 2 :

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\qquad$ $\sqrt{a^{2p}} = |a^p|$.

3 Expressions conjuguées.

- Une expression de la forme $a + \sqrt{b}$ a pour expression conjuguée $a - \sqrt{b}$.
- Une expression de la forme $a - \sqrt{b}$ a pour expression conjuguée $a + \sqrt{b}$.

II Exercices

Exercice 1

1. Recopie et complète convenablement les phrases suivantes.

a) Soit t un nombre rationnel positif ou nul. On appelle racine carrée de t,..... .On la note.....

b) Deux nombres réels a et b sont dits opposées si et seulement si .....

c) Pour tous réels x et y, si $|x| = |y|$ alors.....

d) Deux nombres réels a et b sont dits inverses si et seulement si.....

e) Soient a et b deux réels tels que a soit positif

$(\sqrt{a})^2 = \cdots$ $\quad$ $\sqrt{ab^2} = \cdots\sqrt{\cdots}$

f) a et b étant deux nombres réels négatifs $a^2 > b^2$ si et seulement si.....

g) Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}$, alors $(a\sqrt{b})^2 = \cdots$

2. Réponds par vrai ou faux

$\sqrt{40} = 20$; $\quad 7\sqrt{2} = \sqrt{80}$; $\quad \sqrt{64+25} = 8+5 = 13$; $\quad \sqrt{19 - \sqrt{1+\sqrt{64}}} = 4$

3. Sans utiliser les valeurs approchées, montre que trois de ces nombres sont égaux.

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5}$; $\quad B = \dfrac{\sqrt{500}}{5}$; $\quad C = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5}$; $\quad D = \sqrt{20}$; $\quad E = \sqrt{5+5}$

4. Calcule les expressions suivantes

$A = (2\sqrt{7})^2$; $\quad B = (-3\sqrt{5})^2$; $\quad C = (\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{3})^2$; $D = (6\sqrt{5})^2 - (4 + (\sqrt{3})^2)$; $\quad E = \sqrt{\dfrac{49}{100}} + \dfrac{\sqrt{81}}{10}$

M. GUEYE
77 135 23 62

Exercice 2

Écris sans radical les réels suivants
$\sqrt{400}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{10000}$; $\sqrt{8100}$; $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{10^{-6}}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{0,64}$

Exercice 3

Donne une écriture simplifiée des sommes algébriques suivantes
$A=5\sqrt{200}-6\sqrt{98}+\sqrt{50}-10\sqrt{2}+\sqrt{9}$; $B=\sqrt{18}+16\sqrt{8}-\sqrt{9}-32\sqrt{2}$;
$C=\sqrt{121}-2\sqrt{112}+\sqrt{63}-\sqrt{81}$; $D=\sqrt{18}+2\sqrt{50}+3\sqrt{32}$; $E=2\sqrt{27}-3\sqrt{300}+4\sqrt{48}-\sqrt{192}$;
$F=5\sqrt{20}+6\sqrt{5}-2\sqrt{45}+\sqrt{80}$; $G=5\sqrt{18}-2\sqrt{8}+3\sqrt{98}+\sqrt{72}$; $H=\sqrt{192}-\frac{2}{3}\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$
$I=\sqrt{\frac{16}{28}}-\sqrt{\frac{125}{49}}-\sqrt{\frac{25}{7}}$; $J=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{16}}+\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{8}$

Exercice 4

Développe et écris plus simplement les écritures suivantes.
$a=\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})$; $b=\sqrt{5}(2\sqrt{5}+3\sqrt{15})$; $c=(2+3\sqrt{5})^2$; $d=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$; $e=(2\sqrt{5}-4)^2$; $f=(2\sqrt{5}-3\sqrt{7})^2$; $g=(2\sqrt{3}-5)(2\sqrt{3}+5)$; $h=(5\sqrt{7}+7)(5\sqrt{7}-7)$;
$i=\sqrt{(5+3\sqrt{2})}\times\sqrt{(5-3\sqrt{2})}$; $j=\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\times\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Exercice 5

1. Rends rationnel les quotient suivants
$A=\frac{3}{2\sqrt{5}}$; $B=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$; $C=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $D=\frac{-3}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$; $E=\frac{2-3\sqrt{5}}{2+3\sqrt{5}}$; $F=\frac{3}{\sqrt{7}}$;
$G=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; $H=\frac{3}{\sqrt{2}-1}$; $I=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; $J=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2\sqrt{35}}$; $K=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$; $L=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
$M=\frac{5}{a+\sqrt{2}}$; $N=\frac{1}{a-\sqrt{2}}$; $O=\frac{4\sqrt{17}}{7-\sqrt{2}}$; $P=\frac{4\sqrt{7}+3}{2\sqrt{7}-6}$

Exercice 6

Écris plus simplement possible les expressions suivantes
$A=|\sqrt{2}+3|$; $B=|3-2\sqrt{2}|$; $C=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$; $D=\sqrt{(7-2\sqrt{7})^2}+\sqrt{(5+\sqrt{7})^2}$;
$E=\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$; $F=\sqrt{76-2\sqrt{37-\sqrt{\frac{21}{25}+\frac{1}{25}\times\sqrt{6+\sqrt{103-2\sqrt{\frac{9}{4}}}}}}}$

Exercice 7

1. On pose $m = 7-4\sqrt{3}$ et $n = m = 7+4\sqrt{3}$.
a) Calcule le produit $m \times n$
b) Que peux-tu dire de m et n ?
c) Montre que $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un entier naturel.
2. On pose $A = \sqrt{m}$ et $B = \sqrt{n}$.
a) Calcule $A \times B$
b) On pose $X = A + B$ et $Y = A - B$.
c) Vérifie que $X > 0$ et $Y < 0$.
d) Calcule X^2 et Y^2.
e) Déduis-en les valeurs de X et Y.
f) Déduis-en l'écriture simplifier de A et B

Exercice 8

Donne un encadrement de :
$A = 2+3\sqrt{5}$ sachant que $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ à 10^{-2} près
$B = 2-3\sqrt{2}$ sachant que $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ à 10^{-3} près
$C = \frac{-2+3\sqrt{7}}{5}$ sachant que $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$ à 10^{-2} près

Exercice 9

On donne $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$
1. Calcule a^2 ; b^2 et ab
2. Que peut-on dire de a et b ?
3. Calcule $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$
4. Justifie que $a+b = 4$ et $a-b = 2\sqrt{3}$.

Exercice 10

On donne : $m = 1-2\sqrt{3}$; $p = \sqrt{13-4\sqrt{3}}$ et $q = \sqrt{13+4\sqrt{3}}$
1. Montre que m est négatif
2. Calcule m^2 puis déduis-en que p et m sont des opposés
3. Encadre m à 10^{-2} sachant que : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$
4. Montre que $p \times q = 11$

Exercice 11

1. Soit $t = \sqrt{45}+\sqrt{196}-\sqrt{80}-\sqrt{245}$
Écris t sous la forme $a\sqrt{b}+c$ où a ; b et c sont des décimaux relatifs à déterminer avec b positif.
2. On donne les réels $x = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $y = 3\sqrt{5}-7$

a) Écris x avec un dénominateur rationnel
b) Justifie que y est négatif
c) Justifie que $x = -y$
d) Encadre x à 10^{-2} près sachant que
$2,236 < \sqrt{3} < 2,237$
e) On pose $z = (x-y)^2$. Justifie que $\sqrt{z} = -2y$

Exercice 12

1. On pose $a = 1+\sqrt{5}$ et $b = 1-\sqrt{3}$. Calcule a^2 et b^2
2. Simplifie $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}$ puis rends rationnel son dénominateur
3. Montre a et c sont des inverses
4. Montre que $d = \dfrac{2-\sqrt{12}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ est un entier relatif que l'on déterminera

Exercice 13

Soit m et n deux réels tels que $m = 4-3\sqrt{2}$ et $n = 2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$
a) Montre que m est négatif
b) Montre que $m^2 = 34-24\sqrt{2}$. Calcule n^2
c) On donne $Z = \sqrt{34-24\sqrt{2}}$. Écris Z sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b deux entiers relatifs
d) Justifie que $m^2+4n^2 = 68$.

Exercice 14

Soit $A = 2+3\sqrt{5}$ et $B = 2-3\sqrt{5}$
1. Calcule A^2 ; B^2 et $A \times B$
2. Démontre que $C = \dfrac{A}{B}+\dfrac{B}{A}$ est un nombre rationnel
3. Simplifie les expressions suivantes
$E = \sqrt{(5+\sqrt{7})^2}$ et $F = \sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}$
4. Encadre $\dfrac{B}{3}$ à 10^{-2} près sachant que $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

Exercice 15

On donne $a = \sqrt{\dfrac{7+\sqrt{45}}{2}}$ et $b = \sqrt{\dfrac{7-\sqrt{45}}{2}}$
1. Calcule a^2 ; b^2 et ab
2. En déduire une écriture simplifiée de $a+b$

Exercice 16

1. Écris l'expression $B = 2\sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 7\sqrt{192}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.
2. Calcule la valeur numérique de l'expression suivante
$C = \dfrac{2x}{2-x} - \dfrac{2-x}{x}$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 17

On donne $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$
1. Écris l'inverse de a en rendant rationnel le dénominateur.
2. Compare a et $a^2 - 1$
3. En déduire que $a^2 = a + 1$
4. Donne un encadrement de l'inverse de a par deux décimaux consécutifs d'ordre 2
5. Donne un encadrement du carré de a par deux décimaux consécutifs d'ordre 2
6. Exprime a^3 puis a^7 sous la forme $\alpha a + \beta$ avec α et β sont entiers relatifs

Exercice 18

On donne les expressions suivantes :
$p = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)\right]\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)\right]$ et $q = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$
1. Calcule p
2. Rends rationnels le dénominateur de q
3. Montre que $\dfrac{p+q^2}{p-2q} \in \mathbb{Z}$

Exercice 19

On donne les expressions ci-dessous :
$X = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$ et $Y = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$
1. Détermine de le signe de X et de Y
2. Calcule X^2 et Y^2
3. Déduis-en X et Y

Exercice 20

On donne $a = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ et $b = -\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$
1. Montre que $a^2 = \dfrac{1-3a}{2}$ et $\dfrac{1}{a} - 2a = 3$
2. Calcule $2b+3$ et $b(2b+3)$. Que peut on dire des réels b et $2b+3$?

Exercice 21

Soit un réel $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$

1. Calcule $(x+\sqrt{2})^2$

2. Montre que x est nul.

3. En déduire la valeur de $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$

Exercice 22

Soient les réels x et y, tels que $x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ et $y = 3\sqrt{50} - 2\sqrt{32} - 5\sqrt{98}$

1. Montre que x est un entier relatif que l'on déterminera.

2. Écris y sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$

3. Donne un encadrement de l'expression $x - y$ à 10^{-2} près, sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Exercice 23

Détermine le réel x, tel que :

$$\frac{2,4-\sqrt{4,1616}}{0,2} = \frac{(2\sqrt{2})^2+2^2}{5} \times \sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{x}{9}}}$$

Exercice 24

Soient les réels a et b strictement positifs.

1. Calcule.

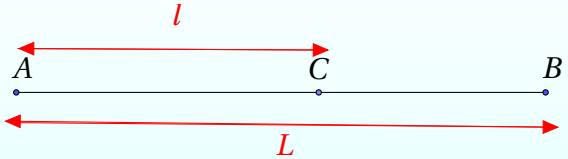
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$; $(1+\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ et $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$.

2. Montre que.

$\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}} = 1$

Exercice 25

Le segment $[AB]$ est partagé suivant la section d'or lorsque les quotients $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{AC}{BC}$ sont égaux.



1. Justifie que, dans ce cas-là on a : $\dfrac{L}{l} = \dfrac{l}{L-l}$

2. La valeur commune de ces quotients est le nombre d'or : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donne une valeur arrondie de φ au millième

1. a) Démontre que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

M. GUEYE 77 135 23 62

b) En déduire que $\dfrac{1}{\varphi-1}=\varphi$

Exercice 26

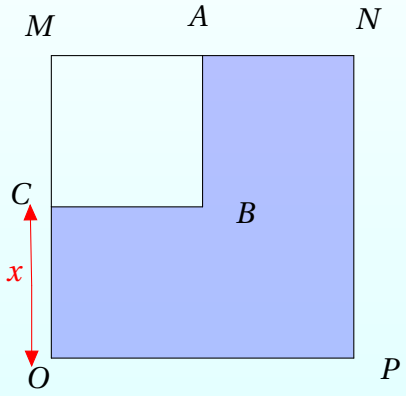
$ABCD$ est un carré de côté x. Le point O est le milieu de $[CD]$. Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite $[DC)$ au point E.

1. Calcule le quotient $\dfrac{DE}{DA}$.

2. On pose $k=\dfrac{DE}{DA}$. Calcule k^2-k-1.

Exercice 27

Monsieur GUEYE a un champ de forme carrée, de côtés $30\sqrt{5}$ cm, représenté par $MNPQ$ comme l'indique la figure ci-dessous. Il a fait nettoyer une partie de forme carrée représenté par $ABCM$. Il dispose de 32 000 FCFA pour le nettoyage du reste du champ (partie coloriée sur la figure).
Un manœuvre lui propose de nettoyer toute la partie restante à 10 FCFA par mettre carré.
Monsieur GUEYE se demande si la somme dont il dispose sera suffisante pour le nettoyage du reste de son champ.



1. Justifie que $MC=(30\sqrt{5}-x)$.

2. Démontre que l'aire en m^2 de la partie restante à nettoyer est : $\mathscr{A}_r=(60\sqrt{5}x-x^2)$ m^2.

3. Sachant que $x=30$ m et $2,23<\sqrt{5}<2,24$.
Justifie qu'un encadrement de l'aire de la partie restant est :
$3114\text{ m}^2<\mathscr{A}_r<3132\text{ m}^2$.

4. En argumentant, réponds à la préoccupation de monsieur de GUEYE.

Exercice 28

L'unité de longueur est le centimètre.
Le rectangle a pour longueur $2\sqrt{3}+2$ et pour largeur $2\sqrt{3}-2$.

1. Calcule le périmètre de ce rectangle.

2. Calcule son aire.

3. On pose L la longueur du rectangle et ℓ sa largeur.

a) Calcule L^2, ℓ^2 et $L\times\ell$.

b) En déduire que $\dfrac{L}{l}+\dfrac{\ell}{L}\in\mathbb{Z}$

I Rappel de cours

1 Vocabulaire

- Un nombre a est ***solution*** d'une équation s'il ***vérifie*** l'équation.
- Résoudre une équation, c'est déterminer ***l'ensemble des solutions*** de cette équation.
- L'ensemble des solutions d'une équation est généralement noté S.

2 Équation se ramenant à la forme : $ax+b=0$

- Si $a\neq 0$, alors $ax+b=0 \iff x=\dfrac{-b}{a}$. D'où $S=\left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $ax+b=0$ n'admet pas de solutions. D'où $S=\varnothing$.
- Si $a=0$ et $b=0$, alors $ax+b=0$ admet une infinité de solutions. D'où $S=\mathbb{R}$

3 Équation du type : $(ax+b)(cx+d)=0$

- $(ax+b)(cx+d)=0 \iff ax+b=0$ ou $cx+d=0$.
- **Exemple :**

Résolvons l'équation suivante : $(3x+4)(-2x+8)=0$.

$$\begin{aligned}(3x+4)(-2x+8)=0 &\iff 3x+4=0 \text{ ou } -2x+8=0\\ &\iff 3x=0-4 \text{ ou } -2x=0-8\\ &\iff 3x=-4 \text{ ou } -2x=-8\\ &\iff x=\frac{-4}{3} \text{ ou } x=\frac{-8}{-2}=4\end{aligned}$$

$$S=\left\{-\frac{4}{3};4\right\}$$

4 Équation du type : $|ax+b|=c$

- Si $c=0$, alors $|ax+b|=c \iff ax+b=0$.
- Si $c>0$, alors $|ax+b|=c \iff ax+b=c$ ou $ax+b=-c$.
- Si $c<0$, alors $|ax+b|=c$ n'admet pas de solution. D'où $S=\varnothing$
- **Exemple :**

Résolvons l'équation suivante : $|3x-4|=2$

$$\begin{aligned}|3x-4|=2 &\iff 3x-4=2 \text{ ou } 3x-4=-2\\ &\iff 3x=2+4 \text{ ou } 3x=-2+4\\ &\iff 3x=6 \text{ ou } 3x=2\\ &\iff x=\frac{6}{3}=2 \text{ ou } x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$S=\left\{\frac{2}{3};2\right\}$$

5 Équation du type : $|ax+b|=|cx+d|$

- $|ax+b|=|cx+d| \iff ax+b=cx+d$ ou $ax+b=-(cx+d)$.
- **Exemple :**

Résolvons l'équation suivante : $|3x-4|=|x+2|$

$|3x-4|=|x+2| \iff 3x-4=x+2$ ou $3x-4=-x-2$

$\iff 3x-x=2+4$ ou $3x+x=-2+4$

$\iff 2x=6$ ou $4x=2$

$\iff x=\frac{6}{2}=3$ ou $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{1}{2};3\right\}$

6 Équation du type : $x^2=a$

- Si $a=0$, alors $x^2=a \iff x=0$. D'où S={0}
- Si $a>0$, alors $x^2=a \iff x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$. D'où S=$\left\{-\sqrt{a};\sqrt{a}\right\}$
- Si $a<0$, alors $x^2=a$ n'admet pas de solutions. D'où $S=\varnothing$
- **Exemple :**

Résolvons l'équation suivante : $x^2=16$

$x^2=16 \iff x=\sqrt{16}$ ou $x=-\sqrt{16}$

$\iff x=4$ ou $x=-4$

$S=\{-4;4\}$

II Exercices

Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivants, vérifie si x_0 est solution de l'équation.

a) $x-2=0$ et $x_0=2$

b) $3x+6=0$ et $x_0=5$

c) $-2x+6=7$ et $x_0=\frac{3}{7}$

d) $3x+8=x+4$ et $x_0=-2$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x+\frac{3}{2}=\frac{-3}{4}$; $\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{6}{3\sqrt{2}}$; $\frac{x\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3$; $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{x}{2-\sqrt{3}}=0$; $\frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{2}}-\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{6}}$;

b) $(x\sqrt{3}-1)(x\sqrt{3}+1)=0$; $(2x-\sqrt{5})(x\sqrt{2}+1)=0$. $(x\sqrt{2}-3\sqrt{2})(3x+5\sqrt{3})(-2x+2+2\sqrt{5})=0$.

c) $x^2-3=0$; $25x^2-8=0$; $x^2=-7$; $9x^2=1-\sqrt{3}$; $-16x^2+25=0$; $(2x^2-3)(-5x^2+7)=0$.

d) $\frac{2x}{3}=\frac{8}{x}$; $\frac{4x}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{x}$; $\frac{x}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{x}$; $(x^2+4)(x^2+1)=0$.

e) $|3x-4|=5$; $|-2x-2\sqrt{3}|=1-2\sqrt{3}$; $|1-x\sqrt{5}|=2+\sqrt{2}$; $|-3x+2\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$.

f) $|x+8|=|-2x+7|$; $\sqrt{x^2}=\sqrt{(x-1)^2}$; $\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{(2x+5)^2}$; $\sqrt{(x\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2}$.

Exercice 2

On considère les expressions suivantes.

$f(x)=(-3x+1)(2x-7)+28x-8x^2$; $g(x)=49-4x^2$; $h(x)=(5x-3)^2-(3x+4)^2$.

1. Soit $p(x)=f(x)-2g(x)+h(x)$. Développe, réduis et ordonne $p(x)$.

2. Factorise les expressions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $p(x)$.

3. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$f(x)=0$

$g(x)=0$

$p(x)=-112$

Exercice 3

On considère l'expression suivante :
$h(x)=(2x-\sqrt{3})^2+2(2x-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})^2$.
1. Montre que $h(x)$ est le carré d'une somme.
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{h}-7=0$

Exercice 4

On considère les expressions suivantes.
$f(x)=(15x+10)(-x+5)-(12x+8)(-7x+2)-5(9x^2+6x)$ et $g(x)=(7x+18)^2-(-x+1)^2$.
1. Factorise $f(x)$ et $g(x)$.
2. On considère le quotient $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
a) Détermine la condition d'existence de $h(x)$
b) Simplifie l'écriture de $h(x)$.
c) Résous les équations suivantes : $h(x)=0$; $h(x)=\dfrac{1}{2}$.
d) Calcule la valeur numérique de $h(x)$ pour $x=\sqrt{2}$ puis rends rationnel son dénominateur.
Déduis-en l'encadrement de $h(\sqrt{2})$ à 10^{-3} sachant que $1,141<\sqrt{2}<1,415$

Exercice 5

1. Décompose 7056 en produit de facteurs premiers. En déduire que $\sqrt{7056}=84$.
2. Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2=7056$.
3. Résous, dans $\mathbb{R}$,l'équation : $x^2-2x+1=7056$.
4. Résous, dans $\mathbb{R}$,l'équation : $x(x^2-2x+1)=7056x$.

Exercice 6

1. On considère l'expression suivante $g(x)=(7-2x)(x+5)-(21-6x)(2x-1)$
a) Développe, réduis et ordonne $g(x)$
b) Factorise $g(x)$
2. On considère les expressions suivantes $h(x)=\dfrac{4x^2-49}{g(x)}$ et $r(x)=\dfrac{2x+7}{5x-8}$.
a) Détermine l'ensemble de définition de h
b) Sur quelle partie A de $\mathbb{R}$ a-t-on l'égalité $h(x)=r(x)$?
c) Résous, dans l'ensemble A, les équations suivantes : $r(x)=0$; $r(x)=1$; $r(x)=\dfrac{2}{5}$; $r(x)=-\dfrac{7}{8}$

Exercice 7

On considère le triangle ABC rectangle en A. On appelle a ; b et c les distances respectives de : BC ; AC et AB.
1. Détermine le réel x tel que les réels a ; b et c soient proportionnels à x ; 3 et 4.
2. Calcule a ; b et c sachant que $AB+AC+BC=240$.
3. Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :
$ay^2+11=b$. (a et b sont les réels trouvés à la question **2.**)

Exercice 8

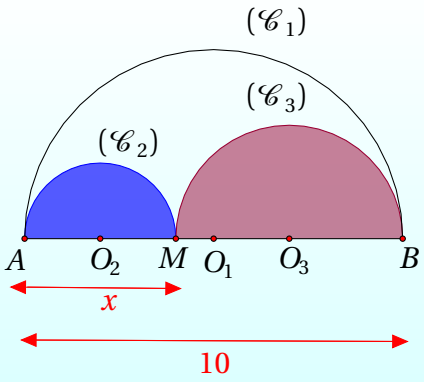
$(\mathscr{C}_1)$; $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_3)$ sont deux demi-cercles de centres respectifs O_1 ; O_2 et O_3

1. Calcule en fonction de x le périmètre p de la zone non coloriée.

2. Détermine x pour que :

a) ee périmètre p soit égal au cinquième du périmètre du demi-disque de diamètre $[AB]$.

b) le périmètre p soit égal au $\frac{4}{5}$ du périmètre du demi-disque de diamètre $[AB]$.



Exercice 9

Baye Serigne et Coumba jouent aux billes. Ils ont chacun en début de partie le même nombre de billes : x

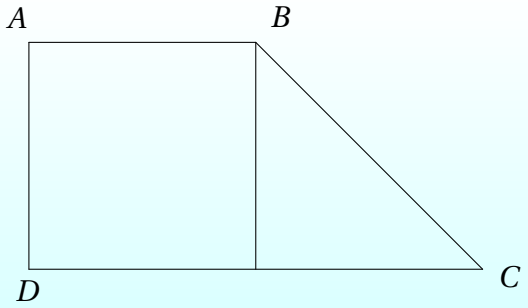
Baye Serigne gagne successivement 5 billes, puis 7 billes; il en perd ensuite 3; il a alors deux fois plus de billes que Coumba.

Combien chacun des enfants a-t-il de billes en début de partie? Combien chacun d'eux en a-t-il en fin de partie?

Exercice 10

On considère le trapèze rectangle $ABCD$ tel que : selon le centimètre, les mesures des longueurs des segments $[AB]$; $[AD]$ et $[DC]$ soient respectivement : x ; x et $2x$.

Selon le centimètre carré, la mesure de l'aire de $ABCD$ soit 24. Détermine x.



Exercice 11

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 5$ cm et $AB = 8$ cm. On considère les points M et N tels que $BM = NC = x$ et $(BN)//(MC)$

1. Exprime l'aire de BCM en fonction de x.

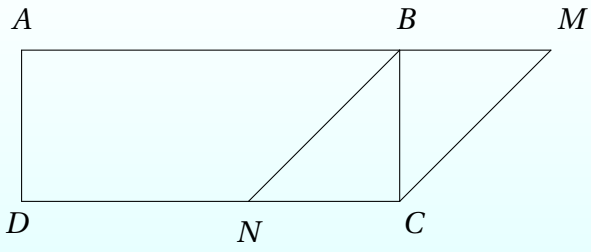
2. Exprime l'aire de BCN en fonction de x.

3. Exprime l'aire de $ABND$ en fonction de x.

3. Détermine x pour que :

a) L'aire de BCM soit égale à $\frac{1}{5}$ de l'aire de $ABCD$.

b) La somme des aires de BNC et BMC soit égale à l'aire de $ABND$



I Rappel de cours

1 Vocabulaire

- Un nombre a est ***solution*** d'une inéquation s'il ***vérifie*** l'inéquation.
- Résoudre une inéquation, c'est déterminer ***l'ensemble des solutions*** de cette inéquation.
- L'ensemble des solutions d'une inéquation est généralement noté S.

2 Inéquation du type : $(ax+b)(cx+d)\leq 0$

- **Exemple :**

Résolvons l'inéquation suivante : $(3x-6)(x+7)\leq 0$.

▶ Première méthode : Par les systèmes.

- **Rappel :**

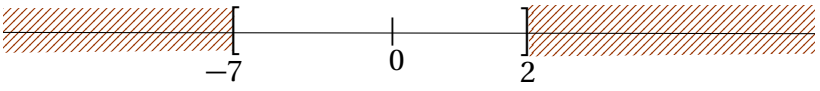
Le produit de deux réels a et b est négatif si et seulement si : $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$.

$$(3x-6)(x+7)\leq 0 \iff \text{(I)} : \begin{cases} 3x-6\leq 0 \quad (1) \\ x+7\geq 0 \quad (2) \end{cases} \text{ ou } \text{(II)} : \begin{cases} 3x-6\geq 0 \quad (1) \\ x+7\leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

- ***Résolution de (I) :***

$$\begin{aligned} (1) : 3x-6\leq 0 &\iff 3x\leq 0+6 \\ &\iff 3x\leq 6 \\ &\iff x\leq \frac{6}{3} \\ &\iff x\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) : x+7\geq 0 &\iff x\geq 0-7 \\ &\iff x\geq -7 \end{aligned}$$

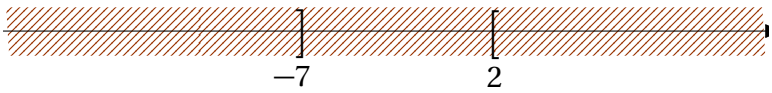


$S' = [-7;2]$

- ***Résolution de (II) :***

$$\begin{aligned} (1) : 3x-6\geq 0 &\iff 3x\geq 0+6 \\ &\iff 3x\geq 6 \\ &\iff x\geq \frac{6}{3} \\ &\iff x\geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) : x+7\leq 0 &\iff x\leq 0-7 \\ &\iff x\leq -7 \end{aligned}$$



$S'' = \varnothing$

$S = S' \cup S'' = [-7;2] \cup \varnothing = [-7;2]$

▶ Deuxième méthode : Par un tableau de signes.

$(3x-6)(x+7)\geq 0$.

Nous allons cherché le signe de chaque facteurs.

• ***Signe de :*** $3x-6$
$3x-6=0 \iff x=2$
$3x-6>0 \iff x>2$
$3x-6<0 \iff x<2$

• ***Signe de :*** $x+7$
$x+7=0 \iff x=-7$
$x+7>0 \iff x>-7$
$x+7<0 \iff x<-7$

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-6)(x+7)$		$+$		$-$		$+$	

$S=[-7;2]$

3 Inéquation du type : $\frac{(ax+b)}{(cx+d)} \leq 0$

■ **Exemple :**

Soit $q(x)=\dfrac{2x-6}{x+1}$

Déterminons la condition d'existence de q puis résolvons l'inéquation $q(x)\leq 0$.

• ***Condition d existence de*** q :

q existe si et seulement si $x+1\neq 0$, donc $x\neq -1$. D'où $Dq=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

• ***Résolution de*** $q(x)\leq 0$:

Posons $2x-6=0$, donc $x=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$q(x)$		$+$	|	$-$		$+$	

$S=]-1;3]$

II Exercices

Exercice 1

1. Réponds par vrai ou faux.

a) L'inéquation $(x-1)(3-x)\leq 0$ a pour solution $S=\{1;3\}$.

b) L'inéquation $(x-5)(2-x)>0$ a pour solution $S=[2;5[$.

c) L'inéquation $(5x-4)(5x+4)<0$ admet deux solution dans $\mathbb{R}$.

2. Choisis la bonne réponse.

L'inéquation $(3-x)(3+x)<0$ a pour ensemble de solutions.

a) $S=[-3;3]$ **b)** $S=]-\infty;-3]\cup]3;+\infty[$ **c)** $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$.

3. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(3x-2\sqrt{3})(2x+5\sqrt{2})\leq 0$; $(2x-5\sqrt{3})(-\sqrt{2}+x)\geq 0$; $(x\sqrt{2}+3)(x\sqrt{3}+2)>0$; $(3+\dfrac{x\sqrt{3}}{2})(1+\dfrac{2x\sqrt{5}}{2})<0$.

b) $\dfrac{2x-8}{4x+7}\geq 0$; $\dfrac{3x-8}{x+2}\leq 0$; $\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{2}}\leq 0$; $\dfrac{4x-7}{2x\sqrt{2}+4}>0$; $\dfrac{x\sqrt{2}+1}{2x\sqrt{3}+5}>0$; $\dfrac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{2}}-\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\geq\dfrac{x}{\sqrt{6}}$.

c) $x^2-5<0$; $x^2-3+2(x-\sqrt{3})\geq 0$; $9x^2+16>0$; $x^2+8\leq 0$; $(2-x\sqrt{2})\leq 0$; $(3x+4\sqrt{2})\leq 0$.

d) $\left(1-\dfrac{3x-\sqrt{3}}{x\sqrt{2}+3}\right)^2\leq 0$; $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3x\sqrt{3}+\sqrt{8}}{x\sqrt{12}+3\sqrt{2}}\right)^2\leq 0$.

Exercice 2

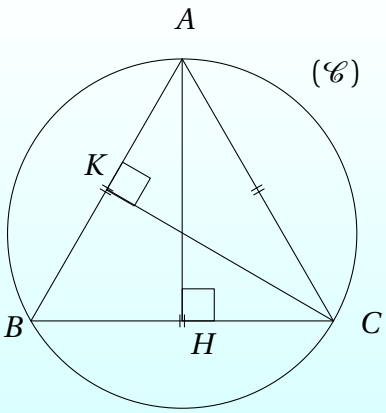
On considère les expressions suivantes :
$A(x)=x^2+x-20$ et $B(x)=x^2-x-12$.
1. Détermine les expressions suivantes $A(x)+B(x)$ et $A(x)-B(x)$.
2. Factorise l'expression $A(x)+B(x)$, puis résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $A(x)\leq -B(x)$
3.a) Trouve les expressions $C(x)$ et $D(x)$ telles que l'on ait pour tout réel x :
$A(x)=x+5+C(x)$ et $B(x)=D(x)-(x+3)$.
b) En déduire la factorisation de $A(x)$ et $B(x)$, et retrouve la factorisation de $A(x)+B(x)$.
4. On considère l'expression $h(x)=\dfrac{A(x)+B(x)}{A(x)-B(x)}$.
a) Détermine son domaine de définition Dh.
b) Simplifie $h(x)$ puis résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x)>0$.

Exercice 3

On considère les expressions suivantes :
$f(x)=3x-1$; $g(x)=-x+3$ et $h(x)=x^2-9+(x-3)(x+5)$.
1. Factorise $h(x)$.
2. Détermine l'ensemble A des réels a tels que $f(a)<a$.
3. Détermine l'ensemble B des réels b tels que $g(b)\leq f(b)$.
4. On pose $r(x)=\dfrac{f(x)\times g(x)}{h(x)}$.
a) Détermine la condition d'existence de r puis simplifie $r(x)$.
b) Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations.
$r(x)>0$; $r(x)\leq -3$ et $r(x)\geq -\dfrac{4}{7}$

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ABC. On désigne par $\mathscr{A}_1$ l'aire du triangle ABC et $\mathscr{A}_2$ l'aire du disque $(\mathscr{C})$.
1. Exprime l'aire $\mathscr{A}_1$ du triangle ABC en fonction de a.
2. Exprime l'aire $\mathscr{A}_2$ du disque $(\mathscr{C})$ en fonction de a
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\pi x^2.\mathscr{A}_2\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{A}_1$



Exercice 5

un club de gymnastique propose deux formules de prix à ses adhérents.
► formule A : La séance coûte 600 F
► formule A : une carte de membre coûtant 3500 F pour l'année et qui réduis de la séance à 350 F
Calcule le nombre séances pour lequel la somme à payer avec la formule B est inférieur à la somme à payer avec la formule A

I Rappel de cours

1 Définition

La statistique est une science qui a pour objet l'étude, l'analyse et l'interprétation des observations relatives à un même phénomène d'ensemble.

2 Vocabulaire

▸ Série statistique : Ensemble des valeurs collectées.
▸ Population : Ensemble sur lequel porte l'étude statistique.
▸ Individus : Éléments qui composent la population.
▸ Échantillon : Partie de la population.
▸ Caractère étudié : Propriété que l'on observe sur les individus. Les différentes valeurs obtenues sont appelés ***valeurs du caractère*** ou ***modalités***, souvent notées $x_1, x_2, \cdots x_p$. On distingue deux types de caractères :
• Un caractère peut être ***qualitatif*** (situation de famille, sexe,...)
• Un caractère peut être ***quantitatif***. Il est dit ***discret***, lorsqu'il ne prend que des valeurs isolées (nombre d'enfants, notes dans une classe,...). Il est dit ***continu*** lorsqu'il peut prendre théoriquement toutes les valeurs d'un intervalle (taille, âge,...) ; dans ce cas, les valeurs sont regroupées en sous-intervalles appelés des ***classes.***
▸ Effectif : Pour une valeur du caractère (modalité ou classe), on appelle effectif le nombre d'individu de la population ayant cette valeur. On note souvent $n_1, n_2, \cdots n_p$ les effectifs respectifs des modalités $x_1, x_2, \cdots x_p$
▸ Effectif total : Nombre total d'individus de la population (ou échantillon). Il est égal à $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = N$, souvent noté N
▸ Fréquence : Pour une valeur du caractère (modalité ou classe), on appelle fréquence le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On note souvent $f_1, f_2, \cdots f_p$ les fréquences respectives des modalités $x_1, x_2, \cdots x_p$, donc :
$f_1 = \frac{n_1}{N}, f_2 = \frac{n_2}{N}, \cdots, f_p = \frac{n_p}{N}$. On en déduit que $0 \leq f_1 \leq 1, 0 \leq f_2 \leq 1, \cdots, 0 \leq f_p \leq 1$ et $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = 1$
▸ Effectif cumulé : Pour une valeur x d'une série statistique ***quantitative***, l'effectif cumulé ***croissant*** (respectivement ***décroissant***) de x est la somme des effectifs des valeurs ***inférieures*** (respectivement ***supérieures***) ou égale à x
▸ Fréquence cumulé : Pour une valeur x d'une série statistique ***quantitative***, la fréquence cumulé ***croissant*** (respectivement ***décroissant***) de x est la somme des fréquences des valeurs ***inférieures*** (respectivement ***supérieures***) ou égale à x.

■ **Exemple :**
On considère les élèves de la classe de troisième.
• L'ensemble des élèves de la classe est la population.
• Chaque élève de la classe est un individu.
• Les garçons de la classe forme un échantillon.
• Sur cette population, on étudie l'âge, la taille, l'ethnie ou la nationalité des élèves.
⋆ l'âge, la taille, l'ethnie et la nationalité sont des ***caractères***
⋆ l'ethnie et la nationalité sont des ***caractères qualitatifs***.
⋆ l'âge et la taille sont des ***caractères quantitatifs***

3 Paramètres de position

▸ Médiane d'une série statistique : est la ***valeur*** du ***caractère*** qui partage la population en deux ***effectifs*** égaux.

Il y a donc autant de valeurs supérieures à la médiane que de valeurs inférieures. On distingue deux cas : cas où l'effectif total est ***pair*** et cas où il est ***impair.***

■ **Exemple :**

❖ À caractère quantitatif discret

• ***Cas où l'effectif total est impair***

Voici la liste des notes d'un contrôle de 15 élèves d'une classe de 3^e.

3 ; 7 ; 6 ; 8 ; 10 ; 4 ; 12 ; 5 ; 19 ; 19,5 ; 18 ; 18 ; 20 ; 9 ; 14. Déterminons la note médiane.

Pour commencer nous allons les ranger dans l'ordre croissant.

$$\underbrace{3;4;5;6;7;8;9}_{7};\ \overbrace{10}^{\text{médiane}};\ \underbrace{12;14;18;18;19;19,5;20}_{7}$$

Il y a 7 notes avant 10 et 7 notes après 10, donc la médiane est : 10.

• ***Cas où l'effectif total est pair***

Voici la liste des notes d'un contrôle de 14 élèves de cette même classe de 3^e.

5 ; 3 ; 7 ; 8,5 ; 11 ; 4 ; 12 ; 15 ; 17 ; 19 ; 18 ; 16 ; 20 ; 4. Déterminons la note médiane.

Pour commencer nous allons les ranger dans l'ordre croissant.

$$\underbrace{3;4;4;5;7;8,5}_{6};\ \overbrace{11;12}^{Me=\frac{11+12}{2}};\ \underbrace{15;16;17;18;19;20}_{6}..$$

La note médiane M_e est comprise entre 11 et 12 donc nous pouvons prendre toutes les valeurs entre 9 et 10, mais par convention on prend exactement la moyenne de ces deux valeurs centrales :

$M_e = \dfrac{11+12}{2} = 11,5$ est la note médiane.

❖ À caractère quantitatif continu.

• On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ou décroissants.

• On trace le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants.

• On détermine graphiquement la position de la médiane qui est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants qui a comme ordonnée la moitié de l'effectif total.

• On utilise le théorème de Thalès pour déterminer la valeur médiane

II Exercices

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne la repartirions des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	**Total**
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	**35**

1. Recopie et complète ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près , et les effectifs cumulés croissants et décroissants.

2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.

3. Donne la médiane de la série statistique.

4. Calcule la moyenne de la série statistique et compare à la médiane.

Exercice 2

Un relevé des durées des communications téléphoniques effectués dans un central téléphonique a fourni les informations consignés dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute).

Intervalles de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13

1. Calcule la durée moyenne d'un appel.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants.
3. Détermine alors une valeur approchée de la médiane de cette série par lecture graphique.
4. Calcule de façon précise la médiane.
5. Calcule la moyenne de la série statistique

Exercice 3

voici les notes obtenue par deux classe de troisième lors d'un devoir

Notes	2	4	5	8	9	10	11	12	13	15	116	18
Effectifs 1	1	0	1	3	3	3	5	2	0	1	0	1
Effectifs 2	2	2	3	0	1	1	2	2	1	3	2	1

1. Pour chacune des deux séries de notes, calcule la moyenne et la médiane
2. En utilisant deux couleurs différentes, représente sur un même diagramme en bâtons les deux séries de notes

Exercice 4

Dans un bureau de vote 2000 électeurs ont porté leur choix sur quatre candidats A; B; C et D

Candidats	**A**	**B**	**C**	**D**
Effectifs	30	40	60	70

1. Quelle est la population étudiée? Quel est le caractère étudié? Est-il qualitatif ou quantitatif?
2. Calcule la fréquence et le pourcentage correspondant à chaque valeur du caractère.
3. Faire une représentation des effectifs par un diagramme circulaire puis par un diagramme semi-circulaire.

