Fomesoutra.com
ça soutra!

collection
IRMA

MATHEMATIQUES

3e



CEDIC
NEA

BENGALY
KALIFA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan)

Mathématiques

en classe de 3e

René ADOPO
Fredy BEGHAIN
Jacques CLER
Robert DUMONCEAU

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE 3e

I — ALGÈBRE

— Compléments sur $\mathbb{R}$. Intervalles. Valeur absolue.
— Fonction. Fonction numérique. Représentation graphique. Lecture et utilisation de la représentation graphique d'une fonction. Résolution graphique d'une équation.
— Racine carrée. Notation $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$. (On admettra que l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective.) Racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels.
— Application linéaire et application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; leurs représentations graphiques. Application affine par intervalles.
— Calculs sur les polynômes et les fractions rationnelles.
— Équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques ; résolution algébrique et résolution graphique d'un système de deux équations.
— Interprétation graphique d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.
— Exemples variés de problèmes du premier degré.

II — GÉOMÉTRIE

A — Notions et propriétés fondamentales

— Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel.
Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Équations d'une droite.
— Théorème de Pythagore et sa réciproque. Relations métriques dans le triangle rectangle.
— Applications dans le plan : rappel et utilisation des propriétés des applications vues en 4e. Isométries. Homothéties.

B — Angles et trigonométrie

— Angles. Angle géométrique. Bissectrice d'un angle.
— Mesure des angles en degrés, grades et radians. Somme des mesures des angles d'un triangle.
— Cosinus, sinus d'un angle ; tangente. Usage des tables trigonométriques.
— Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

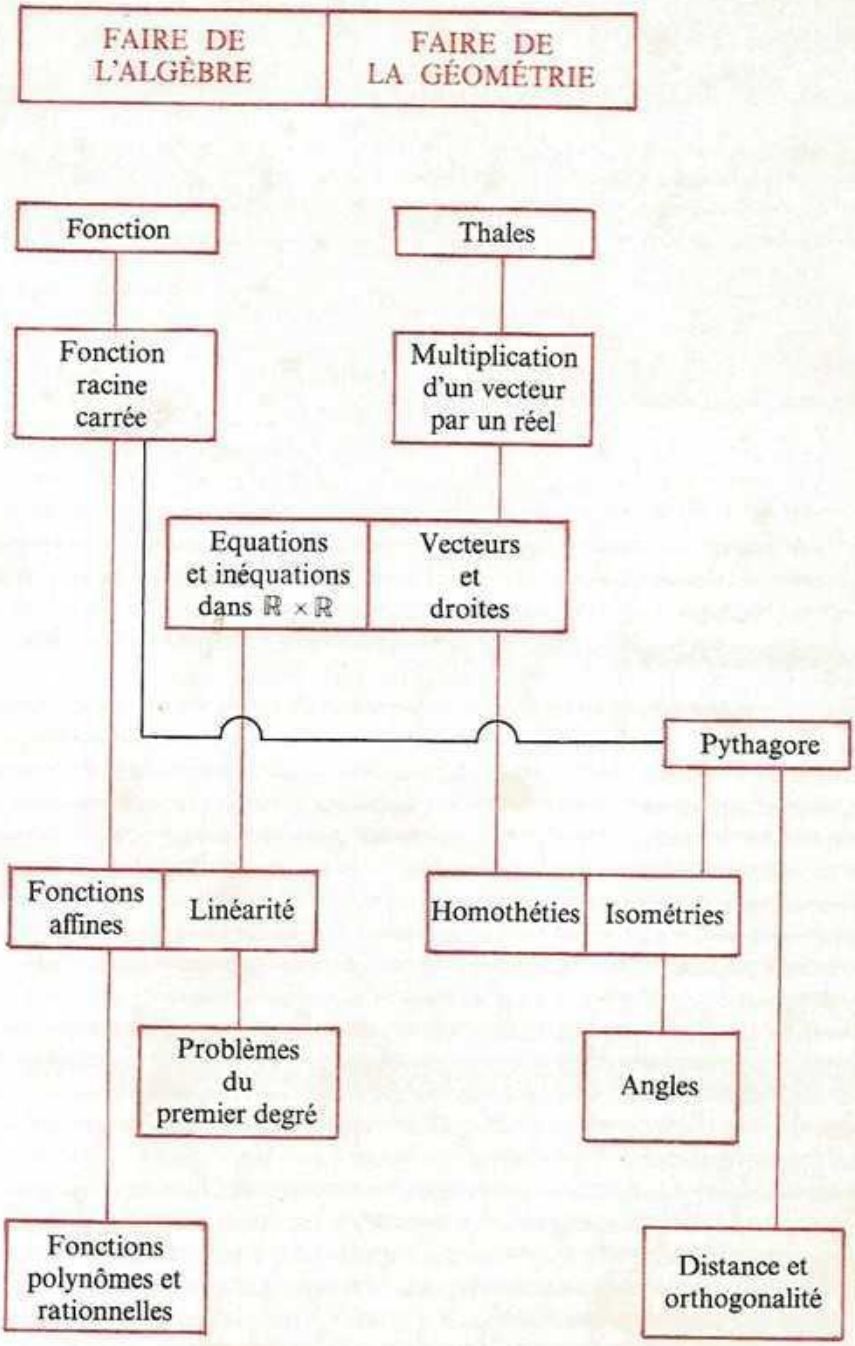
C — Applications

— Repère orthonormé. Orthogonalité de deux vecteurs. Expression analytique de la distance de deux points.
— Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers, ...
— Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : calculs de longueurs de segments de solides usuels.

Circulaire ministérielle nº 104/MEN/DES/SDCP du 20-7-1981.

© CEDIC/Nouvelles Editions Africaines - 1982

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.


FAIRE DE L'ALGÈBRE
FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE
Fonction
Thales
Fonction racine carrée
Multiplication d'un vecteur par un réel
Equations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Vecteurs et droites
Pythagore
Fonctions affines
Linéarité
Homothéties
Isométries
Problèmes du premier degré
Angles
Fonctions polynômes et rationnelles
Distance et orthogonalité

PRÉFACE

Voici le troisième volume de la Collection IRMA destiné à la classe de 3e.
Pourquoi cette nouvelle Collection IRMA alors qu'il existe tant d'ouvrages de mathématiques à l'usage de l'enseignement secondaire ?
Elle est le résultat des travaux de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA) sur le contenu et les méthodes d'enseignement des mathématiques, programmés par le Ministère de la Recherche Scientifique et réalisés en étroite coordination avec le Ministère de l'Éducation Nationale.
Il est apparu, en effet, que les difficultés que rencontraient les élèves pour assimiler les concepts mathématiques provenaient de trois causes principales :

— l'approche axiomatique de l'enseignement des mathématiques qui plaçait, sans initiation préalable, l'élève de Sixième devant des notions abstraites ;

— la non-utilisation de l'environnement de l'élève en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

— l'absence d'un outil capable de compenser :

- d'une part, les disparités des niveaux pédagogiques d'enseignants de formation et de qualification hétérogènes ;
- d'autre part, le manque d'encadrement de l'élève en dehors de l'école.

Les ouvrages de la Collection IRMA, reposant sur un profond travail d'investigation et d'expérimentation associant les chercheurs, les enseignants et les services pédagogiques du Ministère de l'Éducation Nationale ainsi que les Instituts de Recherches dans les domaines linguistique et ethno-sociologique, se proposent de répondre aux préoccupations majeures que pose l'enseignement des mathématiques en Côte-d'Ivoire et de son adaptation aux réalités africaines.
Outils de travail à l'usage des maîtres, des élèves et de tous ceux qui veulent améliorer leurs connaissances mathématiques, ces ouvrages sont ouverts à toute contribution susceptible d'enrichir leur contenu.

SALIOU TOURE

A NOS COLLÈGUES PROFESSEURS

Le présent ouvrage est conforme au nouveau programme de mathématique de Troisième entré en vigueur le 1er octobre 1981 ; Il assure le prolongement des études effectuées en Quatrième : opérations sur les nombres réels, propriétés métriques du plan, ensemble des vecteurs du plan. L'enseignement de l'algèbre y est principalement consacré aux opérations sur les racines carrées et à la résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

L'étude des fonctions porte, d'une part sur quelques généralités essentielles lui permettant d'être efficace (utilisation de représentations graphiques), d'autre part sur les fonctions du premier degré qui nous semblent devoir être privilégiées dans le Premier Cycle, eu égard à l'abondance des situations de linéarité rencontrées dans la vie courante ou les autres disciplines.

En géométrie : les propriétés de Thalès, la multiplication d'un vecteur par un réel, les « relations » métriques dans le triangle rectangle, les transformations du plan, les angles sont autant d'occasion — comme en algèbre d'ailleurs — de faire manipuler les élèves et de poursuivre l'apprentissage du raisonnement déductif entrepris en Quatrième.

Le contenu de l'ouvrage devrait être révélateur de notre volonté de pratiquer une pédagogie de l'action et de revenir périodiquement dans des contextes variés, sur les notions les plus importantes de manière à les enrichir progressivement et à permettre leur réinvestissement ultérieur. Ainsi, par exemple, la notion de valeur absolue, la notion de triangles homothétiques apparaissent-elles à plusieurs reprises tout au long du manuel sous des formes diverses.

En nous appuyant sur l'environnement des élèves, nous nous sommes efforcés de les *motiver*, pour les *faire agir*, les amener à *comprendre* et à *agir* de nouveau, de manière autonome et créatrice. A cette fin, les leçons du manuel ne se présentent pas comme des exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents sont mises en œuvre et débouchent sur la mathématisation du concept sous-jacent aux manipulations. Des exercices d'application immédiate sont insérés dans les leçons, leur résolution devrait permettre aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

De nombreux exercices sont regroupés en fin de chapitre (au total 698), sous les rubriques habituelles : construire, calculer, démontrer, réfléchir. Mais faire des mathématiques ce n'est pas seulement calculer, dessiner, ou même démontrer un résultat déjà énoncé, c'est surtout résoudre des problèmes, et pas uniquement des problèmes de mathématique. C'est pourquoi, la plupart des chapitres sont introduits par un problème très ouvert, de vrais problèmes figurent sous la rubrique réfléchir et un chapitre est consacré spécialement à leur résolution.

Notre ambition est, en effet, que les professeurs parviennent certes à munir leurs élèves des quelques outils dont ils pourront avoir l'emploi dans l'exercice de leur profession ou au cours de leurs études ultérieures, mais aussi qu'ils leur apprennent à analyser une situation, à conjecturer des hypothèses et à les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, à recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et à dégager une conclusion.

REMERCIEMENTS

Le contenu de cet ouvrage a été expérimenté dans dix classes de Troisième au cours de l'année scolaire 1980-1981.
Il convient de remercier ici les professeurs expérimentateurs :

Mesdames VILETTE, professeur au Lycée de Grand Bassam
WILZER, professeur au C.E.G. Adjamé-Harris
Messieurs ADOPO, professeur au C.E.G. Adjamé-Garçons
BOURAIMA, professeur au Lycée de Grand Bassam
DUMONCEAU, professeur au C.M. de Cocody
LEBOURDIEC, professeur au C.M. d'Abobo
MATHIEU, professeur au C.M. de Cocody
N'DA KOUADIO, professeur au C.M. d'Abobo
PAULUS, professeur au C.M. Autoroute
VAUDELON, professeur au C.M. Autoroute

dont les suggestions et les critiques nous ont été si précieuses et dont le dévouement s'est maintenu sans faiblir pendant deux années qu'à duré l'expérimentation des programmes de Quatrième et Troisième.
Nos remerciements vont aussi aux membres de la Commission Nationale de Mathématique qui, malgré leurs charges, ont bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de leur grande expérience.
Enfin, nous remerçions particulièrement Bernard KOEHL, chercheur à l'IRMA, qui a relu toutes les épreuves avec une scrupuleuse et vigilante attention et nous a fait profiter de ses remarques pertinentes et ses suggestions constructives.

Les auteurs

SOMMAIRE

p. IX **Index.**

ALGÈBRE

p. 1 1. Faire de l'algèbre ..... 1. Additionner et multiplier des réels
2. Ordonner des réels

p. 21 2. Fonction ..... 1. Fonction, fonction numérique
2. Représentation graphique d'une fonction
3. Utilisation d'un graphique

p. 49 3. Fonction racine carrée ..... 1. Fonction racine carrée
2. Opérations sur les racines carrées

p. 75 4. Équations et inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 1. Équation
2. Système de deux équations
3. Inéquation

p. 100 5. Fonctions affines et linéaires 1. Fonctions affines
2. Fonctions affines par intervalles
3. Linéarité

p. 139 6. Problèmes du premier degré ..... 1. Mise en équation
2. Résolution de problèmes

p. 158 7. Fonctions polynômes, fonctions rationnelles ..... 1. Fonctions polynômes
2. Fonctions rationnelles

GÉOMÉTRIE

p. 177 1. Faire de la géométrie ..... 1. Constater, démontrer, construire
2. Des connaissances utiles

p. 193 2. Propriétés de Thalès ..... 1. Parallèles équidistantes
2. Axiome de Thalès — Réciproque
3. Applications des propriétés de Thalès

p. 213 3. Multiplication d'un vecteur par un réel ..... 1. Produit d'un vecteur par un réel
2. Multiplication d'un vecteur par un réel
3. Utilisation des vecteurs

p. 243 4. Vecteurs et droites ..... 1. Vecteur directeur d'une droite. Vecteur unitaire
2. Coordonnées
3. Équations d'une droite
4. Régionnement du plan par une droite

p. 282 5. Le triangle rectangle ..... 1. Propriétés métriques
2. Applications des propriétés métriques

p. 303 6. Transformations du plan ..... 1. Isométries. Composition d'isométries
2. Parties isométriques du plan
3. Homothéties

p. 327 7. Les angles ..... 1. Angles
2. Mesure des angles
3. Angles et trigonométrie

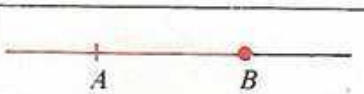
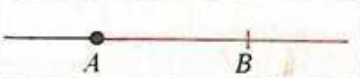
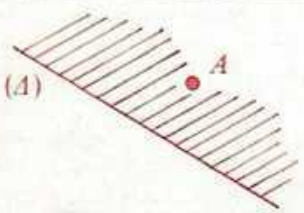
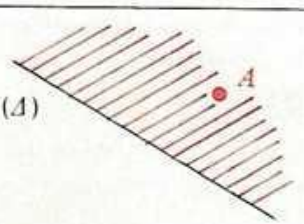
p. 373 8. Distance dans un repère orthonormé. Orthogonalité de deux vecteurs.

p. 383 Problèmes d'examens et concours.

Où trouver les tables ?

Tables des carrés ..... p. 65 et 66
Tables des racines carrées ..... p. 67
Tables trigonométriques ..... p. 360

Des conventions pour les représentations graphiques

$[AB]$			$[AB)$
$[AB[$			$[BA)$
$]AB]$			$]AB)$
$]AB[$			$]BA)$
$[(\Delta), A)$			$](\Delta), A)$

INDEX

A

Abscisse d'un point dans un repère, A2, p. 28-G4, p. 257.
Angle, G7, p. 328.
Angles adjacents, G7, p. 329.
Angle aigu, G7, p. 336.
Angle complémentaire, G7, p. 346.
Angles droits, G7, p. 329.
Angle Géométrique, G7, p. 332.
Angles isométriques, G7, p. 331.
Angle nul, G7, p. 329.
Angle Obtus, G7, p. 336.
Angles opposés par le sommet, G7, p. 332.
Angle plat, G7, p. 329.
Angles supplémentaires, G7, p. 347.
Apothème d'un polygone, G5, p. 293.
Apothème d'une pyramide, G5, p. 295.
Application Associée, A2, p. 25-A7, p. 163.
Application identique du plan, G6, p. 318.
Approximation décimale, A1, p. 10.
Arrondi, A3, p. 54.
Axe de symétrie, G1, p. 187.

B

Base de $\mathscr{V}$, G4, p. 252.
Base orthonormée, G8, p. 377.
Bissectrice d'un angle, G7, p. 337.

C

Centre de gravité d'un triangle, G1, p. 183.
Centre de symétrie, G1, p. 187.
Centre d'une homothétie, G6, p. 318.
Cercle circonscrit à un triangle, G1, p. 183.
Coefficient de proportionnalité, A5, p. 123.
Coefficient directeur (d'une droite), A5, p. 109.
Coefficient d'un monôme, A7, p. 158.
Combinaison (méthode par), A4, p. 88.
Coordonnées d'un point, A2, p. 28-G4, p. 257.
Coordonnées d'un vecteur, G4, p. 252.
Cosinus d'un angle, G7, p. 352.
Croissante (fonction), A5, p. 106.

D

Décomposition d'un vecteur, G4, p. 251.
Décroissante (fonction), A5, p. 106.
Degré d'un monôme, A7, p. 158.
Déterminant de deux vecteurs, G4, p. 256.
Différence de deux vecteurs, G3, p. 217.

E

Ensemble de définition d'une fonction, A2, p. 23.
Équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A4, p. 77.
Équations d'une droite, G4, p. 262.
Euclidien (Plan), G5, p. 282.
Extrêmes (termes), A1, p. 6.

F

Fonction, A2, p. 22.
Fonction affine, A5 p. 101.
Fonction affine par intervalles, A5, p. 113.
Fonction constante, A5, p. 105.
Fonction en escalier, A5, p. 118.
Fonction linéaire, A5, p. 118.
Fonction numérique, A2, p. 25.
Fonction polynôme, A7, p. 159.
Fonction racine carrée, A3, p. 53.
Fonction rationnelle, A7, p. 162.
Fraction rationnelle, A7, p. 162.

G

Graphe d'une fonction, A2, p. 30.
Groupe commutatif, A1, p. 2-G3, p. 216.

H

Hauteur d'un triangle, G1, p. 183-G5, p. 289.
Hexagone, G5, p. 293.
Homothétie, G6, p. 317.
Homothétique (triangle), G6, p. 321.

I

Image sur $\mathscr{C}^+$ (d'un angle), G7, p. 341.
Inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A4, p. 92.
Intervalle d'origine a, A1, p. 12.
Intervalle d'extrémité b, A1, p. 13.
Invariant (point), G6, p. 318.
Invariante (figure globalement), G6, p. 321.
Isométrie, G6, p. 304.
Isométriques (parties isométriques du plan), G6, p. 313.

L

Linéarité (propriété), A5, p. 120.
Linéarité (situation de), A5, p. 129.
Loi (de composition) interne, A1, p. 1.

M

Médiatrices d'un triangle, G1, p. 183.
Médianes d'un triangle, G1, p. 183.
Mesure d'un angle, G7, p. 342.
Métriques (propriétés), G5, p. 290.
Monôme, A7, p. 158.
Moyens (termes), A1, p. 6.
Moyenne arithmétique, A1, p. 18.
Moyenne géométrique, A3, p. 71-G5, p. 284.
Moyenne harmonique, A3, p. 71.
Multiplication d'un vecteur par un réel, G3, p. 223.

N

Négatif (réel), A1, p. 9.

O

Ordonnée (d'un point dans un repère) A2, p. 28-G4, p. 257.
Origine d'une graduation, G4, p. 248.
Orthocentre, G1, p. 183.
Orthogonalité de 2 vecteurs, G8, p. 377.

P

Parallèles équidistantes, G2, p. 194.
Partage d'un segment, G2, p. 195.
Plan euclidien, G5, p. 282.
Polygones réguliers, G5, p. 293.
Polynôme, A7, p. 158.
Positif (réel), A1, p. 9.
Produit d'un vecteur par un réel, G3, p. 220.
Produits remarquables, A1, p. 4.
Proportionnalité, A5, p. 125.
Pythagore (théorème de), G5, p. 286.

R

Racine carrée, A3, p. 52.
Radians (mesure en), G7, p. 345.
Rationnel (rendre), A3, p. 63.
Rapport, A1, p. 3.
Rapport de projection, A5, p. 128.
Rapport de projection orthogonale, A5, p. 128.
Rapport d'une homothétie, G6, p. 318.
Régionnement du plan, G4, p. 271.
Relations trigonométriques dans le triangle rectangle, G7, p. 365.
Repère du plan, A2, p. 27.
Repère normé, G4, p. 257.
Repère orthogonal, G4, p. 259.
Repère orthonormé, G4, p. 258.
Représentation d'un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A2, p. 29.
Représentation graphique d'une fonction, A2, p. 30.
Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A4, p. 81.
Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A4, p. 94.

S

Segments consécutifs, G2, p. 194.
Segments isométriques, G6, p. 313.
Sinus (d'un angle), G7, p. 352.
Solution (d'une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), A4, p. 77.
Solution (d'une inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), A4, p. 91.
Substitution (méthode de), A4, p. 86.
Suites proportionnelles, A5, p. 124.
Suite de rapports égaux, A5, p. 124.
Système, A4, p. 82.

T

Tables (lecture de), A2, p. 48.
Table de carrés, A3, p. 65-66.
Table de racines carrés, A3, p. 67.
Tables trigonométriques, G7, p. 360.
Tangente à un cercle, G1, p. 181.
Tangente d'un angle, G7, p. 357.
Thalès (Axiome de), G2, p. 200.
Thalès (expression vectorielle), G3, p. 233.
Triangles isométriques, G6, p. 314.
Trigonométrique (demi-cercle), G7, p. 351.
Triplet pythagoricien, G5, p. 301.

V

Valeur absolue (fonction), A5, p. 114.
Vecteur, G3, p. 214.
Vecteurs de même direction, G4, p. 245.
Vecteurs de même sens, G3, p. 220.
Vecteurs de sens contraire, G3, p. 220.
Vecteur directeur d'une droite, G4, p. 243.
Vecteurs orthogonaux, G8, p. 376.
Vecteur unitaire, G4, p. 248.

ALGÈBRE

1 Faire de l'algèbre

Leçon 1 : ADDITIONNER ET MULTIPLIER DES RÉELS
Leçon 2 : ORDONNER DES RÉELS

1 Additionner et multiplier des réels

1) Axiomes des opérations dans $\mathbb{R}$

Définitions

L'addition des réels est l'opération qui, à chaque couple (a, b) de réels, fait correspondre le réel $a + b$ appelé somme de a et b ; on dit que l'addition est une loi de composition interne ou, en abrégé, une loi interne (dans $\mathbb{R}$).

La multiplication des réels est l'opération qui, à chaque couple (a, b) de réels, fait correspondre le réel $a \times b$ appelé produit de a et b ; on dit que la multiplication est une loi interne (dans $\mathbb{R}$).

Pour pouvoir additionner et multiplier dans $\mathbb{R}$, il faut connaître les axiomes des opérations dans $\mathbb{R}$ ainsi que les principales règles de calcul.

$(\mathbb{R}, +)$	$(\mathbb{R}, \times)$
I. L'addition est une loi interne.	I. La multiplication est une loi interne.
Ass, + — II. L'addition dans $\mathbb{R}$ est associative : Pour tous réels a, b, c $(a+b)+c=a+(b+c)$	II. La multiplication dans $\mathbb{R}$ est associative : Pour tous réels a, b, c $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ — Ass, ×
N, + — III. L'élément 0 est neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$: Pour tout réel a $a+0=a$ et $0+a=a$	III. L'élément 1 est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$: Pour tout réel a $a\times 1=a$ et $1\times a=a$ — N, ×
Opp, + — IV. Chaque réel a admet un opposé et un seul, le réel noté $-a$: Pour tout réel a $a+(-a)=0$ et $(-a)+a=0$	IV. Chaque réel non nul a admet un inverse et un seul, le réel noté $\frac{1}{a}$: Pour tout réel non nul a $a\times\frac{1}{a}=1$ et $\frac{1}{a}\times a=1$ — Inv, ×
Com, + — V. L'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative : Pour tous réels a, b $a+b=b+a$	V. La multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative : Pour tous réels a, b $a\times b=b\times a$ — Com, ×
	VI. La multiplication est distributive par rapport à l'addition : Pour tous réels a, b, c $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ — × Distr +

La multiplication dans $\mathbb{R}^+$ est-elle une loi interne ?
La soustraction des naturels est-elle une loi interne ?
La soustraction dans $\mathbb{Z}$ est-elle une loi interne ?
On résume les propriétés I, II, III, IV et V de l'addition des réels en disant que :

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

On résume les propriétés I, II, III, IV et V de la multiplication des réels en disant que :

$(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Chaque réel admet-il un inverse ?
$(\mathbb{R}, \times)$ est-il un groupe commutatif ?

2) Quelques règles de calcul

a) **Sur les sommes.**

$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

b) **Sur les produits.**

$$-(ab) = (-a)\,b$$
$$-(ab) = a(-b)$$

c) **Sur les quotients.**

$b \neq 0, \quad k \neq 0 : \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{ak}{bk}$

$b \neq 0 : \quad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$

$b \neq 0 : \quad \dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$

$b \neq 0, \quad d \neq 0 : \quad \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

$a \neq 0, \quad b \neq 0 : \quad \dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$

Le quotient $\dfrac{x}{y}$ est aussi appelé *rapport* de x à y.

d) **Sur les puissances.**

$a \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z} : \quad a^0 = 1$

$a \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z} : \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{Z},$

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$a^n \times b^n = (ab)^n$

$(a^n)^p = a^{np}$

$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3) Appliquons les axiomes et les règles

a) **Réduire.**

Exemple

$$s = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$s = \frac{3}{5} \times \frac{10}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$

$$s = 2 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$

$$s = 2\,.$$

Un conseil : refaire ce calcul au brouillon.

b) **Développer.**

Exemple

$$(a + b)(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d$$
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Retenons

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

c) **Factoriser.**

Exemples

1) $2x^3 - 5x^2 + 4x = x(2x^2 - 5x + 4)$.

2) $S = (3x - 1)(2x + 3) - (3x - 1)(x - 2)$
$S = (3x - 1)[(2x + 3) - (x - 2)]$
$S = (3x - 1)(2x + 3 - x + 2)$
$S = (3x - 1)(x + 5)$.

3) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)3 + (3)^2$ (produit remarquable)
$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2$.

Un conseil : refaire ces factorisations au brouillon.

d) **Démontrer.**

Exemple

Démontrer que

$b \neq 0$ et $d \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

Démontrons que :
si $b \neq 0$ et $d \neq 0$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
alors $ad = bc$.

Hypothèse : $\begin{cases} b \neq 0, & d \neq 0 \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{cases}$

Démonstration

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
Déf.
$a\frac{1}{b} = c\frac{1}{d}$
Eg. ×
$a\frac{1}{b}bd = c\frac{1}{d}bd$
Com., ×
$ad\frac{1}{b}b = cb\frac{1}{d}d$
Ass., ×
$ad\left(\frac{1}{b}b\right) = cb\left(\frac{1}{d}d\right)$
Inv. ×
$ad \times 1 = cb \times 1$
N. ×
$ad = cb$
Com., ×
$ad = bc$

Conclusion : $ad = bc$

Démontrons que :
si $b \neq 0$ et $d \neq 0$ et $ad = bc$
alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Hypothèse : $\begin{cases} b \neq 0, & d \neq 0 \\ ad = bc \end{cases}$

Démonstration

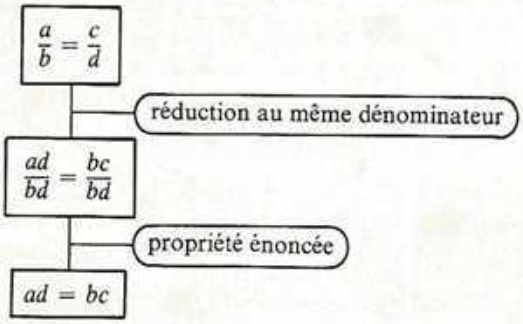
$ad = bc$
Eg. ×
$ad\frac{1}{d}\frac{1}{b} = bc\frac{1}{d}\frac{1}{b}$
Com. ×
$a\frac{1}{b}d\frac{1}{d} = c\frac{1}{d}b\frac{1}{b}$
Ass. ×
$a\frac{1}{b}\left(d\frac{1}{d}\right) = c\frac{1}{d}\left(b\frac{1}{b}\right)$
Inv. ×
$a\frac{1}{b} \times 1 = c\frac{1}{d} \times 1$
N. ×
$a\frac{1}{b} = c\frac{1}{d}$
Déf
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

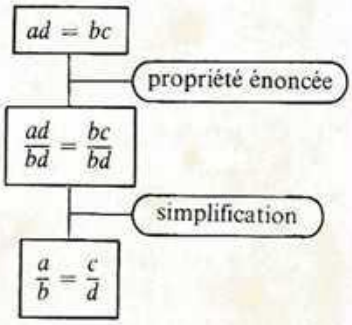
Conclusion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Remarque. En utilisant la propriété :

$$d \neq 0 \qquad \frac{n}{d} = \frac{p}{d} \text{ équivaut à } n = p$$

la démonstration précédente se fait plus rapidement :

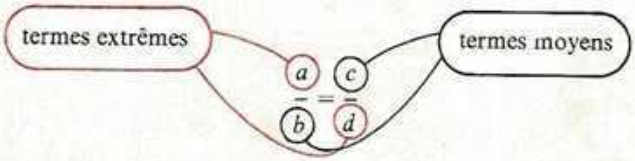




d'où le théorème ci-dessous :

Théorème

Dans une égalité de quotients, le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens.



Exercice

Une propriété à démontrer :

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Si dans une égalité de quotients non nuls, on permute les termes moyens, on obtient une nouvelle égalité de quotients.

e) **Substituer :**

Exemple

$a = 2b - 3$ et $b = 4 - 2c$. Exprimons « a » à l'aide de « c ».

$a = 2(4 - 2c) - 3$

$a = 8 - 4c - 3$

$a = 5 - 4c$.

f) **Résoudre des équations.**

Rappels :

$a = b$ équivaut à $a - b = 0$

$a = b$ équivaut à $a + c = b + c$ — Eg. +

$c \neq 0$

$a = b$ équivaut à $ac = bc$ — Eg. ×

$ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Exemples

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{3}{2} + x = -4$

$$\frac{3}{2} + x = -4$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + x = -\frac{3}{2} - 4$$

$$x = -\frac{3}{2} - \frac{8}{2}$$

$$x = -\frac{11}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{3}{2}x = -4$

$$\frac{3}{2}x = -4$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x = \frac{2}{3}(-4)$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

3) Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x + \frac{5}{2} = -5$, Koffi et Konan ont proposé les démarches suivantes :

Koffi

$2x + \frac{5}{2} = -5$

Eg, +

$2x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = -5 - \frac{5}{2}$

$2x = -\frac{15}{2}$

Eg, ×

$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{2}\right)$

$x = -\frac{15}{4}$

$S = \left\{-\frac{15}{4}\right\}$

Konan

$2x + \frac{5}{2} = -5$

Eg, ×

$\frac{1}{2} \times 2x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(-5)$

$x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$

Eg, +

$x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}$

$x = -\frac{10}{2}$

$x = -5$

$S = \{-5\}$

L'un des deux s'est certainement trompé ! Pourquoi ?

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x - 5 = 7x + 1$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7x + 1 \\ 3x - 5 - (7x + 1) &= 0 \\ 3x - 5 - 7x - 1 &= 0 \\ -4x - 6 &= 0 \\ -4x &= 6 \\ x &= \frac{6}{-4} \\ x &= -\frac{3}{2} \\ S &= \left\{-\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Exercice Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

$0x = 0$; $0x = 5$; $5x = 0$?

2 Ordonner des réels

1) Rappels

- $a \geqslant b$ (signifie que) $a - b \in \mathbb{R}^+$.
- Un réel positif est un réel supérieur ou égal à zéro.
  Un réel négatif est un réel inférieur ou égal à zéro.
- La valeur absolue d'un réel positif est ce réel :

$$A \geqslant 0 \quad \text{(équivaut à)} \quad |A| = A.$$

La valeur absolue d'un réel négatif est son opposé :

$$A \leqslant 0 \quad \text{(équivaut à)} \quad |A| = -A.$$

2) Quelques règles de calcul

1.	si $a \geqslant b$		alors	$a + c \geqslant b + c$
2.	si $a \geqslant b$	et $c \geqslant d$	alors	$a + c \geqslant b + d$
3.	si $a \geqslant 0$	et $b \geqslant 0$	alors	$ab \geqslant 0$
4.	si $a \geqslant b$	et $c > 0$	alors	$ac \geqslant bc$
5.	si $a \geqslant b$	et $c < 0$	alors	$ac \leqslant bc$
6.	si $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$		alors	$ac \leqslant bd$
7.	si $0 < a \leqslant b$		alors	$\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$
8.	$\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$			
9.	$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \times \lvert b \rvert$.			

3) Appliquons les règles

a) **Comparer.**

Exemple

Comparer $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{8}$.

On sait que $7 \leqslant 8$; en appliquant la règle ⑦ on a : $\frac{1}{7} \geqslant \frac{1}{8}$.

b) **Encadrer.**

Exemple 1

Donner un encadrement par deux décimaux d'ordre deux du périmètre P d'un cercle de diamètre 16. On donne l'encadrement suivant de π :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15\,.$$

En appliquant la règle ④ on obtient :

$$3{,}14 \times 16 < P < 3{,}15 \times 16$$
$$50{,}24 < P < 50{,}40\,.$$

Exemple 2

Encadrer le rationnel $\frac{355}{113}$ par deux éléments consécutifs de $\mathbb{D}_3$.

$$\begin{array}{r|l} 355 & 113 \\ \hline & 3{,}141... \end{array}$$

$$3{,}141 < \frac{355}{113} < 3{,}142$$

3,141 est l'approximation décimale par défaut d'ordre 3 du rationnel $\frac{355}{113}$.

3,142 est l'approximation décimale par excès d'ordre 3 du rationnel $\frac{355}{113}$.

c) **Résoudre des inéquations.**

Rappels

$a \geqslant b$ équivaut à $a - b \geqslant 0$

ord. + : $a \geqslant b$ équivaut à $a + c \geqslant b + c$ — L'addition d'un réel conserve l'ordre.

ord. × $c > 0$: $c > 0$, $a \geqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$ — La multiplication par un réel positif conserve l'ordre.

ord. × $c < 0$: $c < 0$, $a \geqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$ — La multiplication par un réel négatif change l'ordre.

Exemples

Dans chaque exemple, l'ensemble des solutions sera représenté graphiquement sur une droite graduée.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ $\quad 2x - 3 \leqslant 4$.

$2x - 3 \leqslant 4$

ord, $+$

$2x - 3 + 3 \leqslant 4 + 3$

$2x \leqslant 7$

ord, $\times \frac{1}{2} > 0$

$\frac{1}{2} \times 2x \leqslant \frac{1}{2} \times 7$

$x \leqslant 3{,}5$

Représentation graphique :



$S = [0 ; 3, 5]$

$[0 ; 3, 5]$ se lit « intervalle fermé $0 ; 3, 5$ ».

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^-$ $\quad -\frac{3}{5}x < 2$.

$-\frac{3}{5}x < 2$

ord, $\times -\frac{5}{3} < 0$

$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)x > \left(-\frac{5}{3}\right) \times 2$

$x > -\frac{10}{3}$

Représentation graphique :



$S = \left]-\frac{10}{3} ; 0\right]$

$\left]-\frac{10}{3} ; 0\right]$ se lit « intervalle semi-ouvert $-\frac{10}{3}$, 0 ouvert à gauche ».

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|a| < 3$

$a \in \mathbb{R}^-$ ou $a \in \mathbb{R}^+$

on sait que :

$a \in \mathbb{R}^-$ (équivaut à) $|a| = -a$.

Donc dans $\mathbb{R}^-$, l'inéquation $|a| < 3$ équivaut à :

$a \in \mathbb{R}^-$ et $-a < 3$

$a \in \mathbb{R}^-$ et $a > -3$

$S_1 =]-3 ; 0]$.

on sait que :

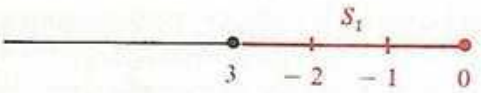
$a \in \mathbb{R}^+$ (équivaut à) $|a| = a$.

Donc dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $|a| < 3$ équivaut à :

$a \in \mathbb{R}^+$ et $a < 3$

$S_2 = [0 ; 3[$.

Représentation graphique



Représentation graphique



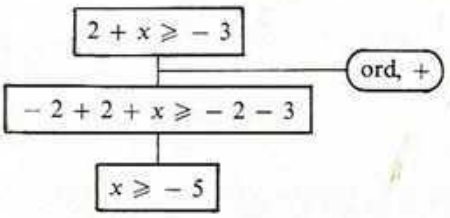
Conclusion : Les solutions de l'inéquation dans $\mathbb{R}$ $|a| < 3$ sont les réels éléments de S_1 ou de S_2 ; l'ensemble S des solutions est donc $S_1 \cup S_2$

$$S =]-3\,;3[\,.$$

Représentation graphique



4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 + x \geqslant -3$ et représenter l'ensemble de ses solutions sur une droite graduée.



L'ensemble S des solutions de l'inéquation donnée est l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à -5 ; il est facile de représenter cet ensemble sur une droite graduée :

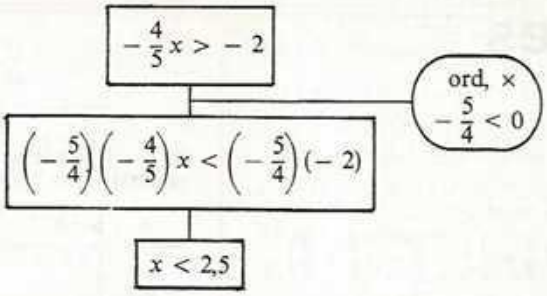


S est représenté par la demi-droite fermée ayant pour origine le point d'abscisse -5 et contenant **tous** les points d'abscisses supérieures ou égales à -5.
On notera l'ensemble des solutions d'une manière analogue à celle utilisée dans les deux exemples précédents :

$$S = [-5\,; \rightarrow [\,.$$

$[-5\,; \rightarrow [$ se lit « intervalle d'origine -5 fermé en -5 ».

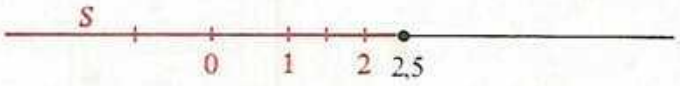
5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-\frac{4}{5}x > -2$ et représenter l'ensemble de ses solutions sur une droite graduée.



$S =]\leftarrow ; 2{,}5[$.

$]\leftarrow ; 2{,}5[$ se lit « intervalle d'extrémité 2,5 ouvert en 2,5 ».

Représentation graphique



Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$0x < 0$; $0x \geqslant 0$; $0x \geqslant 5$; $0x < 3$;
$|x| > 3$; $|x| \geqslant 2$.

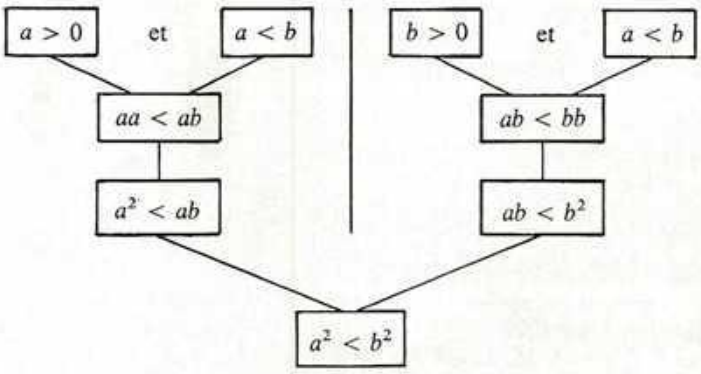
d) **Démontrer.**

Exemple

Démontrer que : si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$.

Hypothèse : $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$0 < a < b$.

Démonstration :



Conclusion : $a^2 < b^2$.

Exercices

Calculer

1 (1). Calculer m, n et p.

$$m = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) - 2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right)$$

$$n = -\frac{5}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5} - 1\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$$

$$p = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right).$$

2 (1). On donne : $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{5}{7}$.
Calculer :

$$a + b;\quad a \times b;$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b};\quad \frac{1}{a} \times \frac{1}{b};$$
$$\frac{1}{a+b};\quad \frac{1}{a \times b}.$$

3 (1). On donne : $a = -\frac{3}{5}$ et $b = \frac{2}{3}$.
Calculer :

$a + b$; $a - b$; $b - a$; $a^2 + b^2$; $(a + b)^2$
$a^2 - b^2$; $(a - b)^2$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{b^2}{a^2}$;
$a \times b$; $a^2 \times b^2$; $(a \times b)^2$.

4 (1). On donne : $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{3}$ et $c = \frac{3}{4}$.
Calculer :

$a + b + c$; $a - (b + c)$; $a - b + c$;
$ab + c$; $a + bc$; $a(b + c)$; $(a + b)\,c$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}};\quad \frac{\frac{a}{b}}{c}.$$

5 (1). Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$10^4 \times 0{,}000\,125$; $10^{-7} \times 3\,642$
$10^{-3} \times 125$; $\frac{1}{2} \times 10$
$\frac{1}{2} \times 10^2$; $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$; $\frac{1}{4} \times 10^{-4}$
$\frac{(0{,}2)^3 \times 9}{2 \times 3}$; $\frac{(0{,}2)^5 \times 18}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$.

6 (1). Compléter le tableau ; on donnera le résultat sous forme décimale ou de fraction.

a	a^{-1}	a^2	a^{-3}	a^4
0,1				
− 0,3				
− 1,2				
0,05				

7 (1). Choisir dans les nombres suivants celui qui est égal au nombre de la 1re colonne.

$\frac{10^{-4}}{2}$	2×10^{-8} ; 5×10^{-5} ; 5×10^{-3} ; 10^{-2} ; 5^{-4} ; 5^{-2}
$\frac{3}{5} \times 10^6$	3×2^6 ; $\frac{30^6}{5}$; 6^6 ; 2^{18} ; 6×10^5 ; 10^4
$3{,}14 \times 10^{-4}$	$0{,}314 \times 10^{-2}$; $31{,}4 \times 10^{-3}$; 314×10^{-2} ; $3\,140 \times 10^{-7}$
$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$	2^{-10} ; 8^{-3} ; $93{,}75 \times 10^{-2}$; $15{,}685 \times 10^{-3}$; $0{,}5 \times 10^{-6}$; 125×10^{-3} ; 30×10^{-4}.

8 (1). Réduire s, p et q.

$s = (3a + 2b - 5) + (2a - b + 3)$
$p = (5 + 2a - b) - (3 - 2a + 2b)$

$$q = \left(\frac{3a}{4} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4a}{3} - \frac{5}{4}\right).$$

9 (1). Développer :

$(2x - 4y + 5)(3a)$
$\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y - \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{10}{3}a\right)$
$(-4x)(3x^2 - 5x + 1)$
$(x + 3)(y - 1)$
$(2 - x)(3 - y)$
$(2x - 3)(3y - 2)$
$(x - y^2)(x^2 - y)$
$(3x - 2y)(2x - 3y)$.

10 (1). Développer :

$(a + b)(b + c)(c + a)$
$(a - b)(b - c)(c - a)$

$(a-2)(3-b)(c+1)$
$(x-1)(x+2)(x-3)$
$(3y-2x)(y+x)(3x-2y)$
$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

11 (1). Développer :

$(3x+1)^2$ $\quad \left(\frac{1}{2}x^2-2y^3\right)^2$

$(5y-3)^2$ $\quad \left(\frac{7}{3}a^2b-\frac{1}{2}ab^2\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ $\quad (-3a-2b)^2$

$(2ab^2-2a^2b)^2$; $\quad (5xyz+1)^2$.

12 (1). Développer :

$(a-1)(a+1)$
$(a-2)(a+2)$
$(a+2)(2-a)$
$(2x-3)(2x+3)$
$\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$
$\left(\frac{2}{5}a-b\right)\left(-\frac{2}{5}a-b\right)$
$(ab^2-a^2b)(a^2b+ab^2)$
$(2x+y-1)(2x+y+1)$.

13 (1). Développer :

$(a+b+c)^2$; $(a-b+c)^2$; $(a-b-c)^2$
$(a+b)^3$; $(a-b)^3$; $(a-1)^3$.

14 (1). Factoriser :

$3a+3b$; $ay-yb$;
$xa+xb$; $ax+x$.

15 (1). Factoriser :

$x(a+b)-y(a+b)$
$x(a-b)+y(b-a)$
$x(a-b)-y(b-a)$.

16 (1). Factoriser :

$ax+bx+ay+by$
$ax-bx-ay+by$
$xa+xb+a+b$
$ay-a+b-by$.

17 (1). Factoriser :

$(2a+3b)(x+y)+(3a-2b)(x+y)$
$(a-2b)(x-y)-(2a-b)(x-y)$
$(2a+b)(x-y)-(3a-2b)(y-x)$
$2(3a-2b)(x-y)-3(a+b)(y-x)$.

18 (1). Factoriser :

a^2+6a+9
$25x^2-10x+1$
$\frac{4}{9}y^2+\frac{4}{3}y+1$
$4a^2b^6+12ab^4+9b^2$
x^4+2x^2+1.

19 (1). Factoriser :

a^2-b^2 ; $\quad 9a^2-4b^2$;
a^2-1 ; $\quad \frac{a^2}{16}-\frac{b^2}{25}$;
$4a^2-1$; $\quad \frac{1}{4}x^2y^4-\frac{1}{9}$.

20 (1). Factoriser :

$(a-b)^2-(2a+b)^2$
$4a^2-(b+c)^2$
$a^2b^2-(bc-ac)^2$.

21 (1). Factoriser :

ab^2-ac^2
$a(b^2-c^2)+b(b+c)^2$
$a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$a^2b+c^2-c^2b-a^2$
$2(a^2-b^2)-3(2a-3b)(b-a)$.

22 (1). Sachant que le mégamètre vaut 10^6 m et le micron vaut 10^{-6} m, exprimer le mégamètre en kilomètres, en millimètres, en microns.

Notations : mégamètre : Mm
micron : μ.

Sachant que l'angström (Å) vaut 10^{-4} μ, exprimer l'angström en mètres, en kilomètres, en mégamètres.

23 (1). On donne $a=2b-3$ et

$$b=\frac{5-3c}{2}.$$

Calculer a pour chacune des valeurs suivantes de c :

$\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; -2 ; 5 ; 12 ; -17.

Donner une nouvelle écriture de a contenant c, en remplaçant b par sa valeur donnée dans l'énoncé.
A l'aide de cette nouvelle écriture, calculer a pour les valeurs de c précédentes.
Quelle est la méthode la plus rapide ?
Calculer b pour $a = -5$.
Calculer c pour $a = -5$.

24 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $7{,}2 + x = 11{,}6$

b) $3{,}1\,b = 9{,}3$.

c) $\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}$.

d) $x - 3{,}2 = -7{,}4$.

25 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $2x - 5 = 17$.

b) $-3 - 5b = -3$.

c) $-\frac{1}{2}a + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

26 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3(5y - 2) = 11$.

b) $2(x - 9) - 7 = -1$.

c) $-\frac{1}{2} = 5(2x + 1)$.

d) $2(a - 1) + 3(a - 2) = -4$.

27 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3a - 2 = 5a + 4$.

b) $2y - 15 = 5 - 3y$.

c) $5 - 2x = 4 - 5x$.

28 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $5x - 2(1 - x) = 6 + 4x$.

b) $a + \frac{1}{2} = \frac{3a - 6}{2}$.

c) $\frac{4y + 1}{2} = \frac{2y - 1}{3}$.

29 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $(x - 1)(x - 3) = 0$.

b) $(2 - x)(3 + x) = 0$.

c) $(4x - 1)(2x + 3) = 0$.

d) $(a - 1)(2 - 3a)(5a - 4) = 0$.

30 (1). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 0$
$(x - 1)(x - 3) - (x + 2)(1 - x) = 0$
$(2x + 1)(x - 3) - (2x + 1) = 0$
$(2x + 1)(x - 3) - (x^2 - 9) = 0$
$x^2 - 4 + (3x - 1)(x + 2) + x^2 + 2x = 0$.

31 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|x| + 5 = 3x - 1$.

2) $x - 2 + |x + 3| = 5$.

3) $|x - 1| + 2x + 3 = x$.

32 (1). Dans le tableau suivant marquer « une croix » si l'élément appartient à l'ensemble correspondant.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
0					
-2					
3,7					
$\frac{4}{5}$					
$-\frac{4}{5}$					
$-\frac{12}{3}$					
π					
-4×10^{-3}					
$\frac{5}{3}$					
7×10^{-4}					

33 (2). Comparer :

-4 et $-\frac{29}{7}$; $-99{,}999\,9$ et $-99{,}999\,99$

$\frac{21}{4}$ et $\frac{26}{5}$; $\frac{-15}{14}$ et $\frac{-22}{21}$.

34 (2). Ranger dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) les réels suivants, puis marquer les points correspondants sur une droite graduée (pour certains nombres, une position approximative sera acceptée) :

$\frac{5}{2}$; $-\pi$; $-\frac{13}{2}$; $\frac{21}{7}$; $\frac{0}{2}$; $-\frac{21}{4}$;
$-\frac{7}{2}$; $\frac{2}{3}$.

35 (2). Ranger dans l'ordre croissant :
$22{,}9 \times 10^{-4}$; $2{,}3 \times 10^{-3}$;
$2\,145 \times 10^{6}$; $0{,}231 \times 10^{-2}$;
$0{,}002\,33 \times 10^{2}$.

36 (2). On donne les encadrements des réels p et q :

$1{,}33 < p < 2{,}01$ et $0{,}005 < q < 0.007$.

Encadrer : $p + q$; $p - q$; $q - p$; $p \times q$; $\frac{p}{q}$.

37 (2). Le rayon d'un cercle, mesuré au millimètre près, est donné par l'encadrement : $3{,}8 < r < 3{,}9$.
Donner un encadrement du périmètre P du cercle et de la mesure de l'aire A du disque déterminé par ce cercle. $(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$.

38 (2). Donner les approximations décimales par défaut et par excès à 10^{-3} près des rationnels suivants :

$\frac{22}{7}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{1\,000}{9}$; $2{,}718\,3$; $3{,}6$; $0{,}000\,01$; 10^{-4}; 10^{-5}.

39 (2). On donne :

$$3{,}141\,592\,65 < \pi < 3{,}141\,592\,66.$$

Quelle est l'approximation décimale d'ordre 4 par excès de π ?
Quelle est son approximation décimale d'ordre 5 par excès ?

40 (2). a, b, c et d sont des réels tels que $[a, b] \subset [c, d]$.
Ranger les réels a, b, c et d dans l'ordre croissant.

41 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement leur ensemble de solutions :

$3x - 5 \leqslant 2$	$5 + 7x > 3$
$4m - \frac{1}{2} < 0$	$3m + \frac{4}{5} \geqslant \frac{1}{4}$
$11 - \frac{3}{2}x \geqslant -7$	$\frac{4}{5}y + \frac{3}{4} < \frac{2}{3}$
$4t - 2 \geqslant 3t - 1$	$-5x + 7 \leqslant -3x - 1$
$2 - 5x < 3 - 5x$	$4x - 3 > 4x - 5$.
$\frac{-x-1}{7} \geqslant x + \frac{1}{3}$	

42 (2). Trouver l'ensemble des réels qui vérifient à la fois les deux inéquations :

a) $3x - 1 > 0$ et $5x + 4 > 0$.

b) $4x - \frac{1}{2} \leqslant 1$ et $3x - 2 \geqslant 4$.

c) $2x - 3 < 7$ et $3x + 1 \geqslant 8{,}5$.

d) $5x - 1 > 7$ et $2 - x \leqslant 3$.

43 (2). 1) Écrire en extension :

$]-4\,;5] \cap \mathbb{Z}$

$\left[-2{,}9\,;\frac{3}{4}\right[\cap \mathbb{Z}$

$[\pi\,;4[\cap \mathbb{Z}$

$]\leftarrow\,;2[\cap \mathbb{N}^*$.

2) Écrire plus simplement :

a) $[-1\,;2] \cup [-3\,;0]$
$[-1\,;2[\cup]-2\,;0]$
$]-1\,;5] \cup [0\,;3[$
$[-3\,;-1[\cup [-3\,;4[$
$[\pi\,;5] \cup \left]\frac{22}{7}\,;\frac{22}{3}\right]$.

b) $[-1\,;2] \cap [-3\,;0]$
$]-1\,;3[\cap [0\,;4]$
$[-1\,;0] \cap [2\,;7[$
$]-2\,;1] \cap [1\,;3[$
$]1\,;4] \cap]0\,;1]$
$]2\,;3] \cap]2\,;3[$

c) $]\leftarrow\,;4] \cup]-2\,;\rightarrow[$
$]\leftarrow\,;0[\cup]0\,;\rightarrow[$
$]\leftarrow\,;-3[\cup]\leftarrow\,;-2[$
$]\leftarrow\,;-1[\cup]-6\,;1[$.

d) $]\leftarrow\,;-4] \cap]\leftarrow\,;-2[$
$]\leftarrow\,;-1[\cap [-3\,;\rightarrow[$
$[-2\,;\rightarrow[\cap]\leftarrow\,;-3]$.

44 (2). On considère les intervalles E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, F_3, F_4 définis comme suit :

$E_1 = [-2{,}7\,;4{,}99]$ $\quad F_1 =]\leftarrow\,;3{,}1]$
$E_2 =]3{,}1\,;4{,}99[$ $\quad F_2 =]\leftarrow\,;4{,}99[$
$E_3 =]-2{,}7\,;3{,}1]$ $\quad F_3 = [4{,}99\,;\rightarrow[$
$E_4 = [3{,}1\,;4{,}99[$ $\quad F_4 =]3{,}1\,;\rightarrow[$.

• Pour chacun des réels suivants, indiquer les intervalles auxquels il appartient :

-4	3,105	10^{-3}	5,01
$-2{,}5$	0,1	3,099	$-2{,}69$
4,989	3,52	$\frac{22}{7}$	$-2{,}7$.

Trouver trois partitions de $\mathbb{R}$ obtenues à l'aide d'intervalles choisis dans la liste :

E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, F_3, F_4.

Démontrer

45 (1). Dans chacune des expressions suivantes, transformer le premier membre pour obtenir le second membre en indiquant pour chaque étape l'axiome appliqué :

$$a(b + c) = ba + ca$$
$$(b + c)\, a = ac + ab$$
$$(a + b)\,(c + d) = (ad + bc) + (ac + bd)\,.$$

46 (1). b et d étant des réels non nuls, démontrer que :

— si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $3b + 2d \neq 0$ alors

$$\frac{a}{b} = \frac{3a + 2c}{3b + 2d}$$

— si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $3b - d \neq 0$ alors

$$\frac{a}{b} = \frac{3a - c}{3b - d}\,.$$

47 (1). Démontrer : si la somme d'un réel non nul et de son inverse est un entier relatif, alors la somme du carré de ce réel et du carré de son inverse est un entier relatif.

48 (1). Démontrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Aide :

1) Si n désigne un entier, son suivant est $n + 1$; n et $n + 1$ sont des entiers consécutifs.

2) Un nombre impair est un nombre de la forme $2k + 1$ (où k désigne un entier).

49 (2). Démontrer :

si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.

50 (2). Démontrer : x et y étant strictement supérieurs à zéro

$$x < y \quad \text{équivaut à} \quad \frac{x}{y} < 1\,.$$

51 (2). Démontrer que, quels que soient les réels x, y et z :

$$|x + y + z| \leqslant |x| + |y| + |z|$$
$$|x - y| \leqslant |x| + |y|$$
$$|x - y| \leqslant |x - z| + |y - z|\,.$$

52 (2). Démontrer que :

si $a \in [0\,;1]$ alors $(1 - a) \in [0\,;1]$.

Réfléchir

53 (1). Trouver un moyen pour calculer rapidement :

a) 11×59	*b*) $101^2\,;51^2\,;38^2$
21×37	$55^2\,;49^2\,;22^2$
42×55	*c*) $51^2 - 50^2\,;34^2 - 33^2$
39×15	$34^2 - 24^2\,;46^2 - 36^2$
d) 47×53	21×19
59×61	44×36
18×22	55×65.

54 (1). a, b, c, d étant quatre réels, démontrer que :

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(a+d)}{3} = a + \frac{b+c+d}{3}\,.$$

55 (1). Rappelons que pour obtenir la moyenne arithmétique de n nombres, on fait la somme de ces n nombres et on divise le résultat par n.
En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver un moyen simple pour calculer la moyenne arithmétique des douze mesures suivantes de la vitesse de la lumière (exprimées en km/s)

300 001	300 003	299 998	299 995
299 998	300 001	300 006	300 001
300 003	300 001	299 997	299 998

56 (1). Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies.
Pour chacune des autres propositions, donner un exemple qui prouve qu'elle est fausse.

a) La somme de deux nombres naturels est un nombre naturel.

b) La différence de deux nombres naturels est un nombre naturel.

c) La différence de deux entiers relatifs est un entier relatif.

d) Le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif.

e) Le quotient de deux entiers relatifs est un entier relatif.

f) La somme de deux éléments de $\mathbb{D}_3$ est un élément de $\mathbb{D}_3$.

g) Le produit de deux éléments de $\mathbb{D}_3$ est un élément de $\mathbb{D}_3$.

h) Le produit de deux décimaux est un décimal.

i) Le quotient de deux décimaux non nuls est un décimal non nul.

j) La somme de deux rationnels est un rationnel.

k) Le quotient de deux rationnels non nuls est un rationnel non nul.

57 (1). Parmi les lois de compositions suivantes, indiquer celles qui sont des lois internes. Pour chacune des autres, donner un exemple qui prouve qu'elle n'est pas une loi interne.

1) L'addition dans $\{0, 1, 2, 3\}$.
2) L'addition dans $\{0, 1, -1\}$.
3) La multiplication dans $\{0, 1, -1\}$.
4) La multiplication dans $\{3, 4, 5, 6, 7...\}$ (ensemble des naturels supérieurs à 2).
5) La multiplication dans $\mathbb{Z} - \{5\}$.
6) La multiplication dans $\mathbb{Z} - \{-2; 2\}$.
7) La multiplication dans $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$.

58 (1). *a*) Que peut-on dire des nombres a et b si $a + b = 0$?
Que peut-on dire de deux nombres à la fois égaux et opposés ?
En déduire que :

si $a - b = b - a$ alors $a = b$.

b) Que peut-on dire des nombres a et b si $ab = 1$?
Que peut-on dire de deux nombres à la fois égaux et inverses l'un de l'autre ?
En déduire que :

si $a = \frac{1}{a}$ alors $a = 1$ ou $a = -1$.

En déduire que :

si $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ alors $a = b$ ou $a = -b$.

59 (1). Mettre $\frac{3}{2}$ en facteur dans :

$\frac{3}{2}x^2 - x + 7$ $\quad$ $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

$\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ $\quad$ $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}$

$\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2$ $\quad$ $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.

60 (2). Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies.
Pour chacune des autres propositions, donner un exemple qui prouve qu'elle est fausse.

— Il existe un naturel inférieur ou égal à tous les naturels.
— Pour chaque réel on peut trouver un naturel qui lui est supérieur.
— Pour chaque naturel, on peut trouver un naturel qui lui est supérieur.
— Il existe un réel supérieur ou égal à tous les réels.
— Il existe un réel strictement inférieur à tous les naturels.

61 (2). a, b, c sont des naturels. Mettre une croix dans la case ou les cases convenables.

Énoncé	Il existe un ou plusieurs naturels vérifiant l'énoncé	Il existe un ou plusieurs naturels ne vérifiant pas l'énoncé
$a + b \geqslant a$		
$a + b \leqslant b$		
$a + b = 0$		
$a \leqslant 0$		
$a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $ab = 0$		
$a \neq 0$ et $b = 0$ et $ab \neq 0$		
$a + b = 0$ et $a \neq 0$		
$ab = ac$ et $b \neq c$		
$ab = a$		

Illustrer chaque réponse par un exemple.

62 (2). Les nombres x, y, z, u, v sont des nombres naturels non nuls tels que

$$v + y < x$$
$$y + x < z$$
$$x + v > z$$
$$u < y.$$

Les ranger par ordre croissant.

63 (2). Pour un réel A, on donne l'encadrement suivant :

$$5{,}341\,935 < A < 5{,}342\,831.$$

Jusqu'à quel ordre est-il possible de donner, à l'aide de cet encadrement, les approximations décimales de A, par défaut et par excès ?

64 (2). Démontrer que, quel que soit le réel x :

a) $\quad |2x - 1| \leqslant |x - 2| + |x + 1|$

b) $\quad \dfrac{||x| + x| + ||x| - x|}{2} = |x|.$

65 (2). a et b étant deux réels, trouver les signes de a et b (si c'est possible) dans chacun des cas suivants :

$ab > 0$ et $a - b > 0$	
$ab \geqslant 0$ et $a - b = 0$	
$ab > 0$ et $a - b < 0$	
$ab < 0$ et $a - b > 0$	
$ab = 0$ et $a - b < 0$	

66 (2). $a \in [2\,;\,4[$; $b \in]-1\,;\,3]$.
Déterminer « le plus petit » intervalle auquel appartient chacun des réels suivants :

$$a+b\,;\quad a-b\,;\quad ab\,;\quad \frac{1}{a}\quad \text{et}\quad b^2\,.$$

Problèmes

67. Certaines machines à calculer ont leurs manies. Ainsi, celle que possède Yao, affiche, pour chaque nombre introduit, l'élément de $\mathbb{D}_4$ le plus proche.

a) Pour chacun des nombres suivants, indiquer le nombre que la machine affiche.

3	12,872 13
2,7	1,254 311 9
5,334	2,999 99
0,375 6	5,879 973 1 .

b) Yao introduit dans cette calculatrice un nombre x, la machine affiche 2,546 3 ; donner un encadrement de x.
c) Yao introduit un nombre y, la machine affiche 2,654 9 (un élément de $\mathbb{D}_4$ bien sûr). Il introduit ensuite un nombre z, la machine affiche 3,465 8.
Pour $y+z$, la calculatrice affiche 6,120 6. La machine n'ayant pas fait d'erreur, donner une valeur pour y et une pour z qui conviennent.

68. • On donne l'encadrement suivant de π

$$3{,}141\,592\,65 < \pi < 3{,}141\,592\,66\,.$$

Trouver l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $12\,\pi$.

— Pour déterminer ce nombre, un élève a multiplié par 12 l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de π. Quel nombre a-t-il trouvé ?

Pourquoi n'est-ce pas l'approximation demandée de $12\,\pi$?

— Un autre élève a multiplié 3,141 592 65 par 12 et a donné, pour l'approximation décimale demandée, l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut du résultat de sa multiplication. Sa réponse est-elle correcte ?
— Quelle approximation décimale de π faut-il choisir pour que la réponse soit correcte et qu'elle soit obtenue par un minimum de calcul ?
— Faut-il choisir la même approximation décimale de π pour trouver l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $4\,\pi$?

69. • « On connaît mieux $\frac{1}{\pi}$ que π. »
En effet, sachant que $A < \pi < B$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-2}, montrer que $\frac{1}{A} > \frac{1}{\pi} > \frac{1}{B}$ est un encadrement de $\frac{1}{\pi}$ d'amplitude plus petite.
Application numérique : Pour A on prendra 3,14. Donner un encadrement de $\frac{1}{\pi}$.

70. Une table numérique donne les encadrements suivants de $\frac{1}{\pi}$ et de π

$$0{,}318\,309\,8 < \frac{1}{\pi} < 0{,}318\,309\,9$$

$$3{,}141\,592\,6 < \pi < 3{,}141\,592\,7\,.$$

Déterminer l'approximation décimale d'ordre 1, par défaut de la mesure de l'aire d'un disque dont le périmètre est donné par l'encadrement suivant :

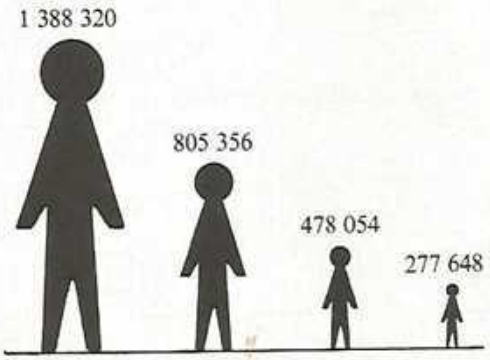
$$43{,}982\,29 < P < 43{,}982\,30\,.$$

Se distraire

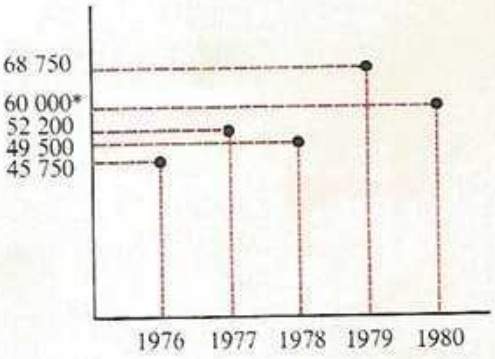
71. Des passagers occupent les quatre cinquièmes de trois cars. Un quart des passagers descend. Peut-on asseoir les passagers restant dans deux cars ?

2 Fonction

Leçon 1 : FONCTION, FONCTION NUMÉRIQUE
Leçon 2 : REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION
Leçon 3 : UTILISATION D'UN GRAPHIQUE

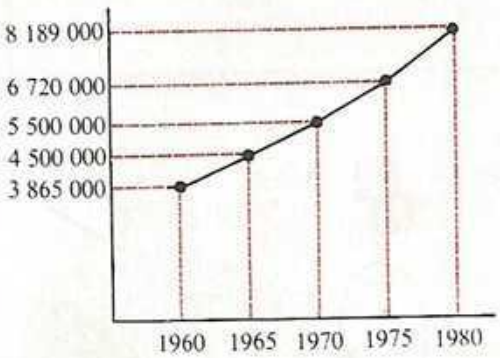


POPULATION DANS LES 4 PLUS GRANDES PRÉFECTURES DE CÔTE-D'IVOIRE **



* Prévisions

PRODUCTION DE CAFÉ EN TONNES EN CÔTE-D'IVOIRE **



ÉVOLUTION DE LA POPULATION EN CÔTE-D'IVOIRE **

n	n^2	n	n^2
1	1	50	2 500
2	4	51	2 601
3	9	52	2 704
4	16	53	2 809
5	25	54	2 916
6	36	55	3 025
7	49	56	3 136
8	64	57	3 249
9	81	58	3 364
10	100	59	3 481
11	121	60	3 600
12	144	61	3 721
13	169	62	3 844
14	196	63	3 969
15	225	64	4 096
		65	4 225

EXTRAIT DE LA TABLE DES CARRÉS

** Extraits de « La Côte-d'Ivoire en chiffres » (éditions 77-78 et 80-81).

1 Fonction, fonction numérique

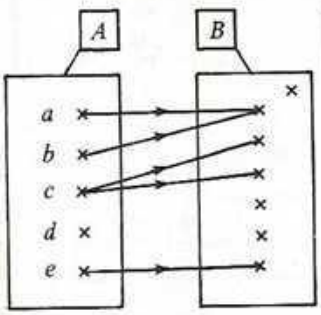
1) Rappel sur les relations

En Sixième, on a vu qu'une relation est caractérisée par :

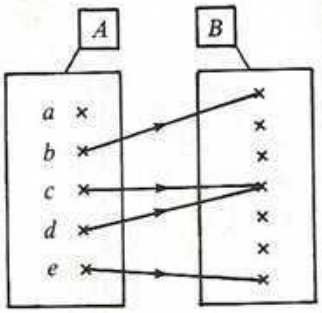
— L'ENSEMBLE DE DÉPART — L'ENSEMBLE D'ARRIVÉE — LE GRAPHE	OU	— L'ENSEMBLE DE DÉPART — L'ENSEMBLE D'ARRIVÉE — UN LIEN VERBAL	OU	— UNE REPRÉSENTATION

Cette représentation peut être un tableau, un schéma cartésien, un schéma sagittal, ...

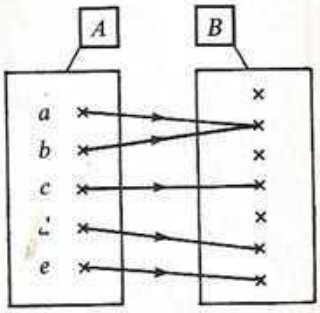
2) Fonction



L'élément *c* de l'ensemble de départ est associé à deux éléments de l'ensemble d'arrivée.



L'élément *a* de l'ensemble de départ n'est associé à aucun élément de l'ensemble d'arrivée.
Les autres éléments de l'ensemble de départ sont associés, chacun, à un seul élément de l'ensemble d'arrivée.



Chaque élément de l'ensemble de départ est associé à un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

ON *NE* PEUT DONC *PAS* DIRE QUE

ON PEUT DONC DIRE QUE

ON PEUT DONC DIRE QUE

CHAQUE ÉLÉMENT DE L'ENSEMBLE DE DÉPART EST ASSOCIÉ A 0 OU 1 ÉLÉMENT DE L'ENSEMBLE D'ARRIVÉE.

La relation représentée par ce schéma sagittal *n*'est *pas* une fonction.

La relation représentée par ce schéma sagittal est une fonction.

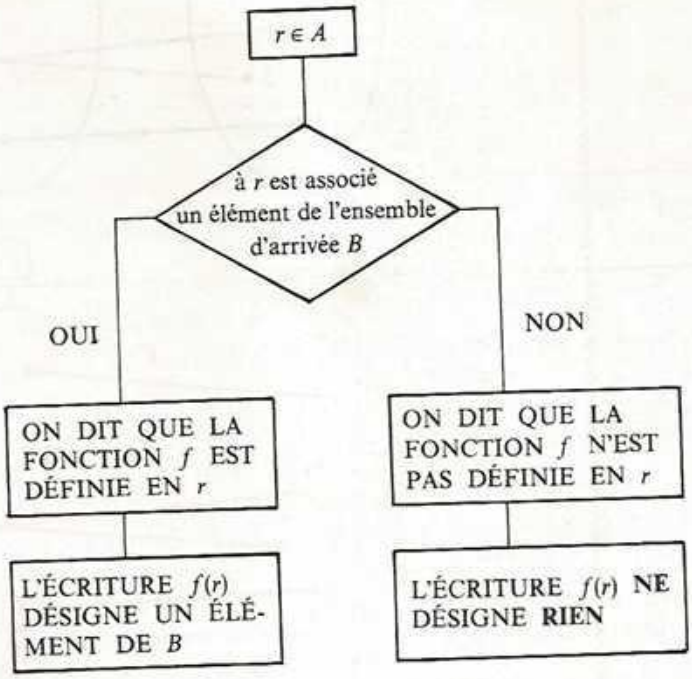
La relation représentée par ce schéma sagittal est une fonction.

Définition

On appelle fonction de A vers B, **toute relation de A vers B qui, à chaque élément de l'ensemble de départ A, associe 0 ou 1 élément de l'ensemble d'arrivée B.**

3) Ensemble de définition d'une fonction

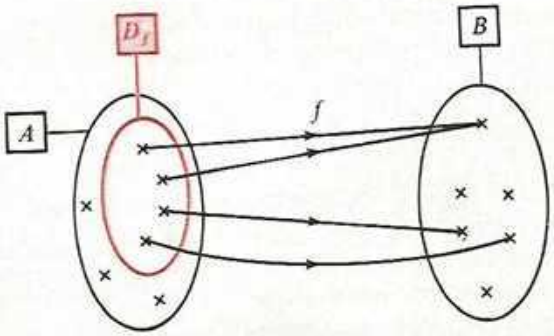
Considérons un élément r de l'ensemble de départ A d'une fonction f.



Définition

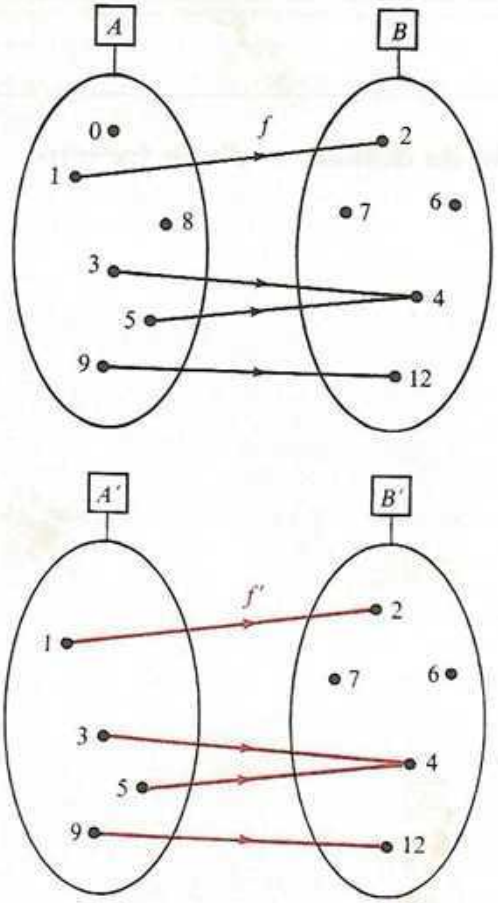
On appelle ensemble de définition **d'une fonction f de A vers B, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.**

L'ensemble de définition de la fonction f est généralement noté D_f.



Exercice

Soit deux fonctions f et f' connues par leurs représentations sagittales.



Écrire en extension D_f et $D_{f'}$.

4) Application associée à une fonction

Rappel. Une application de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe un élément unique de l'ensemble d'arrivée B.
Dans l'exercice ci-dessus, f est-elle une application ?
f' est-elle une application ?
Remarquons qu'une fonction n'est pas nécessairement une application.
Toute application est une fonction. Pourquoi ?
Quel est l'ensemble de définition d'une application ?
Comparons les ensembles de départ, les ensembles d'arrivée et les graphes G_f et $G_{f'}$ des fonctions f et f' précédentes.

$$A' = D_f \qquad B' = B \qquad G_{f'} = G_f .$$

L'application f' a pour ensemble de départ l'ensemble de définition de la fonction f; elle a même ensemble d'arrivée et même graphe que f.

On dit que f' est **l'application associée** à la fonction f.
La fonction f est notée :

$$f : A \text{ vers } B$$
$$x \mapsto f(x).$$

L'application f' associée à f est notée :

$$f' : D_f \to B$$
$$x \mapsto f(x).$$

5) Fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) Définition

On appelle fonction numérique **toute fonction d'un ensemble E vers l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.**

En particulier, une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une fonction numérique.

Exemples

$f_1 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto 3x + 1$

$f_2 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 3x + 4$

$f_3 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$f_4 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$.

b) Ensemble de définition d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Nous avons vu, dans l'organigramme du paragraphe 3 que l'écriture $f(r)$ peut ne rien représenter : une écriture n'a pas toujours de sens. Ainsi l'écriture $\dfrac{3x + 5}{x - 1}$ désigne le réel 11 quand on remplace x par 2 ; elle ne désigne rien quand on remplace x par 1. Pourquoi ?
Pour les fonctions dont l'ensemble de définition n'est pas donné et où interviennent des opérations, l'ensemble de définition est l'ensemble des éléments dont on peut **calculer** l'image ; c'est le cas des fonctions données en exemple.
Par exemple : on peut calculer l'image de 5 par f_1, c'est le nombre 16 ; $f_1(5)$ désigne un réel donc $5 \in D_{f_1}$.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$.

si | $f(r)$ est une écriture d'un réel | alors | $r \in D_f$

si | $f(r)$ ne désigne rien | alors | $r \notin D_f$.

Exemples

1) On donne $f : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x + 5}{x - 1}.$$

x étant différent de 1, $f(x)$ désigne-t-il un réel ? | $f(1)$ ne désigne rien. Pourquoi ?

donc $$D_f = \mathbb{R} - \{ 1 \}.$$

$\mathbb{R} - \{ 1 \}$ se lit « $\mathbb{R}$ privé de 1 ».

Écrire D_f sous forme de réunion d'intervalles.
Écrire D_f sous forme de complémentaire d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Représenter graphiquement D_f à l'aide d'une droite graduée.
L'application f' associée à cette fonction sera notée :

$$f' : \mathbb{R} - \{ 1 \} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3x + 5}{x - 1}.$$

2) On donne $f_1 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2.$$

Chaque réel a-t-il un carré ?
Quel est l'ensemble de définition de f_1 ? f_1 est-elle une application ?

3) On donne $f_2 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x + 3}{x - 2} + \frac{5x - 7}{4x + 1}.$$

Quel est son ensemble de définition ?
Peut-on calculer l'image de 2 ? Pourquoi ?
$4x + 1$ doit-il aussi être différent de zéro ?
La condition pour que $f_2(x)$ désigne un réel est que chaque dénominateur soit différent de zéro, c'est-à-dire que l'on ait :

$$x - 2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 4x + 1 \neq 0$$
$$x \neq 2 \qquad \text{et} \quad x \neq -\frac{1}{4}$$
$$x \in \mathbb{R} - \left\{ 2; -\frac{1}{4} \right\}.$$

Pour chaque réel élément de $\mathbb{R} - \left\{ 2; -\frac{1}{4} \right\}$, $f_2(r)$ désigne un réel.

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \left\{ 2; -\frac{1}{4} \right\}.$$

Écrire D_{f_2} sous forme de réunion d'intervalles.
Écrire D_{f_2} sous forme de complémentaire d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Représenter graphiquement D_{f_2} à l'aide d'une droite graduée.