Exercice 5

Dans un magasin de vente de chaussures, on a relevé en vrac les pointures suivantes
43; 45; 35; 40; 43; 38; 36; 37; 42; 44; 44,5
1. Quelle est la population étudiée? Le caractère est-il qualitatif ou quantitatif?
2. Calcule la moyenne $\bar{x}$ des pointures relevées
3. Ordonne la série et détermine la valeur M_e de la médiane.

Exercice 6

Soit la série statistique brute ci-dessous donnant les diamètres (cm) des anneaux.
1 ; 3 ; 8 ; 5 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 9 ; 7 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12

1. Détermine des classes de même amplitude égale à 4 cm á partir du plus petit diamètre.
2. Calcule les centres des classes et la moyenne $\bar{x}$ de la série classée.
3. trace l'histogramme des effectifs et le polygone des effectifs.
4. détermine la classe modale et la classe médiane.

Exercice 7

Une course de vitesse a donné les résultats suivants :

Temps	[5;8[	[8;11[	[11;14[	[14;17[
Effectifs	15	20	30	35

1. Complète le tableau par les effectifs cumulés croissants et décroissants. Donne la signification des effectifs cumulés 35 et 85
2. Trace l'histogramme des effectifs cumulés croissants et décroissants sur deux diagramme différents.
3. détermine graphiquement la classe médiane dans les deux graphiques. Calcule la valeur M_e de la médiane en utilisant Thalés

Exercice 8

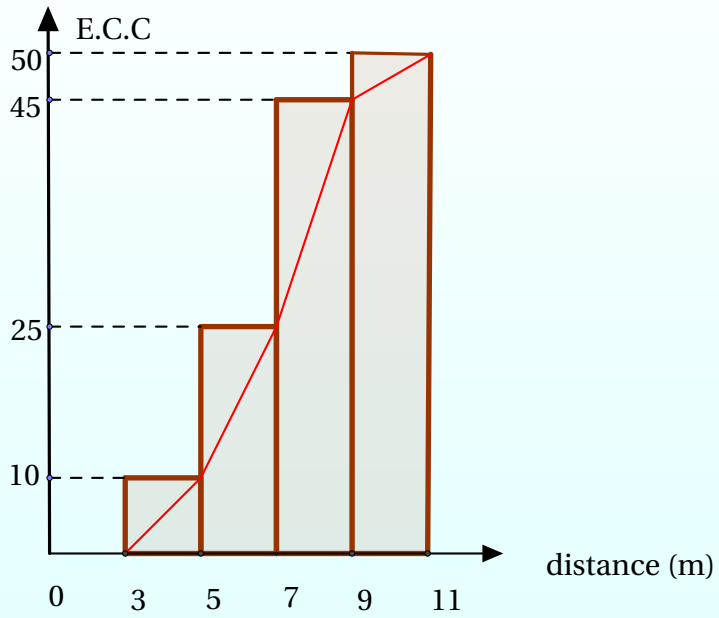
Une enquête faite auprès de 120 personnes portait sur le nombre de livres que chacune avait lus au cours du dernier mois et donnait les résultats suivants :
12 personnes n'avaient lu aucun livre ; 48 personnes avaient lu 1 livre ; 30 personnes avaient lu 2 livres 21 personnes avaient lu 3 livres et 9 personnes avaient lu 4 livres.
1. Complète le tableau suivant .

Nombres de livres lus	**Effectifs**	**Fréquence**	**Fréquence en %**	**E.C.C**	**E.C.D**
0					
1					
2					
3					
4					

2. Construis un diagramme semi-circulaire pour représenter les effectifs de cette enquête et notifie l'angle correspondant à chaque secteur.
3. En précisant quelle partie du tableau est utilisée, réponds aux questions suivantes.
a) Combien de personnes ont lu au plus 2 livres ?
b) Combien de personnes ont lu au moins 3 livres ?

Exercice 9

On considère l'histogramme ci-dessous des effectifs cumulés croissants réalisé après une épreuve de lancée de poids effectuée par des candidats au brevet



1. Quel est le nombre des candidats ayant participé á cette épreuve?
2. Quel est le pourcentage de candidats ayant effectué une lancée inférieure á 9 m
3. Comment appelle t-on la courbe rouge de l'histogramme?
4. Quelle signification peut-on donner l'abscisse 7?
5. Faire un tableau statistique, où l'on fera apparaitre :
► les centres de classes,
► Les effectifs
5. Détermine la classe modale

Exercice 10

Voici la première strophe du poème d'Arthur RIMBAUD intitulé Sensation .
« Par les soirs bleus d'été, j'irai dans les sentiers;
Picoté par les blés, fouler l'herbe menue;
Rêveur, j'en sentirai la fraicheur à mes pieds
Je laisserai le vent baigner ma tête nue. »
On a compté les voyelles utilisés dans cette strophe. Il en a 63.
1. Recopie et complète le tableau ci-dessous. On arrondira à l'unité près les fréquences exprimées en pourcentage

Voyelles	a	e	i	o	u	y	**Total**
Effectifs		30					**63**
Fréquence en %		48					**100**

2. Réalise un diagramme en bâton des effectifs (0.5 cm pour un unité)

Exercice 11

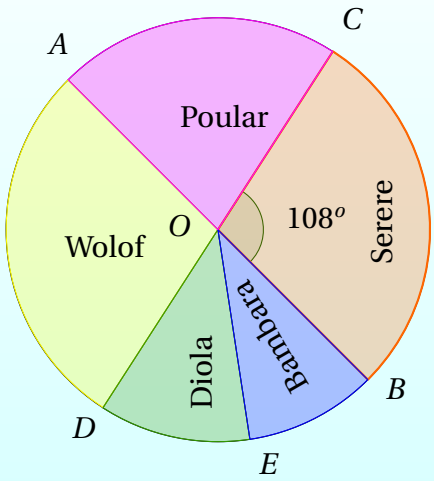
Une enquête sur les tailles de 50 personnes donne les résultats suivants (en cm) :

157 172 170 172 168 173 152 184 150 199 162
160 185 166 188 175 173 168 148 154 171 168
173 149 171 180 182 163 153 146 170 172 166
168 169 180 181 173 152 161 160 167 162 163
170 181 183 177 157 166

1. Classer ces données (amplitude des classes : 10 cm) : [140;150[; ⋯ ; etc
2. Calcule les fréquences des classes
3. Calcule les fréquences cumulées croissantes
4. Dessine l'histogramme des fréquences et trace le polygone des fréquences.

Exercice 12

Le diagramme ci-dessous représente la répartition des groupes ethniques dans une classe de 3^e de 30 élèves. $[AB]$ et $[CD]$ sont des diamètres, la demi-droite $[OE)$ est la bissectrice de l'angle de $\widehat{BOD}$.
Calcule l'effectif et le pourcentage de chaque groupe



Exercice 13

Sur une période donné e, les recettes d'une essencerie se repartissent comme suit :

Carburant	**Essence ordinaire**	**Essence super**	**Gasoil**	**Mélange**
Pourcentages de toutes les recettes	30%	25%	40%	5%

1. Représente cette série par un diagramme semi-circulaire
2. Sachant que l'essence ordinaire vendue a rapporté 126 000F et que 42 litres de cette mélange ont été vendus, trouve :
a) la somme rapporté par le gasoil
b) le prix du titre de mélange

Exercice 14

Dans le registre des consultations du dispensaire d'un village, on a relevé les cas de paludisme et on obtient le tableau suivant :

Mois	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Jui	Juillet	Aout	Sept	Oct	Nov	Déc
Nbre de cas de paludisme	21	12	5	4	2	6	13	68	92	53	40	30

1. Ajoute au tableau la ligne des effectifs cumulés croissants.
2. Trace le diagramme en bâton de cette série. (1 cm représente 10 malades)
3. Représente graphiquement la courbe des effectifs cumulés croissants (2 cm représentent 50 malades) puis détermine la période médiane (le mois) pendant laquelle 50% des malades ont été consultés.
4. En moyenne combien y a t-il de malades du paludisme par mois?
5. Le paludisme est la maladie qui tue le plus au Sénégal. Sachant que 10,5% des malades du paludismes sont décédés et qu'ils représentent 75% de l'ensemble des cas de décès annuels du dispensaire, calcule :
a) Le nombre annuel de décès de malades du paludisme.
b) Le nombre total annuel de malades décédés dans ce dispensaire

Exercice 15

On a relevé les tailles, en cm de N individus

Classes en (cm)	[140;150[	[150;160[	[160;170[	[170;180[	[180;190[	[190;200[
Effectifs cumulés croissants	3	10	26	40	49	50

1. Détermine le nombre N d'individus
2. Le caractère étudié est-il qualitatif ou quantitatif?
3. Calcule la taille moyenne $\bar{x}$
4. Détermine la classe modale
5. Calcule les pourcentages.
Dessine l'histogramme et trace le polygone des pourcentages
6. Calcule les pourcentages cumulés croissants
Trace la courbe cumulative des pourcentage cumulés croissants.
7. Détermine graphiquement la classe médiane et calcule la valeur M_e de la médiane à partir de l'histogramme des pourcentages cumulés croissants

Exercice 16

Une répartition des habitants d'un village est donnée dans le tableau suivant.

Handicap	**Aucun**	**Moteur**	**Visuel**	**Lépreux**	**Mental**	**Total**
Effectifs		10	30	14	5	200
Fréquences						

Complète et fais une représentation en diagramme circulaire des fréquences

I Rappel de cours

A Équations à deux inconnues

1 Définition et vocabulaire

■ On appelle une équation dans $\mathbb{R}^2$ (ou équation du 1^{er} degré à deux inconnues), toute équation de la forme $ax+by+c=0$ (avec a et b des réels non tous nuls et c un réel quelconque).

■ Un couple (x_0, y_0) est solution de l'équation $ax+by+c=0$ si et seulement si $ax_0+by_0+c=0$.

■ **Exemple :**

Soit l'équation suivante $2x+3y-6=0$. Vérifions si les couples $(0;2)$; $(-2;3)$ et $(3;0)$ sont solutions de l'équation.

• Pour le couple $(0;2)$, remplaçons x par 0 et y par 2 dans l'équation : $2x+3y-6=0$.

$$\begin{aligned} 2(0)+3(2)-6&=0\\ 6-6&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Vrai, donc le coupe $(0;2)$ est solution de l'équation

• Pour le couple $(-2;3)$, remplaçons x par -2 et y par 3 dans l'équation : $2x+3y-6=0$.

$$\begin{aligned} 2(-2)+3(3)-6&=0\\ -4+9-6&=0\\ -1&=0 \end{aligned}$$

Faux, donc le coupe $(-2;3)$ n'est pas solution de l'équation

• Pour le couple $(3,0)$, remplaçons x par 3 et y par 0 dans l'équation : $2x+3y-6=0$.

$$\begin{aligned} 2(3)+3(0)-6&=0\\ 6-6&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Vrai, donc le coupe $(-2;3)$ est solution de l'équation

2 Remarque

Une équation du premier degré à deux inconnues admet une infinité de solutions qui sont des couples réels

B Système d'équations à deux inconnues

1 Définition et vocabulaire

■ On appelle système d'équations à deux inconnue un ensemble de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \ (1)\\ a'x+b'y+c'=0 \ (2) \end{cases}$$

■ Un couple de réels (x_0, y_0) est solution de ce système si et seulement si ce couple est à la fois solution de l'équation (1) et (2).

2 Méthode résolution d'un système d'équations

Il existe quatre méthode de résolution pour un système d'équations à deux inconnues :

• ***Méthode de substitution***

- ***Méthode de comparaison***
- ***Méthode d'addition (ou d'élimination)***
- ***Méthode graphique***

■ **Exemple :**

Résolvons le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

▶ Méthode de substitution

$\begin{cases} 2x+y-4=0\,(1) \\ x+y-3=0\,(2) \end{cases}$

- Exprimons y en fonction de x de l'équation (1) :

$$2x+y-4=0$$
$$y=4-2x\ (\star)$$

- Remplaçons l'expression de y dans l'équation (2)

$$\begin{aligned} x+y-3&=0 \\ x+4-2x-3&=0 \\ x-2x+4-3&=0 \\ -x+1&=0 \\ x&=1 \end{aligned}$$

- Pour trouver la valeur de y, nous allons remplacer x par sa valeur dans l'expression $(\star)$

$$\begin{aligned} y&=4-2x \\ y&=4-2\times(1) \\ y&=4-2 \\ y&=2 \end{aligned}$$

- L'ensemble des solutions de ce système est le coupe $(1;2)$: $S=\{(1;2)\}$

▶ Méthode d'addition

$\begin{cases} 2x+y-4=0\,(1) \\ x+y-3=0\,(2) \end{cases}$

- Éliminons y en multipliant par -1 à l'équation (1)

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-y+4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$
$$-x+1=0$$
$$x=1$$

- Éliminons x en multipliant par -2 à l'équation (2)

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ -2x-2y+6=0 \end{cases}$$
$$-y+2=0$$
$$y=2$$

- L'ensemble des solutions de ce système est le coupe $(1;2)$: $S=\{(1;2)\}$

▶ Méthode de comparaison

$\begin{cases} 2x+y-4=0\,(1) \\ x+y-3=0\,(2) \end{cases}$

• Exprimons y en fonction de x dans l'équation (1)

$$2x+y-4=0$$
$$y=4-2x\ (\star)$$

• Exprimons y en fonction de x dans l'équation (2)

$$x+y-3=0$$
$$y=3-x\ (\star\star)$$

• Déterminons la valeur de x en comparant les deux expressions de y
D'après $(\star)$ et $(\star\star)$: $4-2x=3-x$

$$4-2x=3-x$$
$$-2x+x=3-4$$
$$-x=-1$$
$$x=1$$

• Remplaçons la valeur de x dans l'expression $(\star)$

$$2\times 1+y-4=0$$
$$y=4-2$$
$$y=2$$

• L'ensemble des solutions de ce système est le coupe $(1;2)$: $S=\{(1;2)\}$

▶ Méthode graphique

$$\begin{cases} 2x+y-4=0\ (1) \\ x+y-3=0\ (2) \end{cases}$$

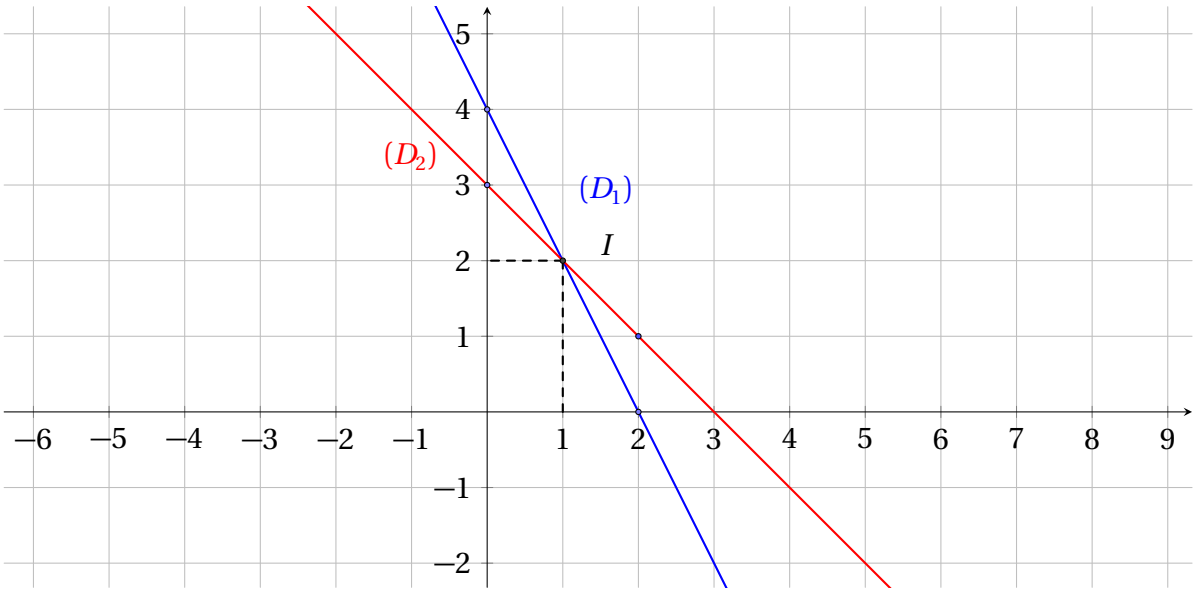
Posons $(D_1): 2x+y-4=0$ et $(D_2): x+y-3=0$ et représentons ces droites d'équations dans un repère orthonormé.

• Représentation de $(D_1): 2x+y-4=0$
Pour $x=0$, alors on a $y=4$ et pour $x=2$, on a $y=0$

x	0	2
y	4	0

• Représentation de $(D_2): x+y-3=0$
Pour $x=2$, alors on a $y=1$ et pour $x=0$, on a $y=3$

x	2	0
y	1	3



• Les coordonnées du point I sont solutions de ce système d'équations : $S = \{(1;2)\}$

3 Résolution d'un problème

Quatre étapes importantes sont à retenir pour organiser la résolution algébrique d'un problème.

• Choix des inconnues
• La mise en système des équations
• La résolution du système d'équations
• Interprétation du résultat pour donner la solution du problème.

■ Exemple :

Dans une basse-cour composée de lapins et de poules, on compte 73 têtes et 242 pattes. Combien y a t- il d'animaux de chaque espèce ?

■ Résolution :

• Choix des inconnues :

Soit x le nombre de lapins et y le nombre de poules.

• Mise en système d'équations

$$\begin{cases} x + y = 73 \\ 4x + 2y = 242 \end{cases}$$

• Résolution du système d'équations

$$\begin{cases} x + y = 73\ (1) \\ 4x + 2y = 242\ (2) \end{cases}$$

▶ Exprimons y en fonction de x de l'équation (1) :

$$\begin{aligned} x + y &= 73 \\ y &= 73 - x\ (\star) \end{aligned}$$

▶ Remplaçons l'expression de y dans l'équation (2)

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 73 \\ 4x + 2(73 - x) &= 242 \\ 4x + 146 - 2x &= 242 \\ 4x - 2x &= 242 - 146 \\ 2x &= 96 \\ x &= \frac{96}{2} = 48 \end{aligned}$$

▶ Pour trouver la valeur de y, nous allons remplacer x par sa valeur dans l'expression $(\star)$

$$\begin{aligned} y &= 73 - x \\ y &= 73 - 48 \\ y &= 25 \end{aligned}$$

▶ Interprétation du résultat.

La basse-cour est composée de 48 lapins et de 25 poules

II Exercices

Exercice 1

Dans chaque cas, donne trois couples de nombres réels solutions de l'équation donnée

a) $2x - 3y = 4$; **b)** $x - 5y = -3$; **c)** $-3x + 7y = 1$; **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; **e)** $-3x + 4y - 8 = 0$

Exercice 2

On considère l'équation suivante : $x-2y+1=0$

1. Vérifie si les couples suivants sont solutions de l'équation

$(0;0)$; $(-5;-2)$; $(3;7)$; $(2\sqrt{3}+1;\sqrt{3})$; $(-\sqrt{5};\frac{1}{2})$

2. Soit a un nombre réel donné. Détermine y en fonction de a pour que le couple $(a;y)$ soit solution de cette équation.

2. Soit b un nombre réel donné. Détermine x en fonction de b pour que le couple $(x;b)$ soit solution de cette équation.

3. Représente graphiquement, dans un repère orthonormé, l'ensemble des solutions de cette équation

Exercice 3

Soit l'équation dans $\mathbb{R}^2$: $3x+0y-2=0$

1. Peu-on déterminer x tel que $(x;-5)$ soit solution de cette équation?

2. Peut-on déterminer y tel que $(2;y)$ soit solution de cette équation?

3. Représente graphiquement, dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé,l'ensemble de solution de cette équation

Exercice 4

Résous les systèmes suivants, dans $\mathbb{R}^2$ et en donne un interprétation graphique, dans un repère orthonormé

$a)\begin{cases}5x=-2\\2x-y=\frac{2}{3}\end{cases}$

$b)\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{3}\\2x+y=2\end{cases}$

$c)\begin{cases}\frac{8}{5}y=-4\\7+3y=-11\end{cases}$

$d)\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1\\2x+5y=15\end{cases}$

$e)\begin{cases}0,2x-y=0,6\\0,25-1,25y=-0,5\end{cases}$

$f)\begin{cases}x+3y+7=0\\8x+y-13=0\\2x+4y+8=0\end{cases}$

$g)\begin{cases}x-2y=-3\\2x+y=-9\end{cases}$

$h)\begin{cases}x-2y=-3\\2x+y=-9\end{cases}$

$i)\begin{cases}13x-7y=20\\x+21y=-20\end{cases}$

$j)\begin{cases}-x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0\\-\frac{3}{2}x+y-\frac{1}{2}=0\end{cases}$

$k)\begin{cases}\frac{x-y}{2}+\frac{1-x}{3}=0\\\frac{x-y}{2}+y+1=0\end{cases}$

$l)\begin{cases}3x-2y=0\\7x-8y=0\end{cases}$

$m)\begin{cases}y=2x+3\\2y-4=5x-2\end{cases}$

$n)\begin{cases}\frac{x-2y}{3}+\frac{x-1}{2}=-\frac{5}{2}\\\frac{x}{2}-\frac{4y+1}{3}=-2\end{cases}$

$o)\begin{cases}\frac{x-3}{4}+\frac{2y-5}{2}=-3\\\frac{7x-10}{5}+\frac{3y+4}{2}=\frac{11}{2}\end{cases}$

$p)\begin{cases}10x+9y=8\\-16x+21y=1\end{cases}$

$q)\begin{cases}6x-y-2=0\\3x-4y-8=0\\x-y+3=0\end{cases}$

$r)\begin{cases}2x+y=5\\x-y=1\\3x+2y=8\end{cases}$

Exercice 5

On donne, dans $\mathbb{R}^2$, l'équation suivante :
$ax+by+c=0$ (a et b des réels)
Détermine les réels a et b pour que les couples $(-1;3)$ et $(0;2)$ soient solution de cette équation

Exercice 6

Résous dans, $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=-3\\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}=8\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=3\\ -\frac{1}{x}+\frac{5}{y}=1\end{cases}$$

(On fera un changement d'inconnues $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$)

Exercice 7

Résous dans,$\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes.

$a)\begin{cases}x-\sqrt{3}x-y=\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3}+2y=4\end{cases}$ $b)\begin{cases}(1-\sqrt{5})x+y=1-\sqrt{5}\\ -4x+(1+\sqrt{5})y=5+\sqrt{5}\end{cases}$ $c)\begin{cases}(2+\sqrt{3})x-y=5\\ -2\sqrt{3}x+2y=4\end{cases}$

Exercice 8

Une somme d'argent est constituée de 15 pièces de monnaie, les unes de 5 F, les autres de 10 F.
1. Si toutes les pièces étaient de 5 F, de quelle somme disposerait-on?
2. Si toutes les pièces étaient de 10 F, de quelle somme disposerait-on?
3. Soit x le nombre de pièces de 5 F et y le nombre de pièces de 10 F. Exprime y en fonction de x
4. Exprime la somme d'argent en fonction de x.
5. Calcule x et y sachant que la somme est de 105 F

Exercice 9

Moussa dispose de 20 billets à la banque composés de billets de 500 F et de 1000 F. Il déclare : « Si j'avais un billet de 500 F supplémentaire, je disposerais de la même somme d'argent en billet de 500 F qu'en billets de 1000 F »
Trouve le nombre de billets de 500 F et celui de billets de 1000 F

Exercice 10

Dans une classe de troisième, le nombre de filles dépasse de 18 le nombre de garçons. En fin d'année on exclut 7 garçons et 5 filles. Le nombre de filles est alors le triple du nombre de garçons. Combien y a t-il de garçons et de filles dans cette classe?

Exercice 11

Un père de 39 ans a 3 enfants âgés de 6, 8 et 11 ans. Dans combien d'années l'age du père sera t-il égale á la somme des âges des enfants

Exercice 12

Au marché de Kidira á l'étal de Modou, Samba achète 3kg de mangues et 2kg d'oranges à 3000 F.
Au même étal, Fatou achète 1kg de mangues et 2kg d'oranges à 1500 F.
Quel est le prix d'un kg de mangues de d'un kg d'oranges ?

Exercice 13

Moussa dispose de 50 000 F pour acheter des livres qu'il doit dans deux série différentes A et B
S'il acheté 4 livres de série A et 5 livres de série B, il lui manque 1500 F
S'il a acheté 5 livres de série A et 3 livres de série B,il lui reste 250 F
Traduis ces données par un système d'équations puis trouve le prix de chacun

Exercice 14

Un champ rectangulaire a un périmètre de 118 m. si on augmente sa largeur de 2 m et sa longueur de 5 m, l'aire du champ augmenterait de 200 m^2.
Calcule les dimensions du champ

Exercice 15

Abdou achète un costume, une robe et des chaussures.
Le costume et la robe coûtent 20 500 F.
La robe et les chaussures, 12 750 F.
Le costume et les chaussures, 16250 F.
Quel est le prix du costume, de la robe et des chaussures ?

Exercice 16

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB+AC+BC=72$ cm et $4AB=3AC$.
1. Sans calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, montre que :
a) $7AB+3BC=216$ cm
b) $3BC-5AB=0$.
2. En utilisant les résultats de la question, Calcule AB et BC ; déduis-en la longueur de AC

Exercice 17

Un marchant de vélomoteurs vient de vendre deux scooters d'occasion pour la somme totale de 210 000 F.
Il a réalisé 10% de bénéfice sur la vente du premier scooter mais il a perdu 10% sur l'autre. Globalement, il a réalise un bénéfice de 5%. A combien avait-il acheté chacun des scooters ?

I Rappel de cours

A Inéquations à deux inconnues

1 Définition et vocabulaire

■ Soit $*\in\{\leq;<;\geq;>\}$. On appelle une inéquation dans $\mathbb{R}^2$ (ou inéquation du 1^{er} degré à deux inconnues), toute inéquation de la forme $ax+by+c*0$ (avec x et y sont des inconnues ; a et b des réels non tous nuls et c un réel quelconque).

■ Un couple (x_0, y_0) est solution d'une inéquation $ax+by+c*0$ si et seulement si l'inégalité ax_0+by_0+c*0 est vraie.

2 Méthode de résolution

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $ax+by+c*0$ (avec $*\in\{\leq;<;\geq;>\}$) , on procède comme suit :

- Tracer dans un repère orthonormal la droite d'équation $(D): ax+by+c=0$
- Considérer un point $M(x_M; y_M)$ de l'un des demi-plans de frontière (D)
- Remplacer x_M et y_M dans l'inéquation donnée.

Si x_M et y_M vérifient l'inéquation, alors M appartient au demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Si non, l'autre demi-plan représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

■ **Remarque :**

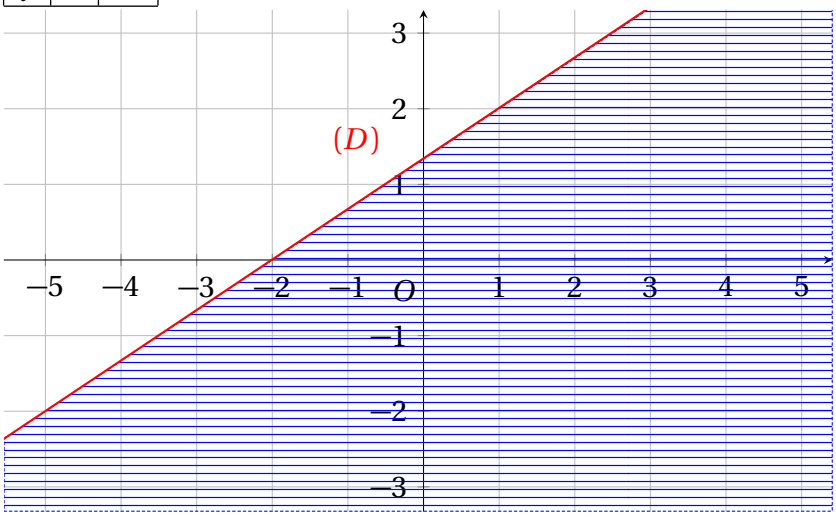
Généralement on choisit le point O de coordonnée $(0;0)$ si la droite ne passe pas par l'origine

■ **Exemple :**

Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}^2$, l'inéquation suivante : $2x-3y+4<0$.

Soit $(D): 2x-3y+4=0$. Représentons la droite (D) dans un repère orthonormal

x	1	-2
y	2	0



La droite ne passe pas par le point $O(0;0)$, donc vérifions si le demi-plan contenant O est solution.

$2(0)-3(0)+4<0$

$0-0+4=4<0$. Faux, donc le demi-plan contenant pas l'origine est solution de l'inéquation $2x-3y+4<0$, c'est-à-dire la partie non hachurée.

B Système d'inéquations à deux inconnues

1 Définition et vocabulaire

■ On appelle système d'inéquation à deux inconnue un ensemble de deux inéquations à deux inconnues.

$$\begin{cases} ax+by+c*0\,(1) \\ a'x+b'y+c'*0\,(2) \end{cases}; \quad *\in\{\leq;<;\geq;>\}$$

■ Un couple de réels (x_0, y_0) est solution de ce système si et seulement si ce couple est à la fois solution de l'inéquation (1) et (2).

2 Méthode de résolution

Pour résoudre graphiquement le système d'inéquation $\begin{cases} ax+by+c*0\,(1) \\ a'x+b'y+c'*0\,(2) \end{cases}; \quad *\in\{\leq;<;\geq;>\}$ on procède comme suit :

• On trace dans un repère orthonormal la droite (D) d'équation $ax+by+c=0$, puis on hachure le demi-plan qui ne représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+by+c*0$

• Dans le même repère, on trace la droite (D') d'équation $a'x+b'y+c'=0$, puis on hachure le demi-plan qui ne représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $a'x+b'y+c'*0$

• L'ensemble des solutions du système est la partie du plan non hachurée

■ **Exemple :**

Résolvons le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} x-y-1\geq 0 \\ 2x-3y-4\leq 0 \end{cases}$

Soit (D) : $x-y-1=0$ et (D') : $2x-3y-4=0$. Représentons (D) et (D') dans un même repère orthonormal

• Représentation de (D) : $x-y-1=0$

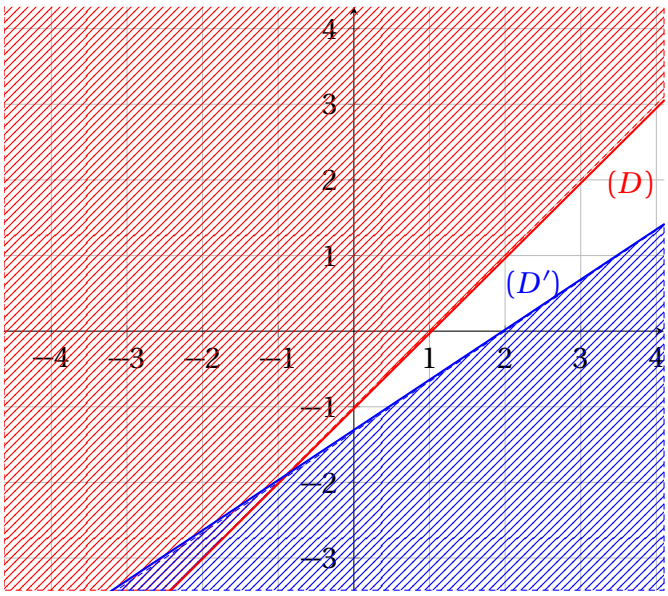
Pour $x=0$, alors on a $y=-1$ et pour $x=2$, on a $y=1$

x	0	2
y	-1	1

• Représentation de (D') : $2x-3y-4=0$

Pour $x=-1$, alors on a $y=-2$ et pour $x=2$, on a $y=0$

x	-1	2
y	-2	0



• Pour l'inéquation $x-y-1\geq 0$: La droite (D) ne passe pas par le point $O(0;0)$, donc vérifions avec ce point si le demi-plan contenant O est solution.

$0-0-1=-1\geq 0$. Faux, donc le demi-plan contenant pas le point O est solution de l'inéquation $x-y-1\geq 0$.

M. GUEYE 77 135 23 62

• Pour l'inéquation $2x-3y-4\leq 0$: Avec les coordonnées du point O, on a : $2(0)-3(0)-4=-4\leq 0$ Vrai, donc le demi-plan contenant O est solution de l'inéquation $2x-3y-4\leq 0$

• Conclusion : L'ensemble des solutions de ce système d'inéquations est la partie non hachurée.

II Exercices

Exercice 1

Soit l'inéquation : $-2x+5y\geq 3$

1. Parmi les couples de réels suivants, donne ceux qui sont solutions de l'inéquation en justifiant ta réponse $(2;1)$; $(-\frac{1}{2};2)$; $(1;1)$.

2. Pour quelles valeurs de a le couple $(\frac{a}{2};-a)$ soit solution de l'inéquation.

3. Résous graphiquement cette inéquation.

Exercice 2

Soit le système d'inéquation suivant : $\begin{cases}3x-2y-9<0\\-3x-4y+27>0\end{cases}$

Vérifie si les couples suivants appartiennent à l'ensemble des solutions du système $(3;-2)$; $(0;11)$; $(-4;3)$; $(-5;20)$

Exercice 3

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes.

a) $y<0$
b) $x\geq 0$
c) $6x+y-5\geq 0$
d) $2x-y\geq 0$
e) $x-2y+4>0$
f) $2y-\frac{3}{2}<x+\frac{5}{6}$
g) $-4y+\frac{2}{3}>\frac{3}{2}x+4$
h) $-3x+4y-1\leq 0$

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations suivants :

$a)\begin{cases}-2x+3y\geq 0\\x-2y-1\leq 0\end{cases}$
$b)\begin{cases}x+y-3>0\\x-y>0\end{cases}$
$c)\begin{cases}2x+3y\geq 0\\x-2y+1<0\end{cases}$
$d)\begin{cases}x>4\\x+y-3<0\end{cases}$
$e)\begin{cases}x-y+3\leq 0\\2x+y-1\leq 0\end{cases}$
$f)\begin{cases}4x+y-5>0\\-2x+y+1<0\end{cases}$
$g)\begin{cases}-y<-2x-1\\x+1<2y-3\end{cases}$
$h)\begin{cases}x>1\\y<0\end{cases}$
$i)\begin{cases}x-y<0\\y>-1\end{cases}$
$j)\begin{cases}x-y>-1\\y+x<0\end{cases}$
$k)\begin{cases}-3x+8y-4\geq 0\\x-y+7<0\end{cases}$
$l)\begin{cases}2x-3y+5<1\\x+3y-7<4\end{cases}$

I Rappel de cours

1 Définition et vocabulaire

On appelle ***application affine***, tout procédé de calcul qui à tout réel x, fait correspondre le réel $ax+b$ où a et b étant des nombres réels donnés.

■ Si f est une application affine, alors on note $f : x \longmapsto ax+b$ et elle est définie par $f(x)=ax+b$.
On dit que x est l'antécédent de $f(x)$ et $f(x)$ est l'image de x par l'application f.

■ Soit f une application affine définie par $f(x)=ax+b$

• Le réel a est appelé coefficient et le réel b est appelé la constante de l'application f.
• Si $b=0$, alors $f(x)=ax$; f est une application linéaire.
• Si $a=0$,alors $f(x)=b$; f est une application constante.
• L'application linéaire g, telle que $g(x)=ax$ est appelé ***application linéaire associée*** à l'application affine f.

2 Sens de variation - Calcul d'images et d'antécédents.

Soit f une application affine telle que $f(x)=ax+b$

■ Sens de variation :

• Si $a>0$, alors f est une application affine ***croissante.***
• Si $a<0$, alors f est une application affine ***décroissante.***
• Si $a=0$, alors f est une application affine ***constante.***

■ Calcul d'images et d'antécédents :

Les calculs d'images et d'antécédents se fait comme avec les applications linéaires.

■ **Exemple**

Soit f une application définie par $f(x)=-5x+7$

1. Détermine la nature de l'application f et son sens de variation.
2. Calcule l'image de 2 par f.
3. Résous l'équation $f(x)=-8$. Interprète le nombre, solution de l'équation

■ **Solution**

1. Donnons la nature de l'application f et son de variation
f est une application affine de coefficient égal à -5 et de constante égale à 7. Comme le coefficient -5 est négatif, alors l'application affine f est décroissante.
2. Calculons l'image de 2 par f.
$f(x)=-5x+7$, donc $f(2)=-5\times 2+7=-10+7=-3$.
2 a pour image -3 par f
3. Résolvons l'équation $f(x)=-8$
$f(x)=-8 \Longleftrightarrow -5x+7=-8$ soit $x=3$.
Interprétation : 3 est l'antécédent de -8 par f

3 Représentation graphique d'une application affine

Soit f une application affine définie par $f(x)=ax+b$

■ La représentation graphique de l'application affine f est la droite d'équation : $y=ax+b$

■ a est appelé coefficient directeur de la droite et b est appelé ordonnée à l'origine et la droite coupe l'axe des coordonnées au point de coordonnées $(0;b)$.

■ Si g est une application linéaire définie par $g(x)=ax$, alors les représentations graphiques (Δ) et (Δ') respectives de f et g sont telles que :
(Δ) passe par le point de coordonnées $(0;b)$ et (Δ') passe par l'origine des axes et (Δ) parallèle à (Δ').

Exemple

On considère les application suivantes f et g définies par : $f(x)=2x+3$ et $g(x)=2x$

1. Donne la nature de f puis celle de g.

Que peut-on dire de f et g ?

2. Trace dans un même repère orthonormal les droites (Δ) et (Δ') représentations graphiques respectives de f et de g

Solution

1. Donnons les natures de f puis celle de g.

f est une application affine de coefficient 2 et de constante 3.

g est une application linéaire de coefficient 2.

f et g ont le même coefficient, donc g est l'application linéaire associée à l'application affine f.

2. Représentons (Δ) et (Δ')

Soit $(\Delta) : y=2x+3$ et $(\Delta') : y=2x$

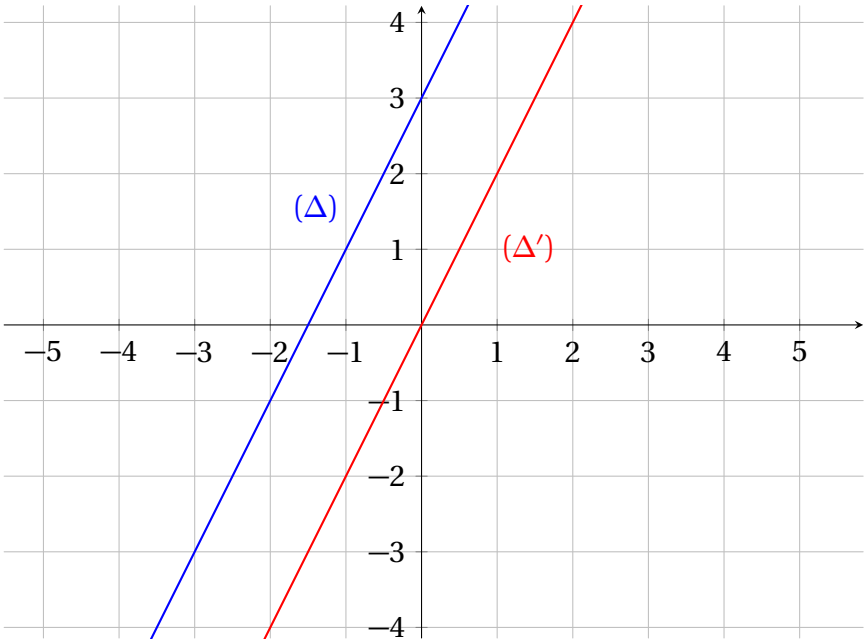
- Représentons de (Δ)

(Δ) passe par le point $A(0;3)$ et par le point $B(-3;-3)$.

- Représentons de (Δ')

(Δ') passe par le point $O(0;0)$ et par le point $C(1;2)$.