L'application f'_2 associée à cette fonction sera notée :

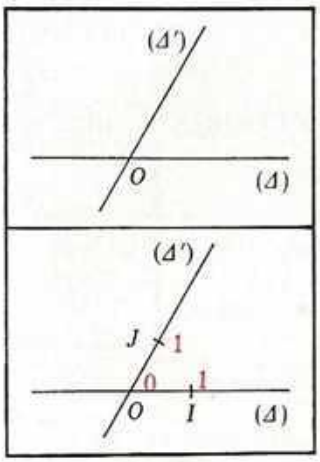
$$f'_2 : \mathbb{R} - \left\{2; -\frac{1}{4}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x+3}{x-2} + \frac{5x-7}{4x+1}.$$

Remarque. Si, dans l'écriture « $f(x)$ » n'interviennent que des additions, des multiplications ou des soustractions, quel que soit le réel x, $f(x)$ désigne un réel. Pourquoi ? Dans ce cas $D_f = \mathbb{R}$.

2 Représentation graphique d'une fonction

1) Repérer un point dans le plan

a) MUNIR LE PLAN D'UN REPÈRE.



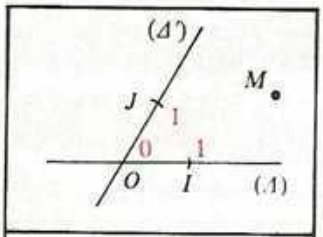
On choisit 2 droites (Δ), (Δ') sécantes en O.

On gradue (Δ) en prenant O pour origine. Le point d'abscisse 1 est noté I.

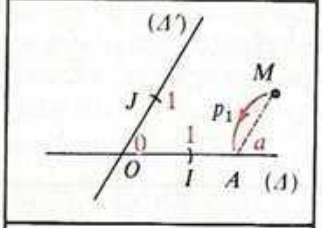
On gradue (Δ') en prenant O pour origine. Le point d'abscisse 1 est noté J.

LE PLAN EST MUNI DU REPÈRE (O, I, J).

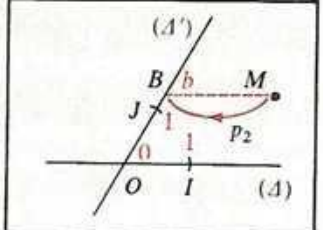
b) A CHAQUE POINT DU PLAN $\mathscr{P}$ MUNI DU REPÈRE (O, I, J), ASSOCIER UN COUPLE DE RÉELS : **LES COORDONNÉES.**



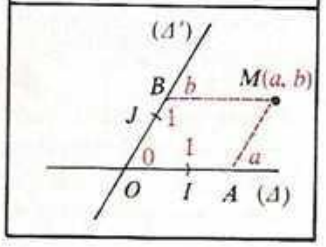
On donne un point M.



Soit p_1 la projection de $\mathscr{P}$ sur (Δ) parallèlement à (Δ'). A est l'image de M par p_1. Sur (Δ), l'abscisse de A est a. Le réel a est *l'abscisse* du point M dans le repère (O, I, J).



Soit p_2 la projection de $\mathscr{P}$ sur (Δ') parallèlement à (Δ). B est l'image de M par p_2. Sur (Δ') l'abscisse de B est b. Le réel b est *l'ordonnée* du point M dans le repère (O, I, J).



(a, b) est le couple des COORDONNÉES de M dans le repère (O, I, J).

Quelle est l'image de A par p_1, par p_2 ? Quel est le couple des coordonnées de A ? Mêmes questions pour les points B, I, J, O.

Chaque point de (Δ) a pour projeté O par p_2 : chaque point de (Δ) a pour ordonnée zéro.

Chaque point de (Δ') a pour projeté O par p_1 : chaque point de (Δ') a pour abscisse zéro.

En procédant de même pour chaque point du plan, on détermine une application de $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: celle qui, à chaque point de $\mathscr{P}$ associe son couple de coordonnées. Rappelons une propriété importante de cette application vue en Quatrième.

UN REPÈRE DU PLAN ÉTANT DONNÉ, L'APPLICATION QUI, A CHAQUE POINT ASSOCIE SON COUPLE DE COORDONNÉES EST UNE BIJECTION DE $\mathscr{P}$ SUR $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

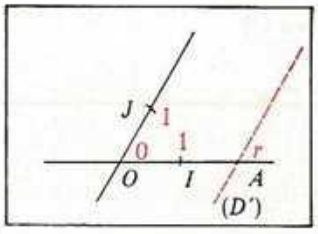
Cette bijection nous permettra d'étudier le plan $\mathscr{P}$ à l'aide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
La réciproque de cette bijection permet de représenter des couples de réels par des points du plan muni d'un repère.

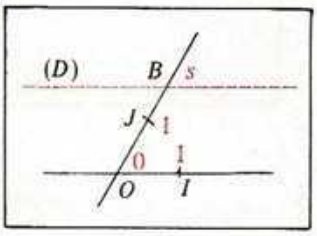
2) Représenter un couple de réels par un point du plan

Pour représenter le couple de réels (r, s) :

— On munit le plan d'un repère (O, I, J) (voir 1.*a*).

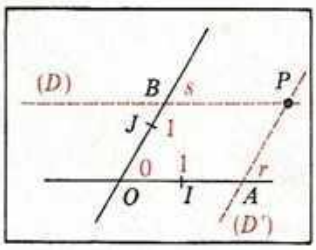
— Sur (OI), on marque le point A d'abscisse r dans la graduation de repère (O, I).
Par A, on mène la droite (D') parallèle à (OJ).





— Sur (OJ), on marque le point B d'abscisse s dans la graduation de repère (O, J).
Par B, on mène la droite (D) parallèle à (OI).

Le point d'intersection de (D) et (D') est la représentation du couple (r, s) dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).



Exercice

Le plan étant muni du repère (O, I, J) déterminer les points qui représentent les couples suivants (voir figure ci-dessus) :

$$(0 ; s) ; \quad (r ; 0) ; \quad (1 ; 0) ; \quad (0 ; 1) ; \quad (r ; s) ; \quad (0 ; 0) .$$

- Quel est l'ensemble des points qui ont pour ordonnée s ?
- Quel est l'ensemble des points qui ont pour abscisse zéro ?

Par le moyen décrit ci-dessus, nous pouvons représenter des sous-ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par des sous-ensembles de $\mathscr{P}$.

Exercices

1. Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), dessiner
— en rouge l'ensemble des points d'abscisse 3,
— en bleu l'ensemble des points d'ordonnée -1,
— en vert l'ensemble des points d'abscisse 0,
— en jaune l'ensemble des points d'ordonnée 0.
2. Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), hachurer
— en rouge l'ensemble des points dont l'abscisse est supérieure ou égale à -3,
— en bleu l'ensemble des points dont l'ordonnée est inférieure à 2.

3) Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des couples
— ayant pour 1re composante un élément de l'ensemble de définition D_f,
— ayant pour 2e composante l'image par f de cet élément de D_f.

G désignant le graphe d'une fonction f de A vers B

$$(x, y) \in G \text{ équivaut à } \begin{cases} x \in D_f \\ y \in B \\ y = f(x). \end{cases}$$

Le graphe de f est un sous-ensemble de $A \times B$.

Exercice

Parmi les couples suivants, déterminer ceux qui sont éléments du graphe de la fonction

$$f : \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3x}{2x - 1}$$

$(-1 ; 1) ; (1 ; -1) ; (3 ; 2) ; (0 ; 0) ; (2 ; 2) ; (1 ; 3) ; (3 ; 1) ;$
$\left(2 ; -\frac{3}{5}\right) ; \left(\frac{1}{4} ; -\frac{3}{2}\right) ; \left(5 ; \frac{5}{3}\right) ; \left(\frac{5}{3} ; -5\right) ; \left(-\frac{5}{2} ; \frac{5}{4}\right) ;$

Remarque. Sans effectuer le moindre calcul, on peut affirmer qu'il y a au moins 3 couples qui ne sont pas éléments du graphe de f, sans pouvoir préciser lesquels. Pourquoi ?

4) Représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

On appelle représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J), l'ensemble des points du plan dont les couples de coordonnées sont les couples du graphe de la fonction.

Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
La représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}$.

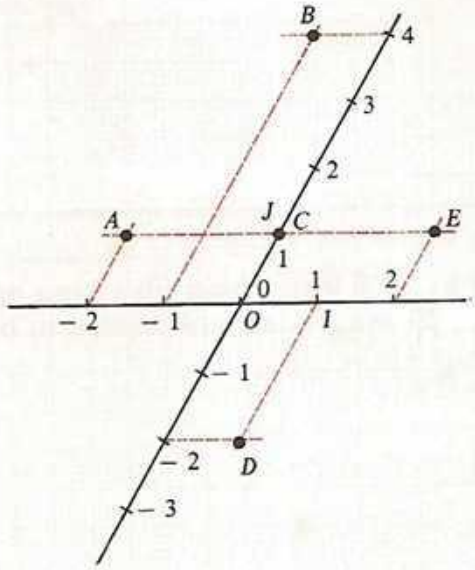
1er cas : Le graphe est fini

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par le tableau :

x	$f(x)$
-2	1
-1	4
0	1
1	-2
2	1

Quel est l'ensemble de définition de f ?
Les couples du graphe de f sont
$(-2 ; 1) ; (-1 ; 4) ; (0 ; 1) ; (1 ; -2) ; (2 ; 1)$.

— On munit le plan d'un repère.
— On construit les points $A(-2;1)$; $B(-1;4)$; $C(0;1)$; $D(1;-2)$ et $E(2;1)$.
— La représentation graphique de f est l'ensemble de points $\{A, B, C, D, E\}$.



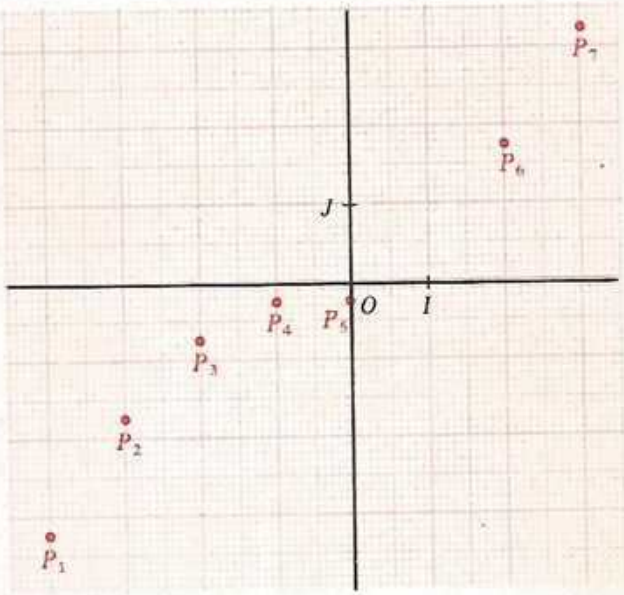
2e cas : Le graphe n'est pas fini

Soit la fonction $f : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

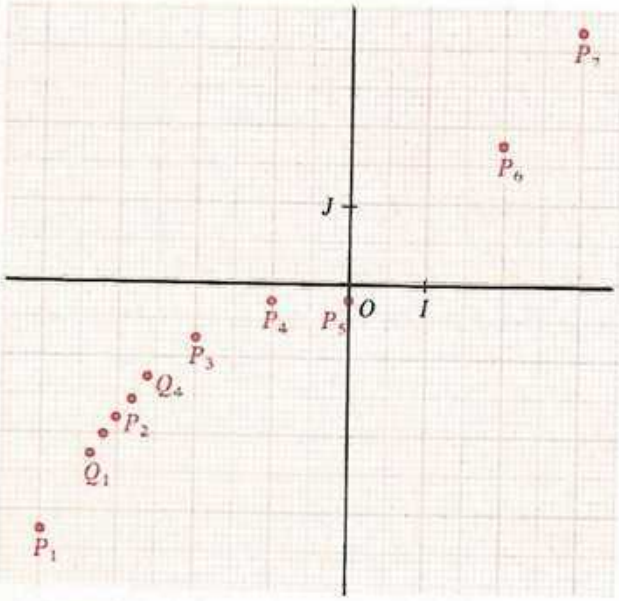
$$x \mapsto \frac{|x^3 - 1|}{4(x-1)}.$$

L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R} - \{1\}$. Pourquoi ?
On choisit quelques éléments de D_f; on calcule leur image et on regroupe les résultats dans un tableau.

x	$f(x)$	Point correspondant
− 4	− 3,25	P_1
− 3	− 1,75	P_2
− 2	− 0,75	P_3
− 1	− 0,25	P_4
0	− 0,25	P_5
2	− 1,75	P_6
3	3,25	P_7



L'ensemble $\{ P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 ; P_6 ; P_7 \}$ est une représentation graphique partielle de la fonction f.

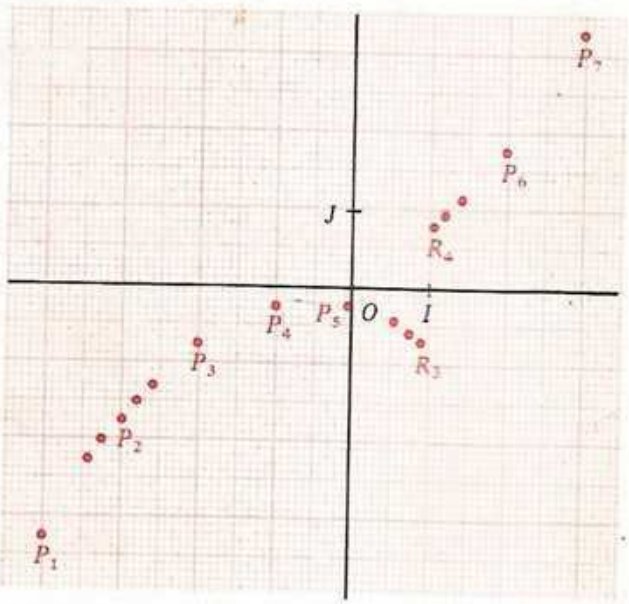


Le calcul d'un plus grand nombre de couples du graphe permettra d'obtenir une représentation graphique partielle « plus précise ».

Par exemple, cherchons davantage de points dont les abscisses sont comprises entre -4 et -2.

x	$f(x)$	Point correspondant
$-3{,}4$	$-2{,}29$	Q_1
$-3{,}2$	$-2{,}01$	Q_2
-3	$-1{,}75$	P_2
$-2{,}8$	$-1{,}51$	Q_3
$-2{,}6$	$-1{,}29$	Q_4

Il semble que la représentation graphique de f soit une ligne « continue » contenant les points obtenus ; nous pourrions être tentés de joindre ces points.
Toutefois, le schéma correspondant à une étude faite entre les abscisses 0 et 2 doit nous en dissuader.



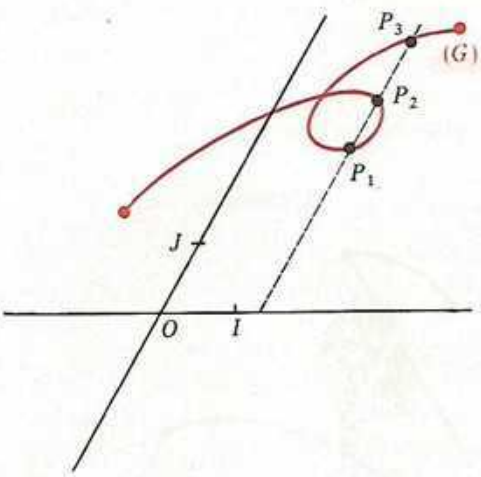
x	$f(x)$	Point correspondant
0,6	$-0{,}49$	R_1
0,8	$-0{,}61$	R_2
0,9	$-0{,}677\,5$	R_3
1,1	$0{,}827\,5$	R_4
1,2	0,91	R_5
1,4	1,09	R_6

Quand le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'est pas fini, il n'est pas possible, actuellement, d'en donner une représentation graphique complète. De même que, de certains nombres réels, on ne connaît qu'une valeur approchée, de certaines fonctions, on ne peut donner qu'une représentation graphique partielle. Un chapitre du cours de Troisième permettra de donner une représentation graphique complète de certaines fonctions.

3 Utilisation d'un graphique

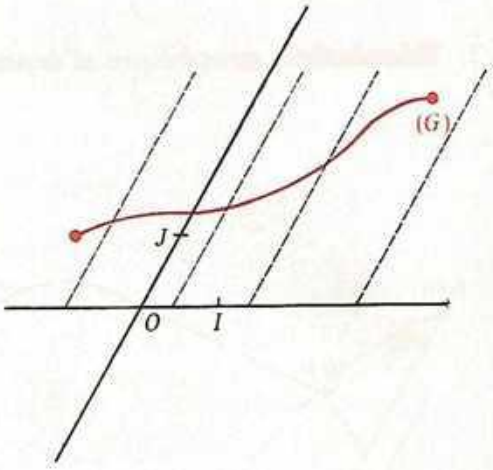
1) Condition pour qu'une partie du plan muni d'un repère soit la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soit (G) une partie du plan. Par un point M de (OI), on mène la parallèle (D) à (OJ). Si l'intersection $(G) \cap (D)$ contient plus d'un point, (G) n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Pourquoi ?



$(G) \cap (D) = \{ P_1, P_2, P_3 \}$.

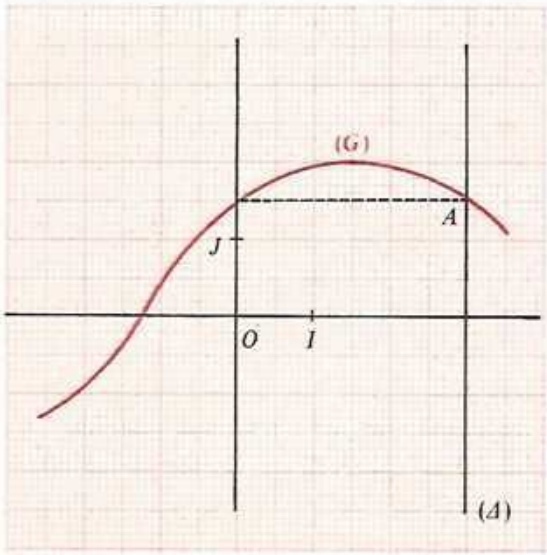
(G) n'est pas la représentation graphique d'une fonction



Chaque droite parallèle à (OJ) a pour intersection avec (G) un singleton ou l'ensemble vide.
(G) est la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Lecture de l'image d'un réel par une fonction

Soit (G) la représentation graphique d'une fonction f.

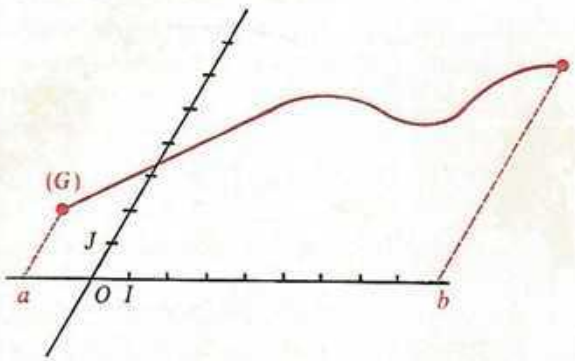


Déterminons $f(3)$.
Par le point d'abscisse 3 de (OI) on mène (Δ) parallèle à (OJ) ; $(\Delta) \cap (G) = \{ A \}$.
Quelles sont les coordonnées de A ?
L'ordonnée de A dans le repère (O, I, J) est 1,5 donc $f(3) = 1{,}5$.

Exercice Déterminer $f(-1)$
$f(0)$
$f(1{,}5)$.

3) Résolution graphique d'équations

a) Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par sa représentation graphique (G).



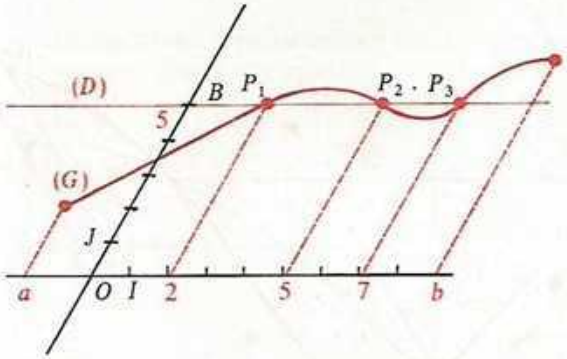
L'ensemble de définition de f est $[a, b]$.

Résoudre

$$x \in [a, b], \qquad f(x) = 5.$$

Il s'agit de rechercher les éléments de $[a, b]$ qui ont pour image 5 par la fonction f ; cela revient à rechercher *les abscisses* des points du graphique qui ont pour ordonnée 5.
Quel est l'ensemble des points du plan ayant pour ordonnée 5 ?
Sur la droite (OJ), soit B le point d'abscisse 5 ; la droite (D) passant par B et parallèle à (OI) est l'ensemble des points qui ont pour ordonnée 5.

Soit K l'ensemble des points d'intersection de (G) et (D) :



$$K = \{ P_1, P_2, P_3 \}.$$

Il y a trois points d'intersection donc l'équation proposée a trois solutions.
L'abscisse de P_1 est 2, celle de P_2 est 5, celle de P_3 est 7, l'équation $x \in [a, b]$, $f(x) = 5$ a pour ensemble de solutions $\{ 2 ; 5 ; 7 \}$.

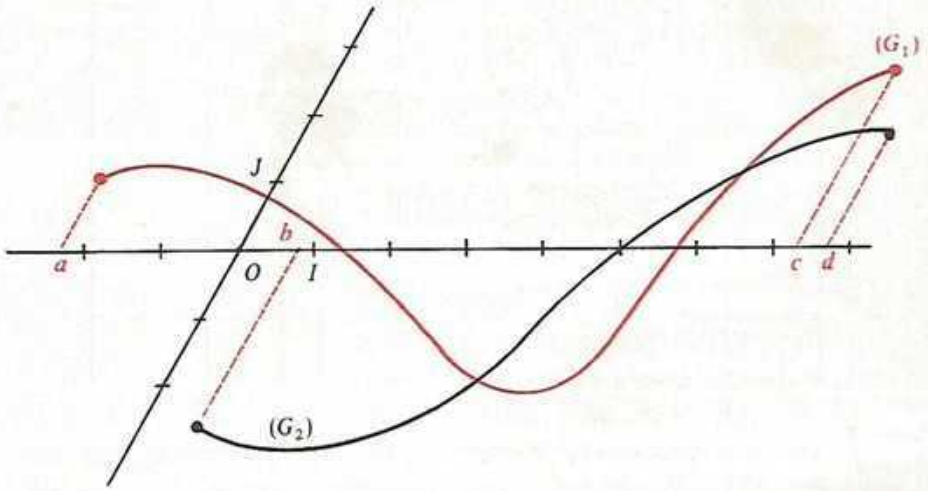
Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $x \in [a, b]$, $f(x) = 5$ est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (G) et (D).

b) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ données par leurs représentations graphiques (G_1) et (G_2).

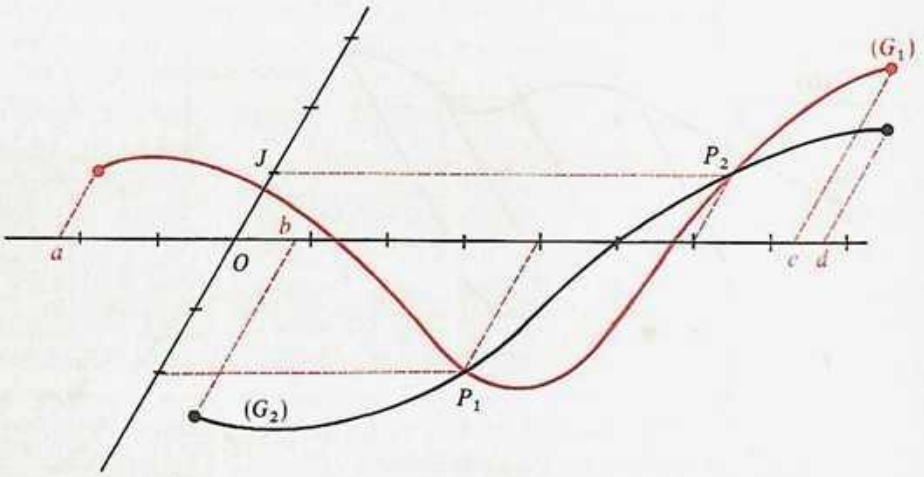
L'ensemble de définition de f est $[a, c]$.
L'ensemble de définition de g est $[b, d]$

$$[a, c] \cap [b, d] = [b, c].$$

Résoudre $x \in [b, c]$, $f(x) = g(x)$.



Il s'agit de rechercher les éléments de $[b, c]$ qui ont la même image par f et par g.



Soit K l'ensemble des points d'intersection de (G_1) et (G_2) :

$$K = \{ P_1, P_2 \}.$$

Les coordonnées de P_1 sont $(4 ; -2)$; celles de P_2 sont $(6 ; 1)$.

$$P_1 \in (G_1) \quad \text{donc} \quad -2 = f(4),$$
$$P_1 \in (G_2) \quad \text{donc} \quad -2 = g(4).$$

On déduit : $f(4) = g(4)$, or $4 \in [b, c]$, donc 4 est une solution de l'équation.

$$P_2 \in (G_1) \quad \text{donc} \quad 1 = f(6),$$
$$P_2 \in (G_2) \quad \text{donc} \quad 1 = g(6).$$

On déduit : $f(6) = g(6)$, or $6 \in [b, c]$, donc 6 est une solution de l'équation.
Y a-t-il d'autres solutions ?
Supposons qu'un réel r de $[b, c]$ soit une solution de l'équation c'est-à-dire que $f(r) = g(r)$.
Désignons par s le réel image commune de r par f et g. Soit P le point de coordonnées (r, s).
$s = f(r)$ donc le point P appartient à (G_1) ;
$s = g(r)$ donc le point P appartient à (G_2),
par suite $P \in (G_1) \cap (G_2)$.

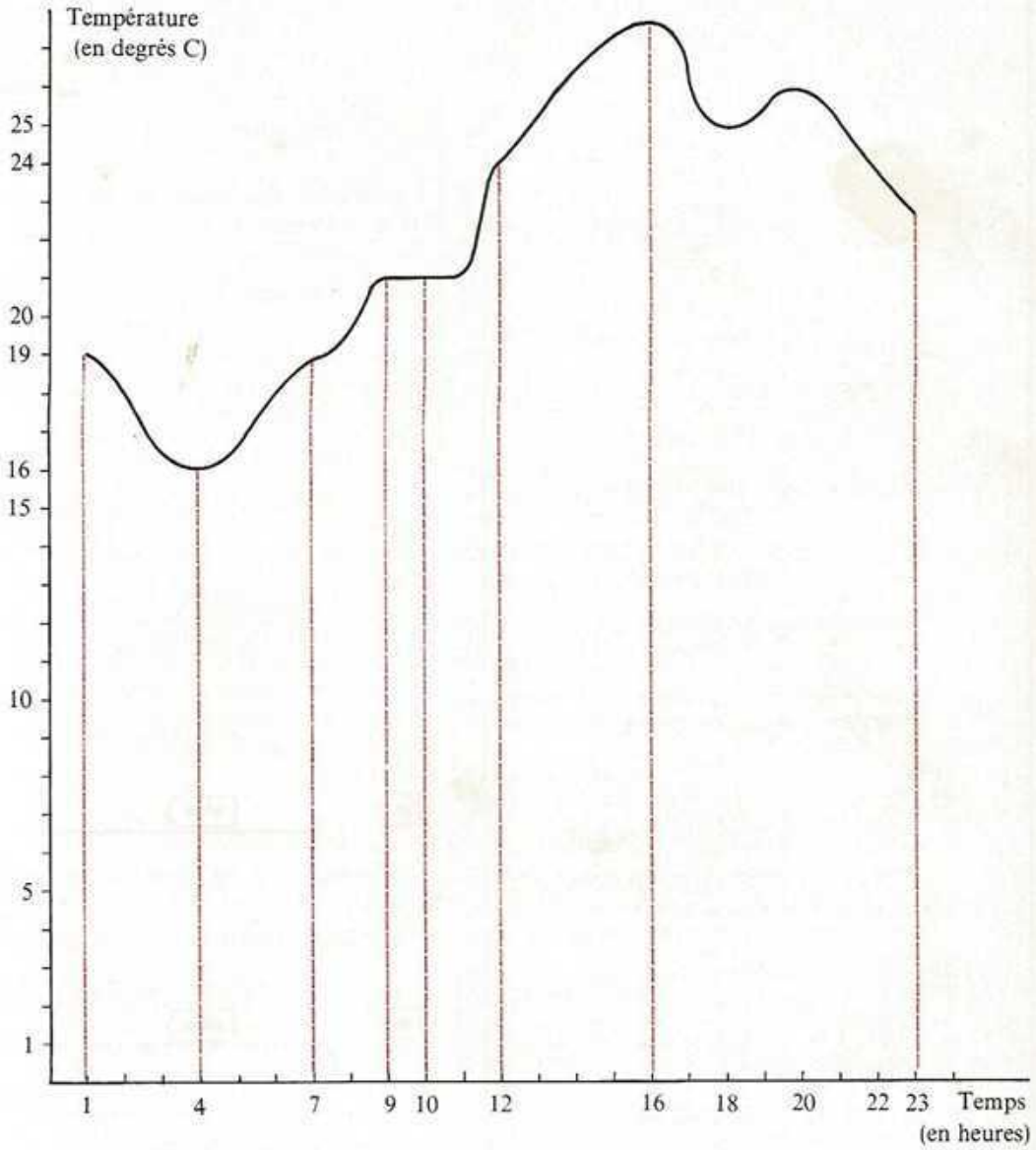
Il n'y a donc pas d'autres solutions que 4 et 6.

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $x \in [b, c]$, $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (G_1) et (G_2).

Remarque. La résolution graphique des équations ne permet évidemment d'obtenir que des valeurs approchées des solutions cherchées : plus le dessin est soigné, meilleure est l'approximation.

4) Un graphique de température

Un thermomètre enregistreur a tracé la courbe suivante entre 1 h et 23 h. Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est [1 ; 23].



Situations	Traductions mathématiques
1) Quelle était la température à 6 h ? Quelle était la température à 9 h 42 min. ?	Trouver $f(6)$ Trouver $f(9{,}7)$.
A 10 h, la température était de 21°	Note : 9 h 42 min. a pour écriture décimale 9,7. $f(10) = 21$.
2) A quelle heure la température était-elle de 24° ? La température a été de 19° à 1 h et à 7 h.	Résoudre : $x \in [1 ; 23]$, $f(x) = 24$. L'ensemble des solutions de $x \in [1 ; 23]$, $f(x) = 19$ est $\{ 1 ; 7 \}$.
3) A quelle heure la température était-elle supérieure ou égale à 24° ? La température a été supérieure ou égale à 22° de 11 h à 23 h.	Résoudre $x \in [1 ; 23]$, $f(x) \geqslant 24$. L'ensemble des solutions de $x \in [1 ; 23]$, $f(x) \geqslant 22$ est $[11 ; 23]$.
4) A 16 h, la température était maximale. Quelle était cette température maximale ?	Quel que soit x appartenant à $[1 ; 23]$, $f(x) \leqslant f(16)$. Trouver $f(16)$.
5) A 4 h, la température était minimale. Quelle était cette température minimale ?	Quel que soit x appartenant à $[1 ; 23]$, $f(x) \geqslant f(4)$. Trouver $f(4)$.
6) De 12 h à 15 h, on remarque que la température augmente.	x_1 et x_2 désignent deux réels quelconques de $[12 ; 15]$. si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ On dit que, sur $[12 ; 15]$, la fonction f est *croissante*.
7) De 20 h à 23 h, on remarque que la température diminue.	x_1 et x_2 désignant deux réels quelconques de $[20 ; 23]$. si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. On dit que, sur $[20 ; 23]$, la fonction f est *décroissante*.
8) De 9 h à 10 h, on remarque que la température reste constante.	x_1 et x_2 désignant deux réels quelconques de $[9 ; 10]$, $f(x_1) = f(x_2)$. On dit que, sur $[9 ; 10]$, la fonction f est *constante*.

Exercices

Calculer

1 (1). Écrire l'ensemble des réels qui vérifient chacune des conditions suivantes, sous forme de réunion d'intervalles, sous forme de complémentaire d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et le représenter sur une droite graduée.

$x \neq \frac{5}{3}$; $x \neq -\frac{1}{2}$;

$x - 2 \neq 0$; $3x \neq 0$;

$x + \frac{1}{2} \neq 0$; $\frac{1}{2}x \neq 0$;

$x \neq 2$ et $x \neq -4$.

$3x + 4 \neq 0$ et $5 - 3x \neq 0$.

$2x - 1 \neq 0$ et $\frac{1}{2} + 2x \neq 0$.

2 (1). On donne :

$G_1 = \{ (a, b) ; (c, d) ; (b, d) ; (d, c) ; (e, a) \}$

$G_2 = \{ (a, b) ; (b, c) ; (c, d) ; (d, a) ; (a, e) \}$

$G_3 = \{ (a, b) ; (b, b) ; (c, b) ; (d, b) ; (e, b) \}$.

Parmi les ensembles G_1, G_2, G_3, quels sont ceux qui sont des graphes de fonctions ?

3 (1). L'ensemble

$$\left\{ (-1;1) ; \left(\frac{2}{3};5\right) ; \left(5;\frac{2}{3}\right) ; \left(\frac{1}{3};-1\right) ; \left(\frac{2}{3};7\right) ; (7;-1) ; \left(0;\frac{2}{3}\right) \right\}$$

est-il le graphe d'une fonction ? Pourquoi ?

4 (1). Donner l'ensemble de définition et l'application associée de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto 2x$

$g_1 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto x + \frac{1}{2}$

$f_2 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto 2 - 3x$

$g_2 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto (2x - 3)(4x - 2)$

$f_3 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{3}{x}$

$g_3 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{2 + x}{x}$

$f_4 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x - 2}$

$g_4 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{3 - x}{x - 3}$

$f_5 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{5}{x(x - 1)}$

$g_5 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{3x}{(x + 2)(1 - x)}$

$f_6 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - \frac{1}{2}}$

$g_6 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{2x}{3 - 5x} + \frac{x}{3x - 4}$

$h_1 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto 2x - \frac{1}{4}$

$h_4 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{x - 2}{(2x + 1)(3x - 2)}$

$h_2 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto (3x - 2)^2$

$h_5 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{5}{3x - 2}$

$h_3 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{5}{2 - x}$

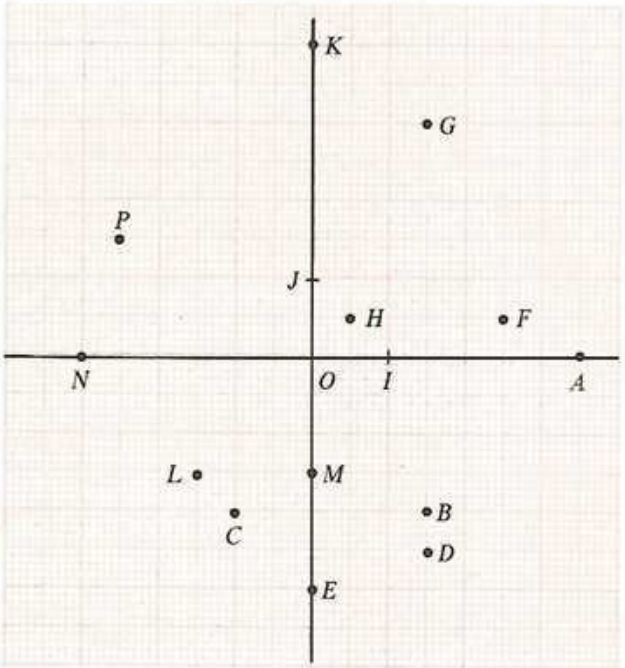
$h_6 : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{3x - 2}{2 - 3x} - \frac{5x + 1}{2 - x}$.

5 (2). Placer dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les points

$A(-3;5)$; $B(7;-2)$; $C(-4;-1)$; $D(1{,}5;1{,}5)$; $E(2;2)$

$F(-1;-1)$; $G(0;6{,}5)$; $H(0;-3)$; $K(2{,}5;0)$; $L(-3;0)$.

6 (2). Voici un repère (O, I, J) du plan $\mathscr{P}$. Indiquer les coordonnées de chacun des points représentés.



7 (2). On donne un repère (O, I, J) du plan $\mathscr{P}$.

a) Hachurer

— en rouge l'ensemble $\mathscr{P}_1$ des points du plan de coordonnées positives ;
— en bleu l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des points du plan d'abscisse négative et d'ordonnée positive ;
— en vert l'ensemble $\mathscr{P}_3$ des points du plan de coordonnées négatives ;
— en jaune l'ensemble $\mathscr{P}_4$ des points du plan d'abscisse positive et d'ordonnée négative.

b) On donne les points $A(-3 ; -2)$; $B(0 ; -1{,}5)$; $C(2{,}7 ; 3{,}1)$; $D(-1{,}4 ; 3{,}7)$; $E(0 ; 1)$; $F(-3{,}4 ; 0)$; $G(0 ; 0)$; $H(3 ; 0)$; $K(-10 ; -1)$; $L(2{,}5 ; -3)$; $M(-1{,}5 ; 1{,}5)$.

Compléter le tableau suivant en marquant d'une croix l'appartenance.

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	↘
											$\mathscr{P}_1$
											$\mathscr{P}_2$
											$\mathscr{P}_3$
											$\mathscr{P}_4$

8 (2). Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge
l'ensemble des points d'abscisse 3,5 ;
— en bleu
l'ensemble des points d'abscisse -1 ;
— en vert
l'ensemble des points d'abscisse $-4{,}7$;
— en jaune
l'ensemble des points d'abscisse 0.

9 (2). Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge
l'ensemble des points d'ordonnée 4 ;
— en vert
l'ensemble des points d'ordonnée -2 ;
— en bleu
l'ensemble des points d'ordonnée -5 ;
— en jaune
l'ensemble des points d'ordonnée 0.

10 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge l'ensemble des points d'abscisse strictement positive,
— en vert l'ensemble des points d'abscisse négative.

11 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge l'ensemble des points d'ordonnée strictement positive,
— en vert l'ensemble des points d'ordonnée négative.

12 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge l'ensemble des points d'abscisse supérieure ou égale à 2,5 ;
— en vert l'ensemble des points d'abscisse inférieure à -3.

13 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter

— en rouge l'ensemble des points d'ordonnée supérieure à 1,5 ;
— en vert l'ensemble des points d'ordonnée inférieure ou égale à $-3,5$.

14 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter en rouge l'ensemble des points dont l'abscisse est élément de $[-3; 2,5]$, en vert l'ensemble des points dont l'abscisse est élément de $]3; 4,5[$.

15 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J) représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est élément de $[1,5; 2]$, en vert l'ensemble des points dont l'ordonnée est élément de $]-3; 0]$.

16 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter en rouge l'ensemble des points d'abscisse supérieure ou égale à 3 et d'ordonnée supérieure ou égale à 2.

17 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter en bleu l'ensemble des points d'abscisse strictement supérieure à -3 et d'ordonnée strictement inférieure à 4.

18 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter en bleu l'ensemble des points d'abscisse inférieure ou égale à -1 et d'ordonnée strictement supérieure à 2.

19 (2). Dans le plan muni du repère (O, I, J), représenter en rouge chacun des ensembles suivants :

$$[-2,5; -1] \times [2; 3]$$
$$[1; 2,5] \times [2; 3]$$
$$[-0,5; 0,5] \times [0; 1,5]$$
$$[-0,5; 0,5] \times \{-2\}$$
$$\{-2\} \times \{2,5\}$$
$$\{1,5\} \times \{2,5\}$$
$$[-1,5; 1,5] \times [-1; -0,5]$$
$$\{0\} \times [3; 4]$$
$$[-2,5; -1] \times \{4\}$$
$$[1; 2,5] \times \{4\}.$$

20 (2). Représenter dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J) les points

$A(1; 5)$; $B(3; 2)$; $C(3; -1)$;
$D(-1; -1)$; $E(-5; 1)$.

Déterminer l'ensemble des abscisses et l'ensemble des ordonnées des points de chacun des segments suivants : $[AB]$; $]BC[$; $[CD[$; $]DE]$.

21 (2). Soit la fonction

$$f : \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \text{ vers } \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Représenter graphiquement la fonction f, dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

22 (2). Même exercice pour la fonction $g : \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2x^2}.$$

23 (2). Même exercice pour la fonction $h : \{-3; -2,5; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1\}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 1.$$

24 (2). Soit la fonction $k : [-2; 3]$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de k ?

b) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construire 5 points représentatifs de la fonction.

c) Donner une représentation graphique partielle plus précise de k en construisant d'autres points.

25 (2). On donne la fonction $f : [-3; 5]$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto -3x - 1.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), placer 10 points représentatifs de la fonction.

c) Le point $R(0; 1)$ appartient-il à la représentation graphique de la fonction ?

d) Le point $S(-4; 11)$ appartient-il à la représentation graphique de la fonction ?

26 (2). On donne la fonction $f : \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x-1}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

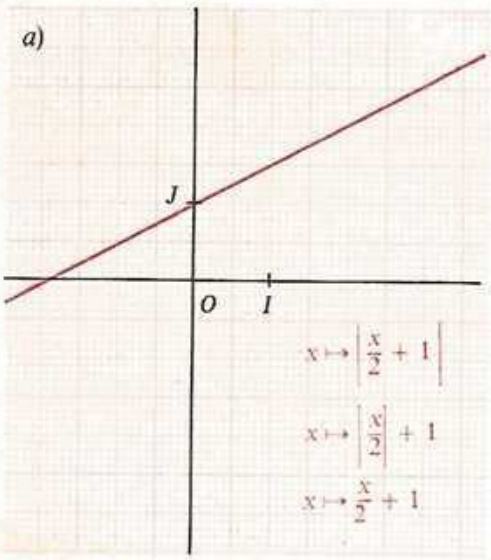
c) Représenter graphiquement l'application $g : \left\{-1 ; 0 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x-1}.$$

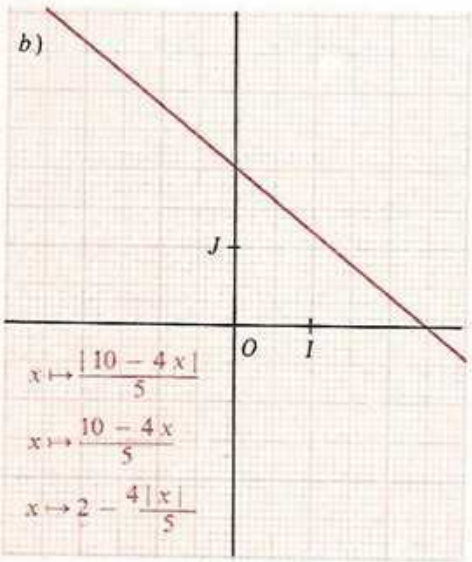
(On prendra des axes perpendiculaires.)

27 (2). Voici sept représentations graphiques de fonctions, sous chacune d'elles sont indiqués trois programmes de calcul; un seul est bon, lequel ?

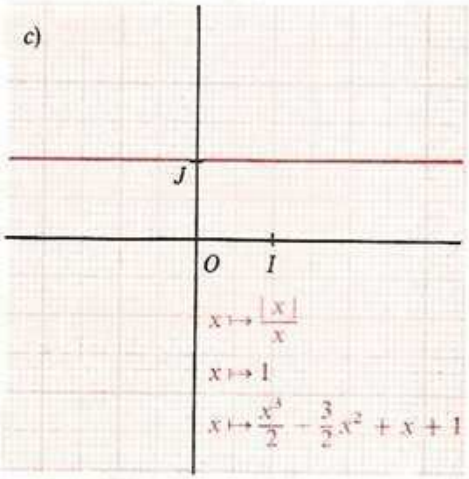
a)



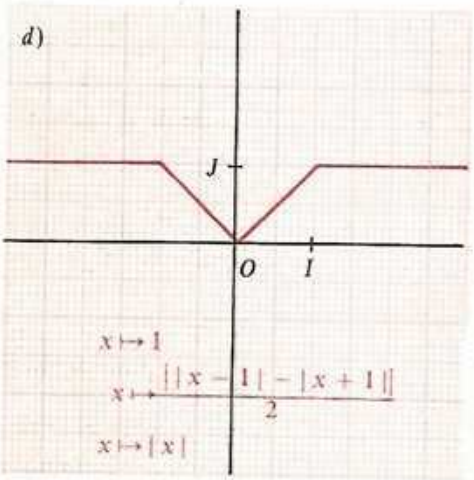
b)



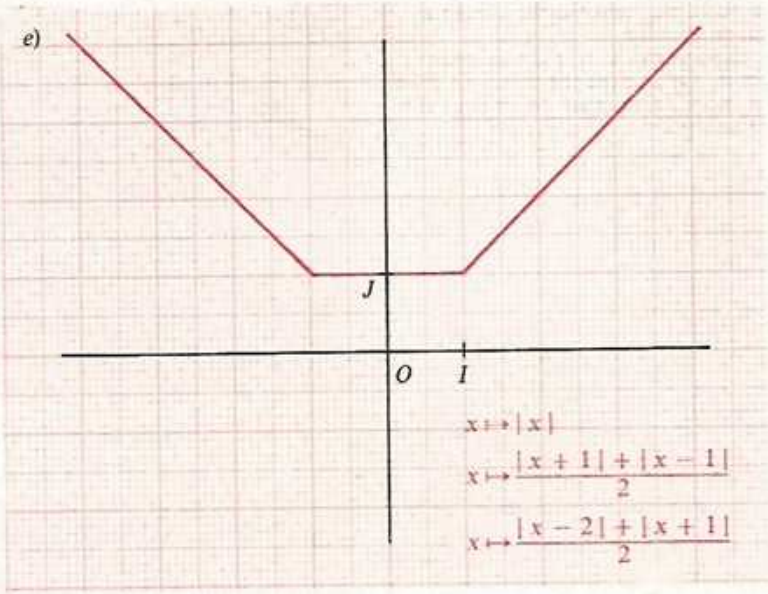
c)



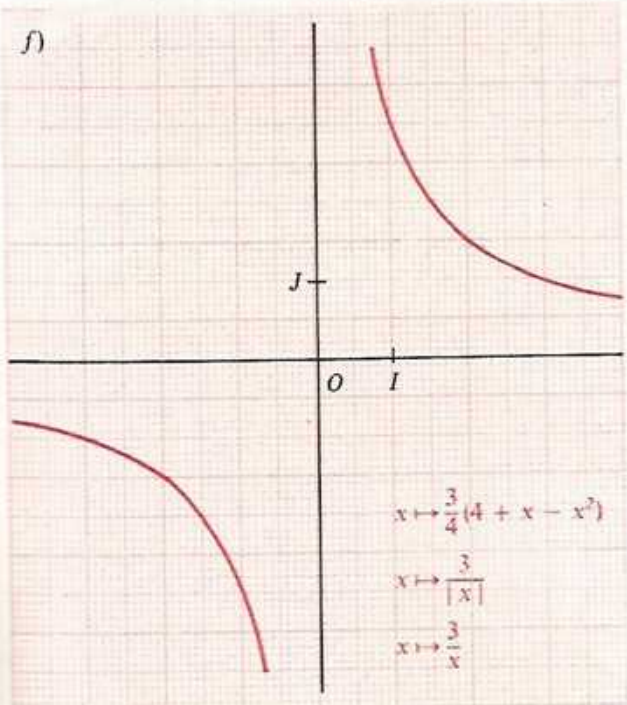
d)



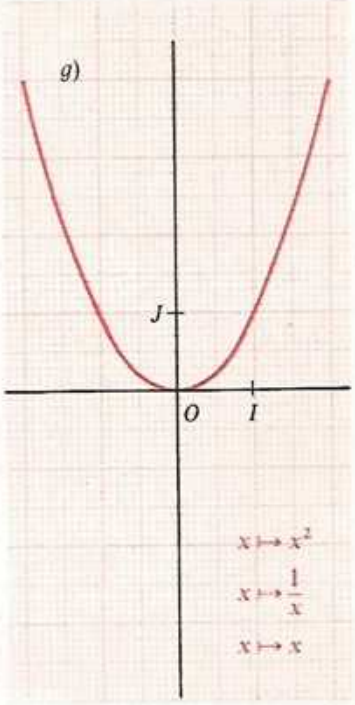
e)


J
O
I
$x \mapsto |x|$
$x \mapsto \frac{|x+1|+|x-1|}{2}$
$x \mapsto \frac{|x-2|+|x+1|}{2}$

f)

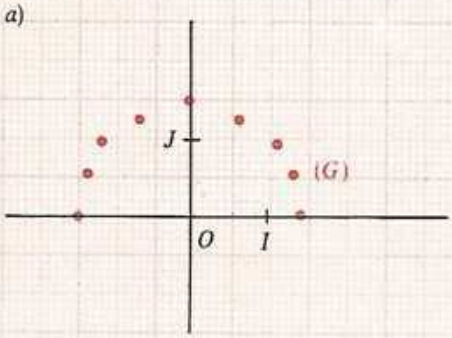

J
O
I
$x \mapsto \frac{3}{4}(4+x-x^2)$
$x \mapsto \frac{3}{|x|}$
$x \mapsto \frac{3}{x}$

g)

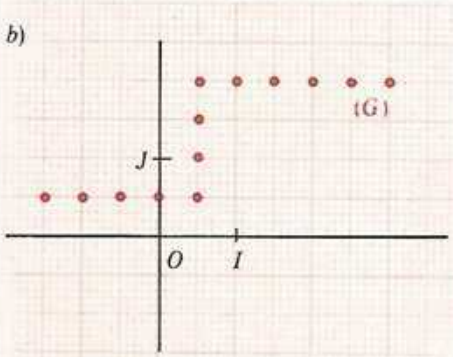

J
O
I
$x \mapsto x^2$
$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto x$

28 (3). Sur chacun des graphiques suivants, (G) est une partie du plan.
Indiquer dans chaque cas si (G) est la représentation graphique d'une fonction.
Si oui, donner alors l'ensemble de définition de cette fonction.

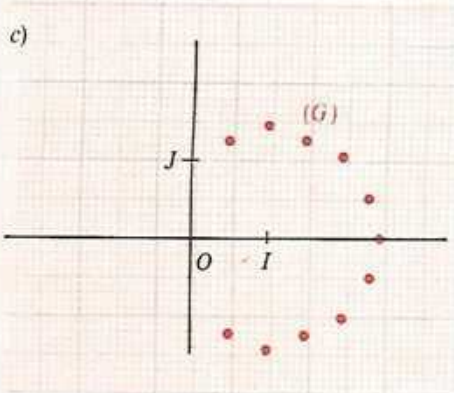
a)



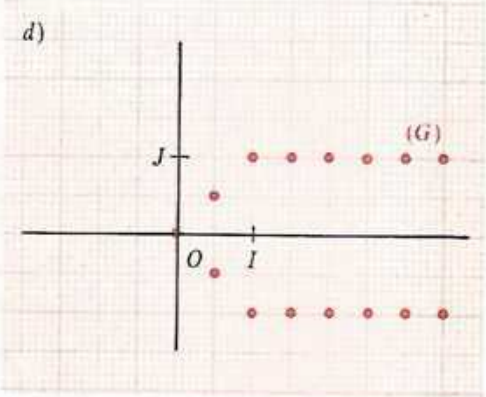
b)



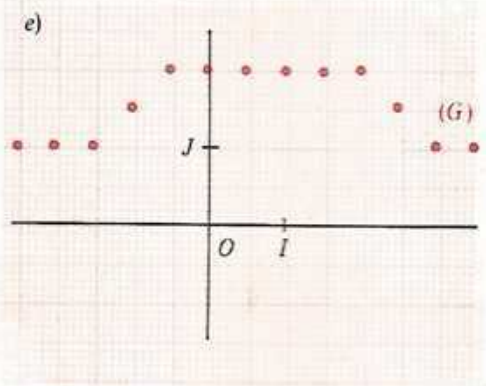
c)



d)

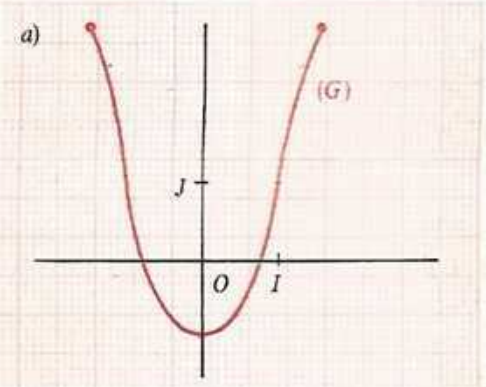


e)

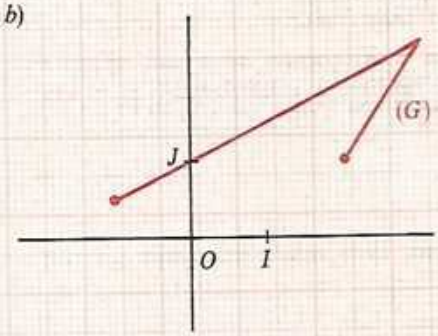


29 (3). Même exercice.

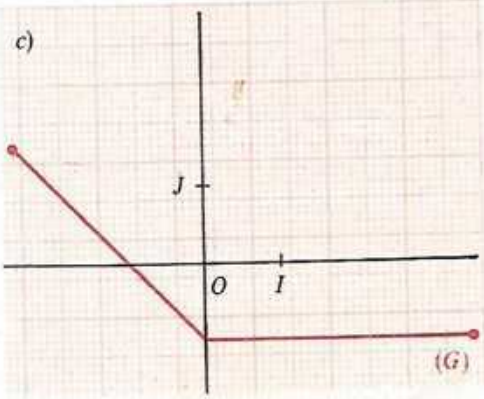
a)



b)

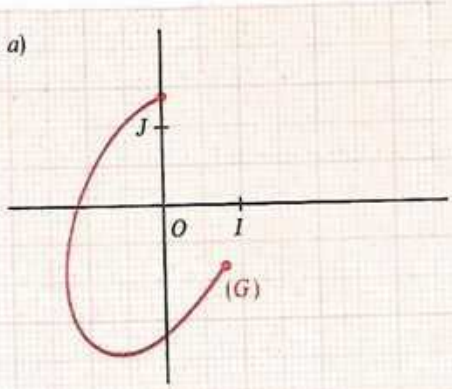


c)

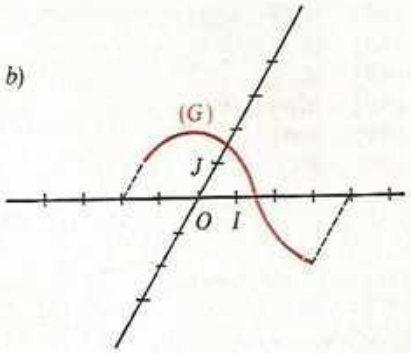


30 (3). Même exercice.

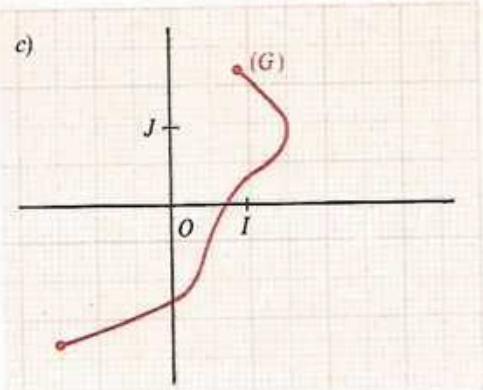
a)



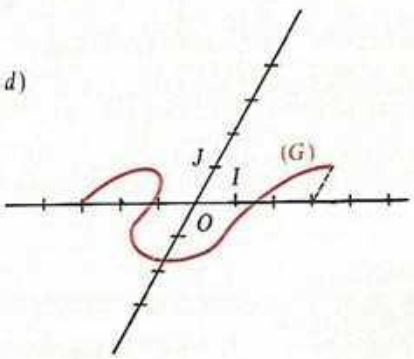
b)



c)



d)



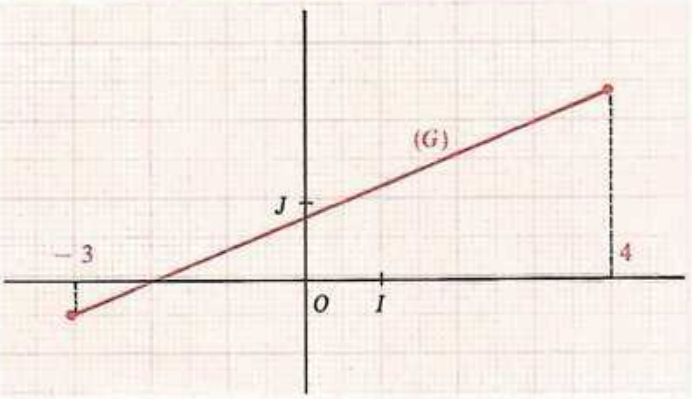
31 (3). Dans le plan muni du repère (O, I, J), on considère les points $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(3; -1)$, $D(-1; -2)$, $E(1; 1)$.
Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des représentations graphiques de fonctions ? Justifier.

1) $[AB]$
2) $[AB] \cup [BC]$

3) $[AB] \cup [BC] \cup [CD]$
4) $[AB] \cup [BD]$
5) $[AB] \cup [EC]$
6) $[AD] \cup [DB] \cup [BC]$
7) $[AC] \cup [DB]$
8) $[AB[\cup]BC]$
9) $[AD] \cup [BC]$
10) $]AB[\cup]EC[$.

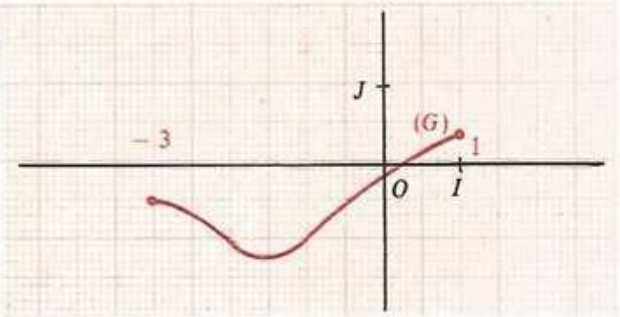
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui a pour représentation graphique $[BC]$. A l'aide de l'axiome de Thalès, calculer $f(1{,}5)$.

32 (3). Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par sa représentation graphique (G).



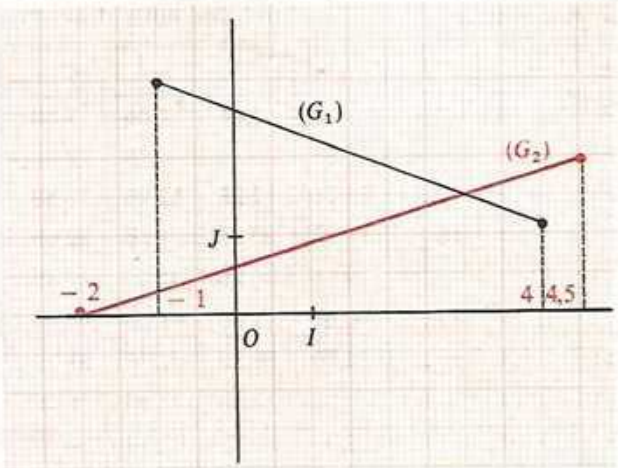
Résoudre : $x \in [-3\,;4]$, $f(x) = 2$.

33 (3). Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par sa représentation graphique (G).



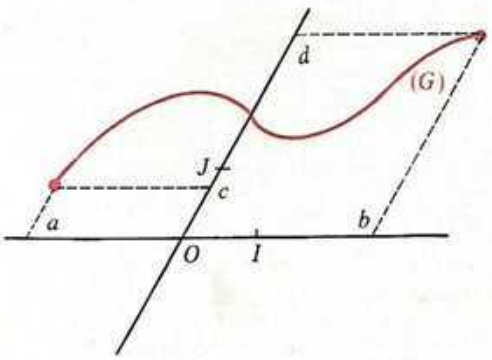
Résoudre : $x \in [-3\,;1]$, $f(x) = -1$.

34 (3). Soit deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ données par leurs représentations graphiques (G_1) et (G_2).



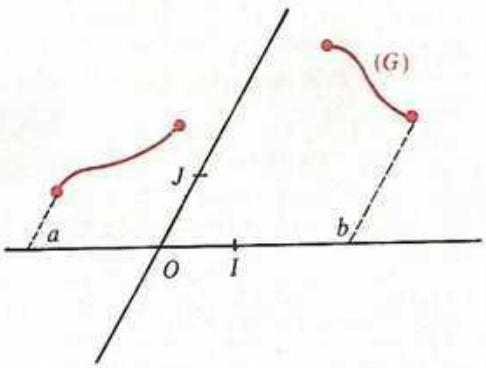
Résoudre : $x \in [-1\,;4]$, $f(x) = g(x)$.

35 (3). On donne le graphique suivant :



(G) est-elle la représentation graphique d'une application de $[a, b]$ dans $[c, d]$? Pourquoi ?
(G) n'est pas la représentation graphique d'une bijection de $[a, b]$ sur $[c, d]$. Pourquoi ?
Tracer une courbe, représentation graphique d'une bijection de $[a, b]$ sur $[c\,;d]$.

36 (3). On donne le graphique suivant :



(G) n'est pas la représentation graphique d'une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pourquoi ? Tracer une courbe, représentation graphique d'une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

37 (3). On donne la fonction

$f : \{-2\,;-1\,;-0{,}5\,;0\,;0{,}5\,;1\,;2\}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x^2 + 3x - 2.$$

a) Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction ?

b) Représenter graphiquement la fonction f (on prendra des axes perpendiculaires).

c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation $x \in D_f$, $f(x) = 0$.

d) La fonction f est-elle une bijection ?

38 (3). Lecture de tables.

a) En général, les tables représentant des fonctions sont composées de 2 colonnes : la 1re, constituée par les éléments de l'ensemble de définition, la 2e, par leurs images.

Cette disposition n'est pas toujours pratique, en effet, la table des carrés des éléments de $\mathbb{D}_1$ compris entre 1 et 10 devrait avoir 2 colonnes et 90 lignes !

Voici une autre disposition de cette table :

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61
2	4,00	4,41	4,84	5,29	5,76	6,25	6,76	7,29	7,84	8,41
3	9,00	9,61	10,24	10,89	11,56	12,25	12,96	13,69	14,44	15,21
4	16,00	16,81	17,64	18,49	19,36	20,25	21,16	22,09	23,04	24,01
5	25,00	26,01	27,04	28,09	29,16	30,25	31,36	32,49	33,64	34,81
6	36,00	37,21	38,44	39,69	40,96	42,25	43,56	44,89	46,24	47,61
7	49,00	50,41	51,84	53,29	54,76	56,25	57,76	59,29	60,84	62,41
8	64,00	65,61	67,24	68,89	70,56	72,25	73,96	75,69	77,44	79,21
9	81,00	82,81	84,64	86,49	88,36	90,25	92,16	94,09	96,04	98,01

On note $A = \mathbb{D}_1 \cap [1\,;10[$.

Soit f l'application de A dans $\mathbb{R}$ représentée par la table ci-dessus

$f(5{,}4) = 29{,}16 \qquad f(6{,}8) = 46{,}24$.

Ces exemples montrent le mode d'utilisation de cette table.

1) Déterminer $f(3{,}7)$; $f(2{,}2)$; $f(8)$.

2) Résoudre :

$x \in A, \quad f(x) = 22{,}09$

$x \in A, \quad f(x) = 1{,}44$

$x \in A, \quad f(x) = 55{,}51$

$x \in A, \quad f(x) = 49$.

3) Résoudre :

$x \in A, \quad 7 \leqslant f(x) \leqslant 13$

$x \in A, \quad 4{,}84 \leqslant f(x) < 9{,}61$

$x \in A, \quad 92{,}20 \leqslant f(x) \leqslant 94{,}01$.

b) Soit g l'application de A dans $\mathbb{R}$, représentée par la table ci-dessous.

On lit cette table comme la précédente.

g	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,00	0,52	1,06	1,69	1,50	1,23	1,45	2,07	2,54	2,89
2	3,06	3,57	4,12	4,98	5,75	6,25	6,87	6,52	5,43	6,74
3	7,52	8,61	9,23	10,05	11,56	12,00	13,46	12,52	11,04	10,25
4	12,44	15,21	17,32	19,46	20,05	21,32	22,66	23,55	23,04	22,09
5	20,75	23,04	25,37	27,53	29,45	30,72	31,98	33,00	36,31	39,42
6	38,65	37,21	36,43	35,07	38,65	40,00	42,29	45,34	49,64	52,15
7	55,82	58,95	60,71	62,56	65,61	68,93	71,85	73,41	75,69	77,81
8	82,95	84,09	81,33	79,56	78,12	77,65	76,24	75,69	74,00	75,69
9	78,47	81,07	84,31	87,92	89,82	91,00	93,47	95,32	97,55	98,01

1) Trouver $g(3{,}7)$; $g(2{,}2)$; $g(8)$.

2) Résoudre $x \in A$, $g(x) = 75{,}69$.

3) Résoudre $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

4) Résoudre $x \in A$, $20 < g(x) < 38$.

5) Résoudre $x \in A$, $g(x) \geqslant f(x)$.

3 Fonction racine carrée

Leçon 1 : FONCTION RACINE CARRÉE
Leçon 2 : OPÉRATIONS SUR LES RACINES CARRÉES

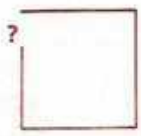
M. Diomandé a acheté un terrain carré de 500 m^2. Il veut le clôturer. Combien doit-il acheter de mètres de grillage au minimum ?

1 Fonction racine carrée

1) Trois problèmes

Compléter les tableaux suivants :

Périmètre du carré ?



côté	périmètre
2	
$\frac{7}{3}$	
3,75	
5,6	
	10
	16
	64

Côté du carré ?
Existe-t-il un carré ayant pour périmètre un nombre réel positif donné ?

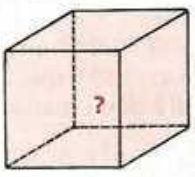
Aire du carré ?



côté	aire
1	
2	
$\frac{7}{3}$	
3,5	
	961
	1,44
	64

Côté du carré ?
Existe-t-il un carré dont la mesure de l'aire est un nombre réel positif donné ?

Volume du cube ?



arête	volume
1	
2	
$\frac{7}{3}$	
3,1	
	8
	64
	29 791

Arête du cube ?
Existe-t-il un cube ayant pour volume un nombre réel positif donné ?

a) **Problème 1 :** Trouver la mesure du côté d'un carré connaissant son périmètre.

1. Existe-t-il un carré ayant pour périmètre 6,95 ?
2. Existe-t-il un carré ayant pour périmètre un réel positif κ ?

Pour chaque carré, le périmètre s'obtient en multipliant la mesure du côté par 4.

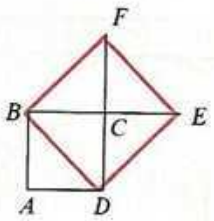
Donc si un carré a pour périmètre le réel κ, son côté mesure $\frac{\kappa}{4}$.

Le problème posé a toujours une solution et une seule.

b) **Problème 2 :** Trouver la mesure du côté d'un carré connaissant la mesure de son aire.

1. Existe-t-il un carré dont l'aire mesure 16 ; 25 ; 65 ; 936 ?
2. Souvenons-nous de la construction du carré dont l'aire mesure 2 (classe de Quatrième).

unité : 1 cm



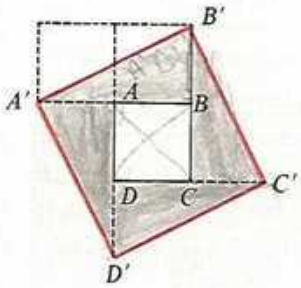
L'aire du carré *BDEF* mesure 2.
Quelle est la mesure du côté de ce carré ?

Mesurer le côté [*BD*] avec une règle graduée.
Nous avons vu que la mesure du côté du carré *BDEF* est un réel noté $\sqrt{2}$ qui peut être encadré de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} 1 & < \sqrt{2} < & 2 \\ 1{,}4 & < \sqrt{2} < & 1{,}5 \\ 1{,}41 & < \sqrt{2} < & 1{,}42 \\ 1{,}414 & < \sqrt{2} < & 1{,}415 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Exercice En se référant à la construction précédente, construire un carré dont l'aire mesure 8.
Avec la règle graduée, donner une valeur approchée de la mesure du côté de ce carré.
Construire un carré dont l'aire mesure 0,5. Avec la règle graduée, donner une valeur approchée de la mesure du côté de ce carré.

3. Existe-t-il un carré dont l'aire mesure 5 ?



Le côté du carré $ABCD$ mesure 1. Combien mesure l'aire du carré $A'B'C'D'$?

Chaque triangle $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$ et $D'AA'$ a une aire égale à celle du carré $ABCD$.
L'aire du carré $A'B'C'D'$ mesure donc 5.
Mesurer le côté $[A'B']$ de ce carré, élever le nombre obtenu au carré. Comparer avec 5.
Chercher des valeurs voisines de celle trouvée dont les carrés sont plus proches de 5.
Il paraît difficile de trouver la mesure exacte du côté de ce carré. Pourtant il est certain que ce côté, qui est un segment, est mesuré par un réel positif.

4. Plus généralement nous admettrons :

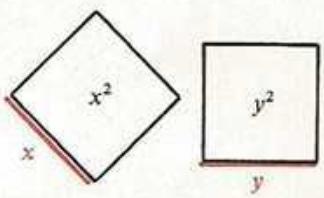
> Quel que soit le réel positif A, il existe un réel positif dont le carré est A.

c) **Problème 3 :** Trouver la mesure de l'arête d'un cube connaissant son volume.
Nous avons vu qu'un cube de volume 8 a une arête qui mesure 2.
De même si le volume d'un cube est 64, son arête mesure 4.
La recherche de la mesure de l'arête d'un cube connaissant son volume est un problème très difficile.
Cependant, nous verrons dans une autre classe que :
quel que soit le réel positif A, il existe un réel positif dont le cube est A.

2) Fonction racine carrée

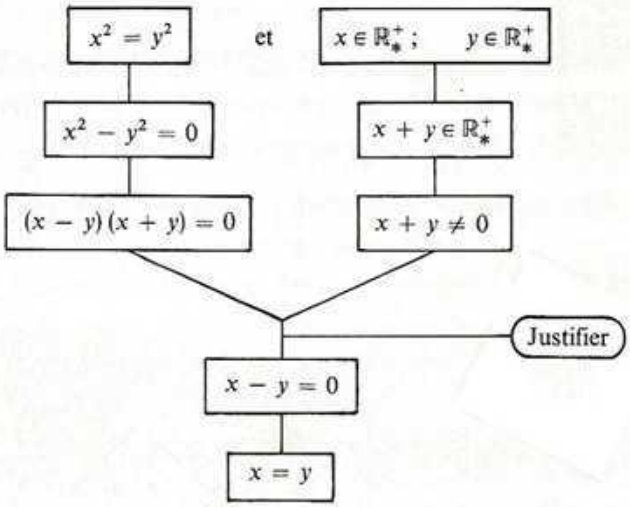
a) **Problème :** Si deux carrés ont la même aire, leurs côtés ont-ils la même mesure ?
Soit x la mesure du côté du premier carré ($x \in \mathbb{R}_*^+$) ; soit y la mesure du côté du second carré ($y \in \mathbb{R}_*^+$).

La mesure de l'aire du premier carré est x^2, celle du second carré est y^2.



Hypothèse : $x^2 = y^2$.
Montrons que nécessairement $x = y$.

Démonstration :



Conclusion : Si deux carrés ont la même aire, leurs côtés ont la même mesure.

Remarque. $x = 0$ ⟨ équivaut à ⟩ $x^2 = 0$.

Propriété 1

$x \in \mathbb{R}^+ ; \quad y \in \mathbb{R}^+$
$x^2 = y^2$ ⟨ équivaut à ⟩ $x = y$.

Nous avons admis qu'étant donné un réel positif A, il existe un réel positif dont le carré est A.
La propriété précédente montre que ce réel positif est unique.

b) **Définition.**

On appelle racine carrée **du réel positif A le réel positif noté $\sqrt{A}$ dont le carré est A, c'est-à-dire tel que $(\sqrt{A})^2 = A$.**

$\sqrt{A}$ se lit « racine carrée de A » ou plus simplement « racine de A ».

$A \in \mathbb{R}^+ ; \quad B \in \mathbb{R}^+$
$B = \sqrt{A}$ ⟨ signifie que ⟩ $B^2 = A$.

Retenons : — chaque réel positif **a** pour carré un réel positif unique
— chaque réel positif **est** le carré d'un réel positif unique.

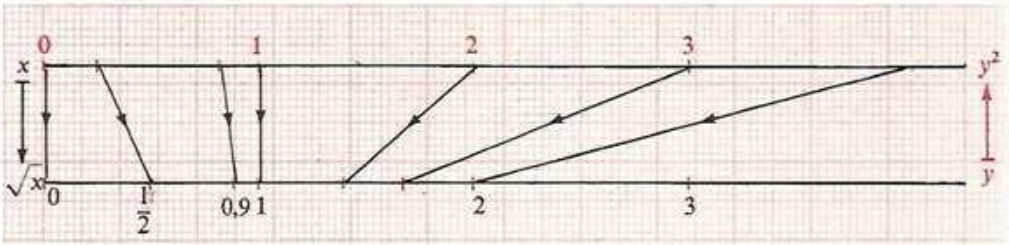
L'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto x^2$
est donc une bijection.
Il résulte de la définition de la racine carrée d'un réel positif que l'application

$$r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

est la réciproque de la bijection f; r est donc aussi bijective. On l'appelle *fonction racine carrée.*

c) **Applications numériques.**

1. Compléter le schéma sagittal suivant :



2. Compléter le tableau suivant :

x		0,25	$\frac{4}{9}$		5	7		900	Π^2	
$\sqrt{x}$	0			1			7			Π^2

Remarque. Certaines racines carrées de réels sont des entiers, des decimaux ou des rationnels (voir le tableau ci-dessus).
D'autres, par exemple $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{9{,}7}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\Pi}, \sqrt{\Pi^2}$, ne sont pas des rationnels.
Ces nombres sont appelés *nombres irrationnels* et on ne peut trouver que des écritures décimales approchées de ces nombres.

d) **Comparaison de deux racines carrées.**

Rappel :

$x \in \mathbb{R}^+ ; \quad y \in R^+$
$x < y$ (équivaut à) $x^2 < y^2$.

Nous pouvons donc écrire :

Propriété 2

$x \in \mathbb{R}^+ ; \quad y \in \mathbb{R}^+$
$x < y$ (équivaut à) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

e) **Comment calculer la racine carrée d'un réel ?**

1. A l'aide d'une table de carrés

Une table des carrés permet d'avoir les racines carrées exactes des nombres qui y figurent.

DIZAINES \ UNITÉS	0	1	2	3	...
47	220 900	221 841	222 784	223 729	...
48	230 400	231 361	232 324	233 289	...
49	240 100	241 081	242 064	243 049	...
50	250 000	251 001	252 004	253 009	...
51	260 100	261 121	262 144	263 169	...
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

VOICI UN EXTRAIT DE LA TABLE DES CARRÉS DES ENTIERS DE 100 A 1 000.

Le schéma ci-contre indique comment obtenir le carré de 491 et la racine carrée de 262 144

$$491^2 = 241\,081$$
$$\sqrt{262\,144} = 512\,.$$

Trouver les racines carrées de 243 049 ; 231 361 ; 230 400.

2. A l'aide d'une table de racines carrées.

Voici un extrait de la table des racines carrées de la page 67

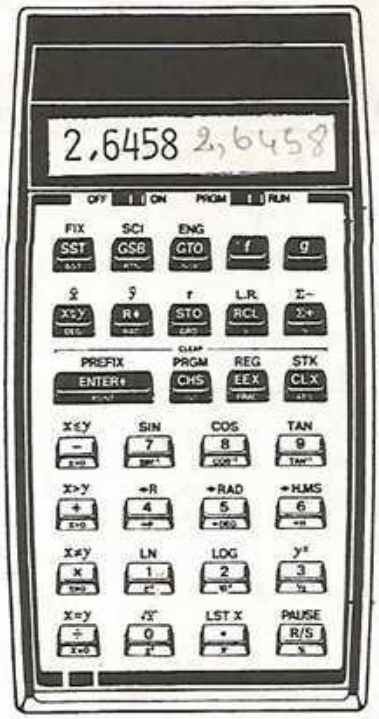
n	$\sqrt{n}$
1	1
2	1,414 2
3	1,732 1
4	2
5	2,236 1
6	2,449 5
7	2,645 8
8	2,828 4
9	3
10	3,162 3
11	3,316 6
12	3,464 1
13	3,605 6
14	3,741 7
15	3,873 0
16	4
17	4,123 1
18	4,242 6
19	4,358 9

Les valeurs indiquées dans les tables sont des valeurs approchées: parfois par défaut, parfois par excès.
On peut vérifier en élevant au carré que 1,732 1 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{3}$, que 3,464 1 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{12}$.
La valeur 1,732 1 signifie :

$$1{,}732\,05 \leqslant \sqrt{3} < 1{,}732\,15\,.$$

On dit que 1,732 1 est **l'arrondi** de $\sqrt{3}$ à la quatrième décimale, c'est l'élément de $\mathbb{D}_4$ le plus proche de $\sqrt{3}$. On note : $\sqrt{3} \simeq 1{,}732\,1$ et on lit « $\sqrt{3}$ a pour arrondi 1,732 1 ».

3. A l'aide d'une calculatrice électronique.



L'utilisateur de la calculatrice photographiée ci-contre a demandé $\sqrt{7}$; la machine affiche 2,645 8 qui est l'arrondi de $\sqrt{7}$ à la quatrième décimale.

4. Par approximations successives.

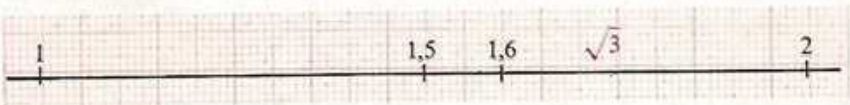
Nous voulons encadrer $\sqrt{3}$ par deux décimaux d'ordre 3.
Nous savons que

$$0^2 < 1^2 < 3 < 2^2 \quad \text{(équivaut à)} \quad 0 < 1 < \sqrt{3} < 2$$

$\sqrt{3}$ est-il plus proche de 1 que de 2 ?
3 est plus proche de 4 que de 1.

Essayons 1,6 :

$$1{,}6^2 = 2{,}56 \quad \text{donc} \quad 1{,}6 < \sqrt{3} < 2\,.$$



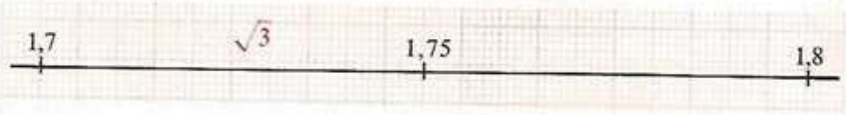
Essayons 1,7 :

$$1{,}7^2 = 2{,}89 \quad \text{donc} \quad 1{,}7 < \sqrt{3} < 2\,.$$



Essayons 1,8 :

$$1{,}8^2 = 3{,}24 \quad \text{donc} \quad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8\,.$$



On constate que 2,89 est plus proche de 3 que 3,24.
On peut penser que 1,7 est plus proche de $\sqrt{3}$ que 1,8.

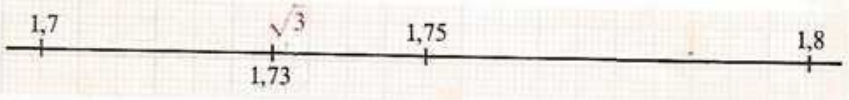
Essayons 1,73 :

$$1{,}73^2 = 2{,}992\,9 \quad \text{donc} \quad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}8\,.$$

Essayons 1,74 :

$$1{,}74^2 = 3{,}027\,6 \quad \text{donc } 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74\,.$$

On peut penser que 1,73 est plus proche de $\sqrt{3}$ que 1,74.

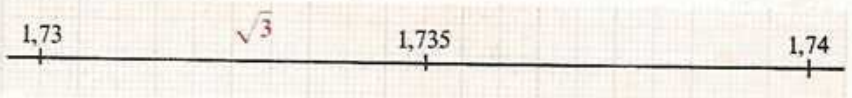


Essayons 1,732 :

$$1{,}732^2 = 2{,}999\,824$$

puis 1,733

$$1{,}733^2 = 3{,}003\,289 \quad \text{donc} \quad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733\,.$$



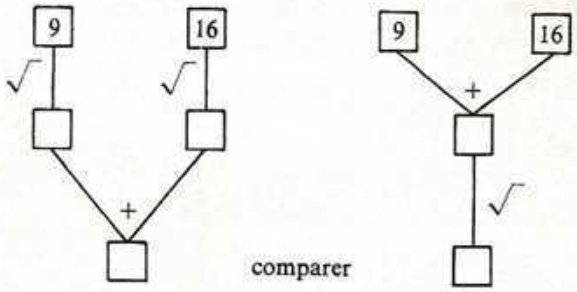
Deux arrondis à retenir :

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$$
$$\sqrt{3} \simeq 1{,}732\,.$$

2 Opérations sur les racines carrées

1) Racine carrée et addition

a) **Compléter :**



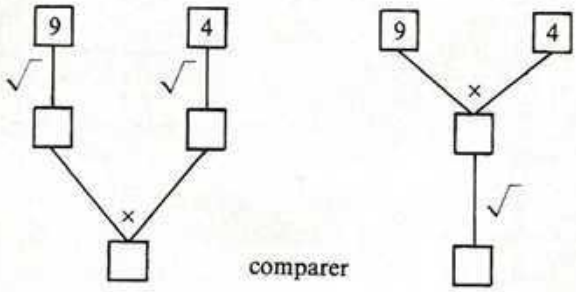
b) **Conclusion.**

En général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice Comparer $\sqrt{25-16}$ et $\sqrt{25} - \sqrt{16}$.

2) Racine carrée et multiplication

a) **Compléter :**



a et *b* étant deux réels positifs quelconques, peut-on conclure : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$? Un exemple ne suffit pas, plusieurs non plus. Une démonstration est nécessaire.

b) *a* et *b* étant deux réels positifs quelconques, comparons $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$. Les propriétés 1 et 2 de la leçon précédente montrent que, pour comparer deux réels positifs, il suffit de comparer leurs carrés.

Calculons : $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ et $(\sqrt{a \times b})^2$

Justifications

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$ ← $(xy)^n = x^n y^n$ $(x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, n = 2)$

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$ ← définition → $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$

donc : $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2$

Concluons : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

On énonce :

Théorème 1

La racine carrée du produit de deux réels positifs est égale au produit de leurs racines carrées.

$a \in \mathbb{R}^+$; $b \in \mathbb{R}^+$

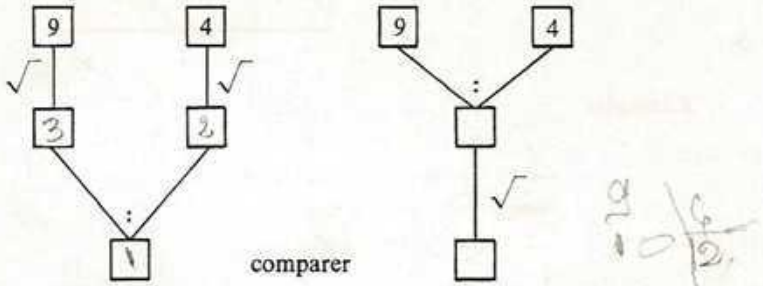
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemples

- $\sqrt{25 \times 9} = \sqrt{25} \times \sqrt{9}$
  $\sqrt{25 \times 9} = 5 \times 3$
  $\sqrt{25 \times 9} = 15$.
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$
  $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$
  $\sqrt{12} = 2 \times \sqrt{3}$, on écrit plus simplement $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- $\sqrt{30} \times \sqrt{10} = \sqrt{30 \times 10}$
  $\sqrt{30} \times \sqrt{10} = \sqrt{300}$
  $\sqrt{30} \times \sqrt{10} = \sqrt{100} \times \sqrt{3}$
  $\sqrt{30} \times \sqrt{10} = 10\sqrt{3}$.

3) Racine carrée d'un quotient

a) **Compléter :**



a et b étant deux réels quelconques strictement positifs, peut-on conclure :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ ?$$

b) a et b étant deux réels quelconques strictement positifs, pour comparer $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, comparons leurs carrés.

Calculons $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

Justifications

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}$ ← $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

$x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$, $n = 2$

$\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ ← définition → $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$

donc $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

conclusion $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

On énonce :

Théorème 2

La racine carrée du quotient de deux réels strictement positifs est égale au quotient de leurs racines carrées.

$$a \in \mathbb{R}_*^+; \qquad b \in \mathbb{R}_*^+$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} \qquad \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}}$$
$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{25} \qquad \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$$
$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = 5.$$

c) **Cas particulier.**

$$a \in \mathbb{R}_*^+ \qquad \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Exemple

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{9}}$$
$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Remarque.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$a \in \mathbb{R}_*^+$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{a}$ sont donc deux écritures d'un même nombre; selon les calculs à effectuer, l'une est plus commode que l'autre.

4) Applications des propriétés précédentes à l'utilisation de la table des carrés (pages 65 et 66)

a) **Donner un encadrement de la racine carrée d'un réel compris entre 10^4 et 10^6 :**

Exemple

Donner un encadrement de $\sqrt{538\,241}$:
538 241 ne se trouve pas dans la table.

* On cherche le plus grand nombre de la table inférieur à 538 241 : c'est 537 289.
* On cherche le plus petit nombre de la table supérieur à 538 241 : c'est 538 756.

On a : $537\,289 < 538\,241 < 538\,756$ donc, d'après la propriété 2 :

$$\sqrt{537\,289} < \sqrt{538\,241} < \sqrt{538\,756}.$$

La lecture de la table donne

$$733 < \sqrt{538\,241} < 734;$$

on a ainsi encadré $\sqrt{538\,241}$ par deux naturels consécutifs.

Exercice Donner un encadrement par deux naturels consécutifs des nombres $\sqrt{897\,031}$; $\sqrt{438\,727}$; $\sqrt{243\,692{,}54}$.

b) **Donner un encadrement de la racine carrée d'un réel positif quelconque.**

Exemple

Donner un encadrement de $\sqrt{232\,847\,537}$.
Voici diverses écritures du réel 232 847 537 :

$2{,}328\,475\,37 \times 10^8$; $232{,}847\,537 \times 10^6$; $23\,284{,}753\,7 \times 10^4$;
$23{,}284\,753\,7 \times 10^7$; $232\,847\,537\,000 \times 10^{-3}$;
$2\,328{,}475\,37 \times 10^5$; $232\,847{,}537 \times 10^3$.

Remarque. $\sqrt{10^8} = 10^4$; $\sqrt{10^6} = 10^3$; $\sqrt{10^7} = 10^3\sqrt{10}$; $\sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$

Étant donné :

— que la racine carrée d'une puissance de 10 d'exposant pair est un naturel
— et de plus que la table donnée permet d'encadrer la racine carrée d'un réel de l'intervalle $[10^4 ; 10^6]$, nous choisirons l'écriture suivante : $23\,284{,}753\,7 \times 10^4$

$$\underbrace{23\,284{,}753\,7}_{\text{le premier facteur est un réel de l'intervalle } [10^4 ; 10^6]} \times \underbrace{10^4}_{\text{le second facteur est une puissance de 10 d'exposant pair.}}$$

En vertu du théorème 1, on a :

$$\sqrt{232\,847\,537} = \sqrt{23\,284{,}753\,7} \times \sqrt{10^4}$$

$$\sqrt{232\,847\,537} = \sqrt{23\,284{,}753\,7} \times 10^2$$

Dans la partie *a)* ci-dessus, nous avons appris à donner un encadrement de $\sqrt{23\,284{,}753\,7}$ par deux entiers

$$152 < \sqrt{23\,284{,}753\,7} < 153$$

donc :

$$152 \times 10^2 < \sqrt{23\,284{,}753\,7} \times 10^2 < 153 \times 10^2$$

par suite

$$15\,200 < \sqrt{232\,847\,537} < 15\,300\,.$$

Ce procédé permet de donner un encadrement de $\sqrt{5}$.
En effet : $5 = 50\,000 \times 10^{-4}$

$$50\,000 \times 10^{-4}$$

50 000 est un réel de l'intervalle $[10^4 ; 10^6]$ | 10^{-4} est une puissance de 10 d'exposant pair.

Ainsi

$$\sqrt{5} = \sqrt{50\,000} \times \sqrt{10^{-4}}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{50\,000} \times 10^{-2}$$

or

$$223 < \sqrt{50\,000} < 224\,.$$

On obtient donc :

$$223 \times 10^{-2} < \sqrt{50\,000} \times 10^{-2} < 224 \times 10^{-2}$$

c'est-à-dire

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24\,.$$

Exercices
1) Répondre au problème de M. Diomandé posé en introduction.
2) Donner un encadrement de $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0{,}6}$; $\sqrt{73}$; $\sqrt{43{,}32}$.

5) Calculs sur les racines carrées

a) **Développer :**

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$$
$$(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})\,.$$

On remarque que dans les trois derniers calculs, le résultat est un nombre rationnel.

b) **Démontrer.**

a et b étant deux rationnels positifs, démontrer que $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ est un rationnel.

c) **« Rendre rationnel » le dénominateur d'une écriture fractionnaire.**

Exemples

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une écriture de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont le dénominateur est rationnel ; on dit que l'on a « rendu rationnel » le dénominateur de l'écriture fractionnaire donnée.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

d) **Application au calcul numérique.**

Connaissant les encadrements de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$:

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415 \quad \text{et} \quad 1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733,$$

1. donner un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. donner un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Lorsque le dénominateur d'une écriture fractionnaire est irrationnel, il est souvent intéressant, pour effectuer un calcul numérique, de rendre rationnel ce dénominateur.

6) Résoudre des équations

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 25$

$$x^2 = 25$$
$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 - 5^2 = 0$$
$$(x - 5)(x + 5) = 0$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0$$
$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5$$
$$S = \{5; -5\}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 7$

$$x^2 = 7 \qquad \text{rappel : } 7 = (\sqrt{7})^2$$
$$x^2 - 7 = 0$$
$$x^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$$
$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$$
$$x - \sqrt{7} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{7} = 0$$
$$x = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{7}$$
$$S = \{\sqrt{7}; -\sqrt{7}\}$$

Remarque.

$$\sqrt{7} \in \mathbb{R}^+$$
donc $$-\sqrt{7} \in \mathbb{R}^-.$$
$-\sqrt{7}$ est l'opposé de $\sqrt{7}$.

Remarque. L'équation $x^2 = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$: le réel 0.
L'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Pourquoi ?

c) a étant un réel, résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 = a$.

1er cas $a > 0$

$$x^2 = a$$
$$x^2 - a = 0$$
$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$
$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$
$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$
$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$
$$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}.$$

2e cas $a = 0$

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$
$$S = \{0\}.$$

3e cas $a < 0$

$$x^2 = a$$
$$S = \varnothing.$$

Table des carrés des nombres de 100 à 1 000

Dizaines \ Unités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001
50	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016	255 025	256 036	257 049	258 064	259 081
51	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361
52	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841
53	280 900	281 961	283 024	284 089	285 156	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521
54	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401

Table des carrés des nombres de 100 à 1 000 (*suite*)

Dizaines \ Unités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	302 500	303 601	304 704	305 809	306 916	308 025	309 136	310 249	311 364	312 481
56	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761
57	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241
58	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921
59	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801
60	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881
61	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161
62	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641
63	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321
64	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201
65	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281
66	435 600	436 921	438 244	439 569	440 896	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561
67	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041
68	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721
69	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636	483 025	484 416	485 809	487 204	488 601
70	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681
71	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961
72	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441
73	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121
74	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536	555 025	556 516	558 009	559 504	561 001
75	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081
76	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361
77	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841
78	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521
79	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401
80	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481
81	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761
82	672 400	674 041	675 684	677 329	678 976	680 625	682 276	683 929	685 584	687 241
83	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556	697 225	698 896	700 569	702 244	703 921
84	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801
85	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881
86	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161
87	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641
88	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456	783 225	784 996	786 769	788 544	790 321
89	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201
90	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281
91	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561
92	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041
93	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721
94	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136	893 025	894 916	896 809	898 704	900 601
95	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681
96	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961
97	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441
98	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121
99	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001

Table des racines carrées des nombres de 0 à 99

Unités \ Dizaines	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000 0	3,162 3	4,472 1	5,477 2	6,324 6	7,071 1	7,746 0	8,366 6	8,944 3	9,486 8
1	1,000 0	3,316 6	4,582 6	5,567 8	6,403 1	7,141 4	7,810 2	8,426 1	9,000 0	9,539 4
2	1,414 2	3,464 1	4,690 4	5,656 9	6,480 7	7,211 1	7,874 0	8,485 3	9,055 4	9,591 7
3	1,732 1	3,605 6	4,795 8	5,744 6	6,557 4	7,280 1	7,937 3	8,544 0	9,110 4	9,643 7
4	2,000 0	3,741 7	4,899 0	5,831 0	6,633 2	7,348 5	8,000 0	8,602 3	9,165 2	9,695 4
5	2,236 1	3,873 0	5,000 0	5,916 1	6,708 2	7,416 2	8,062 3	8,660 3	9,219 5	9,746 8
6	2,449 5	4,000 0	5,099 0	6,000 0	6,782 3	7,483 3	8,124 0	8,717 8	9,273 6	9,798 0
7	2,645 8	4,123 1	5,196 2	6,082 8	6,855 7	7,549 8	8,185 4	8,775 0	9,327 4	9,848 9
8	2,828 4	4,242 6	5,291 5	6,164 4	6,928 2	7,615 8	8,246 2	8,831 8	9,380 8	9,899 5
9	3,000 0	4,358 9	5,385 2	6,245 0	7,000 0	7,681 1	8,306 6	8,888 2	9,434 0	9,949 9

Exercices

Calculer

1 (1). L'unité est le cm.
Construire un carré d'aire 16.
Construire ensuite un carré d'aire 32.
Donner, à l'aide d'une règle graduée, une valeur approchée de la mesure du côté de ce carré.
Élever ce nombre au carré.
Trouver un décimal dont le carré est plus proche de 32 que le précédent.

2 (1). L'unité est le dm.
Construire un carré d'aire 0,81 puis un carré d'aire 1,62.
Donner, à l'aide d'une règle graduée, une valeur approchée de la mesure du côté de ce carré.
Trouver un décimal dont le carré est plus proche de 1,62 que le précédent.

3 (1). Compléter le tableau suivant ($x \in \mathbb{R}^+$) :

x	0,25		0,9		1,5	2,5			$\frac{3}{5}$
x^2		0,04		1,21			3	$\frac{16}{9}$	

4 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction :

$$f : \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

vers

$$\{0, 1, 4, 9, 16\}$$

$$x \mapsto x^2$$

f est-elle une application ? Si oui, est-elle bijective ?

5 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction

$$g : \left\{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$$

vers $\left\{-8; -1; -\frac{1}{8}; 0; \frac{1}{8}; 1; 8\right\}$

$$x \mapsto x^3$$

g est-elle une application ? Si oui, est-elle bijective ?

6 (1). Donner par approximations successives un encadrement par deux décimaux d'ordre 2 des nombres : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7 (1). Sachant que : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
a) donner un encadrement par deux décimaux d'ordre 3 de $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+1$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-1$; $3\sqrt{2}$;

b) donner un encadrement par deux décimaux d'ordre 2 de $-\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8 (1). Donner les arrondis à la 1re puis à la 2e, puis à la 3e décimale de :

a) 42,763 54 ; 3,141 57 ; 5,008 74 ; 1,732 051 ; 2,999 99 ;

b) $\sqrt{7}$; $\sqrt{0{,}9}$; $\sqrt{3{,}6}$; $\sqrt{360}$.

9 (1). *a)* Pour quelles valeurs de x les écritures suivantes désignent-elles des réels

$\sqrt{x}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{2x+3}$; $\sqrt{1-x}$?

b) Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

f_1 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x^2}$

f_2 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x-1}$

f_3 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{2x+3}$

f_4 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{1-x}$

f_5 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

f_6 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{|x|}$

f_7 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

f_8 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{2-x}$

f_9 : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2-x}}$

f_{10} : $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{1-2x} + \sqrt{x+4}$.

10 (1). *a)* Donner un programme de calcul du réel $\sqrt{x^2} - x$.
Calculer ce réel pour les valeurs suivantes de x :
1 ; −1 ; 2 ; −2 ; 3 ; −3 ; 4 ; −4.
Quel que soit le réel x, $\sqrt{x^2}$ est-il égal à x ?

b) Trouver six réels tels que $\sqrt{x^2} = -x$.

11 (1). Soit la fonction f : { −9 ; −4 ; −1 ; 0 ; 1 ; 4 ; 9 } vers $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$.

Quel est son ensemble de définition ?
Représenter f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

12 (1). Soit la fonction g : { −8 ; −3 ; 0 ; 2 ; 5 ; 10 } vers $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x-1}$.

Quel est son ensemble de définition ?
Représenter g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

13 (1). Soit la fonction h : { 0 ; 1 ; 4 ; 7 ; 9 ; 12 ; 16 ; 20 ; 25 } vers $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$.

Quel est son ensemble de définition ?
Représenter h dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
On utilisera les arrondis à la première décimale de $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$.

14 (2). Calculer :

$\sqrt{9}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{0{,}36}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{2\,500}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{10^2}$; $\sqrt{10^{-2}}$; $\sqrt{10^6}$; $\sqrt{10^{-4}}$; $\sqrt{10^4}$; $\sqrt{9} + \sqrt{0{,}25} + \sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{0{,}01} + \sqrt{10\,000}$.

15 (2). Écrire plus simplement :

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$;

$3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$; $11\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

16 (2). Écrire plus simplement :

$\sqrt{2} \times \sqrt{8}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$;
$\sqrt{3} \times \sqrt{12}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{125}$;
$5 \times \sqrt{72}$; $\sqrt{10} \times \sqrt{1\,000}$;
$\sqrt{2 \times 4 \times 9}$;
$\sqrt{2^4 \times 3^8}$; $\sqrt{2\,475}$;
$\sqrt{2^6 \times 3^2 \times 5^4}$; $\sqrt{529}$;
$\sqrt{12^3 \times 75}$; $\sqrt{5^5 \times 2^5 \times 10^5}$.

17 (2). Écrire plus simplement :

$\sqrt{\frac{1}{16}}$; $\sqrt{\frac{9}{25}}$; $\sqrt{\frac{144}{81}}$; $\sqrt{\frac{18}{50}}$; $\frac{1}{\sqrt{8\,100}}$;
$\sqrt{\frac{72}{162}}$; $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{45}}$; $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{90}}$.

18 (2). Écrire plus simplement :

$\sqrt{3^2 \times 5^4 \times 2^6}$; $\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{18} \times \sqrt{20}}$;
$\sqrt{10^{12}}$; $\frac{\sqrt{0{,}32} \times \sqrt{0{,}2}}{\sqrt{3{,}6}}$;
$2\sqrt{0{,}12} \times 5\sqrt{3}$;
$(\sqrt{12})^3 \times \sqrt{75}$; $\sqrt{7} \times \sqrt{\frac{7}{16}}$.

19 (2). Écrire plus simplement :

$\sqrt{15\,876}$; $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{9}}$;
$\sqrt{50} - \sqrt{18}$.

20 (2). Écrire plus simplement :

$\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$;
$\sqrt{2} - \sqrt{8}$;
$\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50}$;
$\sqrt{90} - \sqrt{10} + 3\sqrt{1\,000}$;
$2\sqrt{27} - 4\sqrt{9} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{25} - 5\sqrt{48}$;
$\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + \sqrt{45}$;
$5\sqrt{28} - 3\sqrt{175} + \sqrt{252}$;
$3\sqrt{96} + \sqrt{150} - \sqrt{726}$;
$\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{300}$;
$\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{175}$;
$\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{25}{3}} + \sqrt{\frac{64}{3}}$;
$\sqrt{1\,982 \times 1\,983 + 1\,983}$;
$\sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{36}}}}$;
$\sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{9}}}}$.

21 (2). Comparer :

$5\sqrt{3}$ et $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$;
$6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$; $3\sqrt{7}$ et 8;
$\sqrt{\frac{22}{7}}$ et $\sqrt{\pi}$; $\sqrt{0{,}72}$ et $0{,}09$;
$\sqrt{0{,}26}$ et $0{,}5$; $2\sqrt{27}$ et $6\sqrt{3}$;
$10\sqrt{12}$ et $12\sqrt{10}$; $2\sqrt{6}$ et 5;
$3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$; $3\sqrt{3}$ et 5.

22 (2). Comparer :

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$;
$1 + \sqrt{3}$ et $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$;
$\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

23 (2). Indiquer, parmi les réels suivants, ceux qui sont positifs :

$1 - \sqrt{2}$; $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; $5\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$;
$\sqrt{2} - 1$; $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$;
$3 - \sqrt{3}$; $7\sqrt{6} - 5\sqrt{8}$.

24 (2). Développer :

$\sqrt{2}(\sqrt{8} + 5\sqrt{2})$
$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$
$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$
$(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})$
$(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})$
$(3 - \sqrt{5})^2$
$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
$\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{12})$
$(\sqrt{5} - 1)\sqrt{5}$
$(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$
$(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$
$(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2$
$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$
$(4 + \sqrt{7})^2$
$(1 + 5\sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$
$(\sqrt{1\,983} - \sqrt{1\,982})(\sqrt{1\,983} + \sqrt{1\,982})$.

25 (2). Développer :

$\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{2})$ $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$
$(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$ $(2\sqrt{7} + 1)^2$
$(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2$
$(5\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)$ $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})$.

26 (2). Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, encadrer par deux décimaux d'ordre 2 les réels suivants :

$$\frac{2}{\sqrt{3}};\quad \frac{4}{\sqrt{2}};\quad \frac{1}{\sqrt{3}-1};\quad \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}};$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{3}{\sqrt{2}+1};\quad \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

27 (2). Rendre rationnels les dénominateurs des écritures fractionnaires suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{7}};\quad \frac{3}{\sqrt{5}};\quad \frac{-4}{\sqrt{3}-1};$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}};\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2};$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{3}};\quad \frac{2}{-1-\sqrt{3}};$$
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

28 (2). Écrire plus simplement :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$.

29 (2). Sachant que $156^2 = 24\,336$, trouver parmi les écritures suivantes celles qui désignent un décimal et donner ce décimal :

$\sqrt{2{,}433\,6}$; $\sqrt{24{,}336}$; $\sqrt{243{,}36}$;
$\sqrt{0{,}024\,336}$; $\sqrt{0{,}243\,36}$; $\sqrt{243\,360}$;
$\sqrt{243\,360\,000}$.

30 (2). On donne l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 2x - 11.$$

Calculer $f(1 - 2\sqrt{3})$ et $f(1 + 2\sqrt{3})$.
f est-elle une bijection ? Pourquoi ?

31 (2). Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - x - 1.$$

Calculer : $f(\sqrt{2})$; $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\ f\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right);\ f(-\sqrt{2}).$$

Pour chacune de ces images, donner l'arrondi à la 2e décimale.

32 (2). Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x^2+2}.$$

Calculer : $g(\sqrt{2})$; $g(-\sqrt{2})$; $g(\sqrt{3})$; $g(-\sqrt{3})$; $g(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
Pour chacune de ces images, donner l'arrondi à la 3e décimale.

33 (2). Soit l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 3x + 4.$$

Calculer les images par h de $\sqrt{3}$; $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

34 (2). Soit l'application :

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2(1-\sqrt{5}) + 2(1+\sqrt{5})x - 8.$$

Calculer les images par k de $\sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; $1 - \sqrt{5}$.

35 (2). Factoriser :

a) $x^2 - 3$;
b) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$;
c) $(x+2)^2 - 3$.

36 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x + 4\sqrt{2} - 1 = 3x\sqrt{2} - 4$.

b) $x\sqrt{10} - (x+3) = 7\sqrt{2} - x$.

c) $\dfrac{x+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{x-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

d) $\dfrac{x}{4+\sqrt{2}} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

e) $x - \dfrac{2+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{x}{\sqrt{2}} = 0$.

f) $\dfrac{1-2x}{3\sqrt{3}+1} = \dfrac{2x}{3\sqrt{3}}$.

g) $\dfrac{x-\sqrt{2}}{5} + \dfrac{\sqrt{2}+2}{3} =$

$$x(-3\sqrt{2}-1) + \frac{x}{5} - \frac{2(5-\sqrt{2})}{15}.$$

37 (2). *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x\sqrt{3} + 2 = 4 + x.$$

b) Trouver un encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 de la solution de cette équation ; on donne : $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

38 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^2 = 16$	$x^2 - 1 = 0$
$4x^2 = 25$	$x^2 + 1 = 0$
$3x^2 = 4$	$5x^2 = 0$
$x^2 - 1 = x^2 + 3$	$x^3 - x^2 = 0$
$3x^2 - 7 = 0$	$x^2 = -4$
$3x^2 + 14 = x^2 + 256$	$x^2 = 0{,}16$.

39 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$
$$y^2 = \sqrt{5} - 2$$
$$z^2 = 1 - \sqrt{3}.$$

40 (2). Résoudre dans $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x} = 14{,}1$$
$$1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} - 4.$$

Démontrer

41 (1). Démontrer que : si $x^2 = y^2$ et $x > y$ alors $x = -y$.

42 (1). Démontrer que :

a) Si $0 < a < 1$ alors $a^2 < a$;

b) Si $1 < a$ alors $a < a^2$;

c) Si $0 < a < 1$ alors $a < \sqrt{a}$;

d) Si $1 < a$ alors $\sqrt{a} < a$.

43 (1). Démontrer que si l'on multiplie la mesure du côté d'un carré par 2, la mesure de son aire est multipliée par 4.

44 (1). Démontrer que si l'on multiplie la mesure de l'arête d'un cube par 2, son volume est multiplié par 8.

45 (1). *a* et *b* étant deux réels quelconques, démontrer que :

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

46 (1). *a* et *b* étant deux réels positifs, démontrer que :

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

47 (1). *a*) Démontrer que les réels $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

b) Démontrer que les réels $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont opposés.

c) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, encadrer $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3}$ par deux décimaux d'ordre 2 consécutifs.

48 (1). *a* et *b* étant deux réels positifs, démontrer que :

$$\sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

49 (2). *a* et *b* étant deux réels positifs, démontrer que :

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

50 (2). *a*, *b*, *c* et *d* étant quatre nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, démontrer que :

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} = \sqrt{(a + c)(b + d)}.$$

51 (2). *a* et *b* étant deux réels non nuls quelconques, démontrer que

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \text{ alors } a = b \text{ ou } a = -b.$$

Réfléchir

52. *x* et *y* étant deux réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique *M* de ces deux nombres leur demi-somme :

$$M = \frac{x + y}{2}.$$

On appelle moyenne géométrique *G* de ces deux nombres la racine carrée de leur produit :

$$G = \sqrt{xy}.$$

On appelle moyenne harmonique de ces deux nombres le nombre *H* tel que :

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

a) Calculer les diverses moyennes des nombres 9 et 16. Ordonner les nombres *M*, *G* et *H*.

Applications numériques :

1) Konan a eu deux notes de mathématiques au cours du mois de novembre : 16 et 9. Quelle est sa moyenne ?

2) Kouadio s'entraîne pour le championnat d'athlétisme : il parcourt 12 km à la vitesse de 16 km/h, puis revient sur ses pas à la vitesse de 9 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne sur la distance totale parcourue ?

3) Trouver la mesure du côté d'un carré ayant la même aire qu'un rectangle de 16 m sur 9 m.

b) Démontrer que le carré de la moyenne géométrique de deux nombres est égal au produit de leur moyenne harmonique et de leur moyenne arithmétique.

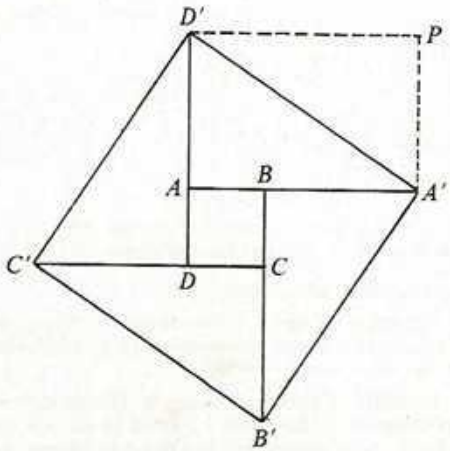
53 (1). Trouver trois nombres dont l'arrondi à la 2e décimale est 5,72 et dont le produit par 8 a pour arrondi à la 2e décimale 45,75.

54 (2). VRAI OU FAUX ?
Le carré d'un réel est un réel positif.
La racine carrée d'un rationnel positif est un rationnel positif.
Le carré de l'inverse d'un réel strictement positif est l'inverse du carré de ce réel.
Le carré de l'opposé d'un réel strictement positif est l'opposé du carré de ce réel.
Le carré de la différence de 2 réels distincts strictement positifs est la différence des carrés de ces réels.

55 (2). Pourquoi les applications suivantes ne sont-elles pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

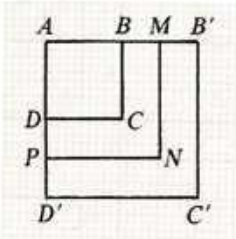
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 3$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 2x + 1$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| - 3$$
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x \ ?$$

56 (2). Le côté du carré *ABCD* mesure 1 (cm). Donner un encadrement, par deux nombres de $\mathbb{D}_3$, de la mesure du côté $[A'B']$ du carré représenté sur la figure :



Indication : On remarquera que $AA' = 3\,AB$; $BB' = 3\,BC$; $CC' = 3\,CD$; $DD' = 3\,AD$.

57 (2). On donne les carrés *ABCD*, *AMNP* et *AB'C'D'* où *B* est le milieu de $[AB']$ et *M* est le milieu de $[BB']$.



Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies.
L'aire du carré *AMNP* est le double de l'aire du carré *ABCD*.
La mesure de l'aire du carré *AMNP* est la moyenne arithmétique de la mesure de l'aire du carré *ABCD* et de la mesure de l'aire du carré *AB'C'D'*

$$\text{mes (aire } AMNP) = \frac{9}{4} \text{ mes (aire } ABCD)$$
$$\text{mes (aire } AMNP) > \frac{3}{4} \text{ mes (aire } AB'C'D')$$
$$\text{mes (aire } AMNP) > \frac{3}{5} \text{ mes (aire } AB'C'D').$$

58 (2). L'aire totale d'un cube d'arête *k* est le double de l'aire totale d'un cube d'arête *m*. Calculer $\frac{k}{m}$.

59 (2). Soit *ABC* un triangle. On désigne par : *a*, *b*, *c* les mesures de ses côtés, h_a, h_b, h_c les mesures des hauteurs correspondantes, *p* son demi-périmètre $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$
Pour calculer la mesure *S* de l'aire de *ABC*, on peut utiliser l'une ou l'autre des égalités suivantes :

$$S = \frac{a \times h_a}{2}$$
$$S = \frac{b \times h_b}{2}$$
$$S = \frac{c \times h_c}{2}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,.$$

On sait que :

1) $a = 5$; $h_a = 4$; calculer S;
2) $a = 3$; $h_a = 4$; $h_b = 5$; calculer b;
3) $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$; calculer S;
4) $a = 3$; $b = 4$; $c = 6$; calculer h_a, h_b et h_c.

Application : On sait que dans un triangle équilatéral, les trois hauteurs ont même mesure. Calculer cette mesure pour un triangle équilatéral dont le côté a pour mesure 3.

60 (2). Kouame recherche trois nombres entiers x, y, z tels que $x = y\frac{5}{3} + z\frac{9}{7}$; il trouve beaucoup de solutions ; en donner cinq.
Kouakou recherche trois nombres entiers x, y, z tels que

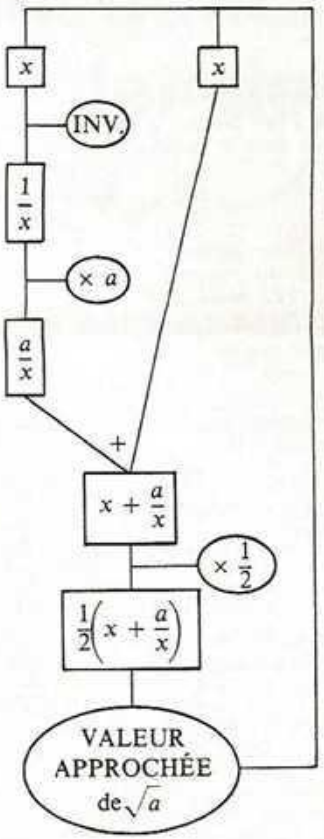
$$x = y\sqrt{2} + z\sqrt{3}.$$

Il a vu que cette égalité était vérifiée en remplaçant x par 0, y par 0 et z par 0. Comme Kouamé avait trouvé beaucoup de solutions à son problème, Kouakou en a recherché d'autres pour le sien, mais sans succès. Pourquoi ?

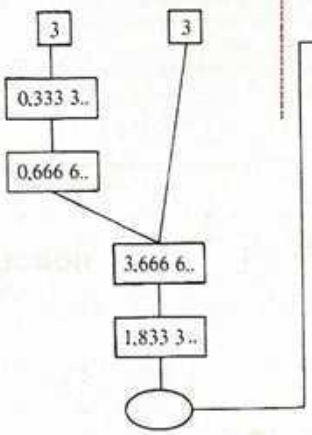
61 (2). *Calcul de valeurs approchées de* $\sqrt{a}$
Voici un programme de calcul qui donne une valeur approchée de $\sqrt{a}$ ($a \in \mathbb{R}^+$). Le nombre x au départ du programme est un réel strictement positif choisi arbitrairement.

En remplaçant x par la première valeur approchée trouvée, on obtient une autre valeur approchée de $\sqrt{a}$, plus précise que la première. En opérant ainsi plusieurs fois de suite on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ de plus en plus précises.

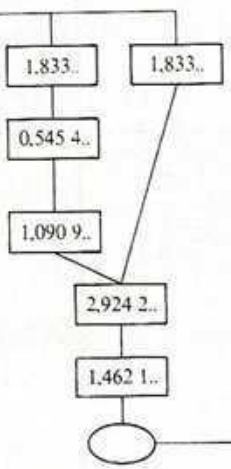
Exemple : Programme de calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$.



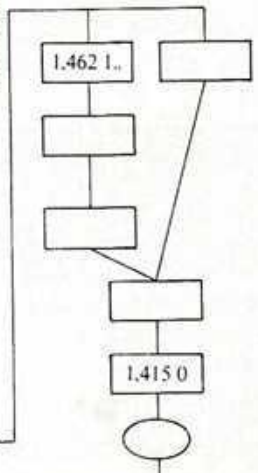
On donne à x la valeur 3.



On donne à x la valeur 1,833.



On donne à x la valeur 1,462 1...



1,415 0

Faire le même calcul en prenant $x = 1{,}5$.

Problèmes

62. Dans un prospectus distribué par une société aérienne américaine, il est indiqué qu'à l'altitude x (en pieds), la vue s'étend au sol sur un disque dont le rayon y exprimé en miles est tel que :

$$y = 1{,}22\sqrt{x}\,.$$

1) A quelle altitude faut-il s'élever pour embrasser du regard un disque de rayon : 40 miles, 122 miles, 244 miles ?

2) Quel est en miles le rayon du disque vu d'une altitude de 1 000 pieds, 2 000 pieds, 10 000 pieds, 36 000 pieds ?
Dresser un tableau regroupant les résultats de la première et seconde question, en donnant des valeurs approchées à 10^{-1} près

$$\sqrt{5} \simeq 2{,}24\,; \quad \sqrt{10} \simeq 3{,}16\,.$$

On donne :

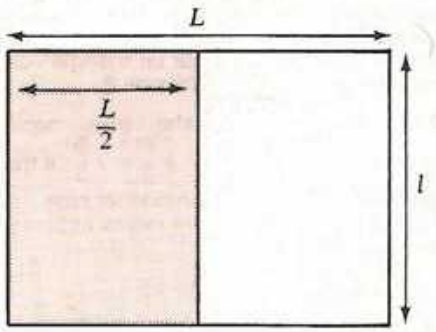
1 mile = 1 760 yards
1 yard = 3 pieds
1 pied = 0,304 8 m

exprimer en km le rayon y du disque vu d'une altitude de x mètres.

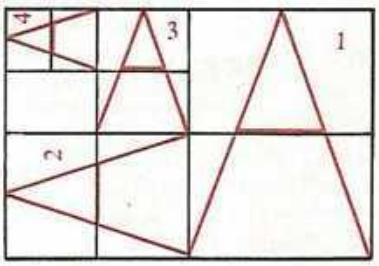
(M. Nansenet,
professeur au Lycée de Dimbokro.)

63. La longueur d'un rectangle a pour mesure L, sa largeur a pour mesure l; si on le coupe en deux comme l'indique la figure, on obtient un rectangle de même forme (c'est-à-dire que le rapport de la mesure de la longueur à la mesure de la largeur est le même pour les deux rectangles). Ce nouveau rectangle est en rouge sur la figure.

Calculer le rapport $\frac{L}{l}$.



Application numérique : L'aire d'une feuille de papier de format A_0 est 1 m^2. Sachant que cette feuille est précisément de la forme ci-dessus, quelles sont ses dimensions ?



En coupant la feuille de format A_0 en deux, on obtient deux feuilles de format A_1. En coupant celles-ci en deux, on obtient quatre feuilles de format A_2, etc...
Quelles sont les dimensions de la feuille de format A_4 ?

4 Equations et inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Leçon 1 : ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Leçon 2 : SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Leçon 3 : INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$





Koffi demande au receveur des P et T pour 1 500 F de timbres à 50 F et 60 F.
Combien de timbres de chaque sorte le receveur peut-il remettre à Koffi ?

$$50x + 60y = 1\,500$$

1 Equations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Introduction

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto 2x - 3y + 5.$$

Remarque. L'image par f de (x, y) doit être notée normalement $f((x, y))$. Pour simplifier, on notera : $f(x, y)$.

Calculons les images par f des couples $(-2; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

On a : $f(x, y) = 2x - 3y + 5$

$f(-2; 1) = 2 \times (-2) - 3 \times 1 + 5$; $\quad f(-2; 1) = -2$

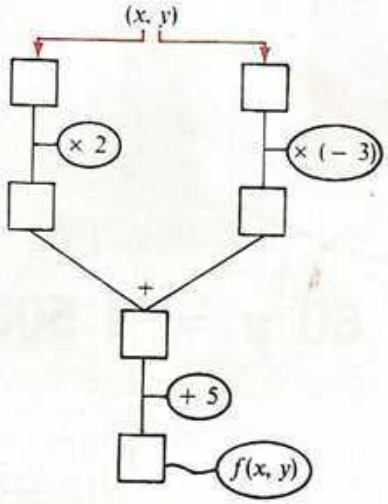
$f\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right) + 5$; $\quad f\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) = \frac{41}{12}$.

Calculer les images par f des couples $(1 ; -2)$; $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$; $(0 ; 4)$.

Le tableau suivant donne les images par f de dix couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	(x, y)	$(-1 ; 3)$	$(-2 ; 2)$	$(2 ; 5)$	$(3 ; 0)$	$(4 ; 1)$	$(4 ; -1)$	$(1 ; -1)$	$(1 ; -2)$	$(-2 ; -2)$	$(-2 ; -3$
$\downarrow$											
$\mathbb{R}$	$f(x, y)$	-6	-5	-6	11	10	16	10	13	7	10

Pour calculer les images par f de couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il suffit d'appliquer le schéma de calcul suivant :



2) Equations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Existe-t-il un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ayant pour image par l'application f un nombre réel donné ?
S'il existe, comment le calculer ?
Reprendre le tableau précédent et trouver des couples qui ont pour image 10 par f.

$$f(4; 1) = 10 \qquad f(1; -1) = 10 \qquad f(-2; -3) = 10\,.$$

Y a-t-il d'autres couples que $(4 ; 1)$, $(1 ; -1)$ et $(-2 ; -3)$ tels que $f(x, y) = 10$?
Le problème revient à trouver des couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tels que $2x - 3y + 5 = 10$.

Vocabulaire :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad 2x - 3y + 5 = 10$$

est une *équation du premier degré dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou équation du premier degré à deux inconnues).

— Le couple $(-8 ; -7)$ *vérifie* cette équation, en effet :

$$2 \times (-8) - 3 \times (-7) + 5 = 10 \qquad \text{est une phrase vraie .}$$

— Le couple $(1 ; 2)$ *ne vérifie pas* cette équation, en effet :

$$2 \times 1 - 3 \times 2 + 5 = 10 \qquad \text{est une phrase fausse .}$$

— Tout couple qui vérifie cette équation est appelé *solution de l'équation.*

Rappel 1. Comme pour les équations à une inconnue,

il ne faut pas confondre :

Trouver une solution d'une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	Résoudre une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
c'est-à-dire, trouver un couple qui vérifie cette équation sans pouvoir dire s'il y en a d'autres.	c'est-à-dire, trouver l'ensemble de toutes les solutions de cette équation. Cet ensemble est souvent noté S.

Rappel 2. Comme pour les équations à une inconnue.on dira que deux équations sont équivalentes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

(Égalité, +) et (Égalité, ×)

permettent de transformer une équation E_1 en une équation E_2 qui lui est équivalente dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) **Définition :**

> **a, b, c étant des réels donnés, l'équation**
>
> $$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad ax + by + c = 0$$
>
> **est appelée** équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarque. Nous dirons que l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad 3x + 5y - 2 = 7x + 2y + 3,$$

équivalente à l'équation

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -4x + 3y - 5 = 0,$

est aussi une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

En effet :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$3x + 5y - 2 = 7x + 2y + 3$

Eg. +

$(3x + 5y - 2) - (7x + 2y + 3) = 0$

$-4x + 3y - 5 = 0$

b) **Comment trouver des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?**

Considérer l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 4x + 3y - 9 = 0 \qquad (E_1)$$

① Le couple $(3 ; -1)$ est-il une solution de (E_1) ? Et le couple $(-1 ; 3)$?

② Existe-t-il un couple solution de l'équation (E_1) ayant pour première composante 2, c'est-à-dire de la forme $(2, y)$?

Si un tel couple existe, sa deuxième composante est solution de l'équation à une inconnue : $y \in \mathbb{R}, 4 \times 2 + 3y - 9 = 0$.

Résolvons cette équation : $3y - 1 = 0$.

Elle a pour solution $\frac{1}{3}$.

Si l'équation (E_1) admet un couple solution ayant pour première composante 2, ce couple ne peut être que $\left(2 ; \frac{1}{3}\right)$. Remplaçons x par 2 et y par $\frac{1}{3}$ dans (E_1).

$4 \times 2 + 3 \times \frac{1}{3} - 9 = 0$ est une phrase vraie, donc $\left(2 ; \frac{1}{3}\right)$ est une solution de (E_1).

C'est d'ailleurs l'unique solution ayant pour première composante 2 ; pourquoi ?

③ Montrer de même que l'équation (E_1) admet un couple solution ayant pour seconde composante 7.

Exercices

1) Trouver un couple de la forme $(-1, y)$ qui soit solution de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -2x + y + 4 = 0.$$

Même question pour les couples : $(3, y)$; $(x, -2)$; $(x, 3)$.

2) Pour aider le receveur des P et T à répondre au problème de Koffi, trouver trois couples de naturels solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 50x + 60y = 1\,500.$$

c) **Autres méthodes pour trouver des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.**

Reprenons l'équation (E_1). Voici deux techniques souvent efficaces.

① « *Écrire y en fonction de x* ».

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x + 3y - 9 = 0$

Eg. +

$3y = 9 - 4x$

Eg. ×

$y = \dfrac{9 - 4x}{3}$

L'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y = \dfrac{9 - 4x}{3}$ (E_2)

obtenue par application de (Eg. +) et (Eg. ×) est équivalente à l'équation (E_1).

r désignant un réel quelconque, on voit que le couple $\left(r, \dfrac{9 - 4r}{3}\right)$ est une solution de l'équation (E_2), ce couple est donc aussi une solution de l'équation (E_1). Vérifier.

L'ensemble des solutions de (E_1) est l'ensemble des couples $\left(r, \dfrac{9 - 4r}{3}\right)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

② « *Écrire x en fonction de y* ».

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x + 3y - 9 = 0$

Eg. +

$4x = 9 - 3y$

Eg. ×

$x = \dfrac{9 - 3y}{4}$

L'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x = \dfrac{9 - 3y}{4}$ (E_3)

obtenue par application de (Eg. +) et (Eg. ×) est équivalente à l'équation (E_1).

s désignant un réel quelconque, on voit que le couple $\left(\dfrac{9 - 3s}{4}, s\right)$ est une solution de l'équation (E_3), ce couple est donc aussi une solution de l'équation (E_1). Vérifier.

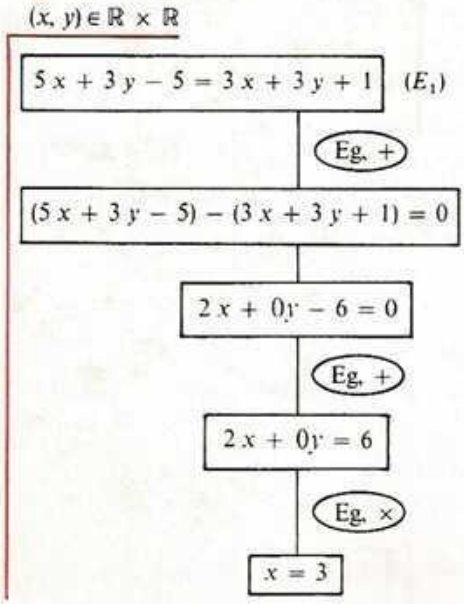
L'ensemble des solutions de (E_1) est donc aussi l'ensemble des couples $\left(\frac{9-3s}{4}, s\right)$ où s décrit $\mathbb{R}$.

Exercice Trouver dix couples solutions de chacune des équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivantes :

$$3x + 2y - 1 = 0;$$

$$\frac{1}{2}x - 2y + 3 = 0; \qquad -4x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0.$$

d) **Deux équations particulières.**



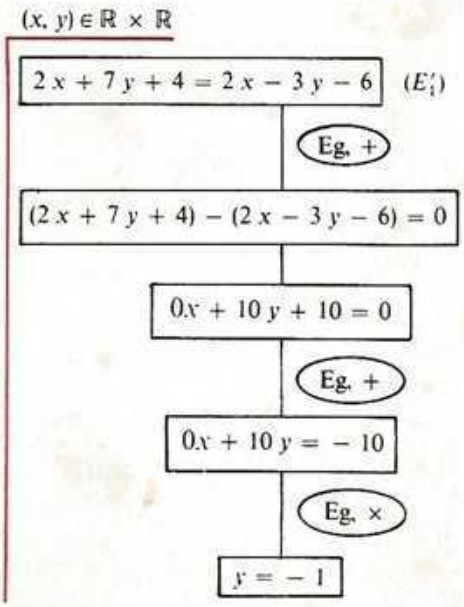
r désignant un réel, tout couple $(3; r)$ est une solution de l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad x = 3$$

équivalente à (E_1). On vérifiera que

$$S = \{3\} \times \mathbb{R}.$$

Donner cinq couples solutions de l'équation (E_1).



s désignant un réel, tout couple $(s; -1)$ est une solution de l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad y = -1$$

équivalente à (E'_1). On vérifiera que

$$S = \mathbb{R} \times \{-1\}.$$

Donner cinq couples solutions de l'équation (E'_1).

Exercice Résoudre les équations suivantes :

① $x \in \mathbb{R}$, $7x + 4 = 0$ ② $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $7x + 4 = 0$

③ $y \in \mathbb{R}$, $-\frac{3}{4}y + 7 = 0$. ④ $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $-\frac{3}{4}y + 7 = 0$.

e) **Représentation graphique.**

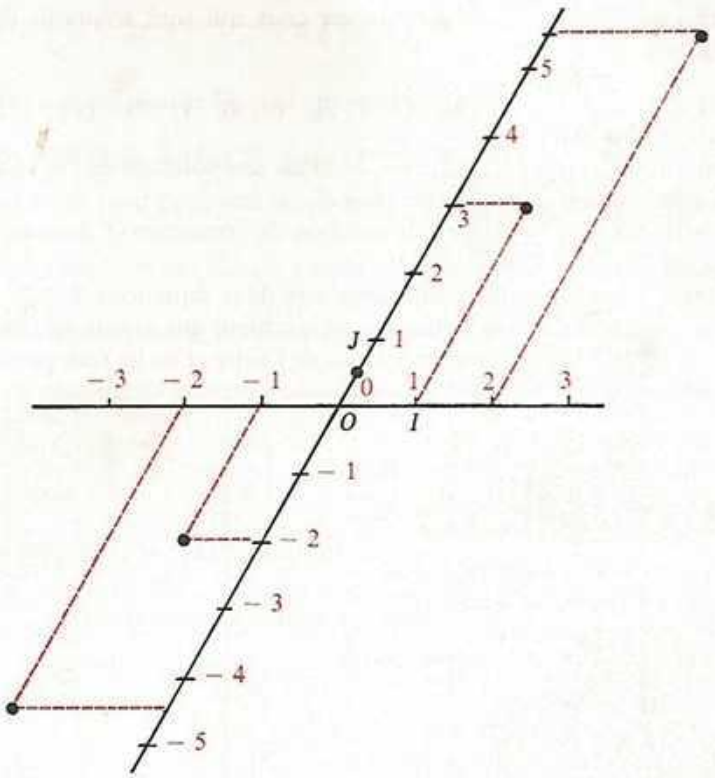
Dans le chapitre 2 nous avons vu que tout sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pouvait être représenté par un sous-ensemble de $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).
Voici quelques couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(1\,;3)\,; \quad \left(-2\,;-\frac{9}{2}\right); \quad (-1\,;-2)\,; \quad \left(0\,;\frac{1}{2}\right); \quad \left(2\,;\frac{11}{2}\right); \quad (3\,;8)\,.$$

Vérifier que ce sont des solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ 5x - 2y + 1 = 0\,.$$

Les représenter dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J).



La leçon 3 du chapitre 4 de géométrie nous permet de donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues.
La représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $5x - 2y + 1 = 0$ est la droite passant par le point $A(1\,;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

2 Systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Introduction

Considérons les deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$3x - 2y + 7 = 0 \quad (E_1)$$
$$4x + 3y - 1 = 0 \quad (E_2).$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (E_1)
et S_2 l'ensemble des solutions de (E_2).
Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de (E_1) ; ceux qui sont solutions de (E_2) :

$$(-3;-1),\ (-2;3),\ (-1;2),\ (0;4),\ (1;5),\ (1;-1),\ (3;4),\ (3;8).$$

Remarquons : $(-1;2) \in S_1$; $(-1;2)$ est une solution de l'équation (E_1) ; mais ce n'est pas une solution de l'équation (E_2).
$(1;-1) \in S_2$; $(1;-1)$ est une solution de l'équation (E_2) ; mais ce n'est pas une solution de l'équation (E_1).
Existe-t-il des solutions communes aux deux équations ?
Pour indiquer que l'on s'intéresse uniquement aux solutions communes à (E_1) et (E_2), on écrit les équations l'une en dessous de l'autre et on les relie par une accolade.
On obtient un *système de deux équations* du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Trouver l'ensemble $S_1 \cap S_2$ des solutions de (E_1) **et** (E_2), c'est *résoudre le système* de ces deux équations.
Comme pour les équations, nous dirons que les deux systèmes

$$\text{I. } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$\text{II. } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} px + qy + r = 0 \\ p'x + q'y + r' = 0 \end{cases}$$

sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

2) Résolvons d'abord un système simple

Résoudre

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 3x - 2 = 0 & (E_1) \\ 2x - y + 6 = 0 & (E_2). \end{cases}$$

Résolvons (E_1) :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$3x - 2 = 0$

Eq. +

$3x = 2$

Eq. ×

$x = \frac{2}{3}$

L'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $3x - 2 = 0$ a pour ensemble de solutions $\left\{\frac{2}{3}\right\} \times \mathbb{R}$.

C'est l'ensemble des couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ont pour première composante $\frac{2}{3}$.

Toute solution commune à (E_1) et (E_2), c'est-à-dire toute solution du système doit nécessairement avoir pour première composante $\frac{2}{3}$.

Calculons donc la solution de (E_2) qui a pour première composante $\frac{2}{3}$; nous savons que la deuxième composante est la solution de l'équation $y \in \mathbb{R}$, $2 \times \frac{2}{3} - y + 6 = 0$.

$y \in \mathbb{R}$

$2 \times \frac{2}{3} - y + 6 = 0$

$\frac{22}{3} - y = 0$

Eq. +

$\frac{22}{3} = y$

Donc toute solution commune aux équations (E_1) et (E_2) a pour première composante $\frac{2}{3}$ et pour deuxième composante $\frac{22}{3}$. Le couple $\left(\frac{2}{3}; \frac{22}{3}\right)$ est la seule solution du système.

Exercice Résoudre le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

3) Résolvons un système plus général

Résoudre

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 & (E_1) \\ 4x + 3y - 1 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

1re *équation* :

Écrivons y en fonction de x :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$3x - 2y + 7 = 0$

Eg. +

$3x + 7 = 2y$

Eg. ×

$\frac{3x + 7}{2} = y$

Tout couple solution de (E_1) est de la forme $\left(r, \frac{3r + 7}{2}\right)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

2e *équation* :

Écrivons y en fonction de x :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x + 3y - 1 = 0$

Eg. +

$4x - 1 = -3y$

Eg. ×

$-\frac{4x - 1}{3} = y$

Tout couple solution de (E_2) est de la forme $\left(r, -\frac{4r - 1}{3}\right)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

Forme générale des couples solutions de (E_1) :

$$\left(r, \frac{3r + 7}{2}\right).$$

Forme générale des couples solutions de (E_2) :

$$\left(r, -\frac{4r - 1}{3}\right).$$

En comparant ces deux couples, il apparaît que, pour qu'une solution soit commune aux deux équations, le réel r doit être tel que

$$\frac{3r+7}{2} = -\frac{4r-1}{3}.$$

On résout cette équation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$; elle a pour solution $-\frac{19}{17}$.

Le couple solution de (E_1) ayant pour première composante $-\frac{19}{17}$ a pour deuxième composante $\frac{3\left(-\frac{19}{17}\right)+7}{2}$ c'est-à-dire $\frac{31}{17}$.

Le couple solution de (E_2) ayant pour première composante $-\frac{19}{17}$ a pour deuxième composante $-\frac{4\left(-\frac{19}{17}\right)-1}{3}$; c'est évidemment $\frac{31}{17}$.

En conclusion, nous pouvons affirmer que le couple $\left(-\frac{19}{17}; \frac{31}{17}\right)$ est l'unique solution du système.

$$S = \left\{\left(-\frac{19}{17}; \frac{31}{17}\right)\right\}.$$

Remarque. Pouvait-on prévoir que le système étudié avait une solution unique ?
Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère (O, I, J), les équations (E_1) et (E_2) sont des équations de droites ; pourquoi ?
Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune de ces droites.
Les deux vecteurs obtenus ont-ils même direction ?
En déduire que les deux droites sont sécantes en un point P et donc que le système proposé a une solution unique : le couple des coordonnées de P.

Exercice En utilisant la remarque précédente, indiquer, parmi les systèmes suivants, ceux qui ont une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 6x + 4y - 12 = 0 \\ 9x + 6y - 18 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -6x + 3y + 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 2x + 5y - 11 = 0 \end{cases}.$$

4) Deux méthodes de résolution des systèmes

a) **Méthode de substitution.**

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 & (E_1) \\ 2x + 5y - 11 = 0 & (F_1) \end{cases}$$

Ce système a une solution unique.
Pourquoi ?

L'équation (F_2), $x = \dfrac{-5y + 11}{2}$ obtenue en écrivant x en fonction de y est équivalente à (F_1).
Le système formé des équations (E_1) et (F_2) est évidemment équivalent au système donné.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 & (E_1) \\ x = \dfrac{-5y + 11}{2} & (F_2) \end{cases}$$

On substitue $\dfrac{-5y + 11}{2}$ à x dans (E_1).

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{-5y + 11}{2}\right) - 4y - 5 = 0 & (E_2) \\ x = \dfrac{-5y + 11}{2} & (F_2) \end{cases}$$

L'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$3\left(\frac{-5y + 11}{2}\right) - 4y - 5 = 0$$

n'est pas équivalente à l'équation

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad 3x - 4y - 5 = 0$.

Justifier.

On obtient un nouveau système de la forme des systèmes rencontrés au paragraphe 2. Mais on ne peut pas affirmer qu'il est équivalent au système donné. Résolvons néanmoins ce système.

$$\begin{cases} -15y + 33 - 8y - 10 = 0 & (E_3) \\ x = \dfrac{-5y + 11}{2} & (F_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23y = 23 & (E_4) \\ x = \dfrac{-5y + 11}{2} & (F_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 & (E_5) \\ x = \dfrac{-5y + 11}{2} & (F_2) \end{cases}$$

on remplace y par 1 dans (F_2)

$$\begin{cases} y = 1 & (E_5) \\ x = 3. & (F_3) \end{cases}$$

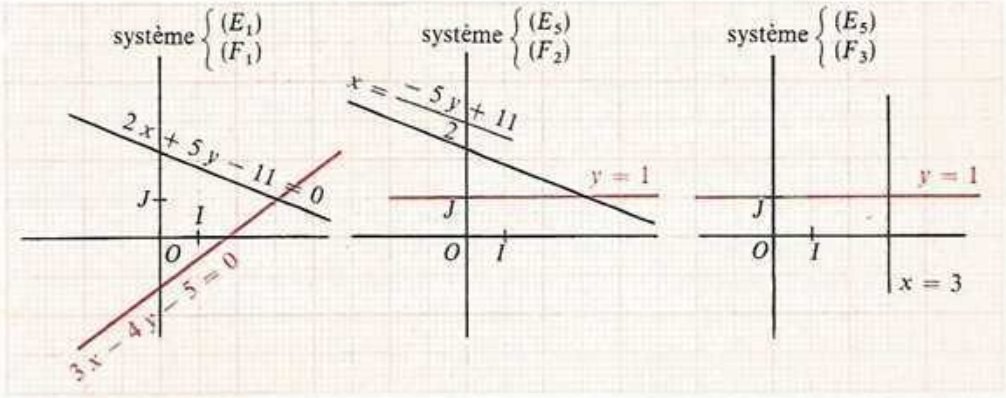
La solution de ce système est le couple (3 ; 1),
Ce couple est-il la solution du système donné ?
Vérifions

$$\begin{cases} 3 \times 3 - 4 \times 1 - 5 = 0 \\ 2 \times 3 + 5 \times 1 - 11 = 0. \end{cases}$$

Conclusion : Le couple (3 ; 1) est la solution du système donné

$$S = \{(3 ; 1)\}.$$

Illustration graphique



b) **Méthode par combinaison.**

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 & (E_1) \\ 3x + 7y + 5 = 0 & (F_1) \end{cases}$$

Ce système a-t-il une solution unique ? Justifier.

Multiplions les deux membres de (E_1) par le coefficient de x dans (F_1).
Multiplions les deux membres de (F_1) par l'opposé du coefficient de x dans (E_1).

$$\begin{cases} 12x + 15y - 6 = 0 & (E_2) \\ -12x - 28y - 20 = 0 & (F_2) \end{cases}$$

Ce système est équivalent au premier système. Pourquoi ?
Par addition membre à membre de ces deux équations, nous obtenons une nouvelle équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -13y - 26 = 0 \quad (A_1)$$

Multiplions les deux membres de (E_1) par le coefficient de y dans (F_1).
Multiplions les deux membres de (F_1) par l'opposé du coefficient de y dans (E_1).

$$\begin{cases} 28x + 35y - 14 = 0 & (E_3) \\ -15x - 35y - 25 = 0 & (F_3) \end{cases}$$

Ce système est équivalent au premier système. Pourquoi ?
Par addition membre à membre de ces deux équations, nous obtenons une nouvelle équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 13x - 39 = 0 \quad (B_1)$$

En regroupant les équations (A_1) et (B_1) on obtient un nouveau système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \begin{cases} -13y - 26 = 0 & (A_1) \\ 13x - 39 = 0. & (B_1) \end{cases}$$

Mais on ne peut affirmer qu'il est équivalent au système donné. Résolvons néanmoins ce système

$$\begin{cases} y = -2 & (A_2) \\ x = 3. & (B_2) \end{cases}$$

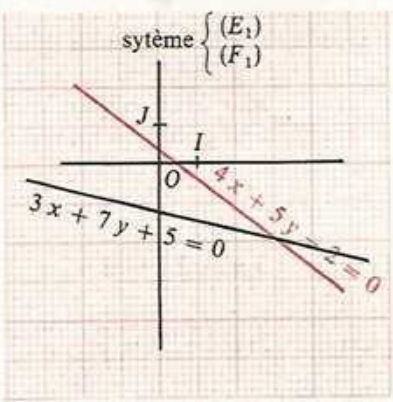
La solution de ce dernier système est $(3 ; -2)$.
Ce couple est-il solution du système donné ?
Vérifions :

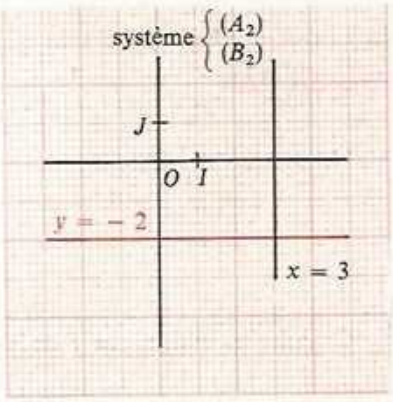
$$\begin{cases} 4 \times 3 + 5 \times (-2) - 2 = 0 \\ 3 \times 3 + 7 \times (-2) + 5 = 0. \end{cases}$$

Conclusion : Le couple $(3 ; -2)$ est la solution du système donné.

$$S = \{(3 ; -2)\}.$$

Illustration graphique





Disposition pratique de la résolution par combinaison :

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \times 3 \\ \times (-4) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 12x + 15y - 6 = 0 \\ -12x - 28y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$-13y - 26 = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \times 7 \\ \times (-5) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 28x + 35y - 14 = 0 \\ -15x - 35y - 25 = 0 \end{cases}$$

$$13x - 39 = 0$$

$$\begin{cases} -13y - 26 = 0 \\ 13x - 39 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

vérification : $\begin{cases} 4 \times 3 + 5 \times (-2) - 2 = 0 \\ 3 \times 3 + 7 \times (-2) + 5 = 0 \end{cases}$

$$S = \{(3; -2)\}.$$

Exercices

1) Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, résoudre le système précédent par la méthode de substitution.

2) Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, résoudre par combinaison :

$$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 2x + 5y - 11 = 0. \end{cases}$$

3) Le receveur a remis à Koffi 28 timbres.
Parmi ces timbres, combien y en a-t-il à 50 F et à 60 F (voir page 75) ?

3 Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Introduction

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto 5x - 2y + 3$$

Calculer les images par f des couples $(-1 ; 3)$ et $\left(\frac{1}{5} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Soit $E = \{-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Le tableau suivant donne les images des éléments de $E \times E$ par l'application f.

$y \backslash x$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
4	−25	−20	−15	−10	−5	0	5	10	15
3	−23	−18	−13	−8	−3	2	7	12	17
2	−21	−16	−11	−6	−1	4	9	14	19
1	−19	−14	−9	−4	1	6	11	16	21
0	−17	−12	−7	−2	3	8	13	18	23
−1	−15	−10	−5	0	5	10	15	20	25
−2	−13	−8	−3	2	7	12	17	22	27
−3	−11	−6	−1	4	9	14	19	24	29
−4	−9	−4	1	6	11	16	21	26	31

Exemples

$$f(-3 ; -1) = -10 \qquad f(2 ; 1) = 11 .$$

Ces deux exemples montrent comment utiliser ce tableau.

— Vérifier par le calcul que -10 est l'image de $(-3 ; -1)$ par f.
— A l'aide du tableau donner $f(-4 ; -4)$; $f(-2 ; 3)$; $f(-3 ; -1)$; $f(0 ; 0)$.
— Quels sont les couples de $E \times E$ qui ont pour image 2 ?
— Quels sont les couples de $E \times E$ solutions de l'équation :

$$5x - 2y + 3 = 0 \ ?$$

— Remarquer que les couples $(3 ; -4)$; $(4 ; -4)$; $(4 ; -3)$; $(0 ; -3)$; $(2 ; -1)$; $(4 ; -2)$; $(-1 ; -4)$; $(0 ; -2)$; $(1 ; 1)$; $(2 ; 3)$... ont une image supérieure ou égale à 6.

2) Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

A l'aide du tableau, trouver des couples dont l'image par f est strictement négative.
Colorier en rouge sur le tableau les cases qui contiennent une image strictement négative.
Y a-t-il d'autres couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont l'image par f est strictement négative ?
Ce problème revient à trouver des couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que :

$$5x - 2y + 3 < 0.$$

Vocabulaire :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 5x - 2y + 3 < 0$$

est une *inéquation du premier degré dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou inéquation du premier degré à deux inconnues).

— Le couple $(-5; 2)$ *vérifie* cette inéquation, en effet :

$5 \times (-5) - 2 \times 2 + 3 < 0$ est une phrase vraie.

— Le couple $(5; -2)$ *ne vérifie pas* cette inéquation, en effet :

$5 \times 5 - 2 \times (-2) + 3 < 0$ est une phrase fausse.

Tout couple qui vérifie cette inéquation est appelé *solution de l'inéquation.*

Rappel 1 :

Il ne faut pas confondre :

Trouver une solution d'une inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
c'est-à-dire, trouver un couple qui vérifie cette inéquation sans pouvoir dire s'il y en a d'autres.	c'est-à-dire, trouver l'ensemble de toutes les solutions de cette inéquation. Cet ensemble est souvent noté S.

Rappel 2 : Comme pour les inéquations à une inconnue, on dira que deux inéquations sont équivalentes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions

ORDRE, $+$ — ORDRE, $\times$ $k > 0$ — ORDRE, $\times$ $k < 0$

permettent de transformer une inéquation (I_1) en une inéquation (I_2) qui lui est équivalente dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les inéquations suivantes sont équivalentes.

$$4x - 5y + 6 \leqslant 0 \qquad (I_1)$$

$$\frac{5}{2}y - 3 \geqslant 2x \qquad (I_2)$$

Justifier.

a) **Définition.**

a, b, c étant des réels donnés, les inéquations

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c < 0$$
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c > 0$$
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c \leqslant 0$$
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by + c \geqslant 0$$

sont appelées inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarque. Nous dirons que l'inéquation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 4x - 2y \geqslant 5y - 3,$$

équivalente à l'inéquation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 4x - 7y + 3 \geqslant 0,$$

est aussi une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

En effet :

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x - 2y \geqslant 5y - 3$

ORDRE, +

$(4x - 2y) - (5y - 3) \geqslant 0$

$4x - 7y + 3 \geqslant 0$

b) **Comment trouver des solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?**

Considérons l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 4x + 3y - 9 \geqslant 0. \qquad (I_1)$$

① Le couple $(-2; 1)$ est-il une solution de (I_1) ? Et le couple $(4; -1)$?

② Existe-t-il un couple solution de l'inéquation (I_1) dont la première composante soit 3 ?

Si un tel couple existe, sa deuxième composante est solution de l'inéquation à une inconnue : $y \in \mathbb{R}$, $4 \times 3 + 3y - 9 \geqslant 0$.
Résolvons cette inéquation

$$3y + 3 \geqslant 0$$
$$y \geqslant -1.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle d'origine -1 fermé en -1,

$$[-1, \rightarrow[.$$

L'ensemble des couples ayant pour première composante 3 et pour seconde composante un nombre supérieur ou égal à -1 est le produit cartésien : $\{3\} \times [-1, \rightarrow[$.
Voici quatre couples de $\{3\} \times [-1, \rightarrow[$:

$$(3; -0{,}5); \quad (3; \sqrt{2}); \quad \left(3; \frac{7}{3}\right); \quad (3; 1\,000).$$

Vérifier qu'ils sont solutions de l'inéquation (I_1).
On peut montrer que $\{3\} \times [-1, \rightarrow[$ est une partie de l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1).
C'est l'ensemble des solutions de (I_1) qui ont pour première composante 3.

Exercice

Trouver l'ensemble des solutions de (I_1) qui ont pour première composante -2.
Trouver l'ensemble des solutions de (I_1) qui ont pour deuxième composante -5.
Représenter ces deux ensembles dans le plan muni du repère (O, I, J).

Conclusion : Étant donné une inéquation du premier degré à deux inconnues il est possible de :

— déterminer l'ensemble des couples solutions de cette inéquation ayant pour première composante un réel r donné ;
— déterminer l'ensemble des couples solutions de cette inéquation ayant pour deuxième composante un réel s donné.

Le « régionnement du plan » permet de donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Exemple

Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 2x + y - 5 > 0 .$$

1. Dans le plan muni du repère (O, I, J) on trace la droite (Δ) d'équation

$$2x + y - 5 = 0 .$$

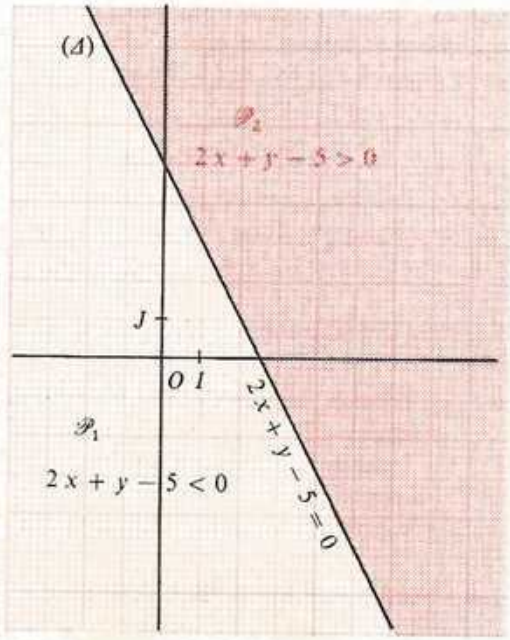
Le point O n'appartient pas à (Δ). Pourquoi ?
On appelle $\mathscr{P}_1$ le demi-plan ouvert de bord (Δ) contenant O et $\mathscr{P}_2$ l'autre demi-plan ouvert de bord (Δ).

2. Les coordonnées du point O vérifient-elles l'inéquation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 2x + y - 5 > 0 \ ?$$

Non, car $2 \times 0 + 0 - 5$ est un nombre négatif.

D'après l'énoncé relatif au régionnement du plan (Géométrie, chap. 4, leçon 4, paragraphe 2), tous les points de $\mathscr{P}_1$ ont des coordonnées qui vérifient $2x + y - 5 < 0$.



3. L'ensemble des couples qui vérifient $2x + y - 5 > 0$ est donc l'ensemble des couples de coordonnées des points du demi-plan $\mathscr{P}_2$.

Exercices

Calculer

1 (1). On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x + y + 1 .$$

Compléter le tableau :

(x, y)	$(-3; -5)$	$(1; 3)$	$(-2; 2)$	$(0; 4)$	$(3; -3)$	$(4; 0)$	$(5; -2)$	$(5; -5)$	$(0; 0)$	$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$
$f(x, y)$										

A l'aide du tableau, donner des couples qui ont pour image 5 par f. Donner d'autres couples qui ont pour image 5 par f.
A l'aide du tableau, donner des couples qui ont pour image 1 par f. Donner d'autres couples qui ont pour image 1 par f.
Montrer que, quel que soit a élément de $\mathbb{R}$, $f(a, -a) = 1$.

2 (1). On considère l'application

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto 5x - 3y - 4 .$$

Compléter le tableau :

(x, y)	$\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$	$(-2; -1)$	$\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$	$(0; 0)$	$(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$	$\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	$(-2; -4)$
$g(x, y)$							

3 (1). Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui sont solutions de l'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $3x - 4y + 2 = 0$:

$(-3; -1)$, $(0; 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$,

$(5{,}5; 3)$, $(-4; 2{,}5)$, $(2; 1{,}5)$, $\left(1; \frac{5}{3}\right)$

$\left(\frac{1}{4}; \frac{11}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right)$, $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$,

$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, $(-1; -\sqrt{2})$,

$\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2} + 2}{4}\right)$?

4 (1). Trouver trois couples solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de :

a) $xy = 7$
b) $|x| + |y| = 12$
c) $|x - y| = 5$
d) $|x| + |y| < 1$
e) $|x - 2| + |y - 3| = 1$
f) $x^2 + y^2 = 1$.

5 (1). Trouver le réel p tel que le couple $(0, p)$ soit solution de l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 5x - 3y + 4 = 0 .$$

6 (1). Trouver le réel m tel que le couple $(m, 0)$ soit solution de l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 5x - 3y + 4 = 0 .$$

7 (1). Trouver les réels a, b, c, d tels que les couples $\left(a, \frac{1}{2}\right)$; $(-4, b)$; $\left(-\frac{3}{5}, c\right)$ et $\left(\frac{1}{4}, d\right)$ soient solutions de l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + \frac{5}{2} = 0,$$

8 (1). On donne l'équation (E) :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x - 2y + 6 = 0 .$$

a) Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui sont solutions de (E) :

$(0; 1)$; $(-2; 0)$; $(2; 6)$?

b) Quel est le couple solution de (E) ayant pour première composante $\frac{1}{3}$?

c) Trouver un autre couple solution de (E).

9 (1). On donne l'équation (E_1) :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y + \frac{7}{15} = 0.$$

a) En utilisant la propriété (Eg. ×) donner trois équations équivalentes à l'équation (E_1).
b) En utilisant la propriété (Eg. +) donner trois équations équivalentes à (E_1).

10 (1). On donne l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0.$$

a) Écrire x en fonction de y.
b) Écrire y en fonction de x.
c) Trouver cinq couples solutions de cette équation.