On a la figure ci-dessous



Les droites (Δ) et (Δ') ont le même coefficient directeur,elles sont donc parallèles

4 Application affine par intervalles

Exemple

Soit f et g deux applications définies de la façons suivante :

$$f(x)=|3x+5| \text{ et } g(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x\in]-\infty;-2] \\ -x \text{ si } x\in[-2;2] \\ x-4 \text{ si } x\in[2;+\infty[\end{cases}$$

1. Donne la nature des applications f et g suivants les intervalles bien définies de $\mathbb{R}$

2. Représente graphiquement les application f et g

Résolution

1. Donnons les natures des applications f et g

- Pour l'application f :

Exprimons f sans symbole de la valeur absolue. On sait que $|a|=\begin{cases} a \text{ si } a\geq 0 \\ -a \text{ si } a\leq 0 \end{cases}$. Donc

$f(x) = 3x + 6$ si $3x + 6 \geq 0$

$= 3x + 6$ si $x \geq -2$

f est donc une application affine dans l'intervalle $[-2; +\infty[$

$f(x) = -3x - 6$ si $3x + 6 \leq 0$

$= -3x - 6$ si $x \leq -2$

f est donc une application affine dans l'intervalle $]-\infty; -2]$

On dit que f est une application affine par intervalles.

• Pour l'application g :

g est une application constante dans l'intervalle $]-\infty; -2]$

g est une application linéaire dans l'intervalle $[-2; 2]$

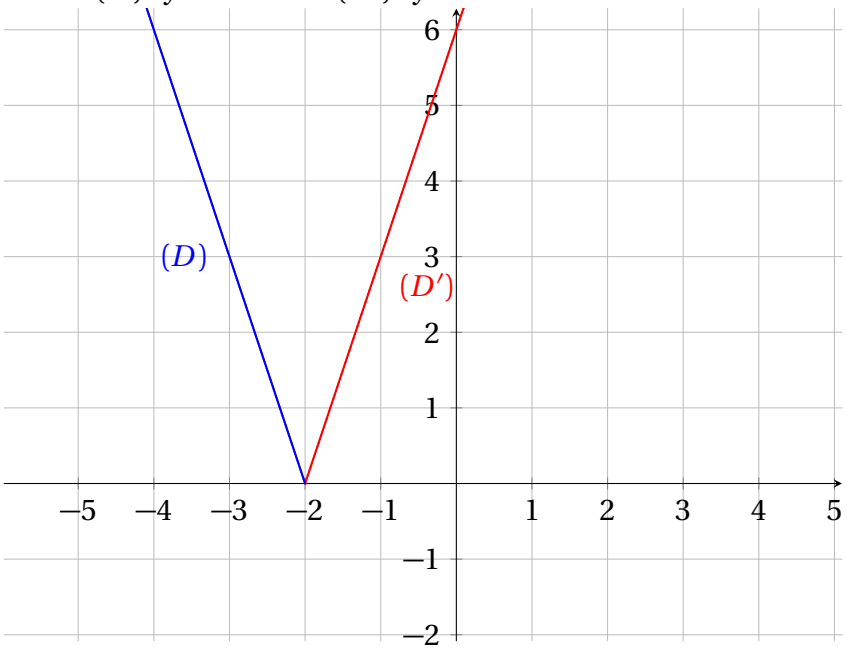
g est une application affine dans l'intervalle $[2; +\infty[$

On dit que g est une application affine par intervalles

2. Représentons les applications f et g.

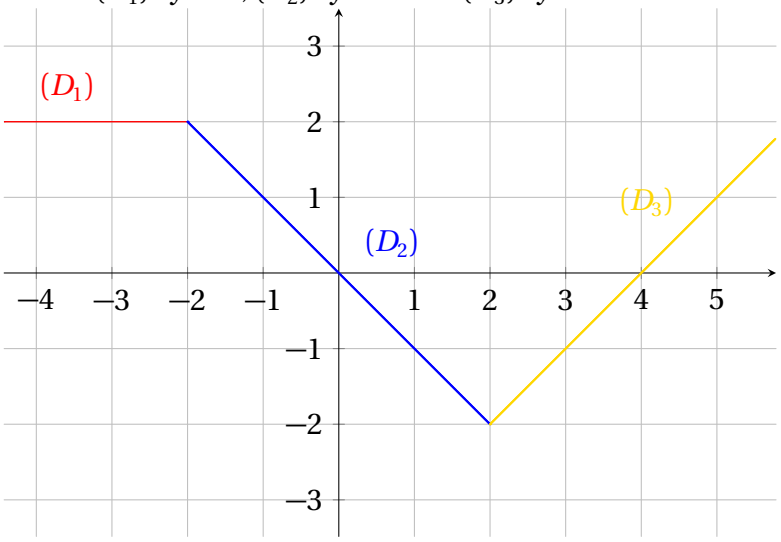
• Pour l'application f :

Soient $(D) : y = 3x + 6$ et $(D') : y = -3x - 6$



• Pour l'application g :

Soient $(D_1) : y = 2$; $(D_2) : y = -x$ et $(D_3) : y = x - 4$



II Exercices

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, donne celles qui sont des applications affines en précisant les coefficients et les constantes

$f : x \longmapsto 3x^2+7$

$f : x \longmapsto \dfrac{x-8}{2x+3}$

$f : x \longmapsto 2x+8$

$f : x \longmapsto \dfrac{3}{5}x+7$

$f : x \longmapsto -\dfrac{5}{12}(3x+7)$

$f : x \longmapsto |x^2-1|$

Exercice 2

1. Détermine l'application affine f, telle que $f(-3)=5$ et $f(2)=4$.

2. Détermine l'application affine g dont sa représentation graphique (Δ) passe par le point $A(2;1)$ et est parallèles à celle de f

Exercice 3

On considère les applications suivantes f et g, telles que :

$f(x)=5x-8$ et $g(x)=-3x$

1. Quelle est la nature de chacune des ces applications?

2. Détermine le sens de variation de chacune de ses applications.

3. Calcule l'image de $\dfrac{-\sqrt{2}}{10}$ par f, puis en déduire l'encadrement de $f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{10}\right)$ au 10^{-3}, sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

4. Soient (Δ) et (Δ') les représentations graphiques respectives des applications f et g.

a) Détermine le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ').

b) Représente graphiquement les applications f et g.

Exercice 4

On considère l'application h, telle que $h(x)=3x-8+2\sqrt{(2x+3)^2}$

1. Montre que h est une application affine par intervalles.

2. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $h(x)=0$ et $h(x)=\dfrac{3}{2}$, puis interprète les résultats obtenus.

3. Représente graphiquement l'application h.

4. On pose $g(x)=f(x)$ dans l'intervalle $\left[\dfrac{-3}{2};+\infty\right[$

a) Calcule l'image de -3; de $\sqrt{5}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ par g.

b) Donne un encadrement de $g(\sqrt{5})$ au 10^{-2} près sachant que $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$.

Exercice 5

On considère l'application f, telle que $f(x)=(x-3)^2-(x+2)^2$

1. Montre que f est une application affine.

2. Soit g une application affine, telle que $g(x)=ax+b$

3. Détermine les réels a et b sachant que $g(b)=-1$ et $g(-b)=3$.

4. Montre que pour tout réel x, $f(x)=kg(x)$, k étant un réel qu'on déterminera.

5. Construis dans un même repère les représentations graphiques (D_1) et (D_2) des applications respectives de f et g.

6. Détermine les coordonnées de leur point d'intersection

Exercice 6

Soit f et g deux application affines définies par :

$f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ et $g(x)=2x-3$

1. Construis les représentations graphiquement (Δ) de f et (Δ') de g.

2. Détermine les coordonnées du point d'intersections A de (Δ) et (Δ'). Vérifie graphiquement le résultat obtenu.

3. Résous graphiquement les inéquations suivantes.

$f(x)\geq g(x)$ et $f(x)<g(x)$

Exercice 7

Soit f et g les applications affines définies par : $f(x)=-2x+3$ et $g(x)=3x-2$.

1. Détermine le sens de variation de f et de g.

2. Construis les représentations graphiques (D) de f et (D') de g.

3. Quel est l'ensemble S des réels x tels que : $f(x)=g(x)$? En déduire les coordonnées du point d'intersection K de (D) et (D').

Exercice 8

1. Résous graphiquement dans un repère orthonormal le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 2x-3y+5>0 \\ x+2y-2<0 \end{cases}$$

2. On pose $A=2x-3$

a) Calcule A^2

b) Déduis de a) une factorisation de $B=4x^2-12x+8$

c) Résous dans $\mathbb{R}$ $B=0$.

3. Le prix à payer pour un trajet en taxi comprend une prise en charge et une somme proportionnelle au nombre de kilomètres parcours.

Ali a payé 500 F pour un trajet de 4 km ; Doudou à payé 725 F pour un trajet de 8,5 km.

a) Détermine le prix du km et le montant de la prise en charge.

b) Détermine l'application affine qui définit la somme à payer en fonction du nombre de kilomètres à parcourus.

c) Représente graphiquement une telle application dans un repère orthonormal.

d) Détermine graphiquement le prix à payer pour 10 km

Exercice 9

Pour organiser une colonie de de vacances pour les 50 enfants de ses employés, une société, établie à Dakar, lance un appel d'offre auquel trois agences ont soumissionné

• L'agence A réclame pour chacun de ses cars un forfait de 30 000 F et 500 F pour chaque km parcouru.

• L'agence B réclame pour chacun de ses cars un forfait de 40 000 F et 300 F pour chaque km parcouru.

• L'agence C réclame 64 000 F pour chacun de ses cars.

1. Établis une relation exprimant la somme y à payer en fonction du nombre x de km parcourus pour chacun des trois agences

2. Dans un repère orthogonal, représente graphiquement les trois relations obtenues.

On prendra : $\begin{cases} 1 \text{ cm pour } 10 \text{ km sur l'axe des abscisses} \\ 1 \text{ cm pour } 1000 \text{ F sur l'axe des ordonnées} \end{cases}$

3. Détermine graphiquement sur quelle longueur de trajet :

• L'agence A réclame plus que l'agence B ?

• L'agence A réclame la même somme de l'agence C ?

• L'agence B réclame moins que l'agence C

4. Les enfants sont repartis en deux groupes.

• Le groupe 1 va à Thiès, ville distante de 70 km de Dakar.

• Le groupe 2 va à kaolack, ville distante 192 km de Dakar.

a) Indique sur chacun de ses deux trajets l'agence la moins chère qui sera retenue.

b) Quelle est l'agence qui n'aura aucun part de ce marché? Pourquoi?

Exercice 10

Un fournisseur d'accès à Internet, qui propose à ses clients deux formulaires d'abonnement :

• Formulaire A comportant un abonnement fixe de 20 000 F par mois auquel s'ajoute le prix des communications au tarif préférentiel de 200 de l'heure.

• Formulaire B offrant un libre accès à internet mais pour laquelle le prix des communications est de 400 F pour une heure de connexion

Dans les deux cas, les communications sont facturées proportionnellement au temps de connexion

1. Pathé se connecte 7 heures 30 minutes par mois et Anna 15 heures par mois.

a) Calcule le prix payé par chacune des deux personnes selon qu'elle choisit la formulaire A ou la formulaire B

b) Conseille à chacune l'option qui est pour elle la plus avantageuse.

2. On note x le temps de connexion d'un client, exprimé en heures. On appelle P_A le prix à payer en Fcfa avec formulaire A et P_B le prix à payer en Fcfa avec la formulaire B.

Exprime P_A et P_B en fonction de x.

3. Coumba, qui avait choisi la formulaire B, a payé 2600 F.

Combien de temps a-t-elle été connecté?

4. Mouhamed se connecte 14 heures dans le mois. Combien va-t-il payer selon qu'il choisit la formulaire A ou la formulaire B ?

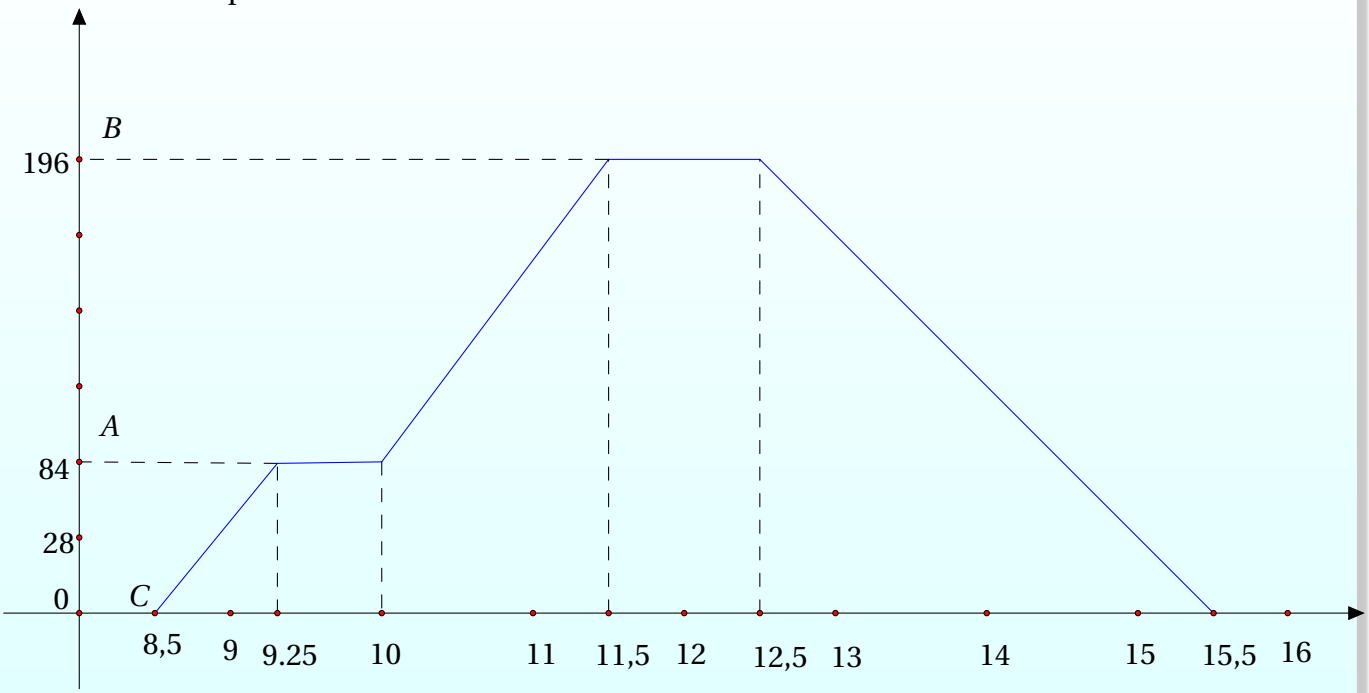
5. Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $400x \leq 200x + 20000$.

Que permet de déterminer la résolution de cette inéquation dans le contexte du problème?

.

Exercice 11

Sur le graphique suivant, on a représenté le mouvement d'un taxi Allo Dakar. Sur l'axe des ordonnées sont indiquées les distances parcourues en kilomètres, sur l'axe des abscisses sont indiquées les durées correspondantes en heures.



Les points A, B et C représentent respectivement les villes de Dakar, Mbour et Kaolack.
Réponds, d'après le graphique, aux questions suivantes :
1. Combien de temps le taxi s'arrête-il dans chaque ville?
2. Quelle est la durée totale du trajet :
a) Dakar-kaolack?
b) Mbour-kaolack?

Exercice 12

La prise en charge, par un taxi, est de 60 francs et la somme à payer augmente de 10 francs chaque fois que l'on a parcouru 200 mètres.
1. Quelle est la somme à payer pour parcourir 400 mètres? 450 mètres? 2 kilomètres?
2. Soit x le nombre de mètres parcourus et s la somme à payer. Lorsque x appartient à l'intervalle $[0;1400]$, détermine l'application affine f définie par $f(x)=s$.
Représente graphiquement l'application f. (On pourra prendre, sur l'axe des abscisses, 1cm pour représenter 200 m et,sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 20 F).

Exercice 13

Un fournisseur d'accès à internet propose trois formulaires d'abonnement mensuel :
Formule A : 2 euros par heures de connexion. Formule B : 20 euros d'abonnement et 0,50 euro par heure de connexion. Formule C : connexion illimitée pour 30 euros.
1. Exprime chaque formule d'abonnement par une application affine qui au temps de connexion x en heure dans un mois associe le prix à payer.
2. Représente ces trois applications dans un repère orthonormal. Quelle est la formule la plus économique? Justifie.

Deuxième partie

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIES

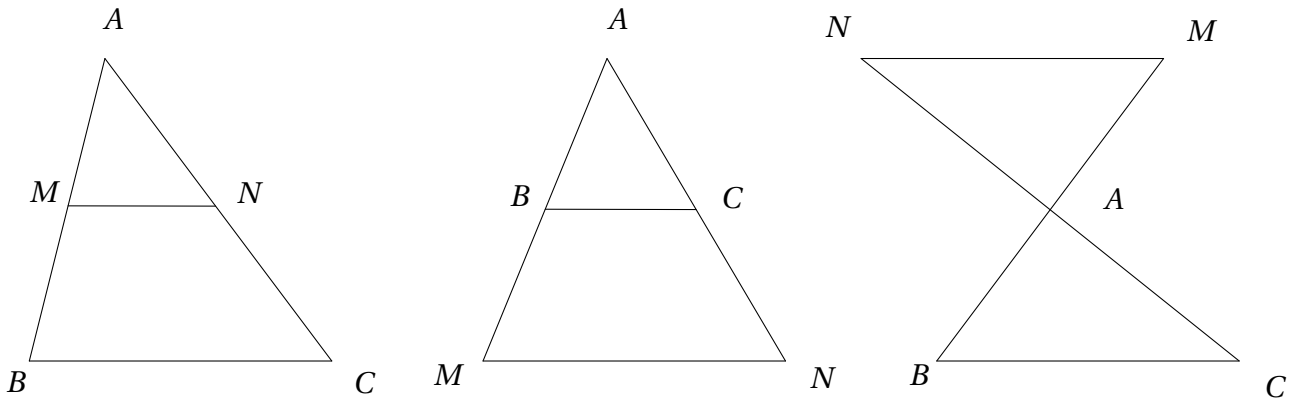
I Rappel de cours

1 Théorème de Thalès

▸ Cas d'un triangle

■ Théorème direct

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (BC).
Si (MN) est parallèle à (BC), alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles, donc on dit que les triangles ABC et AMN sont en position de Thalès ou en configuration de Thalès

■ Conséquences

Si les triangles AMN et ABC sont en position de Thalès, alors on a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

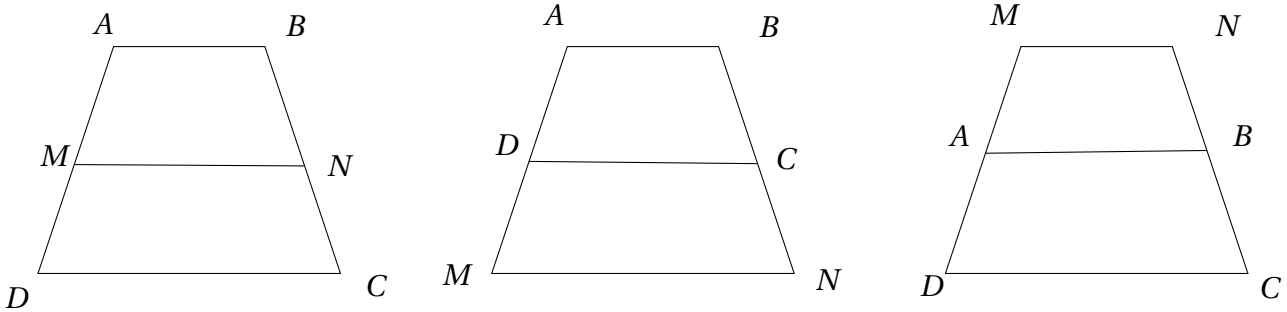
■ Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, M et B sont alignés d'une part dans le même ordre que les points A, N et C d'autre part et si de plus $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

▸ Cas d'un trapèze

■ Théorème direct

Soit $ABCD$ un trapèze de bases (AB) et (CD), M un point de (AD) et N un point de (BC).
Si $(MN)//(AB)//(DC)$, alors : $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{BN}{BC}$.



Les droites (AB), (MN) et (DC) sont parallèles, donc on dit que les trapèzes $ABCD$ et $ABNM$ sont en position de Thalès.

Conséquences

Si les trapèzes $ABCD$ et $ABNM$ sont en positions de Thalès, alors on a : $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{DC}$

Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, M et D sont alignés d'une part dans le même ordre que les points B, N et C d'autre part et si de plus $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$, alors les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

2 Partage d'un segment dans rapport donné

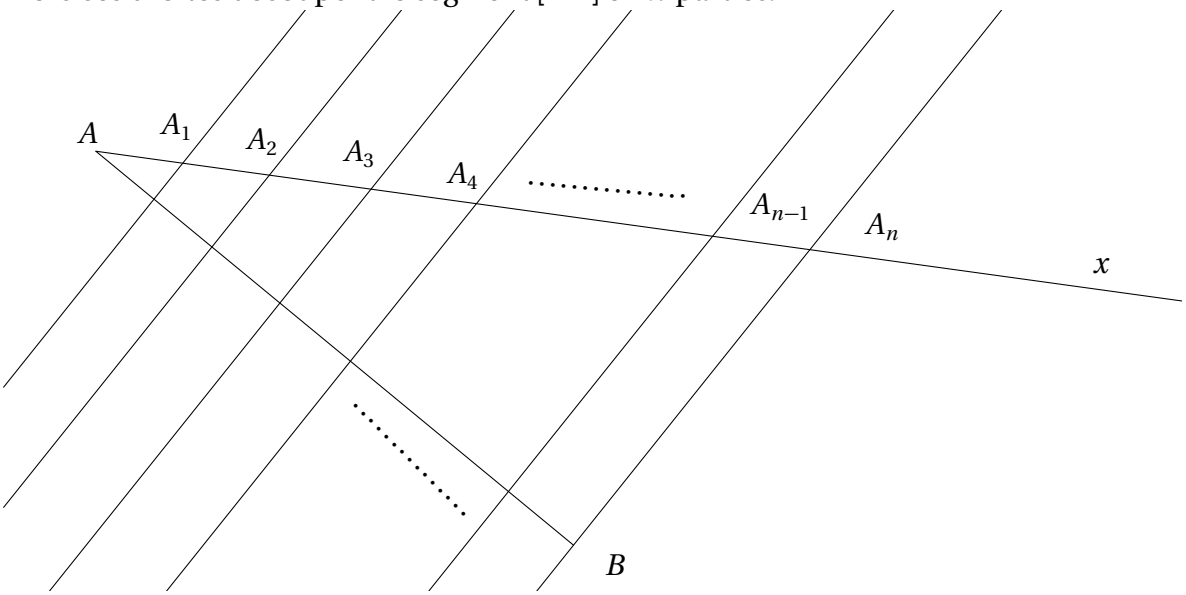
Pour partager un segment $[AB]$ en n parties de même longueur, où n est un entier naturel supérieur à 2, on procède comme suit :

- On trace le segment $[AB]$
- On trace une demi droite $[Ax)$ sécante à la droite (AB).
- Sur cette demi-droite, on place les n points A_1, A_2, $\cdots$,A_{n-1}, A_n. tels que :

$AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n$

- On trace la droite (A_nB) et toutes les autres droites parallèle à (A_nB) passant respectivement par les points $A_1, A_2, \cdots A_n$

Alors ces droites découpent le segment $[AB]$ en n parties.



3 Exercice d'application

Énoncé

$ABCD$ étant un trapèze tel que $(AB)//(CD)$ et M un point de $[BC]$ tel que $BM = \frac{1}{4}BC$.

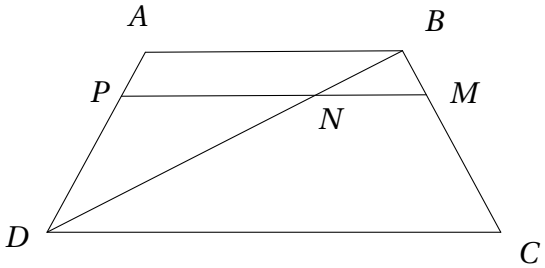
La parallèle à (AB) passant par M coupe $[BD]$ en N et $[AD]$ en P.

1. Montre que $BN = \frac{1}{4}BD$. En déduire que $DN = \frac{3}{4}DB$.

2. Montre que $DP = \frac{3}{4}DA$. En déduire que $AP = \frac{1}{4}AD$.

3. Montre que $MP = \frac{3AB + DC}{4}$.

Solution



1. Montrons que $BN = \frac{1}{4}BD$

M. GUEYE 77 135 23 62

Les droites (AB) et (PM) sont parallèles, donc les triangles BMN et BDC sont en position de Thalès. D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{BN}{BD}=\frac{BM}{BC}$ or $BM=\frac{1}{4}BC$, donc $\frac{BN}{BD}=\frac{1}{4}\Longrightarrow BN=\frac{1}{4}BD$.

• Déduisons-en que $DN=\frac{3}{4}DB$.

Les points B, N et D sont alignés, donc : $DN=DB-BN$ or $BN=\frac{1}{4}BD\Longrightarrow DN=DB-\frac{1}{4}BD=\frac{3}{4}DB$.

2. Montrons que $DP=\frac{3}{4}DB$.

Les triangles PDN et DAB son en position de Thalès et d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{DP}{DA}=\frac{DN}{DB}$ or $DN=\frac{3}{4}DB$, donc $\frac{DP}{DA}=\frac{3}{4}\Longrightarrow DP=\frac{3}{4}DA$.

• Déduisons-en que $AP=\frac{1}{4}AD$

$AP=DA-DP=DA-\frac{3}{4}DA=\frac{1}{4}DA$

3. Montrons que $MP=\frac{3AB+DC}{4}$.

$MP=PN+NM$. Exprimons PN en fonction de AB et MN en fonction de DC.

$\frac{DP}{DA}=\frac{DN}{DB}=\frac{PN}{AB}\Longrightarrow\frac{PN}{AB}=\frac{3}{4}\Longrightarrow PN=\frac{3}{4}AB$ (1)

D'autre part $\frac{BN}{BD}=\frac{BM}{BC}=\frac{MN}{DC}\Longrightarrow\frac{MN}{DC}=\frac{1}{4}\Longrightarrow MN=\frac{1}{4}DC$ (2).

D'après (1) et (2) $MP=\frac{3}{4}AB+\frac{1}{4}DC=\frac{3AB+DC}{4}$.

II Exercices

Exercice 1

On considère les figure suivantes dont les données de chacune sont indiquées ci-contre.

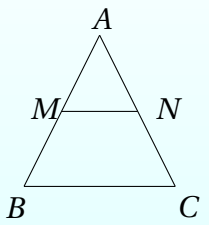


figure 1

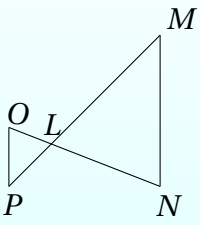


figure 2

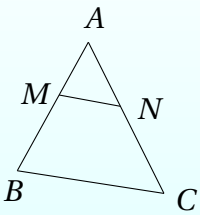


figure 3

1. Calcule la distance AN de la figure 1
2. Calcule la distance PL de la figure 2
3. Calcule la distance NC de la figure 3

Données de la figure 1 :

$(MN)//(BC)$; $AM=5$ cm; $MB=6$ cm et $AC=8$ cm

Données de la figure 2 :

$(OP)//(MN)$; $OL=57$ cm; $LM=60$ cm et $LN=75$ cm

Données de la figure 3 :

$(MN)//(BC)$; $AM=6$ cm; $MB=3$ cm et $AN=10$ cm

Exercice 2

1. Construis un triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.
2. Calcule BC
3. Place le point M, tel que $AM = \frac{1}{3}AB$.
4. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
a) Compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$
b) En déduire que $AN = \frac{1}{3}AC$

Exercice 3

1. Trace un triangle ABC, tel que $AB = 6$ cm ; $AC = 4,8$ cm et $BC = 8,4$ cm.
Sur la demi-droite d'origine B contenant A, place le point E, tel que $BE = 11cm$.
Sur la demi-droite d'origine C contenant A, place le point F, tel que $CF = 8,8$ cm
2. Calcule AE et AF
3. Démontre que $(EF)//(BC)$
4. Calcule EF

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = 12,8$ cm et $AC = 9,6$ cm.
1. Calcule BC
2. Place les points E et F, tels que $E \in [AB]$; $F \in [BC]$; $AE = 8$ cm et $BF = 6$ cm.
Les droites (EF) et (AC) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse

Exercice 5

1. Construis un triangle ABC, tel que $AB = 8$ cm ; $AC = 6$ cm et $BC = 10$ cm.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? justifie
3. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Calcule AH et CH.
4. La parallèle à (AH) passant par B coupe (AC) en M. Calcule CM et BM

Exercice 6

Dans un plan, on considère un triangle ABC rectangle en B, tel que $AB = 2$ cm et $BC = 1$ cm.
1. Faire une figure soignée.
2. Calcule AC.
3. On considère le point D, tel que B soit un point du segment $[AD]$ et $AD = 8$ cm.
Soit E le point de la droite (AC), dont la projection orthogonale sur (AB) est D.
a) Montre que les droites (BC) et (DE) sont parallèles et en déduire en appliquant le théorème de Thalès que $AE = 4\sqrt{5}$.
b) Calcule DE.

Exercice 7

Un champ à la forme d'un triangle ABC rectangle en A. On donne $AB = 40$ m et $AC = 30$ m

1. Construis la figure à l'échelle 1/1000.

2. Par un point M du côté $[AB]$distinct de A et B du champ, on trace une perpendiculaire à (AB) et qui coupe le côté$[BC]$ en K. On pose $BM = x$. Calcule MK en fonction de x en utilisant le théorème de Thalès.

3. Sachant que l'aire du triangle BMK est égale au quart de l'aire du triangle ABC, calcule alors la valeur de x.

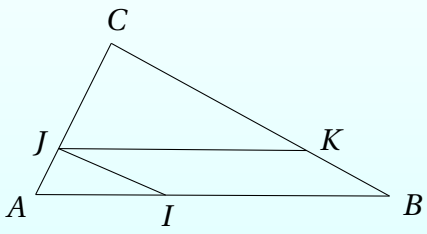
Exercice 8

Sur la figure ci-dessous :

► $I \in [AB]$ et $AI = \frac{2}{7}AB$;

► $J \in [AC]$ et $(IJ)//(BC)$;

► $K \in [JK]$ et $(IJ)//(AB)$



1. Démontre que $AJ = \frac{2}{7}AC$.

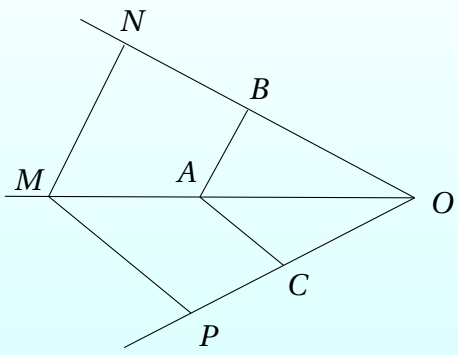
2. Démontre que $CK = \frac{5}{7}CB$.

Exercice 9

Sur la figure suivante :

► les points O ; A et M sont alignés, ainsi que les points O ; B et N et les points O ; C et P.

► $(MN)//(AB)$ et $(MP)//(AC)$



M. GUEYE 77 135 23 62

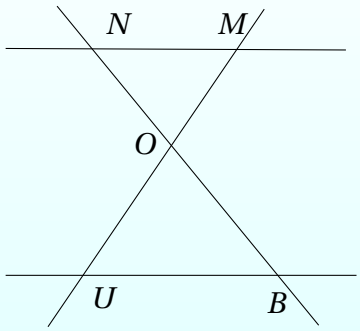
1. Montre que $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$.
2. Montre que les droites (NP) et (BC) sont parallèles.

Exercice 10

1. Construis un triangle RST rectangle en R tel que : $ST = 8$ cm et $RT = 4,8$ cm.
2. Montre par calcule que $RS = 6,4$ cm.
3. Sur une demi-droite $[RT)$, place un point U tel que $RU = 6$ cm.
Sur la Demi-droite $[RS)$, place un point V tel que $RV = 8$ cm.
a) Montre que les droites (TS) et (UV) sont parallèles.
b) Calcule la longueur UV.

Exercice 11

Sur la figure ci-dessous, $O \in [UM]$, $O \in [BN]$ et les droites (MN) et (BU) sont parallèles.
L'unité de longueur étant le centimètre, on donne :
$MN = 10$; $OM = 6$; $ON = 8$ et $MU = 8,7$



1. Reproduis la figure en vraie grandeur
2. Calcule les longueurs BU et BO.
3. S et T sont deux points tels que :
$S \in [MN]$; $NS = 8$; $T \in [ON]$ et $NT = 6,5$.
Les droites (TS) et (OM) sont-elles parallèles ? Justifie.

Exercice 12

ABC est un triangle, E est un point de $[AB]$ tel que $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$.
► La droite parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) au point F.
► La droite parallèle à (AB) passant par F coupe la droite (BC) en G.
► La droite parallèle à (AC) passant G coupe la droite (AB) en H.
► Les droites (EF) et (GH) se coupent au point I.
Démontre que :
1. $\frac{AH}{AB} = \frac{1}{3}$.
2. H est le milieu du segment $[AE]$.

3. $\dfrac{HI}{AF} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13

Soient F ; A et B trois points alignés dans cet ordre sur une droite (D) tels que $FA = 4$ cm et $AB = 6$ cm. $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AF]$. Place un point C sur le cercle $(\mathscr{C})$ tel que $BC = 3$ cm.

1. Donne en justifiant, la nature du triangle ABC.

2. Calcule la longueur AC.

3. La droite (AC) coupe le cercle $(\mathscr{C}')$ en E.

a) Donne en justifiant, la nature du triangle AEF puis démontre que $(BC)//(EF)$.

b) Calcule les longueurs AE et EF.

Exercice 14

Soit le triangle ABC tel que $AB = 5,2$ cm ; $BC = 3,9$ cm et $AC = 4,8$ cm. M est le point du côté $[AB]$ tel que $AM = 4$ cm.

1. La parallèle à (BC) passant par M coupe le côté$[AC]$ en N. Calcule la longueur MN.

2. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (MN) en I et (BC) en J. Calcule $\dfrac{AI}{AJ}$.

3. Soit A' un point de la parallèle à (BC) passant par A, on appelle respectivement M' et N' les intersections de $(A'B)$ et $(A'C)$ avec la droite (MN).

a) Calcule $\dfrac{A'M'}{A'B}$.

b) Calcule $M'N'$.

Exercice 15

1. Trace un segment $[EF]$ de longueur 10 cm, puis un demi-cercle de diamètre $[EF]$.
Place le point G sur le demi-cercle tel que $EG = 9$ cm.

a) Démontre que le triangle EFG est rectangle.

b) Calcule la longueur GF arrondie au mm.

2. Place le point M sur le segment $[EG]$ tel que $EM = 5,4$ cm et le point P sur le segment $[EF]$ tel que $EP = 6$ cm.
Démontre que les droites (FG) et (MP) sont parallèles.

Exercice 16

1. Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O de rayon 4 cm et $[AD]$ un de ses diamètres.

a. Dans l'un des demi-plan de frontière (AD),construis le point G tel que le triangle ADG soit équilatéral.

b. Dans l'autre demi-plan, place le point B du cercle tel que $AB = 4$ cm.

2. Démontre que le triangle OAB est équilatéral.

3. Justifie que les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{ADG}$ sont égaux puis déduis-en la position relative des droites (AB) et (DG).

4. La droite (BG) coupe (AD) en I et $(\mathscr{C})$ en J. En utilisant le théorème de Thalès ,justifie que $\frac{IA}{ID} = \frac{1}{2}$

Exercice 17

Soit ABC un triangle tel que $BC = 8$ cm et soit x un réel appartient à $]0, 4[$.
On désigne par E et F les points du segment $[BC]$ tels que $BE = CF = x$.
La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en J et la parallèle à (AC)passant par F coupe (AB) en N.

1. a) Compare : $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{CE}{CB}$ ainsi que $\frac{AJ}{AC}$ et $\frac{BE}{BC}$.

b) En déduire que (NJ) et (BC) sont parallèles.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $NBEJ$? Détermine alors la valeur de x pour laquelle $NJFE$ soit un parallélogramme.

3. Les droites (EJ) et (FN) se coupent en I et (AI) coupe (BC) en M.

a) Compare : $\frac{ME}{BE}$; $\frac{MI}{AI}$ et $\frac{MF}{CF}$.

b) Déduis que M est le milieu de $[BC]$.

Exercice 18

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AB = \alpha$ et $CD = \beta$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en K.

1. Montre que $\frac{KB}{KD} = \frac{\alpha}{\beta}$.

2. Fais un figure, puis construis le point H du segment $[AD]$ tel que $DH = \frac{5}{6}DA$.

a) Vérifie que $\frac{DB}{DK} = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$.

b) Montre que si $\beta = 5\alpha$, alors (KH) et (AB) sont parallèles.

3. Dans cette question, on prend $\alpha = 1$ et $\beta = 5$. La droite (KH) coupe (BC) en P.

a) Montre que K est le milieu de $[HP]$.

b) Montre que $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{5}$

Exercice 19

Soit $ABCD$ un rectangle de 12 cm de longueur et de 9 cm de largeur. E est un point de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F et la parallèle à (CD) passant F coupe (AD) en G.

1. On suppose dans cette question que $AE = 3$ cm.

a) Montre que $AC = 15$ cm.

b) Calcule AF.

2. Montre que $(EG)//(BD)$.

3. On suppose dans cette question que $AE = x$.

a) Quelle est la valeur minimale et la valeur maximale de x ?

b) Montre que $AG = \frac{3}{4}x$.

c) Exprime le périmètre du rectangle $AEFG$ en fonction de x.

M. GUEYE 77 135 23 62

I Rappel de cours

1 Définitions :

■ Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

■ Sinus d'un angle aigu

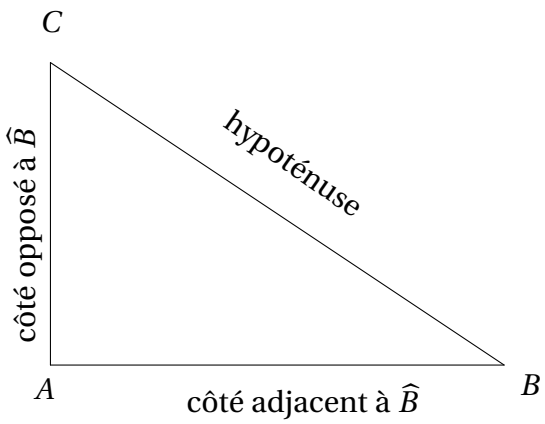
Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

■ Tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

■ Exemples :

Soit ABC un triangle rectangle en A :



Le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ sont les nombres, notés respectivement $\cos\widehat{ABC}$, $\sin\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$ définis par :

- $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à } \widehat{B}} = \dfrac{AC}{AB}$.

2 Propriétés :

Quel que l'angle aigu α ($\alpha < 90^o$), on a :

- $0 < \sin\alpha < 1$.
- $0 < \cos\alpha < 1$.
- $\tan\alpha > 0$

3 Relations entre cosinus, sinus et tangente :

■ Angles complémentaires :

Si deux angles sont complémentaires, alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

■ **Propriété des carrés :**

Quel que soit l'angle aigu α, on a :

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

■ **Relations entre cosinus, sinus et tangente :**

Quel que soit l'angle aigu α, on a :

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

4 Valeurs remarquables :

Angle α	30^o	45^o	60^o
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5 Exercice d'application :

■ **Énoncé :**

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = 4$ cm et $BC = 9$ cm.

1. Calcule la longueur de AC.

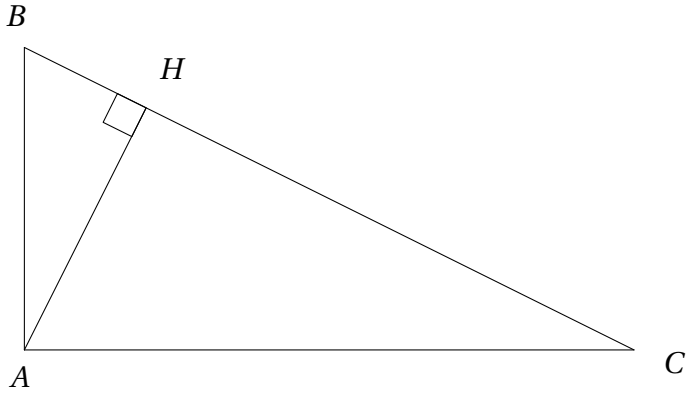
2. Soit H le projection orthogonale de A sur (BC).

Exprime $\cos\widehat{ABC}$ de deux façons différentes. Utilise ce résultat pour calculer BH.