11 (1). Voici cinq équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour chacune d'elles, écrire y en fonction de x et trouver cinq couples solutions.

a) $-5x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0$;

b) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y - 2 = 0$;

c) $3x - 4y + 5 = 7x + 2y - 3$;

d) $-\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + 4$;

e) $\frac{3}{5}x - \frac{2}{7}y + \frac{5}{4} = x + y - \frac{2}{5}x + 1$.

12 (1). Représenter dans un repère (O, I, J) les solutions des équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivantes :

a) $3x - 2y + 1 = 0$;
b) $\frac{1}{2}x + 5y - 4 = 0$;
c) $x + y = 0$;
d) $x - y = 0$;
e) $3y - 2 = 0$;
f) $5x + 3 = 0$.

13 (2). Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on donne les équations

$$(E_1) : 2x - y - 3 = 0$$

et

$$(E_2) : 7x - 2y - 12 = 0.$$

Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de (E_1) ; ceux qui sont solutions de (E_2) ; ceux qui sont solutions à la fois de (E_1) et (E_2) :

$(4; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; $\left(3; \frac{9}{2}\right)$; $(3; 3)$;
$(1{,}5; 0)$; $(0; -6)$; $(2; 1)$; $(5; 7)$;
$\left(1; -\frac{5}{2}\right)$; $(1; -1)$.

Représenter ensuite graphiquement l'ensemble des solutions de (E_1) et l'ensemble des solutions de (E_2) dans un repère (O, I, J).
Retrouver graphiquement la solution du système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 7x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

14 (2). Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 4x - 5 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 6 = 3 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y + 4 = 0 \\ 3x + 4 = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4x - 3}{5} \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 1 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 1 - 5y = 4 \\ x + y = 2. \end{cases}$

15 (2). Sans résoudre les systèmes suivants, indiquer ceux qui ont une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 12x + 9y + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y - 4 = 0 \\ \frac{3}{2}x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 4y - 3 = 0 \\ -x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$

16 (2). Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants; puis vérifier graphiquement :

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -2x + 10y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 1 \\ \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\frac{2}{3}(x + y) + \frac{3}{5}(x - y) - 1 = 0 \\ \frac{1}{4}(x + y) - \frac{2}{3}(x - y) - 1 = 0. \end{cases}$

17 (2). Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 4 = 0 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-4}{5} = -\frac{1}{3} \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y-1}{2} = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y + y = 0 \\ 2\sqrt{5}x + \sqrt{45}y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 7\sqrt{2} = 0 \\ -x + y + 2 = 0. \end{cases}$

18 (2). Voici deux équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

(E_1) $\quad 3x + 4y - 2 = 0$

(E_2) $\quad \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{4}{5} = 0.$

Nous affirmons que toute solution de (E_1) est solution de (E_2). Pourquoi ? Trouver cinq solutions du système $\begin{cases} (E_1) \\ (E_2) \end{cases}$.

19 (2). Utiliser la méthode de substitution pour résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 7x - 3y - 27 = 0 \\ 5x - 6y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 6 - y \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ 12x - 9y - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 8 \\ -x - 3y = 2. \end{cases}$

20 (2). Utiliser la méthode de combinaison pour résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 21 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x - 7y + 2 = 0 \\ 8x + 21y - 50 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7y - 5x = 17 \\ 3x + y - 21 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 21x + 8y + 66 = 0 \\ 28x - 23y - 13 = 0. \end{cases}$

21 (2). Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants, graphiquement et algébriquement :

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -3x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{3} + y = 5 \\ x + \frac{y}{3} = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}3 - 0{,}5y = 3 \\ -0{,}3x + 0{,}3y = 2{,}1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1{,}5x + y - 6 = 0 \\ -x - 1{,}5y - 6 = 0. \end{cases}$

22 (2). Montrer à l'aide d'une représentation graphique que les systèmes suivants n'ont pas de solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ x + \frac{4}{3}y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \\ 6x + 10y + 2 = 0. \end{cases}$

23 (2). Sur du papier millimétré ou du papier « petits carreaux », construire un repère (O, I, J) en prenant $\frac{1}{2}$ cm comme unité.

a) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 50x + 60y = 1\,500.$$

Lire sur le graphique les solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad 50x + 60y = 1\,500.$$

Donner en extension l'ensemble de ces solutions.

b) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + y = 28.$$

Lire sur le graphique les solutions de l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x + y = 28.$$

Donner en extension l'ensemble de ces solutions.

c) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions du système :

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \begin{cases} 50x + 60y = 1\,500 \\ x + y = 28. \end{cases}$$

d) Vérifier la réponse précédente en résolvant algébriquement le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 50x + 60y = 1\,500 \\ x + y = 28. \end{cases}$$

24 (3). On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto -3x + 2y - 1.$$

Soit $E = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$.

Compléter le tableau qui suit à l'aide des images par f des couples de $E \times E$.

2							
$\frac{3}{2}$							
1							
$\frac{1}{2}$							
0							
$-\frac{1}{2}$							
-1							
y \ x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

Quels sont les couples de $E \times E$ qui ont pour image 0 ?

Quels sont les couples de $E \times E$ qui ont pour image $-\frac{3}{2}$?

A l'aide du tableau trouver les couples de $E \times E$ qui ont une image strictement positive. Y a-t-il d'autres couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ont une image strictement positive par f ? Si oui, en donner deux.

25 (3). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}x - 3y + 4 \geqslant 0.$$

Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'inéquation donnée :

$$(2; 1); \quad (3; -5); \quad (-1; -1);$$
$$\left(1; \frac{1}{2}\right); \quad \left(0; \frac{4}{3}\right);$$
$$(-2; 7); \quad (-1; -3); \quad (0; 0);$$
$$(0; -8); \quad \left(1; \frac{5}{2}\right); \quad (-100; 14).$$

26 (3). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -4x + 4y + 4 < 0.$$

Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'inéquation donnée :

$$(0; 1); \quad (0; 0); \quad (1; -2); \quad (0; -2);$$
$$(-3; -4); \quad (2; 3); \quad (7; 5); \quad (5; 7);$$
$$(-3; -1); \quad (-100; -100);$$
$$(100; -100).$$

27 (3). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -2x + 5y - 1 > 0.$$

a) Trouver cinq couples solutions ayant pour première composante 0.

Trouver l'ensemble des couples solutions ayant pour première composante 0.

b) Trouver cinq couples solutions ayant pour première composante -2.

c) Trouver cinq couples solutions ayant pour deuxième composante 0.

d) Trouver cinq couples solutions ayant pour deuxième composante -2.

Trouver l'ensemble des couples solutions ayant pour deuxième composante -2.

28 (3). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x - 2y + 5 < 0.$$

Donner l'ensemble des couples solutions ayant pour première composante -2 et le représenter dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Même exercice avec comme première composante : $-\frac{1}{2}$; 2; 3.

29 (3). On considère l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -x + 3y + 4 \geqslant 0.$$

Donner l'ensemble des couples solutions ayant pour deuxième composante 0 et le représenter dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Même exercice avec comme seconde composante : -3; 1; $-1{,}5$.

30 (3). On considère les inéquations :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{2}x + 2y + 4 \leqslant 0 \qquad \text{(I)}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{2}x + 2y + 4 > 0. \qquad \text{(II)}$$

a) Dans un repère (O, I, J), donner une représentation graphique (en bleu) de l'ensemble des couples solutions de (I) ayant pour première composante -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

b) Dans le même repère (O, I, J), donner une représentation graphique (en rouge) de l'ensemble des couples solutions de (II) ayant pour première composante -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.

31. On considère les inéquations :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x + 2y - 1 > 0 \qquad \text{(I)}$$
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x + 2y - 1 \leqslant 0. \qquad \text{(II)}$$

a) Dans un repère (O, I, J), donner une représentation graphique (en rouge) de l'ensemble des couples solutions de (I) ayant pour deuxième composante -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; $\frac{3}{2}$.

b) Dans le même repère (O, I, J), donner une représentation graphique (en bleu) de l'ensemble des couples solutions de (II) ayant pour deuxième composante -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; $\frac{3}{2}$.

32. Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les solutions de l'inéquation suivante :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad 3x - 5y \geqslant 4x - 2y - 3.$$

Même exercice pour l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$3x^2 - 2y + 1 \leqslant 3x(x - 1) + 2y - x.$$

Même exercice pour l'inéquation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - 3 > -2x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}.$$

5 Fonctions affines et linéaires

Leçon 1 : FONCTIONS AFFINES
Leçon 2 : FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES
Leçon 3 : LINÉARITÉ

TAXIS COMPTEURS

De nouveaux prix

Le ministre du Commerce et le ministre des Travaux Publics et des Transports informent les usagers des taxis de la ville d'Abidjan munis d'un compteur horo-kilométrique que les tarifs des taxis-compteurs sont fixés ainsi qu'il suit, à compter du lundi 30 mars 1981.

Tarif n° 1, ville d'Abidjan
— Prise en charge: 100 F CFA
— Le kilomètre: 75 F CFA

Tarif N° 2: localités situées à la périphérie de la ville d'Abidjan.
Tarif double du précédent.

Tarif horaire: 1.500 F CFA l'heure.

Koffi prend un taxi pour se rendre du Plateau à l'aéroport (tarif n° 1). Koffi a en poche 2 320 F. Il sait que l'aéroport est à 14 km du Plateau. Aura-t-il assez d'argent pour prendre un autre taxi au retour ?

1 Fonctions affines

1) Introduction

En appliquant le tarif n° 1 ci-dessus, calculer le prix à payer pour un parcours de 5 km, de 10 km, de 12 km, de 14 km.
Le tarif n° 1 définit une fonction qui, à la distance parcourue en taxi, fait correspondre le prix à payer.
Parmi les applications suivantes, quelle est celle qui permet de calculer le prix à payer pour un parcours de x km ?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 100\,x + 75 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 75(x + 100)$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 100(x + 75) \qquad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 175\,x$$

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 75\,x + 100\,.$$

2) Fonction affine

Définition

> **a et b étant deux nombres réels donnés, l'application :**
>
> $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$$
>
> **est appelée** fonction affine.

Exercices

1) Les applications précédentes f, g, h, i et j sont-elles des fonctions affines ?

2) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont des fonctions affines en précisant la valeur des réels a et b.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{4}x + 3 \qquad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{2}(x - 3) \qquad f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 3 - x$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 - 1 \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{2} \qquad f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x\,.$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{4\,x} + 3 \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -4$$

3) Étude d'un exemple

On donne la fonction affine :

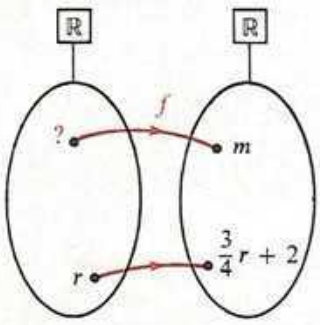
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3}{4}x + 2\,.$$

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

Calculer $f(0)$, $f(-1)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = -5$.

b) **f est-elle une bijection ?**



Un réel quelconque m a-t-il un antécédent par f ? Un seul ?

Répondre à ces questions revient à chercher le nombre de solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{3}{4}x + 2 = m\,.$$

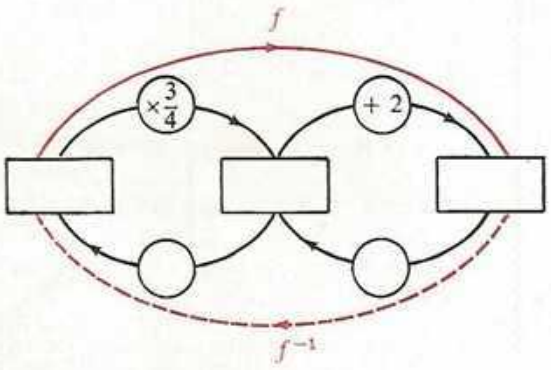
Nous savons que cette équation du premier degré a une solution unique donc

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3}{4}x + 2 \qquad \text{est une bijection dans } \mathbb{R}\,.$$

Exercice $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -4$ est-elle une bijection dans $\mathbb{R}$?

c) **Quelle est la bijection réciproque de f ?**

Compléter le schéma à l'aide des opérateurs qui conviennent.



Parmi les trois applications suivantes, quelle est la réciproque de f ?

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{4}{3}(x - 2) \qquad x \mapsto \frac{4}{3}x - 2.$$
$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{4}{3}(-2x)$$

Exercice Trouver les bijections réciproques des fonctions affines k, g et h suivantes :

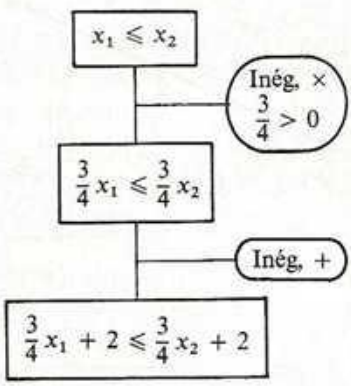
$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x - 5 \qquad x \mapsto \sqrt{2}x + 4.$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{-5x + 5}{2}.$$

d) **Comparons des nombres et comparons leurs images par *f*.**

On donne les tableaux de valeurs suivants. Compléter les cases à l'aide des signes $\geqslant$ ou $\leqslant$.

x	-4 ☐ -1	1 ☐ -2	3 ☐ -3	-2 ☐ 3
$f(x)$	-1 ☐ $1{,}25$	$2{,}75$ ☐ $0{,}5$	$4{,}25$ ☐ $-0{,}25$	$0{,}5$ ☐ $4{,}25$

x_1 et x_2 étant des réels quelconques on a $x_1 \leqslant x_2$ ou $x_1 \geqslant x_2$. Montrons que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans le même ordre que x_1 et x_2 :



Conclusion : Si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. On dit que la fonction f est *croissante sur* $\mathbb{R}$.

Exercice On donne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto -4x + 2.$$

Montrer que, si x_1 et x_2 sont deux réels rangés dans un certain ordre alors leurs images respectives sont rangées dans l'ordre inverse.
On dit que la fonction g est *décroissante sur* $\mathbb{R}$.

e) **Représentation graphique.**

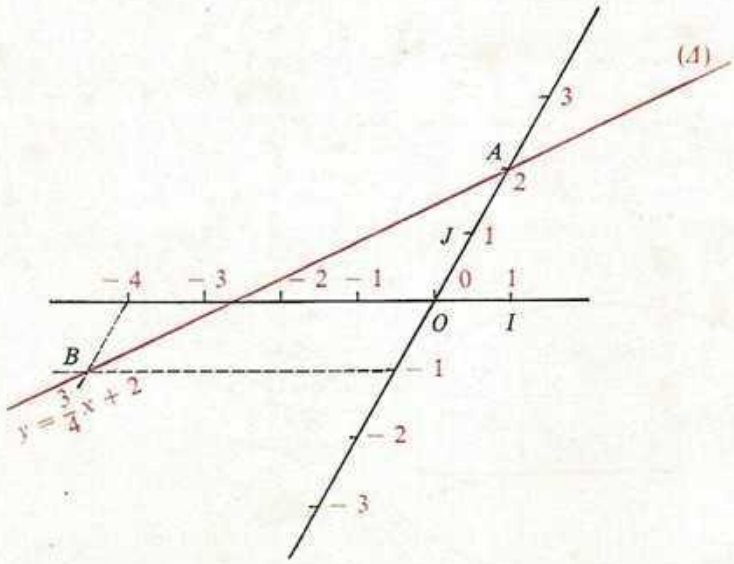
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3}{4}x + 2.$$

Rappel

Le couple (x, y) appartient au graphe G de la fonction f (signifie que) $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y \in \mathbb{R}, \\ y = \frac{3}{4}x + 2. \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $y = \frac{3}{4}x + 2$, c'est-à-dire $\frac{3}{4}x - y + 2 = 0$; on sait que cet ensemble est une droite (chapitre 4 de géométrie).
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la fonction f est donc représentée par la droite (Δ) d'équation $\frac{3}{4}x - y + 2 = 0$.
Vérifier que les couples $(0 ; 2)$ et $(-4 ; -1)$ sont solutions de cette équation.

Tracer (Δ).



x	$f(x)$	points
0	2	A
− 4	− 1	B

Exercice Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -2x + 3.$$

4) Cas général : étude de la fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **f est-elle une bijection ?**

Un réel quelconque m a-t-il un antécédent par f ? Un seul ?
Répondre à ces questions revient à chercher le nombre de solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad ax + b = m.$$

1er *cas* : $\boxed{a = 0}$.

L'application f s'écrit alors :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto b$$

Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que f n'est pas une bijection.
N'importe quel réel a pour image par f le réel b.

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b$ est une fonction constante.

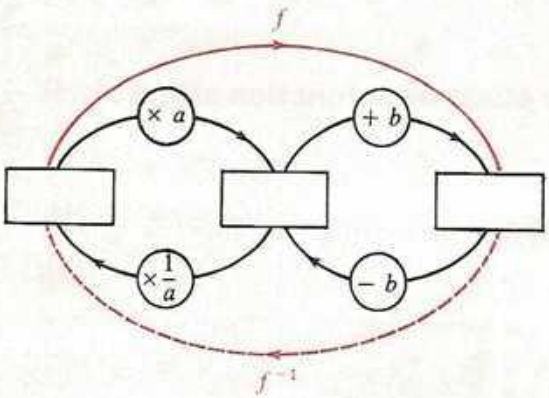
2e *cas* : $\boxed{a \neq 0}$.

$ax + b = m$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.
Nous savons que cette équation a une solution unique.

$a \neq 0$: La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) **Bijection réciproque de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans le cas où $a \neq 0$.**
$x \mapsto ax + b$

Examinons le programme de calcul.



On a donc $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{a}(x - b)$$

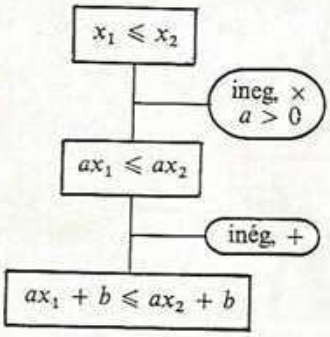
f^{-1} est-elle une fonction affine ?

d) **Fonction affine croissante — fonction affine décroissante.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b$$

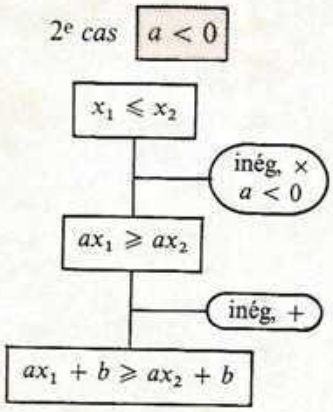
x_1 et x_2 étant deux réels quelconques, supposons que $x_1 \leqslant x_2$ et comparons leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

1er *cas* $a > 0$



Conclusion : dans le cas où $a > 0$,
si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
On dit que l'application f est **croissante sur** $\mathbb{R}$.

2e *cas* $a < 0$



Conclusion : dans le cas où $a < 0$,
si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
On dit que l'application f est **décroissante sur** $\mathbb{R}$.

Exercice Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{235}{42}x + 714{,}39.$$

Comparer $g(12\,815)$ et $g(147{,}32)$.

e) **Représentation graphique de la fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**

$$x \mapsto ax + b.$$

Soit G le graphe de cette fonction

$$(x, y) \in G \quad \text{signifie que} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y \in \mathbb{R}, \\ y = ax + b. \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) la représentation graphique de la fonction affine

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b$$

est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad y = ax + b.$$

Théorème

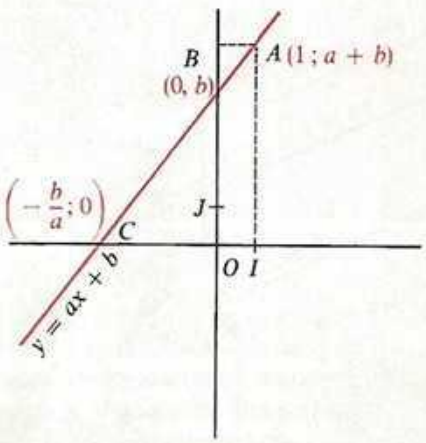
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b$$

est la droite (Δ) dont une équation est $y = ax + b$.

Remarque. Le tableau suivant donne les coordonnées de trois points particuliers de la droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

	x	y
B	0	b
A	1	$a + b$
C	$-\frac{b}{a}$	0



Exercices

a) Trouver les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (Δ) d'équation

$$y = ax + b\,.$$

b) Montrer que la droite d'équation $3x - 2 = 0$ est parallèle à (OJ). Cette droite est-elle la représentation graphique d'une fonction dans le repère (O, I, J) ?
Pourquoi ?

Remarque. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), toute fonction affine est représentée graphiquement par une droite, mais toute droite n'est pas la représentation graphique d'une fonction affine.

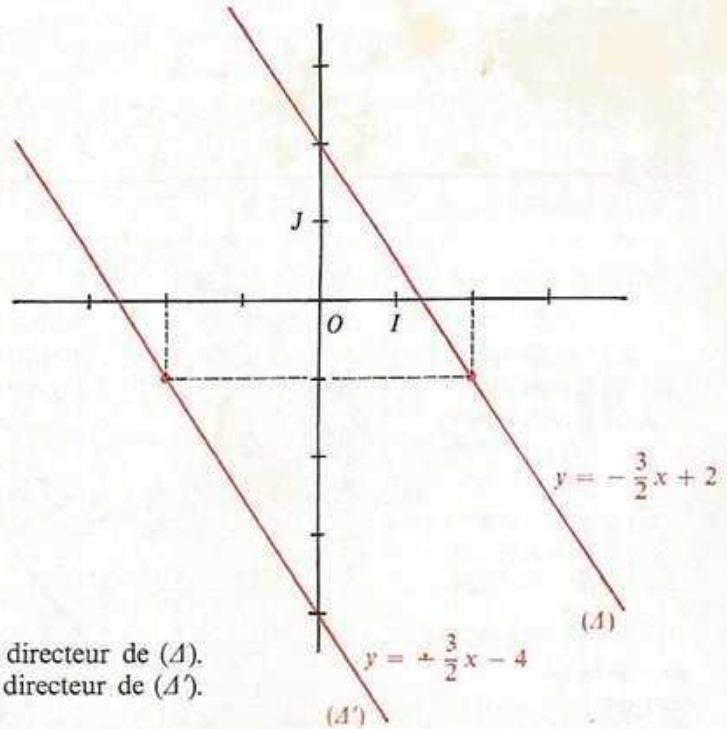
Condition pour que deux fonctions affines soient représentées par deux droites parallèles

a) **Exemple :**

On donne les fonctions affines :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -\frac{3}{2}x + 2 \qquad x \mapsto -\frac{3}{2}x - 4\,.$$

(Δ) et (Δ') sont les droites représentant ces fonctions affines dans le plan muni d'un repère (O, I, J).



Donner un vecteur directeur de (Δ).
Donner un vecteur directeur de (Δ').
Que constate-t-on ?

b) **Cas général.**

On donne les fonctions affines

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b \qquad x \mapsto a'x + b'.$$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),
— la représentation graphique de f est la droite (Δ) d'équation $ax - y + b = 0$;
— la représentation graphique de f' est la droite (Δ') d'équation $a'x - y + b' = 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ').

— Supposons que (Δ) et (Δ') sont parallèles :
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
Démontrer que $a = a'$.

— Réciproquement, supposons que $a = a'$.
Démontrer que $(\Delta) /\!\!/ (\Delta')$.

On énonce :

Théorème

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

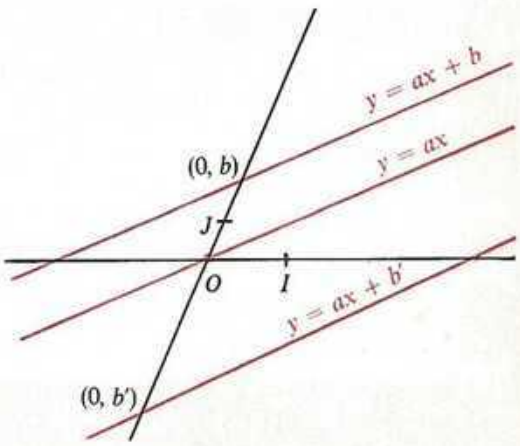
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$ | $x \mapsto a'x + b'$

étant représentée par (Δ) | **étant représentée par (Δ')**

$(\Delta) /\!\!/ (\Delta')$ équivaut à $a = a'$.

Remarque et définition :

Dans le plan muni d'un repère, la direction de la représentation graphique (Δ) d'une fonction affine est caractérisée par le réel a ; c'est pourquoi ce nombre est appelé **coefficient directeur** de la droite (Δ).



Exercice

Parmi les fonctions affines suivantes, trouver celles qui, dans un même repère, sont représentées par des droites parallèles.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x}{2} - 5$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto 2x - 1$

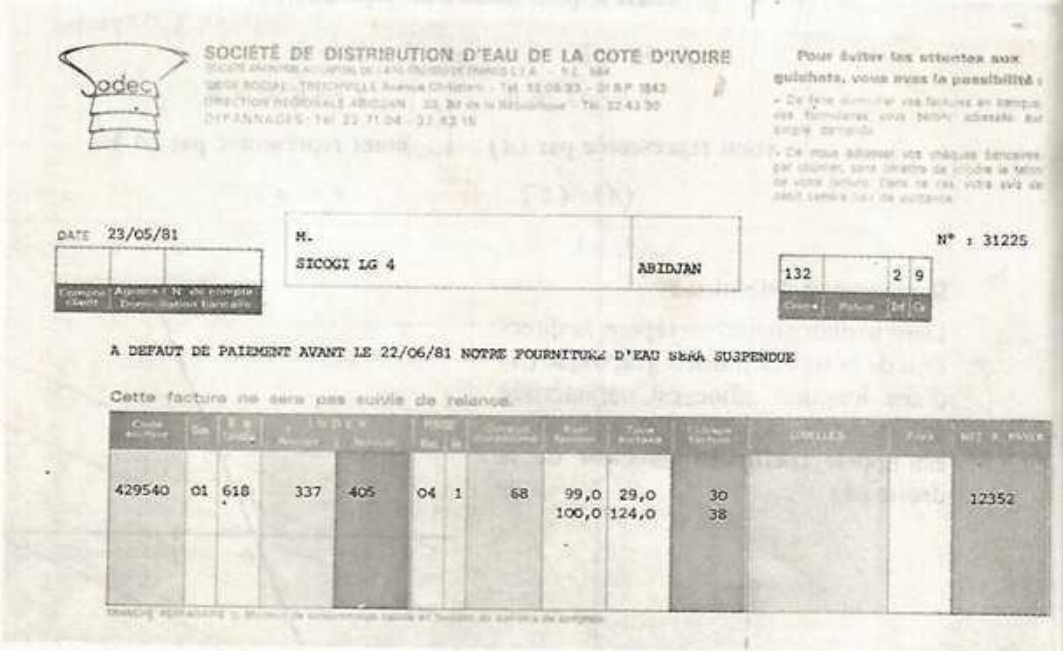
$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{2}(x - 3)$

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto -2x$.

2 Fonctions affines par intervalles

1) Une facture d'eau



SOCIÉTÉ DE DISTRIBUTION D'EAU DE LA COTE D'IVOIRE

Pour éviter les attentes aux guichets, vous avez la possibilité :

DATE 23/05/81

M.
SICOGI LG 4 ABIDJAN

N° : 31225

132 2 9

A DEFAUT DE PAIEMENT AVANT LE 22/06/81 NOTRE FOURNITURE D'EAU SERA SUSPENDUE

Cette facture ne sera pas suivie de relance.

429540	01	618	337	405	04	1	68	99,0 100,0	29,0 124,0	30 38			12352

Le tarif de la SODECI (Société de distribution d'eau de Côte d'Ivoire) pour un compteur de catégorie 1 (usage domestique) est le suivant :

jusqu'à 15 m^3 : forfait 1 920 F de 15 à 30 m^3 : 128 F le m^3 (99 + 29) au-dessus de 30 m^3 : 224 F le m^3 (100 + 124)

Remarque. Vérifier que le prix du forfait jusqu'à 15 m^3 est précisément le prix de 15 m^3 à 128 F l'unité.

Ce tarif définit une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui à la consommation x mesurée en m^3, associe le prix à payer en francs :

— Si la consommation ne dépasse pas 15 m^3, le prix à payer (en francs) est forfaitairement fixé à : **1 920.**

— Si la consommation x dépasse 15 m^3 mais n'excède pas 30 m^3 le prix à payer est : **128 x.**

— Si la consommation x dépasse 30 m^3, on paie pour les 30 premiers m^3 : 128×30; et pour les suivants (c'est-à-dire $x - 30$) : $224(x - 30)$, donc au total :

$$224(x - 30) + 128 \times 30$$

c'est-à-dire : **$224x - 2\,880$.**

Pour calculer le prix à payer, on peut donc utiliser l'application :

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

si $x \in [0\,;\,15]$ alors $f(x) = 1\,920$
si $x \in]15\,;\,30]$ alors $f(x) = 128\,x$
si $x \in]30\,;\,\to[$ alors $f(x) = 224\,x - 2\,880$.

Calculer $f(11)$, $f(17)$, $f(30)$, $f(50)$.

Considérons les fonctions affines

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1\,920$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 128\,x \qquad \text{et} \qquad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 224\,x - 2\,880.$$

Quel que soit x élément de $[0\,;\,15]$ on a $f(x) = g(x)$.

Quel que soit x élément de $]15\,;\,30]$ on a $f(x) = h(x)$.

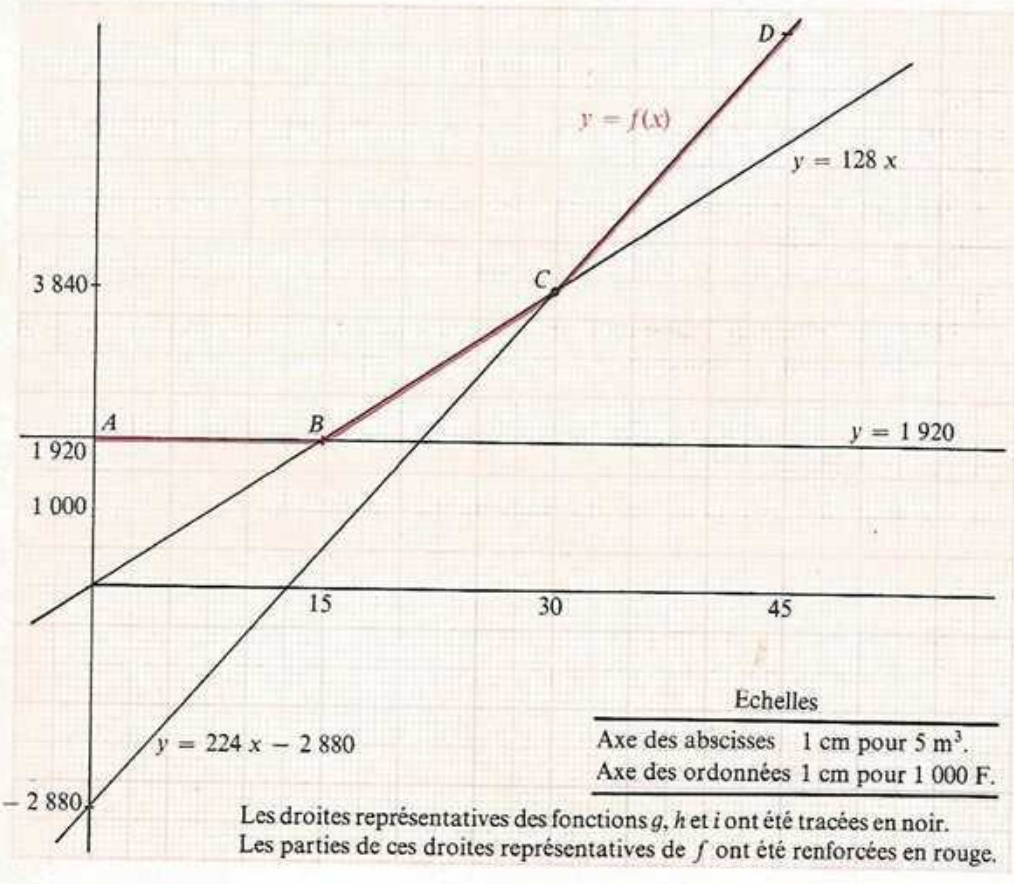
On dit que les fonctions f et g prennent les mêmes valeurs sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ ou qu'elles « *coïncident sur* » $[0\,;\,15]$.

On dit que les fonctions f et h prennent les mêmes valeurs sur l'intervalle $]15\,;\,30]$ ou qu'elles « *coïncident sur* » $]15\,;\,30]$.

Sur quel intervalle f et i coïncident-elles ?

Soit (AB), (BC), (CD) les droites représentatives des trois fonctions g, h et i dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

	A	*B*	*C*	*D*
x	0	15	30	45
$f(x)$	1 920	1 920	3 840	7 200



Les droites représentatives des fonctions g, h et i ont été tracées en noir.
Les parties de ces droites représentatives de f ont été renforcées en rouge.

Caractérisons le segment $[AB]$:

$$\begin{cases} y = 1\,920 \\ 0 \leqslant x \leqslant 15 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ 0 \leqslant x \leqslant 15 \end{cases}.$$

Caractérisons le segment $]BC]$:

$$\begin{cases} y = 128\,x \\ 15 < x \leqslant 30 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ 15 < x \leqslant 30 \end{cases}.$$

Caractérisons la demi-droite $]CD)$

$$\begin{cases} y = 224\,x - 2\,880 \\ x > 30 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ x > 30 \end{cases}.$$

La représentation graphique de f est donc $[AB] \cup]BC] \cup]CD)$. f est-elle une fonction affine ?
On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{lll} \text{si} & x \in [0\,;\,15] & \text{alors} \quad f(x) = 1\,920 \\ \text{si} & x \in]15\,;\,30] & \text{alors} \quad f(x) = 128\,x \\ \text{si} & x \in]30\,;\,\to[& \text{alors} \quad f(x) = 224\,x - 2\,880 \end{array}$$

est **une fonction affine par intervalles.**

Exercices

1) Considérer la facture d'eau reproduite en tête de leçon. Quelle est en m^3 la consommation totale du client ? Utiliser la représentation graphique ci-dessus pour vérifier que le prix à payer par le client correspond bien à sa consommation d'eau.

Un abonné à la SODECI a payé 5 000 F. Combien de m^3 d'eau a-t-il consommés ?

2) On donne la fonction affine par intervalles :

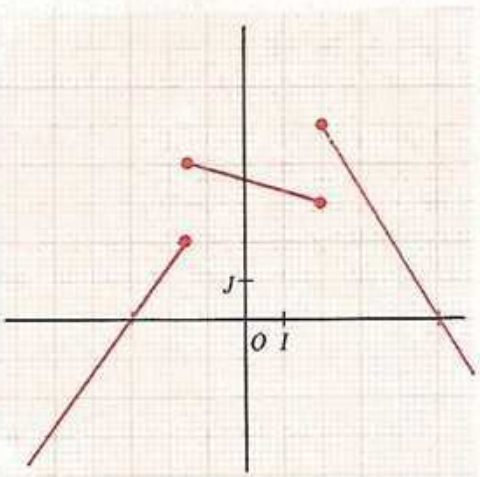
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

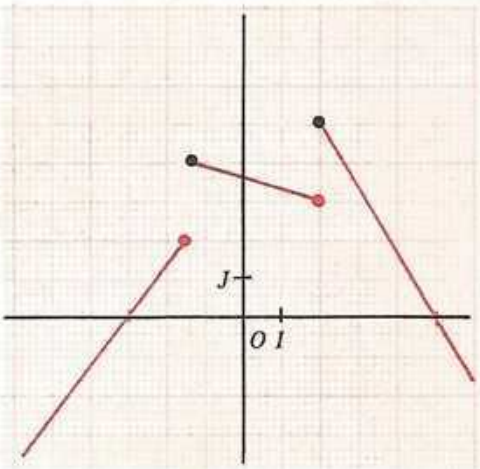
$$\text{si} \quad x \in \left]\leftarrow\,;\,-\frac{3}{2}\right], \quad \text{alors} \quad f(x) = \frac{4}{3}x + 4$$

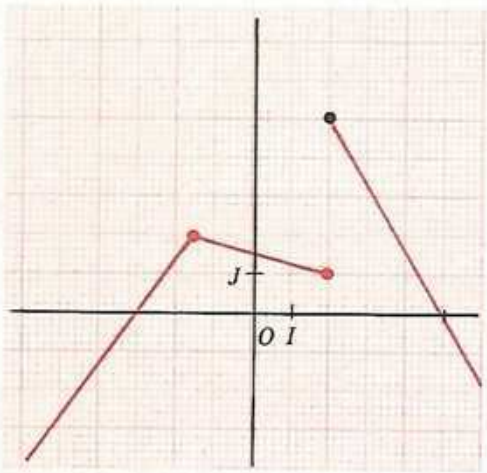
$$\text{si} \quad x \in \left]-\frac{3}{2}\,;\,2\right], \quad \text{alors} \quad f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{25}{7}$$

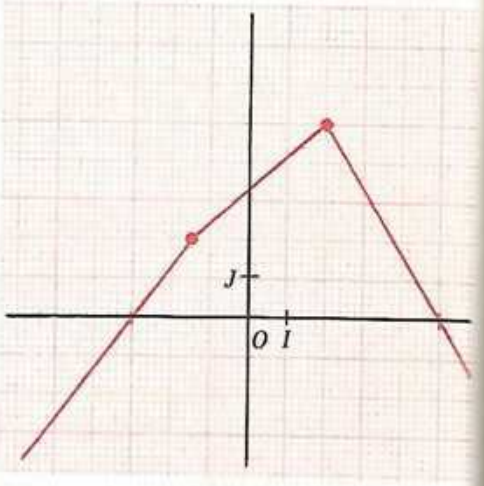
$$\text{si} \quad x \in]2\,;\,\to[, \quad \text{alors} \quad f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}.$$

Parmi les quatre représentations ci-dessous (en rouge) indiquer celle qui est la représentation graphique de f.









2) Étude de la fonction valeur absolue

Rappel : Quel que soit le réel x :

$$|x| \geqslant 0$$
$$|x| = -x \quad \text{signifie que} \quad x \leqslant 0$$
$$|x| = x \quad \text{signifie que} \quad x \geqslant 0.$$

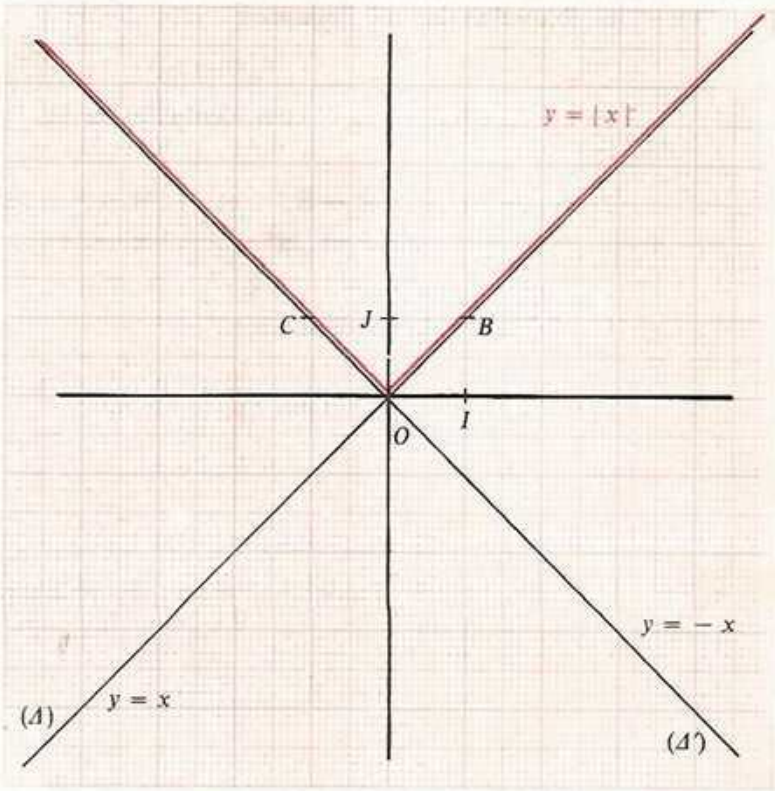
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) f est-elle bijective ?
c) On considère les fonctions affines :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x \qquad\qquad x \mapsto -x.$$

Quel est l'ensemble de définition de g ? de h ?
Les fonctions f et g coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$? sur $\mathbb{R}$?
Les fonctions f et h coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$? sur $\mathbb{R}$?
Représentons dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les fonctions g et h;
ce sont deux fonctions affines, elles sont donc représentées graphiquement par les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.
$O(0\,;\,0)$ et $B(1\,;\,1)$ sont deux points de (Δ).
$O(0\,;\,0)$ et $C(-1\,;\,1)$ sont deux points de (Δ').
Caractériser les demi-droites $[OC)$ et $[OB)$.
Les fonctions f et h coïncident sur $\mathbb{R}^-$; la demi-droite $[OC)$ peut donc être caractérisée par :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$



Les fonctions f et g coïncident sur $\mathbb{R}^+$; la demi-droite $[OB)$ peut donc être caractérisée par :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

La représentation graphique de f est donc $[OC) \cup [OB)$. f est-elle une fonction affine ?

Remarque. On aurait pu définir la fonction f de la manière suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\text{si} \quad x \in]\leftarrow, 0], \quad \text{alors} \quad f(x) = -x$$
$$\text{si} \quad x \in [0, \rightarrow[, \quad \text{alors} \quad f(x) = x\,.$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$. est donc une fonction affine par intervalles.

Exercices 1) On donne :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x + 3| \qquad\qquad x \mapsto x + 3\,.$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f_1(x) = f_2(x).$$

b) Les fonctions f_1 et f_2 coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $[-3, \to[$? sur $[-3\,;0[$?

2) Les fonctions $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x^2}$ $x \mapsto |x|$

coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$?
En déduire le théorème suivant :

> Quel que soit le réel x
> $\sqrt{x^2} = |x|$.

Calculer :

$$\sqrt{(-3)^2}\,; \quad \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,; \quad \sqrt{\left(\frac{-1}{-2}\right)^2}\,;$$

$$\sqrt{(-2)^2}\,; \quad \sqrt{\left(\frac{3}{-4}\right)^2}.$$

3) Un tarif des P et T en Côte d'Ivoire

a) Voici un tarif des P et T au 1er juillet 1981 pour le service intérieur et les pays suivants : Benin, Niger, Sénégal, Haute-Volta, Mauritanie, Mali et Togo.

Lettres	jusqu'à 10 g	de 10 à 15 g	de 15 à 20 g	de 20 à 25 g	de 25 à 30 g	de 30 à 35 g
affranchissement en francs	80	110	120	290	300	310

On désigne par x la masse en grammes d'une lettre et $f(x)$ le prix du timbre nécessaire à son affranchissement.

Le tableau devient :

x	$0 < x \leqslant 10$	$10 < x \leqslant 15$	$15 < x \leqslant 20$	$20 < x \leqslant 25$	$25 < x \leqslant 30$	$30 < x \leqslant 35$
$f(x)$	80	110	120	290	300	310

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer $f(7)$; $f(12)$; $f(19)$; $f(26)$; $f(29)$; $f(34)$.
3. Calculer $f(10)$; $f(15)$; $f(20)$; $f(25)$; $f(30)$; $f(35)$.

4. Soit G le graphe de cette fonction ; parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont éléments de G :

$(8 ; 80)$; $(10 ; 120)$; $(11 ; 110)$; $(12 ; 120)$;
$(18 ; 290)$; $(300 ; 27)$; $(29 ; 300)$; $(40 ; 320)$.

5. Compléter :

si $x \in]15 ; 20]$ alors $f(x) =$
si $x \in]20 ; 25]$ alors $f(x) =$
si $x \in]30 ; 35]$ alors $f(x) =$

6. Résoudre dans $]0 ; 35]$ $f(x) = 120$
$f(x) = 80$
$f(x) = 310$.

b) **Recherche des fonctions affines qui coïncident avec f sur les intervalles donnés.**

Le tarif détermine une partition de $]0 ; 35]$ constituée des intervalles :

$]0 ; 10]$; $]10 ; 15]$; $]15 ; 20]$; $]20 ; 25]$; $]25 ; 30]$; $]30 ; 35]$.

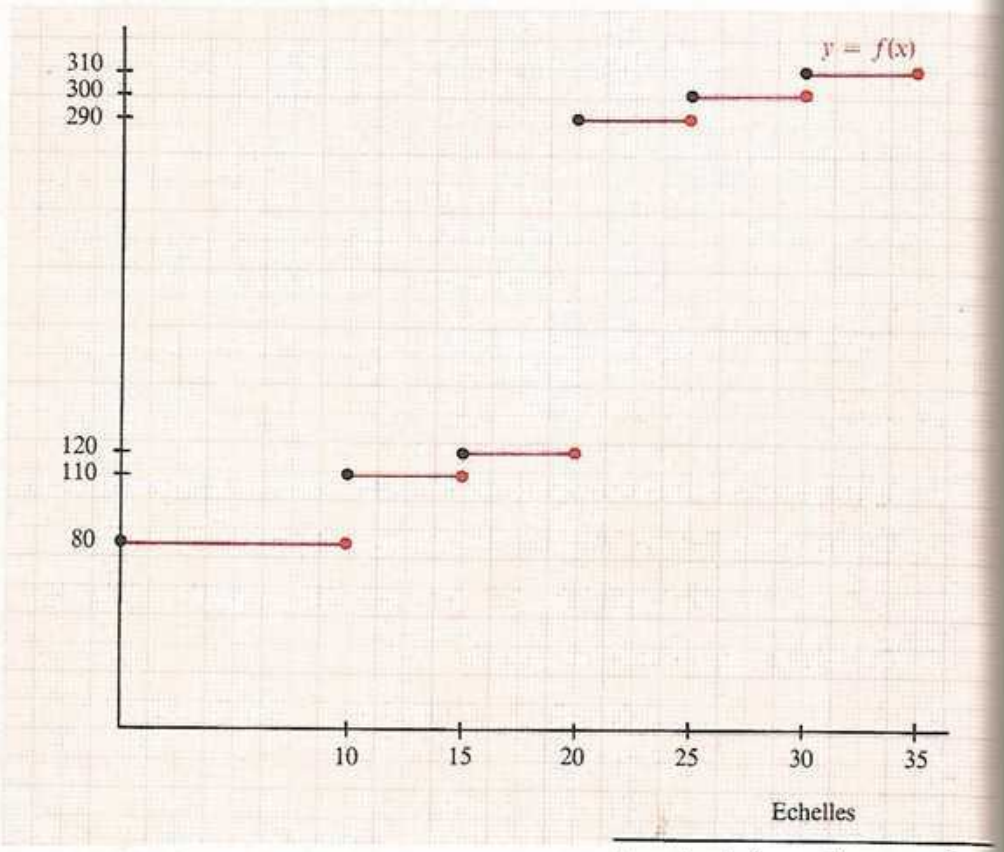
Considérons les fonctions constantes :

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 80$; $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 110$; $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 120$

$g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 290$; $g_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 300$; $g_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 310$.

On constate que f et g_1 coïncident sur $]0 ; 10]$
que f et g_2 coïncident sur $]10 ; 15]$
etc...
f est donc une fonction affine par intervalles.

c) **Représentation graphique :**



Sur chaque intervalle de la partition précédente, f coïncide avec une fonction constante : elle est constante par intervalles.
On dit aussi que f est une *fonction en escalier.*

3 Linéarité

1) Fonction linéaire

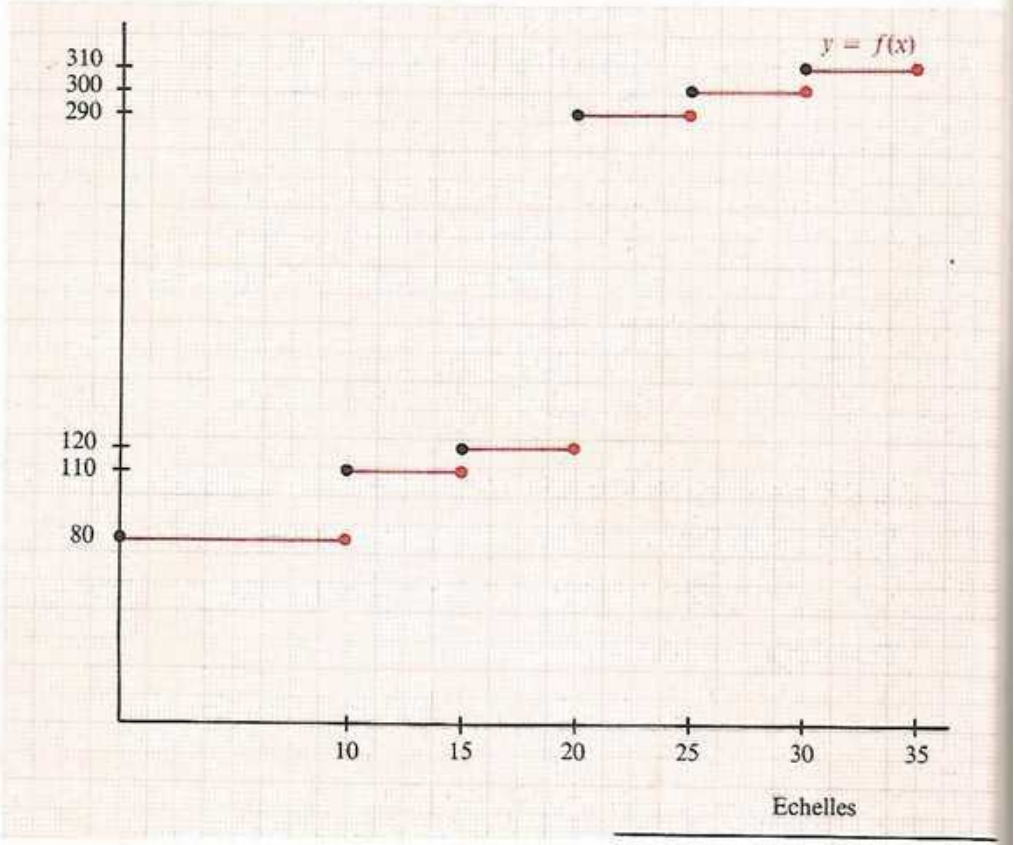
a) **Définition**

Le réel a étant donné, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax$$

est appelée fonction linéaire.

c) **Représentation graphique :**



Axes des abscisses	2 cm pour 5 g
Axe des ordonnées	4 mm pour 10 F

Sur chaque intervalle de la partition précédente, f coïncide avec une fonction constante : elle est constante par intervalles.
On dit aussi que f est une *fonction en escalier.*

3 Linéarité

1) Fonction linéaire

a) **Définition**

Le réel a étant donné, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax$$

est appelée fonction linéaire.

Remarque. Toute fonction linéaire est une fonction affine.
Toute fonction affine est-elle une fonction linéaire ?

b) **Représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J).**

On sait que la fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

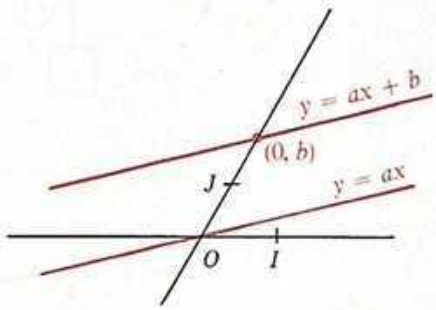
$$x \mapsto ax + b$$

est représentée dans le plan muni d'un repère (O, I, J) par la droite d'équation $y = ax + b$.
Dans le cas particulier où $b = 0$, la représentation graphique de f est la droite d'équation $y = ax$.
Vérifier que cette droite passe par O et qu'elle est distincte de (OJ).

Théorème

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), toute fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine du repère et distincte de (OJ).

Remarque. Les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = ax$ sont parallèles. Pourquoi ?



Exercice

Construire dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les représentations graphiques des fonctions linéaires suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}x \qquad x \mapsto 2x$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -2x \qquad x \mapsto -\frac{1}{2}x.$$

Remarque. On peut démontrer la réciproque du théorème précédent : « Toute droite passant par l'origine d'un repère (O, I, J) et distincte de (OJ) est la représentation graphique d'une fonction linéaire. » (Voir ex. n° 59, p. 137.)

c) **Propriétés.**

1. Nous savons que pour $a \neq 0$, toute fonction affine est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Trouver la réciproque de la fonction linéaire f_1, puis celle de f_3 (voir exercice précédent).

Le réel a étant non nul, trouver la bijection réciproque de la fonction

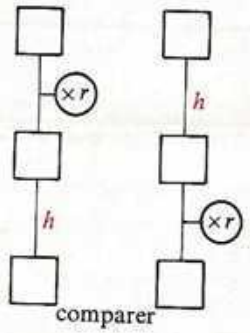
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax .$$

2. **Propriétés de linéarité.**

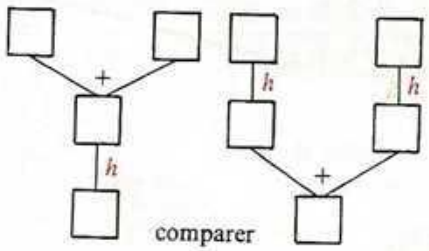
Étude d'un exemple. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x.$$

— Soit un réel r. Comparer $h(rx)$ et $r \times h(x)$.



— Soit deux réels x' et x''. Comparer $h(x' + x'')$ et $h(x') + h(x'')$.



Cas général. Soit la fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax.$$

— Soit k un réel quelconque :

$$f(kx) = a\,(kx) \quad \text{et} \quad k\,f(x) = k\,(ax) .$$

De l'associativité et de la commutativité de la multiplication des réels, il résulte immédiatement :

$$\boxed{f(kx) = k\,f(x) .}$$

— Soit x et x' deux réels quelconques :

$$f(x + x') = a\,(x + x') \quad \text{et} \quad f(x) + f(x') = ax + ax' .$$

De la distributivité de la multiplication sur l'addition, il résulte immédiatement :

$$f(x + x') = f(x) + f(x').$$

Les deux propriétés trouvées sont appelées *propriétés de linéarité.*

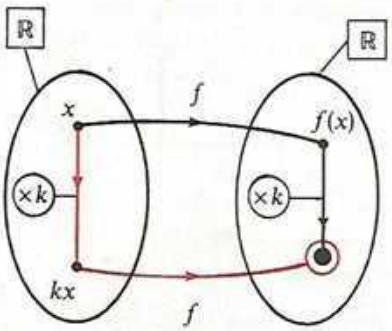
On les note respectivement (L_1) et (L_2).
On traduit souvent la seconde par l'énoncé :
« L'image d'une somme est égale à la somme des images. »

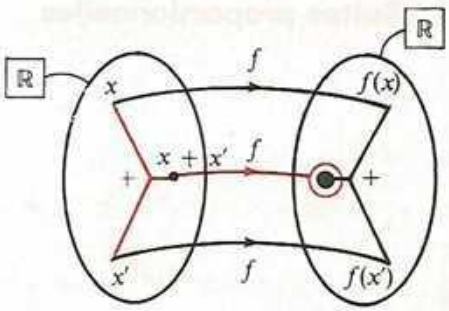
Théorème

f étant une fonction linéaire et k, x, x' des réels quelconques, on a :

(L_1) $\quad f(kx) = kf(x)$

(L_2) $\quad f(x + x') = f(x) + f(x')$.





Exercice

Les fonctions suivantes :

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 5$; $\quad r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$; $\quad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

$v' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$; $\quad v'' : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

possèdent-elles l'une ou l'autre des propriétés de linéarité sur leur ensemble de définition ?

Remarque

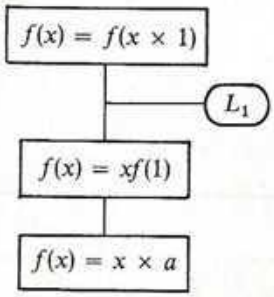
Démontrons que si une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ possède la propriété (L_1) alors elle est une fonction linéaire. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x).$$

Par hypothèse, quels que soient les réels k et x :

$$f(kx) = k \times f(x).$$

Appelons a l'image de 1 : $f(1) = a$. Comme $x = x \times 1$, on a :



Donc f est une fonction linéaire.

2) Suites proportionnelles

a) Considérons le tableau :

2	− 4	6	8	12	14	26	$-2\sqrt{2}$	1
− 3	6	− 9	− 12	− 18	− 21	− 39	$3\sqrt{2}$	− 1,5

× ...

Sur la première ligne du tableau figure une première suite de nombres.
Sur la seconde ligne figure une deuxième suite de nombres correspondant aux premiers, colonne par colonne.
Vérifier que l'on passe de chaque nombre de la première suite au nombre correspondant de la seconde suite à l'aide de l'opérateur $\times \left(-\frac{3}{2}\right)$.

Le tableau précédent définit une application de l'ensemble $\{ 2; -4; 6; 8; 12; 14; 26; -2\sqrt{2}; 1 \}$ dans l'ensemble $\{ -3; 6; -9; -12; -18; -21; -39; 3\sqrt{2}; -1{,}5 \}$ telle qu'à un élément x du premier ensemble correspond l'élément $-\frac{3}{2}x$ du second. Cette application coïncide donc avec la fonction linéaire f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

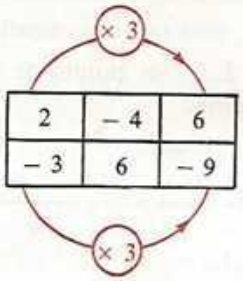
$$x \mapsto -\frac{3}{2}x$$

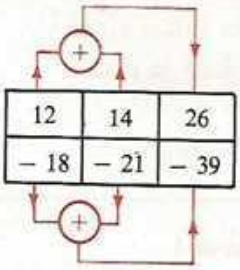
sur l'ensemble $\{ 2; -4; 6; 8; 12; 14; 26; -2\sqrt{2}; 1 \}$.
On peut constater que :

— dans le plan muni d'un repère (O, I, J), les points représentatifs de cette application sont alignés avec l'origine O ;

— les propriétés (L_1) et (L_2) sont vérifiées.

Exemples





Trouver d'autres exemples.

b) **Définitions** (Rappels de Sixième).

① Soit une première suite de nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ pris dans cet ordre et une seconde suite de nombres $y_1, y_2, ..., y_n$ pris dans cet ordre ; s'il est possible de passer de la première suite à la seconde à l'aide d'un opérateur multiplicatif non nul, on dit que **la seconde suite est proportionnelle à la première.**

Exercice La suite $3,7 ; \frac{1}{\sqrt{5}} ; 0 ; \frac{3}{2}$ est-elle proportionnelle à la suite $18,5 ; \sqrt{5} ; 0 ; 7,5$?

② Le nombre non nul par lequel il faut multiplier chaque nombre de la **première** suite pour obtenir le nombre correspondant de la **seconde** est appelé **coefficient de proportionnalité de la seconde et à la première.**

Exercice Quel est le coefficient de proportionnalité de la suite : $18,5 ; \sqrt{5} ; 0 ; 7,5$ à la suite $3,7 ; \frac{1}{\sqrt{5}} , 0 ; \frac{3}{2}$?

③ Quand une première suite de nombres est proportionnelle à une seconde suite de nombres, la deuxième suite est aussi proportionnelle à la première. On dit que les deux suites sont proportionnelles.

Exercice Les deux suites : 3 ; 15 ; 21 ; 6 et 25 ; 125 ; 175 ; 50 sont-elles proportionnelles ?

c) **Propriétés des suites proportionnelles :**

Soit a le coefficient de proportionnalité de la suite $y_1, y_2, ..., y_n$ à la suite $x_1, x_2, ..., x_n$.
D'après les définitions ① et ②, on a : $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2, ..., y_n = ax_n$.
Les nombres $y_1, y_2, ..., y_n$ sont donc les images respectives de $x_1, x_2, ..., x_n$ par la fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax.$$

En conséquence :

> Si les suites $x_1, x_2, ..., x_n$ et $y_1, y_2, ..., y_n$ sont proportionnelles, alors :
> — dans le plan muni d'un repère (O, I, J), les points de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) sont alignés avec l'origine ;
> — les propriétés (L_1) et (L_2) sont vérifiées.

Remarque 1. Quand aucun des nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ n'est nul, on peut écrire aussi :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}.$$

Par abus de langage, on dit qu'une telle écriture est une *suite de rapports égaux* (tous ces quotients ont en effet pour valeur commune le coefficient de proportionnalité a).

Remarque 2. Le coefficient de proportionnalité de la suite $y_1, y_2, ..., y_n$ à la suite $x_1, x_2, ..., x_n$ est le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$.

Exercices

1. En utilisant uniquement les propriétés de linéarité (L_1) et (L_2), compléter les tableaux de suites proportionnelles :

60	65	125	260
1,8	1,95		

175	75	250	25	225
7	3			

2. Compléter les tableaux suivants de manière que la propriété (L_2) soit vérifiée :

6,5	1,4	7,9
15,6	3,5	

6,5	1,4	7,9
19,5	4,2	

Les suites de chaque tableau sont-elles proportionnelles ?

3) Domaines d'application de la proportionnalité

a) **L'environnement :**

Voici un tableau de correspondance qui donne le prix d'un coupon d'étoffe en francs connaissant sa longueur en mètres :

Longueur	3	6	9	8	4
Prix	1 950	3 900	5 850	5 200	2 600

Vérifier que les deux suites sont proportionnelles.
On dit que le prix et la longueur sont deux *grandeurs proportionnelles.*
Le coefficient de proportionnalité de la seconde suite à la première est le prix du mètre de tissu.
Dans la vie courante, on rencontre de nombreuses situations où deux grandeurs sont proportionnelles ; souvent aussi le coefficient de proportionnalité de l'une des grandeurs par rapport à l'autre porte un nom particulier.

Exemples

1) Le prix de la viande est, en général, proportionnel à la quantité de viande achetée ; le coefficient de proportionnalité est le prix du kilogramme.

2) Le salaire d'un manœuvre est, en général, proportionnel à la durée de son travail ; le coefficient de proportionnalité est le salaire horaire.

3) Sur un cercle de rayon r donné, la mesure de la longueur d'un arc en dm est proportionnelle à sa mesure en degré. Compléter le tableau suivant :

Mesure en degrés	0	15	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesure de la longueur en dm ($r = 1$)										π

4) Voici un tableau dressé par un physicien lors d'une expérience qui consistait à mesurer le temps de chute d'un objet lâché à différentes hauteurs du sol :

Hauteur de chute	0	1	2	3	5	7	20
Durée de la chute en seconde	0	0,45	0,64	0,78	1,01	1,19	2,02

Construire un graphique correspondant à ce tableau.
Les points sont-ils alignés ?
La situation présentée est-elle une situation de linéarité ?

5) Voici un tableau de correspondance entre température en degrés centigrades et température en degrés Fahrenheit.

Température en degrés centigrades	1	2	3	5	7	20
Température en degrés Fahrenheit	33,8	35,6	37,4	41	44,6	68

Construire un graphique correspondant à ce tableau.
Les points sont-ils alignés ? Le sont-ils avec l'origine du repère ? La situation ci-dessus est-elle une situation de linéarité ?

6) Au cours d'une leçon de sciences physiques, des élèves de troisième ont étudié la « réponse d'un ressort » et ont dressé le tableau suivant :

Masse suspendue en grammes	0	50	100	180	240	300
Allongement en centimètres	0	2,5	5	9	12	15

Construire un graphique correspondant à ce tableau.
Les points sont-ils alignés avec l'origine du repère ?
La « réponse du ressort » est-elle linéaire ?

b) L'algèbre de Troisième

Exemple 1

Soit l'équation $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x + 2y = 0$.
Vérifier que le couple $(2 ; -3)$ est solution ainsi que les couples obtenus dans chaque colonne du tableau suivant :

x	2	-4	6	8	12	14	26	$-2\sqrt{2}$	1
y	-3	6	-9	-12	-18	-21	-39	$3\sqrt{2}$	$-1,5$

On peut démontrer que les secondes composantes des couples solutions sont proportionnelles aux premières composantes de ces couples.

A l'aide des propriétés (L_1) et (L_2) trouver d'autres couples solutions de l'équation $3x + 2y = 0$.
Trouver une fonction ayant pour graphe l'ensemble des solutions de cette équation.

Exemple 2

Soit à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 5x + 4y = 32. \end{cases}$$

Le problème peut se poser pratiquement de la manière suivante :
Si on achète trois « trucs » et deux « machins », on paie 18 F.
Si on achète cinq « trucs » et quatre « machins », on paie 32 F.
Quel est le prix d'un « truc » ? Quel est le prix d'un « machin » ?
Nous savons que le prix est proportionnel au nombre d'objets achetés. Ainsi, si on avait acheté la première fois le double d'objets on aurait : 6 « trucs » et 4 « machins » pour 36 F, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 6x + 4y = 36 \\ 5x + 4y = 32. \end{cases}$$

Pour un « truc », on aurait donc payé 36 F − 32 F, c'est-à-dire 4 F, donc $x = 4$.
On pourrait faire le même raisonnement pour le second achat. Si on multiplie par 5 le nombre d'objets achetés lors du premier achat et par 3 le nombre d'objets achetés au second achat, on a :

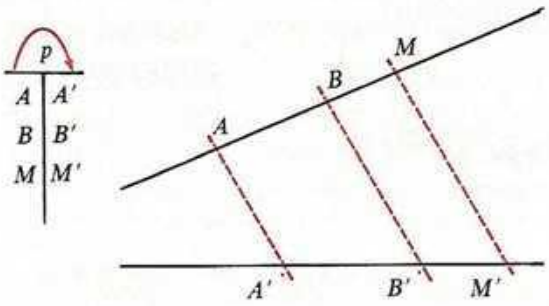
$$\begin{cases} 15x + 10y = 90 \\ 15x + 12y = 96. \end{cases}$$

On aurait alors payé 6 F pour 2 « machins », donc $y = 3$.
Comparer la méthode employée ici et la méthode par combinaison présentée au chapitre 4.
Cette dernière est aussi appelée *méthode par combinaison linéaire.*

c) **La géométrie de Troisième.**

Exemple 1

Axiome de Thalès.



On donne la figure ci-contre.
D'après l'axiome de Thalès :
si $\overline{AM} = k\overline{AB}$
alors $\overline{A'M'} = k\overline{A'B'}$.

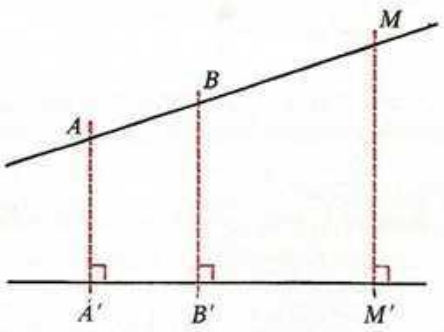
L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $\overline{AM}$ fait correspondre $\overline{A'M'}$ vérifie donc la propriété (L_1), c'est une fonction linéaire.

Les mesures algébriques des bipoints projetés sont donc proportionnelles aux mesures algébriques des bipoints antécédents.

Le coefficient de proportionnalité $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est appelé *rapport de projection* de (AB) sur $(A'B')$.

Exercice

On considère la projection orthogonale sur $(A'B')$. Voir la figure ci-dessous.



Compléter le tableau suivant en utilisant,

— pour la troisième colonne : le rapport de projection (dans ce cas le rapport de projection est dit *rapport de projection orthogonale*).

— pour la quatrième colonne : la propriété (L_2)

— pour la cinquième colonne : la propriété (L_1)

$\overline{AM}$	2	3	5	6
$\overline{A'M'}$	1,74			

Exemple 2

Coordonnées de vecteurs de même direction.

Donner les coordonnées de vecteurs de même direction que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Montrer que ces couples sont des solutions de l'équation : $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 3x + 2y = 0$ vue au paragraphe *b*.

En déduire que les secondes coordonnées des vecteurs de même direction que $\vec{u}$ sont proportionnelles aux premières coordonnées.

Exercice

Le tableau suivant donne les coordonnées de vecteurs de même direction que $\vec{v}_1\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Compléter le tableau à l'aide des propriétés (L_1) et (L_2).

$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$
3	6		0,6	3,6	2,4
− 5		15	− 1		

Exemple 3

Equations de droites.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les droites (D) et (D') non parallèles aux axes et ne passant pas par l'origine du repère.
Soit $ax + by + c = 0$ une équation de (D) et $a'x + b'y + c' = 0$ une équation de (D').
On rappelle que :

1) $(D) = (D')$ $\langle$ équivaut à $\rangle$ $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$

2) $(D) \cap (D') = \varnothing$ $\langle$ équivaut à $\rangle$ $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$ et $\dfrac{c'}{c} \neq \dfrac{a'}{a}$.

Dans l'hypothèse où $(D) = (D')$, que peut-on dire des suites a', b', c' et a, b, c ?
Dans l'hypothèse où $(D) \cap (D') = \varnothing$, que peut-on dire des suites précédentes ? Que peut-on dire des suites a', b' et a, b ?

Exercice $3x - 5y - 1 = 0$ est une équation d'une droite (D).
Trouver une autre équation de (D).
Trouver une équation d'une droite disjointe de (D).

4) Comment reconnaître une situation de linéarité ?

L'étude des fonctions linéaires, de leurs propriétés et des suites proportionnelles permet de faire les remarques suivantes :

1. Si une situation donnée peut se traduire mathématiquement par une fonction linéaire, c'est par définition une situation de linéarité ; alors, les propriétés (L_1) et (L_2) sont vérifiées.

2. Si une situation donnée peut se traduire par une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (L_1), c'est une situation de linéarité.

Rappel. Si une situation vérifie la propriété (L_2), cela ne suffit pas pour affirmer que c'est une situation de linéarité (voir Exercice 2, p. 124).

3. Si une situation donnée peut se traduire graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère utilisé, c'est une situation de linéarité.

Exercices

Calculer

1 (1). Rappel : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$ est appelée fonction affine.

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont des fonctions affines en précisant les valeurs des réels a et b :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x}{7} + 2$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x + \frac{2}{3}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{7}{x} + 2$

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 11 - x$

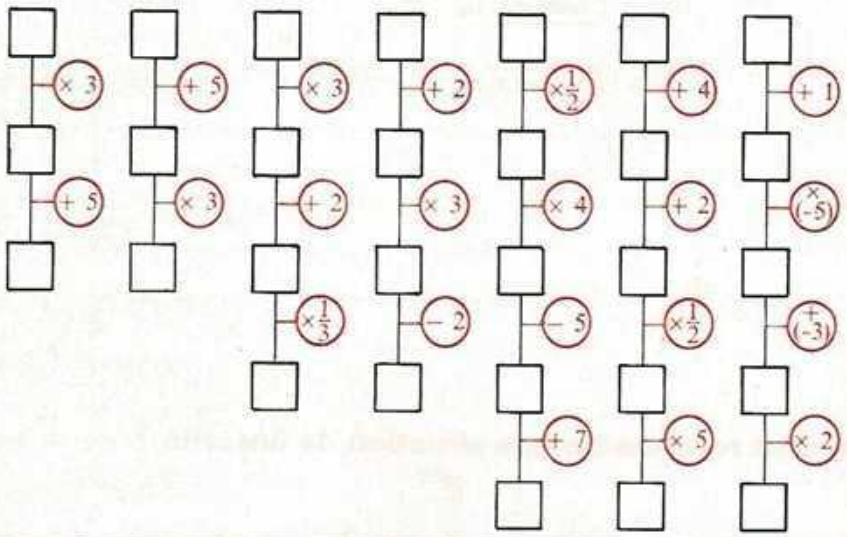
$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 11$.

$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{2}$

$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 7(3 - 2x)$

$n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$.

2 (1). Voici des programmes de calcul. Pour chacun d'eux, trouver la fonction affine correspondante et préciser les valeurs des réels a et b.



3 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions affines :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\frac{1}{2}x - 3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - 3$.

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{3}{2}x - 3$

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 3$

Calculer les coordonnées des points d'intersection des axes avec chacune des représentations graphiques.

4 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions affines :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x - 2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x - 1$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x$.

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x + 1$

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x + 2$

5 (1). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions affines :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -500x + 350$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 0{,}1x + 0{,}4$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 36x + 48$

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -10^{-2}x + 3 \times 10^{-2}$.

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 125x - 250$.

6 (1). Soit la fonction affine :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x - 4$.

a) Quelles sont les images par f des réels

$\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$; 1; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $-\sqrt{2}$; 0.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$f(x) = 0$

$f(x) = -\sqrt{2}$.

c) Calculer les antécédents par f des réels

$\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$; 1; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $-\sqrt{2}$; 0.

d) Trouver la fonction affine f^{-1} réciproque de f.

e) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représenter les fonctions f et f^{-1}.

7 (1). On donne les fonctions affines :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 7$ $\quad$ $x \mapsto 4 - 3x$.

a) f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?
g est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

b) Calculer $f\left(\frac{11}{5}\right)$ et $g\left(\frac{11}{5}\right)$.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites représentatives de f et g ?

d) Représenter f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

e) Résoudre graphiquement le système $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 4 - 3x. \end{cases}$

8 (1). *a*) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions affines :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ $\quad$ $x \mapsto 3x - 1$.

b) Trouver les fonctions f^{-1} et g^{-1} réciproques de f et g. Représenter f^{-1} et g^{-1} dans le repère précédent.

c) Soit (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) et (Δ_4) les représentations graphiques respectives de f, g, f^{-1} et g^{-1}.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de ces droites avec les axes de coordonnées. Vérifier sur le graphique.

d) Calculer les coordonnées des éléments de

$(\Delta_1) \cap (\Delta_2)$, $(\Delta_1) \cap (\Delta_3)$, $(\Delta_3) \cap (\Delta_4)$

et

$(\Delta_2) \cap (\Delta_4)$.

Vérifier sur le graphique.

9 (1). *a*) Trouver la fonction affine f dont la représentation graphique (D) dans un repère (O, I, J) passe par les points $A(0; 5)$ et $B(2; 0)$.

b) Faire la figure.

c) Quelles sont les images respectives de 0 et 2 par f ?

d) Trouver la fonction affine g dont la représentation graphique dans le même repère est parallèle à (D) et passe par $C(1; -2)$.

10 (1). Compléter le tableau suivant sachant que f est une fonction affine :

x	2	-1	0			$-\frac{4}{3}$			$\sqrt{3}$
$f(x)$	3	5		-3	0		$-\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	

11 (1). *a*) Trouver la fonction affine f dont la représentation graphique (D) dans le repère (O, I, J) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(-1; 2)$.

b) Faire la figure.

c) Cette fonction est-elle croissante ? Pourquoi ?
Ranger par ordre croissant :

$f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{1}{4}\right)$; $f\left(\frac{22}{7}\right)$; $f(\sqrt{10})$;

$f(3, 14)$; $f(\pi)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

d) Calculer $f(2)$; $f(0)$; $f(-1)$; $f(5)$.
e) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 7$.

12 (1). On donne les fonctions affines :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -3x + 2 \qquad x \mapsto -\frac{1}{2}x - 2.$$

Trouver $f \circ g$ et $g \circ f$.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.
Vérifier que les droites représentatives de $f \circ g$ et $g \circ f$ sont parallèles.

13 (1). Même exercice avec les fonctions

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 3 \qquad x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

14 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in [-1 ; 0[$ alors $f(x) = -x + 1$
si $x \in [0 ; 2]$ alors $f(x) = x - 2$
si $x \in]2 ; 3]$ alors $f(x) = 2$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?
Représenter f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

15 (2). On donne la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in [-2 ; 0[$ alors $g(x) = 1$
si $x \in [0 ; 1{,}5[$ alors $g(x) = 2{,}5$
si $x \in [1{,}5 ; 4[$ alors $g(x) = -1$.

Quel est l'ensemble de définition de g ?
Représenter g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

16 (2). On donne la fonction :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; 2[$ alors $h(x) = -3x + 1$
si $x \in \{2\}$ alors $h(x) = 3$
si $x \in]2 ; 5[$ alors $h(x) = 2x - 3$
si $x \in [5 ; \rightarrow[$ alors $h(x) = -x + 1$.

Quel est l'ensemble de définition de h ?
Représenter h dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

17 (2). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |-2x + 6|$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 6 \qquad x \mapsto -2x + 6.$$

a) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$. f et g coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}^-$, sur $[3 ; \rightarrow[$, sur $\{3\}$, sur $]\leftarrow ; 3]$?
b) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(x)$. f et h coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}^-$, sur $[3 ; \rightarrow[$, sur $\{3\}$, sur $]\leftarrow ; 3]$?
c) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction f.

18 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| + x.$$

19 (2). Même exercice pour la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + |x + 1|.$$

20 (2). Même exercice pour la fonction :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - |5 - 2x|.$$

21 (2). Représenter graphiquement dans un repère (O, I, J) les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |3x + 5| \qquad x \mapsto 3|x| + 5.$$

Résoudre graphiquement $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
Résoudre algébriquement $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

22 (2). Même question pour les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |3x - 5| \qquad x \mapsto 3|x| - 5.$$

23 (2). Même question pour les fonctions :

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |-3x + 5|$$

et

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -3|x| + 5.$$

24 (2). On donne les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{(-2x + 1)^2}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -2x + 1$$

et

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 1.$$

a) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_2(x)$. f_1 et f_2 coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$? sur

$\left[\frac{1}{2}; \rightarrow\right[$? sur $\left]\leftarrow; \frac{1}{2}\right]$? sur $\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

b) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_3(x)$. f_1 et f_3 coïncident-elles sur $\mathbb{R}^+$? sur $\mathbb{R}^-$? sur $\left[\frac{1}{2}; \rightarrow\right[$? sur $\left]\leftarrow; \frac{1}{2}\right]$? sur $\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

c) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement la fonction f_1.