3. Calcule AH dans le triangle ABH.

4. Calcule $\cos\widehat{HAC}$. Utilise ce résultat pour montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$

■ **Solution :**



1. Calculons AC

Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème Pythagore $AC^2 = BC^2 - AC^2 \Longrightarrow$
$AC^2 = 9^2 - 4^2 = 81 - 16 = 65 \Longrightarrow AC = \sqrt{65}$

2. Exprimons de deux façons différentes $\cos\widehat{ABC}$.

En considérant le triangle ABC rectangle en A, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$.

En considérant le triangle AHB rectangle en H, $\cos\widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB}$ or $H \in (BC)$, donc $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$.

D'où $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB}$

Utilisons ce résultat pour calculer BH.

$$\text{On a } \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \iff BH \times BC = AB \times AB$$
$$\iff BH = \frac{AB^2}{BC}$$
$$\iff BH = \frac{16}{9}$$

3. Calcule AH.
Le triangle AHB est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AB^2 - BH^2 \Longrightarrow$
$AH^2 = 16 - \dfrac{256}{81} = \dfrac{1040}{81} \Longrightarrow AH = \dfrac{4\sqrt{65}}{9}$

4. Calculons $\cos\widehat{HAC}$.

En considérant le triangle AHC rectangle en H, $\cos\widehat{AHC} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\dfrac{4\sqrt{65}}{9}}{\sqrt{65}} = \dfrac{4}{9}$ $(\star)$.

Utilisons ce résultat pour montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$.

En considérant le triangle ABC rectangle en A, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{9}$. D'après la relation $(\star)$
$\cos\widehat{ABC} = \cos\widehat{HAC} \Longrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{HAC}$

II Exercices

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A.
1. Exprime $\cos\widehat{ABC}$, $\sin\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.
2. a) Montre que $(\cos\widehat{ABC})^2 + (\sin\widehat{ABC})^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$.
b) En déduire que $(\cos\widehat{ABC})^2 + (\sin\widehat{ABC})^2 = 1$.
3. a) Exprime $\dfrac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.
b) En déduire que $\dfrac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}} = \tan\widehat{ABC}$

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en C tel que : $CB = 4$ cm et $AC = 3$ cm.
Calcule : $\sin\widehat{ABC}$, $\cos\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 60^o$.
Calcule BC et AC

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = 8$ cm et $AC = 4$ cm.
1. Calcule longueur BC.
2. Soit H le projet orthogonal de A sur (BC). On donne $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.
a) Calcule BH, CH et AB.
b) La parallèle à (AH) passant par C coupe (AB) en E. Calcule AE puis déduis-en EC.
c) Calcule $\sin\widehat{AEC}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Exprime $\sin\widehat{ABC}$ et $\sin\widehat{ACB}$ en fonction de AH, AB et AC.

2. En déduis que $\dfrac{AH^2}{AB^2}+\dfrac{AH^2}{AC^2}=1$, puis que $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}$

Exercice 6

1. Trace un triangle LMN, rectangle en L, tel que $MN=6$ cm et $LN=4$ cm.
Montre que $LM=2\sqrt{5}$ cm.

2. Trace un demi-cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, de rayon 5 cm et d'extrémités B et C. Au compas, place le point A du demi-cercle tel que $CA=LM$.
Soit D un point d'intersection du demi-cercle et de la perpendiculaire en O à la droite (BC), et I celui des droites (OD) et (AB).

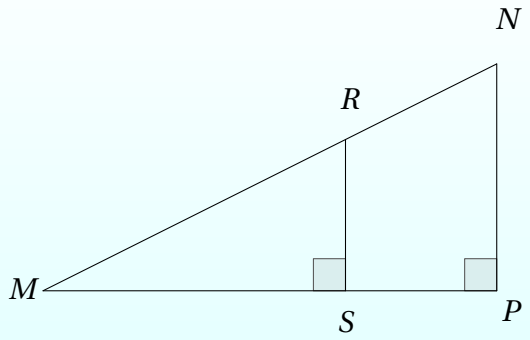
a) Calcule, en justifiant, la valeur exacte de AB.

b) Montre que $\tan\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$.

En déduis que le point I est le milieu de $[OD]$

Exercice 7

On donne la figure ci-dessous dans laquelle les dimensions ne sont pas respectées. L'unit'e de longueur est le centimètre.



Le triangle MNP est rectangle en P avec $MP=6$ et $NP=2\sqrt{3}$. Le triangle MRS est rectangle en S avec $MR=5$. Les points M, R et N sont alignés, les points M, S et P sont alignés.

1. Détermine la valeur de l'angle $\widehat{PMN}$.

2. En déduis la longueur de RS.

3. Calcule la distance MS ; l'arrondis au millimètre.

Exercice 8

MNP est un triangle tel que :
$MN=10$ cm, $MP=5$ cm et $NP=5\sqrt{3}$ cm.

1. Démontre que le triangle MNP est un triangle rectangle.

2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$.

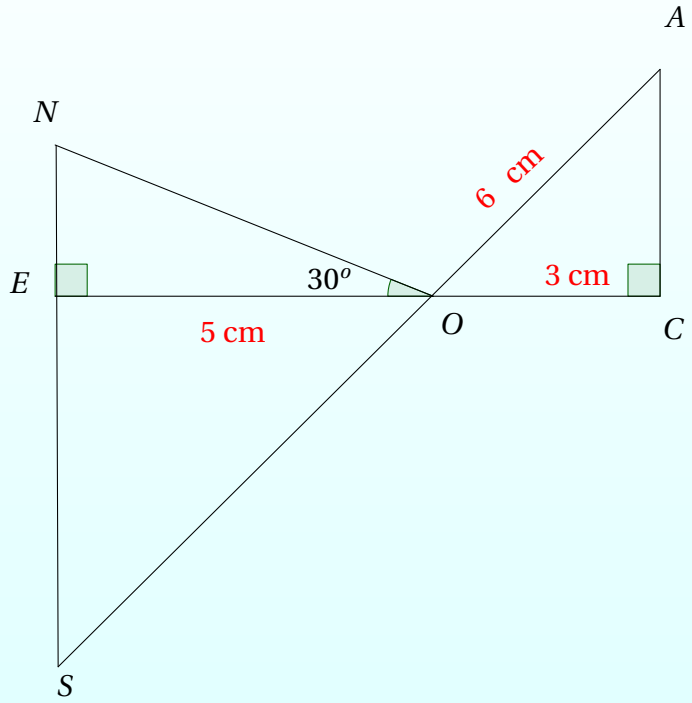
3. Le point I est le point de la hauteur issue de P.
Calcule PI et donne le résultat sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un nombre entier naturel.

4. Calcule la valeur exacte de l'aire du triangle MNP.

5. Le point J est le pied de la hauteur issue de I dans le triangle MIP. Calcule la longueur IJ.

Exercice 9

On sait que :
► $EO = 5$ cm, $OC = 3$ cm et $OA = 6$ cm.
► Les points E, O et C sont alignés ;
► Les triangles ENO et OCA sont respectivement rectangles en E et C ;
► La droite (AO) coupe la droite (NE) en S.



1. Montre que la mesure du segment $[AC]$, en centimètre, est $3\sqrt{3}$.
2. a) Montre que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.
b) Calcule les valeurs exactes de OS et de ES.
3. Calcule NE sachant que $\widehat{NOE} = 30^o$.
4. a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{COA}$.
b) Démontre que le triangle SON est rectangle

Exercice 10

Soit un cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon 4 cm. A et B sont deux points de $(\mathscr{C})$ diamétralement opposés et M un point de $(\mathscr{C})$ tel que $AM = 4$ cm.
1. Justifie que AMB est un triangle rectangle.
2. Quelle est la nature de du triangle AMI.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{BIM}$.
4. K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).
En remarquant que $\widehat{BAM} = \widehat{KAI}$, calcule AK et KI.
5. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).
a) Calcule $\cos\widehat{B}$ de deux façons différentes.
b) Exprime BH en fonction de $\cos\widehat{B}$ puis démontre que $BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.
6. Soit E un point du segment $[AM]$ tel que $AE = 3$ cm. La parallèle à (IM) passant par E coupe le segment $[AI]$ en F.
Quelle est la nature du triangle AEF ?

Exercice 11

Soit un demi-cercle de centre $(\mathscr{C})$ O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2r$ et M un point de ce demi-cercle, plus proche de B que de A.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? justifie ta réponse.

2. soit α et β les mesures respectives des angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{BOM}$ et C le pied de la hauteur du triangle AMB issue de M.

a) Donne deux expressions de $\cos\alpha$.

b) Déduis-en que $AC = AM \times \cos\alpha$ et $AM^2 = AB \times AC$.

c) On sait que $AC = AO + OC$.

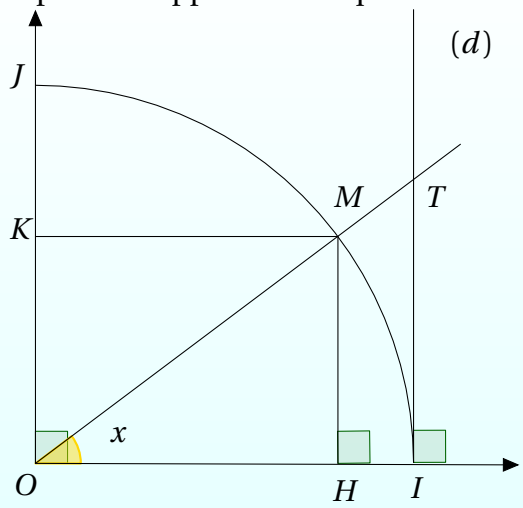
Exprime OC en fonction de $\cos\beta$ et de r. Déduis-en que $AC = r(1 + \cos\beta)$.

d) Déduis des questions précédentes que $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos\beta}{2}$

Exercice 12

Dans le repère ci-dessous, $OI = OJ = 1$.

Le point M appartient au quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ de centre O et de rayon 1.



Le point H est le pied de la perpendiculaire à la droite (OI) passant par le point M.

Le point K est le pied de la perpendiculaire à la droite (OJ) passant par le point M.

La droite (d) est la tangente en I au quart de cercle.

La droite (OM) coupe la droite (d) au point T.

1. Démontre que $OH = \cos x$.

2. Démontre que $OK = \sin x$.

3. a) Démontre que $\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{MH}{TI}$.

b) En déduis que $TI = \tan x$

Exercice 13

RST est un triangle rectangle en R.

Le point M est le pied de la hauteur issue de R.

On veut calculer la longueur RS.

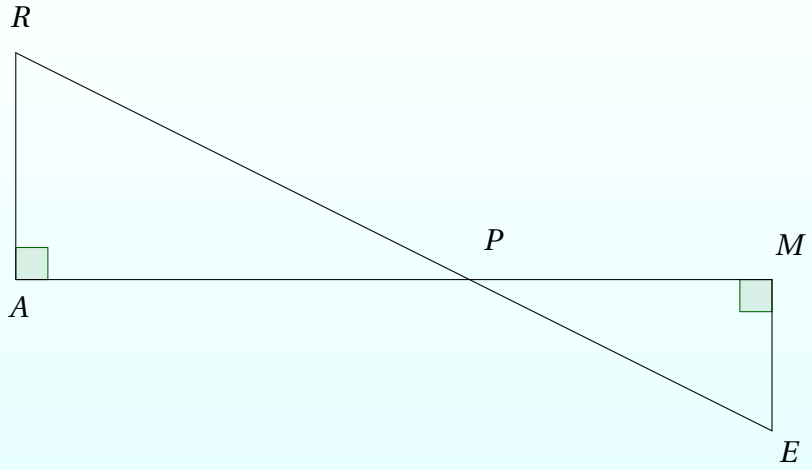
1. a) Exprime $\cos x$ dans le triangle RST.

b) $\cos x$ dans le triangle RSM.

2. Déduis des questions précédentes la longueur RS.

Exercice 14

La figure n'est pas réalisée en vraie grandeur.
Les points R, P et E sont alignés ainsi que les points A, P et M.



1. PAR est un triangle rectangle en A.
On donne $AR = 2$ cm et $RP = 4$ cm.
Calcule AP et l'exprime sous la forme de $a\sqrt{b}$ où a et b des entiers.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{RPA}$.
3. Explique pourquoi les angles $\widehat{RPA}$ et $\widehat{MPE}$ ont la même mesure.
4. PME est un triangle rectangle en M.
On donne $ME = 3$ cm.
a) Calcule la valeur exacte de la longueur de PE.
b) Calcule la valeur exacte de la longueur PM puis la valeur arrondie au millième près.

Exercice 15

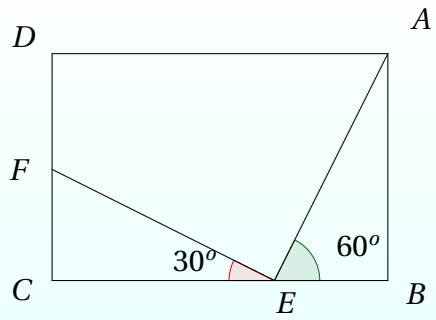
Soit ABC un triangle rectangle en B. On donne $AB = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 30^o$.
1. Construis la figure en vraie grandeur.
2. On note H le pied de la hauteur issue de B.
Calcule, en centimètre, la longueur du segment $[AH]$, puis arrondie au millième près.
3. Calcule, en centimètres, la longueur du segment $[BC]$, arrondie au millimètre près

Exercice 16

1. Construis un triangle ABC rectangle en A, tel que :
$AB = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 30^o$.
2. Calcule la longueur AC.
3. La perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point C coupe la droite (AB) en E.
a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{CEB}$.
b) En déduire une valeur approchée de la longueur EC.
4. Place le point O du segment $[BC]$ tel que $BO = 5$ cm.
Trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O passant le point B. Il recoupe la droite (AB) en Fet la droite (BC) en G.
a) Quelle est la nature du triangle BFG ? Justifie la réponse.
b) En déduire la longueur BF. On donnera la valeur approchée arrondie au dixième.

Exercice 17

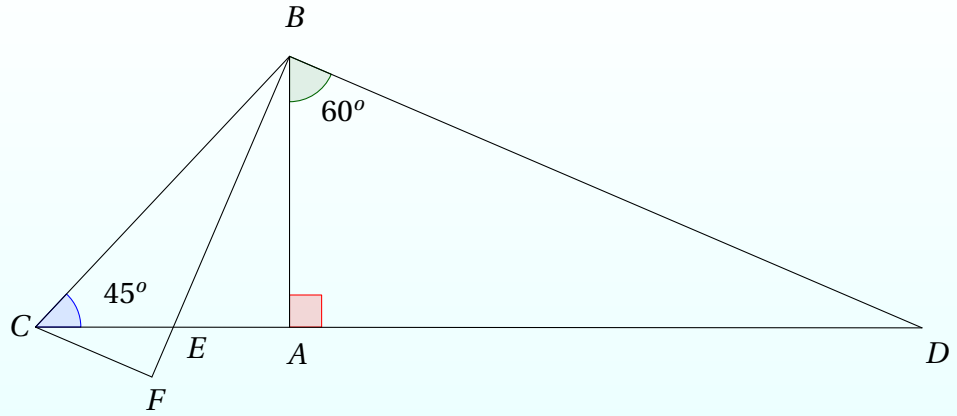
Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un rectangle, $BE = CF = 1$ cm



1. Calcule AE et AB.
2. Calcule EF et CE.
3. Détermine la nature du triangle AEF, puis calcule AF.
4. a) Détermine AD et FD.
b) Calcule la mesure de $\widehat{DAF}$.
c) En déduire $\cos(15^o)$, $\sin(15^o)$ et $\tan(15^o)$.
5. La bissectrice de l'angle $\widehat{AFE}$ coupe (AE) en I. Soit H le projeté orthogonal de I sur (AF).
a) Montre que AHI est un triangle rectangle et isocèle en H.
b) En déduire que $EI = 2(\sqrt{2}-1)$ puis calcule $\tan(22,5^o)$.
6. Calcule $\cos(22,5^o)$ et $\sin(22,5^o)$.

Exercice 18

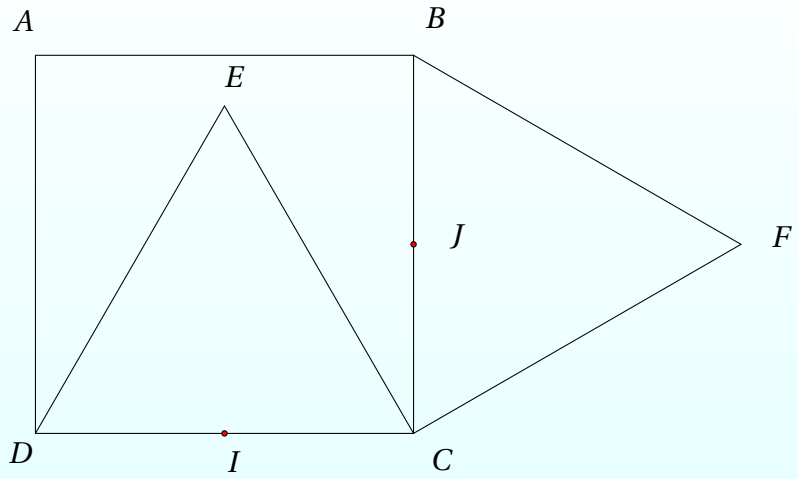
Dans la figure ci-dessous, on donne $\widehat{ABD} = 60^o$; $\widehat{BCA} = 45^o$ et $BC = 4\sqrt{2}$.



1. Calcule la longueur AB.
2. En déduire que $BD = 8$ et $DC = 4(1+\sqrt{3})$.
3. La perpendiculaire à (BD) passant par B coupe (DC) en E, et la perpendiculaire à (BE) passant C coupe (BE) en F.
a) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BEA}$.
b) Montre que $BE = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ et que $AE = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
c) En déduire que $CE = \dfrac{12-4\sqrt{3}}{3}$ et que $DE = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.
4. a) Montre que $\dfrac{CF}{BD} = \dfrac{CE}{ED}$.
b) En déduire que $CF = 2(\sqrt{3}-1)$.
5. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CBF}$ puis la valeur exacte de $\cos(75^o)$

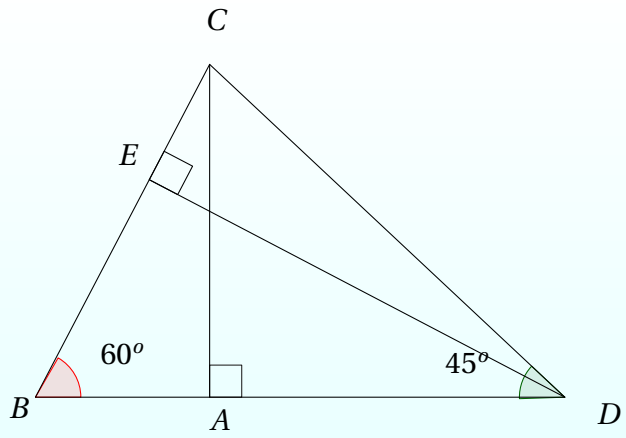
Exercice 19

Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un carré tel que $AB = 6$ cm ; BCF et DEC sont deux triangles équilatéraux ; les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[BC]$.



1. Construis les points H et K les projetés orthogonaux de E et F respectivement sur (AB).
2. a) Montre que $AHID$ est un rectangle, puis calcule EH.
b) Montre que $BKFJ$ est un rectangle et en déduire la longueur FK.
3. a) Détermine $\tan(\widehat{HAE})$.
b) Détermine $\tan\widehat{FAK}$.
c) Déduis-en que les points A, E et F sont alignés.
4. La droite (EC) coupe (AB) en M.
5. montre que $CM = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ et que $AM = \dfrac{12-\sqrt{3}}{3}$

Exercice 20



Dans la figure ci-dessus, on donne $AB = 2$ cm.
1. Détermine les longueurs BC ; AC et CD.
2. Vérifie que $DB = 2+2\sqrt{3}$ puis détermine les longueurs ED, EB et EC.
3. a) Évalue les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{EDC}$.
b) Montre que $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos 15^o = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
c) En déduire que $\tan 15^o = 2-\sqrt{3}$.
4. Les droites (DE) et (CA) se coupent en O et (BO) coupe (DC) en H. Montre que BHC est un triangle rectangle en H et en déduire que $CH = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

Exercice 21

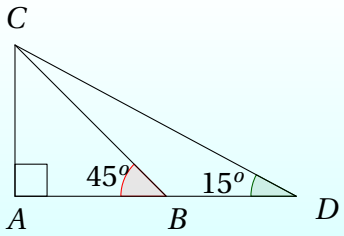
Dans la figure ci-contre, On pose $AB = BD = x$.
On donne $DC = 1$

1. La perpendiculaire à (DC) en D coupe (BC) en M.

2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$.

3. a) Exprime $\cos(15^o)$ en fonction de x

b) Déduis que $\cos(45^o) + \cos(75^o) = \cos(15^o)$



Exercice 22

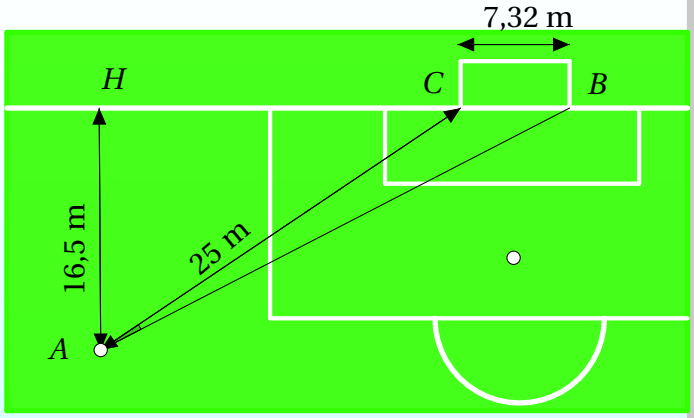
Sur un terrain de football, un jour A se trouve à 16,5 m de la ligne de but et à 25 m du côté C le plus proche. On considère que (AH) et (CH) sont perpendiculaires. La largeur du but BC est de 7,32 m.

1. Calcule les distances HC et HB.

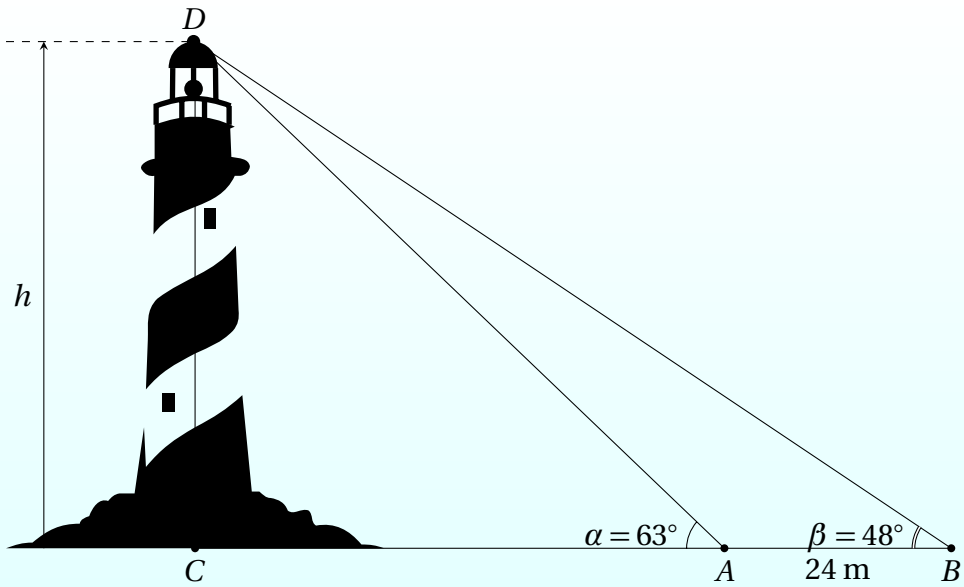
2. Calcule $\cos(\widehat{HAC})$.

3. Calcule $\tan(\widehat{HAB})$.

4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.



Exercice 23



Mouhamed Diaw , le topographe est sur le toit de sa maison et il veut déterminer la hauteur DC d'un minaret d'une mosquée.

Pour cela, il mesure avec un théodolite l'angle $\widehat{DAC}$. Il recule ensuite de 24 m, et mesure à nouveau l'angle obtenu.

Il est alors satisfait et en déduit la hauteur du minaret.

Détermine la hauteur DC du minaret arrondie au mètre près

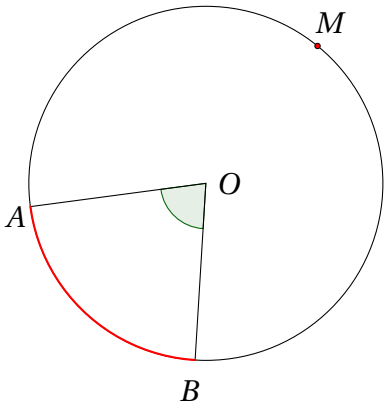
ANGLE INSCRIT ANGLE AU CENTRE

I Rappel de cours

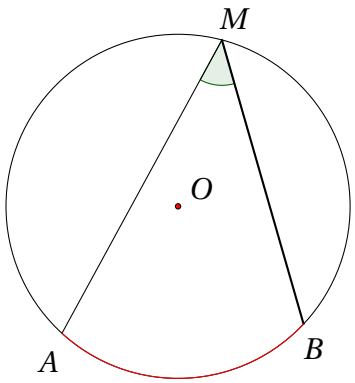
1 Angle inscrit et angle au centre associés

Vocabulaire

Soit A, M et B trois points d'un cercle de centre O.



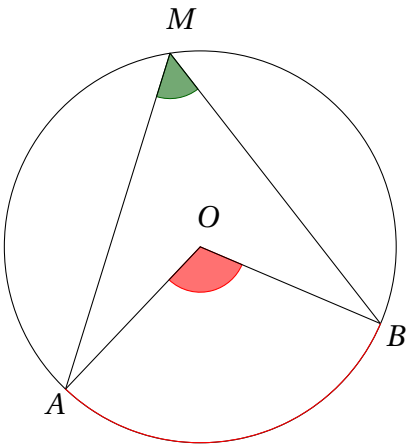
L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (en rouge)



L'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (en rouge)

Théorème de l'angle inscrit

La mesure de l'angle inscrit dans un cercle est égale à la moité de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

2 Polygones réguliers

Définition

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

■ **Exemple**

• Un triangle équilatéral à ses trois côtés de la même longueur.

• De plus, ses trois angles ont la même mesure.

Donc, un triangle équilatéral est un polygone régulier à trois côtés

■ **Propriétés**

• Tous les sommet d'un polygone régulier appartiennent à un même cercle.

On dit qu'un polygone régulier est inscrit dans un cercle.

Le centre de ce cercle est appelé centre du polygone régulier.

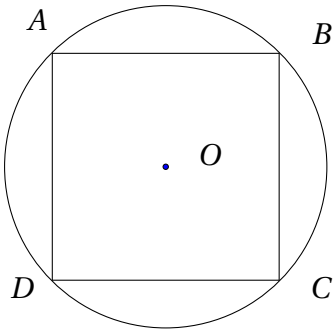
• Si un polygone a tous ses côtés de la même longueur et tous ses sommets qui appartiennent à un même cercle, alors ce polygone est régulier

► **Exemple**

• Un carré à ses quatre côtés de la même longueur.

• Un carré est inscrit dans un cercle.

Donc un carré est un polygone régulier à quatre côtés.

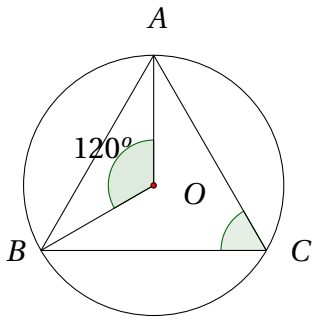


• On considère un polygone à n côtés de centre O, n désigne un nombre entier positif.

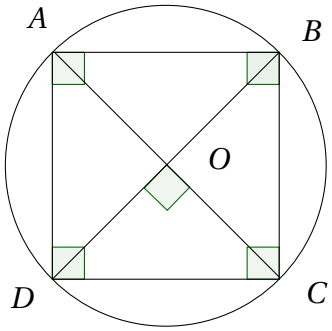
Les point A et B sont deux somment consécutifs de ce polygone.

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre du polygone et sa mesure est égale à $\frac{360^o}{n}$.

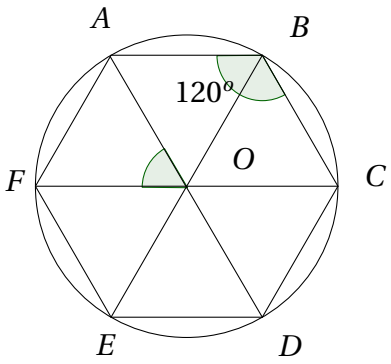
► **Exemple**



$n=3$; $\widehat{AOB}=\frac{360^o}{3}=120^o$



$n=4$; $\widehat{AOD}=\frac{360^o}{4}=90^o$



$n=6$; $\widehat{AOF}=\frac{360^o}{6}=60^o$

3 Exercice d'application

■ **Énoncé**

1. a) Construis un un cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon $r=4$ cm. A et B sont deux points du cercle $(\mathscr{C})$ diamétralement opposés. Place un point M sur $(\mathscr{C})$ tel que $AM=4$ cm.

b) Quelle est la nature de AMI ? Justifie la réponse

c) Déduis-en les mesures des angles du triangle MBI.

2. K est le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par I et la droite (AM).

a) Justifie que AMB est un triangle rectangle.

b) en remarquant que $\cos\widehat{BAM}=\cos\widehat{KAI}$. Calcule AK et KI.

3. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

a) Exprime $\cos\widehat{B}$ de deux façons différentes.

M. GUEYE 77 135 23 62

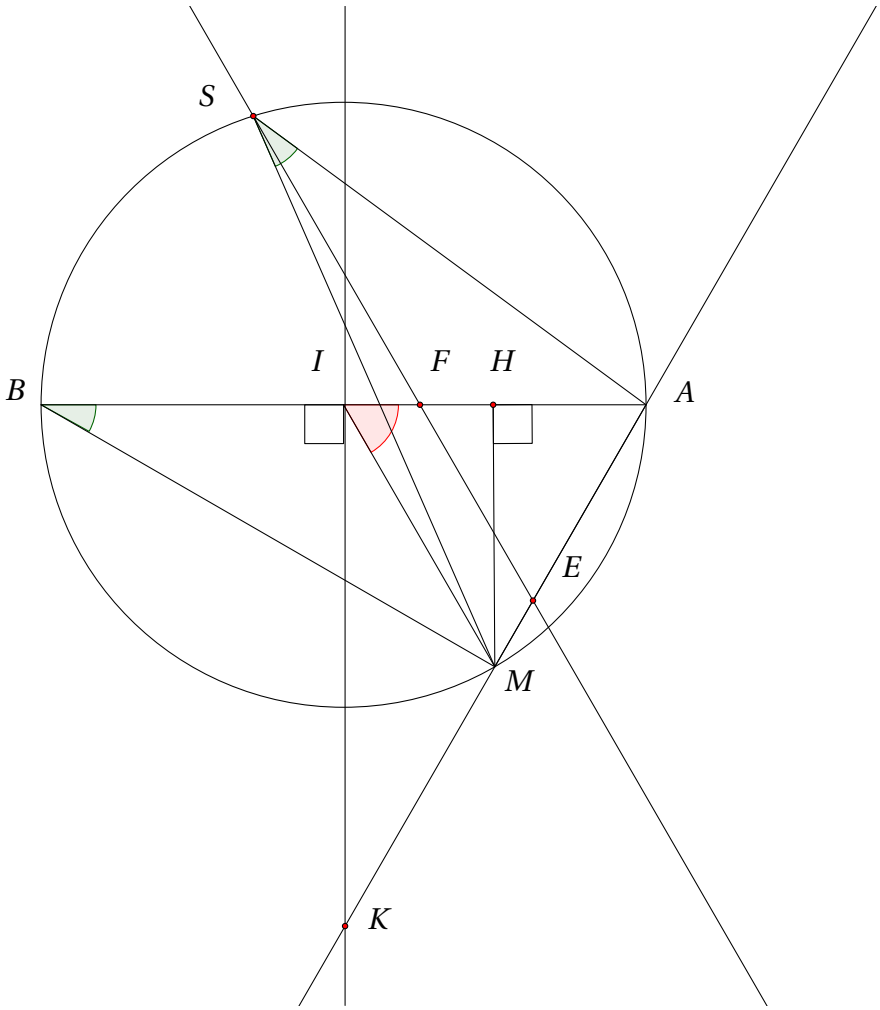
b) Démontre que $BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.

4. Place le point E sur $[AM]$ tel que $AE = 3$ cm. La parallèle à (MI) passant par E coupe $[AI]$ en F et $(\mathscr{C})$ en S.

a) Quelle est la nature du triangle AEF.

b) Montre que $\widehat{MBA} = \widehat{MSA}$.

Solution



1. b) Donnons la nature du triangle AMI, en justifiant la réponse.

On sait que $AM = 4$ cm et comme $A \in (\mathscr{C})$ et $M \in (\mathscr{C})$, donc $IA = IM = r = 4$ cm.

Alors $AM = IA = IM$, par conséquent le triangle AMI, est un triangle équilatéral.

c) Déduisons-en la mesure la l'angle $\widehat{MBA}$.

• $\widehat{MBA}$ est un angle inscrit à $(\mathscr{C})$ qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et $\widehat{MIA}$ un angle au centre qui intercepte le même arc, donc d'après le théorème de l'angle inscrit :

$\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MIA}$, or $\widehat{MIA} = 60^o$ (car le triangle MIA est équilatéral), donc $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2} \times 60^o = 30^o$,

or $I \in (BA)$, d'où $\widehat{MBI} = \widehat{MBA} = 30^o$.

• Comme $B \in (\mathscr{C})$ et $M \in (\mathscr{C})$, donc MBI est triangle isocèle, ce qui fait $\widehat{BMI} = \widehat{MBI} = 30^o$.

• $\widehat{BMI} + \widehat{MBI} + \widehat{BIM} = 180^o \Longrightarrow \widehat{BIM} = 180^o - 30^o - 30^o = 120^o$

2. b) Calculons AK et KI.

$$\cos\widehat{BAM} = \cos\widehat{KAI} \iff \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AK}$$

$$\iff AK = \frac{AI \times AB}{AM} = \frac{4 \times 8}{4} = 8.$$

Le triangle AKI est triangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$IK^2 = AK^2 - AI^2 = 64 - 16 = 48 \Longrightarrow IK = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

M. GUEYE 77 135 23 62

3. a) Exprimons $\cos\widehat{B}$ de deux façons différentes.

$\cos\widehat{B} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BH}{BM}$.

b) Démontrons que $BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.

On a $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BH}{BM} \iff BH = \dfrac{BM \times BM}{AB}$

$\iff BH = \dfrac{BM^2}{AB}$.

4.a) Déterminons la nature la nature du triangle AEF.

Comparons les distances AF, AE et EF.

Les triangles AIM et AEF sont en positions de Thalès.

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AF}{AI} = \dfrac{EF}{IM}$.

- $\dfrac{AF}{AI} = \dfrac{AE}{AM} \iff AF = \dfrac{AE \times AI}{AM} = \dfrac{3 \times 4}{4} = 3$ $(\star)$
- $\dfrac{EF}{IM} = \dfrac{AE}{AM} \iff EF = \dfrac{AE \times IM}{AI} = \dfrac{3 \times 4}{4} = 3$ $(\star\star)$.

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on a $AF = AE = EF$, donc le triangle AEF, est un triangle équilatéral.

b) Démontrons que $\widehat{MBA} = \widehat{MSA}$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on a :

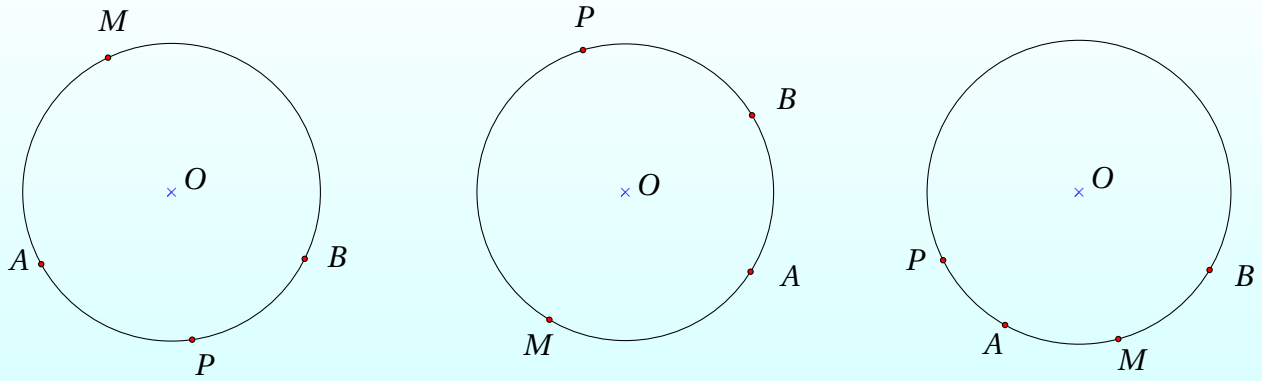
- D'une part, $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MIA}$.
- D'autre part, $\widehat{MSA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MIA}$.

On en déduit que : $\widehat{MBA} = \widehat{MSA}$.

II Exercices

Exercice 1

Dans chaque cas, précise si le point P appartient à l'arc de centre intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.



Exercice 2

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc de cercle.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$, lorsque :

a) $\widehat{AOB} = 90^o$ **b)** $\widehat{AOB} = 48^o$ **c)** $\widehat{AOB} = 126^o$ **d)** $\widehat{AOB} = 97^o$.

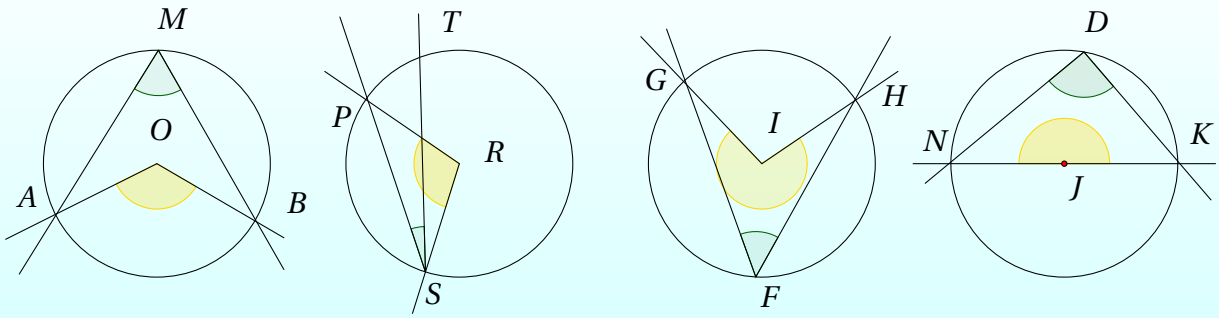
M. GUEYE 77 135 23 62

Exercice 3

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc de cercle.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$, lorsque :
a) $\widehat{AMB} = 90^o$ **b)** $\widehat{AMB} = 48^o$ **c)** $\widehat{AMB} = 126^o$ **d)** $\widehat{AMB} = 97^o$.

Exercice 4

Pour chaque cercle, précise si l'angle inscrit (marqué en vert) et l'angle au centre (marqué en jaune) interceptent le même arc de cercle.



Exercice 5

Chaque figure est un polygone régulier de centre O.
Détermine la mesure de chaque angle marqué en couleur. Justifie la réponse.

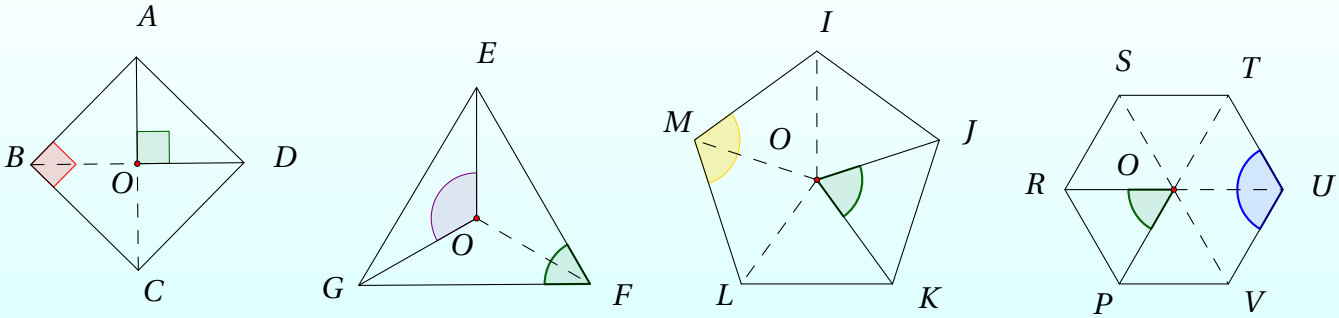
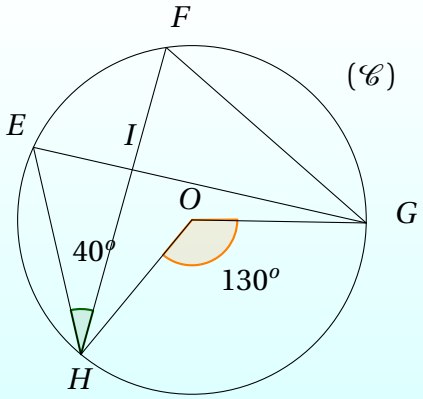


figure 1 *figure 2* *figure 3* *figure 4*

Exercice 6

Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H sont sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. Les droites (FH) et (EG) sont sécantes au point I.
1. Calcule la mesure de chaque angle du triangle FGI. Justifie ta réponse.
2. Calcule la mesure de chaque angle du triangle EHG.



Exercice 7

1. Trace un cercle de centre O, de rayon 5 cm. Trace un diamètre $[AC]$ de ce cercle. Place un point I du cercle distinct des points A et C. Construire le point B du cercle tel que $\widehat{AIB} = 30^o$.
2. Quelle est nature du triangle BAC ? Justifie le réponse.
3. Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifie la réponse. Prouve que $AB = 5$ cm.
4. En déduire la longueur de BC

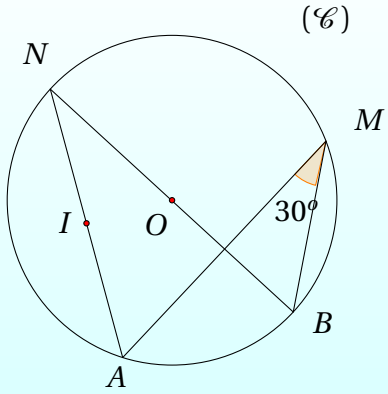
Exercice 8

1. Construis un hexagone $ABCDEF$ de centre I inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.
2. Détermine en justifiant chaque réponse les mesures des angles :
a) $\widehat{AED}$ **b)** $\widehat{AEB}$ **c)** $\widehat{BAF}$

Exercice 9

Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O de rayon R.

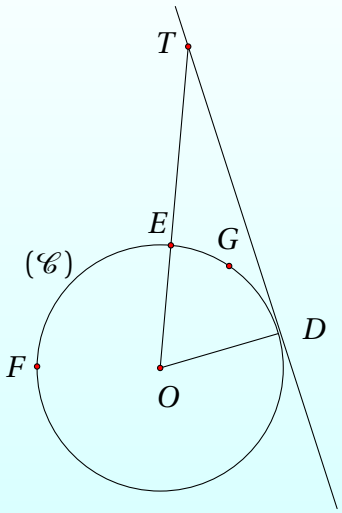
$A \in (\mathscr{C})$, $B \in (\mathscr{C})$ et $M \in (\mathscr{C})$.
$\widehat{AMB} = 30^o$.
Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.
1. Soit I, milieu du segment $[AN]$. Montre que les droites (OI) et (IN) sont perpendiculaires.
2. a) Montre que $AB = 2R\sin 30^o$.
b) On admet que $\sin 30^o = \frac{1}{2}$.
Exprime la longueur AN en fonction de R



Exercice 10

On considere la figure suivante. Les points F, E, G et D sont sur le cercle de centre O.
L'angle $\widehat{OTD}$ mesure 20^o.
La droite (DT) est la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en D.

1. Détermine, en justifiant la réponse la de l'angle $\widehat{DFE}$.
2. Détermine, en justifiant la réponse, la mesure de l'angle $\widehat{DGE}$



M. GUEYE 77 135 23 62

Exercice 11

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants en A et en B, de centres respectifs O et O'. Une droite (Δ) passant par A recoupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en N $(A \in [MN])$.

1. Calcule $\widehat{AMB}$ en fonction de $\widehat{AOB}$, et $\widehat{ANB}$ en fonction de $\widehat{AO'B}$.

2. Montre que $\widehat{MBN} = 180^o - \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{AO'B})$. La mesure de cette angle dépend-elle de la droite (Δ) choisie ?

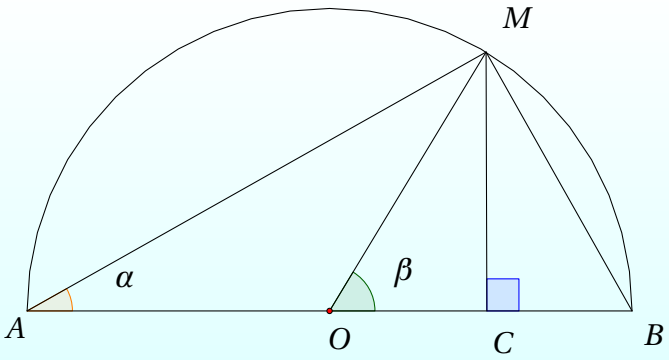
Exercice 12

Le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ a pour rayon 1.

1. Justifie les égalités suivantes.

- $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AM}$
- $\cos\alpha = \dfrac{AM}{AB}$
- $AC = 1 + \cos\beta$
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1+cos\beta}{2}$.

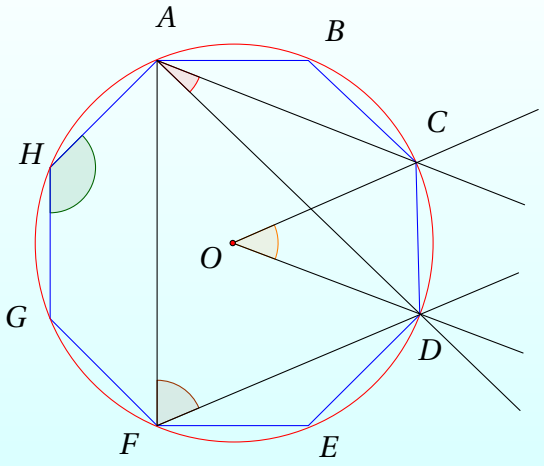
2. À l'aide du théorème de l'angle inscrit, compare α et β. En déduire que, pour tout angle α compris entre 0^o et 45^o : $\cos^2\alpha = \dfrac{1+cos2\alpha}{2}$.



Application : Montre que $\cos^2 15^o = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

Exercice 13

$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.
Détermine en justifiant la mesure de chaque angle marqué en couleur.



Exercice 14

1. Trace un cercle de centre O et un diamètre $[RS]$ de ce cercle. Place un point P sur ce cercle tel que la mesure de l'angle $\widehat{POS}$ soit égale à 48^o.

2. Détermine en justifiant la mesure de l'angle $\widehat{RPO}$

Exercice 15

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et A, M et B trois points distincts de $(\mathscr{C})$ non diamétralement opposés deux à deux .

1. Justifie que les triangles AOB, AOM et BOM sont isocèles.

2. Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$.

3. On note $\widehat{OAB} = \alpha$; $\widehat{OMA} = \beta$ et $\widehat{OBM} = \gamma$.

a) Exprime la somme des angles du triangle AMB en fonction de α, β et γ.

b) En utilisant la propriété de la somme des angles dans un triangle, exprime 2α en fonction de β et γ.

c) Déduis du **b)** et du **2.** l'expression de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de β et γ.

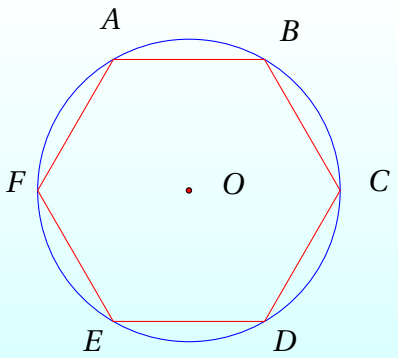
b) déduis, en factorisant par 2, l'expression de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de l'angle inscrit A.

Exercice 16

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.

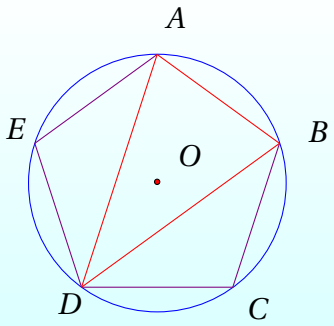
1. Détermine, en justifiant la réponse, la nature du triangle ABD.

2. Calcule la mesure de chaque angle de ce triangle.



Exercice 17

$ABCDE$ est un pentagone régulier de centre O.
Démontre que le triangle ABD est isocèle.



Exercice 18

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5$ cm ; $\widehat{BAC} = 30^o$.

1. Construis le triangle ABC.

2. Construis le cercle circonscrit au triangle ABC. Son centre est O.

3. La hauteur (BI) de ABC coupe (AC) en I et le cercle en J. Détermine $\widehat{BJC}$.

4. Calcule les mesures des angles du triangle BOC.

5. Calcule les mesures des angles du triangle ABJ.

I Rappel de cours

1 Généralités

■ Caractéristiques d'un vecteur

Un vecteur non nul est caractérisé par :

- Sa direction.
- Son sens.
- Sa norme (longueur).

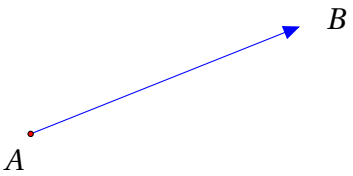
NB : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ n'a pas de direction ni de sens.

- **Exemple**

A et B étant deux points distincts le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

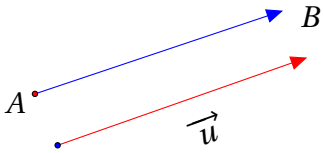
- Sa direction : la droite (AB).
- Son sens : celui de A vers B.
- Sa longueur : la distance AB

Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité.



■ Propriété

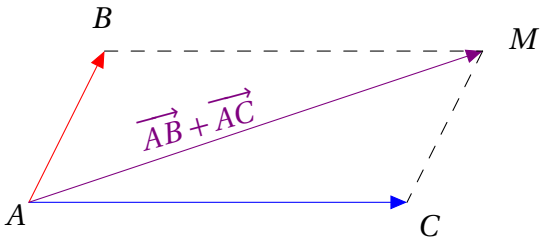
Soit A point fixe du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur fixe du plan. Il existe un unique point B du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$



■ Somme de deux vecteurs

- **Règle du parallélogramme**

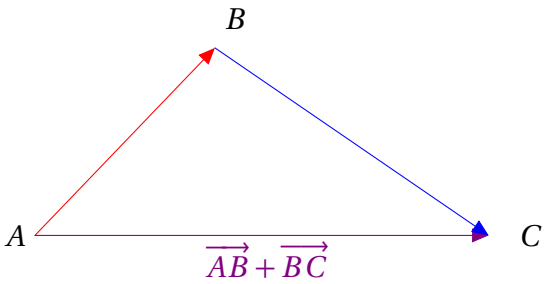
Soit trois points A, B et C non alignés. La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ tel que $ABMC$ est un parallélogramme.



$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

- **Translations ; somme de deux vecteurs**

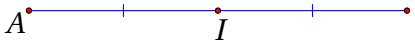
Soit trois points A, B et C. Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, alors on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On écrit : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est la ***relation de Chasles***



Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

▶ Si le point I est le milieu du segment $[AB]$, alors on a :

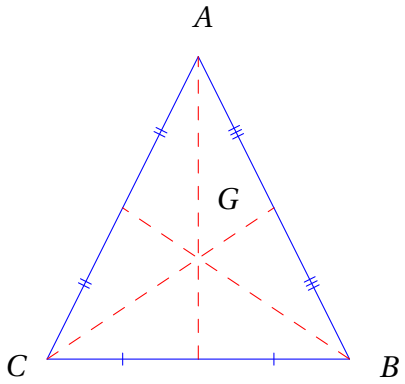
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.
- Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.



Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

▶ Si le point G est le centre de gravité du triangle ABC, alors on a :

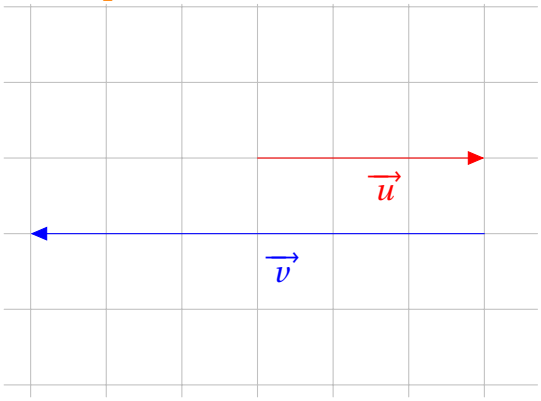
- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
- Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.



Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k, tels que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.

- **Exemple**



$\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2 Exercice d'application

Énoncé

Soit ABC un triangle quelconque, on désigne par M le milieu de $[AB]$ par I le milieu de $[MC]$.

Soit un point K tel que $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

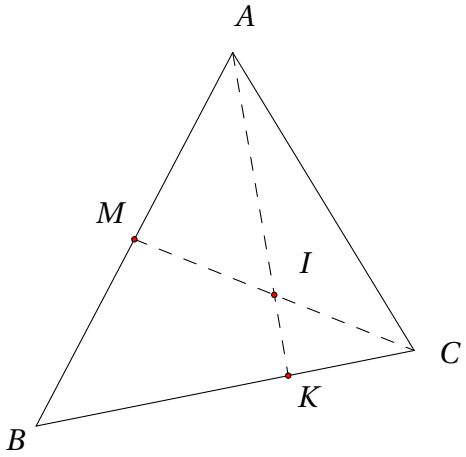
1. Faire une figure.

2. Exprime $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que les points A, I et K sont alignés.

M. GUEYE 77 135 23 62

■ **Solution**



2. Exprimons $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$.

• I est le milieu de $[MC] \Longrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$, or $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car M est le milieu de $[AB]$), doù

$$\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

• $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}$ or $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}BC$, donc $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.}$$

3. Déduisons que les points A, I et K sont alignés.

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ $(\star)$

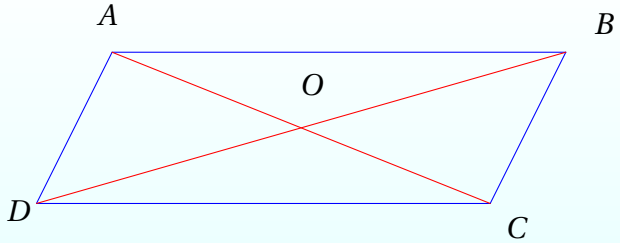
$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ $(\star\star)$

D'après $\star$ et $(\star\star)$ on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires, d'où les points A, I et K sont alignés

II Exercices

Exercice 1

$ABCD$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent au point O.



1. Complète par un vecteur égal.

a) $\overrightarrow{AB}=\cdots$ **b)** $\overrightarrow{BC}=\cdots$ **c)** $\overrightarrow{DO}=\cdots$ **d)** $\overrightarrow{OA}=\cdots$ **e)** $\overrightarrow{CD}=\cdots$

2. Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifie.

a) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$.

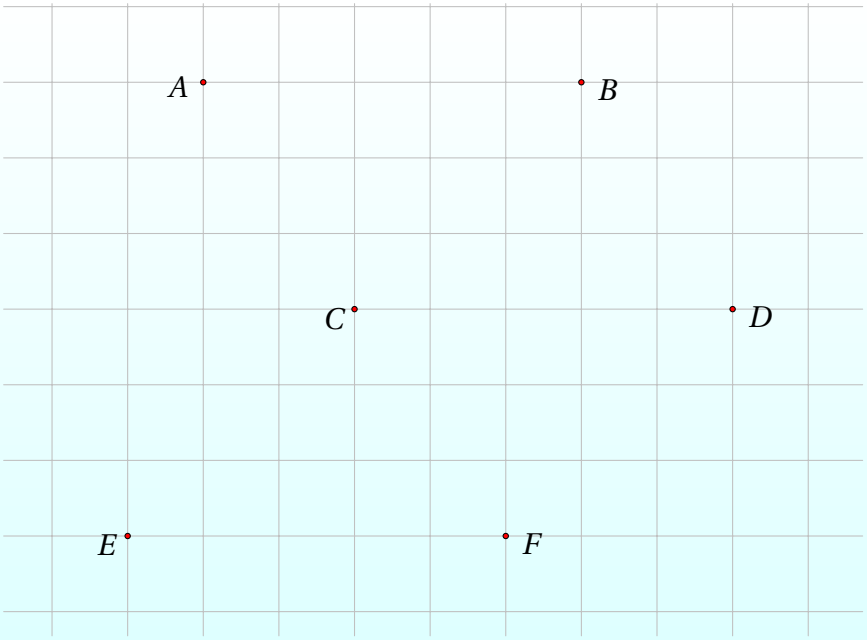
3. Reproduis la figure et construis les points E et F tels que :

a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{AF}=-3AC$

M. GUEYE 77 135 23 62

Exercice 2



En utilisant le quadrillage, dis pour chaque égalité si elle est vraie ou fausse.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ **b)** $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ **d)** $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$ **e)** $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ **f)** $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque.

1. construis :

a) Le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$.

b) Le point P tel que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BC}$.

c) Le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$.

2. Montre que le point A, B et C sont les respectifs des segments $[NP]$, $[PM]$ et $[MN]$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construis les points E, F, G, H et I définis par :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC}$.

2. Quelle est la nature des quadrilatères $BCEF$ et $DGEC$?

3. Que représente point A pour le segment $[IC]$?

Exercice 5

Réduis les sommes vectorielles suivantes.

$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{HP}$; $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{KO}$

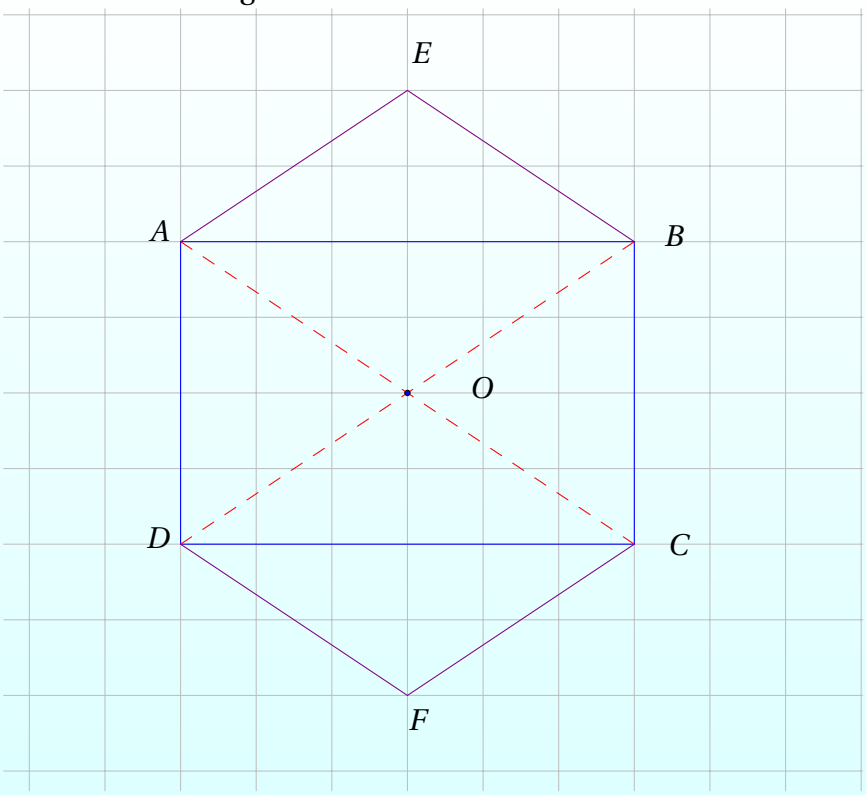
$\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{u_5} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QA}$; $\overrightarrow{u_6} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{LG}$

$\overrightarrow{u_7} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{u_8} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{u_9} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{u_{10}} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{u_{11}} = 2(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{u_{12}} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}$

Exercice 6

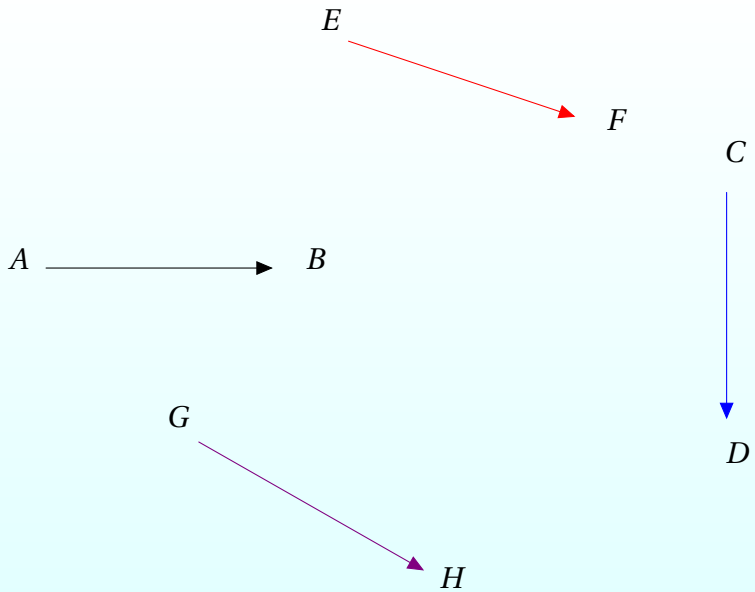
On considère la figure ci-dessous.



Calcule la somme vectorielle indiquées en utilisant cette figure.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$; **b)** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$; **c)** $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AO}$; **d)** $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{FC}$; **e)** $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}$; **f)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Exercice 7



Sur la figure ci-dessus, construis les points I, J, K, L, M, N P, Q tels que :

a) $\overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{AB}$; **b)** $\overrightarrow{GJ}=-\overrightarrow{AB}$; **c)** $\overrightarrow{CK}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$; **d)** $\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; **e)** $\overrightarrow{MA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$

f) $\overrightarrow{NH}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$; **g)** $\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}$; **h)** $\overrightarrow{HQ}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$.

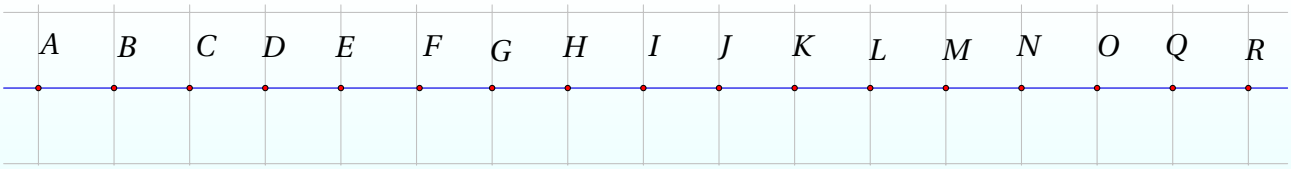
Exercice 8

A, B et C étant trois points non alignés données, construis si possible les points inconnus U, V, W, X Y et Z en résolvant les équations vectorielles correspondantes.

a) $\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{UC}=\overrightarrow{BC}$; **b)** $\overrightarrow{AV}-\overrightarrow{VB}-\overrightarrow{VC}=\overrightarrow{0}$; **c)** $2\overrightarrow{AW}-\overrightarrow{BW}-\overrightarrow{CW}=\overrightarrow{AB}$

d) $-3\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{0}$; **e)** $\overrightarrow{AY}-2\overrightarrow{BY}+3\overrightarrow{CY}=2\overrightarrow{AB}$; **f)** $\overrightarrow{AZ}-3\overrightarrow{ZB}=2(\overrightarrow{CZ}+\overrightarrow{AZ}-BC)$

Exercice 9



En observant la figure ci-dessus, complète les relations de colinéarité suivantes.

a) $\overrightarrow{AE}=\cdots\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{GD}=\cdots\overrightarrow{JP}$
c) $\overrightarrow{NQ}=\cdots\overrightarrow{CL}$
d) $\overrightarrow{DH}=\cdots\overrightarrow{AF}$
e) $\overrightarrow{GR}=\cdots\overrightarrow{IQ}$
f) $\overrightarrow{OH}=\cdots\overrightarrow{OE}$
g) $\overrightarrow{BP}=\cdots\overrightarrow{LG}$
h) $\overrightarrow{QI}=\cdots\overrightarrow{IE}$
i) $\overrightarrow{JE}=\cdots\overrightarrow{JQ}$
j) $\overrightarrow{GK}=\cdots\overrightarrow{MK}$
k) $\overrightarrow{HR}=\cdots\overrightarrow{ND}$
l) $\overrightarrow{RB}=\cdots\overrightarrow{AL}$
m) $\overrightarrow{NE}=\cdots\overrightarrow{LF}$
n) $\overrightarrow{KJ}=\cdots\overrightarrow{BP}$
o) $\overrightarrow{AA}=\cdots\overrightarrow{AM}$
p) $\overrightarrow{IO}=\cdots\overrightarrow{AR}$
q) $\overrightarrow{BK}=\cdots\overrightarrow{CL}$
r) $\overrightarrow{GG}=\cdots\overrightarrow{AD}$

Exercice 10

Soit ABC un triangle tel que $AB=6$ cm, $AC=5$ cm et $BC=4$ cm. Place les points I et G tels que I soit le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité de ce triangle.

1. Montre que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

En déduire que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

2. Montre que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

En déduire que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

3. Montre que les points A, G et I sont alignés

Exercice 11

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Place un point M sur la diagonale $[BD]$.

2. Construis les points E et F vérifiant : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$.

3. Donne deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AD}$; en déduire que $MBCE$ est un parallélogramme.

4. Donne deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$; en déduire que $MDCF$ est un parallélogramme.

5. Démontre que les points E, F et C sont alignés (utiliser les questions précédentes)

Exercice 12

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. Les points A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Montre que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$

Exercice 13

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

1. Montre qu'il existe un unique point D du plan tel que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDG$? Justifie la réponse.

Exercice 14

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note les points I, J, P et Q les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Montre que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 15

Soit ABC un triangle.

1. Place le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. Place le point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.

3. Démontre que les droites (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 16

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.

1. Construis le point M tel que $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

2. Démontre que $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{0}$. Que peut-on en déduire?

3. Justifie les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$.
En déduire la nature du quadrilatère $ABNI$.

Exercice 17

ABC est un triangle de centre de gravité. Le point Z est le milieu de $[AC]$.

1. Fais une figure puis place les points I, J et K définis par :
$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

2. Démontre que G est le centre de gravité du triangle IJK.

Exercice 18

Soit ABC un triangle.

1. Construis le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2. Démontré que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3. Construis le point N tel que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

4. Démontré que les points A, M et N sont alignés

M. GUEYE 77 135 23 62

I Rappel de cours

1 Repère du plan

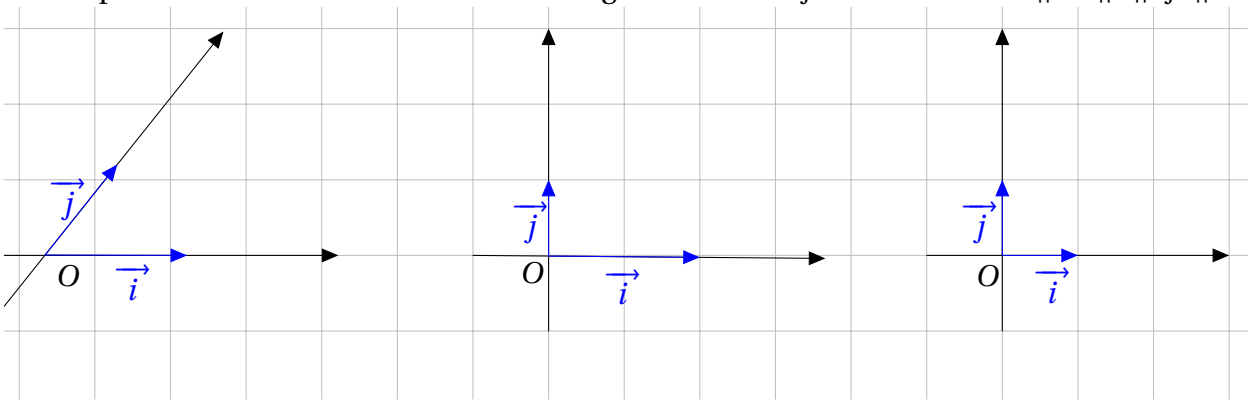
Définition

Soit O un point fixe et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ défini un repère du plan. Ce repère peut être noté (O, I, J) ou $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

Le point O est appelé l'origine du repère et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont appelés vecteurs unitaires.

Remarques

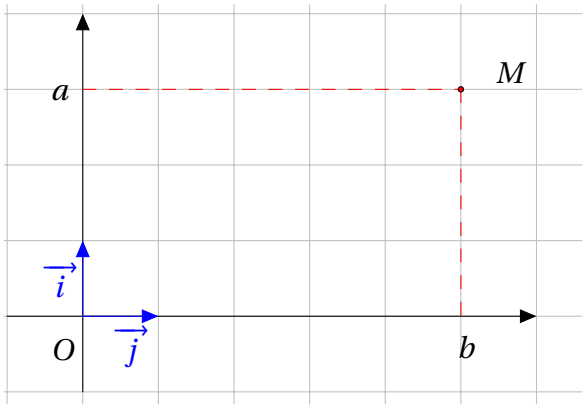
- Un repère est dit orthogonal si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit orthonormal s'il est orthogonal et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont de norme : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$



repère quelconque ***repère orthogonal*** ***repère orthonormal***

Coordonnées d'un point

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Un point M a pour coordonnées $(a; b)$ dans ce repère si et seulement si : $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$. On écrit alors : $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou $M(a; b)$ et on lit M de coordonnées $(a; b)$.



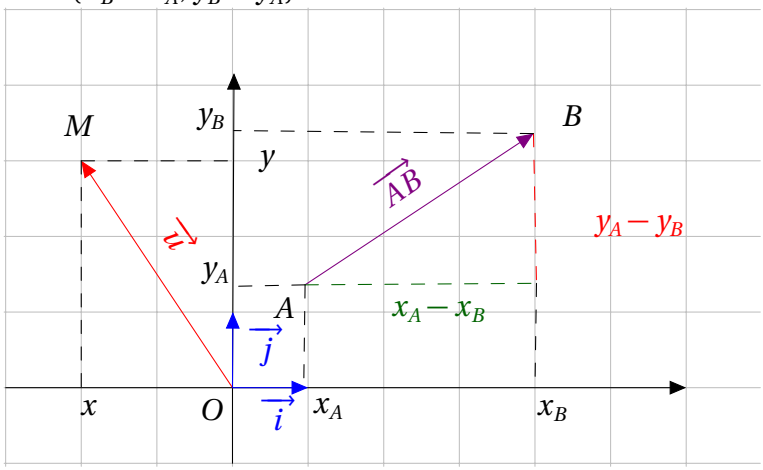
Coordonnées d'un vecteur

Considérons le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque de $\mathscr{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

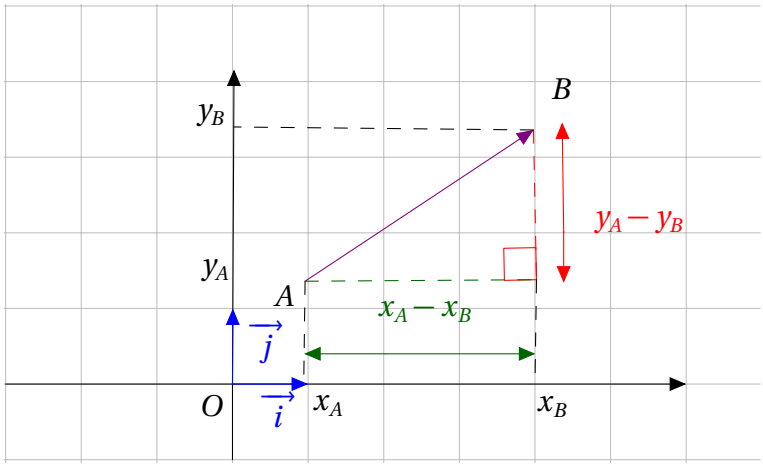
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• Soit A et B deux point de $\mathscr{R}$, tels que : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.



■ Distance de deux points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.
Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
Donc la distance entre les points A et B est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



■ Coordonnées du milieu d'un segment

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit deux points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors le milieu du segment $[AB]$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

■ Propriétés

Considérons le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs de $\mathscr{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

▸ Vecteurs égaux :
$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \iff x = x'$ et $y = y'$.

▸ Somme de deux vecteurs.
Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$. On écrit $\vec{w}(x + x'; y + y')$.

▸ Vecteurs opposés.
Le vecteur opposé de $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ de coordonnées $(-x; -y)$. On écrit $-\vec{u}(-x; -y)$

▸ Vecteur nul.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est le vecteur de coordonnées $(0; 0)$. On écrit $\vec{0}(0; 0)$.

▸ Vecteurs colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$.

▸ Vecteurs orthogonaux.
Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $x\,x' + y\,y' = 0$.

2 Équation d'une droite

■ Équation générale d'une droite.

L'équation générale d'une droite (Δ) est une équation de la forme (Δ) : $ax+by+c=0$.
où a, b et c des nombres réels avec a et b ne sont pas tous nuls. Cette droite a un vecteur direction $\overrightarrow{u}(-b;a)$

■ Propriété.

Dans un repère orthonormal (O,I,J), on dit qu'un point $M(x_0;y_0)$ appartient á la droite (Δ) d'équation : $ax+by+c=0$ si ces coordonnées vérifient l'équation, c'est à dire $ax_0+by_0+c=0$.

■ Méthode.

Pour déterminer une équation générale d'une droite passant par deux points A et B du plan muni d'un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$; on peut procéder comme suit :

- Considérer un point $M(x;y)$ quelconque sur la droite (AB).
- Calculer les coordonnes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
- Traduis la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de leurs coordonnées.
- Écrire cette relation sous la forme $ax+by+c=0$ qui est une équation générale de la droite (AB).

▶ Exemple

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On donne $A(2;3)$ et $B(-3;1)$.
Déterminer une équation générale de la droite (AB).

▶ Solution

Soit $M(x;y)\in(AB)$, donc $\overrightarrow{AB}(-3-2;1-3)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2;y-3)$ sont colinéaires, c'est à dire :
$-5\times(y-3)+2\times(x-2)=0\Longrightarrow 2x-5y+11=0$.
$(AB):2x-5y+11=0$ est une équation générale de la droite (AB).

■ Équation réduite d'une droite.

Considérons le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et $(\Delta):ax+by+c=0$ une équation générale de la droite (Δ). Dans le cas où $b\neq 0$ et en expriment y en fonction de x, on obtient l'expression suivante $y=mx+p$ avec m et p des réels, tels que $m=-\dfrac{a}{b}$ et $p=-\dfrac{c}{b}$.
$(D):y=mx+p$ est alors l'équation réduite de la droite (Δ) : m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de la droite (D).
Le vecteur $\overrightarrow{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

■ Propriétés.

Considérons le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$; $(D):y=mx+p$ et $(D'):y=m'x+p'$.

- (D) et (D') sont parallèles si seulement si $m=m'$.
- (D) et (D') sont perpendiculaires si seulement si $m\times m'=-1$.

▶Exemple

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, détermine une équation réduite de la droite (D) passant $A(2;1)$ et parallèle à $(D'):y=3x+4$.

▶Solution

On a $(D'):y=3x+4$, soit $(D):y=mx+p$.
D'une part : $(D)//(D')\Longrightarrow m=3$.
D'autre part : $A(2;1)\in(D)\Longrightarrow 1=3\times 2+p$, donc $p=-5$.
D'où $(D):y=3x-5$.

3 Exercice d'application

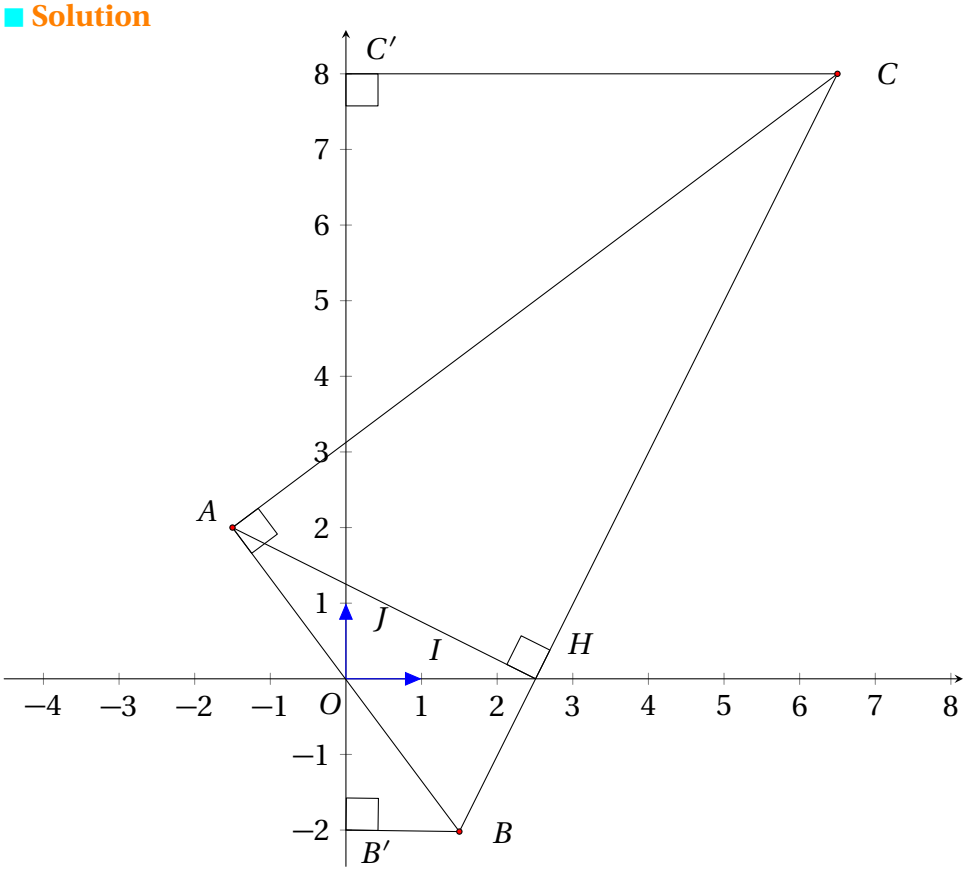
■ Énoncé

Soit un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal (O,I,J).
1. Place les points $A(-1,5;2)$; $B(1,5;-2)$; $C(6,5;8)$ et montre que O est le milieu de $[AB]$.
2. Calcule les distances AB, AC et BC et montre que le triangle ABC est rectangle.
3. soit H le projet]é orthogonal de A sur la droite (BC). Calcule AH, BH et CH.
4. Soient B' et C' respectivement les projetés orthogonaux des points B et C sur la droite (OJ). Cal-

cule $\frac{BH}{BC}$ et $\frac{B'O}{B'C'}$.

5. montre avec précision que l'on peut en conclure que H appartient à la droite (OI).

Solution



2. calculons les distances AB, AC et BC.

• $AB = \sqrt{(1,5+1,5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$; $\boxed{AB = 5}$

• $AC = \sqrt{(6,5+1,5)^2+(8-2)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$; $\boxed{AC = 10}$.

• $BC = \sqrt{(6,5-1,5)^2+(8+2)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$; $\boxed{BC = 5\sqrt{5}}$.

Montrons que le triangle ABC est rectangle.

• D'une part : $AB^2 + AC^2 = (5)^2 + (10)^2 = 25 + 100 = 125$. $(\star)$

• D'autre pat : $BC^2 = (5\sqrt{5})^2 = 125$. $(\star\star)$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

3. Calculons AH, BH et CH.

• Comme ABC est un triangle rectangle en A et H étant le projeté orthogonal de A sur (BC), donc

$AH \times BC = AB \times AC \Longrightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{5 \times 10}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$; $\boxed{AH = 2\sqrt{5}}$.