25 (2). On donne la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + 1 + |2x - 3|.$$

Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

26 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{|x| + x}{2}$$

et

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{|x| - x}{2}$$

27 (3). On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 2x \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -2x.$$

Représenter f, f^{-1}, g et g^{-1} dans un même repère orthonormé (O, I, J).
Démontrer que les droites représentatives de f et g sont symétriques par rapport à (OJ).

28 (3). On donne les fonctions :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -3x$; $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{2}x$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x$; $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$; $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$.

Ranger dans l'ordre croissant :

$f_1(1)$; $f_2(1)$; $f_3(1)$; $f_4(1)$; $f_5(1)$; $f_6(1)$.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construire les points de coordonnées $(1 ; f_1(1))$; $(1 ; f_2(1))$; $(1 ; f_3(1))$; $(1 ; f_4(1))$; $(1 ; f_5(1))$ et $(1 ; f_6(1))$.
Tracer les droites représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6.

29 (3). Représenter dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les fonctions linéaires f, g et h telles que $f(0,7) = 0,56$; $g(0,55) = 0,66$ et $h(0,8) = -0,11$ ainsi que la droite (D_1) ensemble des points d'abscisse 1.
Trouver à l'aide du graphique les coefficients directeurs des droites représentatives de f, g et h.
Vérifier par le calcul.

30 (3). Une fonction linéaire f est telle que $f(12) = 42$.

Calculer $f(1)$; $f(13)$; $f\left(\frac{2}{7}\right)$.

31 (3). Une fonction linéaire est telle que $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$.
Calculer $f(\sqrt{2})$, $f(2)$, $f(2 - \sqrt{2})$.

32 (3). Une fonction linéaire g est telle que $g(14) = -2,1$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 5$.

33 (3). Soit f une fonction linéaire. Sachant que $f\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{12}{13}$, calculer $f\left(-\frac{22}{7}\right)$; $f\left(\frac{242}{7}\right)$; $f\left(\frac{11}{7}\right)$; $f\left(\frac{33}{7}\right)$; $f(22)$; $f\left(\frac{11}{14}\right)$; $f\left(\frac{13 \times 22}{7}\right)$.

34 (3). Soit f une fonction linéaire. Sachant que $f(3) \simeq 1,72$, encadrer $f(2)$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

35 (3). La distance parcourue par un automobiliste est proportionnelle à la durée du parcours. Comment s'appelle le coefficient de proportionnalité ?

36 (3). Les dimensions apparentes d'objets vus au microscope sont proportionnelles à leurs dimensions réelles. Quand ces dimensions sont mesurées avec la même unité, comment s'appelle le coefficient de proportionnalité ?

37 (3). Les distances sur une carte routière sont proportionnelles aux distances réelles sur le terrain. Quand ces distances sont mesurées avec la même unité, comment s'appelle le coefficient de proportionnalité ?

38 (3). Un commerçant qui vend des pagnes et du fil à coudre veut réaliser une table de correspondance entre les mesures en yards et les mesures en mètres sachant que ces deux mesures sont proportionnelles. Compléter le tableau suivant :

Mesures en yards	1	10	11	80	100	500
Mesures en mètres	0,914 4					

Quel est le coefficient de proportionnalité ?
Une « demi-pièce » de pagne a une longueur de 5,5 yards, elle est en général considérée comme représentant 5 mètres de tissu ; en réalité une « demi-pièce » ne fait pas 5 mètres, quelle est au centimètre près la mesure d'une demi-pièce ?

39 (3). Les mesures des secteurs angulaires en degrés et en grades sont proportionnelles. Compléter le tableau suivant :

Mesures en degrés	0	15	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesures en grades										200

40 (3). Un navigateur veut réaliser un tableau de correspondance entre des mesures en milles marins et des mesures en kilomètres. Ces deux suites de mesures sont proportionnelles. Compléter le tableau suivant :

Mesures en milles	1	10	60	100	500	1 000	5 400
Mesures en km (au mètre près)							10^4

41 (3). Un automobiliste veut réaliser un tableau de correspondance entre les indications du compteur de vitesse de sa voiture américaine qui est gradué en miles/heure et des vitesses en km/h.
Compléter le tableau suivant sachant que les deux suites de mesures de vitesse sont proportionnelles.

Vitesse en miles/heure	10	20	30	50	80	100	120
Vitesse en km/h (arrondie à la première décimale)						160,9	

42 (3). Sur un cercle de rayon r, la mesure en dm de la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure en grades. Compléter le tableau suivant :

Mesure en grades	0	10	25	50	100	150	175	190	200
Mesure de la longueur en dm ($r = 1$)									π

43 (3). Le tableau de correspondance suivant est incomplet. Le compléter sachant que les deux suites sont proportionnelles et que 100 est la somme des termes manquants de la première suite.

		100
3	5	

Les calculs effectués reviennent à partager 100 *proportionnellement* à 3 et 5.

Applications :
Partager 143 proportionnellement aux deux nombres 3,5 et 7,5.
Partager 450 proportionnellement aux trois nombres 2, 3 et 5.

44 (3). Partager un segment $[AB]$ de 6,3 cm en segments de mesures proportionnelles à 3 et 4. (Voir l'exercice précédent.) Trouver également un procédé géométrique.

45 (3). Sur une carte au $\frac{1}{20\,000}$, un terrain est représenté par un carré de 6,25 cm² d'aire. Quelle est la superficie réelle de ce terrain en hectares ?
Les aires étant exprimées avec la même unité, quel est le rapport de la superficie du carré sur la carte à la superficie réelle du terrain.
Comparer ce rapport et l'échelle de la carte.

46 (3). Des élèves de Troisième ont élaboré le tableau suivant en mesurant, à la même heure, les hauteurs de bâtons plantés verticalement dans le sol et la longueur des ombres correspondantes :

Hauteurs des bâtons en cm	80	120	160	200	240
Longueurs des ombres en cm	26	39	52	65	78

La longueur de l'ombre est-elle proportionnelle à la hauteur du bâton ? A la même heure, des élèves ont mesuré la longueur de l'ombre du mât planté dans la cour de leur collège et ont trouvé 1,30 m. Quelle est la hauteur de ce mât ?

47 (3). Les factures établies par la société « Le gaz de Côte d'Ivoire » portent les indications suivantes :
Prix du m^3 de gaz : 646 F.
Redevance compteur : 1 700 F.
Ajouter 15 F en cas de paiement en espèces.

Sur un même graphique, représenter les deux fonctions affines qui, à la consommation x (en m^3), font correspondre le montant de la facture y (en F), selon que le paiement s'effectue par chèque ou en espèces. En utilisant ce graphique, répondre à la question suivante : pour payer sa facture de gaz, M. Diomandé a versé 3 007 F en espèces ; quelle a été sa consommation ?
(On prendra sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 200 F.)

Démontrer

48 (3). f étant une fonction linéaire, démontrer que, quels que soient les réels r et s :

$f(r \times s) = r \times f(s)$ et $f(r \times s) = s \times f(r)$.

49 (1). On donne une fonction affine :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b .$$

Soit α et β deux réels positifs donnés.

1) Montrer que l'image par f de la moyenne arithmétique de α et β est la moyenne arithmétique des images par f de α et β.

2) On rappelle que la moyenne géométrique des nombres α et β est le réel $\sqrt{\alpha\beta}$.

Soit : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x + 9$ et $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 5 . \end{cases}$

On appelle G la moyenne géométrique de 3 et 5.
Calculer : $g(3)$, $g(5)$, $g(G)$ et la moyenne géométrique de $g(3)$ et $g(5)$; comparer cette dernière et $g(G)$.
L'image par une fonction affine f de la moyenne géométrique de deux réels positifs α et β est-elle la moyenne géométrique des images par f de α et β ?

3) On rappelle que la moyenne harmonique des nombres 3 et 5 est le réel H tel que $\frac{2}{H} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.
Dans le cas particulier de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 4x + 9$$

comparer $g(H)$ et la moyenne harmonique de $g(3)$ et $g(5)$.

L'image par une fonction affine f de la moyenne harmonique de deux réels α et β est-elle la moyenne harmonique des images par f de α et β ?

50 (1). Soit un triangle dont les côtés mesurent (en cm) : 5, 12 et 13.
Montrer que ce triangle est rectangle. Montrer qu'un triangle dont les côtés mesurent 15, 36 et 39 est aussi un triangle rectangle.
Que peut-on dire des suites 5, 12, 13 et 15, 36, 39 ?
Les mesures a, b, c des côtés d'un triangle et les mesures a', b', c' des côtés d'un autre triangle forment deux suites proportionnelles ; démontrer que si l'un des triangles est rectangle, l'autre l'est aussi.

Réfléchir

51 (1). Représenter graphiquement les fonctions suivantes (pour chacune d'elles, on choisira un repère convenable).

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 10^5 x - 2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1\,000} x + 10^6$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -10^3 x + 10^{11}$$
$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -0{,}01 x + 50$$
$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0{,}04 x + 10\,050 .$$

52 (2). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on marque les points :

$A(-3 ; 6)$; $B(-1 ; 4)$; $C(-1 ; 2)$;
$D(0 ; 1)$; $E(0 ; -2)$; $F(3 ; -3)$;
$G(3 ; 4)$; $H(5 ; 5)$; $K(5 ; 0)$.

1) *a*) Vérifier que $]FA) \cup [FH)$ est la représentation graphique d'une fonction.
b) Trouver cette fonction (on la notera f).
c) Calculer $f(-5)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(3)$; $f(5)$.
d) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$f(x) = 4$, $f(x) = 3$, $f(x) = 0$.

2) *a*) Vérifier que $[BA) \cup]CF[\cup [GH)$ est la représentation graphique d'une fonction.
b) Trouver cette fonction (on la notera g).
c) Calculer $g(-5)$; $g(-3)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g(2)$; $g(3)$; $g(5)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$g(x) = 7$, $g(x) = 3$,
$g(x) = 4$, $g(x) = 2{,}5$.
$g(x) = 3{,}5$,

3) *a*) Vérifier que $]BA) \cup [CE[\cup [DG] \cup]FK)$ est la représentation graphique d'une fonction.

b) Trouver cette fonction (on la notera h).

c) Calculer :

$h(-5)$; $h(-3)$; $h(-1)$; $h(-0{,}5)$;
$h(0)$; $h(1)$; $h(3)$; $h(5)$; $h(7)$.

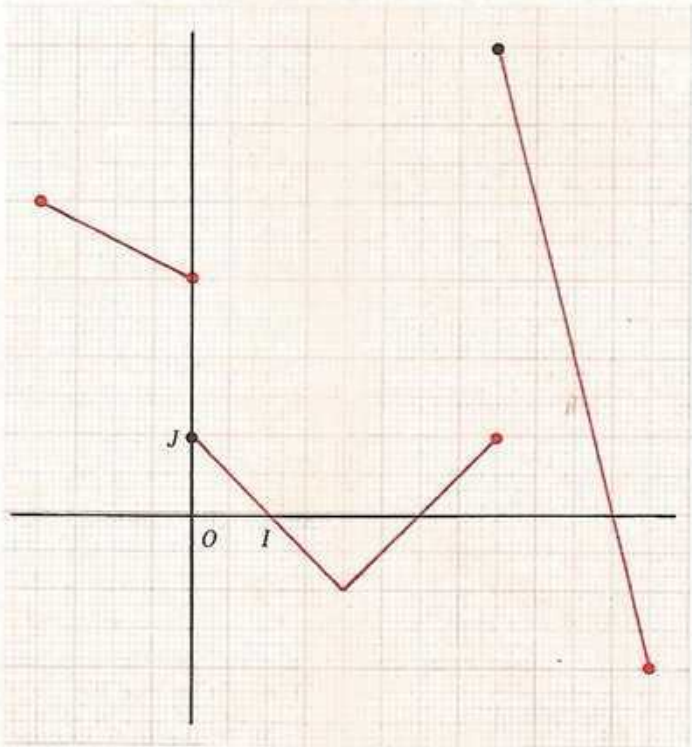
d) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$h(x) = 6$; $h(x) = 4$;
$h(x) = 3$; $h(x) = 1{,}5$;
$h(x) = 0$; $h(x) = -1$;
$h(x) = 1$; $h(x) = -4$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = g(x)$
b) $f(x) = h(x)$
c) $g(x) = h(x)$.

53 (2). *a*) Trouver l'application f de $[-2 ; 6]$ dans $\mathbb{R}$ donnée par la représentation graphique ci-dessous :



b) Trouver à l'aide du graphique

$f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$;
$f(3)$; $f(4)$; $f(5)$; $f(6)$.

Vérifier par le calcul.

c) Résoudre graphiquement dans $[-2 ; 6]$

$f(x) = 6$; $f(x) = 5$;
$f(x) = 4$; $f(x) = 3$;
$f(x) = 2$; $f(x) = 1$;
$f(x) = 0$; $f(x) = -1$;
$f(x) = -2$.

d) Donner l'arrondi à la 2e décimale de chacune des solutions des équations dans $\mathbb{R}$:

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x) = 4{,}47$.

54 (2). On considère les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; -3]$ alors $f(x) = x + 5$
si $x \in]-3 ; 1]$ alors $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
si $x \in]1 ; \rightarrow[$ alors $f(x) = 5 - x$.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; -1[$ alors $g(x) = x + 5$
si $x \in \left]-1 ; \frac{1}{2}\right[$ alors $g(x) = 4$
si $x \in \left[\frac{1}{2} ; \rightarrow\right[$ alors $g(x) = 5 - x$.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; -2]$ alors $h(x) = -x - 5$
si $x \in]-2 ; 2[$ alors $h(x) = \frac{2}{3}x + 4$
si $x \in [2 ; \rightarrow[$ alors $h(x) = x - 5$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x)$$
$$f(x) = h(x)$$
$$g(x) = h(x).$$

Vérifier à l'aide d'un graphique.

55 (2). On donne

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; 1]$ alors $f(x) = -3$
si $x \in]1 ; 3[$ alors $f(x) = 1$
si $x \in [3 ; \rightarrow[$ alors $f(x) = 5$.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; -2]$ alors $g(x) = 0$
si $x \in]-2 ; 2]$ alors $g(x) = -1$
si $x \in]2 ; \rightarrow[$ alors $g(x) = 5$.

Trouver $g \circ f$ et $f \circ g$.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), faire la représentation graphique de f.
Même question pour g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

56 (2). On donne

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; 1]$ alors $f(x) = -2x + 1$
si $x \in]1 ; 3[$ alors $f(x) = x + 2$
si $x \in [3 ; \rightarrow[$ alors $f(x) = 5x - 3$.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

si $x \in]\leftarrow ; -2]$ alors $g(x) = 2x + 3$
si $x \in]-2 ; 2]$ alors $g(x) = 3x + 1$
si $x \in]2 ; \rightarrow[$ alors $g(x) = x - 4$.

Trouver $g \circ f$ et $f \circ g$.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), tracer la représentation graphique de f. Même question pour g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Problèmes

57. Un piéton parcourt 9 m en 5 s. Quelle distance parcourt-il en 8 s ? en 12 s ?

58. Quand un automobiliste roule en « première », la vitesse de son véhicule est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur, le coefficient de proportionnalité de la vitesse du véhicule (en km/h) à la vitesse de rotation (en t/min) est : $\frac{8}{1\,000}$; quand il roule en « seconde », la vitesse du véhicule est aussi proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur, mais le coefficient de proportionnalité est : $\frac{12{,}5}{1\,000}$; il en est de même en « troisième » et « quatrième » avec pour coefficients de proportionnalité respectifs : $\frac{20}{1\,000}$ et $\frac{29}{1\,000}$.

1) On considère les fonctions linéaires v_1, v_2, v_3, v_4 qui, à la vitesse de rotation du moteur, font correspondre la vitesse du véhicule, selon que l'automobiliste roule respectivement en première, seconde, troisième et quatrième. La vitesse de rotation du moteur ne peut pas dépasser 7 000 tr/min.
On a :

$$v_1 : [0 ; 7\,000] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{8}{1\,000}x.$$

Définir

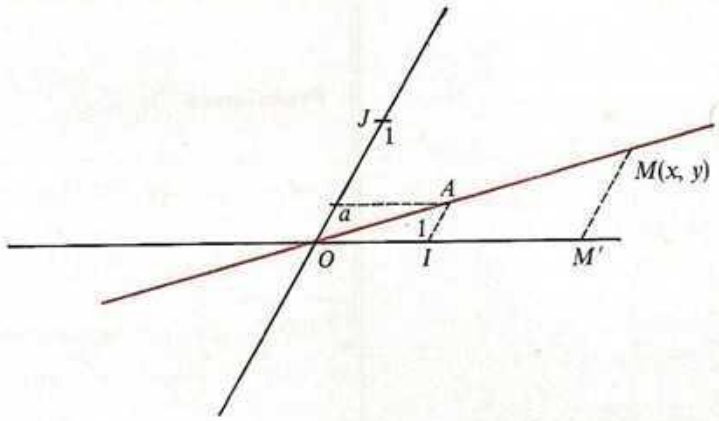
$$v_2, v_3, v_4.$$

Représenter sur un même graphique v_1, v_2, v_3, v_4.

2) En cours d'accélération, un conducteur « passe à la vitesse supérieure » chaque fois que le nombre de tours par minute atteint 5 000. A quelle vitesse, indiquée sur le tableau de bord en km/h, doit-il passer la seconde ? la troisième ? la quatrième ?
En admettant que les « passages à la vitesse supérieure » s'effectuent sans ralentissement de l'automobile, quels sont les nombres de tours par minute effectués par le moteur après chaque passage de vitesse ? (Les résultats seront calculés puis contrôlés sur le graphique.)

Thèmes d'études

59 (3). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ représentée dans le plan muni d'un repère (O, I, J) par une droite passant par l'origine, distincte de (OJ).



Appelons a l'image de 1 par f, A le point de coordonnées $(1, a)$ et soit M un autre point de (OA).
Supposons que les coordonnées x et y de M soient de même signe (la démonstration serait similaire si x et y étaient de signes contraires).
Soit M' le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ). On a : $\overline{OM'} = x\overline{OI}$.
Compléter :

$$\overline{OM} = x \times \ldots \quad \text{et} \quad \frac{OM'}{OI} = \frac{OM}{\ldots} = \frac{M'M}{\ldots}$$

En déduire que : $f(x) = ax$ et énoncer le théorème ainsi démontré.

60 (1). On donne deux fonctions affines quelconques

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b \qquad x \mapsto cx + d\,.$$

1) a étant un réel non nul, trouver f^{-1}.

2) Démontrer que la composée de f et f^{-1}, dans un ordre quelconque, est l'application

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

appelée « identité de $\mathbb{R}$ ».

3) Démontrer que la composée de deux fonctions affines f et g est une fonction affine.
Démontrer que les droites représentatives de $f \circ g$ et $g \circ f$ sont parallèles.
La composition des fonctions affines est-elle commutative ?
Vérifier en prenant : $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -3x + 2$. Représenter dans ce cas $f \circ g$ et $g \circ f$.

4) Démontrer que la composition des fonctions linéaires est commutative.
Vérifier sur un exemple.

5) On suppose $a = 1$ et $c = 1$. Démontrer que, dans cette hypothèse, la composition des fonctions affines est commutative. Vérifier sur un exemple.

6) On donne la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x - 2$.

Trouver une fonction affine k telle que :

$$h \circ k = k \circ h\,.$$

En trouver deux autres.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter graphiquement h et les trois fonctions trouvées.

6 Problèmes du premier degré

Leçon 1 : MISE EN ÉQUATION
Leçon 2 : RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Sur la tombe du mathématicien grec Diophante (*) a été gravée l'inscription suivante :

« Passant ! Ci-gît Diophante.
Les chiffres diront la durée de sa vie.
Sa douce enfance en fait le sixième.
Un douzième de sa vie a passé, et son menton s'est couvert de duvet.
Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfant.
Cinq ans ont passé ; la naissance d'un fils l'a rendu heureux.
Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois plus courte que celle de son père.
Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre ans après la mort de son fils.
Dis, passant, quel âge avait atteint Diophante lorsque la mort l'a enlevé ? »

1 Mise en équation

En classe de Quatrième et en classe de Troisième, nous faisons des mathématiques :
— de l'algèbre : calculs, transformations d'écriture, résolutions d'équations et d'inéquations, études de fonctions, démonstrations ;
— de la géométrie : dessins, mesures, démonstrations, constructions.

Faire des mathématiques, ce n'est pas seulement cela, *c'est aussi résoudre des problèmes.*
Pour résoudre des problèmes, il faut :

(*) Diophante, qui vécut au IIIe siècle après J.-C., est l'auteur d'un ouvrage intitulé « L'arithmétique » ; il y introduit l'usage de symboles en algèbre et s'intéresse tout particulièrement aux équations du premier degré dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: les *équations diophantiennes.*

1) Savoir distinguer ce qui est connu de ce qui est inconnu

Exemples

Dans chacun des énoncés suivants, quelles sont les grandeurs connues et les grandeurs inconnues ?

a) Un père a 32 ans et son fils en a 6 ; dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils ?

b) Trouver un naturel sachant que le produit de ce nombre par le naturel qui le suit surpasse de 13 le carré du premier.

c) La somme de deux naturels consécutifs est 71. Quels sont ces naturels ?

d) On veut charger sur un camion pouvant porter 3 tonnes de marchandises, des caisses de 50 kg et de 70 kg. Trouver toutes les possibilités de charger ce camion à plein.

Dans les énoncés *b*) et *c*), si l'un des naturels cherchés est découvert, comment obtient-on l'autre ?

2.a) Savoir exprimer une grandeur en langage mathématique

Exemples

— Dans l'énoncé *a*) précédent, appelons n le nombre d'années au bout desquelles l'âge du père sera le triple de l'âge du fils ; exprimer en langage mathématique l'âge du père dans n années, l'âge du fils dans n années.

— Dans l'énoncé *c*) appelons p le plus petit des deux naturels cherchés ; exprimer le second naturel cherché en fonction de p.

— Dans l'énoncé *b*) appelons n l'entier cherché ; exprimer le produit de cet entier par l'entier qui le suit en fonction de n.

— Dans l'énoncé *d*) appelons x le nombre de caisses de 50 kg et y le nombre de caisses de 70 kg qu'il faut trouver ; exprimer en langage mathématique la masse des x caisses de 50 kg, celle des y caisses de 70 kg et la masse totale de toutes ces caisses.

2.b) Savoir traduire une phrase du langage courant en langage mathématique et inversement

Exemples

— Avec les données de l'énoncé *a*) exprimer en langage mathématique : « dans n années, l'âge du père sera le triple de l'âge du fils ».

— Indiquer, parmi les équations ou inéquations suivantes, celles qui traduisent en langage mathématique le problème *b*) :

$$n(n+1) + n^2 = 13; \qquad n(n+1) = n^2 + 13;$$
$$n(n+1) > 13^2; \qquad n(n+1) = (n+1)^2 + 13.$$
$$n(n+1) - 13 = n^2;$$

— Avec les données de l'énoncé *c*) exprimer en langage mathématique : « la somme de deux naturels consécutifs est 71 ».

— Indiquer, parmi les équations suivantes, celles qui traduisent en langage mathématique le problème *d*) :

$$50x + 70y = 3\,; \qquad \frac{x}{50} + \frac{y}{70} = 3\,000\,; \qquad x + y = \frac{3\,000}{3\,500}\,;$$

$$3\,500xy = 3\,000\,; \qquad 50x + 70y = 3\,000\,; \qquad \frac{x}{70} + \frac{y}{50} = \frac{3\,000}{3\,500}\,.$$

3) Savoir utiliser les outils mathématiques pour résoudre une équation, une inéquation ou un système

4) Savoir écarter des réponses manifestement fausses

Exemples

Dans un problème où il fallait trouver la vitesse d'un piéton, un élève a trouvé : 125 km/h ! Dans un problème où il fallait trouver la consommation d'essence d'une automobile pour 100 km, un élève a trouvé 12 000 ℓ aux 100 km !
Un élève a calculé sa moyenne trimestrielle sur 20 et a trouvé 24,5 ! Que peut-on penser de ces réponses ? Ne sont-elles pas manifestement fausses ?

Exercices

Reprenons certains énoncés de problèmes du paragraphe 1.

— Au problème *a*) des élèves ont trouvé les réponses suivantes :

$$-7\,; \qquad 150\,; \qquad 7\,; \qquad 0\,.$$

Quelles sont celles qui sont manifestement fausses ? Pourquoi ?

— Au problème *b*) des élèves ont trouvé les réponses suivantes ?

$$-13\,; \qquad 6{,}5\,; \qquad \frac{12}{13}\,; \qquad 13\,; \qquad \sqrt{13}\,.$$

Quelles sont celles qui sont manifestement fausses ? Pourquoi ?

— Au problème *d*) des élèves ont trouvé les réponses suivantes :

$$(460\,;\ -100)\,; \qquad (4\,600\,;\ 1\,000)\,; \qquad \left(500\,;\ \frac{500}{7}\right)\,;$$

$$(600\,;\ 0)\,; \qquad (460\,;\ 100)\,; \qquad (31{,}86\,;\ 20{,}1)\,.$$

Quelles sont celles qui sont manifestement fausses ? Pourquoi ?

En résumé, on constate que, pour résoudre un problème, avant d'aborder la partie purement « calcul » ③, il faut :

— reconnaître les inconnues et désigner chacune d'elles par une lettre ① ;
— utiliser ces lettres pour exprimer en langage mathématique les diverses grandeurs apparaissant dans l'énoncé (2.a) ;
— traduire l'énoncé sous forme d'équations ou d'inéquations (2.b) ;

Les étapes (2.a) et (2.b) constituent ce que l'on appelle la « mise en équation » du problème.

2 Résolution de problèmes

1) Exemple 1



Énoncé :

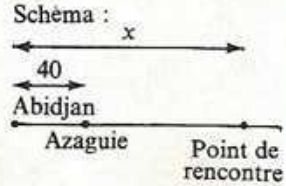
Deux camions, l'un roulant à 75 km/h, l'autre à 50 km/h, partent en même temps, le premier d'Abidjan et le second d'Azaguié. Ils se rendent à Akoupé située à 142 km d'Abidjan. Azaguié est à 40 km d'Abidjan. A quelle distance d'Abidjan le premier camion rejoindra-t-il le second ?

Solution :

Distinguer le connu de l'inconnu

Choix de l'inconnue : Le nombre cherché est la distance d'Abidjan au point de rencontre des deux camions ; appelons x cette distance exprimée en km.

Schéma :



Exprimer une grandeur en langage mathématique.

Mise en équation

Rappel :

Durée du parcours = $\dfrac{\text{Distance parcourue}}{\text{Vitesse}}$

Au moment de la rencontre :

— le premier camion a parcouru x (km) à la vitesse de 75 km/h ; la durée de son parcours en heures est donc : $\dfrac{x}{75}$.

— le second camion a parcouru $x - 40$ (km) à la vitesse de 50 km/h ; la durée de son parcours en heures est donc : $\dfrac{x - 40}{50}$.

Traduire une phrase en langage mathématique

Le temps qui s'écoule entre le moment du départ et le moment de la rencontre est le même pour les deux camions, donc : $\dfrac{x}{75} = \dfrac{x - 40}{50}$.

Utiliser les outils mathématiques

Résolution

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 50\,x &= 75(x - 40) \\ 2\,x &= 3(x - 40) \\ 2\,x &= 3\,x - 120 \\ -\,x &= -\,120 \\ x &= 120. \end{aligned}$$

$S = \{ 120 \}$

Écarter une réponse manifestement fausse.

Vérification

Nous cherchons une distance inférieure à celle qui sépare Abidjan d'Akoupé ; la solution de l'équation est un réel positif inférieur à 142, cette réponse n'est donc pas à écarter. Vérifions que 120 km est solution du problème proposé.

— Durée du trajet du premier camion : $\frac{120}{75} = 1{,}6$ (en h).

— Durée du trajet du second camion : $\frac{120 - 40}{50} = \frac{80}{50}$

$\frac{80}{50} = 1{,}6$

(1,6 h soit 1 h 36 min).

Conclusion Le premier camion rejoint le second à 120 km d'Abidjan.

2) Exemple 2

Énoncé :

Sur une droite (Δ) on considère deux points A et B. L'unité étant le centimètre, on a : $d(A, B) = 15$.
Trouver un point M de (Δ) distinct de A et B, tel que :

$$2\,d(A, M) + 3\,d(M, B) = 40.$$

Solution :

Le problème posé revient à trouver la position du point M sur la droite (Δ). On est amené à envisager trois cas de figures :



Choix de l'inconnue Dans chacun des cas de figures précédents, la position de M est définie par la distance $d(A, M)$. Posons $d(A, M) = x$ (l'unité est le centimètre).

1er *cas*

Mise en équation

$M \in [AB]$
donc $d(A, B) = d(M, A) + d(M, B)$.
d'où : $d(M, B) = 15 - x$.
La condition imposée par le problème se traduit par :

$$2x + 3(15 - x) = 40.$$

On obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue.

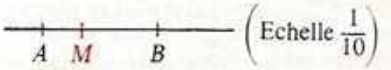
Résolution

$$\begin{aligned} 2x + 45 - 3x &= 40 \\ -x &= -5 \\ x &= 5 \\ S &= \{5\}. \end{aligned}$$

Vérification La solution de l'équation est un réel compris entre 0 et 15, le point M correspondant est bien élément de $[AB]$; vérifions que le réel 5 est solution du problème posé :

$$2 \times 5 + 3(15 - 5) = 40.$$

Conclusion Il existe un point M tel que $M \in [AB]$ et $2\,d(A, M) + 3\,d(M, B) = 40$, ce point est situé à 5 cm de A.



2e *cas*

Mise en équation

$B \in [AM]$
donc $d(A, M) = d(A, B) + d(B, M)$
d'où : $d(M, B) = x - 15$.
La condition imposée par le problème se traduit par :

$$2x + 3(x - 15) = 40.$$

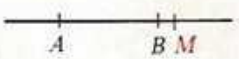
Résolution

$$2x + 3x - 45 = 40$$
$$5x = 85$$
$$x = 17$$
$$S = \{17\}.$$

Vérification La solution de l'équation est un réel supérieur à 15, le point M correspondant est bien tel que $B \in [AM]$; vérifions que le réel 17 est solution du problème posé :

$$2 \times 17 + 3 \times (17 - 15) = 40.$$

Conclusion Il existe un point M tel que $B \in [AM]$ et $2\,d(A, M) + 3\,d(M, B) = 40$, ce point est situé à 17 cm de A.



(Echelle $\frac{1}{10}$)

3e *cas*

Mise en équation $A \in [BM]$
donc $d(B, M) = d(A, M) + d(A, B)$
d'où $d(M, B) = x + 15$.
La condition imposée par le problème se traduit par :

$$2x + 3(x + 15) = 40.$$

Résolution

$$2x + 3x + 45 = 40$$
$$5x = -5$$
$$x = -1$$
$$S = \{-1\}.$$

Écarter une réponse manifestement fausse

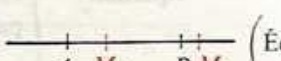
Vérification La solution de l'équation est négative; or une distance est un réel positif; le réel -1 n'est donc pas solution du problème posé.

Conclusion Il n'existe pas de point M tel que $A \in [BM]$ et $2\,d(A, M) + 3\,d(M, B) = 40$.

Conclusion générale Sur la droite (AB) il existe deux points tels que :

$$2\,d(A, M) + 3\,d(M, B) = 40$$

— l'un M_1 situé entre A et B à 5 cm de A,
— l'autre M_2 situé à droite de B à 17 cm de A.



(Échelle $\frac{1}{10}$)

Exercice Combien d'années a vécu Diophante ? (voir le problème posé en tête de chapitre).

3) Exemple 3

Parfois, la solution fournie par l'équation n'est pas conforme aux données du problème, mais néanmoins il est possible de l'interpréter.

Énoncé :

Un père a actuellement 43 ans, son fils 24. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge du fils ?

Solution :

Appelons n le nombre d'années cherché ; $n \in \mathbb{N}$.
Dans n années, l'âge du père sera : $43 + n$, l'âge du fils sera : $24 + n$.
Le problème revient donc à résoudre l'équation :

$$43 + n = 2(24 + n)$$
$$43 + n = 48 + 2n$$
$$43 - 48 = 2n - n$$
$$-5 = n$$

Interprétation :

Dans $\mathbb{R}$, la solution de l'équation est -5 ; or $-5 \notin \mathbb{N}$. Le problème n'a donc pas de solution : il n'est pas possible que *dans un certain nombre* d'années l'âge du père soit le double de l'âge du fils.
Mais peut-être le nombre -5 trouvé nous indique-t-il que l'âge du père a été le double de l'âge du fils *il y a cinq ans* ? Vérifions-le :

$$43 - 5 = 38$$
$$24 - 5 = 19.$$

Effectivement : 38 est le double de 19.
L'interprétation de la solution de l'équation permet de rédiger un énoncé de problème ayant une solution :
« Un père a actuellement 43 ans, son fils 24. Quand l'âge du père a-t-il été le double de l'âge du fils ? ». Mettre ce problème en équation et terminer sa résolution.

4) Exemple 4 : Problème à deux inconnues

Énoncé :

Comment peut-on payer une somme de 17 500 F avec 24 billets, les uns de 500 F, les autres de 1 000 F.

Solution :

Choix de l'inconnue : Les nombres inconnus sont : le nombre de billets de 500 F et le nombre de billets de 1 000 F ; appelons-les respectivement x et y. On a : $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \leqslant 24$, $y \leqslant 24$.

Mise en équation :

— Le nombre total de billets est $x + y$ donc

$$x + y = 24 \quad ①.$$

— La somme représentée par x billets de 500 F est $500\,x$; celle représentée par y billets de 1 000 F est $1\,000\,y$, la somme totale est $500\,x + 1\,000\,y$ donc :

$$500\,x + 1\,000\,y = 17\,500 \quad ②.$$

Résolution :

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système constitué par les équations ① et ② :

$$\begin{cases} x + y = 24 & ① \\ 500\,x + 1\,000\,y = 17\,500 & ②. \end{cases}$$

En simplifiant l'équation ② on obtient un système équivalent :

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 2\,y = 35. \end{cases}$$

Par combinaison on obtient :

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 11. \end{cases}$$

Vérifier que (13 ; 11) est la solution du système.

Vérification : La solution du système est un couple de naturels tous deux inférieurs à 24 et tels que :

$$13 + 11 = 24 \quad \text{et} \quad 13 \times 500 + 11 \times 1\,000 = 17\,500.$$

Le couple (13 ; 11) est donc bien **la** solution du problème.

Conclusion : Il n'y a qu'une seule façon de payer 17 500 F avec 24 billets, les uns de 500 F, les autres de 1 000 F, c'est de payer avec 13 billets de 500 F et 11 billets de 1 000 F.

Exercice : Résoudre le problème précédent en ne prenant qu'une seule inconnue, par exemple : le nombre de billets de 500 F.

5) Exemple 5 : Problème conduisant à une inéquation dans $\mathbb{R}$

Énoncé :

Koffi fait ses comptes. Il a dépensé 900 F à la papeterie, puis il a donné la moitié de ce qu'il lui restait à sa sœur ; ensuite il a dépensé 50 F pour prendre l'autobus. Il lui reste

maintenant moins du tiers de la somme qu'il avait au départ. Combien possédait-il au maximum avant d'aller à la papeterie ? Quelle pouvait être sa somme d'argent au départ ?

Solution :

Choix de l'inconnue

L'inconnue est la somme que possédait Koffi au départ, appelons-la S (l'unité étant le franc).

$$S \in \mathbb{N}^*.$$

Mise en équation

Après être allé à la papeterie, il reste à Koffi :

$$S - 900.$$

Il en donne la moitié à sa sœur, soit : $\frac{S - 900}{2}$, il lui reste donc l'autre moitié : $\frac{S - 900}{2}$.

Après avoir payé son ticket d'autobus il lui reste : $\frac{S - 900}{2} - 50$.

Cette somme est inférieure au tiers de la somme qu'il avait au départ, c'est-à-dire à $\frac{S}{3}$.

On a donc : $\frac{S - 900}{2} - 50 < \frac{S}{3}$.

Résolution

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$S \in \mathbb{R}, \quad \frac{S - 900}{2} - 50 < \frac{S}{3}$$

est l'intervalle $]\leftarrow ; 3\,000[$.

Vérification

Chaque solution de l'inéquation est-elle une solution du problème posé ?

— S est un naturel non nul ;

— après avoir dépensé 900 F, Koffi doit pouvoir partager avec sa sœur ; le nombre $S - 900$ doit donc être pair ;

— Koffi doit pouvoir payer son transport avec ce qu'il lui reste, donc S doit être tel que :

$$\frac{S - 900}{2} \geqslant 50$$

$$S - 900 \geqslant 100$$

$$S \geqslant 1\,000.$$

Finalement on doit avoir : $\begin{cases} S \in \mathbb{N}^* \\ S \text{ pair} \\ 1\,000 \leqslant S < 3\,000. \end{cases}$

Conclusion

La somme que possédait Koffi au départ pouvait être : 1 000 F ou 1 002 F ou 1 004 F ou... 2 998 F.

6) Exemple 6 : Problème conduisant à une inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Énoncé :

Au cours d'une semaine commerciale, dans un magasin, on donne un billet de tombola à chaque client achetant un paquet de farine de 1 kg à 150 F, ou une plaque de beurre de 250 g à 300 F. Mme Kouamé dispose de 1 800 F et son sac ne peut supporter que 3 kg de marchandises. Comment peut-elle obtenir le plus grand nombre de billets de tombola ? (On utilisera une méthode graphique.)

Solution :

Choix des inconnues

Les nombres cherchés sont :
— le nombre de paquets de farine achetés, nous l'appellerons x,
— le nombre de plaques de beurre achetées, nous l'appellerons y :

$$x \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N} \quad (1).$$

Mise en équation

Le prix en francs de x paquets de farine est $150\,x$; le prix en francs de y plaques de beurre est $300\,y$.
Pour que Mme Kouamé puisse payer x paquets de farine et y plaques de beurre, leur prix total : $150\,x + 300\,y$ ne doit pas dépasser 1 800 F.
Les nombres x et y doivent donc vérifier l'inéquation :

$$150\,x + 300\,y \leqslant 1\,800 \quad (2).$$

La masse en kilogrammes de x paquets de farine est $x \times 1$, c'est-à-dire x ; la masse en kilogrammes de y plaques de beurre est :

$$y \times 0{,}250 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{4}y.$$

Pour que le sac de Mme Kouamé puisse supporter x paquets de farine et y plaques de beurre, leur masse totale $x + \frac{1}{4}y$, ne doit pas dépasser 3 kg. Les nombres x et y doivent donc vérifier l'inéquation :

$$x + \frac{1}{4}y \leqslant 3 \quad (3).$$

Résolution graphique

Montrer que les inéquations (2) et (3) peuvent être remplacées par les inéquations équivalentes suivantes :

$$x + 2y - 12 \leqslant 0 \quad (2')$$

et

$$4x + y - 12 \leqslant 0 \quad (3').$$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), donner une représentation graphique de l'ensemble des solutions des inéquations :

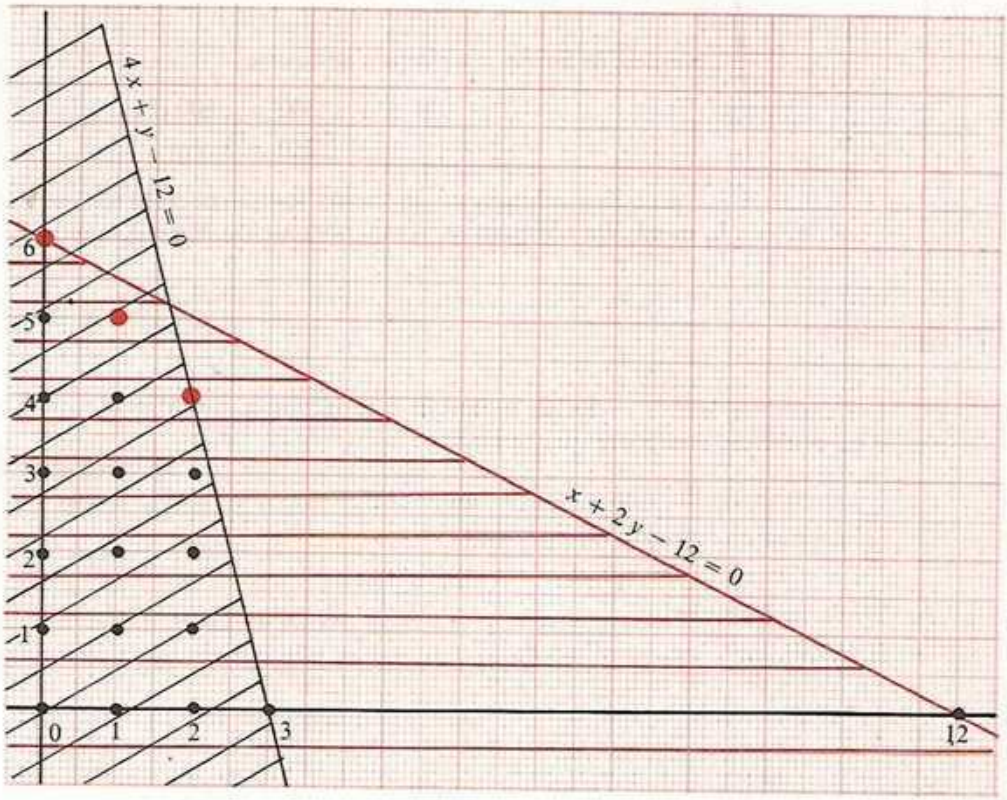
$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x + 2y - 12 \leqslant 0$ (hachurer en rouge).
$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $4x + y - 12 \leqslant 0$ (hachurer en noir).

Résolution graphique

La région du plan hachurée à la fois en rouge et en noir représente l'ensemble des couples de réels vérifiant les deux inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x + 2y - 12 \leqslant 0$$
$$4x + y - 12 \leqslant 0 .$$

La condition ① : $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ impose de ne rechercher que des couples de naturels. Les couples de naturels vérifiant les conditions ①, ② et ③ sont donc les couples de coordonnées des points représentés en noir ou en rouge sur le graphique.



Vérification

Les points rouges de coordonnées respectives (0 ; 6), (1 ; 5), (2 ; 4) donnent les solutions cherchées ; pour ces points le nombre $x + y$ est maximum : $0 + 6 = 6$, $1 + 5 = 6$, $2 + 4 = 6$. On peut vérifier que pour les points noirs, le nombre $x + y$ est inférieur à 6.

Conclusion générale

Mme Kouamé obtiendra donc le maximum de billets de tombola, c'est-à-dire 6, en achetant :

6 plaques de beurre seulement,

$$0 \times 150 + 6 \times 300 = 1\,800 \text{ (F)}$$
$$0 \times 1 + 6 \times 0{,}250 = 1{,}500 \text{ (kg)}$$

ou

1 paquet de farine et 5 plaques de beurre

$$1 \times 150 + 5 \times 300 = 1\,650 \text{ (F)}$$
$$1 \times 1 + 5 \times 0{,}250 = 2{,}250 \text{ (kg)}$$

ou

2 paquets de farine et 4 plaques de beurre

$$2 \times 150 + 4 \times 300 = 1\,600 \text{ (F)}$$
$$2 \times 1 + 4 \times 0{,}250 = 3 \text{ (kg)}.$$

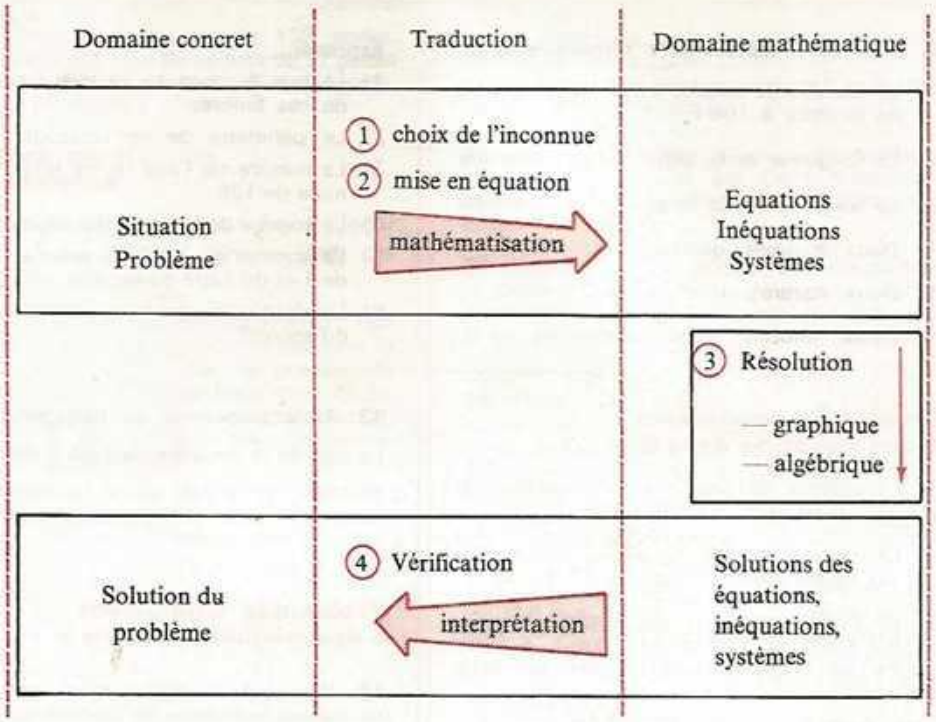
La première solution est la moins lourde pour le sac, la troisième est la moins lourde pour le porte-monnaie de Mme Kouamé !

7) Résumé

Les exemples traités ci-dessus montrent que la résolution algébrique ou graphique d'un problème comporte quatre étapes :

① le choix de l'inconnue, ou des inconnues,
② la mise en équation du problème,
③ la résolution des équations ou inéquations,
④ la vérification.

La résolution d'un problème concret peut être schématisée de la façon suivante :



Exercices

1. Si x représente...

1) Un nombre de pains à 60 F.
2) La durée d'un parcours effectué à la vitesse de 60 km/h.
3) Une distance parcourue à la vitesse de 12 km/h.
4) La consommation d'essence d'une voiture aux 100 km.
5) La distance parcourue par un piéton en 3 h 30 min.
6) La consommation d'essence d'une voiture pour un parcours de 35 km.
7) Un nombre de communications téléphoniques à 50 F.
8) Le montant d'une facture du téléphone sachant que cette facture comporte une taxe fixe de 3 825 F.
9) Un réel quelconque.
10) Un naturel quelconque.

Exprimer

1) Le prix à payer pour l'achat de ces pains.
2) La longueur en km de ce parcours.
3) La durée en heures du parcours.
4) La consommation d'essence en litres de cette voiture, pour un parcours de 420 km.
5) La vitesse en km/h de ce piéton.
6) La consommation d'essence aux 100 km de cette voiture.
7) Le montant en francs de la facture à payer sachant qu'il y a une taxe de 3 825 F.
8) Le nombre de communications téléphoniques à 50 F.
9) Les $\frac{3}{4}$ de ce réel augmentés de 5.
10) La somme de ce naturel et du naturel suivant.

2. Si x et y représentent respectivement...

1) Un nombre de timbres à 80 F et un nombre de timbres à 100 F.

2) La longueur et la largeur d'un rectangle.

3) La longueur et la largeur d'un rectangle.

4) Deux naturels quelconques.

5) Deux naturels quelconques.

6) Deux naturels quelconques.

Exprimer...

1) Le prix à payer au receveur pour l'achat de ces timbres.

2) Le périmètre de ce rectangle.

3) La mesure de l'aire de ce rectangle diminuée de 125.

4) La somme de leurs carrés augmentée de 4.

5) La somme du carré du premier augmenté de 1 et du carré du second.

6) Le double du premier augmenté du tiers du second.

Problèmes conduisant à une équation dans $\mathbb{R}$

3. La somme de deux naturels consécutifs est 71. Quels sont ces naturels ?

4. La somme de trois naturels consécutifs est 60. Quels sont ces naturels ?

5. Un cycliste parcourt une certaine distance à 18,4 km/h. En roulant à 20 km/h, il aurait gagné un quart d'heure. Quelle est cette distance ?

6. Trouver un naturel sachant que le produit de ce naturel par le naturel qui le suit surpasse son carré de 29.

7. Un père a 35 ans et son fils en a 9; dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils ?

8. Trouver le réel dont le carré augmente de 1 771 lorsque ce réel augmente de 7.

9. Le produit de deux naturels consécutifs augmente de 38 lorsqu'on ajoute 2 à chaque facteur; quels sont ces deux naturels ?

10. Sur une droite (D) on considère les points A et B d'abscisses respectives -2 et 5.

1) Calculer l'abscisse du point M de (D) tel que $\overline{MA} - 2\,\overline{MB} = 5$.

2) Calculer l'abscisse du point N de (D) tel que $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 7$.

11. Un automobiliste ne dispose que de 6 000 F pour faire vidanger le moteur de sa voiture et prendre de l'essence. La vidange coûte 2 370 F, combien de litres d'essence à 275 F pourra-t-il acheter ?

12. Agnimel place à la Caisse d'Épargne une certaine somme à 5 %. A la fin de l'année il retire 315 000 F représentant tout son avoir (capital et intérêts réunis). Combien avait-il placé ?

13. Trois personnes se partagent 5 250 F. La part de la deuxième est les $\frac{2}{5}$ de celle de la première, et la part de la troisième égale la demi-somme de celle des deux autres. Quelles sont les trois parts ?

Problèmes conduisant à des inéquations dans $\mathbb{R}$

14. Pierre demande à son ami Kouman de trouver le nombre de disques qu'il possède à partir des informations suivantes : « le nombre de mes disques n'est pas pair; le double du nombre de mes disques dépasse 8; le nombre de mes disques augmenté de 3 n'atteint pas 10 ».

15. Un train doit parcourir 600 km en 5 h, à vitesse constante. Un retard ou une avance de 5 min sont tolérés. Chercher entre quelles limites doit se situer la vitesse du train.

Problèmes conduisant à une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

16. A l'occasion de son anniversaire, un enfant reçoit 5 000 F pour acheter des livres. Il choisit deux collections. Les livres de l'une coûtent 500 F, les livres de l'autre 800 F. Combien de livres de chaque collection peut-il acheter ?

17. La somme d'un naturel écrit à l'aide de deux chiffres et du naturel écrit avec les mêmes chiffres dans l'ordre inverse est égale à 55. Quels peuvent être ces naturels ?

18. Même exercice avec 121.

19. On veut charger sur un camion pouvant porter 3 tonnes de marchandises, des caisses de 50 kg et des caisses de 70 kg. Trouver toutes les possibilités de charger ce camion à plein.

20. La petite Awa dispose de 159 perles. Combien peut-elle faire de colliers de 17 perles et de colliers de 13 perles en utilisant exactement ses 159 perles ?

Problèmes conduisant à des systèmes

21. Deux réels ont pour somme $3\sqrt{2}$ et pour différence $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$; quels sont ces réels ?

22. Une personne fait deux placements : l'un à 5 %, l'autre à 6 %. Le capital constituant le second placement surpasse le premier de 41 000 F, et son revenu au bout d'un an est supérieur de 3 210 F à celui du premier. Trouver le montant de chacun des placements.

23. Un jardinier a utilisé 90 m de grillage pour entourer un jardin rectangulaire dont la longueur est double de la largeur. Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

24. M. Coulibaly a deux fils de 25 et 15 ans. Il partage 160 000 F entre ses deux fils proportionnellement à leur âge. Quelle est la part de chaque fils ?

25 M. Diomandé partage une certaine somme d'argent entre deux de ses enfants âgés de 40 ans et 25 ans, proportionnellement à leur âge. Le double de la part du cadet augmenté de cinq fois la part de l'aîné représente 1 000 000 F. Quelle est la part de chaque enfant ? Quelle est la somme partagée ?

26. Une personne dispose de 120 F de plus qu'une autre. Après avoir dépensé chacune 360 F, il reste à la première le double de ce qui reste à l'autre. Combien avaient-elles avant leurs achats ?

27. En un mois, un libraire a vendu 135 ouvrages, les uns à 600 F et les autres à 500 F. Les premiers lui ont rapporté 700 F de moins que les seconds. Combien a-t-il vendu de livres de chaque sorte ?

28. La différence de deux entiers naturels est 24. Si l'on ajoute 8 à chacun de ces deux entiers naturels, on obtient deux nouveaux entiers dont le plus grand est le triple du plus petit.
Quels sont les entiers naturels initiaux ?

29. La somme de deux nombres est 304. Si on divise l'un par l'autre le quotient est 6 et le reste 17.
Quels sont ces nombres ?

30. Déterminer les couples de réels qui vérifient simultanément les deux conditions :
a) La différence entre le triple de l'un et le double de l'autre est 6.
b) La différence entre leur somme et le triple de leur différence est 8.

31. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 920 m. Calculer ses deux dimensions sachant que la longueur a 20 m de plus que la largeur.

32. On considère un nombre de deux chiffres, la somme des nombres que ces chiffres représentent est 11. Le nombre diminue de 45 si on permute les deux chiffres. Quel est le nombre initial ?

33. Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que si l'on augmente la longueur et la largeur de 4 m, l'aire du rectangle augmente de 316 m^2, tandis que si l'on augmente la largeur de 4 m en diminuant la longueur de 6 m, l'aire du rectangle diminue de 282 m^2.

34. Une personne place de l'argent, une partie à 5 %, l'autre à 6 %. Son revenu annuel est ainsi de 7 200 F. Si la somme placée à 5 % l'était à 6 % et inversement, le revenu annuel serait de 7 100 F. Quelles étaient les valeurs des deux parts du capital ?

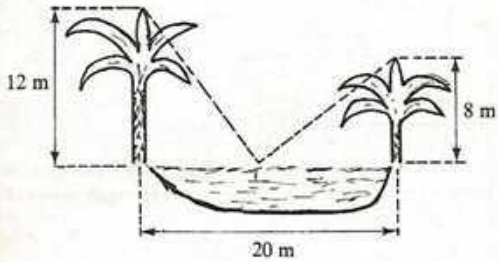
35. Dans un poulailler de 15 volailles, il y a des poulets et des canards. Deux enfants Koffi et N'cho discutent :
— Koffi affirme que si l'on triple le nombre des canards on obtiendra 26 volailles dans le poulailler.
— N'cho riposte en disant que c'est lorsqu'on double le nombre des canards qu'on obtient 26 volailles dans le poulailler.
Lequel des deux enfants a raison ?

36. Dans un poulailler de 12 volailles, il y a des poulets et des pintades. Si l'on triple le nombre des poulets on obtient 22 volailles. Combien de poulets et de pintades a-t-on dans ce poulailler ?

37. Le cheval et le chameau.
Un cheval et un chameau, portant chacun plusieurs sacs de même masse, allaient côte à côte. Le cheval se plaignait d'être trop chargé. « De quoi te plains-tu ? lui dit le chameau. « Si je te prends un sac, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne. Mais si tu prends un sac de mon dos, ta charge sera égale à la mienne. » Combien de sacs portait le cheval et combien en portait le chameau ?

38. Un mathématicien arabe du XIe siècle a posé le problème suivant :
Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un en face de l'autre. La hauteur du premier est de 12 m et celle du second

est de 8 m ; la distance de leurs pieds est de 20 m. Au sommet de chaque arbre est perché un oiseau. Brusquement les oiseaux aperçoivent un poisson à la surface de l'eau ; ils se jettent sur lui aussitôt, à la même vitesse, et l'atteignent en même temps. A quelle distance du grand palmier se trouvait le poisson ?



39. A l'occasion de la fête du collège, le foyer proposait des jus de fruits à 45 F la bouteille et des limonades à 60 F la bouteille. La recette a été de 18 000 F pour 350 bouteilles vendues. Combien de bouteilles de chaque sorte ont été vendues ?

(BEPC, Côte d'Ivoire, 1977.)

40. Dans un collège, deux élèves, Konan et Koffi discutent. Konan dit : « Dans ma classe, il y a 30 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 3, puis le nombre y de filles par 2 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 85. »
Koffi lui répond alors : « Dans la mienne il y a 35 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 2, puis le nombre y de filles par 5 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 55. »
Mais un professeur de mathématique, qui les écoute, affirme que ce que dit Konan est vrai et que ce que dit Koffi est faux.

1) Trouver le nombre de garçons et de filles de la classe de Konan.
2) Pourquoi ce que dit Koffi ne peut-il pas être vrai ?

(BEPC, Côte d'Ivoire, 1978.)

41. Deux entiers naturels distincts sont tels que :

a) Leur somme diminuée de 1 est égale au double de leur différence.
b) Leur différence diminuée de 1 est égale au plus petit des deux nombres.
Trouver ces deux nombres. (On pourra appeler a le plus grand des deux nombres et b l'autre.)

(BEPC, Côte d'Ivoire, 1980.)

42. Trouver les deux dimensions d'un rectangle sachant qu'en augmentant la largeur de 10 m et en diminuant la longueur de 10 m, la surface ne change pas, tandis qu'en augmentant les deux dimensions de 10 m, la surface augmente de 800 m^2.

43. Il y a 3 ans l'âge de Paul était le triple de l'âge de Pierre. Dans 9 ans l'âge de Pierre sera la moitié de l'âge de Paul. Quels sont les âges respectifs de Pierre et de Paul ?

Problèmes conduisant à des inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

44. Une usine fabrique deux produits A et B. La fabrication d'une tonne de produit A nécessite 1 h de travail et la fabrication d'une tonne de produit B nécessite 2 h de travail. L'usine travaille au maximum 16 heures par jour. La fabrication d'une tonne de A entraîne une dépense de 3 000 F et la fabrication d'une tonne de B entraîne une dépense de 1 000 F.
Le budget de l'entreprise ne permet pas de consacrer plus de 23 000 F par jour à cette fabrication.
Un client commande à cette usine x tonnes de produit A et y tonnes de produit B.
Déterminer graphiquement l'ensemble des couples de naturels (x, y) qui correspondent aux commandes que l'usine peut fabriquer en une journée.
Déterminer l'ensemble des couples de naturels (x, y) pour lesquels la masse totale de produit fabriqué est maximum. (On utilisera un quadrillage.)

45. Dans une usine de jouets on peut, sur une certaine machine, fabriquer soit des voitures soit des poupées en matière plastique.

1) La fabrication d'une voiture dure 1 min, celle d'une poupée 30 s et la machine ne peut fonctionner plus de 8 heures par jour. On appelle x le nombre de voitures et y le nombre de poupées produites chaque jour.
   a) Calculer en fonction de x et de y le temps d'utilisation de la machine puis écrire l'inéquation correspondant au temps maximum d'utilisation.
   b) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des solutions de cette inéquation.
2) Compte tenu de la clientèle irrégulière du fabriquant, il faut produire chaque jour au moins 100 voitures et 150 poupées. Écrire les inéquations correspondantes.
3) La quantité de matière plastique disponible ne permet pas de fabriquer plus de 300 voitures et 500 poupées par jour. Écrire les inéquations correspondantes.

4) Les jouets doivent être emballés dans les boîtes et on ne dispose que de 700 boîtes par jour. Écrire l'inéquation correspondante.
a) Représenter l'ensemble des points du plan où les conditions 1), 2), 3) et 4) sont simultanément vérifiées.
b) Calculer les coordonnées des sommets du polygône obtenu.
5) Le bénéfice est de 40 F pour une voiture et 30 F pour une poupée.
a) Calculer en fonction de x et y le bénéfice quotidien.
b) Calculer ce bénéfice en chacun des sommets du polygône obtenu précédemment.

46. Un commerçant a l'occasion d'acheter un certain nombre de lots de vêtements en solde. Il y a deux sortes de lots.

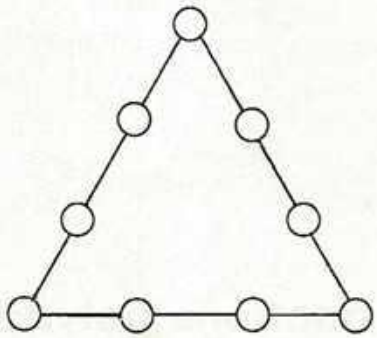
— Un lot de type A comprend : 1 robe, 2 jupes, 3 boubous ;
— Un lot de type B comprend : 2 robes, 2 jupes, 1 boubou.

Le commerçant veut se constituer une collection contenant au moins 40 robes, 60 jupes et 60 boubous.

1) Appeler x le nombre de lots de type A et y le nombre de lots de type B achetés par le commerçant.
Calculer en fonction de x et de y les nombres de robes, de jupes et de boubous achetés par le commerçant et écrire les inéquations correspondant aux quantités minimales données plus haut.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, représenter graphiquement quelques couples de solutions vérifiant les trois inéquations précédentes.
3) Calculer les coordonnées des sommets de la ligne polygonale limitant la partie du plan contenant les points convenables.
4) Les lots de type A coûtent 13 000 F et les lots de type B 15 000 F. Calculer la dépense totale en fonction de x et de y. Calculer cette dépense en chaque sommet de la ligne polygonale.

Réfléchir

47. Triangle numérique.
Placer dans les cercles chacun des nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9, de façon que la somme égale 20 sur chaque côté du triangle ci-dessous.



48. Le jeune Kouassi, élève de Troisième a calculé la moyenne de ses cinq devoirs de mathématiques du trimestre, il a trouvé 11 sur 20. Son professeur décide de faire intervenir une sixième note, celle du BEPC blanc. Kouassi qui a obtenu 14 à cette épreuve additionne 11 et 14, divise par deux et déclare qu'il a ainsi 12,5 de moyenne trimestrielle. Son professeur n'est pas d'accord. Comment calculer sans erreur la nouvelle moyenne de Kouassi, sans connaître le détail des cinq premières notes ? Quelle est cette nouvelle moyenne ?

49. Trente jeunes participent à une soirée dansante. Awa a dansé avec sept garçons, Fatou avec huit garçons, Aïcha avec neuf garçons et ainsi de suite jusqu'à la dernière jeune fille qui a dansé avec tous les garçons présents à la soirée. Combien de danseuses y avait-il ?

7 Fonctions polynômes Fonctions rationnelles

Leçon 1 : FONCTIONS POLYNÔMES
Leçon 2 : FONCTIONS RATIONNELLES

1 Fonctions polynômes

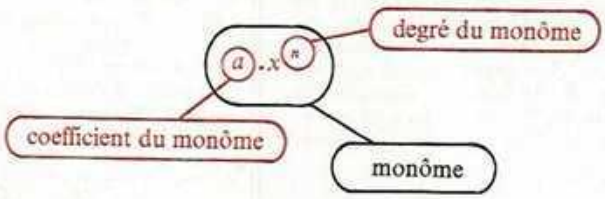
1) Introduction

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 5x^3 + 7x^2 - x + 5.$$

Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(\sqrt{2})$.

Rappels : a étant un réel, n étant un naturel non nul.



$5x^3$ est un monôme de coefficient 5 et de degré 3,
$7x^2$ est un monôme de coefficient 7 et de degré 2,
$-x$ est un monôme de coefficient -1 et de degré 1.

Par convention, on dira que :
5 est un monôme de coefficient 5 et de degré 0.

Définitions

On appelle polynôme une somme de monômes.
$5x^3 + 7x^2 - x + 5$ est un polynôme réduit et ordonné du 3e degré en x.

2) Fonction polynôme

a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 5x^3 + 7x^2 - x + 5$$

est une **fonction polynôme.** Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Donner un programme de calcul de la fonction polynôme

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -3x^3 + (-\sqrt{2})x + 4.$$

Calculer $g(0)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(-\sqrt{2})$.

Exercice Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont des fonctions polynômes :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{3x - 1}{5x + 4}$

$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{(x-1)^2}$

$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 3x$

$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\dfrac{3}{4}$

$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5x^2 - 3x - 1$

$f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

$f_{10} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$.

c) **Ensemble de définition d'une fonction polynôme**

Soit la fonction polynôme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x).$$

Pour calculer l'image $f(r)$ d'un réel r par une fonction polynôme, les seules opérations à effectuer sur ce réel sont des additions, des multiplications ou des élévations à une puissance d'exposant naturel; quel que soit le réel r, $f(r)$ est un réel, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Conséquence : Une fonction polynôme est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Différentes écritures d'un polynôme

Soit la fonction polynôme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (3x - 2)^2 - (5x + 4)^2.$$

On a $f(x) = (3x - 2)^2 - (5x + 4)^2$.

a) **Développons $f(x)$:**

$$f(x) = 9x^2 - 12x + 4 - (25x^2 + 40x + 16).$$

b) **Réduisons et ordonnons $f(x)$ selon les puissances décroissantes de x.**

$$f(x) = 9x^2 - 12x + 4 - 25x^2 - 40x - 16$$
$$f(x) = -16x^2 - 52x - 12.$$

La dernière écriture de $f(x)$ est une forme réduite et ordonnée de ce polynôme selon les puissances décroissantes de x.
Trouver une autre forme réduite et ordonnée.

c) **Factorisons $f(x)$:**

$$f(x) = (3x - 2)^2 - (5x + 4)^2.$$

Cette écriture de $f(x)$ est de la forme $a^2 - b^2$.

$$f(x) = [(3x - 2) + (5x + 4)][(3x - 2) - (5x + 4)]$$
$$f(x) = (3x - 2 + 5x + 4)(3x - 2 - 5x - 4)$$
$$f(x) = (8x + 2)(-2x - 6)$$
$$f(x) = -4(4x + 1)(x + 3).$$

Nous disposons ainsi de trois écritures de $f(x)$:

1. la forme initiale :

$$(3x - 2)^2 - (5x + 4)^2,$$

2. une forme développée, réduite et ordonnée :

$$-16x^2 - 52x - 12,$$

3. une forme factorisée :

$$-4(4x + 1)(x + 3).$$

Choisir l'écriture de $f(x)$ qui permet d'effectuer les calculs suivants, le plus simplement ou le plus rapidement possible :

$$f(0)\ ;\ f\left(-\frac{1}{4}\right)\ ;\ f(-3)\ ;\ f\left(-\frac{4}{5}\right)\ ;\ f\left(\frac{2}{3}\right)\ ;\ f(1)\ ;\ f(-1)\ ;$$
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\ ;\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Exercice On donne :

$$g_1(x) = (2x + 1)^2 - 25$$
$$g_2(x) = (4x - 3)(x - 1) + (3 - 2x)(4x - 3)$$
$$g_3(x) = (4x - 3)(2x + 1) - x(5x + 4) + 3$$
$$g_4(x) = (4x - 3)^2 - (7x^2 - 30x - 8).$$

Pour chacun des polynômes donnés :
a) trouver une forme réduite et ordonnée,
b) trouver (si cela est possible) une forme factorisée.

4) Équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 2 = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= x^2 + 1 \\ x^2 - 2x + 2 - (x^2 + 1) &= 0 \\ x^2 - 2x + 2 - x^2 - 1 &= 0 \\ -2x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \\ S &= \left\{\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 + 2x - 7 = 2x^2 + 2x - 3$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x - 7 &= 2x^2 + 2x - 3 \\ 3x^2 + 2x - 7 - (2x^2 + 2x - 3) &= 0 \\ 3x^2 + 2x - 7 - 2x^2 - 2x + 3 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x - 2)(x + 2) &= 0 \\ x - 2 = 0 \quad &\text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = -2 \\ S &= \{2; -2\}. \end{aligned}$$

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes.
Pour résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$, il suffit de résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = 0$.

— Si le polynôme $f(x) - g(x)$ est du premier degré, $f(x) - g(x) = 0$ est alors une équation du premier degré à une inconnue que nous savons résoudre dans $\mathbb{R}$.
— Si le polynôme $f(x) - g(x)$ est de degré supérieur à 1, la résolution est en général trop difficile pour la classe de Troisième.

Cependant, si $f(x) - g(x)$ peut se mettre sous forme d'un produit de facteurs où chaque facteur est un polynôme du premier degré, on peut alors résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = 0$ en appliquant la propriété :

$$a \times b = 0 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0.$$

Remarque. L'équation $x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Pourquoi ?

Exercices Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $-16x^2 - 12 = 52x - 12$.
b) $-4(4x + 1)(x + 1) = 0$.
c) $9x^2 - (2x + 1)^2 = 0$.
d) $17x^2 - 1 = 64x^2$.

2 Fonctions rationnelles

1) Fonctions rationnelles

a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{5x - 4}{2x + 1}$$

est une *fonction rationnelle.*
Quel est l'ensemble de définition de f ?
Calculer $f(-1)$; $f(2)$; $f\left(\frac{1}{5}\right)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{4}{5}\right)$.

Définitions

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x).$$

On dit que f est une fonction rationnelle **si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme du quotient de deux polynômes.**

g et h étant des fonctions polynômes, $\frac{g(x)}{h(x)}$ est appelée fraction rationnelle.

Exercice Parmi les fonctions suivantes indiquer celles qui sont des fonctions rationnelles :

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{5x - 2}{x}$

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{-1}$

$g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x + 1}$

$g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^3 - 5x$

$g_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{3x}{2x^3}$.

b) **Ensemble de définition d'une fonction rationnelle.**

Exemple 1

Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x - 1}{x - 2}.$$

Quels sont les réels qui n'ont pas d'image par f_1 ? Pourquoi ?
Compléter : $D_{f_1} =$

Exemple 2

Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{4x}{x^2 - 1}.$$

Peut-on calculer $f_2(-1)$? $f_2(1)$? $f_2(0)$? Pourquoi ?
Quelle est la condition pour que $f_2(x)$ désigne un réel ?
Compléter : $D_{f_2} =$

2) Calculs sur les fractions rationnelles

a) **Simplification d'une fraction rationnelle**

Exemple 1

Soit la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

1. Cherchons l'ensemble de définition de f :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

2. Cherchons l'application f' associée à f :

$$f' : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

3. Cherchons une écriture simplifiée de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \quad \text{d'où} \quad f'(x) = x - 1.$$

Par définition de l'application associée, on sait que, quel que soit x élément de D_f, $f(x) = f'(x)$; l'application associée f' coïncide donc avec f sur D_f.

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{-1\}$: $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$.

On dit que l'on a *simplifié* la fraction rationnelle $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

4. Calculons des images par f : pour cela utilisons l'écriture simplifiée de $f'(x)$.

$f(0) = f'(0)$
$f(0) = 0 - 1$
$f(0) = -1$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = f'\left(-\frac{2}{3}\right)$
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} - 1$
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$

$f(\sqrt{5}) = f'(\sqrt{5})$
$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1$

Peut-on calculer $f(-1)$? Pourquoi ?
On ne peut pas non plus calculer $f'(-1)$ car -1 n'est pas élément de l'ensemble de départ de f'.

Remarque. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - 1$
coïncide aussi avec f sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, mais ce n'est pas l'application associée à f.

Exemple 2

Soit la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x - 5}{x^2 - 25}.$$

1. Cherchons l'ensemble de définition de f :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-5; 5\}.$$

2. Cherchons l'application f' associée à f :

$$f' : \mathbb{R} - \{-5; 5\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x - 5}{x^2 - 25}.$$

3. Cherchons une écriture simplifiée de $f'(x)$:

$x \in \mathbb{R} - \{-5; 5\}$

$f'(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

$f'(x) = \dfrac{x - 5}{(x - 5)(x + 5)}$ d'où $f'(x) = \dfrac{1}{x + 5}$.

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{-5; 5\}$: $\dfrac{x - 5}{x^2 - 25} = \dfrac{1}{x + 5}$.

On dit que l'on a simplifié la fraction rationnelle $\frac{x-5}{x^2-25}$.

Calculer : $f(0)$; $f(-1)$; $f(\sqrt{2})$; $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Exercice Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x-9}{(x+2)(x-3)}.$$

Simplifier $g(x)$, selon la méthode utilisée ci-dessus.

b) **Addition des fractions rationnelles.**

Exemple 1

On considère $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x+4}{x+2}$ $\qquad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$.

Compléter $D_{f_1} =$ $\qquad D_{f_2} =$ $\qquad D_f =$

Cherchons une autre écriture de $f(x)$.
Quel que soit x élément de D_f $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$f(x) = \frac{x+4}{x+2} + \frac{x+2}{x-1}.$$

Pour additionner les deux fractions rationnelles précédentes, réduisons-les au même dénominateur.
$(x+2)(x-1)$ est un dénominateur commun.

$x \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-1) + (x+2)^2}{(x+2)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4x - 4 + x^2 + 4x + 4}{(x+2)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{x(2x+7)}{(x+2)(x-1)}.$$

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$: $\frac{x+4}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x(2x+7)}{(x+2)(x-1)}$.

L'application associée à f est $f' : \mathbb{R} - \{-2; 1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x(2x+7)}{(x+2)(x-1)}.$$

Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{7}{2}\right)$; $f(5)$; $f(\sqrt{2})$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Exemple 2

On considère $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x+1}{(x-1)(x^2-1)}$ $\qquad$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$.

Compléter $D_{f_1} =$ $\quad D_{f_2} =$ $\quad D_f =$

Cherchons une écriture simplifiée de $f_2(x)$ sur D_{f_2}

$$x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \left| \begin{array}{l} f_2(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2-1)} \\ f_2(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-1)(x+1)} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-1)} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}. \end{array} \right.$$

Cherchons une autre écriture de $f(x)$.
Quel que soit x élément de D_f

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Pour additionner les deux fractions rationnelles, réduisons-les au même dénominateur. $(x-1)^2$ est un dénominateur commun.

$$x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \left| \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1(x-1)}{(x-1)(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) = \dfrac{x-1+1}{(x-1)^2} \\ f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}. \end{array} \right.$$

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

L'application associée à f est $f' : \mathbb{R} - \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Calculer $f(0)$; $f(5)$; $f(2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{4}\right)$; $f(\sqrt{2})$.

Exemple 3

On considère $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g_1(x) - g_2(x) + g_3(x).$$

Compléter : $D_{g_1} =$ $D_{g_2} =$ $D_{g_3} =$ $D_g =$

Cherchons une autre écriture de $g(x)$.
Quel que soit x élément de D_g $g(x) = g_1(x) - g_2(x) + g_3(x)$

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Pour additionner les trois fractions rationnelles précédentes, réduisons-les au même dénominateur.
$(x-1)(x-2)(x-3)$ est un dénominateur commun.

$x \in \mathbb{R} - \{1; 2; 3\}$

$$g(x) = \frac{1(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} - \frac{1(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{1(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$g(x) = \frac{(x-3) - (x-1) + (x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$g(x) = \frac{x - 3 - x + 1 + x - 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$g(x) = \frac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{1; 2; 3\}$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

L'application associée à g est $g' : \mathbb{R} - \{1; 2; 3\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Calculer $f(-1)$; $f(-2)$; $f(-3)$; $f(5)$; $f(0)$; $f(\sqrt{2})$.

c) **Multiplication des fractions rationnelles**

On considère $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{3x-1}{x^2-3x}$ $\qquad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{x-3}{2x+1}$

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) \times f_2(x)$.

Compléter $D_{f_1} =$ $\quad D_{f_2} =$ $\quad D_f =$

Cherchons une autre écriture de $f(x)$.
Quel que soit x élément de D_f, $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$.
Calculons : pour tout x élément de D_f.

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 0; 3\right\} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-3x} \times \dfrac{x-3}{2x+1} \\ f(x) = \dfrac{(3x-1)(x-3)}{(x^2-3x)(2x+1)}. \end{array} \right.$$

Simplifions

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 0; 3\right\} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{(3x-1)(x-3)}{x(x-3)(2x+1)} \\ f(x) = \dfrac{3x-1}{x(2x+1)}. \end{array} \right.$$

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 0; 3\right\}$,

$$\frac{3x-1}{x^2-3x} \times \frac{x-3}{2x+1} = \frac{3x-1}{x(2x+1)}.$$

Quelle est l'application associée à f ?

Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f(-3)$.

d) **Exercice**

1. Quel est l'ensemble de définition de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\dfrac{3x-1}{1+2x}}{\dfrac{4-x}{x-1}} ?$$

2. Montrer que, sur D_h, h coïncide avec la fonction rationnelle

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{(3x-1)(x-1)}{(1+2x)(4-x)}.$$

Quel est l'ensemble de définition de k ?

3. Montrer que, sur D_h, h coïncide avec la fonction rationnelle

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{(3x-1)(x-1)^2}{(1+2x)(4-x)(x-1)}.$$

Quel est l'ensemble de définition de l ?
En déduire que h et l sont les mêmes fonctions, donc que h est une fonction rationnelle (voir la définition d'une fonction rationnelle).

4. Donner une écriture, la plus simple possible, de l'application associée à h.
Calculer $h\left(\frac{1}{3}\right)$; $h(-\sqrt{2})$; $h(10^{-3})$.