• Le triangle ABH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - (2\sqrt{5})^2 = 25 - 20 = 5 \Longrightarrow \boxed{BH = \sqrt{5}}$.

• $CH = BC - BH = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$; $\boxed{CH = 4\sqrt{5}}$.

4. Calculons $\frac{BH}{BC}$ et $\frac{B'O}{B'C'}$.

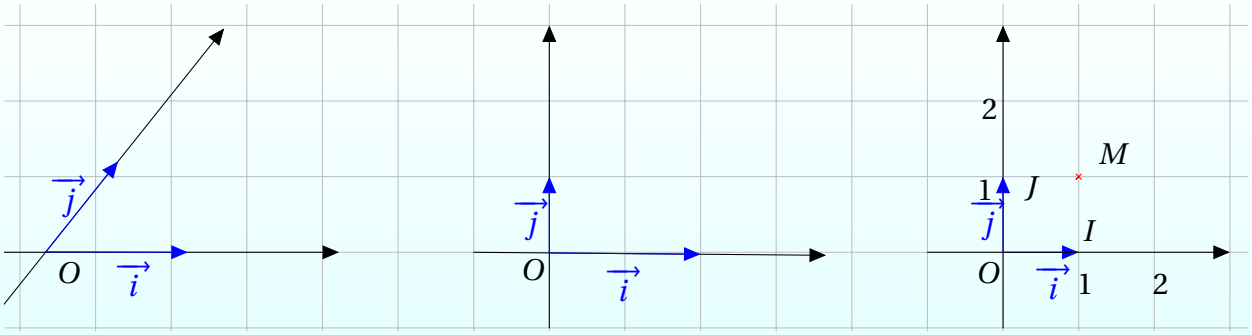
$\frac{B'O}{B'C'} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et $\frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$.

Montrons que H appartient à droite (OI).

On a $\frac{B'O}{B'C'} = \frac{BH}{BC}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès $(BB')//(OH)//(CC')$ or $(OI)//(BB')$, (car $(OJ) \perp (OI)$ et $(OJ) \perp (BB')$), donc $(OH)//(OI)$: d'où $H \in (OI)$.

II Exercices

Exercice 1



1. Donne le nom de chacun des ces repères ci-dessus.
2. Détermine les coordonnées du point M.
3. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
4. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{IM}$.

Exercice 2

On considere un repère orthonormal (O, I, J). Soit $A(1;1)$ et $B(-1;-3)$.
1. Donne une équation générale de la droite (D) passant par A et B.
2. En déduire une équation réduite de cette droite.
3. Calcule la distance AB.
4. Donne un équation générale de la droite (D') de vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$ et passant $C(2;1)$.
5. Montre que (D) et (D') sont perpendiculaires.
6. Représente (D) et (D') dans le repère orthonormal (O, I, J)

Exercice 3

Dans un repère orthonormal on donne les points $A(-1;2)$; $B(5;-6)$; $C(5;\frac{1}{2})$; $D(-7;\frac{1}{2})$ et les droites $(\Delta): 3x+2y=-5$ et $(\Delta'): 4x-3y+10=0$.
1. Est-ce que $A \in (\Delta)$? $A \in (\Delta')$?
2. Établis une équation cartésienne :
a) des droites (AB); (BC) et (CD).
b) de la droite (d_1) passant par et parallèle à (Δ);
c) de la droite (d_2) passant parallèle à l'axe des abscisses.
d) de la droite (d_3) passant par C et perpendiculaire à (Δ')
e) de la droite (d_4) passant par D et parallèle à l'axe des ordonnées.
3. Détermine le point d'intersection des droites :
a) (CD) et (Δ)
b) (BC) et (Δ)
c) (Δ) et (Δ').
4. Détermine une équation réduite :
a) de la droite (d_5) passant par $B(5;-6)$ et perpendiculaire à (Δ).

b) de la droite (d_6) passant par A et parallèle à (CD).

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On considere les points $A(-3;0)$; $B(-1;-2)$ et $C(3;2)$.

1. a) Calcule les distances AB, AC et BC.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit E le milieu du segment $[AC]$. La droite (L) passant par E et parallèle à (AB) coupe la droite (BC) en F.

a) Montre que F est le milieu de $[BC]$.

b) Calcule les coordonnées des points E et F.

c) Détermine une équation de la droite (L).

3. Soit D le symétrique de B par rapport à E.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b) Détermine un vecteur de la figure égale à $\overrightarrow{ED}$; puis détermine les coordonnées de D.

Exercice 5

Dans un plan muni d'un repere orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A, B et C definis par : $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{CO} = -8\vec{j}$.

1. Trouve les coordonnées des points A, B et C puis place les dans le repere.

2. Calcule les distances AB et AC puis déduis-en la nature du triangle ABC.

3. Soit K le milieu de $[BC]$.

a) Calcule les coordonnées de K.

b) Trouve équation réduite de la droite (AK).

c) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

d) Justifie que (AK) est la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 6

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, place les points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{OD} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

2. a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

3. Quelles sont les coordonnées du point K, centre du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 7

Dans le plan euclidienne muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considere les points A, B et C avec $A(-5;3)$ et $B(2;2)$.

1. Détermine les coordonnées du point C tel que $BCAO$ soit un parallélogramme.

2. Détermine les coordonnées du point M tel que $-3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{-BC}$

3. Montre que C est le milieu de $[MB]$.

Exercice 8

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, N, E et D tels que : $\overrightarrow{OA} = -3\vec{u}$; $\overrightarrow{ON} = 2\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{OE} = 4\vec{u} + 3\vec{v}$ et $\overrightarrow{DO} = \vec{u} - 2\vec{v}$

1. Place les points A, N, E et D.

2. a) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{NA}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) En déduire la nature du quadrilatère $EDAN$.

c) Démontre que les segments $[AE]$ et $[DN]$ ont le même milieu K. Calcule les coordonnées de K.

3. a) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux.

b) Calcule les distances OD et ON puis en déduire la nature du triangle DON.

c) Soit $S(1;3)$. Donne en justifiant, la nature du quadrilatère $DONS$.

4. a) Détermine une équation de la droite (DN).

b) Le point $R(2;-3)$ appartient-il à la droite (DN)? Justifie.

c) Calcule les coordonnées du point d'intersection H de (DN) et l'axe des ordonnées.

5. On considère par F le pied de la hauteur issue de O dans le triangle DON.

a) Détermine le coefficient directeur de (OF).

b) Prouve que la droite (OF) a pour équation $y = 3x$.

c) Calcule les coordonnées de F.

Exercice 9

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les points suivants dans ce repère $A(-2;3)$; $B(4;7)$ et $C(1;5)$.

1. Écris les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2. Montre que les points A, B et C sont alignés.

3. Trouve les coordonnées du point D tel que $BCOD$ soit un parallélogramme.

4. Trouve une équation de la droite (DB).

5. Soit E le symétrique de C par rapport à D, détermine les coordonnées de E.

6. Soit F l'image de B par la translation du vecteur $\overrightarrow{DC}$, détermine les coordonnées de F

Exercice 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points ci-dessous :
$A(1;-1)$, $B(3;1)$ et $C(-1;3)$.

1. Calcule les distances AB, AC et BC, puis déduis-en la nature du triangle ABC.

2. Place le point D sur la demi-droite $[AC)$ tel que le triangle ABD soit rectangle en B.

3. Trace le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit à ABD.

4. Démontre que le point C est le centre du cercle $(\mathscr{C})$, puis calcule le rayon du cercle.

5. Détermine les coordonnées du point D. Construis le point K image de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{CB}$, puis calcule les coordonnées de K. Quelles est la nature du quadrilatère $CBKA$?

6. Trace la hauteur $[BH]$ relative au côté $[AD]$ du triangle ABD, puis détermine une équation cartésienne de la droite (BH).

7. Le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre B passant par C, coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M et P. Justifie que la droite (MP) est la médiatrice du segment $[BC]$, puis trouve une équation générale de la droite (MP).

8. Les droites (MP) et (BH) se coupent en S. Calcule les coordonnées du point S.

9. Détermine une équation réduite de la droite (T) tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en K.

M. GUEYE 77 135 23 62

10. Détermine une équation réduite de la droite (Δ), parallèle à la droite (MP), passant par C

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points $A(2;4)$, $B(4;-1)$ et $C(-5;-2)$.

1. a) Fais une figure et détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

b) Calcule les distances AB, AC et BC.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse

2. a) Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) Détermine les coordonnées du point M.

3. a) Détermine les coordonnées du point I milieu de $[AC]$.

b) Démontre que les droites (IM) et (AC) sont parallèles.

4. Donne une équation à la médiatrice du segment $[AC]$

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B et C tels que : $OA = 5\vec{i} - \vec{j}$, $B(-1;2)$, (BC) a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$, (AC) et (BC) sont perpendiculaires.

1. Place les points A et B.

2. a) Donne une équation cartésienne de la droite (BC).

b) Donne une équation cartésienne de la droite (AC).

c) En déduire les coordonnées du point C.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donne les points $A(-2,0)$, $B(4;6)$ et $C(8;-10)$.

1. Calcule les longueurs AB, AC et BC.

2. Montre que le triangle ABC est rectangle.

3. Soit $\mathscr{C}(K, r)$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Calcule les coordonnées du point K.

b) Calcule le rayon r et la longueur du cercle.

4. Montre que le point $E(14;-4)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points $A(-2;2)$, $B(x;0)$ et $C(1;3)$.

1. Détermine la valeur de x pour laquelle la droite (CB) est perpendiculaire à la droite (CA).

2. Montre que le point C appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

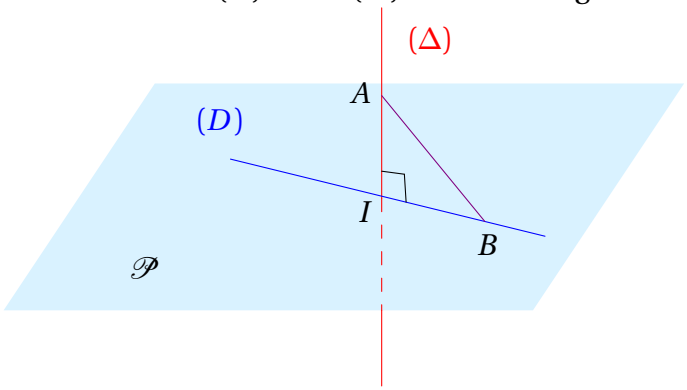
3. On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre C passant par A.
Montre que cercle $(\mathscr{C})$ passe par les points B et O.

4. Détermine les points d'intersections de $(\mathscr{C})$ avec les axes

I Rappel de cours

1 Droite orthogonale à un plan

La droite (Δ) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ en I.
Si la droite (Δ) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ en I, alors la droite (Δ) est perpendiculaire à toute autre droite (D) du plan $\mathscr{P}$ passant par I.
Nous avons $A \in (\Delta)$ et $B \in (D)$ alors le triangle AIB est rectangle en I.

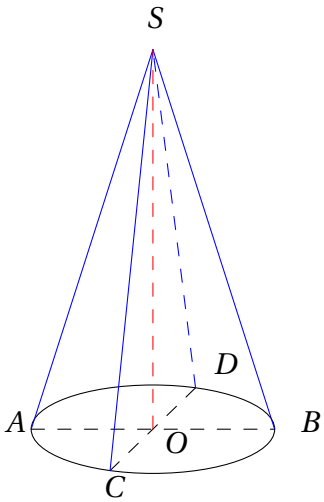


2 Cône de révolution

■ Définition et description

Un cône de révolution est un solide qui est généré par un triangle rectangle en rotation autour d'un des côtés de son angle droit tel que :

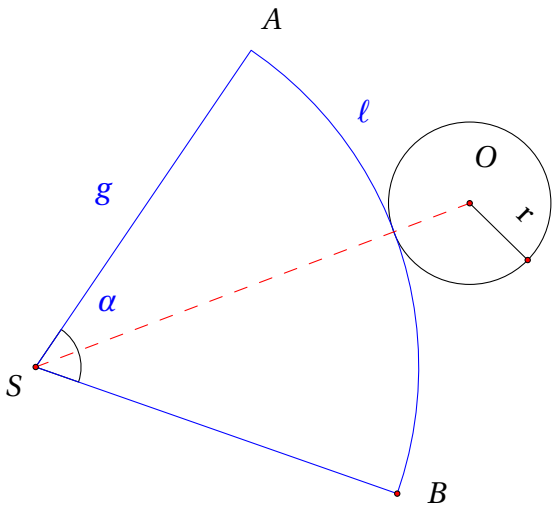
- Sa base est un cercle.
- Sa hauteur est perpendiculaire à la base et passe par le centre du cercle de base.
- Les segments $[AS]$; $[BS]$; $[CS]$ et $[DS]$ sont des génératrices. Pour un cône de révolution, les génératrices ont la même longueur : $AS = BS = CS = DS = g$.
- On appelle angle du cône de révolution, l'angle formé par une génératrice et la hauteur : $\widehat{OSC} = \widehat{OSB}$



■ Patron de cône de révolution

Pour confectionner le cône de révolution précédent avec un carton, coupe le carton selon la figure ci-contre appelé patron du cône

• La longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale à $2\pi r$ est le périmètre du cercle de base de rayon r.
• L'angle de développement α est tel que
$\alpha = \dfrac{360^o \times r}{g}$.
En effet la longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est telle que :
$\ell = 2\pi r \quad (\star)$ et $\ell = \dfrac{2\pi g \times \alpha}{360^o} \quad (\star\star)$
Les égalités $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent :
$2\pi r = \dfrac{2\pi g \times \alpha}{360^o}$.
Soit $\alpha = \dfrac{360^o \times r}{g}$

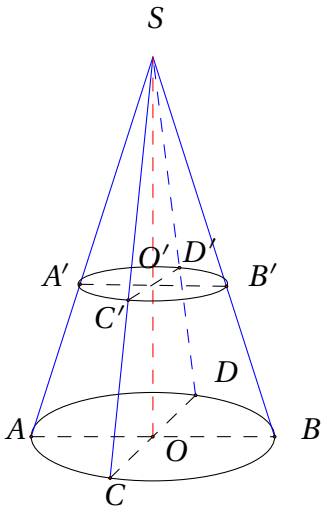


■ Aire et volume d'un cône de révolution

Soit un cône de révolution de rayon de base r, de hauteur h et de génératrice g.
Son aire $\mathscr{A}$ et son volume $\mathscr{V}$ sont donnés par :
• $\mathscr{A} = \mathscr{A}_b + \mathscr{A}_l$. Où l'aire de base $\mathscr{A}_b = \pi r^2$ et l'aire latérale $\mathscr{A}_l = \pi r g$.
• $\mathscr{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

■ Section d'un cône

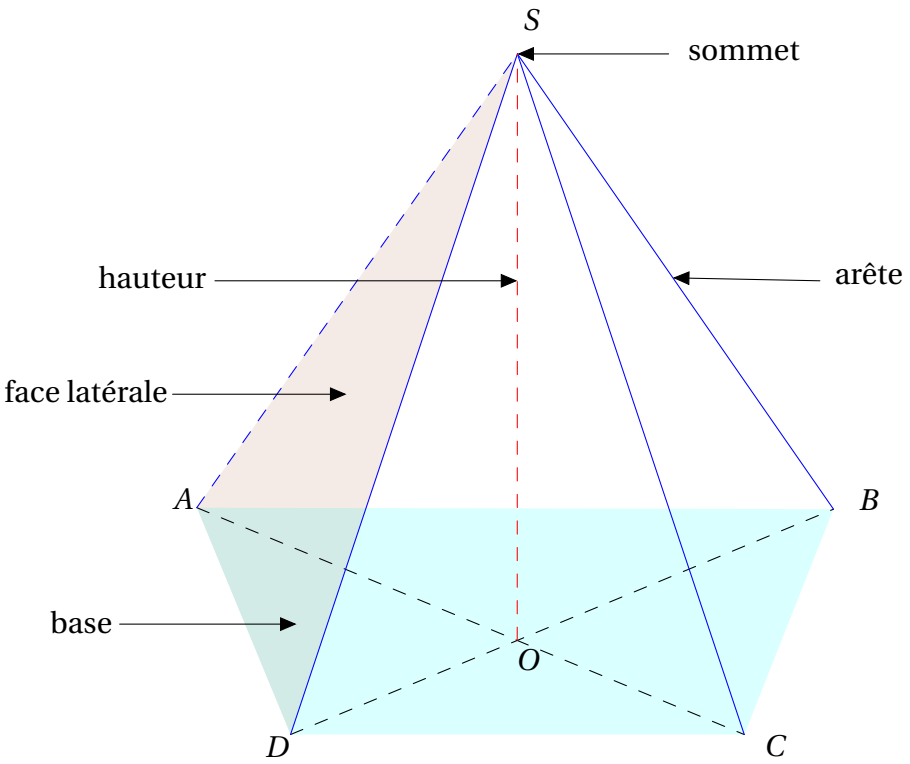
Si on sectionne un cône de révolution par un plan parallèle à la base, on obtient
• Un cône réduit de sommet S, de hauteur $O'S$ et de rayon de base $r' = O'A$.
• Un tronc de cône de rayons de bases $r = OA$ et $r' = O'A$.
• Le cône de hauteur $O'S$ et de rayon r' est une réduction du cône de hauteur OS et de rayon r. Le coefficient de réduction k est tel que : $k = \dfrac{O'S}{OS} = \dfrac{O'A}{OA} = \dfrac{O'B}{OB}$.
• Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{V}$ désigne respectivement le l'aire et le volume du cône de hauteur OS et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{V}'$ désigne respectivement l'aire et le volume du cône de hauteur $O'S$, alors.
$\mathscr{A}' = k^2 \mathscr{A}$
$\mathscr{V}' = k^3 \mathscr{V}$



3 Pyramides

■ Définition et description

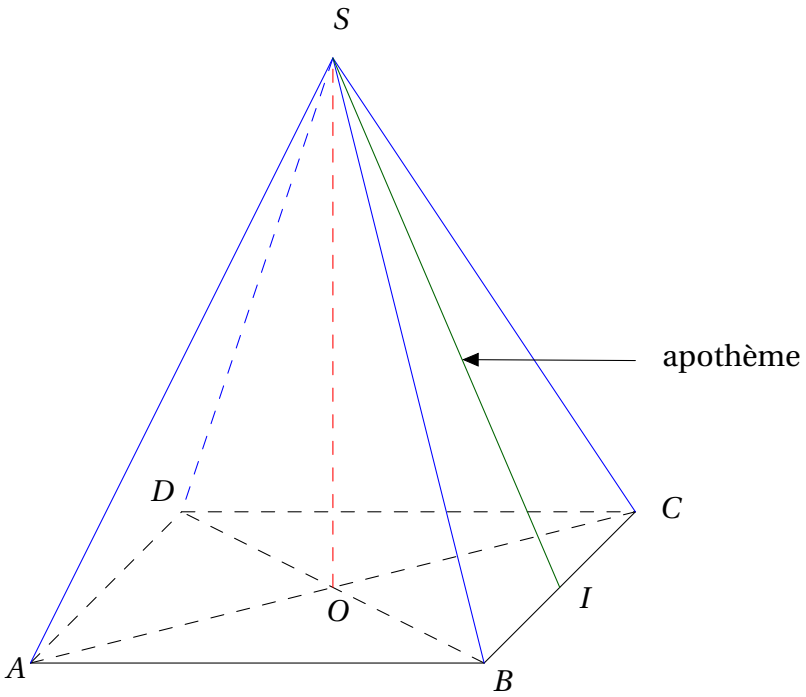
On appelle ***pyramide*** tout solide qui a pour base un polygone et a pour faces latérales des triangles ayant un point commun appelé ***le sommet de la pyramide***. (Voir figure ci-dessous)



Pyramide régulière

- Une pyramide est dite régulière, lorsque sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, etc...) et que la hauteur passe par le centre de la basse. Dans ce cas les faces sont des triangles isocèles superposables.
- L'apothème d'une pyramide régulière est la distance du sommet à une arête de sa base.

(Voir figure)



Aire et volume d'une pyramide

Soit une pyramide de hauteur h. Son aire $\mathscr{A}$ et son volume $\mathscr{V}$ sont donnés par :

- $\mathscr{A} = \mathscr{A}_b + \mathscr{A}_l$. (Où l'aire de base $\mathscr{A}_b$ =aire du polygone de base de la pyramide et l'aire latérale $\mathscr{A}_l$ =somme des aires des faces latérales que sont des triangles ayant un sommet commun).
- $\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A}_b \times h}{3}$

Section d'une Pyramide

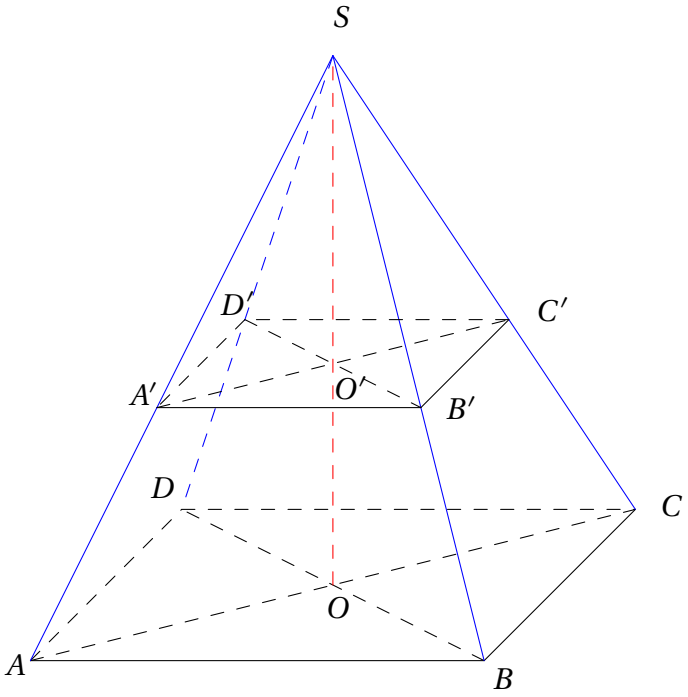
Si on sectionne une pyramide par un plan parallèle à la base, on obtient
- Une pyramide réduite de sommet S et de base $A'B'C'D'$.

$ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont de même nature.
- Un tronc de pyramide de hauteur OO' et de bases $A'B'C'D'$ et $ABCD$.
- La pyramide de hauteur $O'S$ et de base $A'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide de hauteur OS et de base $ABCD$.

Le coefficient de réduction k est tel que : $k = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SD'}{SD}$.
- Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{V}$ désigne respectivement le l'aire et le volume de la pyramide de hauteur OS et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{V}'$ désigne respectivement l'aire et le volume de la pyramide de hauteur $O'S$, alors.

$\mathscr{A}' = k^2\mathscr{A}$

$\mathscr{V}' = k^3\mathscr{V}$



4 Exercice d'application

Énonce

$SABCD$ est une pyramide régulière dont la base est un carré de 240 cm de côté.

1. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à sa base. Le tronc de pyramide obtenu (la partie différente de la réduction) est un récipient de 30 cm de profondeur et dont l'ouverture est un carré de 80 cm de côté.

a) Montre que la hauteur de la pyramide initiale $SABCD$ est de 45 cm et que celle de la pyramide réduite est de 15 cm.

b) Calcule le volume de ce récipient.

2. Les faces latérales de ce récipients sont des trapèzes de mêmes dimensions.

a) Montre que la hauteur de ces trapèzes est $10\sqrt{73}$ cm.

b) Calcule l'aire latérale de ce récipient.

Solution

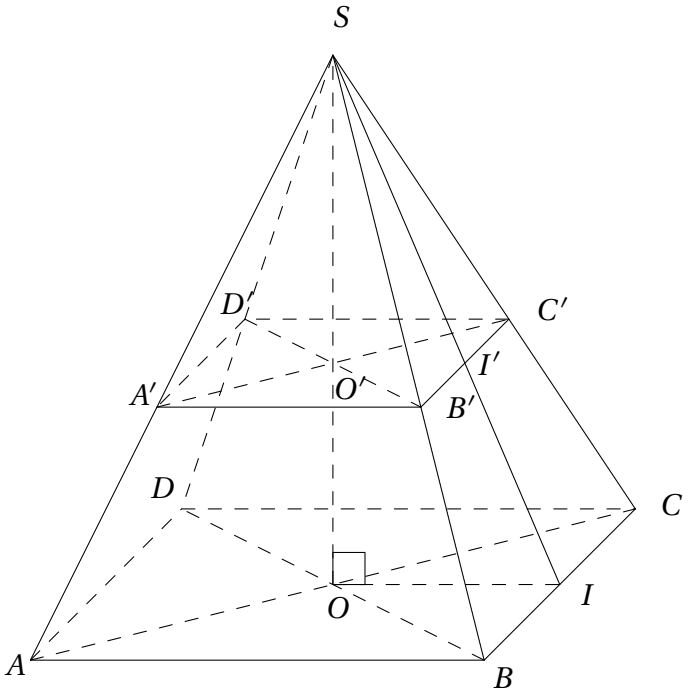
1. a) Montrons que la hauteur de la pyramide initiale $SABCD$ est de 45 cm.
- La pyramide $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$ de 240 cm de côté et la pyramide $SA'B'C'D'$ a pour base le carré $A'B'C'D'$ de 80 cm de côté. Calculons donc le coefficient de réduction k.

$k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{80}{240} = \dfrac{1}{3}$.

$k = \dfrac{1}{3} = \dfrac{SO'}{SO} \Longrightarrow SO = 3SO'$ or $SO' = SO - OO'$, donc $SO = 3(SO - OO') \Longrightarrow SO = \dfrac{3OO'}{2} = \dfrac{3\times 30}{2} = \dfrac{90}{2} = 45$; $\boxed{SO = 45 \text{ cm}}$

M. GUEYE 77 135 23 62

• On a $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow SO' = \dfrac{SO}{3} = \dfrac{45}{3} = 15$; $\boxed{SO' = 15 \text{ cm}}$



b) Calculons le volume du récipient.

Soit $\mathscr{V}_1$ le volume de la pyramide initiale, $\mathscr{V}_2$ le volume de la pyramide réduite et $\mathscr{V}_3$ le volume du récipient.

On a la relation $\mathscr{V}_2 = k^3\mathscr{V}_1$, or $\mathscr{V}_2 = \mathscr{V}_1 - \mathscr{V}_3$, donc $\mathscr{V}_1 - \mathscr{V}_3 = k^3\mathscr{V}_1 \Longrightarrow \mathscr{V}_3 = (1-k^3)\mathscr{V}_1$.

Calculons alors $\mathscr{V}_1$

$\mathscr{V}_1 = \dfrac{\mathscr{A}_b \times h}{3}$; avec $\mathscr{A}_b = AB^2 = 240^2 = 57600 \text{ cm}^2$ et $h = SO = 45 \text{ cm}$.

Donc $\mathscr{V}_1 = \dfrac{57600 \times 45}{3} = 864000 \text{ cm}^3$.

Alors $\mathscr{V}_3 = \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right) \times 864000 = 832000 \text{ cm}^3$.

$\boxed{\mathscr{V}_3 = 832000 \text{ cm}^3}$.

2. a) Montrons que la hauteur de ces trapèzes est de $10\sqrt{73}$.

$\dfrac{SI'}{SI} = k = \dfrac{1}{3}$ or $SI' = SI - II'$, donc $II' = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)SI$. Calculons alors SI.

Le triangle SOI est rectangle en O, d'après $SI^2 = SO^2 - OI^2$ or $IO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{240}{2} = 120$.

Donc $SI = \sqrt{45^2 + 120^2} = \sqrt{16425} = 10\sqrt{73}$;

Alors $II' = \dfrac{2}{3} \times 15\sqrt{73} = 10\sqrt{73}$.

$\boxed{II' = 10\sqrt{73} \text{ cm}}$.

b) Calculons l'aire latérale du récipient.

L'aire latérale $\mathscr{A}_l$ du récipient est égale l'aire d'une face (trapèze) multipliée par 4 :

$\mathscr{A}_l = \dfrac{(AB + A'B') \times II'}{2} \times 4 = \dfrac{(240 + 80) \times 10\sqrt{73}}{2} \times 4 = 6400\sqrt{73}$.

$\boxed{\mathscr{A}_l = 6400\sqrt{73} \text{ cm}^2}$

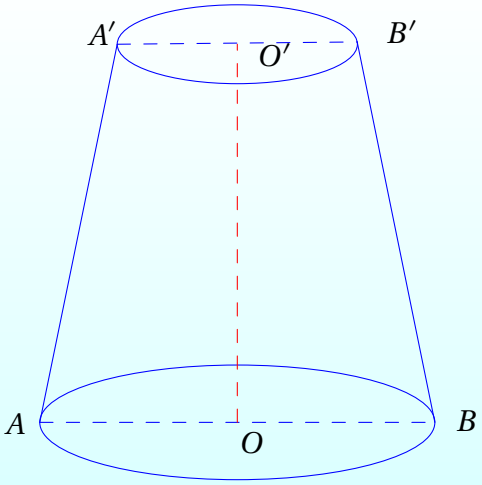
II Exercices

Exercice 1

Soit un cône de résolution de diamètre de base $AB = 18$ cm et de hauteur $[SO]$ telle que $SO = 8$ cm.
Soit O le centre de la base.
1. Fais une représentation du cône en perspective cavalière.
2. Calcule le volume du cône.
3. On sectionne ce cône par un plan parallèle à la base à 3 cm de celle-ci. On obtient un cône réduit et un tronc de cône.
a) Calcule le coefficient k de réduction et le volume $\mathcal{V}_2$ du cône réduit.
b) Calcule le volume du tronc de cône.

Exercice 2

La figure ci-contre est un tronc de cône de révolution de diamètre de bases $[AB]$ et $[A'B']$ et de hauteur OO' associé au cône de révolution de hauteur OS et diamètre de base $[AB]$.
On donne : $OA = 15$ cm ; $O'A' = 9$ cm et $OO' = 8$ cm.
Le tronc de cône est obtenu en coupant le cône associé par un plan parallèle à la base.
1. Calcule la hauteur OS du cône associé et la mesure de la génératrice.
2. Calcule le volume $\mathcal{V}_1$ du cône associé.
3. Calcule le volume $\mathcal{V}_2$ du tronc de cône



Exercice 3

$SABCD$ est une pyramide de base rectangulaire $ABCD$ de centre O. Le point S désigne le sommet de la pyramide.
1. Représente la pyramide $SABCD$ telle qu'elle soit vue par ses faces SAB et SBC.
2. Détermine la position relative des droites (OS) et (AC).
3. On donne : $AB = 7,2$ cm ; $BC = 5,4$ cm et $OS = 6$ cm.
a) Calcule la longueur d'une arête latérale.
b) Calcule le volume de la pyramide.

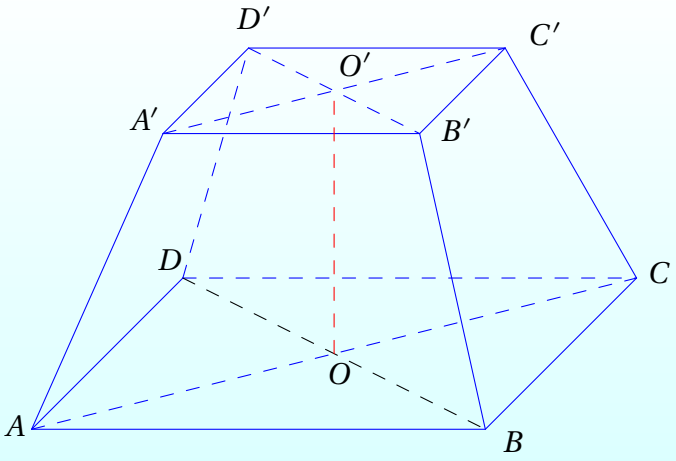
Exercice 4

Soit $SABCD$ une pyramide régulière à base carré $ABCD$ de centre O. OS désigne sa hauteur.
On donne : $AB = 10$ cm ; $OS = 15$ cm.
1. Donne une représentation de $SABCD$ en perspective cavalière.
2. On sectionne la pyramide par un plan parallèle à la base à $\frac{2}{3}$ du sommet et coupant les segments

$[AS]$; $[BS]$; $[CS]$ et $[DS]$ respectivement en A'; B'; C' et D'.
a) Calcule le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide $SABCD$ et en déduire celui du tronc.
b) Calcule l'aire du carré $ABCD$ et en déduire celle quadrilatère $A'B'C'D'$.

Exercice 5

$ABCDA'B'C'D'$ est un tronc de pyramide associé à la pyramide à base rectangulaire $ABCD$ et de hauteur OS.
On donne : $AB = 10$ cm ; $A'B' = 6$ cm ; $AD = 7,5$ cm et $OO' = 4$ cm.
1. Reprends la figure où l'on fera paraitre la pyramide $SABCD$ de sommet S.
2. Calcule la hauteur OS de la pyramide.
3. Calcule le volume $\mathscr{V}_1$ de $SABCD$ et le volume $\mathscr{V}_2$ de $SA'B'C'D'$.
4. Des questions précédentes, en déduire le volume $\mathscr{V}_3$ du tronc de pyramide $ABCDA'B'C'D'$

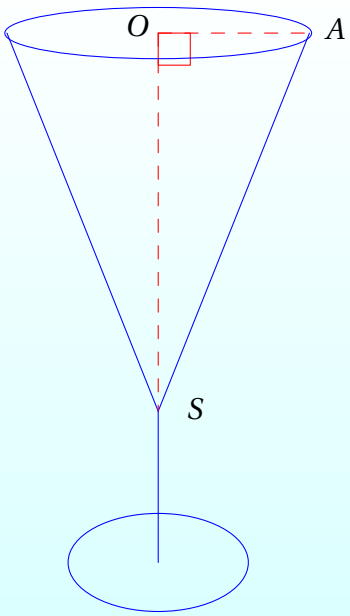


Exercice 6

$SABC$ est un tétraèdre régulier de hauteur $SO = 9$ cm et dont une arête de base mesure 6 cm.
1. Donne une représentation de $SABC$ vue par ses faces SAB et SBC.
2. Calcule le volume $\mathscr{V}$ de $SABC$.
3. Calcule l'aire $\mathscr{A}_f$ d'une face latérale.
4. Calcule l'angle α formé par une arête latérale et la hauteur.
On donne : $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{21} = 4,5$ et $\sqrt{93} = 9,6$

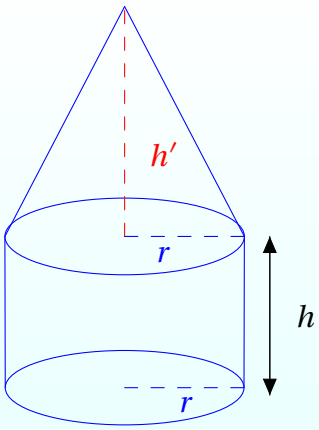
Exercice 7

On considère le verre ci-contre, ayant la forme d'un cône de révolution, de hauteur $OS = 12$ cm et de rayon $OA = 3$ cm.
1. Montre que le volume de ce verre (en cm^3) est égal à 36π.
2. Avec un litre d'eau, combien de fois peut-on remplir ce verre entièrement ?
3. Si on remplit ce verre d'eau aux $\frac{5}{6}$ de sa hauteur, quel est alors le volume d'eau utilisé ? On donnera le résultat arrondi au cm^3 près.
4. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$ (donner la valeur au degré près)

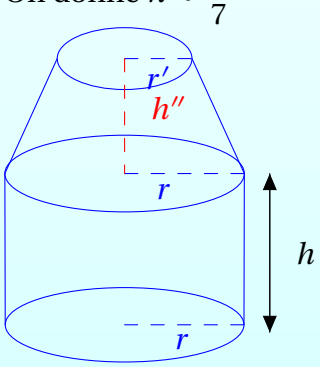


Exercice 8

Un réservoir est constitué d'un cylindre de rayon de base r et de hauteur h et d'un cône de révolution de même rayon de base et de hauteur $h' = \frac{3h}{2}$.
(Voir la figure ci-contre)

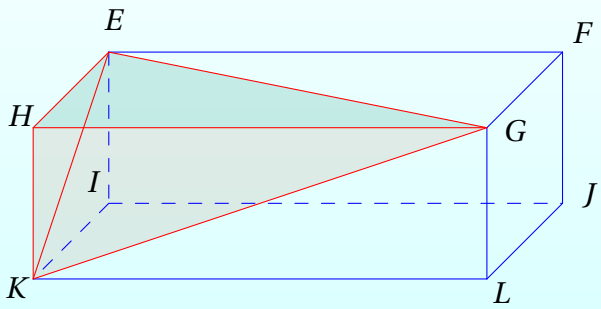


1. Montre que le volume de cylindre est le double de celui du cône.
2. Dans la suite on donne $r = 4$ cm.
a) Calcule la hauteur h' du cône pour que le volume du réservoir soit de 528 cm^3.
b) Pour créer une couverture du réservoir, on coupe le cône à mi-hauteur parallèlement au plan de sa base. On obtient un réservoir ayant la forme indiquée par la figure ci-dessous. Calcule le volume restant du réservoir.
On donne $\pi \approx \frac{22}{7}$



Exercice 9

$EFGHIJKL$ est un parallélépipède rectangle tel que : $EF = 8$ cm ; $EH = 6$ cm et $HK = 4$ cm.
1. Calcule le volume du parallélépipède.
2. Calcule EG.
3. Calcule l'aire du triangle EGH.
4. Calcule le volume de la pyramide de base EGH de sommet K



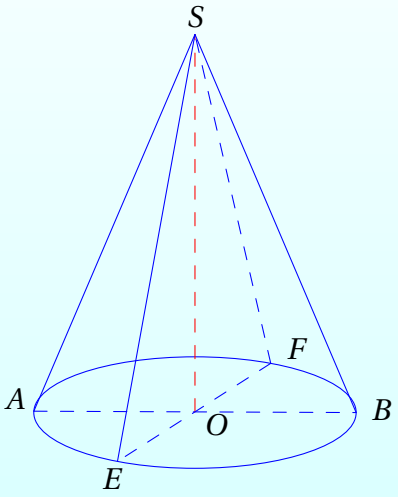
Exercice 10

Un trapèze $ABCD$ est rectangle en A et en B, $[BC]$ est la grande base et $[AD]$ la petite base.
On donne $AB = 3$ cm ; $AD = 4$ cm et $BC = 7$ cm.
1. Fais une figure et calcule CD.
2. On considère la pyramide de base $ABCD$ et de sommet I et de hauteur IA telle que $IA = 12$ cm.
a) Fais une figure.

b) Calcule l'aire de $ABCD$.
c) Calcule le volume de la pyramide.
3. Un plan parallèle à la base passant par A'un point du segment $[AI]$ coupe les arêtes $[IB]$; $[IC]$ et $[ID]$ respectivement en B'; C' et D'.
ON donne $IA' = 6$ cm.
a) Calcule les distances $A'B'$ et $B'C'$.
b) Calcule le rapport k qui permet de passer de la pyramide $IABCD$ à la pyramide $IA'B'C'D'$.
c) En déduire le volume de la pyramide $IA'B'C'D'$

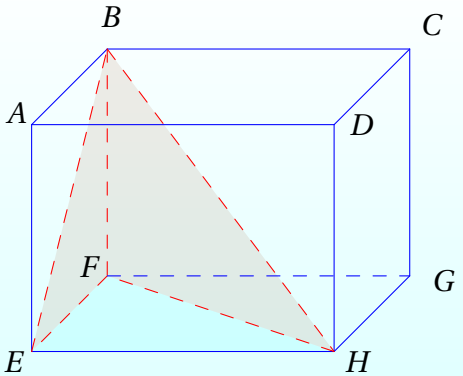
Exercice 11

La figure ci-contre est un cône de révolution $\mathscr{C}$, de sommet S et de diamètre de base $[AB]$ et O milieu de $[AB]$.
1. Reproduis la figure et détermine la position de $[OS]$ par rapport aux diamètres $[AB]$ et $[EF]$.
2. a) Quelle est la nature du triangle OSE?
b) Calcule OE sachant que $ES = 6$ cm et $OS = 4,8$ cm.
c) Calcule l'aire de base du cône $\mathscr{C}$.
3. On pose β l'angle de développement du cône. Donne la mesure de β à un degré près par excès.
4. On agrandit le cône $\mathscr{C}$ pour obtenir le cône $\mathscr{C}'$ tel que $\frac{SA}{SA'} = \frac{2}{3}$.
a) Complète la figure.
b) Quelle est la valeur du coefficient d'agrandissement?
5. Calcule l'aire latérale du cône $\mathscr{C}$ et déduis-en celle du cône $\mathscr{C}'$.
6. Calcule le volume $\mathscr{V}$ du cône $\mathscr{C}$ et déduis-en le volume $\mathscr{V}'$ du cône $\mathscr{C}'$.
7. Calcule le volume du tronc de cône de diamètre $[AB]$ et $[A'B']$



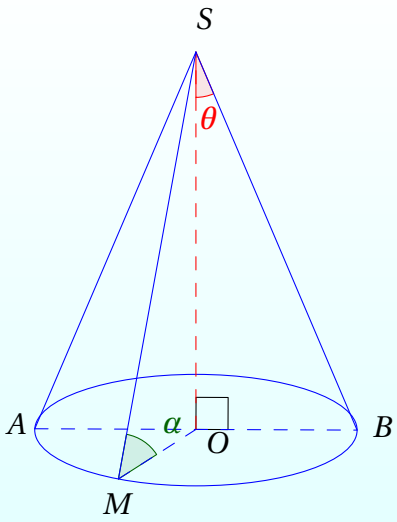
Exercice 12

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a = 5$ cm.
1. Montre que le triangle BFH est rectangle. Calcule $\sin \widehat{FBH}$.
2.On considère le tétraèdre de base EFH et de hauteur $[BF]$.
a) Fais une représentation en perspective cavalière de $BEFH$ vu par la face BFH.
b) Calcule le volume $\mathscr{V}$ de $BEFH$.
3. On agrandit le tétraèdre $BEFH$ tel que le coefficient k d'agrandissement soit égal à 1,5.
On obtient le tétraèdre $BE'F'H'$ avec $E' \in (EB)$; $F' \in (FB)$ et $H \in (HB)$.
a) Calcule l'aire de $E'F'H'$.
b) Calcule rapidement le volume $\mathscr{V}'$ de $BE'F'H'$.