3) Équation $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = m$ (m est un réel donné)

a) **Rappel :**

a, *b*, *c* et *d* étant des réels, *b et d étant non nuls*, on sait que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = c \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad a = b \times c$$

$$\frac{a}{b} = 0 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad a = 0$$

$$\frac{a}{b} = 1 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad a = b.$$

b) **Exemples**

① Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x-1}{2x+3}.$$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Pourquoi ?

Résoudre dans D_f : $\frac{3x-1}{2x+3} = 5$.

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \left| \begin{array}{l} \frac{3x-1}{2x+3} = 5 \\ 3x-1 = 5(2x+3) \\ 3x-1-10x-15 = 0 \\ -7x-16 = 0 \\ x = -\frac{16}{7}. \end{array} \right.$$

Nous résolvons cette équation dans D_f ;

$$-\frac{16}{7} \in D_f, \quad \text{donc} \quad S = \left\{-\frac{16}{7}\right\}.$$

② Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x-1}{1-2x}.$$

Compléter $D_g =$.

Résoudre dans D_g : $\frac{2x-1}{1-2x} = 1$.

$$x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \left| \begin{array}{l} \frac{2x-1}{1-2x} = 1 \\ 2x-1 = 1-2x \\ 4x = 2 \\ x = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$



Attention nous résolvons cette équation dans D_g ;

$$\text{or}, \quad \frac{1}{2} \notin D_g \quad \text{donc} \quad S = \varnothing.$$

③ Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2-4}{x+2}.$$

Compléter $D_h =$

Simplifions $h(x)$

$$x \in \mathbb{R} - \{-2\} \left| \begin{array}{l} h(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \\ h(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \\ h(x) = x-2. \end{array} \right.$$

Quel que soit x élément de D_h, $\frac{x^2-4}{x+2} = x-2$.

Quel que soit x élément de $\mathbb{R} - \{-2\}$, $h(x) = x-2$.

• Résoudre dans D_h : $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$

$x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ | $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$

$x-2=0$

$x=2$

$2\in D_h$

$S=\{2\}$.

• Résoudre dans D_h : $\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

$x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ | $x-2=-4$

$x=-2$.



Attention $-2\notin D_h$

$S=\varnothing$.

④ Soit $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{(3x-1)(x-1)^2}{x^2-1}.$$

Compléter D_i =

Simplifions $i(x)$

$x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ | $i(x)=\dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{x^2-1}$

$i(x)=\dfrac{(3x-1)(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$i(x)=\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x+1}$.

Quel que soit x élément de D_i :

$$\frac{(3x-1)(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{(3x-1)(x-1)}{x+1}.$$

Quel que soit x élément de $\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $i(x)=\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x+1}$.

Résoudre dans D_i : $\dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{x^2-1}=0$.

$x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ | $\dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{x^2-1}=0$

$\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x+1}=0$

$(3x-1)(x-1)=0$

$3x-1=0$ ou $x-1=0$

$x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=1$.



Attention

$$\frac{1}{3} \in D_i \quad \text{mais} \quad 1 \notin D_i$$

donc

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Exercices

Calculer

1 (1). Réduire et ordonner les polynômes :

$5 - 2x^3 + 7x + 2 - 9x - x^3$

$\frac{12}{7}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{9}{4} - t^3 + t^2 + t - \frac{1}{3} - t^3$

$\frac{\sqrt{2}}{3}m^5 + 8m^2 - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}m^5 + 1 - m^2$.

2 (1). Développer, réduire et ordonner les polynômes :

$3(x^2 - 1) + (4x - 3)(x + 1) - 5x(1 - 2x)$

$-4(a + 3)^2 + 5(a - 2)(a + 2) - 3a(3 - a)$

$(2x + 5)(4x - 1) - (2x + 5)(4x + 1)$.

3 (1). Factoriser chacun des polynômes suivants :

$-5x^6 - 15x^4 + 10x^3$

$9x^5 + 6x^4 - 12x^3 - 21x^2$

$x^5 - 5x^3 + 10x^2$

$5x^2 + 2x^3 - x$.

4 (1). Même question pour les polynômes :

$(3x - 2)(x + 1) - (3x - 2)(4x - 3) + (3x - 2)(x - 1)$

$(4x - 5)^2 - (4x - 5)(2x + 3)$

$(x + 1)(2x - 3) + (x + 1)^2$

$(2x - 14)(3x + 1) + x^2 - 7x$

$(x - 2)(x - 3) - (2x - 4)^2$.

5 (1). Même question pour les polynômes :

$2z^3 - 12z^2 + 18z$

$x^4 - 2x^2 + 1$

$x^2 - 64$

$(x - 1)^2 - (3x + 2)^2$

$9x^2 - 6x + 1$

$x^2 - 2$

$x^2 - 4x + 4$.

6 (1). Soit une fonction polynôme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 9x^2 - (2x + 1)^2.$$

a) Trouver une forme développée, réduite et ordonnée de $f(x)$.
b) Trouver une forme factorisée de $f(x)$.
c) En utilisant la forme qui donne le plus rapidement ou le plus facilement le résultat, calculer :

$f(0)$; $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(3)$;

$f\left(-\frac{1}{5}\right)$; $f\left(\frac{1}{5}\right)$; $f(1)$; $f(\sqrt{2})$;

$f(-\sqrt{2})$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 0$.

7 (1). Soit la fonction polynôme

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (17x^2 - 1)^2 - 64x^4.$$

a) Trouver une forme développée, réduite et ordonnée de $g(x)$.
b) Trouver une forme factorisée de $g(x)$.
c) En utilisant la forme qui donne le plus facilement ou le plus rapidement le résultat, calculer :

$g(0)$; $g\left(-\frac{1}{3}\right)$; $g\left(\frac{1}{3}\right)$;

$g(3)$; $g\left(-\frac{1}{5}\right)$; $g\left(\frac{1}{5}\right)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $g(x) = 0$
$g(x) = 1$.

8 (1). Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x^2 - 1)(x^2 + 2)$.

a) Développer, réduire et ordonner $h(x)$.
b) Écrire $h(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $h(x) = 0$

$h(x) = -2$.

9 (2). Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3x - 1}{x}$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{8x - 16}{4 - x^2}$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1}{x^2\sqrt{3} + x}$

$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3x - 4}{(x + 1)(x - 4)}$

$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x(x - 3)}{(2x - 2)(x + \sqrt{3})}$

$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 4x^2 - 2x + 3$

$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x + \sqrt{2}}{3x^2 - x}$

$f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{-3}{1 + x^2}$

$f_{10} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{(2x + 1)(3x + 4)}{(2x + 1)^2 - (3x + 4)^2}$.

10 (2). Soit les fonctions rationnelles :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{1}{x + 1}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$.

Donner les ensembles de définition de f_1, f_2 et f.
Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

11 (2). On donne les fonctions rationnelles :

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{2x + 1}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{2}{2x + 3}$

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{2x + 2}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto g_1(x) + g_2(x) - g_3(x)$.

Donner les ensembles de définition de g_1, g_2, g_3 et g.
Trouver une écriture simplifiée de $g(x)$.

12 (2). Soit les fonctions rationnelles :

$h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto h_1(x) + h_2(x)$.

Donner les ensembles de définition de h_1, h_2 et h.
Écrire $h(x)$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

13 (2). Soit les fonctions rationnelles :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2x - 6}{4x + 8}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{8 - x}{x^2 - 9}$.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) \times g(x)$.

Donner les ensembles de définition de f, g et h.
Trouver une écriture simplifiée de $h(x)$.
Trouver l'application h' associée à h.

14 (2). Soit les fonctions rationnelles :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x^2 - 2}{3x - 9}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{3x^3}{x + 2}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) \times f_2(x)$.

Donner les ensembles de définition de f_1, f_2 et f.
Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.
Trouver l'application f' associée à f.
Calculer $f(\sqrt{2})$; $f(\sqrt{2} + 1)$; $f(-\sqrt{5})$; $f(0)$.

15 (2). On donne les fonctions rationnelles :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x).$$

Trouver les ensembles de définition de f_1, f_2, f_3 et f.
Trouver l'application f' associée à f et calculer $f\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$.

16 (2). Soit la fonction rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\dfrac{x^5 - 9x^3}{(x+1)^2}}{\dfrac{x(x-3)^2}{x+3}}.$$

Trouver D_f et une écriture simplifiée de $f(x)$

17 (2). Soit la fonction rationnelle :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\dfrac{x^3}{x^2-1}}{\dfrac{x^2}{x+1}}.$$

Trouver D_g et une écriture simplifiée de $g(x)$.

18 (2). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{1}{x+1}.$$

Trouver D_f.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 0$.

19 (2). On donne :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}.$$

Trouver D_f et D_g.
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$f(x) = -1$; $g(x) = 0$; $g(x) = 1$;
$f(x) = 1$; $f(x) = g(x)$.

20 (2). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3x+1}{4x-2}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3x-5}{6x+1}$.

Trouver D_f et D_g.
Trouver $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que les applications associées à f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Réfléchir

21 (1). a et b sont deux réels donnés.
Factoriser :

$$x^2 - (a+b)x + ab$$
$$x^2 + (a+b)x + ab.$$

En utilisant les résultats obtenus, factoriser :

$$x^2 - 5x + 6$$
$$x^2 + 7x + 10$$
$$x^2 + 12x + 20$$
$$x^2 - 3x + 2$$
$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10}$$
$$3x^2 - 15x + 18$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 18.$$

22 (1). Soit les fonctions

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 9 - \frac{x+3}{2}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
2) Soit la fonction

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Représenter h dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Montrer que la fonction

$$k : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{-13\}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une bijection.

23 (1). Soit le polynôme $p(x)$ tel que :

$$p(x) = 2x^2 + (a - b + 3)x + 2a - 3b$$

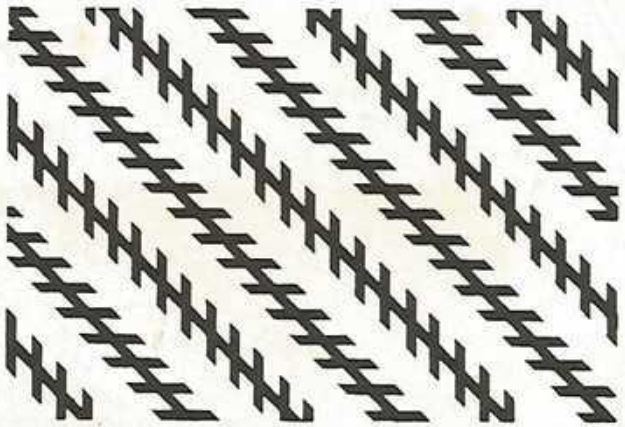
où a et b sont deux réels.
Trouver a et b sachant que $p(3) = 2$ et $p(0) = -1$.

(Examen d'entrée en 4e section de l'E.N.S. d'Abidjan, 1977 (extrait).)

GÉOMÉTRIE

1 Faire de la géométrie

Leçon 1 : CONSTATER, DÉMONTRER, CONSTRUIRE
Leçon 2 : DES CONNAISSANCES UTILES



Les droites sont-elles parallèles ?

Une illusion d'optique.

1 Constater, démontrer, construire

En classe de Quatrième

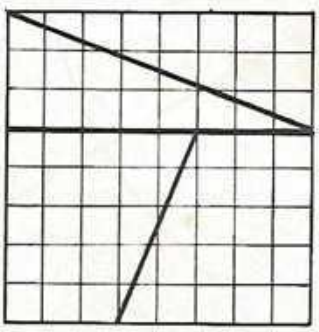
1) On a constaté

Sur les dessins que l'on a réalisés, on a fait des constatations : en géométrie, certaines constatations ont été refusées, d'autres acceptées.

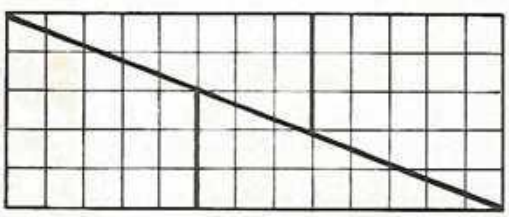
Constatations refusées :

Exemple 1

Où il faut parfois se méfier du dessin...
Rappel du cours de 4e : le rectangle semble avoir été obtenu en assemblant autrement les morceaux constitutifs du carré.



$8 \times 8 = 64$

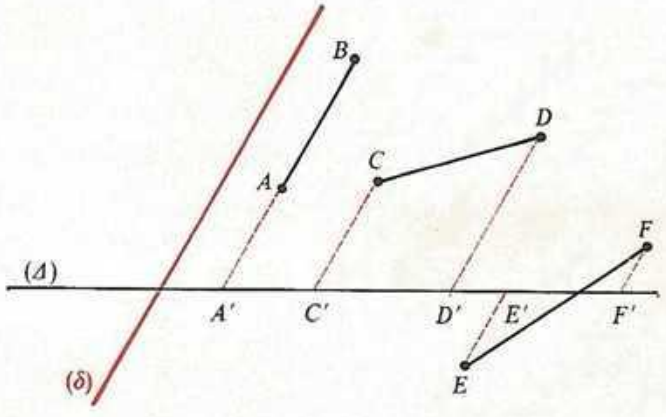


$5 \times 13 = 65$

En réalité, comme l'indiquent les calculs ci-dessus, le rectangle n'a pas la même aire que le carré.
En conclusion : On croit souvent faire des constatations... mais il ne s'agit que d'apparences dues à la faiblesse de notre perception visuelle ou à l'imprécision des dessins.

Exemple 2

Où des exemples ne suffisent pas...



p	
A	A'
B	A'
C	C'
D	D'
E	E'
F	F'

Dans la projection p du plan sur (Δ) parallèlement à (δ) on a :

$$p(A) = A' ; \quad p(B) = A' ; \ldots$$

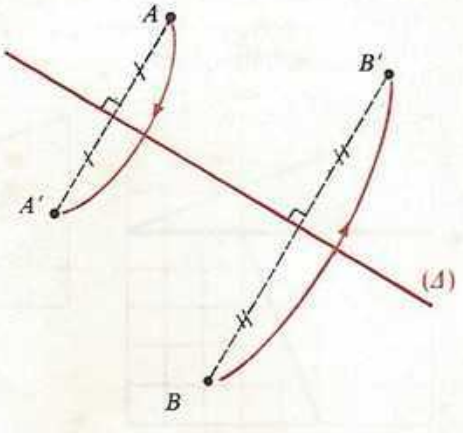
Mesurer les segments $[CD]$ et $[C'D']$; $[EF]$ et $[E'F']$.
On constate que $d(C, D) \geqslant d(C', D')$ et $d(E, F) \geqslant d(E', F')$.
A partir de cette constatation, on serait tenté d'affirmer : « La mesure du projeté d'un segment est inférieure ou égale à la mesure de ce segment. »
Cette affirmation doit être refusée. Pourquoi ?

Exercice Construire une figure où la mesure du projeté d'un segment est supérieure à la mesure de ce segment.

Constatations acceptées :

Exemple 1

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ).



$S_{(\Delta)}$	
A	A'
B	B'

Dans tous les cas de figures, on a constaté, à la précision des instruments de mesure près, que :

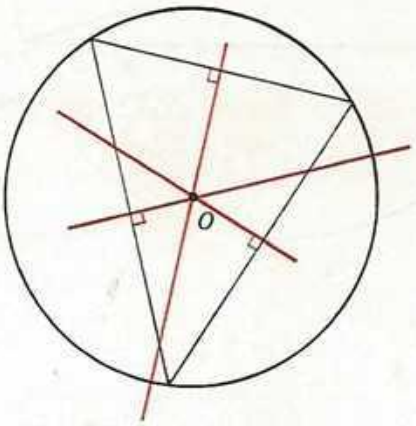
$$d(A, B) = d(A', B').$$

Il a été décidé d'adopter cette constatation comme l'une des règles de la géométrie : c'est un *AXIOME*.

Axiome :

La symétrie orthogonale conserve la distance.

Exemple 2



Dans tous les cas de figures, en traçant avec soin les trois médiatrices des côtés d'un triangle, on constate que ces trois médiatrices sont concourantes en un point ; ce point est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
On dit aussi que ce triangle est inscrit dans le cercle.
On pourrait adopter cette constatation comme axiome, mais ce n'est pas nécessaire, en effet, sachant que (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont les médiatrices des côtés d'un triangle, on peut déduire que (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont concourantes. Ainsi on démontre un *THÉORÈME*.

Théorème :

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

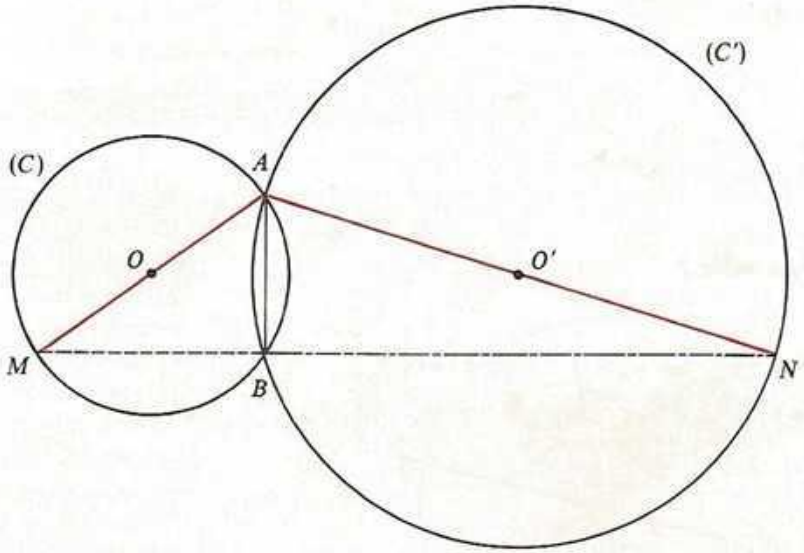
2) On a démontré

Certaines constatations ont fait apparaître la nécessité d'une justification.

Exemple

Deux cercles, l'un (C) de centre O et l'autre (C') de centre O', sont sécants en A et B.
La droite (OA) recoupe le cercle (C) en M et la droite $(O'A)$ recoupe (C') en N.
Démontrer que M, B et N sont alignés.

a) **Faire la figure** et la compléter éventuellement au fur et à mesure.



b) **Écrire les hypothèses :**

Hypothèses : (C) : cercle de centre O
(C') : cercle de centre O'
$(C) \cap (C') = \{ A, B \}$
$(OA) \cap (C) = \{ M, A \}$
$(O'A) \cap (C') = \{ N, A \}$.

c) **Écrire la conclusion :**

Conclusion : M, B et N sont alignés.

d) Chercher puis **rédiger la démonstration.**

$[AM]$ est un diamètre de (C) et B un point de ce cercle.
D'après le théorème vu en 4e : « Tout triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ est rectangle en A. »,
le triangle BAM est rectangle en B. ①
$[AN]$ est un diamètre du cercle (C') et B un point de ce cercle. D'après le théorème rappelé ci-dessus, le triangle BAN est rectangle en B. ②
Les propositions ① et ② nous permettent d'écrire, par définition du triangle rectangle :

$$(BM) \perp (BA) \quad ③ \quad \text{et} \quad (BN) \perp (BA) \quad ④$$

D'après l'axiome : « Par un point, il passe une droite et une seule orthogonale à une droite donnée », les propositions ③ et ④ nous permettent enfin d'affirmer que la droite (BM) égale la droite (BN).

Conclusion : M, B et N sont alignés.

Exercice Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Indications : Tracer par chaque sommet du triangle la parallèle au côté opposé et démontrer que chaque hauteur du triangle initial est médiatrice du triangle obtenu.

3) On a construit

Pour construire, il faut :

a) esquisser une figure illustrant les données et répondant approximativement au problème posé,

b) analyser cette figure pour trouver un programme de construction,

c) rédiger ce programme de construction,

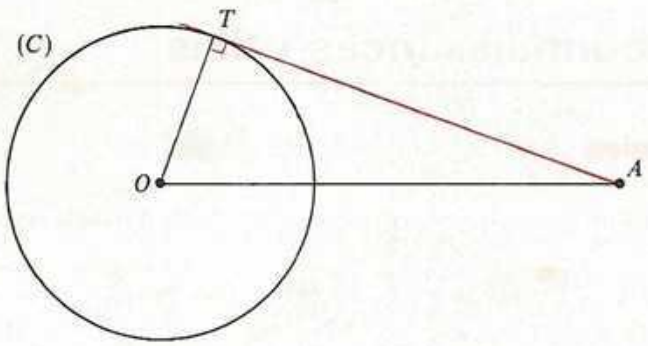
d) exécuter ce programme et s'assurer que la figure obtenue répond au problème,

e) indiquer le nombre de solutions.

Exemple

On donne un cercle (C) de centre O et un point A extérieur à ce cercle.
Construire une droite passant par A et tangente au cercle (C).

a) **Esquisser une figure :**



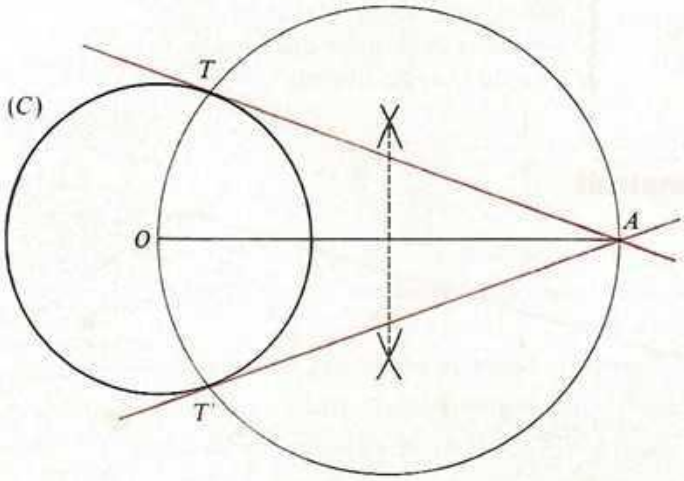
b) **Analyser la figure :**

(AT) étant tangente au cercle est perpendiculaire au rayon $[OT]$; le triangle OAT est rectangle en T. Le point T appartient donc au cercle de diamètre $[OA]$.

c) **Rédiger un programme :**

Tracer le cercle de diamètre $[OA]$ qui coupe le cercle (C) en T et T'. Tracer (AT).

d) **Éxécuter le programme :**



Le triangle OAT est inscrit dans le cercle de diamètre $[OA]$. Il est donc rectangle en T. (AT) est perpendiculaire à (OT) : (AT) est une droite passant par A et tangente au cercle (C).

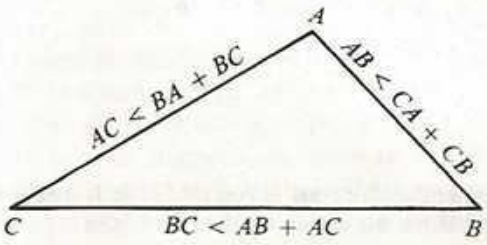
e) **Indiquer le nombre de solutions :**

Le cercle de diamètre $[OA]$ coupe le cercle (C) en deux points T et T'. Il existe donc deux droites passant par A et tangentes au cercle (C).

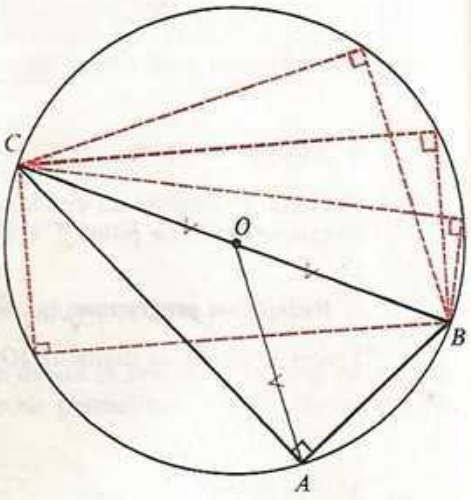
2 Des connaissances utiles

1) Les triangles

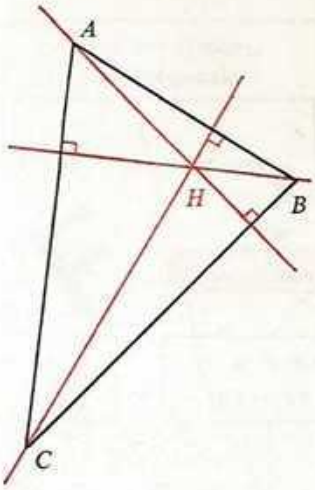
a) **Inégalité triangulaire**



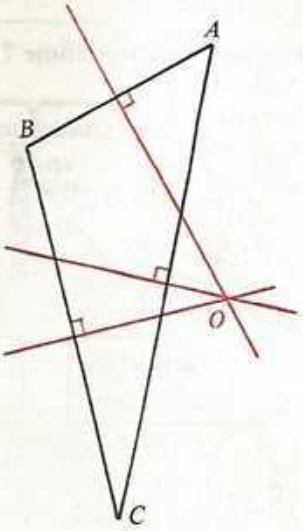
b) **Triangle rectangle**



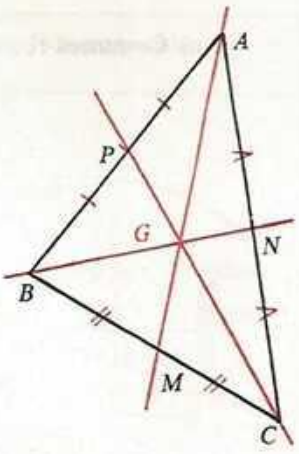
c) Droites particulières d'un triangle



Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé **orthocentre** du triangle. (Voir exercice paragraphe 2).



Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes en un point O appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle.



Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité** du triangle

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\,\overline{AM}$$

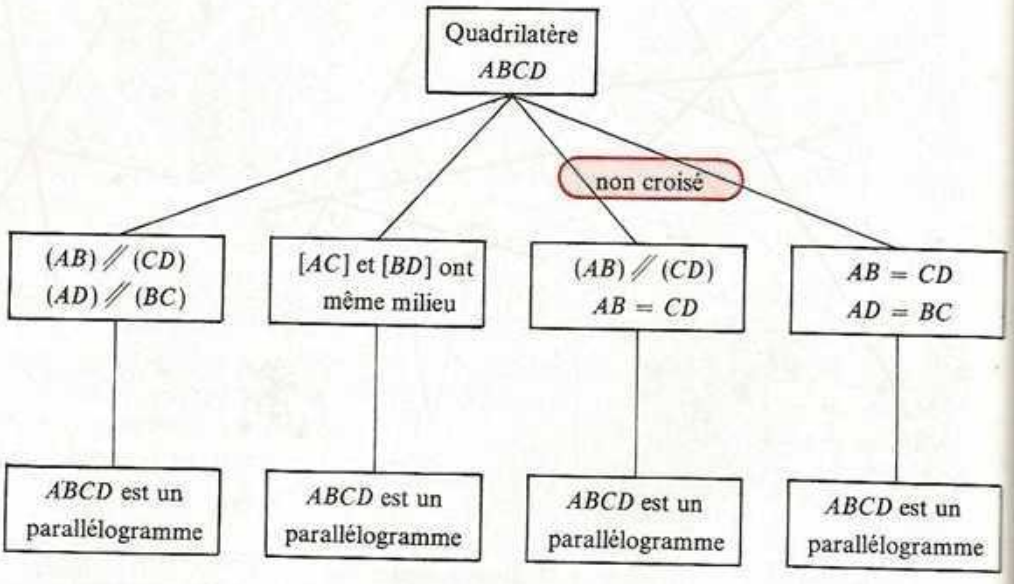
$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\,\overline{BN}$$

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\,\overline{CP}.$$

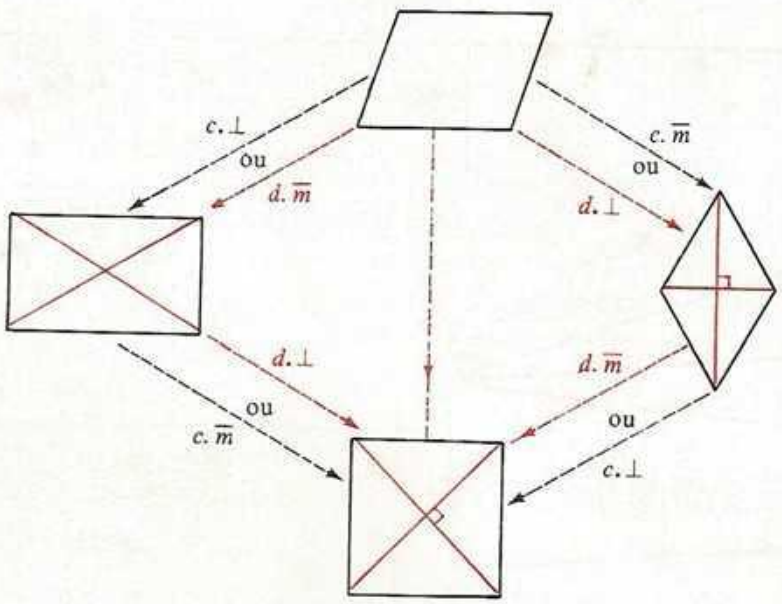
(Voir ex. n° 13, p. 190.)

2) Les parallélogrammes

a) **Comment reconnaître un parallélogramme ?**



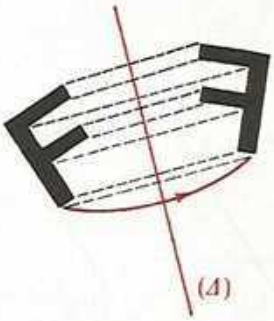
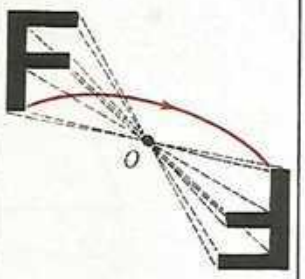
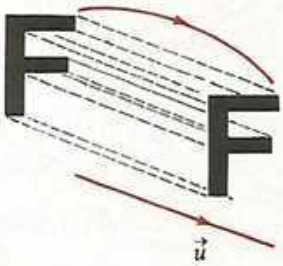
b) **Parallélogrammes particuliers :**



Légende

c. ⊥ : deux côtés consécutifs perpendiculaires. *d.* ⊥ : diagonales perpendiculaires.
c. $\overline{m}$: deux côtés consécutifs de même mesure. *d.* $\overline{m}$: diagonales de même mesure.

3) Images de figures

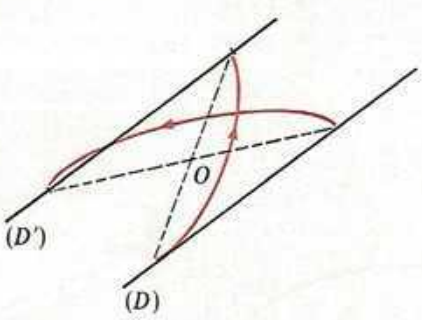
Par une symétrie orthogonale	Par une symétrie centrale	Par une translation
		
(Δ) : axe de la symétrie $S_{(\Delta)} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ $M \mapsto M'$	O : centre de la symétrie $S_O : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ $M \mapsto M'$	$\vec{u}$: vecteur de la translation $t_{\vec{u}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ $M \mapsto M'$
$M' = S_{(\Delta)}(M)$ signifie que — si $M \in (\Delta)$ alors $M' = M$ — si $M \notin (\Delta)$ alors (Δ) est la médiatrice de $[MM']$	$M' = S_O(M)$ signifie que O est le milieu de $[MM']$	$M' = t_{\vec{u}}(M)$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

LES SYMÉTRIES ORTHOGONALES
LES SYMÉTRIES CENTRALES
LES TRANSLATIONS
conservent
— LA DISTANCE
— L'ALIGNEMENT
— LE PARALLÉLISME
— L'ORTHOGONALITÉ

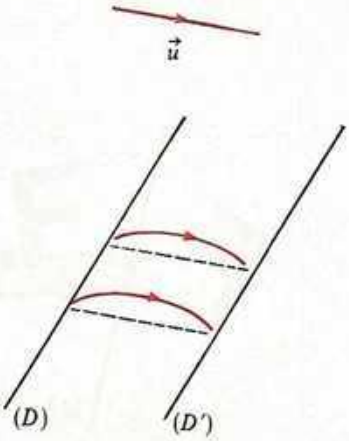
Remarques :

a) E étant un ensemble et f une application, on notera $f(E)$ l'ensemble des images par f des éléments de E.
L'image d'une droite (D) par une application f devrait se noter $f((D))$; pour simplifier, on la notera $f(D)$.

b)



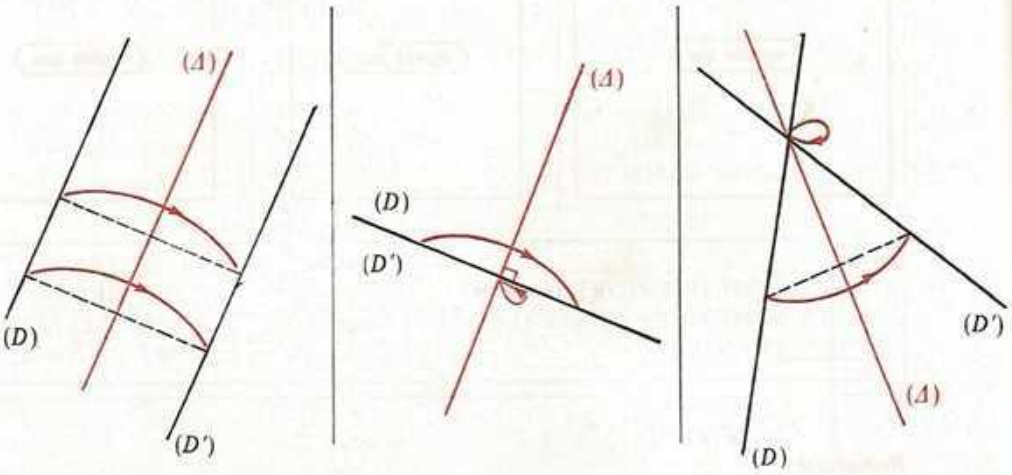
$S_O(D) = (D')$



$t_{\vec{u}}(D) = (D')$

L'image d'une droite (D) par une symétrie centrale ou par une translation est une droite (D') qui est parallèle à (D).

c)

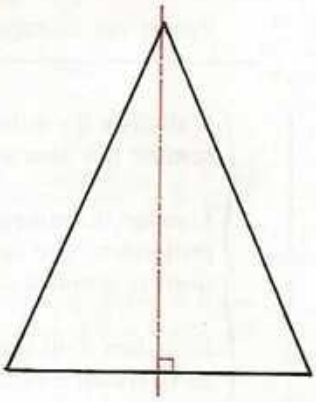


$S_{(\Delta)}(D) = (D')$

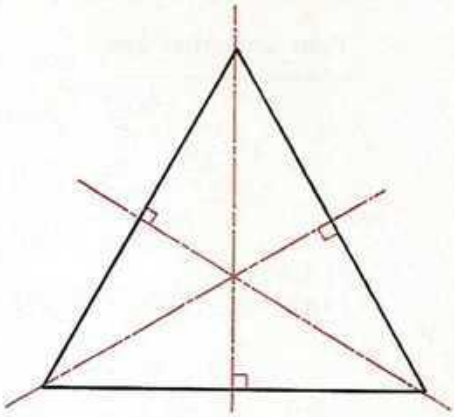
L'image d'une droite (D) par une symétrie orthogonale est une droite (D') qui n'est pas nécessairement parallèle à (D).

4) Axes et centre de symétrie

a) **Triangles :**

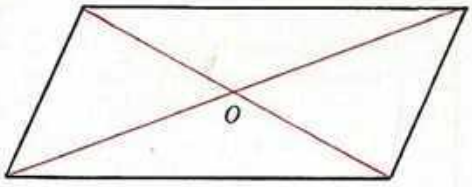


1 axe de symétrie

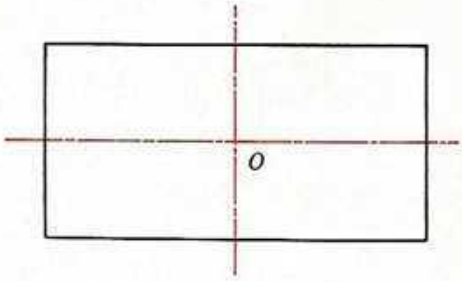


3 axes de symétrie

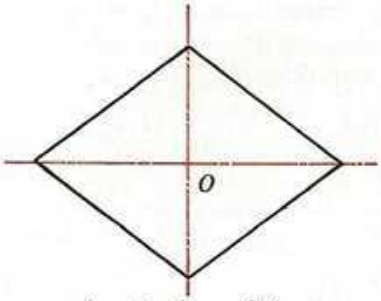
b) **Parallélogrammes :**



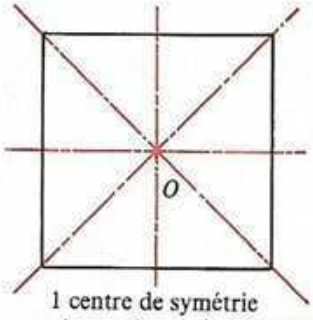
1 centre de symétrie



1 centre de symétrie
2 axes de symétrie

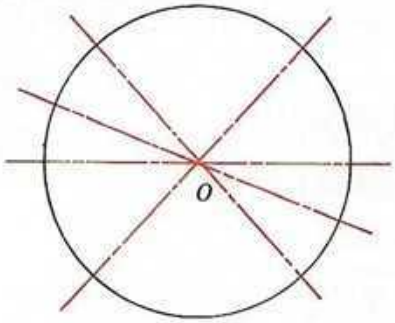


1 centre de symétrie
2 axes de symétrie



1 centre de symétrie
4 axes de symétrie

c) **Cercle :**



1 centre de symétrie
une infinité d'axes de symétrie

5) Comment démontrer que ...

Pour démontrer que :	Penser par exemple à :
1) Un point M est le milieu d'un segment $[AB]$.	L'abscisse du milieu de $[AB]$ est la demi-somme des abscisses de A et B. ou L'image du milieu d'un segment par une projection, une symétrie ou une translation est le milieu de l'image de ce segment. ou Le milieu d'un segment $[AB]$ est le centre de la symétrie centrale qui au point A fait correspondre le point B.
2) Deux droites sont parallèles.	Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. ou La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. ou L'image d'une droite (D) par une symétrie centrale ou une translation est une droite parallèle à (D).
3) Deux droites sont perpendiculaires.	Les symétries et la translation conservent l'orthogonalité. ou Si M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$, (AM) et (BM) sont perpendiculaires.
4) Trois points sont alignés.	Les symétries et la translation conservent l'alignement. ou Si les droites (AB) et (BC) sont parallèles, les points A, B et C sont alignés. ou $M \in [AB]$ $\langle$ équivaut à $\rangle$ $d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$.

Exercices

Calculer

1. Les abscisses des points P et Q d'une droite (Δ) sont respectivement -2 et 3. Calculer $\overline{PQ}$, $\overline{QP}$, $d(P, Q)$.
Faire la figure.

2. Sachant que l'abscisse du point A d'une droite (Δ) est -1 et que $\overline{AB} = 3$, calculer l'abscisse du point B.
Faire la figure.

3. Soit deux points A et B d'une droite (Δ) d'abscisses respectives -3 et 2.
Calculer l'abscisse de P sachant que

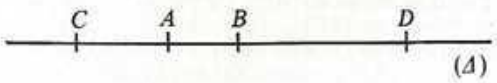
$$\overline{AP} = -\frac{3}{5}\overline{AB}.$$

Même question pour $\overline{AP} = -\frac{5}{2}\overline{PB}$.

4. Soit un point P d'une droite (AB).
Trouver le réel λ tel que $\overline{AP} = \lambda\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

a) P est le milieu de (A, B),
b) $P = A$,
c) $P = B$.

5. Soit quatre points A, B, C, D d'une droite (Δ) (voir figure).



On désigne par P_1 la demi-droite ouverte $]AC)$
P_2 le segment fermé $[AB]$
P_3 la demi-droite ouverte $]BD)$.

Dans chacun des cas suivants, trouver à quel ensemble appartient le point M et faire une figure.

a)
1) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 3$
2) $\overline{AM} = -5\overline{AB}$
3) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 0{,}7$
4) $\overline{AM} = \frac{4}{3}\overline{AB}$
5) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = -\frac{3}{5}$
6) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 1$
7) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = 0$
8) $\overline{AM} = \pi\overline{AB}$ $\quad (3{,}1 < \pi < 3{,}2)$.

b)
1) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} < -2$
2) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} > 5$
3) $-5 < \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} < -1$
4) $0 \leqslant \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \leqslant \frac{1}{2}$
5) $\frac{1}{3} < \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \leqslant \frac{3}{4}$
6) $2 \leqslant \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} < 7$.

6. *Problème de dépannage*

M. Kouakou tombe en panne de voiture sur la route Bouaké-Ferkéssédougou. Il appelle par téléphone un garagiste.
Voici la communication téléphonique :

« Allo, Kouakou au téléphone, suis-je bien chez Kouamé, garagiste à Katiola ? »
« Garage Kouamé, je vous écoute. »
« Je suis en panne sur la route Bouaké-Ferkéssédougou à 5 km de Katiola. Pouvez-vous venir me dépanner ? »
« D'accord, j'arrive. »

Le lieu de la panne a-t-il été bien indiqué ?

Démontrer

7. Soit $ABCD$ un rectangle. Démontrer qu'il existe un cercle et un seul passant par les quatre sommets du rectangle. (On l'appelle cercle circonscrit au rectangle.)

8. On sait que la symétrie orthogonale conserve l'orthogonalité.
Démontrer, en utilisant cette propriété, que deux droites parallèles ont pour images par une symétrie orthogonale deux droites parallèles.

9. Démontrer que l'image d'un carré par une symétrie centrale est un carré.

10. On donne un parallélogramme $ABCD$. M, N, P et Q sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
On pose :

$$(MC) \cap (QB) = \{X\}$$
$$(MC) \cap (DN) = \{Y\}$$
$$(AP) \cap (QB) = \{T\}$$
$$(AP) \cap (DN) = \{Z\}.$$

Démontrer que $TXYZ$ est un parallélogramme.

11. On donne un triangle ABO.
Construire l'image du triangle ABO par la symétrie de centre O. On notera cette image $A'B'O$.
On trace deux droites (D) et (Δ) passant par O. (D) coupe (AB) et $(A'B')$ respectivement en M et M'. (Δ) coupe (AB) et $(A'B')$ respectivement en P et P'.
Démontrer que $MPM'P'$ est un parallélogramme.

12. Le segment $[AB]$ étant donné,

1) construire un parallélogramme $ABCD$.
2) construire le parallélogramme $ABEC$.

On désigne par X le point d'intersection de (DB) et (AE).
Quelle est la particularité de M, point d'intersection de (CX) et (AB) ? Justifier.

13. On donne trois points non alignés A, B et C.
On appelle M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[AC]$.

a) La parallèle à la médiane (BN) du triangle ABC, contenant C, est sécante à la droite (AB) en T.
Démontrer que $\overline{AT} = 2\overline{AB}$.

b) Déduire de ce qui précède que les points M et T sont distincts et que $C \notin (MT)$.
Démontrer que les droites (CM) et (BN) sont sécantes. Soit G leur point d'intersection et P le milieu de $[BC]$.

c) On projette N et P respectivement en S et R sur (AB) parallèlement à (CM).
Démontrer que $\overline{MS} = \overline{SA}$.

d) Démontrer que $\overline{BR}$, $\overline{RM}$, $\overline{MS}$ et $\overline{SA}$ sont égales.

e) Démontrer que $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN}$.

f) En déduire que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en G et que G est situé aux deux tiers des segments $[AP]$, $[BN]$ et $[CM]$ respectivement à partir de A, B et C.

14. Soit un triangle ABC rectangle en A et non isocèle ; la médiatrice (Δ) de l'hypoténuse coupe les droites (AB) et (AC) en J et K. On appelle A' le symétrique de A par rapport à (Δ).

1) Quel est le symétrique du triangle ABC par rapport à (Δ) ?

2) Montrer que les droites $(A'B)$ et $(A'C)$ sont orthogonales.

3) Démontrer que les points A', J, C sont alignés.

4) Montrer qu'il existe un cercle passant par les points B, A, A', C. Préciser son centre et son rayon.

15. Soit un cercle de centre O et $[AD]$ un de ses diamètres. La perpendiculaire à (AD) menée par le milieu H de $[OD]$ coupe le cercle en B et C. La droite (OB) coupe $[AC]$ en un point I.

a) Démontrer que $(BO) \parallel (DC)$.

b) En déduire que (OB) est perpendiculaire à (AC), puis que (OB) est médiatrice de $[AC]$.

c) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

16. Tracer un triangle quelconque ABC. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N. Les droites (BN) et (CM) se coupent en I.
Démontrer que la droite (AI) est orthogonale à la droite (BC).
En déduire un procédé de construction des trois hauteurs d'un triangle.

17. On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit S le milieu de $[AC]$, I le milieu de $[AS]$ et J le milieu de $[SC]$.
La droite (DI) coupe (AB) en E et (BC) en F; la droite (BJ) coupe (CD) en G et (AD) en H.
Montrer que S est le milieu de $[IJ]$ et que $BJDI$ est un parallélogramme. Que peut-on en déduire pour les droites (DI) et (BJ) ?
Montrer que S est aussi le milieu de $[EG]$ et $[FH]$ et trouver les autres couples de droites parallèles de la figure.

18. On considère un parallélogramme $ABCD$. E est le milieu de $[BC]$. F est le symétrique de A par rapport à E. Démontrer que C, D et F sont alignés.

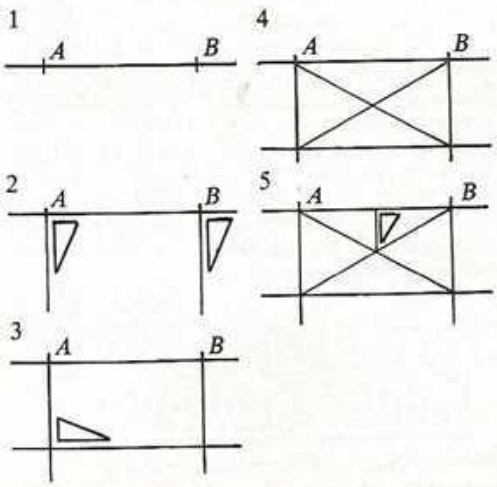
19. Soit ABC un triangle isocèle en A.
Sur $[AB]$ on marque B'.
Sur $[AC]$ on marque C' tel que $AC' = AB'$.
Soit O le point d'intersection de $(B'C)$ avec (BC'). Démontrer que :

— $B'C = BC'$,
— BOC est isocèle,
— A, O et le milieu de $[BC]$ sont alignés.

20. M et N désignent les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Par M on mène la perpendiculaire à (BC).
Soit M' le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (BC). Par N on mène la perpendiculaire à (BC).
Soit N' le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (BC).
Quelle est la particularité du quadrilatère $MNN'M'$? Justifier.
Quelle doit être la particularité du triangle ABC pour que $MNN'M'$ soit un carré ?

Construire

21. Rédiger le programme de construction du milieu de $[AB]$ suggéré par la suite de dessins :



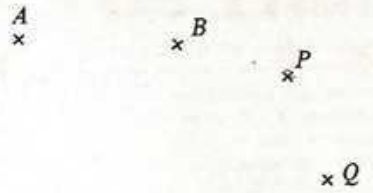
Quels sont les axiomes et théorèmes vus en Quatrième qui permettent de justifier cette construction ?

22. Donner un programme simple de construction du milieu d'un segment.

23. Donner un programme simple de la construction du parallélogramme $ABCD$, les points A, C et D étant fixés.

24. Tracer un cercle avec une boîte de conserves cylindrique.
Donner un programme de construction permettant de retrouver le centre de ce cercle à l'aide des instruments habituels.

25. On donne quatre points A, B, P et Q (voir figure).
Construire un parallélogramme $ABCD$ tel que $AC = PQ$.



Construire un parallélogramme $AXBY$ tel que $(A, X) \uparrow\uparrow (P, Q)$.

— Rédiger un programme de construction.
— Imaginer d'autres positions pour les points donnés.
La première construction est-elle toujours possible ? Et la seconde ?

26. Exécuter le programme suivant :
1) Construire un parallélogramme $ABCD$.
2) Construire le parallélogramme $ABEC$.
— On note X le point d'intersection des droites (AD) et (BE).
— On note M le point d'intersection des droites (XC) et (AB). M est le milieu de $[AB]$.
Ce programme convient-il pour construire le milieu de $[AB]$?

27. Soit un segment $[AB]$ et un cercle (C). Inscrire dans (C) un rectangle ayant un côté parallèle à (AB) et de même mesure que $[AB]$. La construction est-elle toujours possible ?

28. On donne deux droites (D) et (D') et un point O.
a) (D) et (D') sont sécantes et O n'appartient à aucune de ces droites.
Peut-on trouver un point A de (D) et un point A' de (D') tels que $A' = S_O(A)$?
b) Même problème avec $(D) \parallel (D')$.
c) Même problème avec O élément de (D).

29. On donne trois droites (D), (D') et (Δ).
a) (D) et (D') sont sécantes et (Δ) n'est ni parallèle à (D) ni parallèle à (D').
Peut-on trouver un point A de (D) et un point A' de (D') tels que $A' = S_{(\Delta)}(A)$?
b) Même problème avec $(D) \parallel (D')$.
c) Même problème avec $(D) \parallel (\Delta)$ et $(\Delta) \parallel (D')$.

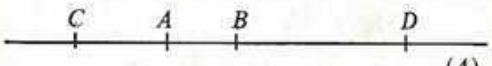
30. On donne un représentant d'un vecteur non nul $\vec{u}$ et deux droites (D) et (D').
a) (D) et (D') sont sécantes.
Peut-on trouver un point A de (D) et un point A' de (D') tels que $A' = t_{\vec{u}}(A)$?
b) Même problème avec $(D) \parallel (D')$.

31. *a*) Faire l'exercice n° 28.

b) On considère un quadrilatère $ABCD$ et un point O.
Construire un parallélogramme $XYZV$ tel que les sommets X, Y, Z et V appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC), (CD) et (DA) et que son centre de symétrie soit O. Est-il toujours possible de construire un tel parallélogramme ?

Réfléchir

32. Soit quatre points A, B, C, D d'une droite (Δ) (voir figure).



On désigne par P_1 la demi-droite ouverte $]AC)$
P_2 le segment fermé $[AB]$
P_3 la demi-droite ouverte $]BD)$.

Dans chacun des cas suivants, trouver à quel ensemble appartient le point M et faire une figure.

1) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 4$

2) $\overline{AM} = -3\,\overline{MB}$

3) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 0{,}5$

4) $\overline{AM} = -0{,}5\,\overline{MB}$

5) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \leqslant -4$

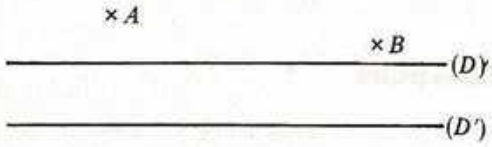
6) $1 \leqslant \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} < \pi$

7) $-0{,}7 < \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \leqslant -0{,}1$.

On suppose que M est élément de P_1. Trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ auquel appartient le réel $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$. On le désigne par E_1.

Même question pour M élément de P_2 (on désigne par E_2 le sous-ensemble trouvé).
Même question pour M élément de P_3 (on désigne par E_3 le sous-ensemble trouvé).
$\{E_1, E_2, E_3\}$ est-il une partition de $\mathbb{R}$?

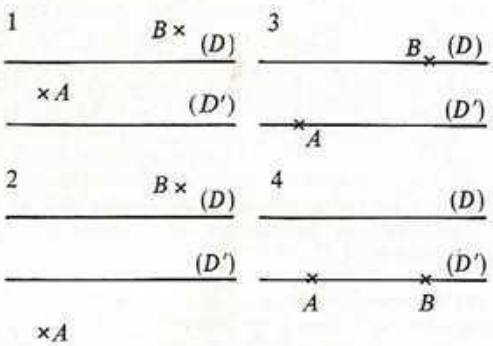
33. Sur un terrain plan, on a tendu deux cordes parallèles représentées sur le dessin par deux droites parallèles (D) et (D') et on a marqué deux points A et B (voir la figure).



Jeu n° 1 : Un joueur part de A, touche la corde représentée par (D) et se rend en B. En quel point de (D) doit-il toucher la corde pour que son chemin soit le plus court possible ?

Jeu n° 2 : Le joueur part de A, touche la corde représentée par (D) ensuite celle représentée par (D') et arrive en B.
En quels points de (D) et de (D') doit-il toucher les cordes pour que son chemin soit le plus court possible ?

Reprendre les mêmes jeux pour les positions suivantes des points A et B.

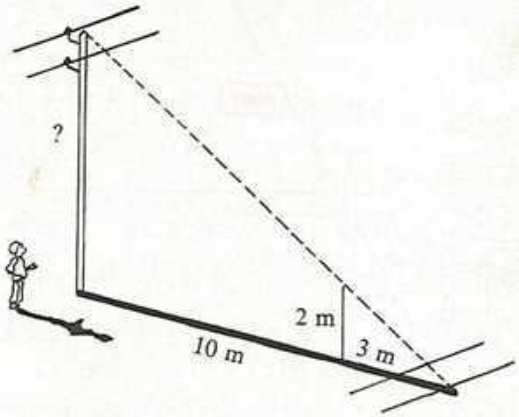


Reprendre les mêmes jeux lorsque les cordes représentées par (D) et (D') sont sécantes.

2 Propriétés de Thalès

Leçon 1 : PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES
Leçon 2 : AXIOME DE THALÈS. RÉCIPROQUE
Leçon 3 : APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DE THALÈS





Quelle est la hauteur du poteau ?

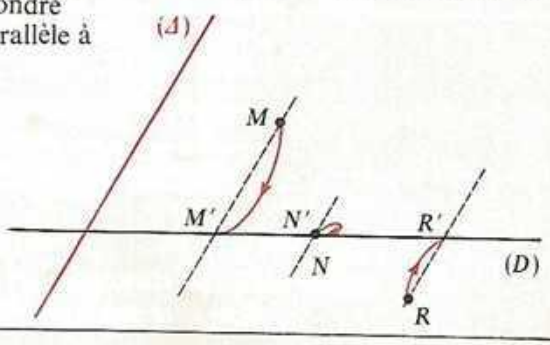
1 Parallèles équidistantes

1) Rappels de la classe de Quatrième

a) **Projection.**

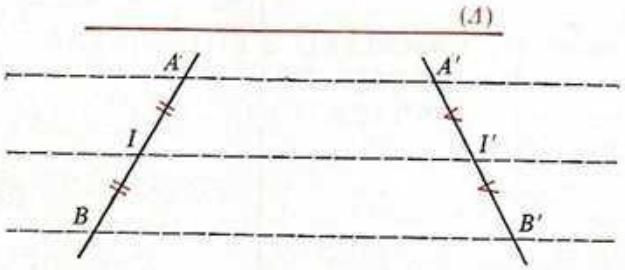
Étant donné une droite (D) et une droite (Δ) non parallèle à (D), on appelle projection sur (D) parallèlement à (Δ) l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M de $\mathscr{P}$ fait correspondre le point commun à (D) et à la parallèle à (Δ) passant par M

$p : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$
$M \mapsto M'$.



b) **Axiome du projeté du milieu.**

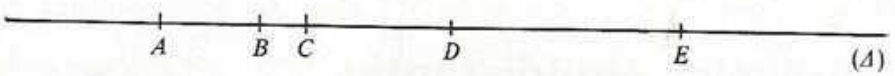
Le projeté du milieu d'un segment est le milieu du projeté de ce segment.



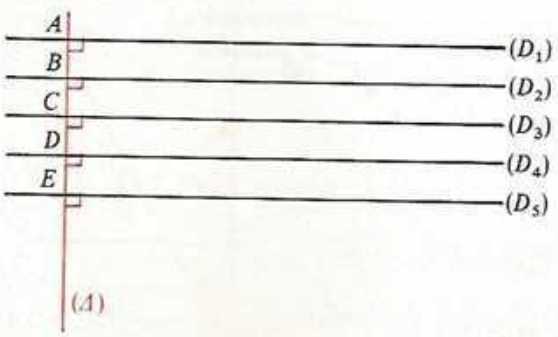
si $(AA') /\!/ (BB')$ et $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ et $(II') /\!/ (AA')$. alors $\overline{A'I'} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$

2) Parallèles équidistantes

Étant donné une droite (Δ) et des points A, B, C, D, E de (Δ) pris dans cet ordre, on dit que les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DE]$ sont consécutifs.



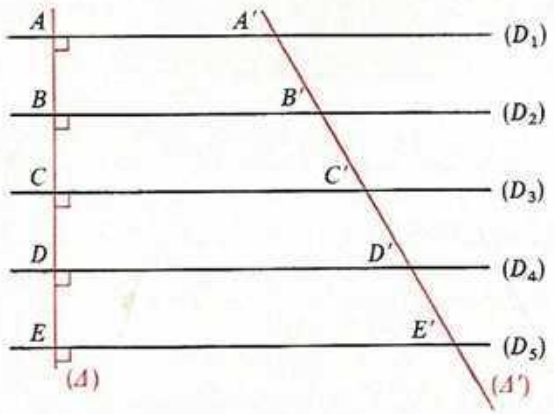
a) Tracer une droite (Δ). Sur (Δ) construire quatre segments consécutifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DE]$ de même mesure.
Tracer les droites perpendiculaires à (Δ) passant par A, B, C, D, E.
Ces droites sont parallèles. Pourquoi ?
Appelons ces droites : (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5).
B est le milieu de $[AC]$. Que représente (D_2) pour les droites (D_1) et (D_3) ?
En Quatrième, l'axe médian de deux parallèles a été aussi appelé *parallèle équidistante* de ces deux parallèles.



Nous dirons que (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) et (D_5) sont des parallèles « équidistantes ». (Δ) est une perpendiculaire commune à ces parallèles.

Définition

Lorsque des droites parallèles déterminent sur une perpendiculaire commune des segments consécutifs de même mesure, elles sont dites « équidistantes ».



b) **Propriétés.**

Reprendre la figure précédente. Tracer une droite (Δ') quelconque sécante à (D_1).
(Δ') coupe aussi (D_2), (D_3), (D_4) et (D_5) ; pourquoi ?
Par la projection sur (Δ') parallèlement à (D_1), les points A, B, C, D, E ont pour images respectives A', B', C', D' et E'.
B est le milieu de $[AC]$; que représente B' pour le segment $[A'C']$? Pourquoi ?
On a donc $d(A', B') = d(B', C')$.
C est le milieu de $[BD]$.
Démontrer que $d(B', C') = d(C', D')$. De même, démontrer que $d(C', D') = d(D', E')$.
On en déduit : $d(A', B') = d(B', C') = d(C', D') = d(D', E')$.

Théorème

Lorsque des droites parallèles sont équidistantes, elles déterminent sur toute sécante des segments consécutifs de même mesure.

Exercice Démontrer le théorème suivant :

Lorsque des droites parallèles déterminent sur une sécante des segments consécutifs de même mesure, elles sont équidistantes.

3) Applications

a) **Partager un segment en *n* segments de même mesure.**

Exemple

Partager le segment $[AB]$ suivant en trois segments de même mesure.
Décrire les différentes étapes de cette construction et la justifier.



fig. 1

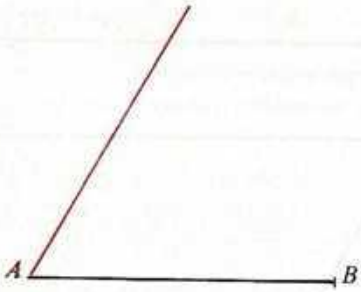


fig. 2

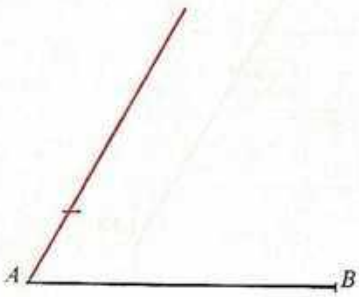


fig. 3

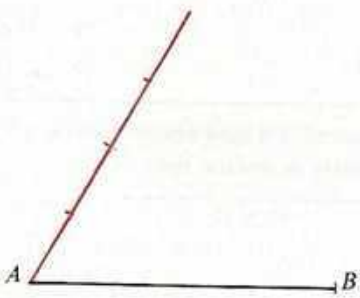


fig. 4

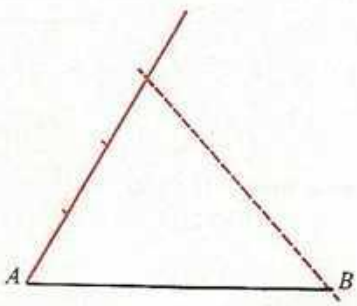


fig. 5

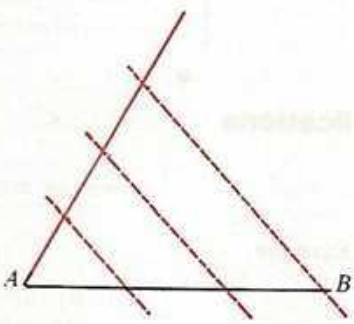


fig. 6

b) **On donne deux points distincts *A* et *B*.**

Construire un point M de (AB) tel que $d(A, M) = \frac{5}{3} d(A, B)$. Remarquons que $\frac{5}{3} = 5 \times \frac{1}{3}$.

Partageons $[AB]$ en trois segments de même mesure. Soit I et J les points obtenus tels que

$$d(A, I) = d(I, J) = d(J, B).$$

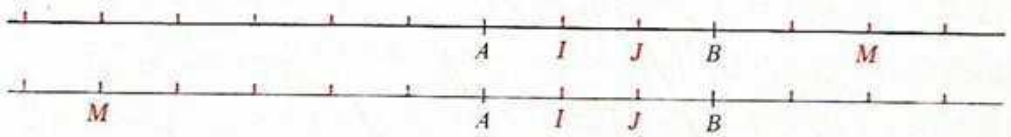
On a donc $d(A, I) = \frac{1}{3} d(A, B)$.



Marquons un point situé à la distance 5 AI de A : pour cela, sur (AB) à partir de A, construisons cinq segments consécutifs de mesure AI. On obtient ainsi un point M situé à la distance 5 AI de A. On a alors $d(A, M) = 5\, d(A, I)$ donc $d(A, M) = \frac{5}{3} d(A, B)$.

Combien existe-t-il de points de (AB) situés à la distance $\frac{5}{3} d(A, B)$ de A ?

Penser au problème du dépannage (ex. n° 6, p. 189.)



c) **Sur la droite (AB) précédente, construire un point P tel que $\overline{AP} = -\frac{5}{3} \overline{AB}$.**

Nous venons de voir qu'il existe sur (AB) deux points situés à la distance $\frac{5}{3} d(A, B)$ de A.

Si $M \in [AB]$ alors $\overline{AM}$ et $\overline{AB}$ sont de même signe, d'où $\overline{AM} = \frac{5}{3} \overline{AB}$.

Si $M \notin [AB]$ alors $\overline{AM}$ et $\overline{AB}$ sont de signes contraires, d'où $\overline{AM} = -\frac{5}{3} \overline{AB}$.

Conclusion : Il existe donc sur (AB) un point P unique tel que

$$\overline{AP} = -\frac{5}{3} \overline{AB}.$$

C'est le point situé à la distance $\frac{5}{3} d(A, B)$ de A et n'appartenant pas à la demi-droite $[AB)$.



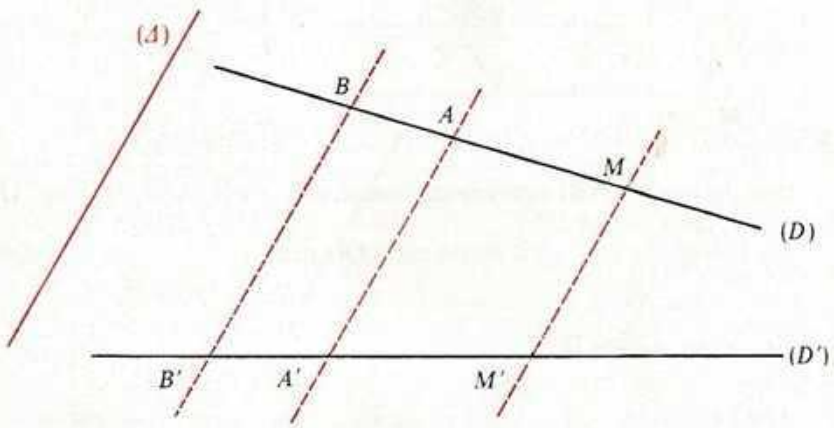
Remarque. Des constructions analogues aux précédentes peuvent être utilisées pour placer un point M d'une droite (AB) défini par $\overline{AM} = \frac{a}{b} \overline{AB}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

2 Axiome de Thalès (*). Réciproque

1) Axiome de Thalès

a) **Manipulation.**

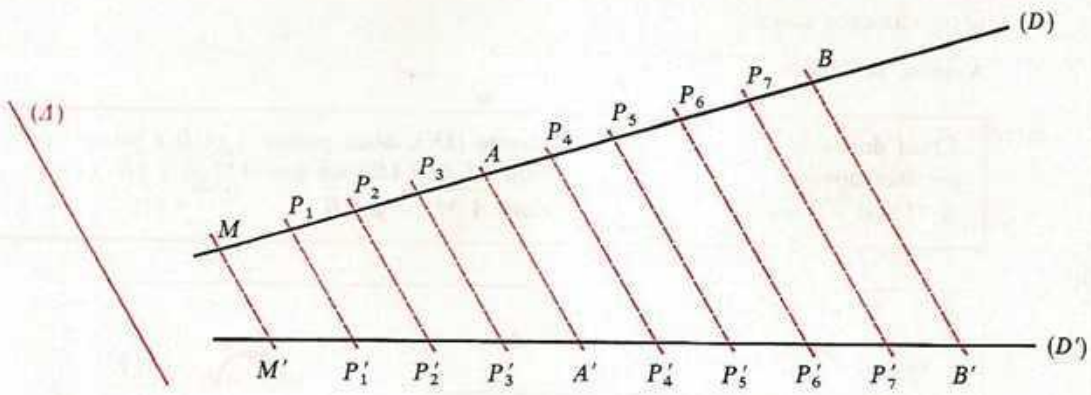
Tracer deux droites (D) et (D') et une droite (Δ) sécante aux précédentes.
Prendre trois points A, B et M sur (D).
Mesurer $[AB]$ et $[AM]$.
Calculer le rapport $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$.
Projeter A, B et M sur (D') parallèlement à (Δ) en A', B' et M'.
Calculer le rapport $\dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.
Comparer les deux rapports.
A la précision des mesures et des calculs près, que constate-t-on ?
Compléter : $\overline{AM} = \cdots \times \overline{AB}$
$\overline{A'M'} = \cdots \times \overline{A'B'}$.



b) **Exercice.**

On donne deux droites (D) et (D') et une droite (Δ) sécante à (D) et sécante à (D'). Soit A et B deux points de (D). Construire sur (D) un point M tel que $\overline{AM} = -\dfrac{4}{5}\overline{AB}$.
Ce point est-il unique ? Pourquoi ?

(*) Thalès (de Milet) aurait vécu de 624 à 548 (av. J.-C.). On lui attribue la découverte des propriétés dites de Thalès ; il aurait étonné ses contemporains en trouvant par le calcul, la hauteur d'une pyramide d'Égypte, connaissant uniquement la hauteur d'un bâton et les longueurs des ombres portées par cette pyramide et ce bâton.



Soit P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 et P_7 les points intervenus dans la construction de M.
Par construction, les segments $[MP_1]$, $[P_1P_2]$, $[P_2P_3]$, $[P_3A]$, $[AP_4]$, $[P_4P_5]$, $[P_5P_6]$, $[P_6P_7]$, $[P_7B]$ sont consécutifs et ont même mesure.
Soit p la projection sur (D') parallèlement à (Δ).
Construire les images par p des points M, P_1, P_2, P_3, A, P_4, P_5, P_6, P_7 et B.
On les appellera respectivement :

$$M', P'_1, P'_2, P'_3, A', P'_4, P'_5, P'_6, P'_7 \text{ et } B'.$$

Que peut-on dire des droites parallèles à (Δ), passant par $M, P_1, P_2, P_3, A, P_4, P_5, P_6, P_7$ et B ?
Démontrer que les segments $[M'P'_1]$, ..., $[P'_7B']$ ont même mesure.
En déduire que $d(A', M') = \frac{4}{5} d(A', B')$.
Le point M n'appartient pas à $[AB]$, que peut-on en déduire pour M' ?
Démontrer que : $\overline{A'M'} = -\frac{4}{5}\overline{A'B'}$. En déduire que $\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$.
On dit que : « La projection p conserve le rapport des mesures algébriques des deux bipoints (A, M) et (A, B). »

Rappel : Un rationnel peut toujours s'écrire sous forme d'une fraction.

Conséquence. Étant donné :
— trois droites (D), (D') et (Δ) telles que (Δ) soit sécante à (D) et (D'),
— trois points A, B, M de (D) tels que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ soit un rationnel,

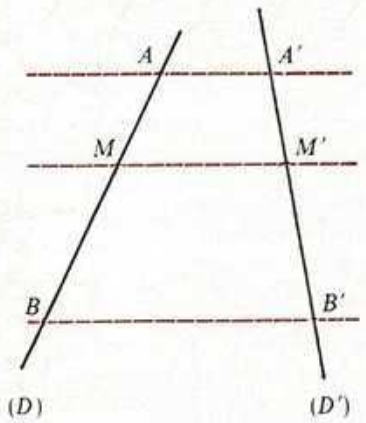
on peut démontrer que la projection sur (D') parallèlement à (Δ) conserve le rapport des mesures algébriques des bipoints (A, M) et (A, B).

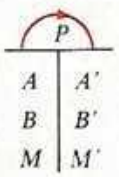
c) Nous admettrons que la propriété précédente est vraie pour $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ élément de $\mathbb{R}$.

D'où l'axiome suivant :

Axiome de Thalès

Étant donné une projection sur une droite (D'), deux points A et B d'images respectives distinctes A' et B', et un point M de (AB) tel que $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, si M' est le projeté de M sur (D') alors $\overline{A'M'} = \lambda\overline{A'B'}$.





si $M \in (AB)$, $(AA') /\!/ (BB')$, $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$, $(MM') /\!/ (AA')$, $M' \in (A'B')$. alors $\overline{A'M'} = \lambda\overline{A'B'}$

Dans l'énoncé précédent, remplacer λ par $\frac{1}{2}$.

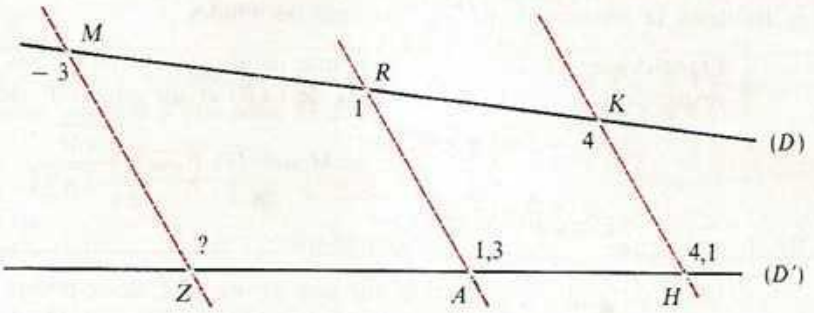
Quel axiome retrouve-t-on ?

Autre énoncé de l'axiome de Thalès :

Étant donné une projection sur une droite (D'), deux points A et B d'images respectives distinctes A' et B', un point M de (AB) et un point M' de (D') :

si M' est le projeté de M sur (D') alors $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.

Exercice Dans la figure ci-dessous, M, R et K ont pour images respectives Z, A et H par une projection sur (D'). Les abscisses des points M, R, K, H et A sont données. Calculer l'abscisse de Z.



Attention : Tracer deux droites (D) et (D'). Marquer sur (D) trois points A, M, B tels que $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Marquer sur (D') trois points A', M', B' tels que

$$\overline{A'M'} = \frac{1}{3}\overline{A'B'}.$$

A-t-on $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$?

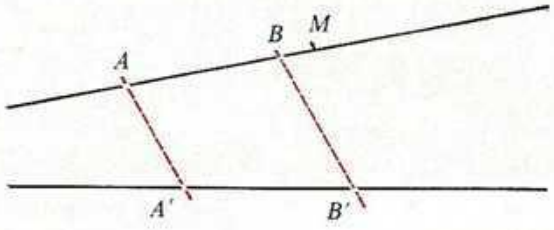
Peut-on affirmer que A', B', M' sont les projetés de A, B, M sur (D') par une projection p ?

On voit donc que l'égalité des rapports $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$ **ne suffit pas pour affirmer** que M' est le projeté de M sur (D') parallèlement à (AA').

2) Réciproque

a) **Manipulation.**

Sur la figure ci-dessous, le point M est tel que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{5}{4}$.



Faire deux calques de cette figure.
Sur le premier calque, projeter M sur $(A'B')$ parallèlement à (AA').
Soit M' l'image de M.

Sur le second calque, marquer sur $(A'B')$ le point M'' tel que $\dfrac{\overline{A'M''}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{5}{4}$.

Superposer les deux dessins obtenus.
Que constate-t-on ?

b) Relisons la seconde forme de l'axiome de Thalès.

> Étant donné une projection sur une droite (D'), deux points A et B d'images respectives A' et B', un point M de (AB) et un point M' de (D'),
>
> si M' est le projeté de M sur (D') alors $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.

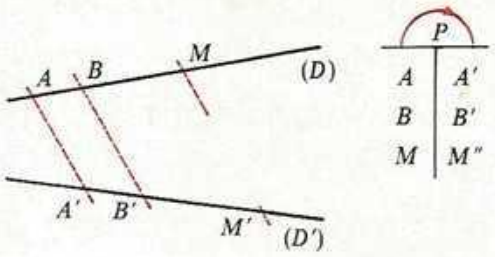
Réciproquement, nous allons démontrer que :

> Étant donné une projection sur une droite (D'), deux points A et B d'images respectives A' et B', un point M de (AB) et un point M' de (D'),
>
> si $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$ alors M' est le projeté de M sur (D').

Hypothèses :

- p : projection sur (D') ;
- $p(A) = A'$; $p(B) = B'$;
- $M \in (AB)$; $M' \in (A'B')$;
- $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.

Démonstration : Appelons M'' l'image de M par la projection p.



D'après l'axiome de Thalès on a :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M''}}{\overline{A'B'}}.$$

Comparons à l'égalité $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$; on en déduit :

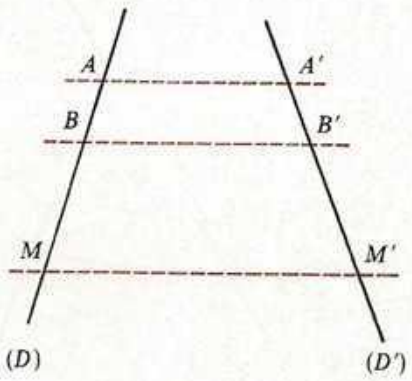
$\dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{A'M''}}{\overline{A'B'}}$ d'où $\overline{A'M'} = \overline{A'M''}$, donc $M' = M''$.

Ce qui signifie que M' est le projeté de M sur (D') ou encore que (MM') est parallèle à (AA'). On énonce :

Théorème réciproque de l'axiome de Thalès :

Étant donné une projection sur une droite (D'), deux points A et B d'images respectives distinctes A' et B', un point M de (AB) et un point M' de $(A'B')$:

si $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$ **alors** M' **est le projeté de** M **sur** (D').



si $M \in (AB)$, $(AA') /\!/ (BB')$, $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$, $M' \in (A'B')$ alors $(MM') /\!/ (AA')$

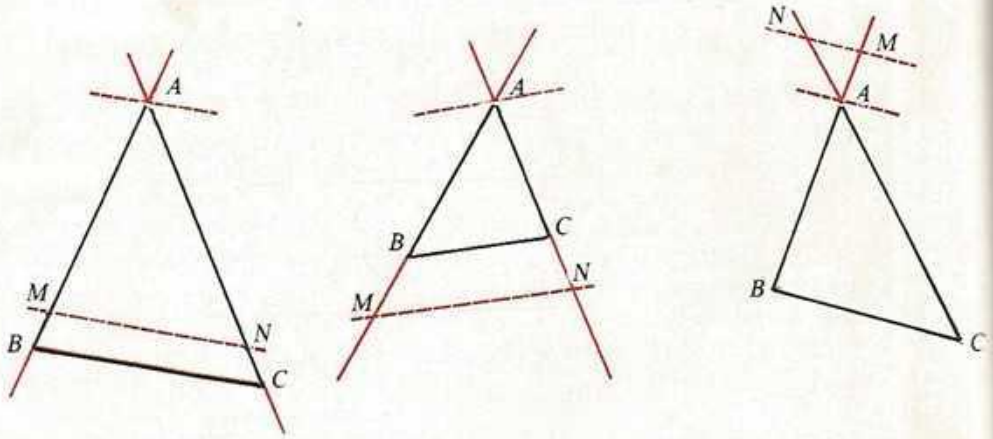
Exercice On donne un trapèze $ABCD$ tel que $(AB) /\!/ (CD)$. Sur (AD) marquer un point M tel que $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AD}$. Sur (BC) marquer un point N tel que $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Démontrer que $(MN) /\!/ (DC)$.

Remarque. Quand on sait que deux droites sont parallèles, le théorème précédent permet de démontrer qu'une troisième droite est parallèle aux deux premières.

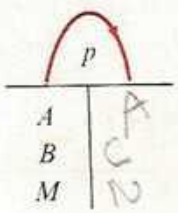
3 Applications des propriétés de Thalès

1) Application au triangle

Soit un triangle ABC, p la projection sur (AC) parallèlement à (BC) et M un point de (AB).
Trois cas de figures sont possibles.



Compléter le tableau :



D'après l'axiome de Thalès (2e forme), on a dans les trois cas de figures : $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

Réciproquement : si $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$, N est le projeté de M sur (D'), donc $(MN) /\!/ (BC)$.

On énonce :

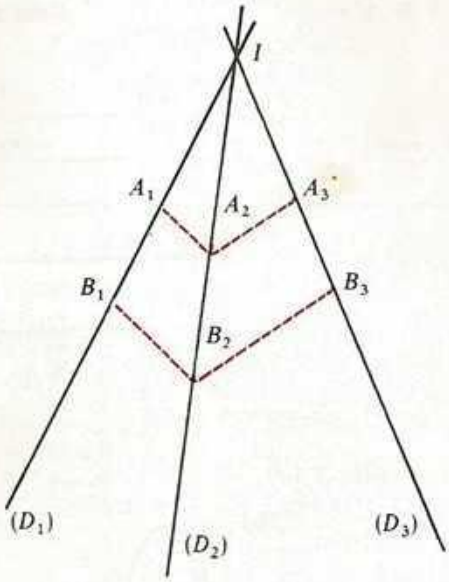
Théorème

Étant donné un triangle ABC, un point M de (AB) et un point N de (AC) :

$$(MN) /\!/ (BC) \quad \text{équivaut à} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}.$$

Exercice

Tracer trois droites (D_1), (D_2), (D_3) concourantes en un point I.
Conformément à la figure suivante, on projette A_1 et B_1 sur (D_2) en A_2 et B_2 ; on projette A_2 et B_2 sur (D_3) en A_3 et B_3. Démontrer que (A_1A_3) et (B_1B_3) sont parallèles.



Exercice très important (pour préparer le chapitre 3).

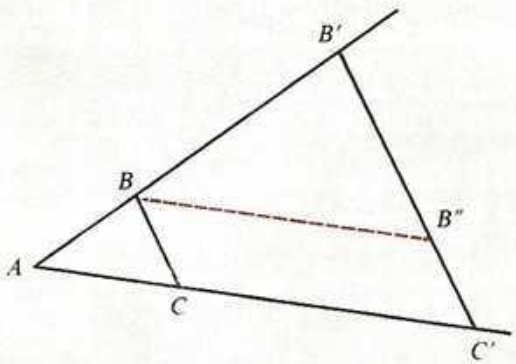
1) Soit un triangle ABC et k un réel quelconque.
Soit B' le point de (AB) tel que $\overline{AB'} = k\overline{AB}$, et C' le point de (AC) tel que $\overline{AC'} = k\overline{AC}$.
Démontrer que $(B'C')$ est parallèle à (BC).

2) La parallèle à (AC) passant par B coupe $(B'C')$ en B''.

a) Démontrer que $\overline{B'C'} = k\overline{B''C'}$.

b) Démontrer que $BCC'B''$ est un parallélogramme. En déduire que $BC = B''C'$.

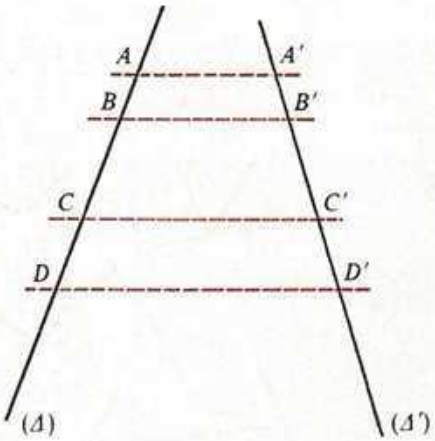
3) En déduire que $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

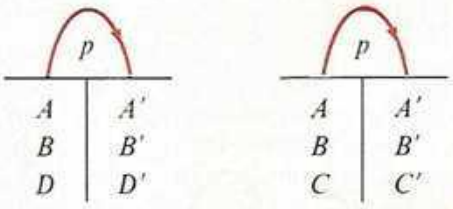


Application numérique : Répondre au problème posé en début de chapitre.

2) Projection de quatre points

Soit une projection p sur une droite (Δ') et quatre points alignés A, B, C et D d'images distinctes respectives A', B', C', D'.





Compléter :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} =$$

En déduire que :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'B'}} - \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}},$$

puis que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}}.$$

Soit λ le réel $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$, en déduire que $\overline{CD} = \lambda\overline{AB}$; montrer que $\overline{C'D'} = \lambda\overline{A'B'}$.

On énonce :

Théorème

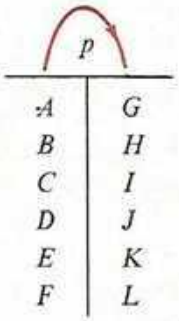
Étant donné une projection sur une droite (Δ'), quatre points A, B, C et D alignés tels que

$$\overline{CD} = \lambda\overline{AB}, \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

si A', B', C' et D' sont les projetés respectifs de A, B, C et D alors $\overline{C'D'} = \lambda\overline{A'B'}$.

Exercices

1) On donne les points A, B, C, D, E et F d'une droite (Δ) et leurs images respectives par une projection p sur une droite (Δ').



Compléter :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{EA}} =$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \qquad \frac{\overline{CB}}{\overline{CF}} =$$

2) On donne les points A, B, C, D d'une droite (Δ) et leurs images respectives A', B', C' et D' par une projection p sur une droite (Δ').

a) Sachant que $\overline{AB} = 2$; $\overline{CD} = 5$ et $\overline{A'B'} = 3$, calculer $\overline{C'D'}$.

b) Sachant que $\overline{AB} = 1{,}74$; $\overline{CD} = 1{,}16$ et $\overline{A'B'} = 2$, calculer $\overline{C'D'}$.

c) Sachant que $\overline{AB} = \pi$; $\overline{CD} = 2$ et $\overline{C'D'} = 2{,}5$, calculer $\overline{A'B'}$.

Exercices

Calculer. Construire

1 (1). Partager un segment $[AB]$ en cinq segments de même mesure.
Partager un segment $[AB]$ en sept segments de même mesure.

2 (1). Sur une droite (AB), construire les points situés à la distance $\frac{3}{5}\,d(A, B)$ de A.

3 (1). Sur une droite (AB), construire le point M_1 tel que $\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$ et le point M_2 tel que $\frac{\overline{AM_2}}{\overline{AB}} = -\frac{3}{5}$.

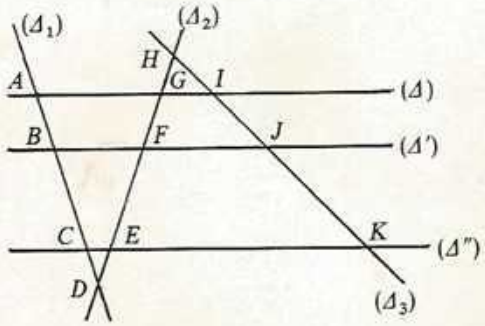
4 (1). Soit une droite (D) de repère (O, I), construire le point A d'abscisse $\frac{4}{7}$ et le point B d'abscisse $-\frac{4}{7}$.

5 (1). Sur une droite (D) de repère (O, I), construire le point A d'abscisse $\frac{7}{5}$ et le point B d'abscisse $\frac{5}{7}$.

6 (1). Sur une droite (Δ), placer deux points A et B tels que $d(A, B) = 7$ (unité : 1 cm).
Partager $[AB]$ en six segments de même mesure en utilisant une projection.
Placer sur (Δ) les points M, M' et M'' tels que :

$$\overline{AM} = \frac{7}{6}\overline{AB};\quad \frac{\overline{AM'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3};\quad \overline{AB} = -3\overline{AM''}.$$

7. Soit (Δ), (Δ') et (Δ'') trois droites de même direction (voir figure).



Indiquer, parmi les rapports suivants, ceux qui sont égaux.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}};\ \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}};\ \frac{\overline{GE}}{\overline{EF}};\ \frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}};\ \frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}};\ \frac{\overline{GF}}{\overline{FE}};\ \frac{\overline{BA}}{\overline{CB}};\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}};\ \frac{\overline{GE}}{\overline{EH}};\ \frac{\overline{IK}}{\overline{KJ}};\ \frac{\overline{IK}}{\overline{KH}};\ \frac{\overline{GD}}{\overline{DE}};\ \frac{\overline{GF}}{\overline{GE}};\ \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}};\ \frac{\overline{HF}}{\overline{GE}};\ \frac{\overline{HJ}}{\overline{IK}}.$$

8. On donne un triangle ADE. Par un point C du segment $[AE]$ on mène la parallèle à (DE). Cette parallèle coupe (AD) en B. Par D on mène la parallèle à (AE) qui coupe (BC) en F.
Faire une figure.
Indiquer, parmi les rapports suivants, ceux qui sont égaux.

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}};\ \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}};\ \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}};\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}};\ \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}};\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}};\ \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}};\ \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}.$$

9. On donne un triangle ABC dont les mesures des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sont respectivement 5, 7 et 3 (en cm).

a) Sur (AB), placer le point M tel que $\overline{AM} = \frac{7}{5}\overline{AB}$.

b) Par M on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en P. Calculer les mesures de $[AM]$, $[MP]$ et $[AP]$.

c) Par M on trace une droite (Δ) qui coupe (BC) en R et (AC) en Q.
Par C on trace la parallèle à (MQ) qui coupe (AB) en C'.
En utilisant l'axiome de Thalès, compléter :

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}} = \qquad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} =$$

d) Calculer $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

10. *a*) Soit quatre points alignés A, B, C et D. Par A et B, on mène respectivement deux parallèles (Δ) et (Δ') ; par C et D on mène respectivement deux parallèles (Δ_1) et (Δ_2) sécantes aux précédentes. (Δ) coupe (Δ_1) et (Δ_2) respectivement en Q et R.

En utilisant la propriété des diagonales d'un parallélogramme, construire le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[CD]$ à l'aide d'une règle non graduée et d'une équerre.

b) Sur une droite on donne trois points A, B et M tels que M soit le milieu de $[AB]$ et deux autres points C et D. En s'inspirant du *a*), construire le milieu N de $[CD]$ à l'aide d'une règle non graduée et d'une équerre.

11. *Théorème de Ménélaüs* (*)

On donne un triangle ABC. Une droite (Δ) coupe (AB) en M, (BC) en N et (AC) en P. La parallèle menée par A à (Δ) coupe (BC) en I.

a) Trouver un rapport égal à $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Trouver un rapport égal à $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$.

b) En déduire la valeur du réel :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}.$$

Démontrer

12. Sur une droite (D), on marque les points A, B, C tels que B soit le milieu de $[AC]$. Sur une autre droite (Δ), on marque un point E. Par B on mène la parallèle à (AE) qui coupe (Δ) en F. Soit G le symétrique de E par rapport à F. Que peut-on dire de la direction de (CG) ? Justifier.

13. Soit un parallélogramme $ABCD$, K le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[CD]$. Les droites (KD) et (LB) coupent (AC) respectivement en R et S.
Démontrer que $d(A, R) = d(R, S) = d(S, C)$.

14. Soit un triangle ABC. Par M, milieu de $[AB]$, on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en N, et par N la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en P.
Montrer que (MP) est parallèle à (AC) et que le point d'intersection I de (MC) et (NP) est le milieu de $[NP]$.

15. Soit un triangle ABC, K le milieu de $[BC]$ et (Δ) la parallèle à (BC) menée par A.
La parallèle à (AB) menée par K coupe (AC) en L et (Δ) en N. Démontrer que L est le milieu de $[KN]$.

16. Soit un trapèze $ABCD$; $(AB) \parallel (CD)$. Par le milieu K du côté $[AD]$, on mène la parallèle à (AB) qui coupe (AC), (BD) et (BC) respectivement en R, S et T. Démontrer que :

$$d(K, T) = \frac{1}{2}[d(A, B) + d(C, D)].$$

Calculer $d(R, S)$ dans le cas où

$$d(C, D) > d(A, B).$$

17. Sur une droite (Δ), les points A, B, C, D déterminent trois segments consécutifs de même longueur.
Sur une droite (Δ'), passant par D (et distincte de (Δ)), les points D, E, F déterminent deux segments consécutifs de même longueur.
Soit K, le point d'intersection de (AE) avec (BF). Démontrer que :

1) $(BF) \parallel (CE)$.
2) K est le milieu de $[AE]$.
3) $d(B, K) = \dfrac{1}{4} d(B, F)$.

18. On donne deux droites (D) et (D') non parallèles. Sur (D), on considère les points A, B, C et M d'abscisses respectives 0; 5; 7 et -3.
Soit K un point de (D'). Dans la projection p sur (D') parallèlement à (MK), le projeté de A est R, celui de B est J.

a) Calculer la valeur du rapport $\dfrac{\overline{RK}}{\overline{RJ}}$. Justifier.

b) Sur (D'), on considère le point P tel que $\dfrac{\overline{KP}}{\overline{KJ}} = \dfrac{5}{4}$.
Démontrer que (CP) est parallèle à (MK).

19. On considère un triangle ABC et on désigne par M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[AC]$.

1) On projette M parallèlement à (AC). Soit P son projeté sur (BC).
Montrer que (PN) est parallèle à (AB).

2) On trace la droite (AP) ; elle coupe (MN) en I.

a) Montrer que I est milieu de $[MN]$.
b) Montrer que I est milieu de $[AP]$.

3) La parallèle à (AB) contenant I coupe (BC) en R et la parallèle à (AC) contenant I coupe (BC) en T.
Montrer que $\overline{BR} = \overline{RP} = \overline{PT} = \overline{TC}$.

4) Compléter :

$$\overline{BT} = \ldots \times \overline{BR}$$
$$\overline{RP} = \ldots \times \overline{RC}$$
$$\overline{PT} = \ldots \times \overline{PC}$$
$$\overline{TP} = \ldots \times \overline{RT}.$$

(*) Ménélaüs (mathématicien grec) : Il démontra le théorème qui porte son nom vers l'an 100 après J.-C. Il est aussi l'auteur de six livres de trigonométrie sur les cordes du cercle.

20. Le quadrilatère non croisé $ABCD$ est tel que ses côtés opposés ne sont pas parallèles. La parallèle à (AC) menée par D coupe (AB) en K. La parallèle à (BD) menée par C coupe (AB) en L. Soit I le point d'intersection de (AB) avec (DC). Démontrer que

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IL}}.$$

21. Soit (L_1) et (L_2) deux droites parallèles et (Δ) une droite qui coupe (L_1) en A et (L_2) en B. Sur (Δ), on considère le point C tel que $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ et le point D tel que $\overline{AD} = 5\overline{AB}$. Par C, on mène (L_3) parallèle à (L_2). Une droite (Δ') coupe (L_1), (L_2) et (L_3) respectivement en A', B' et C'.

1) Faire une figure
2) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\overline{A'B'} = x\overline{C'A'}$.
3) D' est le point de (Δ') tel que

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{3}{4}.$$

Démontrer que $(DD') /\!/ (AA')$.

22. Généralisation de l'exercice précédent :

Soit (L_1) et (L_2) deux droites parallèles et (Δ) une droite qui coupe (L_1) en A et (L_2) en B. Soit a et b deux réels. On considère sur (Δ) le point C tel que

$$\overline{AC} = a\overline{AB}.$$

Le réel b étant différent de 1, on considère sur (Δ) le point D tel que $\overline{AD} = b\overline{AB}$.
Par C, on mène (L_3) parallèle à (L_2). Une droite (Δ') coupe (L_1), (L_2) et (L_3) respectivement en A', B' et C'.

1) Faire une figure.
2) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\overline{A'B'} = x\overline{C'A'}$.
3) D' est le point de (Δ') tel que

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{a}{b-1}.$$

Démontrer que $(DD') /\!/ (AA')$.

23. Soit un triangle ABC. On désigne par M le point de (AB) tel que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}.$$

Par M on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en N.
Par N on mène la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en P.
Par P on mène la parallèle à (AC) qui coupe (AB) en Q.
Démontrer que :

1) $\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AB}$;
2) Q est le milieu de $[AM]$.

24. Par le milieu M du côté $[AB]$ d'un triangle ABC, on mène la droite (Δ) parallèle à (AC).
Par C, on mène la droite (Δ') parallèle à (AB) qui coupe (Δ) en P.
Par P, on mène (Δ'') parallèle à (BC) qui coupe (AB) en Q.
Calculer $\frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$.

25. Soit un triangle ABC. Par un point M de (AB), on mène la droite (Δ) parallèle à (BC) qui coupe (AC) en N. Par N, on mène la droite (Δ') parallèle à (CM) qui coupe (AB) en P.
Démontrer que $(\overline{AM})^2 = \overline{AB} \times \overline{AP}$.

26. (Δ) et (Δ') sont deux droites sécantes. A, B et C sont trois points distincts de la droite (Δ). Par A et B on trace deux droites parallèles qui coupent (Δ') respectivement en A' et B'. Par A' on trace la parallèle à $(B'C)$ qui coupe (Δ) en D. Par C et D, on trace deux droites parallèles qui coupent (Δ') respectivement en C' et D'. Faire une figure.
Démontrer que $(AD') /\!/ (BC')$.

27. Soit quatre points distincts A, B, C et M d'une droite (Δ).

1) En utilisant une droite (Δ') passant par A :

a) Construire le point X de (Δ) tel que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MX}}.$$

b) Construire le point Y de (Δ) tel que

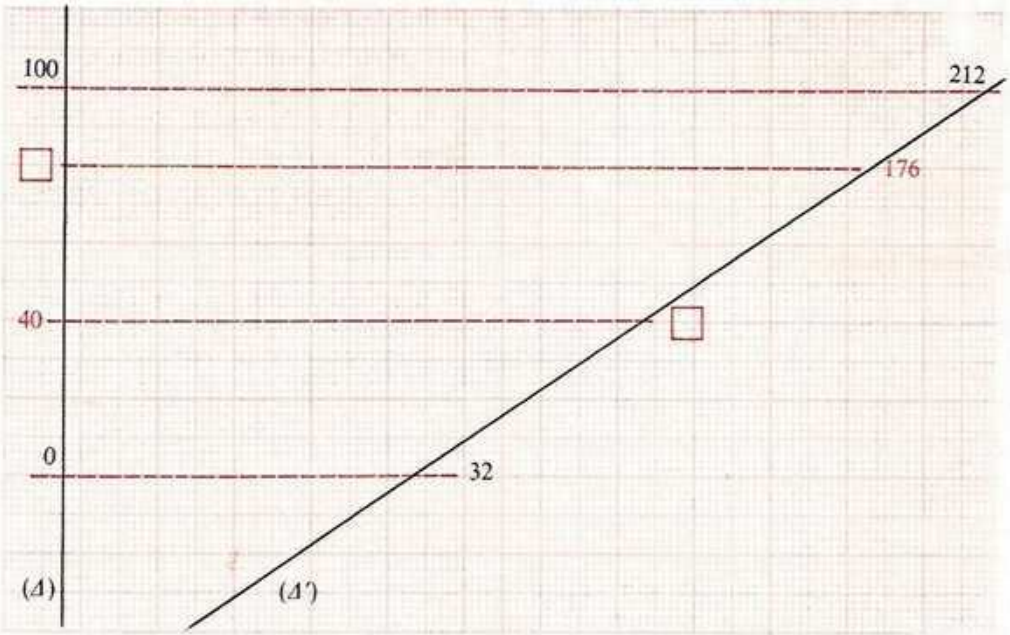
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AY}}.$$

2) Démontrer que $X = Y$.

3) Construire le point R de (AB) tel que $3\overline{RA} + 2\overline{RB} = 0$.

28. *Pour connaître la température en Grande-Bretagne*

On considère deux droites sécantes (Δ) et (Δ') et une projection p qui au point d'abscisse 0 de (Δ) fait correspondre le point d'abscisse 32 de (Δ') et au point d'abscisse 100 de (Δ) fait correspondre le point d'abscisse 212 de (Δ'). Compléter le schéma avec les abscisses convenables.



Ce schéma établit une correspondance entre les échelles centésimales et Fahrenheit.

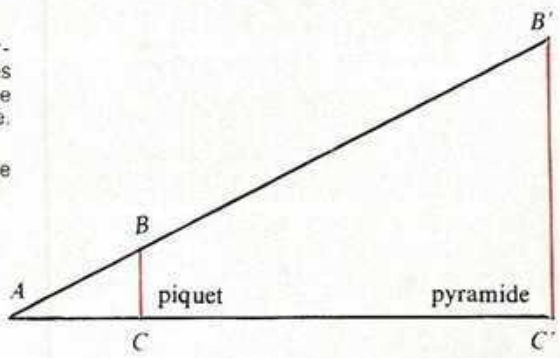
Calculer les températures en degrés Fahrenheit correspondant à 50°, 20°, – 40° et – 273° centésimaux.

Calculer les températures en degrés centésimaux correspondant à 0°, 100°, 200° et – 50° Fahrenheit.

29. Ingénieux Thalès.

La légende rapporte que Thalès aurait émerveillé un pharaon en calculant la hauteur des pyramides d'Egypte au moyen de leur ombre et de celle d'un piquet de hauteur connue.

Schématiquement, la situation se présente comme suit :



$[B'C']$ représente la hauteur d'une pyramide.
$[AC']$ représente l'ombre de cette pyramide.
$[AC]$ représente l'ombre du piquet.

On a en mètres : $AC = 5$, $AC' = 230$, $BC = 3$.
Calculer $B'C'$.

Réfléchir

30. Démontrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère non croisé sont les sommets d'un parallélogramme.

Quelle propriété particulière doit posséder le quadrilatère donné pour que le parallélogramme obtenu soit :

a) un rectangle,
b) un losange,
c) un carré.

Thème d'étude

31 1. *a*) Soit une droite (Δ) de repère (O, I), marquer le point A d'abscisse $\frac{3}{2}$.

Soit une droite (Δ') passant par O de repère (O, I'), marquer le point A' d'abscisse $\frac{3}{2}$. Tracer la droite $(A'I)$ et la parallèle à $(A'I)$ passant par I' qui coupe (Δ) en B. Démontrer que B a pour abscisse $\frac{2}{3}$.

b) Utiliser le résultat précédent pour faire la construction suivante : étant donné un point M de (Δ) d'abscisse non nulle x, construire le point N de (Δ) ayant pour abscisse $\frac{1}{x}$.

2. *a*) Sur (Δ) marquer le point C d'abscisse $\frac{5}{4}$, sur (Δ') le point C' d'abscisse $\frac{5}{4}$. Tracer la droite (CI') et la parallèle à (CI') passant par A' qui coupe (Δ) en D. Démontrer que D a pour abscisse $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$.

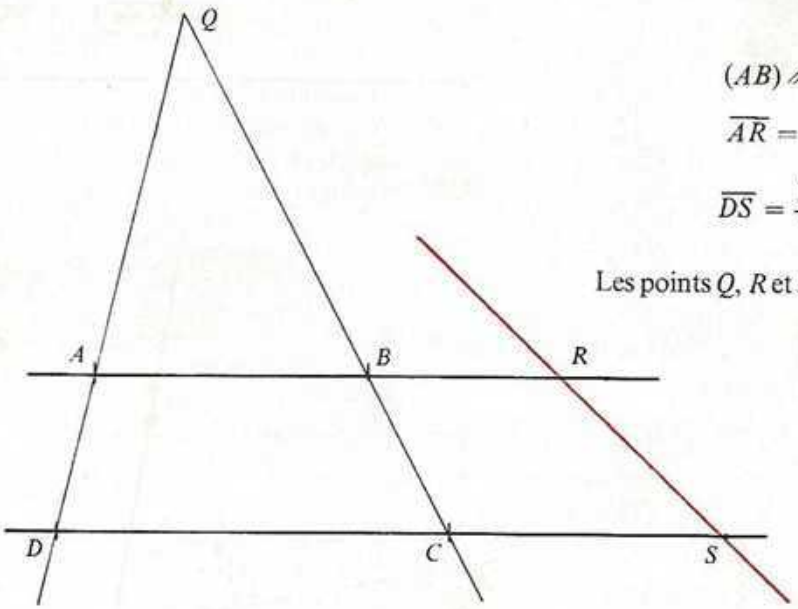
b) Utiliser le résultat précédent pour faire les constructions suivantes :

— étant donné deux points M et P de (Δ) d'abscisses respectives x et y, construire le point N de (Δ) ayant pour abscisse xy.
— étant donné un point M_1 de (Δ) d'abscisse x, construire le point M_2 de (Δ) ayant pour abscisse x^2.

3. Soit une droite (Δ) de repère (O, I) et un point M_1 de (Δ) d'abscisse non nulle x. Construire sur (Δ) les points M_2, M_3, M_4, N_1, N_2, N_3 d'abscisses respectives : x^2, x^3, x^4, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}.

3 Multiplication d'un vecteur par un réel

Leçon 1 : PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL
Leçon 2 : MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL
Leçon 3 : UTILISATION DES VECTEURS



$(AB) /\!/ (DC)$

$\overline{AR} = \frac{12}{7}\overline{AB}$

$\overline{DS} = \frac{12}{7}\overline{DC}$.

Les points Q, R et S sont-ils alignés ?

1 Produit d'un vecteur par un réel

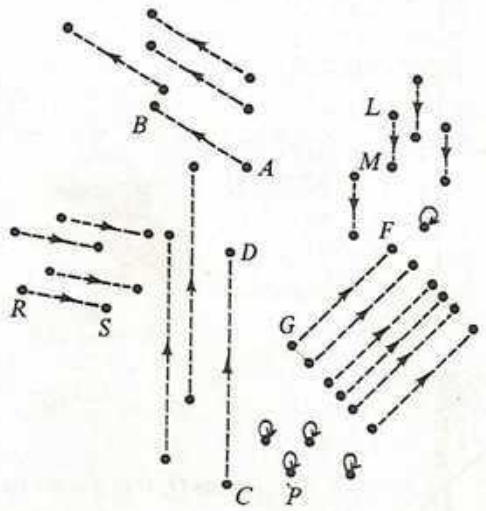
1) Rappels

a) Soit $\mathscr{P}$ le plan mathématique
soit

$$A \in \mathscr{P}, \quad B \in \mathscr{P}$$

c'est-à-dire

$$(A, B) \in \mathscr{P} \times \mathscr{P}.$$



On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B).

Par définition

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad \text{signifie que} \quad (A, B) \in \vec{u}.$$

Examinons le schéma ci-contre : (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$.
$(C, D) \notin \vec{u}$. Pourquoi ? (C, D) est un représentant d'un autre vecteur que l'on notera $\vec{v}$.
(P, P) est un représentant du vecteur nul, noté $\vec{0}$.

b) A chaque bipoint de $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ on associe un vecteur et un seul.
L'ensemble de tous ces vecteurs est noté $\mathscr{V}$

$$\vec{u} \in \mathscr{V}; \quad \vec{v} \in \mathscr{V}; \quad \overrightarrow{GF} \in \mathscr{V}; \quad \vec{0} \in \mathscr{V}.$$

Exercice A et B étant deux points distincts du plan $\mathscr{P}$, remplacer les pointillés par $\in$ ou $\subset$

$$A \ldots \mathscr{P}; \quad B \ldots \mathscr{P}; \quad (A, B) \ldots \mathscr{P} \times \mathscr{P}; \quad (A, B) \ldots \vec{u}$$
$$\vec{u} \ldots \mathscr{P} \times \mathscr{P}; \quad \vec{u} \ldots \mathscr{V}.$$

c) **Théorème :**

> **Pour trois points quelconques A, B, C du plan $\mathscr{P}$, on a :**
> $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Exercice Étant donné trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ représentés par des bipoints de même support, démontrer que

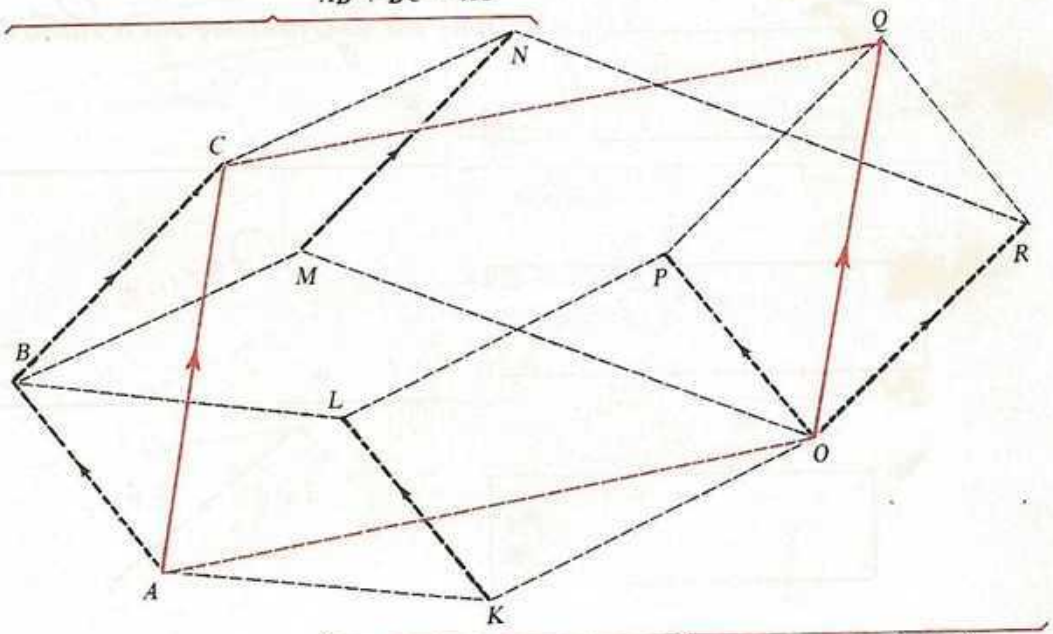
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF}.$$

(Rappel : Deux bipoints de même support sont équipollents si et seulement si leurs mesures algébriques sont égales.)

d) Construire un représentant de la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs (K, L) et (M, N).

1er procédé : utilisation du théorème

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



2e procédé : utilisation d'un parallélogramme

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{KL}$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MN}$$
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ}.$$

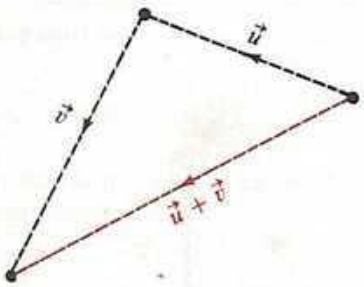
$OP = RQ$

$OP + OR = OR + RQ$

e) **Propriétés de l'addition des vecteurs.**

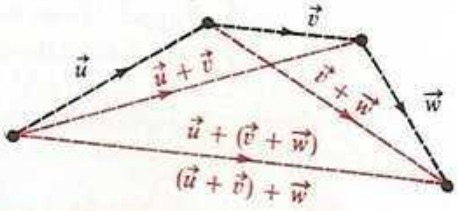
$(\mathscr{V}, +)$

1) L'addition est une loi de composition interne dans $\mathscr{V}$.
$\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$
$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$



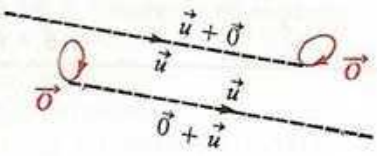
2) L'addition dans $\mathscr{V}$ est associative.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



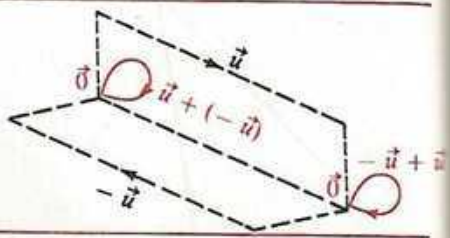
3) Le vecteur $\vec{0}$ est neutre pour l'addition dans $\mathscr{V}$

Pour tout vecteur $\vec{u}$
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$



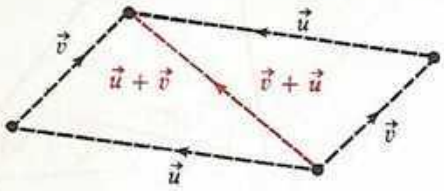
4) Chaque vecteur $\vec{u}$ admet un opposé et un seul, le vecteur noté $-\vec{u}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$



5) L'addition dans $\mathscr{V}$ est commutative.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

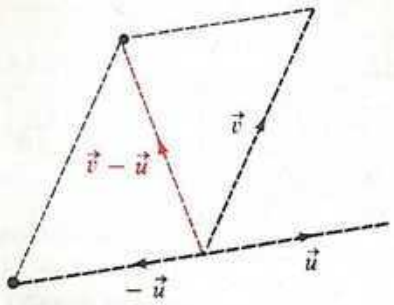


Comparer ces propriétés à celles de l'addition des réels.
On résume ces cinq propriétés en disant que :

$(\mathscr{V}, +)$ est un groupe commutatif.

f) **Différence de deux vecteurs.**

Le vecteur $\vec{v} + (-\vec{u})$ est noté aussi $\vec{v} - \vec{u}$. On l'appelle **différence** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ pris dans cet ordre.



Exercices

1) $OACB$ est un parallélogramme.
Montrer que : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

2) On donne quatre points A, B, C et D. Écrire de plusieurs façons le vecteur $\overrightarrow{CD}$ comme différence de deux vecteurs.

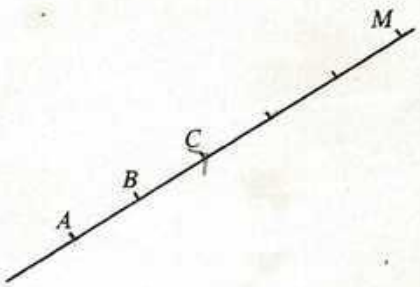
2) Produit d'un vecteur par un réel

a) **Introduction.**

Soit un vecteur $\vec{u}$ et (A, B) l'un de ses représentants.

• Construire le représentant (A, C) du vecteur $\vec{u} + \vec{u}$.
Pourquoi les points A, B, C sont-ils alignés ?
Compléter : $\overrightarrow{AC} = \cdots \times \overrightarrow{AB}$.

• Construire le représentant (A, M) du vecteur $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.
Que peut-on dire des points A, B, M ?
Justifier.
Compléter : $\overrightarrow{AM} = \cdots \times \overrightarrow{AB}$.
On dira que :
— le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le *produit du vecteur* $\vec{u}$ par 2,
— le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est le *produit du vecteur* $\vec{u}$ par 5.



b) **Construction.**

On donne un vecteur $\vec{u}$ non nul de représentant (A, B).

Construire le point M de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

• *Indication* : Utiliser la construction de la page 196.



Par cette construction, on a associé au bipoint (A, B) le bipoint (A, M) tel que

$$\overline{AM} = -\frac{3}{2}\overline{AB}.$$

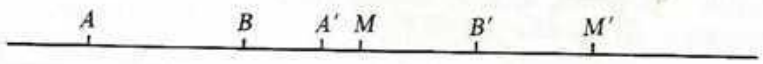
Plus généralement : Étant donné un vecteur $\vec{u}$, non nul, de représentant (A, B) et un réel λ, on sait qu'il existe un point unique M de la droite (AB) tel que $\overline{AM} = \lambda\,\overline{AB}$.
Ainsi, au bipoint (A, B) et au réel λ on peut associer le bipoint (A, M).
Ce bipoint (A, M) est un représentant d'un vecteur $\vec{v}$.
Nous allons démontrer que ce vecteur $\vec{v}$ ne dépend pas du représentant de $\vec{u}$ choisi.

c) **Problème.**

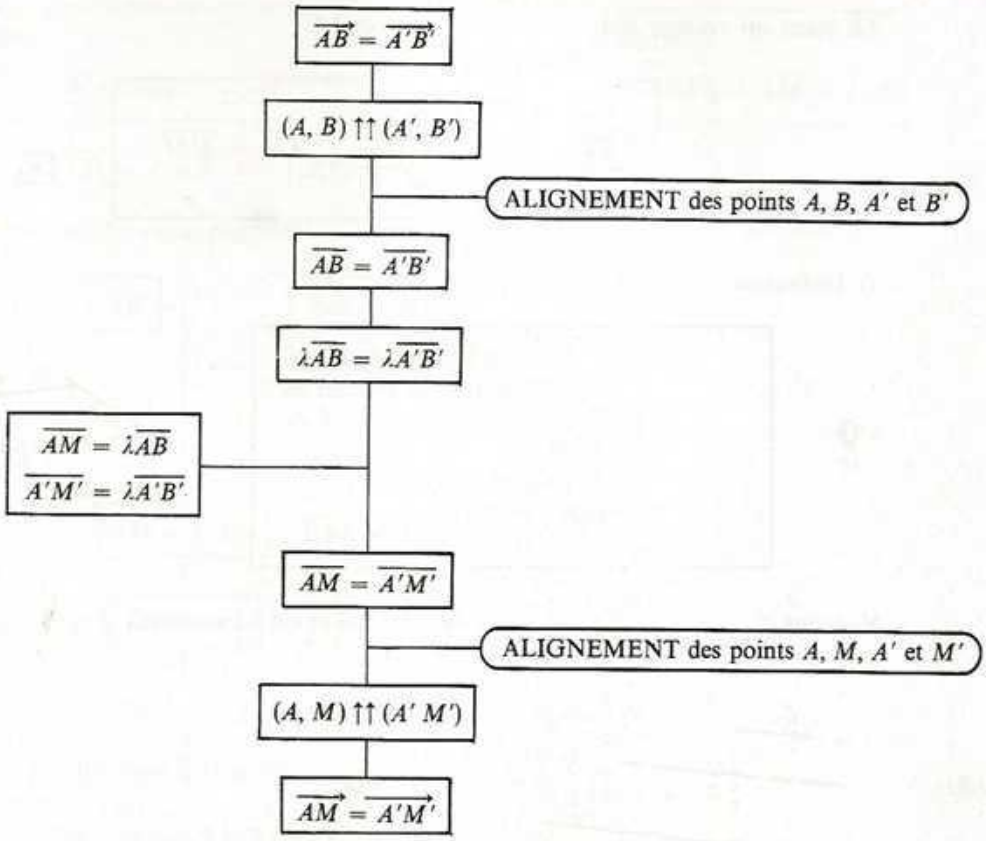
Soit (A, B) et (A', B') deux représentants d'un vecteur $\vec{u}$ non nul et un réel λ.
Soit M le point de la droite (AB) tel que $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$.
Soit M' le point de la droite $(A'B')$ tel que $\overline{A'M'} = \lambda\overline{A'B'}$.
Les bipoints (A, M) et (A', M') sont-ils des représentants d'un même vecteur ?

Si $\lambda = 0$, les bipoints (A, M) et (A', M') sont des représentants d'un même vecteur : le vecteur nul.
Nous supposerons dans ce qui suit $\lambda \neq 0$.

1er *cas* : *A, B, A', B' sont alignés*
Dans ce cas les points M et M' appartiennent à la droite (AB).



(A, B) et (A', B') représentant le vecteur $\vec{u}$, on peut écrire que $(A, B) \uparrow\uparrow (A', B')$.
Nous savons que si deux bipoints portés par une même droite sont équipollents, leurs mesures algébriques sont égales, donc $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ et par conséquent $\lambda\overline{AB} = \lambda\overline{A'B'}$.

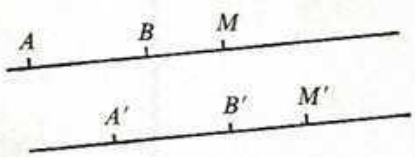


Donc (A, M) et (A', M') sont des représentants du même vecteur $\vec{v}$.

2e *cas* : $A' \notin (AB)$

Les bipoints (A, B) et (A', B') étant équipollents, $ABB'A'$ est un parallélogramme donc

$$(AA') /\!/ (BB').$$



Les points A et B étant distincts, l'égalité $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$ peut s'écrire $\lambda = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$.

Les points A' et B' sont également distincts,

$\overline{A'M'} = \lambda\overline{A'B'}$ peut s'écrire $\lambda = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$. Donc : $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$.

On a $\quad (AA') /\!/ (BB') \quad$ et $\quad \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$

donc d'après la réciproque de l'axiome de Thalès : $(MM') /\!/ (AA')$.

Démontrer que $AMM'A'$ est un parallélogramme, et en déduire que (A, M) et (A', M') sont des représentants du même vecteur, le vecteur $\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB}$ étant un vecteur non nul, on a prouvé que :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}\end{array}\right\} \text{ si } \quad \text{alors } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}.$$

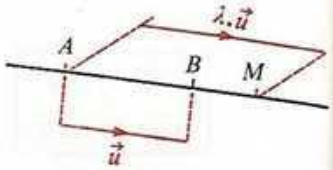
d) **Définition.**



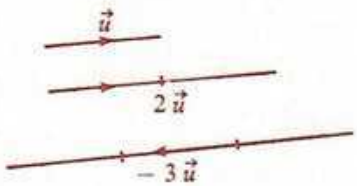
Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) et un réel λ, on appelle *produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel λ*, le vecteur $\vec{v}$ de représentant (A, M) tel que :

1) Si $\vec{u} = \vec{0}$, $M = A$;

2) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $M \in (AB)$ et $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.



Notation : On écrit dans les deux cas $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$ et on lit « vecteur $\vec{v}$ égale lambda vecteur $\vec{u}$ ».



Vocabulaire :

- Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$
les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de même sens.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$
les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits de sens contraires.

Exercices

1. Étant donné un représentant d'un vecteur $\vec{u}$, construire un représentant des vecteurs

$$3.\vec{u};\ (-2).\vec{u};\ (-1).\vec{u};\ (1{,}5).\vec{u};\ \left(-\frac{3}{2}\right).\vec{u};\ \left(\frac{-2}{3}\right).\vec{u}.$$

2. Quel est le représentant d'origine A du vecteur $0.\vec{u}$?

e) **Propriétés.**

1) Quel que soit le réel λ,

$$\lambda.\vec{0} = \vec{0}.$$

2) Quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

$$0.\vec{u} = \vec{0}.$$

3) $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}$ signifie que $\left\{\begin{array}{l}A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}.\end{array}\right.$

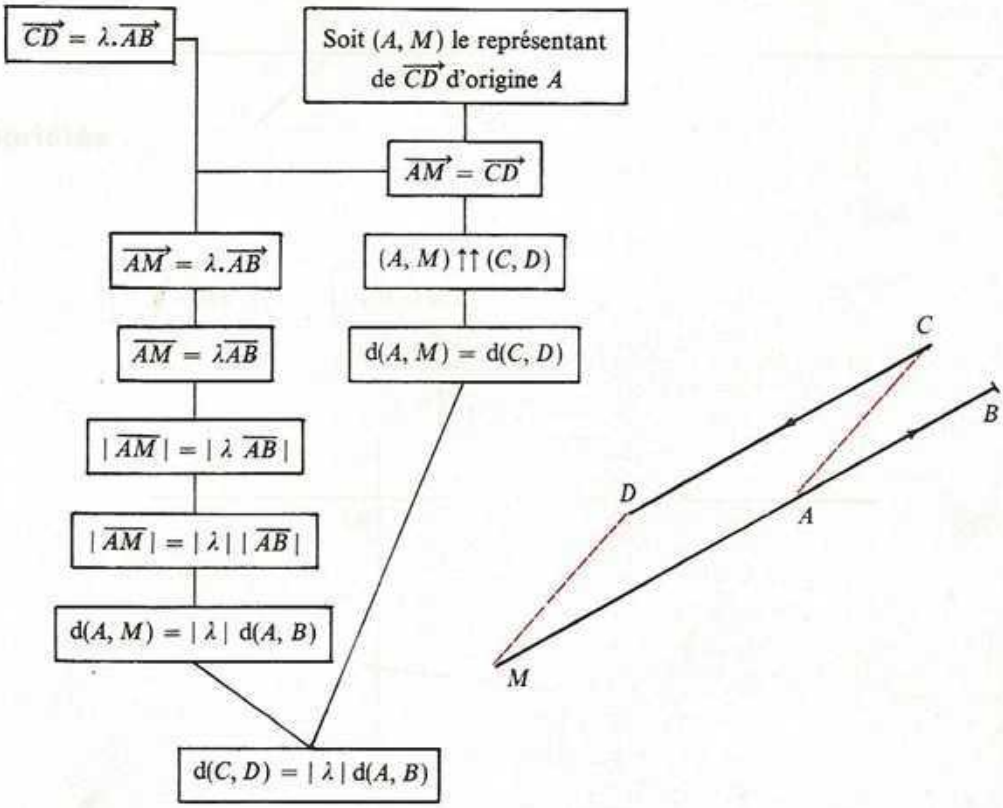
4)

A et B étant deux points distincts

$M \in (AB)$ équivaut à il existe un réel unique λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}$.

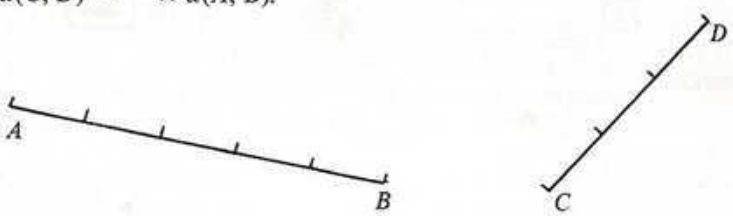
5) si $\overrightarrow{CD} = \lambda.\overrightarrow{AB}$ alors $d(C, D) = |\lambda| d(A, B)$.

Démontrons cette propriété



Attention : La réciproque est fausse.

Sur la figure suivante les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont pour mesures respectives 5 et 3. Compléter $d(C, D) = \cdots \times d(A, B)$.



(A, B) et (C, D) sont des représentants respectifs de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Peut-on écrire $\vec{v} = \frac{3}{5}\cdot\vec{u}$ ou $\vec{v} = -\frac{3}{5}\cdot\vec{u}$?

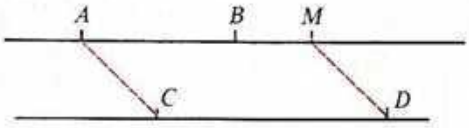
6)

A, *B*, *C* et *D* étant quatre points distincts

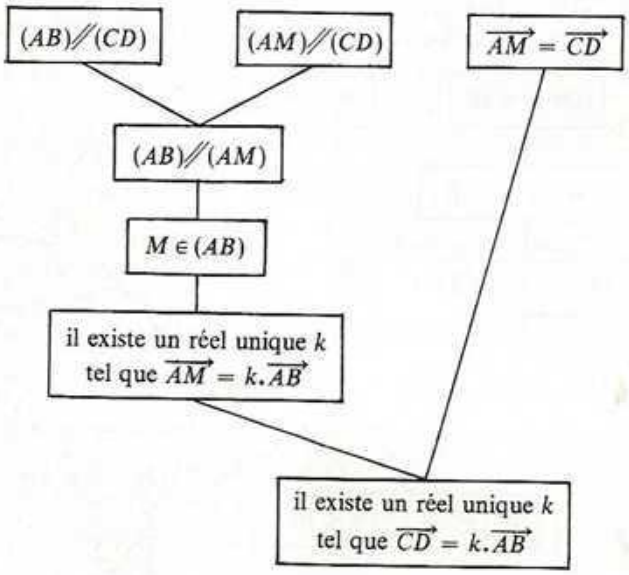
$(AB) /\!/ (CD)$ ⟨ équivaut à ⟩ il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$.

Montrons que :

a) ⟩ si ⟩ $(AB) /\!/ (CD)$ [alors ⟩ il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$.



Soit le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD}$, on a : $(AM) /\!/ (CD)$.



b) Démontrer que : *A*, *B*, *C*, *D* étant quatre points distincts,

⟩ si ⟩ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$ [alors ⟩ $(AB) /\!/ (CD)$.

Attention : Ne pas confondre les écritures du réel $\lambda\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\lambda.\overrightarrow{AB}$.

$\lambda\overrightarrow{AB}$ est le produit de 2 réels λ et $\overrightarrow{AB}$ $\lambda\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}$	$\lambda.\overrightarrow{AB}$ est le produit d'un vecteur par un réel λ $\lambda.\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$

2 Multiplication d'un vecteur par un réel

1) Définition

La multiplication d'un vecteur par un réel est l'application de $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$ qui à chaque couple $(\lambda, \vec{u})$ associe le vecteur $\vec{v}$ tel que :

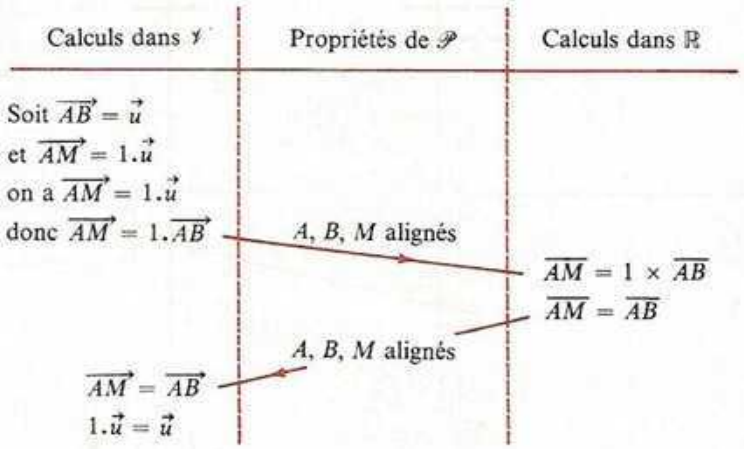
$$\vec{v} = \lambda.\vec{u}.$$

2) Propriétés

P_1	Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $1.\vec{u} = \vec{u}$.

Démonstration :

1er *cas* : $\vec{u} \neq \vec{0}$

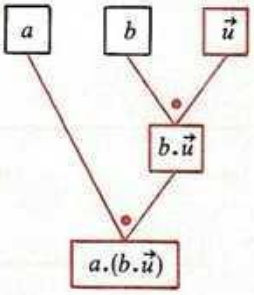


2e *cas* : $\vec{u} = \vec{0}$

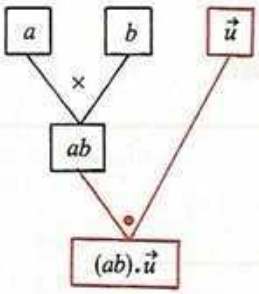
Démontrer que P_1 est vraie.

P_2	Pour deux réels quelconques a, b et quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $a.(b.\vec{u}) = (ab).\vec{u}$.

Programme de calcul de $a.(b.\vec{u})$

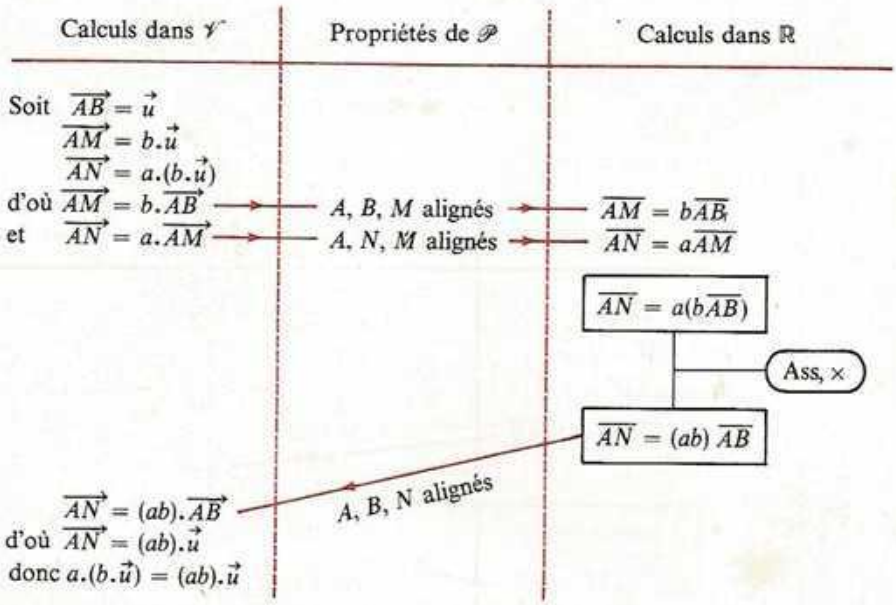


Programme de calcul de $(ab).\vec{u}$



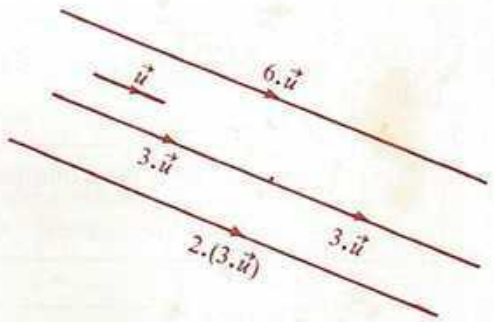
Démonstration :

1er *cas* : $\vec{u} \neq \vec{0}$



Exemple

$2.(3.\vec{u}) = 6.\vec{u}$.

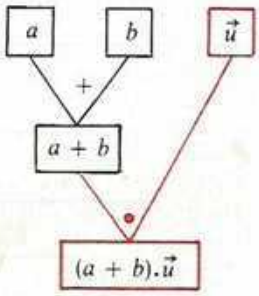


2e *cas* : $\vec{u} = \vec{0}$

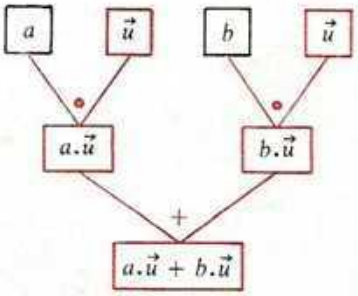
Démontrer que P_2 est vraie.

P_3	Pour deux réels quelconques a, b et quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $(a + b).\vec{u} = a.\vec{u} + b.\vec{u}$.

Programme de calcul de $(a + b).\vec{u}$

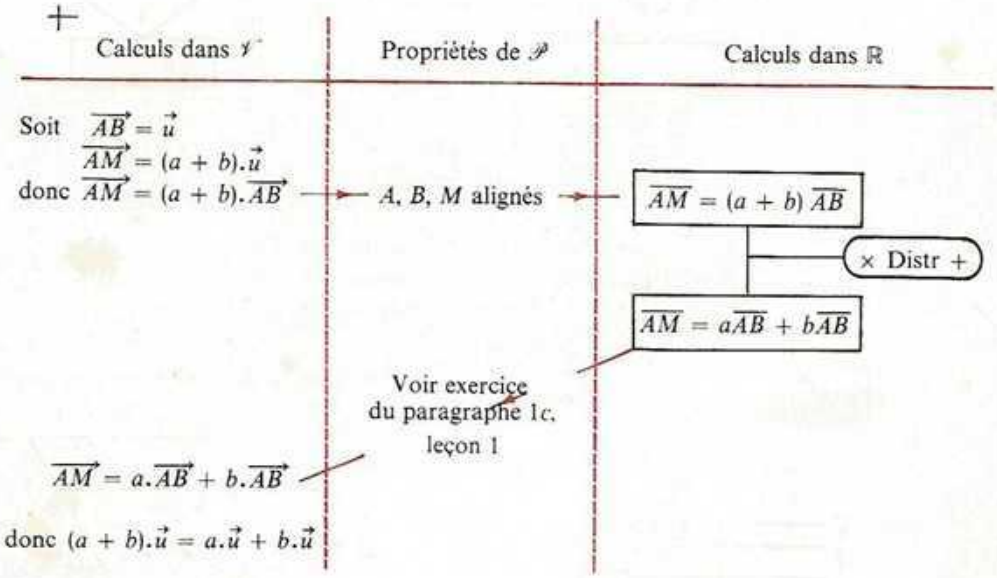


Programme de calcul de $a.\vec{u} + b.\vec{u}$



Démonstration :

1er *cas* : $\vec{u} \neq \vec{0}$

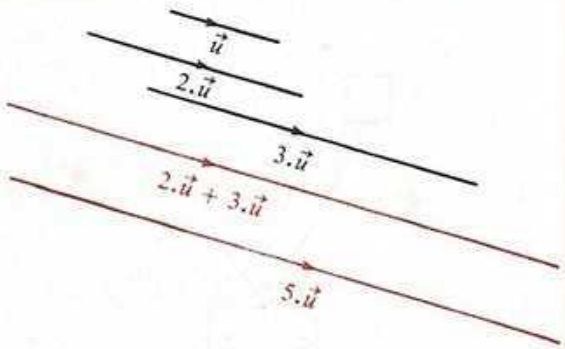


2e *cas* : $\vec{u} = \vec{0}$

Démontrer que la propriété P_3 est vraie.

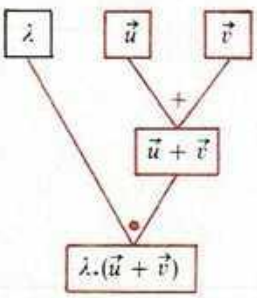
Exemple

$$2.\vec{u} + 3.\vec{u} = (2 + 3).\vec{u}$$
$$= 5.\vec{u}.$$

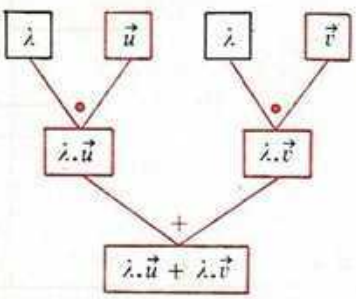


P_4	Pour deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et quel que soit le réel λ, on a : $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$.

Programme de calcul de $\lambda.(\vec{u} + \vec{v})$



Programme de calcul de $\lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$

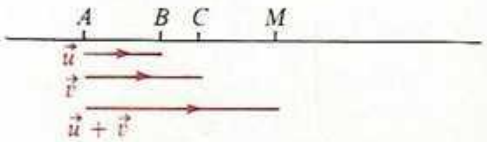


Démonstration :

1er *cas* : Supposons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ différents du vecteur $\vec{0}$ et le réel λ non nul.

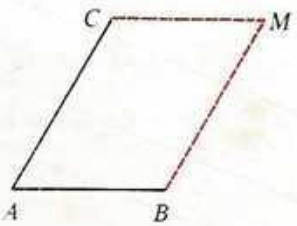
Soit
(A, B) un représentant de $\vec{u}$
(A, C) un représentant de $\vec{v}$
(A, M) un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$

ou bien A, B, C sont alignés



si A, B, C sont alignés, alors M est un point de (AB) *et* $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AM}$.

ou bien A, B, C ne sont pas alignés



si A, B, C ne sont pas alignés, alors $ABMC$ est un parallélogramme.

Sur la droite (AB), on marque le point B' tel que $\overline{AB'} = \lambda\overline{AB}$, alors par définition :

$$\overrightarrow{AB'} = \lambda.\overrightarrow{AB}.$$

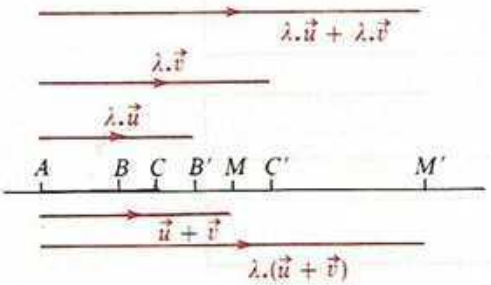
Sur la droite (AC) on marque le point C' tel que $\overline{AC'} = \lambda\overline{AC}$, alors par définition :

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda.\overrightarrow{AC}.$$

Sur la droite (AM) on marque le point M' tel que $\overline{AM'} = \lambda\overline{AM}$, alors par définition :

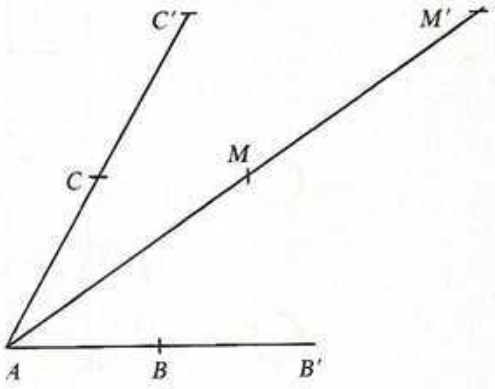
$$\overrightarrow{AM'} = \lambda.\overrightarrow{AM}.$$

Montrons que : $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$.



Dans le cas où A, B et C sont alignés

$$(AB) = (AM)$$
$$(AB) = (AC)$$
$$\overline{AM'} = \lambda\overline{AM}$$
$$\overline{AM'} = \lambda(\overline{AB} + \overline{AC})$$
$$\overline{AM'} = \lambda\overline{AB} + \lambda\overline{AC}$$
$$\overline{AM'} = \overline{AB'} + \overline{AC'}.$$



Dans le cas où A, B et C ne sont pas alignés, démontrer que $AB'M'C'$ est un parallélogramme : on utilisera la réciproque de l'axiome de Thalès.

donc : $\lambda.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \lambda.\overrightarrow{AB} + \lambda.\overrightarrow{AC}$.

2e *cas* : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques et $\lambda = 0$, démontrer que P_4 est vraie.

3e *cas* : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ et λ quelconque, démontrer que P_4 est vraie.

Conclusion : $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$.

Exemple

$$\frac{3}{2}\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{3}{2}\cdot\vec{u} + \frac{3}{2}\cdot\vec{v}.$$

3 Utilisation des vecteurs

1) Calculer dans $\mathscr{V}$

a) **Rappels.**

- $(\mathscr{V}, +)$ est un groupe commutatif.
- La multiplication d'un vecteur par un réel est une application de $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$.
- Quels que soient les réels r, s et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

P_1	$1.\vec{u} = \vec{u}$
P_2	$r.(s.\vec{v}) = (rs).\vec{v}$
P_3	$(r + s).\vec{u} = r.\vec{u} + s.\vec{u}$
P_4	$r.(\vec{u} + \vec{v}) = r.\vec{u} + r.\vec{v}$.

b) **Autres règles de calculs.**

Quels que soient les réels a, b, r, k et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, en utilisant les propriétés précédentes, on peut démontrer :

R_1	$r.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $r = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
R_2	$\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$
R_3	$r \neq 0$: $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $r.\vec{u} = r.\vec{v}$
R_4	$k \neq 0$: $\vec{u} = k.\vec{v}$ équivaut à $\vec{v} = \frac{1}{k} \cdot \vec{u}$
R_5	$\vec{u} \neq \vec{0}$: $a = b$ équivaut à $a.\vec{u} = b.\vec{u}$.

c) En utilisant ces propriétés de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un réel, on peut transformer des écritures dans $\mathscr{V}$.

1) *Simplifier* :

Exemple

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés et $\vec{w}$ le vecteur tel que :

$$\vec{w} = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\vec{u} + \frac{1}{4}\cdot\vec{v}\right) + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\vec{u} + \frac{5}{6}\cdot\vec{v}\right).$$

Donnons une écriture plus simple de $\vec{w}$

$$\vec{w} = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\vec{u} + \frac{1}{4}\cdot\vec{v}\right) + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\vec{u} + \frac{5}{6}\cdot\vec{v}\right)$$

P_4

$$\vec{w} = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\vec{u}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\vec{v}\right) + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\vec{u}\right) + 3\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\vec{v}\right)$$

P_2

$$\vec{w} = \left(2\times\frac{3}{5}\right)\cdot\vec{u} + \left(2\times\frac{1}{4}\right)\cdot\vec{v} + \left(3\times\frac{2}{3}\right)\cdot\vec{u} + \left(3\times\frac{5}{6}\right)\cdot\vec{v}$$

$$\vec{w} = \frac{6}{5}\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}\cdot\vec{v} + 2.\vec{u} + \frac{5}{2}\cdot\vec{v}$$

com. dans ($\mathscr{V}$, +)

$$\vec{w} = \frac{6}{5}\cdot\vec{u} + 2\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}\cdot\vec{v} + \frac{5}{2}\cdot\vec{v}$$

P_3

$$\vec{w} = \left(\frac{6}{5}+2\right)\cdot\vec{u} + \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\vec{v}$$

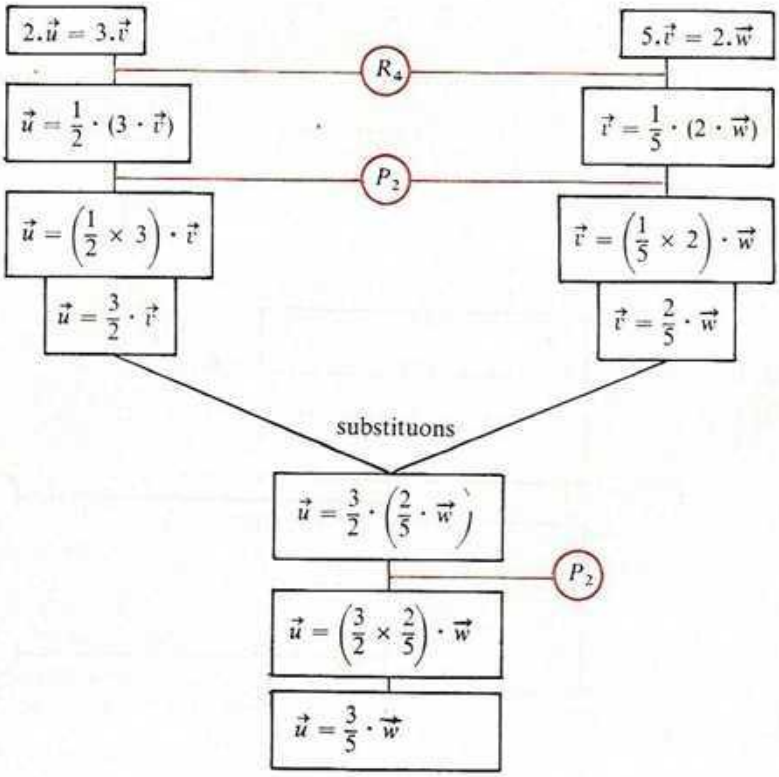
$$\vec{w} = \frac{16}{5}\cdot\vec{u} + 3.\vec{v}$$

2) *Substituer* :

Exemple

$$2.\vec{u} = 3.\vec{v} \text{ et } 5.\vec{v} = 2.\vec{w}.$$

Exprimons $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$.



Exercice

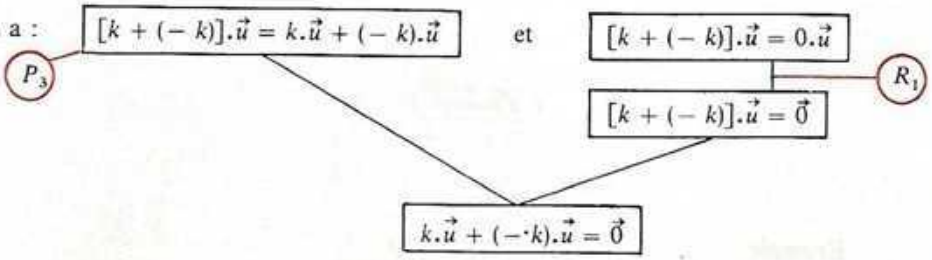
$\vec{u} = 3.\vec{v}$
$\vec{w} = 7.\vec{v}$
$5.\vec{z} = 4.\vec{u} + 3.\vec{w}$.

Exprimer $\vec{z}$ en fonction de $\vec{v}$.

3) *Démontrer* :

Écrire le produit du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k.
Écrire l'opposé du produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.
Démontrons que

$$(-k).\vec{u} = -(k.\vec{u}).$$



donc : $(-k).\vec{u}$ est l'opposé de $k.\vec{u}$, c'est-à-dire $-(k.\vec{u})$.

Conclusion :

Quels que soient le réel k et le vecteur $\vec{u}$

$$(-k).\vec{u} = -(k.\vec{u}).$$

Cas particulier :

$$(-1).\vec{u} = -\vec{u}.$$

Exercice Démontrer que $k.(-\vec{v}) = -(k.\vec{v})$ et en déduire $k.(\vec{u} - \vec{v}) = k.\vec{u} - k.\vec{v}$.

4) *Résoudre dans* $\mathscr{V}$:

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, résoudre dans $\mathscr{V}$ l'équation d'inconnue $\vec{x}$.

$3.\vec{x} + 2.\vec{v} = 5.\vec{u}$

R_2

$3.\vec{x} + 2.\vec{v} + (-2.\vec{v}) = 5.\vec{u} + (-2.\vec{v})$

Ass. dans $(\mathscr{V}, +)$

$3.\vec{x} + [2.\vec{v} + (-2.\vec{v})] = 5.\vec{u} + (-2.\vec{v})$

Opp. dans $(\mathscr{V}, +)$

$3.\vec{x} + \vec{0} = 5.\vec{u} + (-2.\vec{v})$

Neutre dans $(\mathscr{V}, +)$

$3.\vec{x} = 5.\vec{u} + (-2.\vec{v})$

R_3

$\frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \vec{x}) = \frac{1}{3} \cdot [(5 \cdot \vec{u} + (-2\vec{v})]$

P_2 et P_4

$\left(\frac{1}{3} \times 3\right) \cdot \vec{x} = \frac{1}{3} \cdot (5 \cdot \vec{u}) + \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \vec{v})$

P_2

$1 \cdot \vec{x} = \left(\frac{1}{3} \times 5\right) \cdot \vec{u} + \left[\frac{1}{3}(-2)\right] \cdot \vec{v}$

P_1

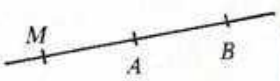
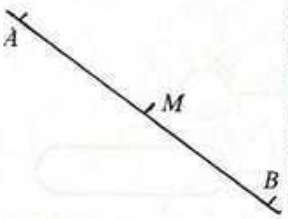
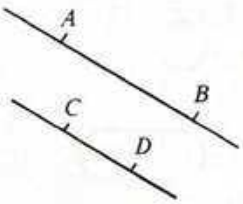
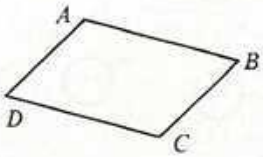
$\vec{x} = \frac{5}{3} \cdot \vec{u} - \frac{2}{3} \cdot \vec{v}$

$$S = \left\{\frac{5}{3} \cdot \vec{u} - \frac{2}{3} \cdot \vec{v}\right\}.$$

2) Langage géométrique, langage vectoriel : traduction

a) **Traduire.**

Voici quelques théorèmes, étudiés en Quatrième ou dans un des chapitres précédents, qui permettent de passer du plan mathématique à l'ensemble des vecteurs et inversement.

Figures	$\mathscr{P}$	$\mathscr{V}$
Exemple 1 	A et B étant deux points distincts $M \in (AB)$	équivaut à	Il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$
Exemple 2 	M milieu de $[AB]$	équivaut à	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
	M milieu de $[AB]$	équivaut à	$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
	M milieu de $[AB]$	équivaut à	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
Exemple 3 	A, B, C, D étant quatre points distincts $(AB) /\!/ (CD)$	équivaut à	Il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$
Exemple 4 	A, B, C, D étant quatre points distincts non alignés $ABCD$ est un parallélogramme	équivaut à	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Exercice $t_{\vec{u}}$ étant une translation et S_0 une symétrie centrale, traduire vectoriellement

$$t_{\vec{u}}(A) = A' \text{ et } S_0(A) = A'.$$

Exercice résolu :

Expression vectorielle de la propriété de Thalès appliquée aux triangles.

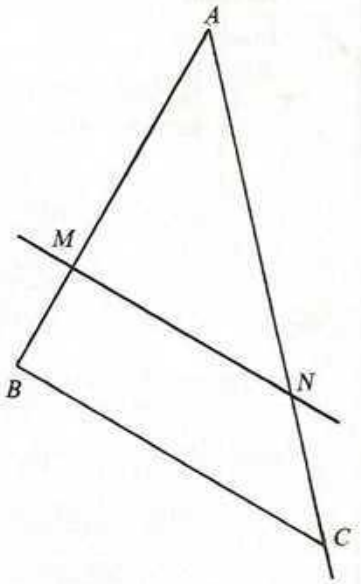
Théorème

Étant donné un triangle ABC et une droite (Δ) qui coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N,

$$\begin{cases} (MN) /\!\!/ (BC) \\ \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = k \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BC}. \end{cases}$$

Hypothèses

- ABC est un triangle
- $M \in (AB)$
- $N \in (AC)$
- $(MN) /\!\!/ (BC)$
- $k = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$.

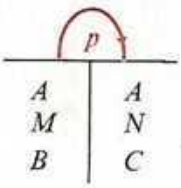


Démonstration :

1) De $k = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ on déduit $\overline{AM} = k\overline{AB}$.

Les points A, M et B étant alignés et tels que $\overline{AM} = k\overline{AB}$, par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel, on a :

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$



2) Soit p la projection sur (AC) parallèlement à (BC). Par application de la propriété de Thalès, on obtient

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}. \quad \text{Donc} \quad \overline{AN} = k\overline{AC}.$$

Les points A, N et C étant alignés et tels que $\overline{AN} = k\overline{AC}$, par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel, on a :

$$\overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

3) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{MN} &= k.\overrightarrow{AC} - k.\overrightarrow{AB} \qquad (1) \text{ et } (2) \\ \overrightarrow{MN} &= k.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ \overrightarrow{MN} &= k.\overrightarrow{BC}. \qquad (3) \end{aligned}$$

Conclusion : Si $(MN) /\!/ (BC)$ et $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = k$. Alors $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC}$ et

$$\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BC}.$$

Démontrer la réciproque.

b) **Résolution de problèmes.**

L'ensemble des vecteurs du plan, muni des deux lois de composition (addition des vecteurs et multiplication par un réel) est, nous allons le voir, un « outil » pratique pour résoudre certains problèmes de géométrie.

Exemple

Étant donné un triangle ABC, M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ nous avons démontré, au début du cours de Quatrième que :

— la droite (MN) est parallèle à (BC),
puis, en fin d'année que :
— $d(M, N) = \dfrac{1}{2} d(B, C)$.

Grâce aux vecteurs, nous allons retrouver ces deux théorèmes à l'aide d'une seule démonstration.

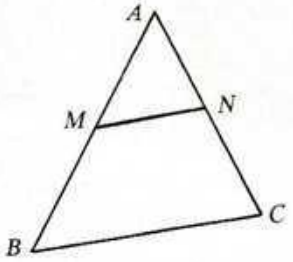
Hypothèse

M est le milieu de $[AB]$
N est le milieu de $[AC]$

traduction

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

Démonstration



Calcul
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$

Conclusion

$(MN) /\!/ (BC)$
et
$d(M, N) = \dfrac{1}{2} d(B, C)$

traduction

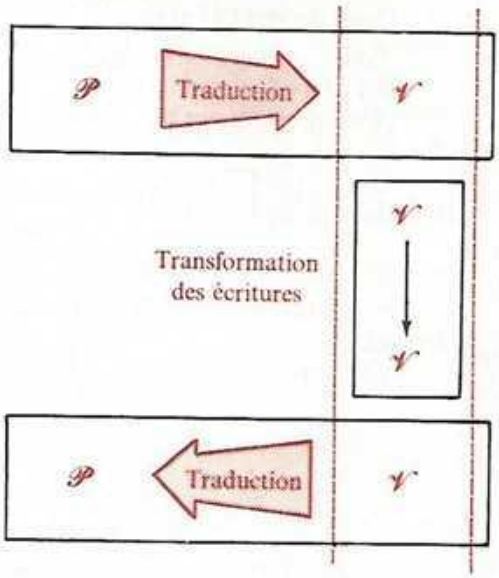
$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$

De l'exemple traité ci-dessus se dégage la méthode suivante :

1) On traduit une situation géométrique par une égalité vectorielle.

2) On transforme cette égalité à l'aide des règles de calcul dans $\mathcal{V}$.

3) On traduit enfin, en langage géométrique, l'égalité vectorielle transformée.



Exercices résolus :

Exemple 1

Soit deux points distincts O et O' et un point M quelconque du plan. Soit S_O et $S_{O'}$ les symétries de centre O et O'. On pose

$$S_O(M) = M' ; \quad S_{O'}(M') = M'' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{u}.$$

Démontrer que M'' est l'image de M par la translation de vecteur $2.\vec{u}$.

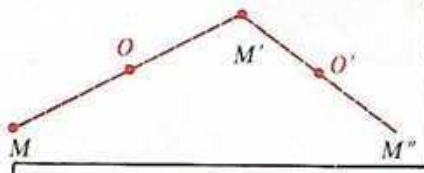
Hypothèse

$S_O(M) = M'$
$S_{O'}(M') = M''$

Traduction

$\overrightarrow{MM'} = 2.\overrightarrow{OM'}$
$\overrightarrow{M'M''} = 2.\overrightarrow{M'O'}$

Démonstration



Calcul

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2.\overrightarrow{OM'} + 2.\overrightarrow{M'O'}$$
$$\overrightarrow{MM''} = 2.(\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'O'})$$
$$\overrightarrow{MM''} = 2.\overrightarrow{OO'}$$
$$\overrightarrow{MM''} = 2.\vec{u}$$

Conclusion

$t_{2.\vec{u}}(M) = M''$

Traduction

Exemple 2

Deux droites (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point P. Sur (Δ) on marque deux points A et C tels que $\overline{PC} = -3\,\overline{PA}$.
Sur (Δ') on marque deux points B et D tels que $\overline{PD} = -3\,\overline{PB}$.
Démontrer vectoriellement que $d(C, D) = 3\,d(A, B)$.