Exercice 13

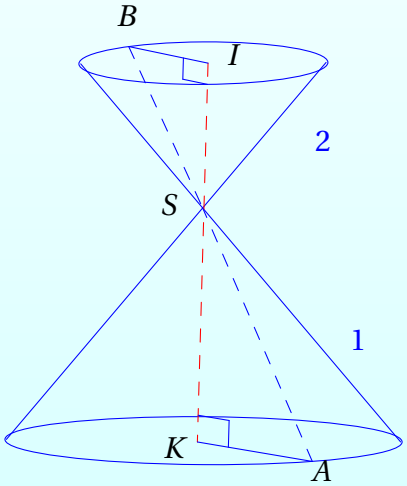
La figure ci-contre est un cône de révolution.
OS : est la hauteur.
$OM = R$: est le rayon de base.
$\mathcal{V}$: est le volume.
On prend une valeur approchée de $\pi = \dfrac{22}{7}$.



1. Calcule la hauteur OS si $\mathcal{V} = 3696$ cm^3 et $R = 14$ cm.
2. Calcule l'angle $\theta = \widehat{OSB}$ du cône et l'angle α que fait une génératrice avec le plan du cercle de base à 1^o près.
On donne : $\sqrt{130} = 11$ et $\sin 55^o = 0,81$.
3. Calcule l'angle β de développement du cône.
4. On sectionne le cône par un plan parallèle à la base à partir de la base tel que $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{3}{5}$; le point O' est le centre de base du cône réduit.
Calcule le volume $\mathcal{V}'$ du cône réduit en utilisant le coefficient de réduction.
5. Des résultats précédents, calcule le volume du tronc de cône.
6. calcule l'aire latérale du tronc de cône obtenu

Exercice 14

Les deux cônes de révolutions de rayons KA et IB sont opposés par le sommet. Les droites (AB) et (KI) se coupent en S, et de plus, (BI) et (KA) sont parallèles.
On donne : $KA = 4,5$ cm ; $KS = 6$ cm et $SI = 4$ cm.
1. Calcule BI.
2. Calcule le volume $\mathcal{V}_1$ du cône 1.
(Donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au cm^3).
3. Le cône 2 est une redirection du cône 1.
a) Quel est le coefficient de réduction ?
b) Par quel nombre exact, faut-il multiplier $\mathcal{V}_1$ du cône 1 pour obtenir le volume $\mathcal{V}_2$ du cône 2 ?
Calcule alors le volume $\mathcal{V}_2$



Exercice 15

La balise ci-contre est formé d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A.
Le segment $[BC]$ est un diamètre de la base du cône et le point O est le centre de cette base.
On donne $OA = BC = 6$ dm.

1. Montre que $AB = 3\sqrt{5}$ dm.

2. Dans cette question , on se propose de calculer des volumes.

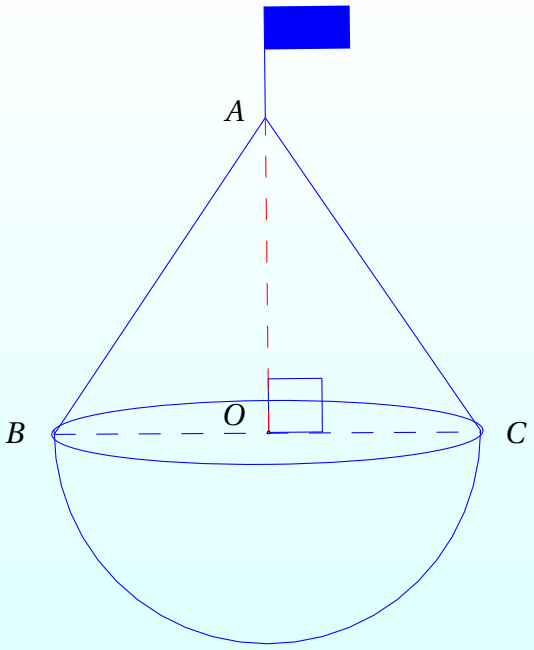
a) Calcule en fonction de π le volume du cône (on prendra la valeur exacte de ce volume).

b) Calcule en fonction de π le volume de la demi-boule (on donnera la valeur exacte de ce volume).

c) Calcule la valeur exacte du volume de la balise, puis en donne la valeur arrondie à 0,1 dm^3 près.

On rappelle que si $\mathcal{V}$ est le volume d'une boule de rayon R, alors $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

On rappelle que si $\mathcal{V}$ est le volume d'un cône de hauteur h et rayon r, alors $\mathcal{V} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

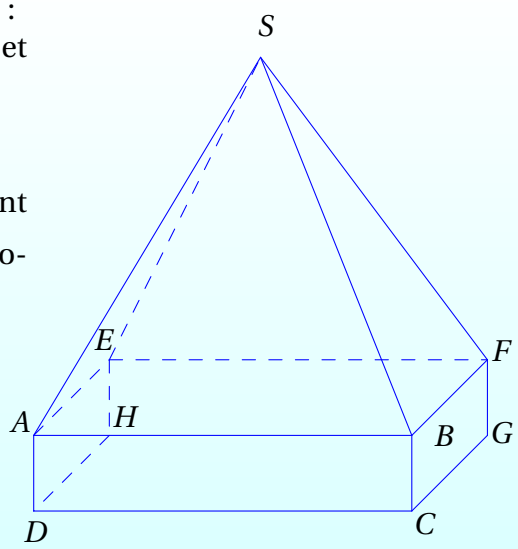


Exercice 16

La maquette de maison représentée ci-contre est composée :
- d'un pavé droit de dimensions : $AB = 30$ cm ; $AE = 20$ cm et $AD = 5$ cm.
- surmonté d'une pyramide de hauteur 6 cm.

1. Calcule le volume $\mathcal{V}_1$ de cette maquette

2. sachant que cette maquette est une réduction de coefficient $\frac{1}{50}$ de la maison réelle, déduire de la première question le volume $\mathcal{V}_2$ en m^3 de la maison.



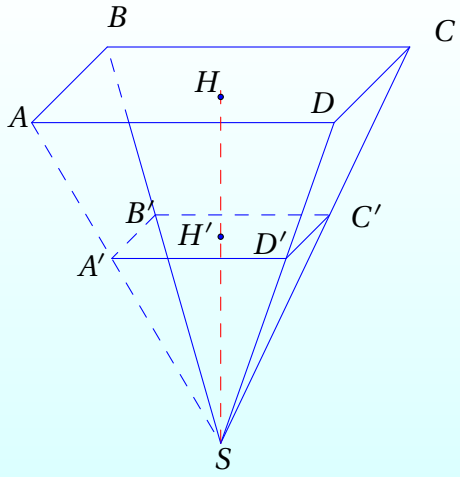
Exercice 17

Une boite de chocolats à la forme d'une pyramide tronquée (voir la figure ci-dessous). Le rectangle $ABCD$ de centre H et le rectangle $A'B'C'D'$ de centre H' sont des plans parallèles. On donne : $AB = 6$ cm ; $BC = 18$ cm $HH' = 8$ cm $SH = 24$ cm.

1. Calcule le volume $\mathcal{V}_1$ de la pyramide $SABCD$ de hauteur SH.

2. Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide $SABCD$ à la pyramide $SA'B'C'D'$ de hauteur SH'?

3. Déduis-en le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide $SA'B'C'D'$ puis le volume $\mathcal{V}_3$ de la boite de chocolats?



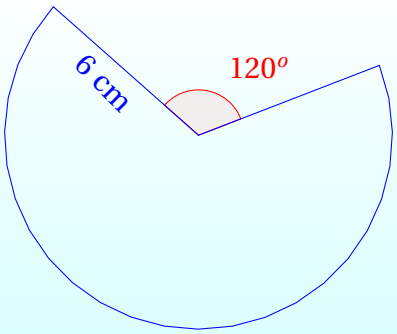
Exercice 18

La figure ci-contre représente le patron de la partie latérale d'un cône de révolution.

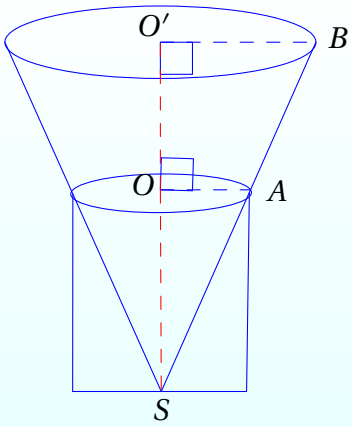
1. Montre que le rayon de la base est 4 cm et que sa hauteur h mesure $2\sqrt{5}$ cm.

2. Calcule son volume.

3. On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base à $\frac{2}{3}$ de la hauteur à partir de la base. Calcule le volume du tronc



Exercice 19



Un château d'eau a la forme d'un tronc de cône (voir dessin ci-dessus).

On donne $OO' = OA = OS = 5$ cm

1. calcule la distance $O'B$

2. Calcule le volume du tronc du cône $(\mathscr{C})$ de sommet S et de base le disque de rayon $[OA]$.

3. Soit $(\mathscr{C}')$ le cône de sommet S et de base le disque de rayon $[O'B]$. En constatant que le cône $(\mathscr{C}')$ est un agrandissement du cône $(\mathscr{C})$, montre que le volume de $(\mathscr{C}')$ est 8 fois plus grand que celui de $(\mathscr{C})$.

4. Calcule alors le volume du cône $(\mathscr{C})$ puis déduis en celui du château d'eau.

I Rappel de cours

1 Définition.

Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même telle que :
- Tout point du plan admet une image et une seule.
- Les images de deux points distincts sont toujours deux points distincts.

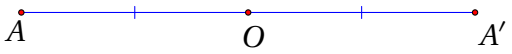
■ Exemples

La translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale (orthogonale), la rotation sont des transformations du plan.

2 Symétrie centrale.

■ Symétrique d'un point

Le symétrique A' du point A dans la symétrie de centre O est tel que O soit le milieu de $[AA']$.



■ Propriétés

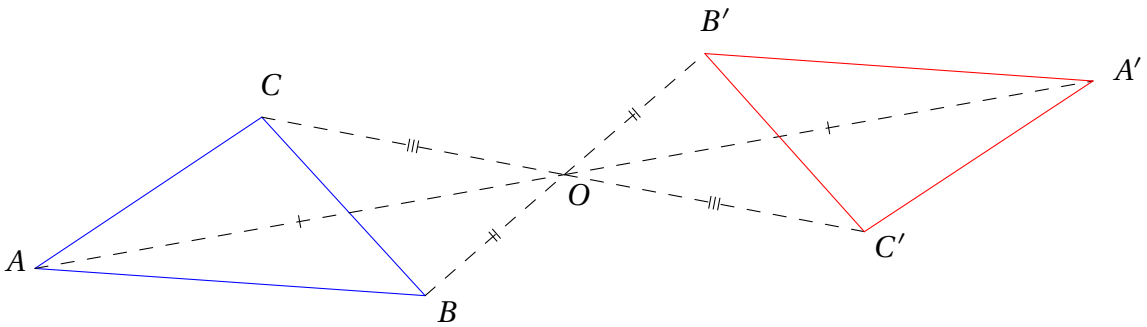
- Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie
- Une figure et son image sont superposables.
- L'image d'un segment est un segment de support parallèle et de même longueur.

■ Méthode de construction

▶ Pour construire le symétrie A' du point A dans la symétrie de centre O :
- on trace la demi-droite $[AO)$;
- on prend la mesure OA et on la reporte sur $[AO)$ à partir de O;
- on efface les traits de construction;
- on code les segments égaux.

▶ Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie centrale :
- on construit les symétriques de chaque sommet;
- on relie les images de la même façon que les points de la figure initiale.

■ Exemple de symétrique d'une figure



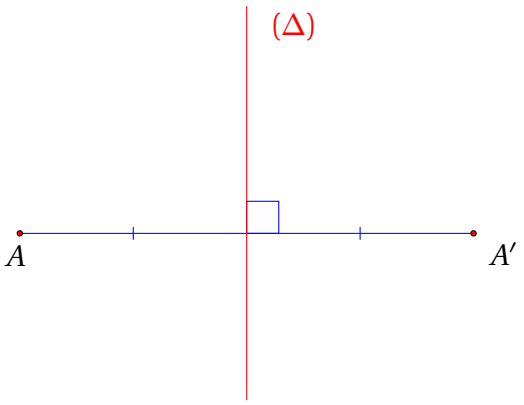
Cette figure représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie de centre O

3 Symétrie axiale

■ Symétrique d'un point

Le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) est tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[AA']$.

M. GUEYE
77 135 23 62



■ Propriétés

• Une figure et son image sont superposables.

• L'image d'un segment est un segment de même longueur mais en général non parallèle au segment initial.

■ Méthode de construction

► Pour construire le symétrique A' du point A dans la symétrie d'axe (Δ) :

• on trace un arc de cercle de centre A qui coupe l'axe en deux points E et F (ne pas les nommer sur la figure) ;

• on trace deux nouveaux ars de cercle de même rayon que l'arc initial de centre E et F ;

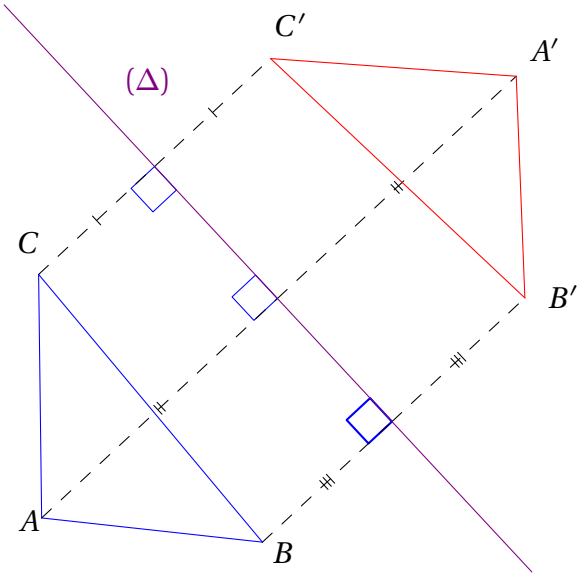
• les deux arcs se coupent en A'.

► Pour construire le symétrique d'une figure dans une symétrie axiale :

• on construis les symétriques de chaque sommet ;

• on relie les images de la même façons que les points de la figure initiale.

■ Exemple de symétrique d'une figure

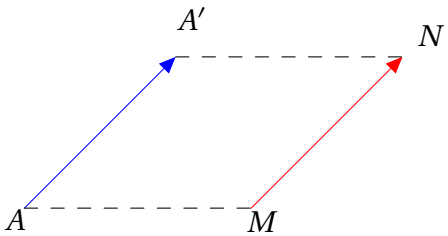


La figure ci-dessus représente un triangle ABC et son symétrique $A'B'C'$ dans la symétrie d'axe (Δ).

4 Translation.

■ Translation d'un point

Avec vecteurs : Le point A', l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ est tel que : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$. On note $A' = t_{\overrightarrow{MN}}(A)$



Sans vecteurs : Le point A', image du point A dans la translation qui transforme M en N est tel que $MNA'A$ est un parallélogramme.

Propriétés

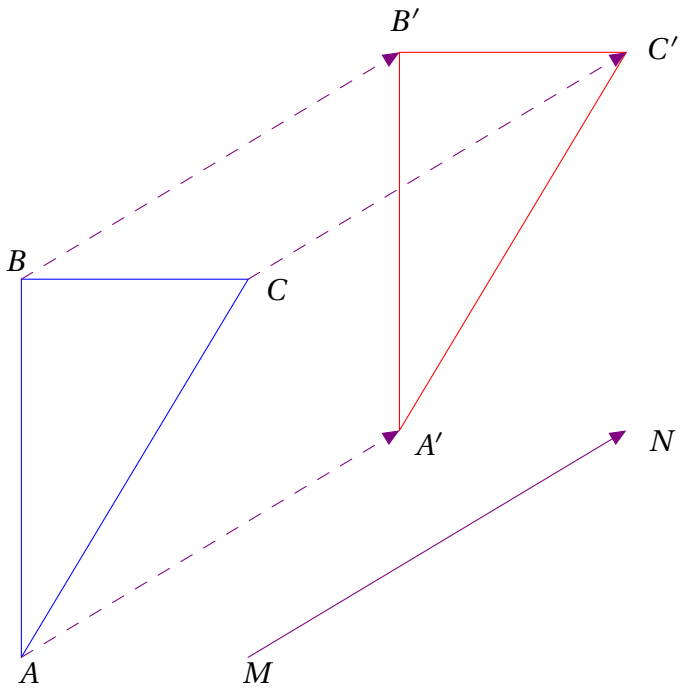
- L'image d'un segment est un segment de support parallèle et de même longueur.
- La translation d'une figure est une figure superposable.

Méthode de construction

Trois points étant placés, on termine la construction du parallélogramme $MNA'A$ de la façons suivante.

- on reporte la distance MN à partir de A (en effet $MN = A'A$).
- on reporte la distance MA à partir de N (en effet $MA = NA'$) ;
- le point d'intersection de ces deux arcs est le point A' ;
- on trace le vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Exemple de translation d'une figure



Sur la figure ci-dessus, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

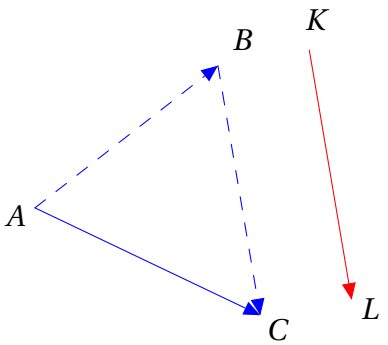
Translations successives

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs distincts. Faire la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ revient à faire la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Exemple

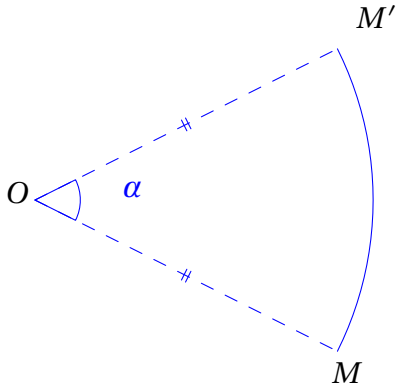
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. pour cela, sur la figure ci-dessous, on a construit le point C image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$: d'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KL}$. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



5 Rotation

■ image d'un point par une rotation

L'image M' du point M dans la rotation de centre O et d'angle α est tel que :
$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$



■ Propriétés

- L'image d'un segment est un segment de longueur.
- l'image d'une figure est une figure superposable.

■ Méthode construction

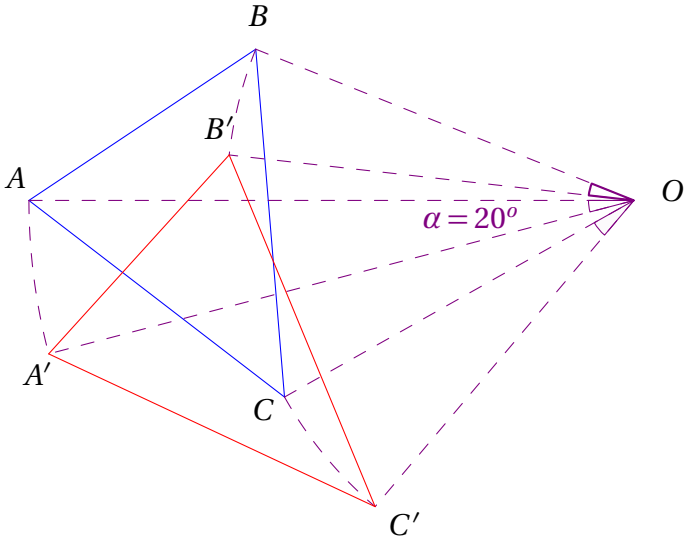
▶ Pour construire l'image M' du point M dans la rotation de centre O et d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre :

- on trace le segment $[OM]$;
- on trace un arc de cercle de centre O partant de M dans le sens de la rotation;
- on trace la demi-droite $[Ox)$ telle que $\widehat{MOx} = \alpha$ en faisant au sens de la rotation;
- M' est l'intersection de l'arc de cercle et de la demi-droite.
- on code les segments de même longueur et l'angle α.
- on efface les traits de constructions inutiles.

▶ Pour construire l'image d'une figure dans une rotation de centre O et d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre :

- on construis les images de chaque sommet;
- on relie les images de la même façons que les points de la figure initiale.

■ Exemple de rotation d'une figure



La figure ci-dessus représente le triangle ABC et son image $A'B'C'$ dans la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 20^o$.

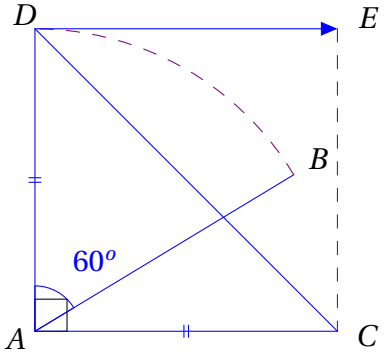
6 Exercice d'application

■ Énonce.

Soit le triangle ACD rectangle et isocèle en A tel que $AD = AC = 4$ cm.

1. Calcule la longueur DC
2. Place le point B image de D dans la rotation de centre A et d'angle 60^o. On prendra le sens des aiguilles d'une montre comme sens de rotation.
3. Démontre que le triangle ABD est un triangle équilatéral.
4. Place le point E, l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Démontre que le quadrilatère $ABED$ est un carré

■ **Solution.**

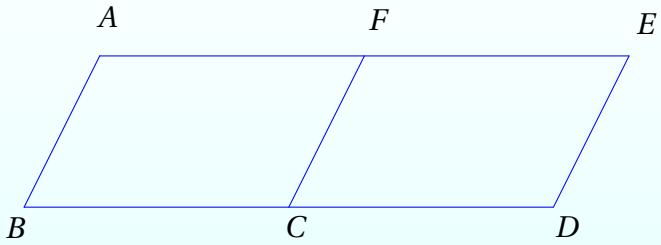


1. Calculons la longueur DC.
ACD est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore : $DC^2 = AD^2 + AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Longrightarrow DC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $\boxed{DC = 4\sqrt{2}\text{ cm}}$.
2. voir figure.
3. démontrons que le triangle ABD est équilatéral.
B est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle 60^o, donc $AD = AC$ et $\widehat{BAD} = 60^o$. D'où ABD est un triangle équilatéral.
4. démontrons que le quadrilatère $ABED$ est un carré.
$E = t_{\overrightarrow{AC}}(D) \Longrightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$, donc le quadrilatère $ACED$ est un parallélogramme ayant de plus deux côtés consécutifs perpendiculaires de même longueur : D'où $ACED$ est un carré.

II Exercices

Exercice 1

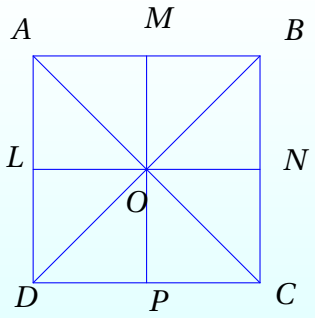
Sur la figure ci-contre $ABCF$ et $FEDC$ sont deux parallélogramme tels que C et F sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AE]$.



En utilisant uniquement les points de cette figure, donne :
1. un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB}$.
2. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CE}$.
3. Un vecteur n'ayant pas de même direction que $\overrightarrow{CB}$.
4. L'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.
5. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE}$.
6. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Exercice 2

Le schéma ci-contre représente un carré $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O. Les points M, N, P et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.



Réponds aux questions suivantes sans justifier.

1. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport à la droite (LN)?

2. Quel est le symétrique du triangle AOM par rapport au point O?

3. On considère la rotation de centre O et d'angle 90^o dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est l'image du triangle AOM par cette rotation?

4. Recopie et complète les égalités vectorielles suivantes.

$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}=\cdots$ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OC}=\cdots$

Exercice 3

1. trace un rectangle $ABCD$, puis son image par la rotation de centre A et d'angle 90^o (on désignera par E, F et G les images respectives de B, C et D).

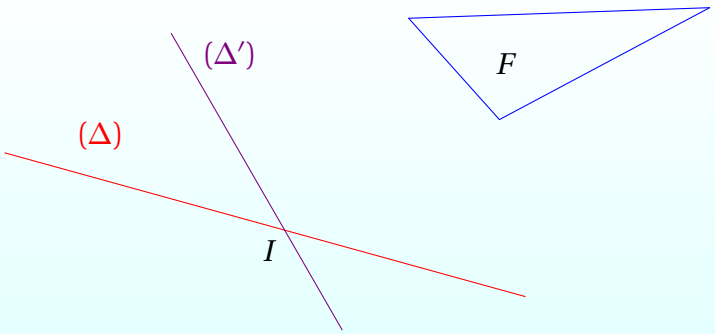
2. Construis l'image de toute la figure par l'action successive de :

a) la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$;

b) la symétrie par rapport à la droite (EA), suivie de la symétrie par rapport à la droite (CD);

c) la symétrie par rapport à D suivie de la symétrie par rapport à G.

Exercice 4



1. Construis l'image F_1 de la figure F par la symétrie par rapport à (Δ), puis l'image F_2 de F_1 par la symétrie d'axe (Δ').

2. Par quelle transformation passe-t-on de la figure F à la figure F_2

Exercice 5

1. Reproduis la figure ci-dessous en vraie grandeur sachant que : $OA=3$ cm et que les points A, O et C, d'une part, et points B, O et D d'autre part, sont alignés.

2. Démontre que $ABCD$ est un rectangle.

3. Place, sur la figure, le point E l'image de du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

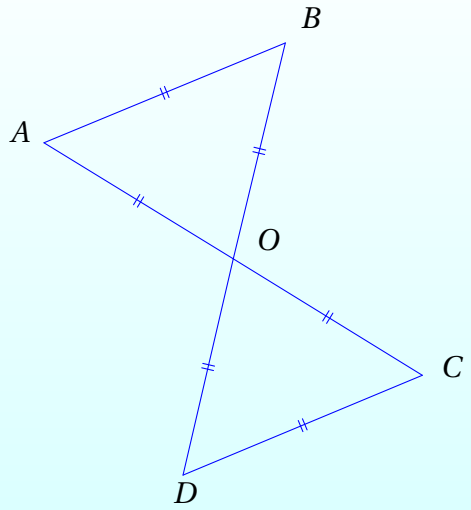
4. Place le point F, l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle 60^o dans le sens des

M. GUEYE 77 135 23 62

aiguilles d'une montre.

5. Montre que les points A, B, C, D, E et F sont sur un même cercle que l'on précisera.

6. Écris un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$



Exercice 6

1. Trace un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côtés.

2. Construis l'image du triangle ABC.

a) par la rotation de centre A, d'angle 60^o dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ;

b) par la rotation de centre B, d'angle 90^o dans le sens des aiguilles d'une montre ;

c) par la rotation de centre C, d'angle 120^o dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Exercice 7

1. Construis un carré $ABCD$ et le triangle équilatéral ABE, extérieur à $ABCD$, ayant le côté commun le segment $[AB]$ tel que $AB = 4$ cm.
Construis le point O centre de gravité du triangle ABE.

2. Construis $A_1B_1C_1D_1$ image de $ABCD$ par la rotation $\mathscr{R}$ de centre O et d'angle 120^o, dans le sens des aiguilles d'une montre.

3. Construis $A_2B_2C_2D_2$ image de $A_1B_1C_1D_1$ par la même rotation.

4. Quelle est la rotation qui transforme $ABCD$ en $A_2B_2C_2D_2$?

5. Quelle est l'image de $A_2B_2C_2D_2$ par la rotation $\mathscr{R}$?

Exercice 8

1. Construis un triangle ABC tel que : $BC = 4$; $AB = 3$ et $AC = 2$. On appelle cette figure F_1.

2. Construis l'image de F_1 par la symétrie d'axe (AB). on l'appelle F_2.

3. Construis l'image de F_1 par la symétrie de centre B. On l'appelle F_3.

4. Construis l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On l'appelle F_4

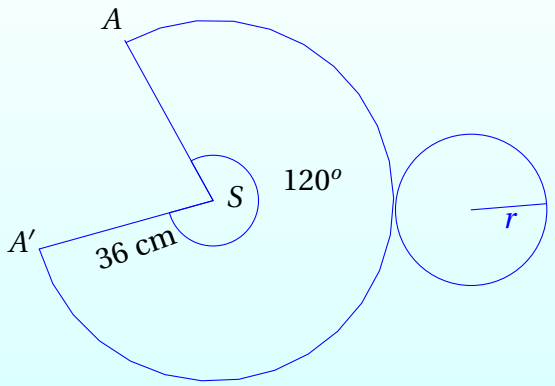
Troisième partie

ÉPREUVES D'EXAMENS

I BFEM 2010

Exercice 1

Le schéma ci-contre représente le patron de cône d'un révolution de sommet S, de rayon de base r. La génératrice $[SA]$ a pour longueur 36 cm.



1. Justifie la circonférence de base mesure 54π cm.
2. Montre son rayon de base r vaut 27 cm.
3. Justifie que la hauteur de ce cône est égale à $9\sqrt{7}$ cm.
4. Calcule l'aire de la surface totale de ce cône.
On prendra $\pi = 3,14$.

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB + AC + BC = 72$ cm et $4AB = 3AC$.
1. sans calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, montre que :
a) $7AB + 3BC = 216$ cm.
b) $3BC - 5AB = 0$ cm.
2. En utilisant les résultats de la question **1.)**.
3. Calcule AB et BC ; déduis-en AC

Exercice 3

Un commerçant fixe le prix de vente de chacun de ses articles en prévoyant un bénéfice de 25% sur le prix d'achat.
Soit x le prix d'achat d'un article et p le prix de vente.
1. Justifie que : $p = \frac{5}{4}x$.
2. Calcule le prix de vente d'un article acheté à 400 F.
3. Calcule le prix d'achat d'un article vendu à 1250 F.
4. Représente graphiquement dans un repère orthonormal (O, I, J), où 1 cm représente 100 F , l'application qui à tout x associe p.
5. Détermine graphiquement le prix d'achat d'un article vendu à 750 F.

Exercice 4

On donne l'expression $A(x)=(2x+1)(5x+1)-(4x+2)(x-2)$.
1. Développe et réduis $A(x)$.
2. Factorise $A(x)$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x+1)(3x+5)\leq 0$

II BFEM 2011

Exercice 1

On donne les réels : $m=1-2\sqrt{3}$; $p=\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ et $q=\sqrt{13+4\sqrt{3}}$
1. Montre que m est négatif
2. Calcule m^2 puis déduis-en que p et m sont des opposés
3. Encadre m à 10^{-2} sachant que : $1,732<\sqrt{3}<1,733$
4. Montre que $p\times q=11$

Exercice 2

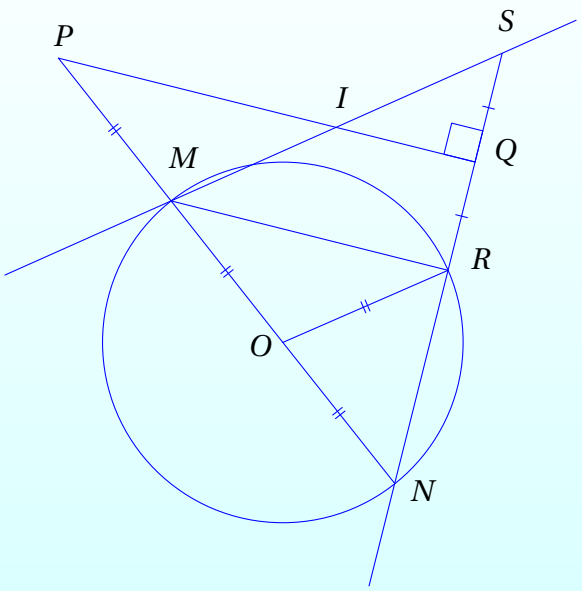
Les lutteurs d'une écurie sont répartis en cinq classes de poids (catégories de poids) d'amplitude 15 kg.
On a les classes suivantes $[80;95[$; $[95;110[$; $[110;125[$; $[125;140[$ et $[140;155[$.
1. Les lutteurs de la classe $[95;110[$ sont au nombre de 6 et représentent 12% de l'effectif de l'écurie. Montre qu'il y a 50 lutteurs dans cette écurie.
2.L'angle de la représentation de la classe $[110;125[$ dans le diagramme circulaire de la série est 36^o. Montre que le nombre de lutteurs de cette classe est 5.
3. La fréquence de la $[125;140[$ est 0,3. Vérifie que cette classe compte 15 lutteurs.
4. L'effectif de la classe $[140;155[$ est le tiers de l'effectif de la classe $[80;95[$. Montre qu'il y a 6 lutteurs dans la classe $[140;155[$.
5. Établis le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série puis déduis-en la classe médiane.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J), on considère les droites (D_1) : $y=-x+1$ et (D_2) : $x-y+3=0$.
1. Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
2. a) Construis les droites (D_1) et (D_2).
b) Justifie par calcul que le point J appartient à (D_1).
c) On appelle E le point d'intersection de (D_1) et (D_2). Justifie par le calcul que E a pour couple de coordonnées $(-1;2)$.
d) Calcule la distance EJ.
e) Détermine une équation de la droite (D_3) passant par J et parallèle à (D_2).
f) Quelle est la positon relative de (D_3) et (D_1)? Justifie ta réponse.

Exercice 4

On considère la figure codée ci-dessous :



1. justifie que le triangle NRM est rectangle.
Dans toute la suite du problème on suppose que $MR = 8$ cm et $NR = 6$ cm.
2. Calcule MN.
3. Calcule $\tan\widehat{RMN}$.
4. Démontre que I est le milieu de $[MS]$.
5. Montre que $NQ = 9$ cm.
6. Démontre que la droite (OR) est parallèle à (MS).

III BFEM 2012

Exercice 1

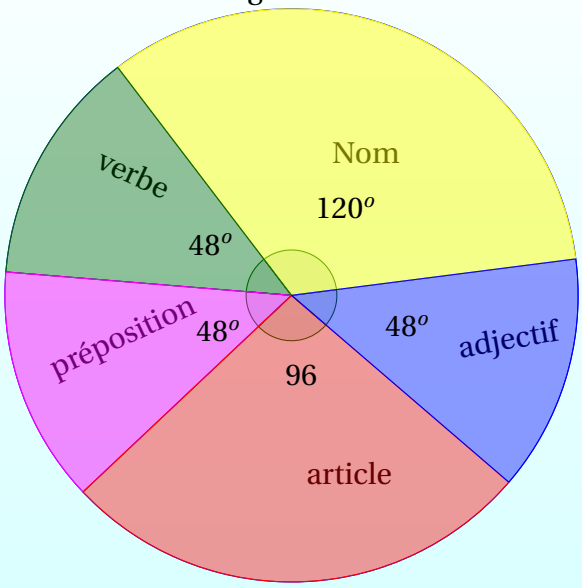
1. Soit $t = \sqrt{45} + \sqrt{196} - \sqrt{180} - \sqrt{245}$
Écris t sous la forme $a\sqrt{b} + c$ où a ; b et c sont des décimaux relatifs à déterminer avec b positif.
2. On donne les réels $x = \dfrac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $y = 3\sqrt{5} - 7$
a) Écris x avec un dénominateur rationnel
b) Justifie que y est négatif
c) Justifie que $x = -y$
d) Encadre x à 10^{-2} près sachant que : $2,236 < \sqrt{3} < 2,237$
e) On pose $z = (x-y)^2$. Justifie que $\sqrt{z} = -2y$

Exercice 2

Le Sénégal vient d'administrer une belle leçon de démocratie à la face du monde pour l'organisation d'élection présidentielle incontestée. Le vaincu reconnait sa défaite,félicite le vainqueur.

Une étude statique portant sur les 30 mots de ce texte (un mot quelconque est considéré autant de fois qu'il apparait dans le texte), a donné le diagramme circulaire ci-dessous
1. Lequel des caractères ci-dessous est celui qui est étudié :
- Longueurs des mots,
- nature grammaticale des mots,
- le genre des mots?

2. indique la nature de ce caractère.
3. indique les modalités de ce caractère.
4. Dresse le tableau des effectifs de cette série.
5. Construis le diagramme en bandes de cette série



Exercice 3

1. Construis un triangle MON rectangle en N tel que $MN = 7,5$ cm et $\widehat{MON} = 30^o$.
2. Calcule NO et MO.
3. Soit I le pied de la hauteur issue de N. Calcule NI.
3. La droite passant par M et parallèle à la droite (NI) coupe la droite (NO) en T. Calcule MT.
5. Soit E le centre du cercle circonscrit au triangle MOT ; démontre que MET est un triangle équilatéral

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

1. Démontre que vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
2. Calcule les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.
3. Soit F l'image de B par la translation de vecteurs $\overrightarrow{CE}$. Calcule les coordonnées de F.
4. Justifie que B est le milieu de $[AF]$.

IV BFEM 2013

Exercice 1

Une enquête portant sur le nombre de filles fréquentant une classe de terminales scientifiques, menée dans les 50 établissement scolaire d'une localité, a donné le relevé ci-dessous.
12; 11; 10; 14; 8; 0; 5; 10; 7; 10; 14; 10; 13; 14; 4; 18; 10; 10; 7; 10; 4; 10; 13; 11; 13; 18; 4; 13; 12; 18; 17; 0; 6; 5; 5; 6; 10; 10; 9; 7; 11; 4; 15; 17; 16; 16; 15; 10; 0;8.

1. a) Quelle est la population étudiée?
b). Quel est le caractère étudié? Quelle est sa nature?
c) Donne une modalité de ce caractère et son effectif partiel.
2. a) Calcule l'effectif moyen de filles en terminales scientifiques dans ces établissements.
b) Détermine la médiane de cette série statistique.
c) Dans combien d'établissements scolaires a-t-on au moins 10 filles en classes de terminales scientifiques?
3. a) Regroupe les données recueillies en classe d'amplitude 5.
b) Dresse le tableau statistique de la série comprenant l'effectif et l'effectif cumulé décroissant de chacune des classes.
4. Construis l'histogramme des effectifs cumulés décroissants et le diagramme des effectifs cumulés décroissants de cette série

Exercice 2

On pose $f(x) = |-x+2|$
1. Exprime $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue.
2. Calcule $f(0)$ et $f(2)$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $|-x+2| = |4x+5|$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$.
1. Place les points $M(-4;3)$; $N(0;-1)$; $C(4;3)$ et $E(2;-3)$.
2. Montre que les points M, N et E sont alignés.
3. Calcule MN, NC et MC puis déduis-en que le triangle MNC est rectangle et isocèle.
4. a) Calcule les coordonnées du point F tel que le quadrilatère $CNEF$ soit un rectangle.
b) Calcule l'aire de ce rectangle.

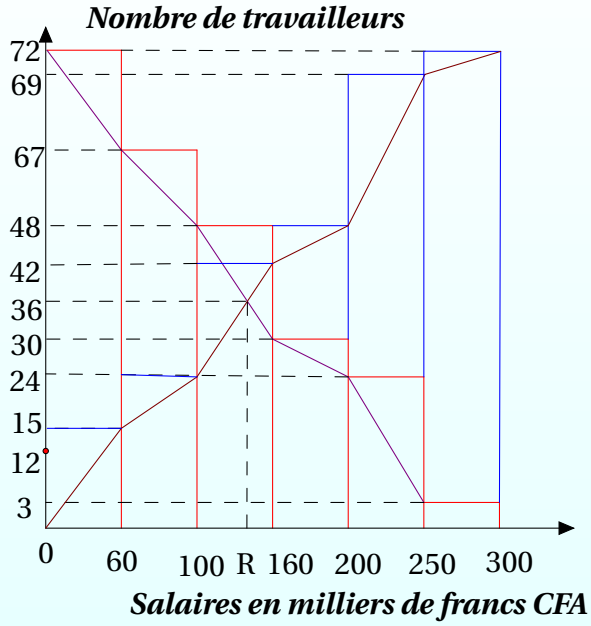
Exercice 4

1. Trace un demi-cercle de centre I et de diamètre $[RA]$ tel que $RA = 7$ cm.
2. Trace la corde $[RS]$ telle que $RS = 5,6$ cm.
3. Démontre que triangle RAS est rectangle en S.
4. Calcule AS et $\tan\widehat{A}$.
5. Soit E le point appartenant à $[RS]$ et F le point appartenant à $[AS]$, tels que $SE = 4,8$ cm et $SF = 3,6$ cm.
Démontre que (EF) est parallèle à (RA)

V BFEM 2014

Exercice 1

Dans une petite et moyenne entreprise ou PMI on étudie la répartition des salaires des travailleurs. Le schéma ci-dessous en représente l'histogramme des ECC et celui de ECD tracés dans un même repère.



1. Déduis du schéma :
a) le caractère étudié puis précise sa nature.
b) le nombre de travailleurs, dans cette PMI.
c) le nombre de travailleurs qui gagnent au moins 100 000 F.
d) le nombre de travailleurs qui gagnent moins de 150 000 F.
e) le nombre de travailleurs qui gagnent entre 150 000 F et 200 000 F.
2. Reproduis avec soin l'histogramme des effectifs cumulés croissants en prenant en abscisse 1 cm pour 50 000 F et en ordonnées 0,5 cm pour 3 travailleurs.
3. Donne la signification statistique du salaire R sur le schéma.
4. Utilise l'histogramme construit précédemment pour calculer la valeur de R à 1 millier de francs près par défaut.

Exercice 2

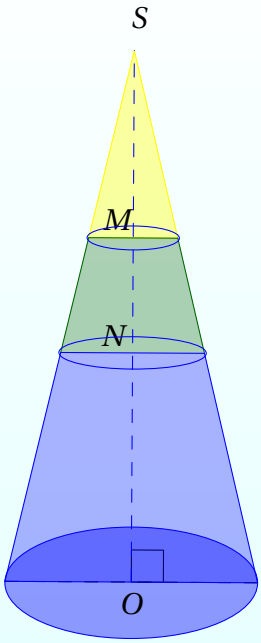
On donne les réels $a = 5-2\sqrt{5}$; $b = 1+\frac{2}{5}\sqrt{5}$ et $c = \frac{-5}{5+2\sqrt{5}}$.
1. Justifie que a et b sont des inverses de l'un de l'autre.
2. Justifie a et c sont opposés.
3. Justifie que $c = -\frac{1}{b}$
4. Justifie que $b \times c + 1 = 0$.
5. Encadre c à 10^{-2} près sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

Exercice 3

Soit EFG un triangle rectangle en E.
Les bissectrices des angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$ se coupent en A.
1. Fais une figure.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{FAG}$.

Exercice 4

Une bougie décorative a la forme d'un cône de révolution de sommet S, de hauteur 27 cm. Sa base est un disque de centre O et de rayon 15 cm.

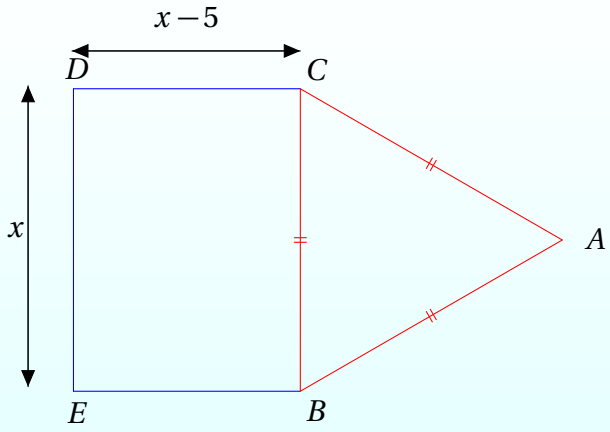


Cette bougie est formée de trois couleurs différentes séparées par des plans parallèles au plan de sa base et qui coupent la hauteur respectivement en M et N tels que $SM = MN = ON$.
La partie supérieure est en cire de couleur jaune, la partie intermédiaire est de couleur verte et la partie inférieure est bleue.
1. a) Montre que la longueur $SM = 9$ cm puis justifie que le cône de hauteur SM est une réduction de la bougie de coefficient $\frac{1}{3}$.
b). Le cône de hauteur SN est aussi une réduction de la bougie ; calcule le coefficient de réduction.
2. a) montre que le rayon de la base du cône de hauteur SM est 5 cm.
b) Calcule son volume $\mathscr{V}_1$
3. a) Calcule le volume $\mathscr{V}_2$ de la partie intermédiaire.
b) Calcule le volume $\mathscr{V}_3$ de la partie inférieure.
c) Exprime $\mathscr{V}_2$ et $\mathscr{V}_3$ en fonction de $\mathscr{V}_1$

VI BFEM 2015

Exercice 1

La figure codée ci-contre est une représentation d'un terrain formé de deux parcelle, l'une triangulaire et l'autre rectangulaire de longueur x et de largeur $x-5$; l'unité de longueur est le mètre.



1. Détermine les valeurs de x pour lesquelles le périmètre de la parcelle ABC est strictement plus grand que celui de la parcelle $BCDE$.

2. a) Montre que l'aire de la parcelle ABC est $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ m^2

b) Détermine x pour que l'aire de la parcelle $BCDE$ soit égale à $\frac{3x^2}{4}$ m^2.

3. On suppose que ce terrain représenté par le polygone $ABEDC$ est clôturé avec un grillage qui a coûté 90 000 F

Sachant qu'on a laissé une entrée de 2 m et que grillage utilisé est acheté à 1500 F le mètre, Calcule x

Exercice 2

Le tableau statistique ci-dessous donne la répartition des usagers transportés en une journée par une entreprise de transport selon le prix du ticket de section acheté

Prix du ticket de section en FCFA	100	150	200	250	300	350
Nombre de tickets	2480	1060	820	960	780	1100
Effectifs cumulés croissants	2480	3540	4360	5320	6100	7200
Effectifs cumulés décroissants	7200	4720	3660	2840	1880	1100

1. Quel est le caractère statistique étudié?
2. Combien cette entreprise a-t-elle transporté d'usagers ce jour?
3. Donne les modalités du caractère étudié.
4. Quel est le nombre d'usagers ayant acheté un ticket valant moins de 250 F?
5. Quel est le nombre d'usagers ayant acheté un ticket valant au moins 250 F?
6. Quel est le prix médian du ticket de section de ce jour (médiane de cette série)?
7. Calcule le prix moyen du ticket de section de ce jour (la moyenne de cette série)?
8. Construis le diagramme circulaire de la série

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

1. Donne la relation, entre les coordonnées traduisant l'appartenance du point $A(m;n)$ à la droite $(D): ax+by+c=0$.

2. Donne la relation, entre les coordonnées, traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et

$\overrightarrow{v}(a;b)$.

3. Donne la relation, entre les coefficients directeurs, traduisant la perpendicularité des droites $(D_1): y = ax + b$ et $(D_2): y = px + q$

4. On donne le point $A'(2;3)$, le vecteur $\overrightarrow{u}(-1;2)$ et la droite (D') passant par A' et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

a) Détermine une équation cartésienne de la droite (D')

b) Justifie que le point $B(4;-1)$ appartient à la droite (D').

c) Montre que l'équation réduite de la droite (L') perpendiculaire à la droite (D') au point E, milieu de $[A'B]$, est $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

d) Justifie que $IA' = IB$.

e) Montre que la mesure de l'aire de la surface du triangle $A'BI$ est de 5

f) Fais la figure complète pour la question **4)**.

VII BFEM 2016

Exercice 1

1. Recopie et complète :

a) Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = \cdots$.

b) Pour tous réels x et y, si $|x| = |y|$ alors : $\cdots$

2. Soit m et n deux réels tels que $m = 4 - 3\sqrt{2}$ et $n = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

a) Montre que m est négatif

b) Montre que $m^2 = 34 - 24\sqrt{2}$. Calcule n^2

c) On donne $Z = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$. Écris Z sous la forme $a\sqrt{2} + b$ avec a et b deux entiers relatifs

d) Justifie que $m^2 + 4n^2 = 68$.

Exercice 2

1. Une série statistique à caractère quantitatif continu, groupée en classes d'amplitude 10 compte 5 classes de centres respectifs C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 et d'effectifs respectifs n_1, n_2, n_3, n_4 et n_5.
Donne l'expression de sa moyenne.

2. Lors d'un recrutement au service militaire, les tailles de 100 candidats ont été répertoriées dans le tableau ci-dessous.

Taille(en cm)	[135;145[	[145;155[	[155;165[	[165;175[	[175;185[
Fréquences	0,12	a	0,28	0,32	b
E.C.C					

a) Sachant que la moyenne de cette série est 161 cm, calcule a et b.

b) Pour la suite, tu prendras $a = 0,18$ et $b = 0,10$.

b.1) Recopie et complète le tableau.

b.2) Combien de candidats ont une taille au moins égale à 165 cm ?

b.3) Détermine graphiquement la classe médiane de la série.

Exercice 3

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on donne les droites $(D) : y = 2x + 4$ et $(D') : x + 2y - 3 = 0$
1. Démontre que (D) passe par le point $B(-5;-6)$ et que (D') passe par $E(5;-1)$.
2. Démontre que (D) et (D') sont perpendiculaires en un point A dont tu précisera les coordonnées.
3. Calcule AB et AE.
4. Trace (D) et (D') dans le repère (O, I, J).
5. Démontre que ABE est un triangle rectangle en A puis calcule $\tan\widehat{ABE}$

Exercice 4

Soit $\mathscr{C}(O, 3\text{ cm})$ le cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Place deux points A et B sur $(\mathscr{C})$ tels que $AB = 4$ cm. Sur la corde $[AB]$, place un point C tel que $BC = 2$ cm. Le cercle $(\mathscr{C}')$ circonscrit au triangle AOB recoupe la droite (OC) en M.
1. Fais une figure.
2. Démontre que $\widehat{OMB} = \widehat{OAB}$.
3. Démontre que $\widehat{AMC} = \widehat{OBA}$.
4. Démontre que la droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$

VIII BFEM 2017

Exercice 1

On donne trois réels a, b et c tels que : $a = 7 - 5\sqrt{2}$; $b = -7 - 5\sqrt{2}$ et $c = -7 + 5\sqrt{2}$.
1. Démontre que le réel a est l'inverse de b.
2. Justifie que a et c sont opposés.
3. Démontre que $\dfrac{b}{a} - \dfrac{c}{b} = b^2 + c^2$.
4. Calcule a^2 puis déduis-en une écriture simplifiée du réel $w = \sqrt{9 - 70\sqrt{2}}$

Exercice 2

Les notes de 160 candidats à un concours sont consignées dans le tableau suivant :

Notes	[10;12[	[12;14[	[14;16[	[16;18[	[18;20[
Fréquences	0,3	x	0,2	0,15	y

1. Donne l'interprétation de la valeur 0,3 fréquence de la classe [10; 12[
2. Calcule x et y sachant que 25% des élèves ont une note supérieure ou égale à 16.
3. On donne $x = 0,25$ et $y = 0,1$.
a) Calcule la moyenne des notes.
b) Construis le diagramme des fréquences cumulées décroissantes

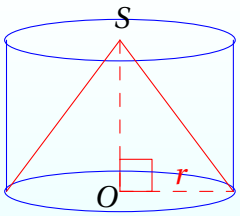
Exercice 3

ABC est un triangle isocèle en A. La hauteur issue de A coupe le segment $[BC]$ en H.
On donne $BC = 6$ cm et $AH = 4$ cm.
Soit M un point du segment $[BH]$ tel que $BM = x$. La parallèle à la droite (AH) passant par M coupe la droite (AB) en P et la droite (AC) en Q.

1. Fais la figure et calcule BH.
2. Montre que $\frac{MP}{AH} = \frac{x}{3}$ puis en déduis MP en fonction de x.
3. Exprime MC en fonction de x.
4. Montre que $MQ = \frac{4}{3}(6-x)$.
5. Pour quelle valeur de x a-t-on $MQ = 3MP$?
6. Quelle serait alors la position du point P sur le segment $[AB]$?

Exercice 4

On considère la figure codée ci-dessous :
On donne les formules de calcul de volume de solides ci-dessous :



- Volume d'un cône de révolution $\mathcal{V}_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$
- Volume d'une boule $\mathcal{V}_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.
- Volume d'un cylindre $\mathcal{V}_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$.

r désigne le rayon et h la hauteur.

1. Calcule le volume exact de chacun de ces trois solides pour $h = r = 1$ m.
2. Exprime le volume d'une boule et celui d'un cylindre en fonction du volume d'un cône de révolution pour $r = h$.
3. Un récipient servant à recueillir de l'eau de pluie est constitué d'un cylindre de rayon $r = 50$ cm ouvert à sa base supérieure et d'un cône de révolution situé à l'intérieur de ce cylindre. Le cône et le cylindre ont la même hauteur et la base du cône coïncide avec la base inférieure fermée du cylindre (voir figure ci-dessous).
Exprime le volume de ce récipient en fonction du volume du cylindre.

IX BFEM 2018

Exercice 1

1. Recopie et complète chacune des phrases ci-dessous :
1.1. Soit a et b deux nombres réels tels que b soit positif, $\sqrt{ba^2} = \cdots\sqrt{b}$.
1.2. L'équation $x\sqrt{8} - 8 = 0$ a pour solution $x = \cdots$
1.3. Soient m ; n et q trois entiers naturels.
Une expression conjuguée de $-m + q\sqrt{n}$ est $\cdots$
2. Soit les nombres réels suivants : $a = 5 - 2\sqrt{6}$; $b = 5 + 2\sqrt{6}$ et $c = -5 + 2\sqrt{6}$.
2.1. Montre que a est l'inverse de b
2.2. Montre que a est l'opposé de c.
3. $MARE$ est un carré de côté $MA = 5 + 2\sqrt{6}$. Détermine la valeur exacte de sa diagonale.

Exercice 2

On considère la liste des notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième, lors d'un devoir de mathématiques.
5; 8; 7; 8; 9; 6; 10; 11; 15; 13; 10; 18; 16; 15; 12; 9; 14; 16; 17; 15; 10; 16; 17; 8; 9; 10; 16; 9; 10; 7; 10; 6; 12; 13; 11; 13; 18; 10; 11; 6; 10; 13; 17; 12; 11; 12; 9; 16; 17; 14.

1. Regroupe ces notes par classes d'amplitude 3.
2. Calcule l'effectif cumulé croissant de chaque classe.
3. Calcule la note moyenne.
4. Trace le diagramme des effectifs cumulés croissants.
5. Détermine graphiquement la médiane de cette série.

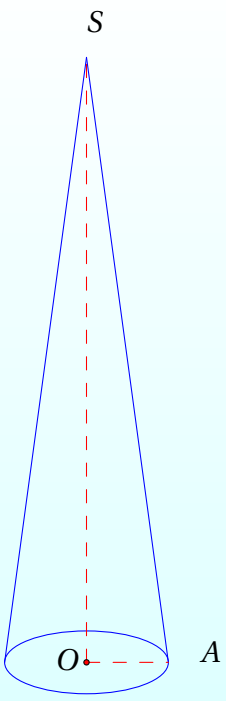
Exercice 3

Soient un cercle de centre O et de rayon 4 cm, M, N et P trois points de ce cercle tels que : $\widehat{NOP} = 130^o$ et $\widehat{MPN}$ est un angle de 50^o dont la bissectrice passe par O.

1. Fais la figure que tu complèteras au fur et à mesure.
2. Détermine les mesures des angles $\widehat{MON}$; $\widehat{NMP}$ et $\widehat{MOP}$.
3. Soit Q un point de l'arc $\overset{\frown}{MP}$ distinct de P et M.
Montre que les angles $\widehat{MNP}$ et $\widehat{MQP}$ sont supplémentaires.
4. La bissectrice de l'angle $\widehat{MPN}$ recoupe le cercle au point R.
Détermine les mesures des angles du triangle NRP

Exercice 4

La figure ci-contre représente une bougie qui a la forme d'un cône de révolution de rayon de base $OA = 22,5$ cm et de génératrice $AS = 37,5$ cm.



1. Montre que la hauteur OS de la bougie est de 30 cm.
2. Calcule le volume de cire nécessaire à sa confection.
3. Calcule l'aire de la surface minimale de papier nécessaire pour l'envelopper entièrement.
4. La bougie se consume en diminuant de 101,25 cm^3 de son volume chaque minute.
Au bout de combien de temps sera-t-elle entièrement consumée?
5. Soit k le coefficient de réduction du cône réduit représentant la partie consumée de la bougie, $\mathcal{V}$ le volume du cône initial qui représente la bougie et $\mathcal{V}'$ le volume de la partie restante de la bougie de hauteur h cm.
5.1 Montre que $\mathcal{V}' = (1-k^3)\mathcal{V}$.
5.2 Montre que $k = \dfrac{30-h}{30}$.
5.3 Calcule la hauteur de la partie restante de la bougie au bout d'une heure d'éclairage.
On donne $\pi \approx 3,14$; $\dfrac{9821,25}{15896} \approx 0,6$ et $(0,7)^2 \approx 0,4$

X BFEM 2019

Exercice 1

1. Dis comment obtenir la valeur de la médiane d'une série statistique ordonnée à caractère quantitatif discret et d'effectif total N.
2. Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires mensuels en F CFA et leurs proportions pour le personnel d'une entreprise.

Fonctions	Fréquences en pourcentage	Salaires
Cadres supérieurs	5	450 000
agents de production	45	350 000
Personnels administratifs	15	200 000
Chauffeurs	5	150 000
Agents de sécurité	10	100 000
Agents commerciaux	20	175 000

a) Indique le caractère étudié et sa nature.
b) Calcule le salaire moyen mensuel dans cette entreprise.
3. Calcule le salaire médian de cette entreprise sachant qu'il y a exactement 2 cadres qui y travaillent.
4. Construis le diagramme des fréquences cumulées croissantes de cette série

Exercice 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 12$ cm et $BC = x$ cm avec $0 < x < 12$.
1. Calcule le périmètre p du rectangle en fonction de x.
2. Dans quel intervalle peut-t-on choisir x pour que p soit supérieur à 33 cm?
3. Calcule l'aire $\mathscr{A}$ de la surface de ce rectangle en fonction de x.
4. Dans quel intervalle peut-on choisir x pour que $\mathscr{A}$ soit inférieure à 81 cm^2?
5. On donne $x = 9$ et $A'B'C'D'$ un carré dont l'aire est égale á celle du rectangle $ABCD$.
a) Calcule le côté du carré.
b) Compare le périmètre p du rectangle et celui p' du carré

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).
1. Place les points $A(-3;3)$; $B(5;-1)$ et $C(5;9)$.
2. Trouve une équation de la droite (Δ) hauteur du triangle ABC passant par le point C.
Soit le point K milieu de $[BA]$.
a) Vérifie que K appartient à (Δ).
b) Déduis-en la nature du triangle ABC et celle du triangle AKC.
3. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle AKC.

a) Détermine les coordonnées de son centre L et Calcule son rayon R.
b) Montre que $M(6;6)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
c) Justifie que $\widehat{AMK}$ et $\widehat{ACK}$ ont la même mesure.
d) Montre que $\widehat{CAK}$ et $\widehat{AMK}$ sont complémentaires.

Exercice 4

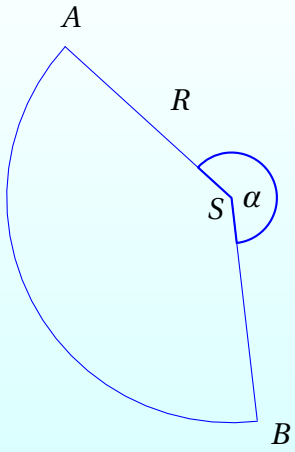
1. Le schéma ci-contre représente le patron de la partie latérale d'un cône de révolution.

Justifie que le rayon r de la base du cône vaut :
$r = R \times \left(1 - \frac{\alpha}{360^o}\right)$.

2. Démontre que la hauteur h du cône vaut :
$h = R \times \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{360^o}\right)^2}$.

3. Exprime l'aire du cône en fonction de R et α.

4. On pose $\alpha = 270^o$, $R = 50$ cm et $\pi = 3,14$.
Calcule l'aire latérale du cône



XI BFEM 2020

Exercice 1

1. Réponds par vrai ou faux dans chacun des cas suivants :
a) Si $m < 0$, alors $\frac{m}{\sqrt{m^2}} = -1$.
b) Les nombres $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ sont des inverses.
c) L'inverse de $\sqrt{5}+1$ est $\frac{4}{1-\sqrt{5}}$.

2. Soit m un entier relatif, on pose $x = m - 2\sqrt{6}$ et $y = m + 2\sqrt{6}$.
Determine m pour que x et y soient inverses.

3. On pose : $p = 5 - 2\sqrt{6}$ et $q = 5 + 2\sqrt{6}$.
a) Exprime p en fonction de q.
b) Déduis-en que $p^2 = \frac{p}{q}$.
c) Calcule p^2 et q^2.
d) Déduis-en une écriture simplifiée de $E = \sqrt{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt{49 - 20\sqrt{6}}$

Exercice 2

Pour sensibiliser davantage les populations sur la protection des personnes âgées contre la covid-19, une structure sanitaire a relevé dans sa zone les malades de la covid-19 durant une période de trois semaines et les a repartis comme suit :

Cas importés (CI), cas contacts (CC) et cas de transmission communautaire (TC).
$TC-CI-TC-CC-CC-CC-TC-TC-CC-CI-CC-CC-TC-CC-TC-CC-CC-TC-TC-CC-TC-TC-CC-CC-TC-CC-CC-TC-TC-CC-CI-CI-CC-CC-CC-TC-TC-CI-CI-CC-TC-CC-CC-CC-CI-CI-TC-CC-CC-TC-CC-CI-CC-CI-CI-CI-CC-CC-TC-TC-CC-CC.$
On sait que 25% des cas importés, 50% des cas contacts et 10% des cas de transmission communautaire sont des malades âgées de plus 60 ans et que le taux de mortalité de la maladie pour cette tranche d'âge est estimé à 15%.
En utilisant les outils mathématiques au programme, trouve le nombre de décès attendus chez les malades de plus de 60 ans à partir des données relevées dans cette structure durant ces trois semaines.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les droites (L_1) et (L_2) d'équations $(L_1): ax+y+c=0$ et $(L_2): y=mx+p$ où a, c, m et p sont des nombres réels avec a et m non nuls.

1. Recopie et complète correctement les phrases suivantes :

a) Le coefficient directeur de le droite (L_1) est le réel $\cdots$

b) Un vecteur directeur de la droite (L_2) est $\overrightarrow{u}(\cdots;\cdots)$.

c) Les droites (L_1) et (L_2) sont parallèles si et seulement si $m=\cdots$.

d) Les droites (L_1) et (L_2) sont perpendiculaires si et seulement si $m=\cdots$.

2. Construis la droite (L_1) en prenant $OI=OJ=1$ cm, $a=-1$ cm et $c=-1$. Place le point P de coordonnées $(5;0)$.

3. Détermine une équation de la droite (D) perpendiculaire à la droite (L_1) au point $M(2;3)$.

4. Soit le point N image du point $J(0;1)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{MP}$.

a) Montre que $\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{PN}$.

b) Déduis-en la nature exacte du quadrilatère $MPNJ$

XII BFEM 2021

Exercice 1

1. On considère les réels suivants : $A=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^2$; $B=3\sqrt{12}-\frac{1}{2}\sqrt{108}-\sqrt{8}\times\sqrt{2}$.

$a=-3\sqrt{3}+4$; $b=-2-\sqrt{5}$; $c=2+\sqrt{5}$ et $d=3\sqrt{3}-4$.

Parmi les réels a ; b ; c et d, indique celui qui est égal à A et celui qui est égal à B.

2. On donne : $x=\dfrac{-1}{3-2\sqrt{2}}$; $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $z=\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

a) Montre que $x=-3-2\sqrt{2}$.

b) Donne un encadrement de x à 10^{-1} près sachant que $1,414<\sqrt{2}<1,415$.

c) Calcule y^2 et z^2.

d) Déduis de la question précédente que $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

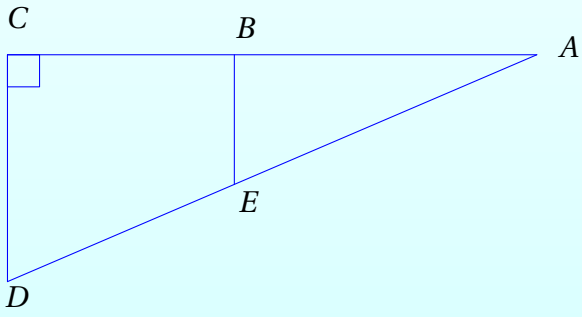
Exercice 2

1. On considère l'équation suivante : $0,2y - \frac{1}{5}x = 0,8$.
Parmi les couples suivants, trouve ceux qui sont solutions de l'équation précédente.

a) $(0;-1)$ **b)** $\left(0,5;\frac{9}{2}\right)$ **c)** $(\pi;7,14)$ **d)** $\left(-\frac{6}{7};\frac{22}{7}\right)$.

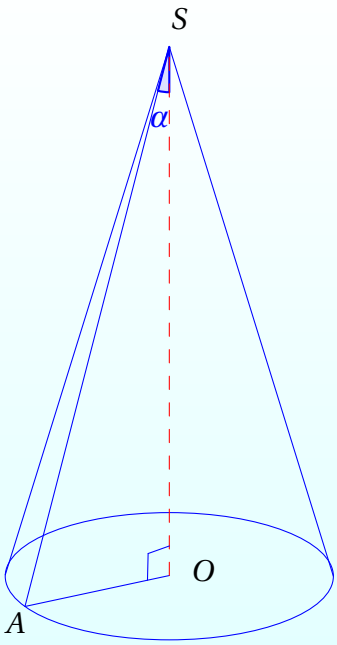
2. Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x - \frac{3}{5}y = 0 \end{cases}$.

3. Dans la figure ci-dessous, ACD est un triangle rectangle en C et (BE) est parallèle à (CD).
On donne : $BC = 4$; $CD = 5$; $BE = 3$.
On pose $AB = m$ et $AC = n$



a) Montre que les réels m et n vérifient le système d'équations : $\begin{cases} n = m + 4 \\ 5m - 3n = 0 \end{cases}$
b) Calcule m et n.
c) Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{BAE}$

Exercice 3



1. Le dessin ci-contre est une représentation en perspective cavalière d'un solide.
a) Indique le nom du solide qu'il représente.
b) Que représente le segment $[SO]$ pour ce solide ?
c) Que représente le segment $[SA]$ pour ce solide ?
d) Que représente le disque de rayon $[AO]$ pour ce solide ?
e) L'expression $\pi \times OA \times SA$ est l'aire d'une partie de ce solide. Laquelle ?
2. On donne $\alpha = 30^o$ et $OA = 6u$ où u est une unité de mesure de longueur.
a) Justifie que le segment $[SA]$ mesure $12u$
b) Justifie que le segment $[SO]$ mesure $6\sqrt{3}u$.
c) Calcule l'aire de la surface totale de ce solide en fonction de u.
d) Calcule le volume de ce solide en fonction de u.

3. Pour fabriquer un récipient qui doit contenir des sachets de jus de fruit de 30 cl, un groupement d'intérêt économique (GIE) dispose d'un solide en matière plastique ayant la forme du solide représenté ci-dessus avec $OA = 6$ dm et $\alpha = 30^o$.
On sectionne ce solide par un plan parallèle au plan de base situé à $4\sqrt{3}$ dm à partir du point O pour obtenir une bassine en forme de tronc de cône.
Détermine le nombre maximale de sachets que ce récipient pourrait contenir. On rappelle que

M. GUEYE 77 135 23 62

$1L = 1\text{dm}^3$

XIII BFEM 2022

Exercice 1

Pour chacune des questions dans le tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est correcte. Pour répondre, tu porteras sur ta copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

N°	Questions	Réponses		
		A	**B**	**C**
1	On considère deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A}$ tels que : $\widehat{A} = 90^o - \widehat{B}$. Quelle relation a-t-on ?	$\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B}$	$\cos\widehat{A} = \sin\widehat{B}$	$\sin\widehat{A} = \sin\widehat{B}$
2	Soit MNP un triangle rectangle en N tel que $MN = 6$ cm et $\widehat{MPN} = 30^o$. Quelle est la mesure de la longueur $[MP]$?	3 cm	12 cm	6 cm
3	On donne une droite (D) d'équation $3y = 6x + 2$ dans un repère orthonormal. Quel est le coefficient directeur de la droite (D) ?	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	2
4	Soient $\overrightarrow{u}(-3;1)$ et $\overrightarrow{v}(2;y)$ deux vecteurs du plan. Pour quelle valeur de y les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?	$y = -\frac{2}{3}$	$y = -\frac{3}{2}$	$y = -6$.
5	Dans un repère orthonormal, pour quelles valeurs de n les vecteurs $\overrightarrow{u}(n;1)$ et $\overrightarrow{v}(n;-4)$ sont-ils orthogonaux ?	$n = 1$ ou $n = 4$	$n = 4$ ou $n = -4$	$n = 2$ ou $n = -2$
6	Quelle est l'aire latérale $\mathscr{A}_l$ d'un cône de révolution de génératrice g, de hauteur h et de rayon de base r ?	$\pi g h$.	$\pi r^2 g$	$r g \pi$.

Exercice 2

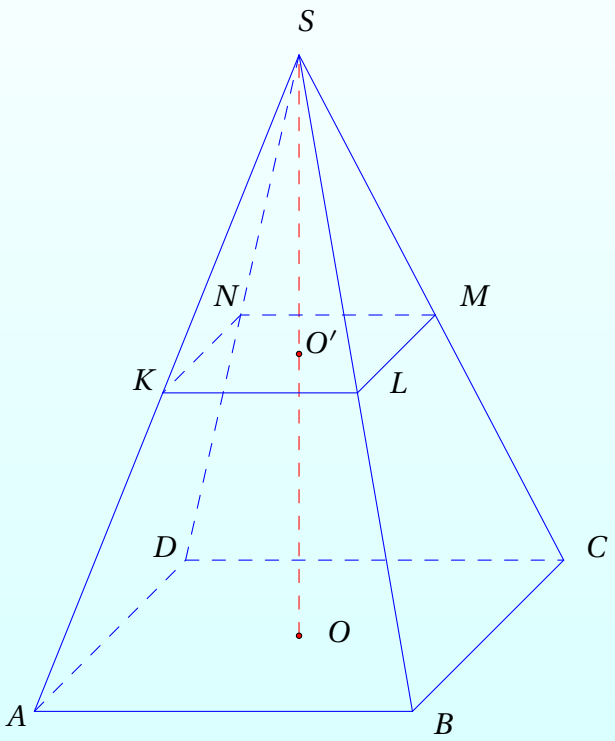
1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2 - 4x + 5 = -x^2 - 4x + 9$.
2. On considère l'inéquation $2(x-3)(2x+3) \leq 0$.
a) Détermine le signe de $12 - 18\sqrt{3}$ puis déduis-en que le réel $3 - \sqrt{3}$ est solution de cette inéquation.
b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2(x-3)(2x+3) \leq 0$.
3. Montre que $4\sqrt{3} - 2\sqrt{75} + 4\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{9} = 3 - \sqrt{3}$.
4. Donne un encadrement de $3 - \sqrt{3}$ à 10^{-2} près, sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

Exercice 3

A la suite des brillants résultats obtenus par ses enfants, un père de famille décide d'organiser une fête en leur honneur. Connaissant les vertus de la viande de volaille, il décide d'acheter des pintades et des pigeons. Sur le marché, un pigeon coûte 2000 F et une pintade coûte 5000 F.
On désigne par x le nombre de pigeons et y celui de pintades.
1. Le père veut acheter 10 volailles avec une somme de 32 000 F.
a) Traduis cette situation par un système d'équations.
b) Calcule x et y.
2. Voyant que le nombre d'invités peut augmenter, le père décide d'acheter puis de 12 volailles mais ne compte pas dépenser plus de 36 000 F.
a) Traduis cette situation par un système d'inéquations.
b) Résous graphiquement ce système d'inéquations.
En se servant du graphe, détermine :
i) les nombres possibles de pintades qu'il peut avoir s'il décide d'acheter 13 pigeons?
ii) toutes les possibilités d'achat de ces volailles.

Exercice 4

On considère une pyramide régulière $SABCD$, de sommet S et de base $ABCD$. On section cette pyramide par un plan parallèle à sa base passant par O' comme indiqué sur la figure ci-dessous à gauche.
La pyramide $SABCD$ a une hauteur $SO = 6$ dm et un volume $\mathcal{V}_1 = 32$ dm^3.
Le carré $KLMN$ a pour côté 3 dm.



1. Justifie que l'aire de la base est égale à 16 dm^2.
2. Montre que le coefficient de réduction de la pyramide $SABCD$ en la pyramide $SKLMN$ est $\frac{3}{4}$.
3. Calcule le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide $SKLMN$.
4. Un entrepreneur veut fabriquer des bornes en béton identiques ayant la même forme et les mêmes dimensions que le solide $ABCDKLMN$. Combien pourrait-il en faire s'il dispose d'une quantité de 1,85 m^3 de béton?

XIV BFEM 2023

Exercice 1

Pour chacune des questions dans le tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est correcte. Pour répondre, tu porteras sur ta copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

N°	Questions	Réponses		
		A	**B**	**C**
1	Quelle est la valeur de $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{36}{5}}$?	$\frac{1}{6}\sqrt{36}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$
2	Quels sont les réels qui vérifient l'équation $\sqrt{(2x+7)^2}=\lvert 5-2\sqrt{3}\rvert$?	$-1-\sqrt{3}$ et $-6+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$ et $6+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$ et $6-\sqrt{3}$
3	Quelle est l'aire latérale en cm^2 d'un cône de révolution de rayon de base $r=2\sqrt{2}$ cm et de génératrice $g=\sqrt{18}$ cm ?	12π	$4\sqrt{6}\pi$	$36\sqrt{2}\pi$
	On considère la série statistique de notes suivante : 17 ; 9 ; 11 ; 6 ; 13 ; 18 ; 13 ; 15 ; 14 ; 13. Quelle est la note médiane ?	14	13	15
5	Soit ABC un triangle tel que $\widehat{CAB}=55^o$ et $\widehat{CBA}=80^o$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle et P le point diamétralement opposé à B. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?	90^o	45^o	55^o
6	Quelle est l'expression littérale de l'application affine g telle que : $g\left(\frac{1}{2}\right)=2$ et $g(1)=1$?	$2x+3$	$-2x-3$	$-2x+3$.
7	Quel est le vecteur égal à $\vec{U}=\vec{GA}-\vec{EM}-\vec{GF}+\vec{EF}+\vec{AM}$?	$2\vec{AE}$.	$\vec{0}$	$\frac{1}{2}\vec{AE}$.
8	Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h. Quelle est la valeur de la hauteur h ?	$a\frac{\sqrt{3}}{2}$	$a\sqrt{3}$	$a\frac{\sqrt{2}}{3}$.
9	Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(3-x)(2x+3)>0$?	$\left[-\frac{3}{2};3\right]$.	$\left]-\frac{3}{2};3\right[$	$\left\{-\frac{3}{2};3\right\}$.
10	Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O tel que $\widehat{OAC}=55^o$. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?	55^o.	110^o	35^o .

Exercice 2

1. Écris l'expression $E = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{50} - 7\sqrt{32} + \sqrt{9}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b positif.

2. On pose $p = \dfrac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ et $q = \dfrac{1}{6\sqrt{3}-10}$.
Montre que p et q sont des inverses.

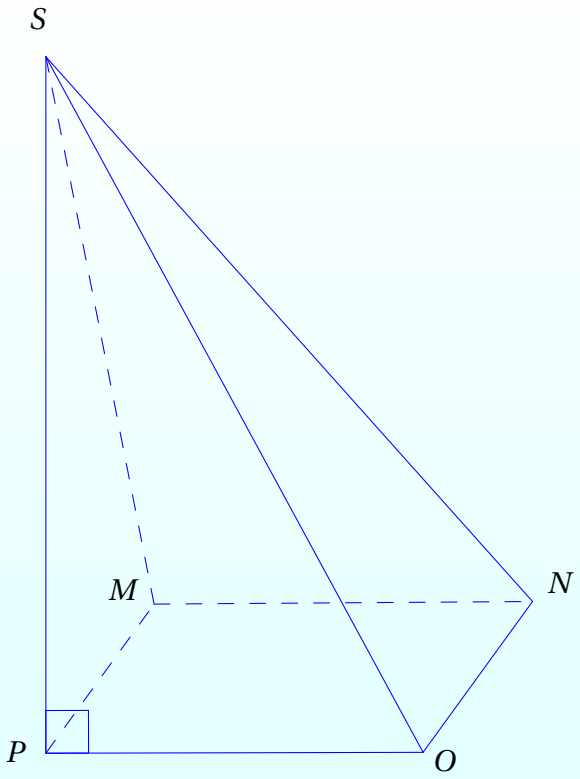
3. On considère les réels x et y tels que $x = 6\sqrt{3}-10$ et $y = \sqrt{208-120\sqrt{3}}$.

a) Détermine le signe de x.

b) Calcule x^2. Déduis-en une écriture simplifiée de $y = \sqrt{208-120\sqrt{3}}$.

c) Encadre le réel x à 10^{-2} près sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$

Exercice 3



La figure $SMNOP$ ci-contre représente une pyramide à base rectangulaire $MNOP$, de hauteur $[SM]$.
On donne : $SM = 7,5$ cm ; $MN = 4$ cm et $NO = 5,5$ cm.

1. Calcule le volume $\mathcal{V}_1$ de la pyramide $SMNOP$.

2. Montre que $SN = 8,5$ cm.

3. Soit I un point de $[SM]$ tel que $SI = 6$ cm. et J celui de $[SN]$ tel que $SJ = 6,8$ cm.

a) Montre que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

b) Calcule la longueur IJ.

4. Le plan passant par I et parallèle à la base de la pyramide $SMNOP$ coupe les segments $[SO]$ et $[SP]$ respectivement aux points K et L.
Calcule le volume du solide $SIJKL$.

5. Un menuisier métallique veut fabriquer un récipient pour servir d'unité de mesure d'un produit céréalier qu'on doit distribuer aux populations d'une commune. Ce récipient est représenté par le solide $IJKLMNOP$ à l'échelle de $\dfrac{1}{5}$.

a) Sachant qu'un kg de ce produit occupe un volume de 1400 cm^3, détermine à 1g près par défaut la quantité maximale en grammes de ce produit que peut contenir ce récipient.

b) Le menuisier souhaiterait inscrire le nom de la commune sur la face $MNJI$ du récipient. Pour cela, il doit d'abord couvrir cette face avec de la feuille d'aluminium lisse.
Sachant que 10 cm^2 de feuille d'aluminium lisse coûtent 150 francs, calcule la dépense minimale en feuille d'aluminium lisse.

Bonne chance à tous les candidats aux BFEM