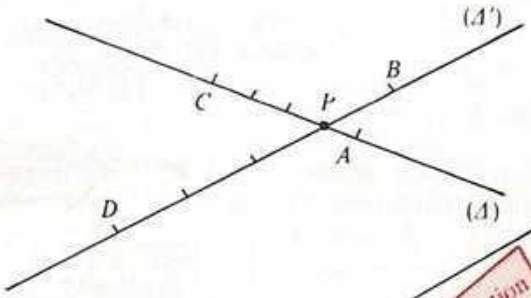
Hypothèse

$P \in (AC)$ et $\overline{PC} = -3\,\overline{PA}$
$P \in (BD)$ et $\overline{PD} = -3\,\overline{PB}$

Traduction

$\overrightarrow{PC} = -3.\overrightarrow{PA}$
$\overrightarrow{PD} = -3.\overrightarrow{PB}$

Démonstration



Calcul

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$
$\overrightarrow{CD} = -3.\overrightarrow{PB} + 3.\overrightarrow{PA}$
$\overrightarrow{CD} = -3.(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA})$
$\overrightarrow{CD} = -3.\overrightarrow{AB}$

Traduction

Conclusion

$d(C, D) = 3\,d(A, B)$

Exercice

Reprendre l'exemple précédent :

a) Déduire du résultat obtenu que $(CD) /\!/ (AB)$.

b) Soit I le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[AB]$ et K le point d'intersection de (AD) et (BC).
Démontrer que I, J, P et K sont alignés.

Exemple 3

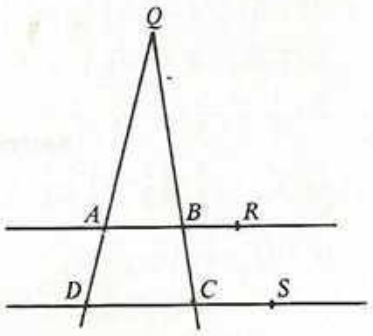
Revenons au problème posé en introduction au chapitre.
On donne un triangle ABQ, le point D de (AQ) et le point C de (BQ) tels que $(DC) /\!/ (AB)$.
Sur (AB) on a marqué le point R tel que $\overline{AR} = \frac{12}{7}\,\overline{AB}$ et sur (DC) le point S tel que $\overline{DS} = \frac{12}{7}\,\overline{DC}$.

Désignons par α le rapport $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}$.

Hypothèse

1. Dans le triangle ABQ, $D \in (AQ)$, $C \in (BQ)$ et $(DC) /\!/ (AB)$		$\overrightarrow{QD} = \alpha.\overrightarrow{QA}$ (1) $\overrightarrow{QC} = \alpha.\overrightarrow{QB}$ (2) $\overrightarrow{DC} = \alpha.\overrightarrow{AB}$ (3)	Expression vectorielle de la propriété de Thalès
2. R est le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{12}{7}\overrightarrow{AB}$	Traduction	$\overrightarrow{AR} = \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{AB}$ (4)	Définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
3. S est le point de (DC) tel que $\overrightarrow{DS} = \frac{12}{7}\overrightarrow{DC}$		$\overrightarrow{DS} = \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{DC}$ (5)	

Démonstration



$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DS}$	
$\overrightarrow{QS} = \alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{DC}$	(1) et (5)
$\overrightarrow{QS} = \alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \frac{12}{7} \cdot (\alpha \cdot \overrightarrow{AB})$	(3)
$\overrightarrow{QS} = \alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \alpha \cdot \left(\frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$	(justifier)
$\overrightarrow{QS} = \alpha \cdot \left(\overrightarrow{QA} + \frac{12}{7} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$	(justifier)
$\overrightarrow{QS} = \alpha.(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AR})$	(4)
$\overrightarrow{QS} = \alpha.\overrightarrow{QR}$	

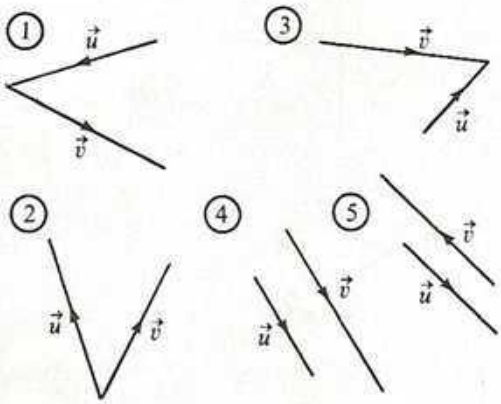
Conclusion

Les points Q, R et S sont alignés.	Traduction	$\overrightarrow{QS} = \alpha.\overrightarrow{QR}$

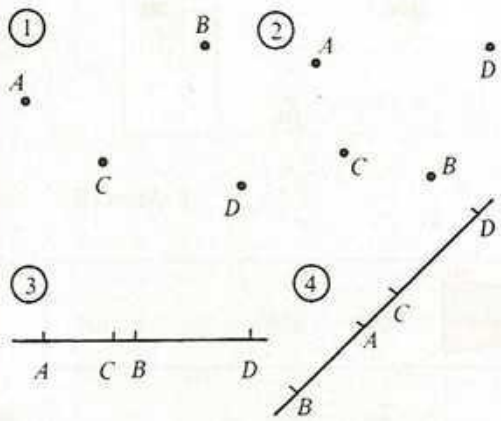
Exercices

Construire. Calculer

1. Construire un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ dans chacun des cas de figures suivants :



2. Construire un représentant de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ dans chacun des cas de figures suivants.



3. Étant donné un représentant (A, B) du vecteur $\vec{u}$, construire un représentant de :

$2.\vec{u}$; $3.\vec{u}$; $-1{,}5.\vec{u}$; $-5.\vec{u}$; $3.(-2.\vec{u})$;

$\frac{1}{3} \cdot \vec{u}$; $5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{u}\right)$; $-1{,}5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{u}$;

$2 \cdot \vec{u} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{u}\right)$.

4. Étant donné trois points distincts A, B, C du plan, construire les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 3.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AN} = -2.\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP} = 3.\overrightarrow{AB} - 2.\overrightarrow{AC}.$$

5. (A, B) et (A, C) étant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, construire un représentant de :

$2.(-3.\vec{u})$; $2.(3.\vec{v})$;

$2.\vec{u} + 2.\vec{v}$; $-3.\vec{u} + 3.\vec{v}$.

6. Simplifier les écritures suivantes :

a) $3.(2.\vec{u})$; $(-5) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{u}\right)$;

$-1.(2.\vec{u})$; $2.(-\vec{u})$.

b) $2 \cdot \vec{u} + \frac{1}{3} \cdot \vec{u}$; $\frac{5}{4} \cdot \vec{u} - \frac{2}{3} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} - \frac{1}{5} \cdot \vec{u}$;

$\frac{1}{5} \cdot \vec{u} - \vec{u}$; $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \vec{u}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{u}\right)$.

c) $\frac{3}{5} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{5} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$;

$-2.(\vec{i} + \vec{j}) + 3.(-2.\vec{j})$.

7. On donne :

$$\vec{u} = 2.\vec{i} + 3.\vec{j}$$
$$\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j}$$
$$\vec{w} = -3.\vec{i} - 2.\vec{j}.$$

Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$
$$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$
$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$$
$$2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \cdot \vec{w}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v} + \vec{w}.$$

8. On donne $\vec{u} = 3.\vec{v}$ et $2.\vec{v} = 5.\vec{w}$. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{w}$.

9. On donne

$$5 \cdot \vec{u} = \frac{2}{3} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \frac{3}{4} \cdot \vec{w}.$$

Exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$.
Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{w}$.

10. On donne $2 \cdot \vec{i} = \frac{3}{5} \cdot \vec{j}$; $5 \cdot \vec{j} = 4 \cdot \vec{u}$ et $\frac{1}{3} \cdot \vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$.

Exprimer $\vec{i}$ en fonction de $\vec{v}$.
Exprimer $\vec{j}$ en fonction de $\vec{v}$.
Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$.

11. Résoudre dans $\mathscr{V}$ les équations d'inconnue $\vec{x}$:

a) $2 \cdot (\vec{u} - 3 \cdot \vec{x}) + \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v})$.

b) $5 \cdot \left(\vec{u} - \frac{1}{5} \cdot \vec{x}\right) = \frac{3}{5} \cdot (5 \cdot \vec{x} - \vec{u})$.

c) $2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \vec{x} - \vec{u}\right) = \vec{0}$.

Démontrer

12. On donne cinq points distincts A, B, C, D et E du plan. Construire P tel que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

et Q tel que $\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}$. Démontrer que $P = Q$.

13. Marquer dans le plan $\mathscr{P}$ trois points distincts A, B et C. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Que représente le point D pour le segment $[BC]$?

Construire E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Que représente E pour le triangle ABC ?

14. On donne un triangle ABC et k un réel non nul. On appelle M le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et N le point de (AC) tel que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

1) Que peut-on dire de la droite (MN) ?
2) Montrer que $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BC}$.
En déduire la valeur du rapport $\frac{d(M, N)}{d(B, C)}$.
3) Dans le cas particulier où $k = -1$, calculer $\frac{d(B, N)}{d(M, C)}$.

15. Soit 4 points A, B, C, D du plan $\mathscr{P}$. On appelle M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$.

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ et

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

16. Soit un triangle ABC. Construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 3.\overrightarrow{AB} + (-2).\overrightarrow{AC}.$$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les points B, M, C sont alignés.

17. Soit un triangle OAB et les points A' et B' tels que $\overrightarrow{OA'} = -2.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = -2.\overrightarrow{OB}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis exprimer $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB'}$. En déduire une relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

18. On considère le parallélogramme $ABCD$. Montrer que :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2.\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2.\overrightarrow{AB}.$$

19. F, I, L sont trois points du plan tels que : $\overrightarrow{FI} = -\frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{IL}$.

Que peut-on dire de ces points ?
Trouver les réels h, k et m tels que :

$$\overrightarrow{IL} = h.\overrightarrow{IF}; \quad \overrightarrow{FL} = k.\overrightarrow{LI}; \quad \overrightarrow{IF} = m.\overrightarrow{LF}.$$

20. A et B sont deux points distincts du plan $\mathscr{P}$. Marquer M tel que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BA}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$.

21. A et B sont deux points distincts du plan $\mathscr{P}$. Marquer M tel que
$2.\overrightarrow{AM} = 3.\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$.

22. A et B sont deux points distincts du plan $\mathscr{P}$. Marquer M tel que
$-5.\overrightarrow{AB} = 3.\overrightarrow{AM}$. Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$.

23. Soit quatre points A, B, C et D du plan $\mathscr{P}$ et k un réel différent de 1. On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{NC} = k.\overrightarrow{ND}.$$

a) Démontrer que

$$\overrightarrow{AC} - k.\overrightarrow{BD} = (1 - k).\overrightarrow{MN}.$$

b) Écrire cette égalité dans le cas où M est le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$.

24. On donne trois points distincts A, B, C. Construire les points B' et C' tels que

$$\overrightarrow{BB'} = 2.\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CC'} = 2.\overrightarrow{AC}$$

Démontrer que $\overrightarrow{B'C'} = 3.\overrightarrow{BC}$.

25. Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O.

— Démontrer que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

— Soit P un point quelconque du plan. Démontrer que

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4.\overrightarrow{PO}.$$

26. On donne trois points distincts A, B, C. Soit B' le symétrique de B par rapport à A. Démontrer que

$$2.\overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{BC} + 4.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB'}.$$

27. On donne trois points O, A, B non alignés. Construire le point D tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$. Construire le point E tel que $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$. Trouver un représentant de $\vec{v}$ sachant que

$$\vec{v} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OD}.$$

28. Soit un triangle ABC et un point O du plan. $A'B'C'$ est l'image de ABC par la symétrie de centre O. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AA'}.$$

29. Soit A et B deux points distincts du plan :

1) Construire les points M et N, tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

2) Que peut-on dire de M et N ?

30. Soit un triangle ABC, k un réel non nul et les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC}$.

a) $k = 3$; montrer que $\overrightarrow{MN} = 3.\overrightarrow{BC}$.

b) $k = \frac{1}{3}$; montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) $k = -2$; exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

d) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ dans le cas où M et N sont les milieux respectifs des bipoints (A, B) et (A, C).

31. On considère trois points A, B et C du plan. Démontrer que, quels que soient les points M et N, on a l'égalité :

$$2.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3.\overrightarrow{MC} = 2.\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3.\overrightarrow{NC}.$$

Illustrer ce résultat par une figure.

32. On considère trois points A, B et C du plan.
Démontrer que si :

$$\overrightarrow{MA} + 2.\overrightarrow{MB} - 5.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA} + 2.\overrightarrow{NB} - 5.\overrightarrow{NC}$$

alors $M = N$.

Réfléchir

33. *Des problèmes d'équilibre*

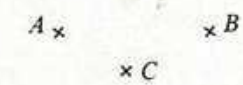
Problème 1



Étant donné 2 points A, B existe-t-il un point P tel que :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} ?$$

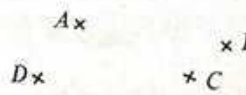
Problème 2



Étant donné 3 points A, B, C existe-t-il un point P tel que :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} ?$$

Problème 3



Étant donné 4 points A, B, C, D, existe-t-il un point P tel que :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} ?$$

On énoncerait facilement les problèmes 4, 5, 6...

Problème 1

Ce problème a déjà été résolu : nous avons vu qu'un point P tel que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$, existe et est unique ; c'est le milieu du segment $[AB]$.
Autre caractérisation du milieu d'un segment.
Soit M le milieu de $[AB]$ et C un point quelconque du plan $\mathcal{P}$.

On a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Exprimons les vecteurs du premier membre en utilisant des bipoints d'origine C.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM})$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CM}$$

or $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$.

On démontrerait de même que trois points A, B et C étant donnés, si un point M est tel que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$, alors M est le milieu de $[AB]$.
On a donc une autre caractérisation du milieu d'un segment :

M milieu de $[AB]$ ⟨ équivaut à ⟩ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2.\overrightarrow{CM}$.

Problème 2

Supposons qu'un point P tel que

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

existe et désignons par M le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$$
$$2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}$$
$$2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

Les points M, C, P sont alignés et le point P se trouve au tiers du segment $[MC]$ à partir du milieu M de $[AB]$.

1er cas : les points A, B, C sont alignés ; faire une figure et construire le point P.

2e cas : A, B, C ne sont pas alignés. (MC) est alors une médiane du triangle ABC.

On redémontre ainsi vectoriellement que les médianes d'un triangle sont concourantes (voir exercice n° 13, p. 190).
Réciproquement, démontrer que le point de concours G des médianes est tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Soit A, B, C, G quatre points tels que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, et D un point quelconque du plan. Exprimons les vecteurs du premier membre en utilisant des bipoints d'origine D.

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DG} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}.$$

On démontrerait que si cinq points A, B, C, D, G vérifient l'égalité précédente, alors G est tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Remarque : On a donc, lorsque les trois points A, B, C ne sont pas alignés, une autre caractérisation du centre de gravité d'un triangle

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ⟨ équivaut à ⟩ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

Problème 3

Supposons qu'un point P tel que

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$$

existe. On peut procéder de deux façons :

a) Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En appliquant la dernière caractérisation du centre de gravité, on a :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3.\overrightarrow{PG}.$$

Donc $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$,
$3.\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

or $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GD}$

donc $3.\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

c.-à-d. $4.\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{GD}$.

Les points P, G, D sont alignés et cette dernière égalité permet de placer le point P sur la droite (GD).

b) Soit M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. On montrera que le milieu K de $[MN]$ est tel que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$, c'est donc le point cherché.

Pourquoi ces problèmes sont-ils appelés « problèmes d'équilibre » ?

1) Découper un triangle dans une feuille de carton.
Le placer sur la pointe d'un compas au point défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

2) Découper un quadrilatère dans une feuille de carton.
Le placer sur la pointe d'un compas au point défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}.$$

Vérifier que le triangle et le quadrilatère se maintiennent en équilibre.

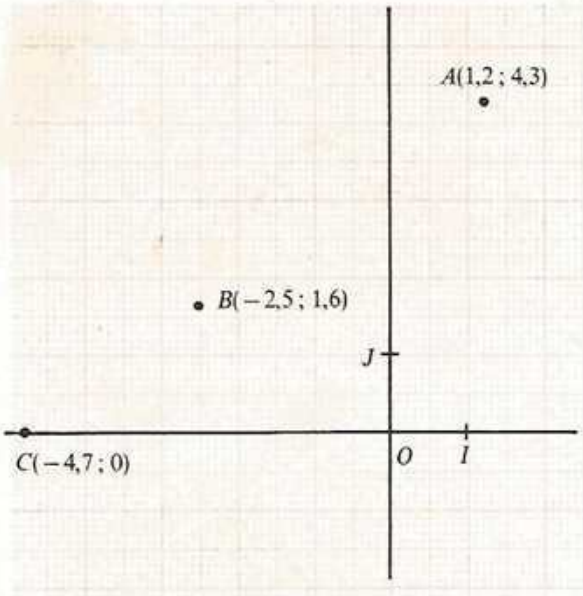
Problème 4

Étant donné 5 points A, B, C, D, E, déterminer le point P tel que :

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} = \vec{0}.$$

4 Vecteurs et droites

Leçon 1 : VECTEURS DIRECTEURS D'UNE DROITE. VECTEUR UNITAIRE
Leçon 2 : COORDONNÉES
Leçon 3 : ÉQUATIONS D'UNE DROITE
Leçon 4 : RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE DROITE



Les points A, B, C sont-ils alignés ?

1 Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteur unitaire

1) Vecteurs directeurs d'une droite

a) **Rappel**

Soit (D) une droite du plan mathématique, A et B deux points de (D) ; on dit que la droite (D) est le support du bipoint (A, B) ou que le bipoint (A, B) est supporté par la droite (D).

b) **Définition**

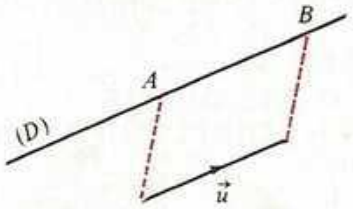
On appelle vecteur directeur **d'une droite (D) tout** vecteur non nul $\vec{u}$, **dont un représentant est un bipoint supporté par la droite (D).**

Convention

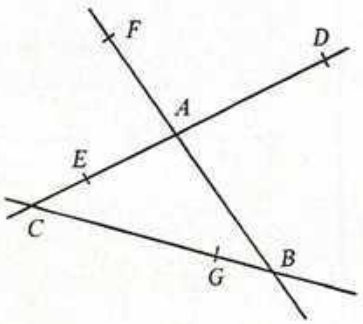
Désormais, pour simplifier l'écriture, on écrira $\lambda\vec{u}$ au lieu de $\lambda.\vec{u}$.

Exercices

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $2{,}5\,\overrightarrow{AB}$, $-3\,\overrightarrow{AB}$, $-3\,\overrightarrow{AB}+2{,}5\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ sont-ils des vecteurs directeurs de la droite (D) ?



2. On donne la figure suivante :



Trouver quatre vecteurs directeurs de chacune des droites représentées.

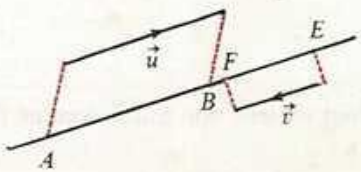
3. On donne une droite (D) et trois points A, B, C tels que $A \in (D)$; $B \notin (D)$ et $C \notin (D)$.
Construire des points M, N, P tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{PC}$ soient des vecteurs directeurs de (D).

4. La somme de deux vecteurs directeurs d'une droite est-elle un vecteur directeur de cette droite ?

5. Démontrer que le produit d'un vecteur directeur d'une droite (D) par un réel non nul est un vecteur directeur de cette droite.

c) Ensemble des vecteurs directeurs d'une droite

Nous venons de voir que si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et si λ est un réel non nul, $\lambda\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).
Inversement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs directeurs de (D), existe-t-il un réel non nul λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$?



Soit (A, B) un représentant de $\vec{u}$ supporté par la droite (D) et (E, F) un représentant de $\vec{v}$ supporté par la droite (D).

Les points A, B, E et F sont alignés donc il existe un réel unique λ tel que $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{AB}$. (Propriété 4, chapitre 3, leçon 1.)
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non nuls donc λ est élément de $\mathbb{R}^*$. Pourquoi ?

$\vec{u}$ étant un vecteur directeur d'une droite, l'ensemble des vecteurs directeurs de cette droite est l'ensemble des vecteurs $\lambda\vec{u}$ où λ décrit $\mathbb{R}^*$.

Définition

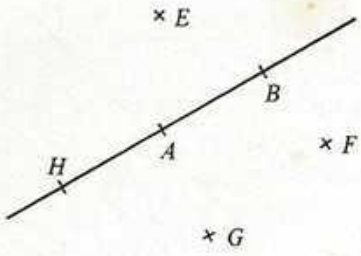
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ⟨ signifie que ⟩ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'une même droite.**

Conséquence

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ⟨ équivaut à ⟩ il existe un réel non nul unique k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

d) **Ensemble des droites ayant un même vecteur directeur.**

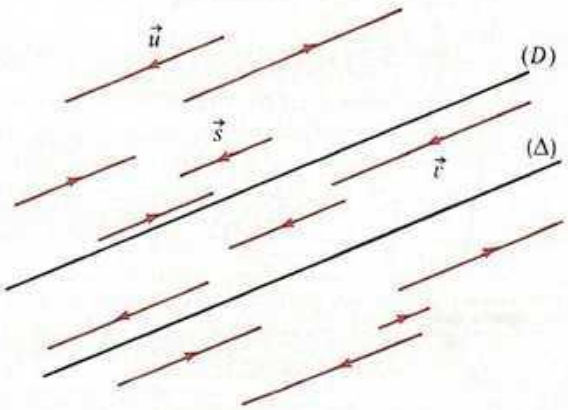
Soit une droite (AB) et quatre points E, F, G, H du plan.



On donne $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Par E construire une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Cette droite est-elle unique ? Pourquoi ?
Par F, G, H construire les droites de vecteur directeur $\vec{u}$.
Que peut-on dire de ces droites ?
Existe-t-il d'autres droites de vecteur directeur $\vec{u}$?
Quel est l'ensemble des droites de vecteur directeur $\vec{u}$?

Propriétés : 1) Il existe une droite et une seule passant par un point donné et de vecteur directeur donné.
2) Deux droites qui ont un même vecteur directeur sont parallèles.
3) L'ensemble des droites ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est une direction de droite : l'ensemble des droites parallèles à (AB).

c) **Conséquence :**



Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire que chaque vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

$\vec{u}$ étant un vecteur directeur de (D)
$\vec{v}$ étant un vecteur directeur de (Δ)

$(D) /\!/ (\Delta)$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

Exercices

1) On donne la figure 1 ci-contre :

$(\Delta_1) /\!/ (\Delta_2)$
$(\Delta_2) /\!/ (\Delta_3)$
$(D_1) /\!/ (D_2)$

Trouver trois vecteurs directeurs de chacune des droites.

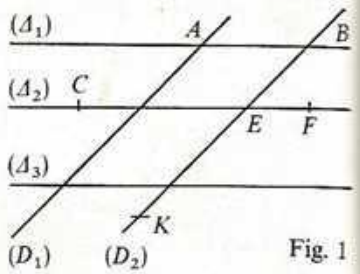


Fig. 1

2) Sur la figure 2 ci-contre :

1. Construire la droite passant par C et parallèle à (AB).
2. Construire la droite passant par D et de vecteur directeur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
3. Construire la droite passant par E et de vecteur directeur $\frac{5}{13}\overrightarrow{AB}$.

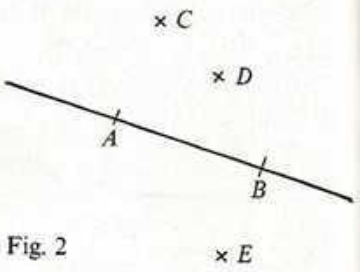


Fig. 2

2) Vecteur unitaire d'une graduation

a) Soit le vecteur non nul $\vec{u}$ de représentant (A, B).

D'après ce qui précède, la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est la droite (AB).

Rappel : A et B étant deux points distincts,

$$M \in (AB) \quad \text{équivaut à} \quad \text{il existe un réel unique } k \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}.$$

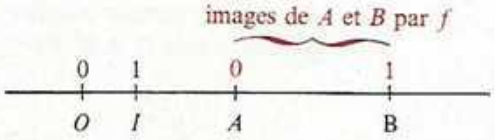
Cela signifie que :

① L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ et k élément de $\mathbb{R}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

② A chaque point M de (AB) on peut faire correspondre le réel unique k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
A chaque réel k on peut faire correspondre le point M unique de (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Cela montre qu'il existe une application bijective

$$f : (AB) \to \mathbb{R}$$
$$M \mapsto k \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}.$$





Soit (O, I) le repère de la droite (AB). Calculons les images de A et de B par la bijection f. $f(A)$ est le réel k tel que $\overrightarrow{AA} = k\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\vec{0} = k\overrightarrow{AB}$, donc $k = 0$.
$f(A) = 0$.
$f(B)$ est le réel k' tel que $\overrightarrow{AB} = k'\overrightarrow{AB}$, donc $k' = 1$.
$f(B) = 1$.

Exercice

Soit P le milieu de $[AB]$, B' le symétrique de B par rapport à A et A' le symétrique de A par rapport à B.
Calculer $f(P)$; $f(B')$; $f(A')$.

Construire les antécédents par f des réels 3 ; -2 ; $-0{,}5$; $\frac{1}{3}$.

Grâce à l'exercice ci-dessus, nous découvrons que la graduation de repère (O, I) n'est pas la seule bijection de la droite (AB) sur $\mathbb{R}$. Nous dirons que la bijection f est aussi une graduation de la droite (AB).

En conséquence :

— le réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire l'image de M par f) est l'abscisse de M pour cette graduation ;
— A est l'origine de cette graduation ;
— (A, B) est le repère de cette graduation ;
— la mesure algébrique d'un bipoint (P, Q) pour cette graduation est $f(Q) - f(P)$;
— la mesure algébrique de (A, B) pour cette graduation est 1 ;
— la mesure algébrique de (A, M) pour cette graduation est k.

Toute droite peut donc être graduée :

— soit à partir d'un point A donné de cette droite et d'un de ses vecteurs directeurs donné $\vec{u}$: la graduation est dite « **d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$** ».

— soit à partir d'un couple (A, B) de deux points distincts de cette droite ; la graduation est dite « **de repère (A, B)** ». En ce cas, le vecteur unitaire $\vec{u}$ de la graduation est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dans les deux cas, l'abscisse d'un point M de cette droite est le réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

b) **Changement d'origine et changement de vecteur unitaire.**

Exercice 1 : changement d'origine.

Soit une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de (D).

— Graduer (D) en prenant pour origine A et pour vecteur unitaire le vecteur $\vec{u}$. On appelle f la graduation obtenue.

Marquer les points B, C, M et P d'abscisses respectives 1 ; -3 ; 4 et 5.

Montrer que (A, B) et (M, P) sont des représentants de $\vec{u}$.

Calculer les mesures algébriques des bipoints (B, C) et (A, M) pour la graduation f. On les notera $\overline{BC}_f$ et $\overline{AM}_f$.

— Graduer la droite (D) en prenant pour origine M et pour vecteur unitaire $\vec{u}$. Pour la nouvelle graduation g obtenue, calculer les abscisses des points P, A, B et C et vérifier sur la figure.

Les abscisses des points sont modifiées.

Les mesures algébriques des bipoints le sont-elles ?

Étant donné une droite (D) et un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$ choisi comme vecteur unitaire, on peut démontrer que : (voir ex. n° 60, p. 279)

— **l'abscisse** de tout point de cette droite **dépend** de l'origine choisie ;

— la **mesure algébrique** d'un bipoint porté par cette droite **ne dépend pas** de l'origine choisie.

Exercice 2

Soit une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de cette droite.

— Graduer cette droite en prenant pour origine A et pour vecteur unitaire $\vec{u}$. On appelle f la graduation obtenue.

Marquer les points B, C, M d'abscisses respectives 1 ; $-2{,}5$; 4,2.

Calculer $\overline{BC}_f$; $\overline{AM}_f$; $\dfrac{\overline{AM}_f}{\overline{BC}_f}$.

— Graduer la droite (D) en prenant pour origine A et pour vecteur unitaire $-2\vec{u}$. On appelle g la graduation obtenue.

Pour la nouvelle graduation g obtenue : calculer les abscisses des points B, C et M et vérifier sur la figure.

Calculer $\overline{BC}_g$; $\overline{AM}_g$; $\dfrac{\overline{AM}_g}{\overline{BC}_g}$.

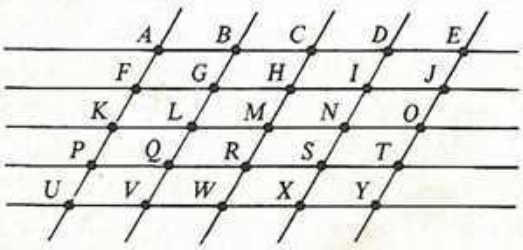
Les mesures algébriques des bipoints sont-elles modifiées ? Si oui, comment ?
Le rapport des mesures algébriques est-il modifié ?
On peut démontrer que : (voir ex. n° 60)

— **le rapport des mesures algébriques** de deux bipoints portés par une même droite **ne dépend pas** du vecteur unitaire choisi.

2 Coordonnées

1) Base de $\mathscr{V}$. Coordonnées d'un vecteur

a) **Exercice préparatoire :**



On donne le quadrillage ci-contre.

Trouver, s'il existe, le réel x dans chacun des cas suivants :

$$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{FI} = x\overrightarrow{SP}$$
$$\overrightarrow{GI} = x\overrightarrow{PR} \qquad \overrightarrow{PR} = x\overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{YV}.$$

Dans chacun des cas suivants, trouver un couple de réels (x, y) pour que les égalités ci-dessous soient vérifiées.

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{PG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{KD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{PN} = x\overrightarrow{UF} + y\overrightarrow{UW}$$
$$\overrightarrow{UQ} = x\overrightarrow{UY} + y\overrightarrow{UK}.$$

b) **Application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathscr{V}$.**

Étant donné deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, non nuls et de directions différentes, construire un représentant du vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ dans les cas suivants :

1) $x = 1$ et $y = 2$
2) $x = -2$ et $y = 3$
3) $x = -1$ et $y = -2$
4) $x = 4$ et $y = -1$
5) $x = 0$ et $y = 3$
6) $x = 2$ et $y = 0$
7) $x = 0$ et $y = 0$.

Au couple (1 ; 2) la construction permet d'associer un vecteur $\vec{u}_1$ tel que $\vec{u}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j}$.
Au couple $(-2 ; 3)$ la construction permet d'associer un vecteur $\vec{u}_2$ tel que $\vec{u}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
Plus généralement, étant donné deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, non nuls et de directions différentes, à tout couple de réels (x, y) on associe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ce procédé définit une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathscr{V}$.

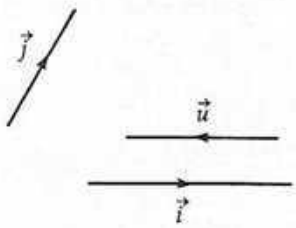
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathscr{V}$$
$$(x, y) \quad \mapsto x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Exercice Calculer $f((2 ; -3))$, $f((1 ; 0))$, $f((0 ; 1))$, $f((0 ; 0))$.

c) **L'application précédente est-elle une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathscr{V}$?**

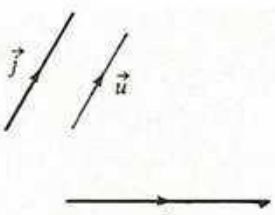
Étant donné les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et l'application f, montrons que chaque vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ est l'image par f d'un couple de réels.

1er *cas* : $\vec{u}$ a même direction que $\vec{i}$.



Il existe donc un réel unique x tel que $\vec{u} = x\vec{i}$.
On peut aussi écrire $\vec{u} = x\vec{i} + 0\vec{j}$, donc $\vec{u}$ est l'image par f du couple $(x, 0)$.

2e *cas* : $\vec{u}$ a même direction que $\vec{j}$.

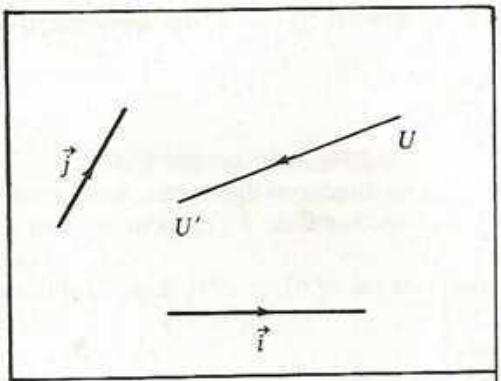


Il existe donc un réel unique y tel que $\vec{u} = y\vec{j}$.
On peut aussi écrire $\vec{u} = 0\vec{i} + y\vec{j}$, donc $\vec{u}$ est l'image par f du couple $(0, y)$.

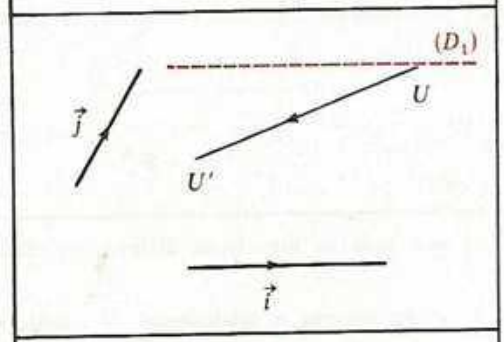
3e *cas* : $\vec{u}$ est un vecteur non nul, $\vec{u}$ et $\vec{i}$ n'ont pas même direction, $\vec{u}$ et $\vec{j}$ n'ont pas même direction.

Soit (U, U') un représentant de $\vec{u}$; $\vec{u} = \overrightarrow{UU'}$.
On sait que, quel que soit M élément de $\mathscr{P}$,

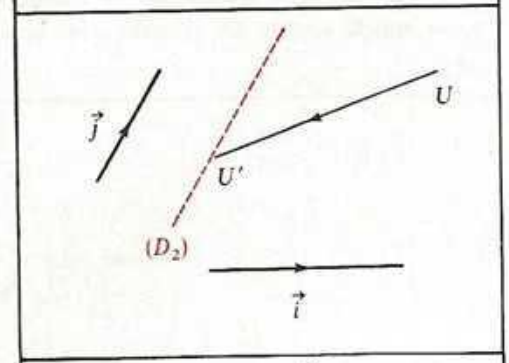
$$\overrightarrow{UU'} = \overrightarrow{UM} + \overrightarrow{MU'}.$$



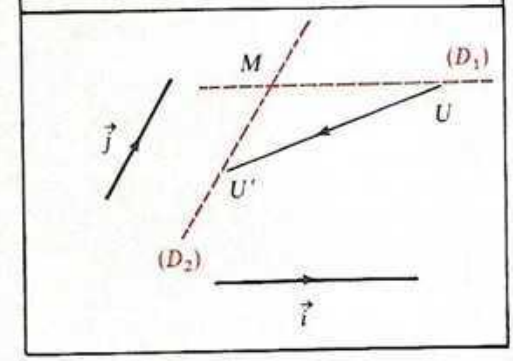
Trouver un couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{UU'} = x\vec{i} + y\vec{j}$ revient à trouver un point M du plan tel que $\overrightarrow{UM} = x\vec{i}$ et $\overrightarrow{MU'} = y\vec{j}$.
Cherchons donc un point M tel que : $\overrightarrow{UM}$ ait même direction que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{MU'}$ ait même direction que $\vec{j}$.



Pour que $\overrightarrow{UM}$ ait même direction que $\vec{i}$, il faut que M appartienne à la droite (D_1) de vecteur directeur $\vec{i}$ et passant par U.
Traçons (D_1).



Pour que $\overrightarrow{MU'}$ ait même direction que $\vec{j}$, il faut que M appartienne à la droite (D_2) de vecteur directeur $\vec{j}$ et passant par U'.
Traçons (D_2).



Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ayant pas la même direction, les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes; leur point d'intersection est le point M cherché.

Nous venons donc de décomposer le vecteur $\vec{u}$ en une somme de deux vecteurs; l'un, $\overrightarrow{UM}$, ayant même direction que $\vec{i}$, l'autre, $\overrightarrow{MU'}$, ayant même direction que $\vec{j}$.
$\overrightarrow{UM}$ ayant même direction que $\vec{i}$, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{UM} = x\vec{i}$.
$\overrightarrow{MU'}$ ayant même direction que $\vec{j}$, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{MU'} = y\vec{j}$.

Donc il existe un couple de réels (x, y) tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

4e *cas* : $\vec{u}$ est le vecteur nul.

On peut écrire $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$, donc $\vec{0}$ est l'image par f du couple $(0, 0)$.

Étant donné deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non nuls de directions différentes, nous avons montré, dans les quatre cas possibles, qu'à chaque vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$, on peut associer un couple (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On démontre que ce couple est unique (voir ex. nº 61, p. 279), donc l'application f est bijective.

Conclusion : $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs non nuls de directions différentes, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$, il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Définitions

1. Chaque couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls de directions différentes est appelé une base de $\mathscr{V}$.

2. Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathscr{V}$ et un vecteur $\vec{u}$ quelconque, le couple unique de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple des coordonnées **de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.**

Exercice

Quels sont, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les couples de coordonnées de :

$$2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad 2\vec{i} - 3\vec{j}; \quad \vec{i} + \vec{j}; \quad \vec{i} - \vec{j}; \quad \vec{j} - \vec{i};$$
$$-2\vec{j} + 5\vec{i}; \quad \vec{0}; \quad \vec{i}; \quad \vec{j}; \quad -\vec{i}; \quad -\vec{j}.$$

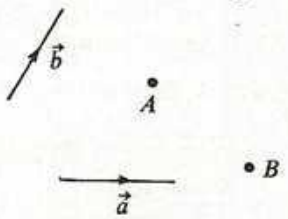
Notation : x et y étant les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on note : $\vec{u}(x, y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on lit « $\vec{u}$ a pour coordonnées x, y » ou plus brièvement « $\vec{u}$ de coordonnées x, y ».

Exercice

On donne la figure ci-contre.

Dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, soit

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



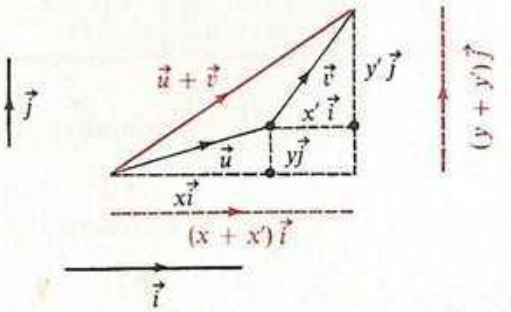
Construire

— le représentant de $\vec{u}$ d'origine A,
— le représentant de $\vec{v}$ d'origine B,
— le représentant de $\vec{w}$ d'extrémité C.

2) Coordonnées de $\vec{u} + \vec{u}'$ et de $\lambda\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

a) **Coordonnées de $\vec{u} + \vec{u}'$.**

L'ensemble $\mathscr{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$; soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base.



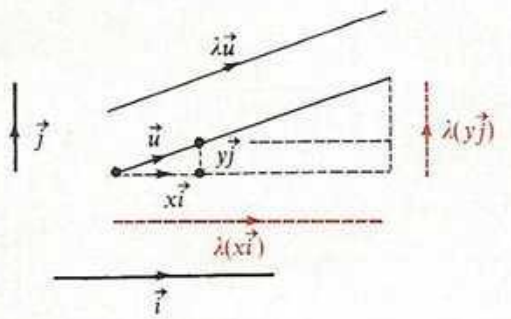
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
Donc $\vec{u} + \vec{u}' = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$
$\vec{u} + \vec{u}' = x\vec{i} + x'\vec{i} + y\vec{j} + y'\vec{j}$
$\vec{u} + \vec{u}' = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$,

donc :

> Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont pour couples de coordonnées respectifs (x, y) et (x', y'), le vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ a pour couple de coordonnées $(x + x', y + y')$.

b) **Coordonnées de $\lambda\vec{u}$.**

L'ensemble $\mathscr{V}$ étant muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Donc $\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$
$\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i}) + \lambda(y\vec{j})$
$\lambda\vec{u} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j}$,

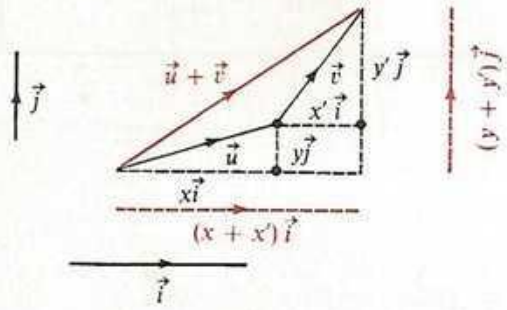
donc :

> Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si le vecteur $\vec{u}$ a pour couple de coordonnées (x, y), le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour couple de coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$.

2) Coordonnées de $\vec{u} + \vec{u'}$ et de $\lambda\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

a) **Coordonnées de $\vec{u} + \vec{u'}$.**

L'ensemble $\mathscr{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$; soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base.



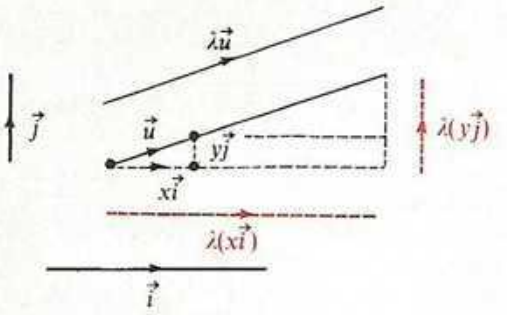
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
Donc $\vec{u} + \vec{u'} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$
$\vec{u} + \vec{u'} = x\vec{i} + x'\vec{i} + y\vec{j} + y'\vec{j}$
$\vec{u} + \vec{u'} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$,

donc :

> Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ont pour couples de coordonnées respectifs (x, y) et (x', y'), le vecteur $\vec{u} + \vec{u'}$ a pour couple de coordonnées $(x + x', y + y')$.

b) **Coordonnées de $\lambda\vec{u}$.**

L'ensemble $\mathscr{V}$ étant muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Donc $\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$
$\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i}) + \lambda(y\vec{j})$
$\lambda\vec{u} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j}$,

donc :

> Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si le vecteur $\vec{u}$ a pour couple de coordonnées (x, y), le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour couple de coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$.

c) **Tableau :**

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$				
$\mathscr{V}$	$\vec{u}$	$\vec{u}'$	$\vec{u} + \vec{u}'$	$\lambda\vec{u}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

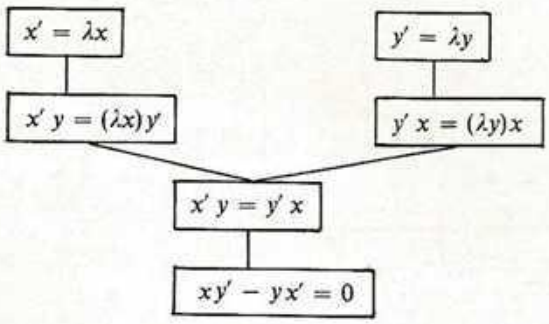
Exercice Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Construire des représentants de même origine de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $3\vec{u}$.
Calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $3\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Vérifier sur la figure.

3) Relation entre les coordonnées de deux vecteurs de même direction dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\mathscr{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de même direction.

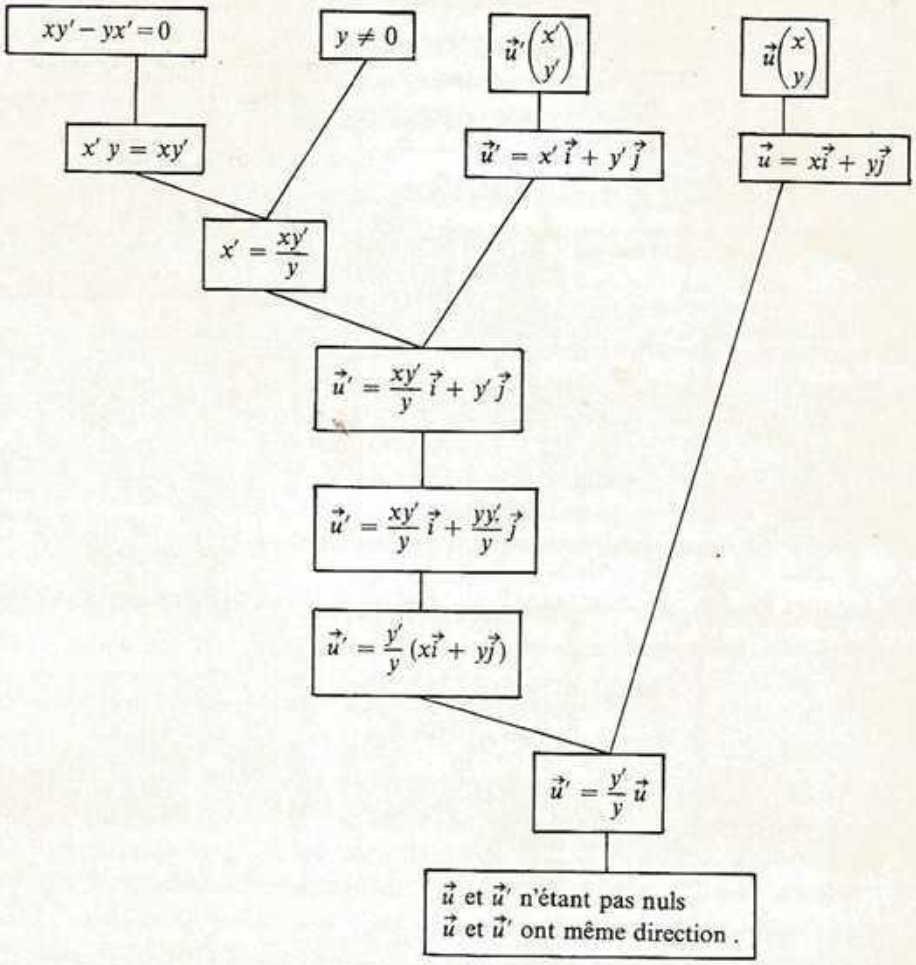
Nous savons qu'il existe un réel non nul unique λ tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ donc



Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ont même direction alors $xy' - yx' = 0$.

b) Réciproquement :

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $xy' - yx' = 0$.
On sait que $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc au moins l'un des deux nombres x et y n'est pas nul : supposons $y \neq 0$.



Refaire la démonstration en supposant $x \neq 0$.

Théorème 1

Une base de $\mathscr{V}$ étant choisie, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ étant deux vecteurs non nuls,

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ont même direction équivaut à $xy' - yx' = 0$.

Exercice Parmi les vecteurs suivants, trouver des vecteurs de même direction :

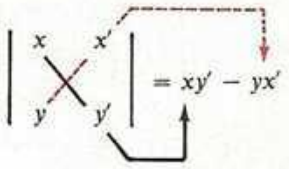
$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}; \quad \vec{p}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{q}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le théorème 1 sera souvent utilisé pour vérifier ou exprimer que :
— deux vecteurs non nuls ont même direction (comme dans l'exercice précédent),
— trois points A, B, C sont alignés (c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction).

Le nombre $xy' - yx'$ est fréquemment présenté sous la forme : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Cette écriture est appelée **déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$** dans la base donnée.

On note : dét $(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.



Exercices

a) Calculer la valeur des déterminants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

b) Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; *c*) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$; *d*) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

c) Les vecteurs $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$ et $5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ont-ils même direction ?

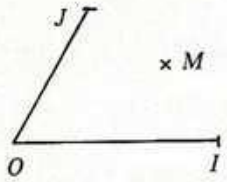
Remarque. Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{0}$?
Calculer dét $(\vec{u}, \vec{0})$.
Peut-on dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{0}$ ont même direction ? (Revoir le théorème 1 précédent.)

Théorème 2

Le déterminant de deux vecteurs est nul dans deux cas seulement :
— soit quand les deux vecteurs ont même direction,
— soit quand l'un d'eux est le vecteur nul.

4) Repère du plan. Coordonnées d'un point



a) On donne dans le plan $\mathscr{P}$, trois points non alignés : O, I et J.

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \qquad \overrightarrow{OJ} = \vec{j},$$

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathscr{V}$; pourquoi ?
Soit M un point quelconque du plan $\mathscr{P}$.
L'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{V}$ qui à tout point M fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une bijection ; pourquoi ?
L'application de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ fait correspondre le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est une bijection ; pourquoi ?

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{P} & \to & \mathscr{V} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{OM} & \mapsto & (x, y)\,. \end{array}$$

Quelle est la composée de ces deux bijections ?
Donc : trois points O, I, J non alignés du plan $\mathscr{P}$ étant donnés, l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ fait correspondre le couple de coordonnés de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définitions

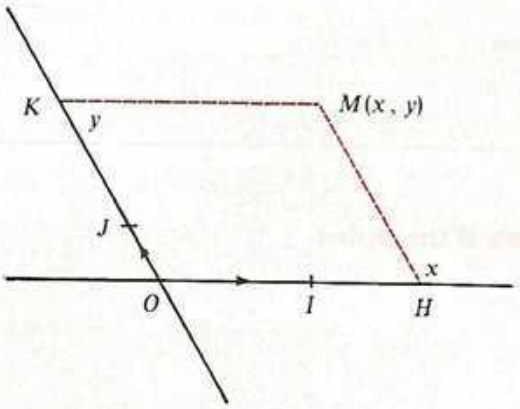
1. Tout triplet (O, I, J) de points non alignés du plan $\mathscr{P}$ est appelé repère **de ce plan ; O s'appelle l'origine du repère.**

2. On appelle coordonnées d'un point M **du plan dans le repère (O, I, J), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.**

Notation : L'écriture « $M(x, y)$ » signifie que le point M a pour coordonnées x et y.
$M(x, y)$ se lit : « M de coordonnées x et y ».
Dans le repère (O, I, J), x est l'**abscisse** du point M ;
y est l'**ordonnée** du point M.

Exercice On donne un repère (A, B, C).
1) Construire les points $M(3 ; 2)$; $N(1 ; -1)$; $P(-1 ; 0)$ et $Q(0 ; -2)$.
2) Quelles sont les coordonnées de A, B et C dans ce repère ?

Remarque. Soit (O, I, J) un repère du plan $\mathscr{P}$ et $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathscr{P}$.



On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}.$$

Soit H le point de la droite (OI) tel que $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OI}$ et
K le point de la droite (OJ) tel que $\overrightarrow{OK} = y\overrightarrow{OJ}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} \quad ①.$$

D'après la règle d'addition des vecteurs : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ ②.
Des égalités ① et ②, on déduit que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{HM}$.
Si les points O, K, M, H ne sont pas alignés, $OKMH$ est un parallélogramme alors $(OK)/\!/(MH)$ et $(OH)/\!/(KM)$.

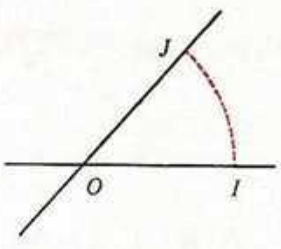
Donc :

— Le point H est le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ) et le réel x est l'abscisse de H dans la graduation de repère (O, I).
— Le point K est le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI) et le réel y est l'abscisse de K dans la graduation de repère (O, J).

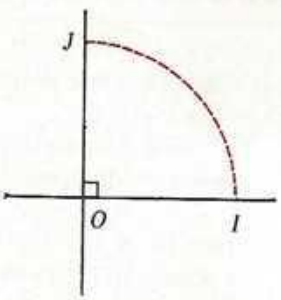
Il en est de même si, O, K, M, H appartiennent à une même droite. Le vérifier.
On retrouve donc la définition des coordonnées d'un point M du plan telle qu'elle a été donnée en Quatrième, dans un repère *normé*.

Repère normé ; repère non normé.

Dans un repère *normé* (O, I, J), orthogonal ou non, les points I et J appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.



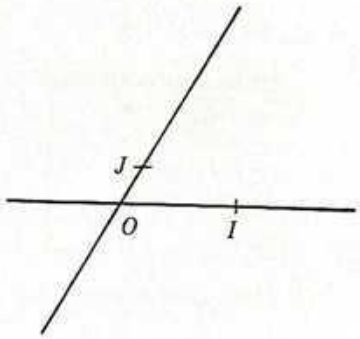
Repère normé



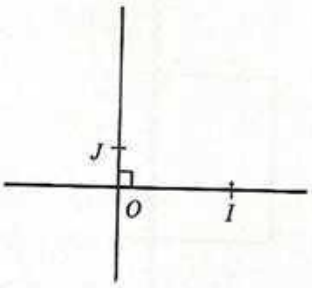
Repère orthonormé

Seuls de tels repères sont adaptés au plan métrique défini en Quatrième (plan mathématique muni d'une distance).

Un repère défini par trois points non alignés du plan n'est pas, en général, un repère normé.



Repère quelconque

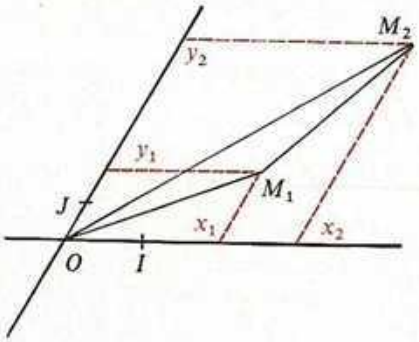


Repère orthogonal

b) **Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ dans une base quelconque.**

On donne dans un repère (O, I, J) les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$.

Quelles sont dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$?



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j})$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = x_2\,\vec{i} - x_1\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} - y_1\,\vec{j}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}.$$

Donc : si les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées respectives x_1, y_1 et x_2, y_2 alors le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Repère (O, I, J)	Base $(\vec{i}, \vec{j})$
$M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$	$\overrightarrow{M_1M_2}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_2M_1}$?

Exercices

1) Dans un repère (O, I, J) on donne les points

$$A(-3\,;5) \qquad B(0\,;-2) \qquad C(3\,;-1) \quad \text{et} \quad D(-3\,;0).$$

a) Faire la figure.

b) Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, calculer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2) Le plan est muni du repère (O, I, J) ; soit $A(-3\,;2)$ et $B\left(\frac{1}{2}\,;4\right)$.

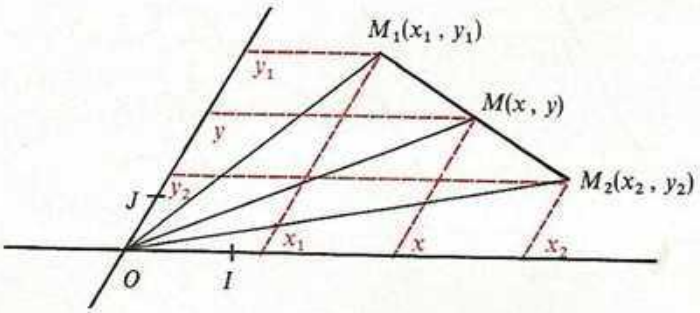
Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Calculer dans le repère (O, I, J) les coordonnées des points C et D tels que : $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{DB} = \vec{v}$.

3) Reprendre le problème posé au début du chapitre. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Démontrer que les points A, B et C *ne sont pas* alignés.

c) **Coordonnées du milieu d'un bipoint dans un repère quelconque.**

On donne dans un repère (O, I, J) les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$.
Calculons les coordonnées du milieu M de (M_1, M_2).



On sait que :
M est le milieu de (M_1, M_2) équivaut à $\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{M_2M} = \vec{0}$.
On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$ ①.
On a aussi : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2M}$ ② ; en ajoutant membre à membre les égalités ① et ②, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{M_2M}$$
$$2\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \vec{0}$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}) + (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j})\right]$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j}\right]$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,\vec{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\,\vec{j}.$$

Le milieu M de (M_1, M_2) a donc pour coordonnées :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

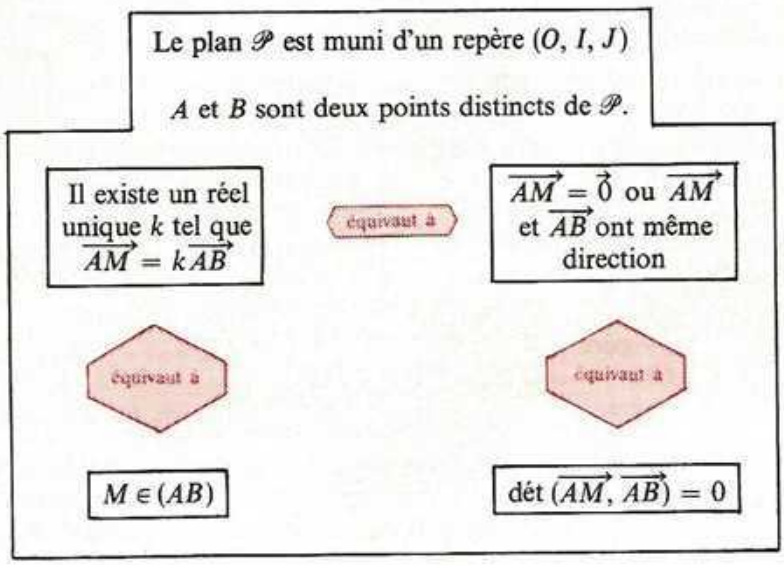
$\mathscr{P}$	M_1	M_2	Milieu de (M_1, M_2)
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Application numérique : Dans un repère (O, I, J), soit les points $A(4, -3)$; $B(2, 5)$ et $C(-1, -4)$. Calculer les coordonnées des points M, N et P, milieux respectifs de (A, B); (B, C) et (A, C).

3 Équations d'une droite

1) Rappel

Les théorèmes démontrés précédemment nous permettent de faire le schéma suivant :



d'où le **théorème :**

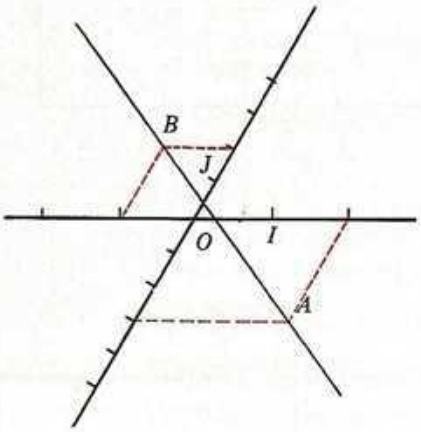
A et B étant deux points distincts du plan muni d'un repère

$M \in (AB)$ équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

2) Équations d'une droite

a) **Exemple 1**

On donne dans le repère (O, I, J) les points $A(2 ; -3)$ et $B(-1 ; 2)$.
Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.



Quelle condition doivent vérifier les coordonnées de M pour que ce point appartienne à la droite (AB) ?
D'après le théorème précédent,

$M \in (AB)$ ⟨ équivaut à ⟩ $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Cherchons les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-3) \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y+3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 5(x-2) - (-3)(y+3)$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 5x + 3y - 1.$$

Or, dans le repère (O, I, J) : $M(x, y) \in (AB)$ ⟨ équivaut à ⟩ $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ donc $M(x, y) \in (AB)$ ⟨ équivaut à ⟩ $5x + 3y - 1 = 0$.
Ainsi, le plan étant muni d'un repère (O, I, J), un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad 5x + 3y - 1 = 0,$$

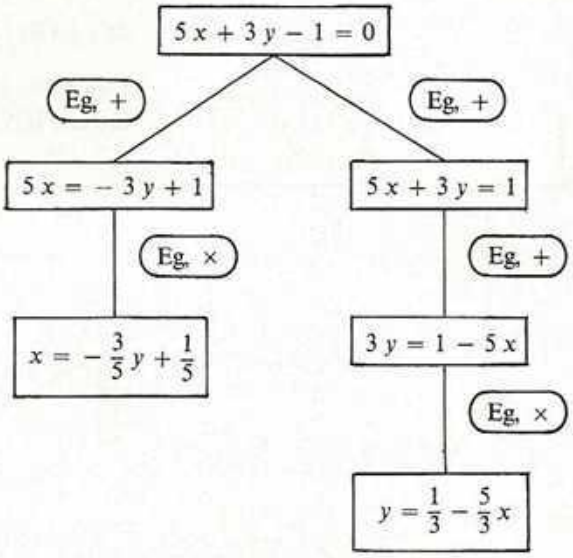
et seulement dans ce cas.

On dit que : $5x + 3y - 1 = 0$ est **une équation** de la droite (AB).

Le point $P(-2 ; 5)$ appartient-il à la droite (AB) ? et le point $Q(-4 ; 7)$?
Un point de (AB) a pour abscisse 1 ; quelle est son ordonnée ?
Un point de (AB) a pour ordonnée 0 ; quelle est son abscisse ?
Vérifier sur la figure.

Remarque.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) ; toute équation équivalente à $5x + 3y - 1 = 0$ est aussi une équation de la droite (AB). Pourquoi ?
Le schéma suivant montre comment les propriétés (Égalité, +) et (Égalité, ×) permettent d'obtenir d'autres équations de la droite (AB) dans le même repère :



Exercice

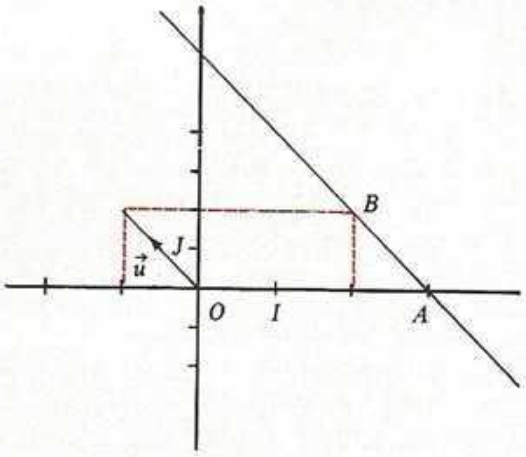
Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations de la droite (AB) ?

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - \frac{1}{15} = 0$$
$$10x + 6y - 2 = 0$$
$$7x + 6y + 3 = 5 - 3x$$
$$6x + 4y - 2 = 0.$$

b) **Exemple 2**

Dans le repère (O, I, J), on donne le point $A(3 ; 0)$ et, dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.
Quelle condition doivent vérifier les coordonnées de M pour que ce point appartienne à la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A ?

Marquer B tel que (A, B) soit le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$ et tracer la droite (AB).



Ainsi :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad (AB) = (D).$$

On a donc :

$M \in (AB)$ équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$:

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 2(x-3) + y$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 2x + y - 6$$

donc $M \in (AB)$ équivaut à $2x + y - 6 = 0$.

Dans le repère (O, I, J), l'équation $2x + y - 6 = 0$ est [une] équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercices

— Calculer les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec (OI) et (OJ). Vérifier sur la figure.
— Trouver une équation de la droite de vecteur directeur $-\vec{u}$ et passant par le point $P(-1 ; 8)$.
Comparer cette équation à la précédente. Conclure.
— Trouver une équation de la droite passant par les points $Q(1 ; 4)$ et $R(4 ; -2)$. Comparer cette équation aux précédentes. Conclure.

c) **Exemple 3**

Dans le repère (O, I, J), cherchons une équation de la droite passant par $A(2 ; -3)$ et $B(2 ; 2)$. Faire une figure. Les points A et B ont même abscisse, donc appartiennent à la droite parallèle à (OJ) et passant par le point A. Chaque point de la droite (AB) a pour abscisse 2.
Chaque point d'abscisse 2 appartient à la droite (AB).

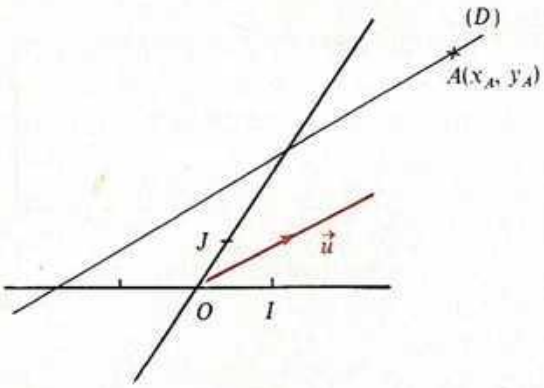
$x = 2$ est donc [une] équation de la droite (AB).

Il n'est vraiment pas nécessaire ici d'utiliser un déterminant !!!
Mais on pourra vérifier que l'utilisation du déterminant conduit à une équation équivalente à la précédente.

Exercices

— Écrire une équation de la droite passant par $P(-1\,;\,5)$ et $Q(-1\,;\,-8)$.
— Écrire une équation de la droite passant par $R(-1\,;\,6)$ et $S(5\,;\,6)$.
— Écrire une équation de la droite passant par le point $A(1\,;\,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$.
— Écrire une équation de la droite passant par le point $A(1\,;\,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{OJ}$.

d) **Cas général :**



Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. **Équation d'une droite (D) définie par un point et un vecteur directeur.**

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de (D) et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D).

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) donc $\vec{u} \neq \vec{0}$, on écrira $(p, q) \neq (0, 0)$.

Soit $M(x, y)$ un point quelconque de (D).

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x - x_A & p \\ y - y_A & q \end{vmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = q(x - x_A) - p(y - y_A)$$

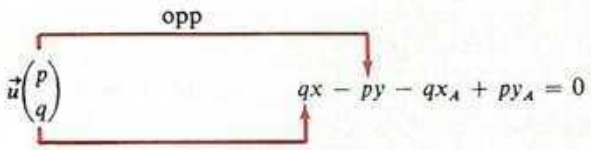
$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = qx - py - qx_A + py_A$$

donc $M \in (D)$ 〈équivaut à〉 $qx - py - qx_A + py_A = 0$.

Conclusion : Dans le repère (O, I, J), l'équation $qx - py - qx_A + py_A = 0$ est une équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Nous remarquons que :

Dans l'équation précédente, le coefficient de x est la seconde coordonnée du vecteur $\vec{u}$, le coefficient de y est l'opposé de la première coordonnée du vecteur $\vec{u}$



q, $-p$ et $-qx_A + py_A$ sont des réels connus.

Cette équation est donc de la forme $ax + by + c = 0$ où les réels a et b ne sont pas simultanément nuls : $(a, b) \neq (0, 0)$.

Conséquence : 〈si〉 $ax + by + c = 0$ est une équation de la droite (D)

[alors] le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

2. **Équation d'une droite (*D*) définie par deux points.**

Si A et B sont deux points de (D) alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D). La droite (D) est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passant par A : on est ramené au paragraphe 1.

3) Ensemble des points dont le couple de coordonnées (*x*, *y*) vérifie $ax + by + c = 0$

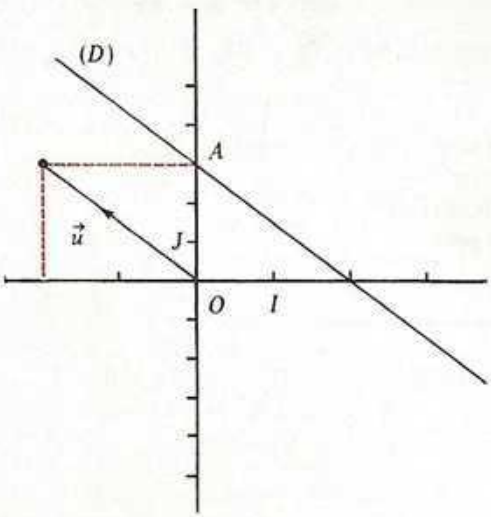
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Au paragraphe précédent, nous avons rencontré les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 1 &= 0 \qquad & -2x - y + 6 &= 0 \\ 10x + 6y - 2 &= 0 \qquad & -6x - 3y + 18 &= 0 \\ 2x + y - 6 &= 0 \qquad & x - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Elles sont de la forme $ax + by + c = 0$;
Déterminer pour chacune d'elles les valeurs respectives de a, b et c.

a) **Exemple :**

Quel est l'ensemble E des points dont le couple de coordonnées (x, y) vérifie l'équation : $3x + 2y - 6 = 0$?



— Chercher cinq couples solutions de cette équation et les représenter dans le plan muni d'un repère (O, I, J). Les points obtenus sont des éléments de E, ils semblent alignés.

— Soit A le point de E dont l'abscisse est 0. Son ordonnée est 3.

— Nous avons vu que si $ax + by + c = 0$ est une équation de la droite (D) alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ; cherchons donc une équation de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= \begin{vmatrix} x - 0 & -2 \\ y - 3 & +3 \end{vmatrix} \\ \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= 3(x - 0) + 2(y - 3) \\ \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= 3x + 2y - 6 \end{aligned}$$

$3x + 2y - 6 = 0$ est une équation de la droite (D).

Or nous avons vu que les points de la droite (D) et eux seulement, ont des coordonnées qui vérifient l'équation $3x + 2y - 6 = 0$, donc $E = (D)$.

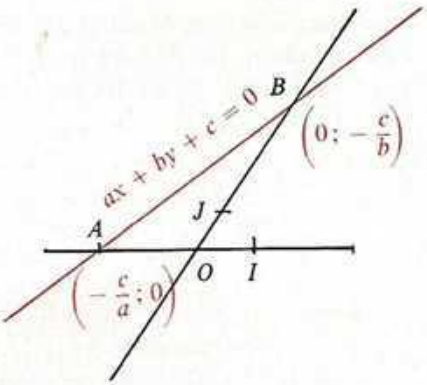
Exercices

1. Démontrer que l'ensemble des points dont le couple de coordonnées vérifie l'équation : $3x - 2y + 6 = 0$ est une droite. Construire cette droite.
2. Démontrer que l'ensemble des points dont le couple de coordonnées vérifie l'équation $y - 3 = 0$ est une droite. Construire cette droite.

b) Plus généralement, on peut démontrer (voir ex. n° 62, p. 280) le théorème suivant :

Théorème

a, b, c étant trois réels tels que $(a, b) \neq (0\,;0)$ l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.



On donne la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.

1) Vérifier que :

Si $a \neq 0$, (D) est la droite contenant le point $A\left(-\frac{c}{a}\,; 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Si $b \neq 0$, (D) est la droite contenant le point $B\left(0\,; -\frac{c}{b}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

2) Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, donner les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec (OI) et (OJ).

4) Position relative de deux droites

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) **Exemples**

Exercice 1

(D_1), (D_2), (D_3) sont des droites d'équations respectives

$$3x + 2y - 6 = 0; \qquad 3x + 2y + 1 = 0; \qquad 3x + 2y = 0.$$

Trouver un vecteur directeur de chacune d'elles ; en déduire que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont parallèles. Faire une figure.

Démontrer que les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $ax + by + c' = 0$ ont même ensemble de vecteurs directeurs.

Exercice 2 (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) sont des droites d'équations respectives :

$$3y - 5 = 0; \quad y = 4; \quad x + \frac{5}{4} = 0; \quad x = 0.$$

Trouver un vecteur directeur de chacune d'elles; en déduire que (D_1) et (D_2) sont parallèles, ainsi que (D_3) et (D_4). Faire une figure.

Exercice 3 (D_1), (D_2), (D_3) sont des droites d'équations respectives :

$$3x + 2y - 6 = 0; \quad 6x + 4y - 5 = 0; \quad 6x + 4y - 12 = 0.$$

Trouver un vecteur directeur de chacune d'elles; en déduire que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont parallèles. Démontrer que $(D_1) = (D_3)$. Faire une figure.

Exercice 4 (D_1) et (D_2) sont deux droites d'équations respectives :

$$3x + 2y - 6 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y + 6 = 0.$$

Trouver un vecteur directeur de chacune d'elles. Montrer que les vecteurs obtenus ne sont pas de même direction. En déduire que (D_1) et (D_2) sont sécantes. Faire une figure. Lire sur la figure les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2).

b) **Cas général :**

Soit deux droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

1. Démontrer que la droite d'équation $ax + by = 0$ est parallèle à (D).
2. On suppose : $a = 0$ et $a' = 0$. Démontrer que (D) et (D') sont parallèles à (OI).
3. On suppose : $b = 0$ et $b' = 0$. Démontrer que (D) et (D') sont parallèles à (OJ).
4. On suppose : $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D').

Calculer dét $(\vec{u}, \vec{u}')$.

1er *cas* : dét $(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant non nuls :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ ont même direction} \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad \text{dét } (\vec{u}, \vec{u}') = 0.$$

Démontrer que :

$$(D) /\!\!/ (D') \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

et que

$$(D) = (D') \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

2e *cas* : dét $(\vec{u}, \vec{u'}) \neq 0$.
Démontrer que

$$(D) \text{ est sécante à } (D') \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}.$$

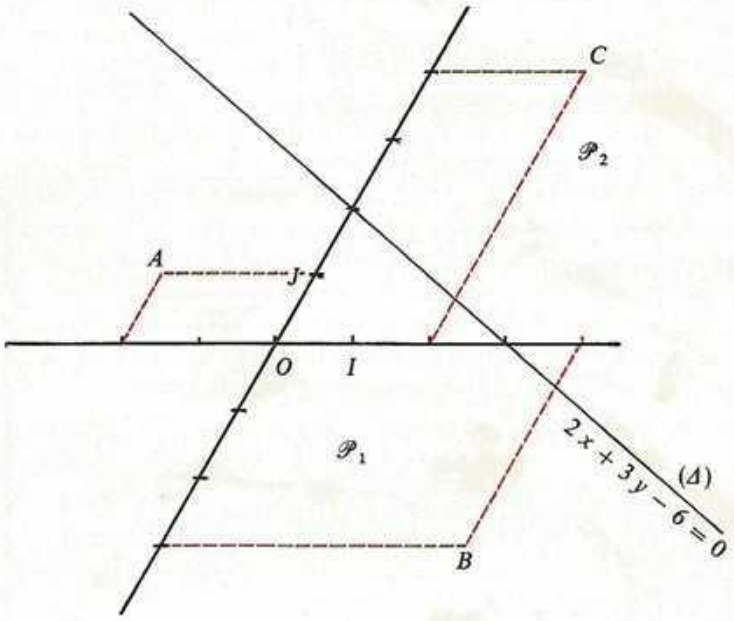
(Voir leçon sur la linéarité p. 129.)

4 Régionnement du plan par une droite

1) Exemple

a) Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère (O, I, J), la droite (Δ) d'équation $2x + 3y - 6 = 0$ réalise une partition de $\mathscr{P}$ en trois « régions »,

— la droite (Δ),
— le demi-plan ouvert $\mathscr{P}_1$ de bord (Δ) comprenant le point O,
— le demi-plan ouvert $\mathscr{P}_2$ de bord (Δ) ne comprenant pas le point O.



Soit $A(-2; 1)$, $B(4; -3)$ et $C(2; 4)$.
La figure permet de vérifier que

$$A \in \mathscr{P}_1 \qquad B \in \mathscr{P}_1 \qquad C \in \mathscr{P}_2.$$

Cette vérification est-elle aussi simple pour chaque point du plan ?

Par exemple, pour les points suivants :

$K(2{,}13\,;\,0{,}57)$; $L(254\,;\,-\,167)$; $R(1{,}26\,;\,1{,}16)$;

$P(5\,437\,;\,-\,3\,622)$; $Q(5\,437\,;\,-\,3\,623)$.

La représentation graphique ne permet pas toujours de faire cette vérification.

b) A l'équation $2x + 3y - 6 = 0$ associons l'application suivante :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 6.$$

Pour un point M de $\mathscr{P}$, on a :

ou bien $M \in \mathscr{P}_1$ ou bien $M \in (\Delta)$ ou bien $M \in \mathscr{P}_2$.

Pour le couple (x, y) de coordonnées de M, on a
ou bien $f(x, y) > 0$ alors le couple de coordonnées du point M est solution de l'inéquation

$$2x + 3y - 6 > 0,$$

ou bien $f(x, y) = 0$ alors le couple de coordonnées du point M est solution de l'équation

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

ou bien $f(x, y) < 0$ alors le couple de coordonnées du point M est solution de l'inéquation

$$2x + 3y - 6 < 0.$$

(Δ) étant la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$, nous savons déjà que

$$M(x, y) \in (\Delta) \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad f(x, y) = 0.$$

On en déduit

$$M(x, y) \in \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad f(x, y) \neq 0.$$

Le tableau suivant renferme :
— des points de $\mathscr{P}_1$ (le vérifier graphiquement),
— les couples de coordonnées correspondants,
— les images par f de ces couples.

$\mathscr{P}_1$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
(x, y)	$(-2\,;\,0)$	$(-2\,;\,1)$	$(-2\,;\,2)$	$\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$	$(-1\,;\,1)$	$(-1\,;\,2)$	$(1\,;\,1)$	$\left(2\,;\,\frac{1}{2}\right)$
$f(x, y)$	-10	-7	-4	$-\frac{17}{4}$	-5	-6	-1	$-\frac{1}{2}$

On remarque que toutes ces images sont des réels négatifs.

On peut démontrer que (ex. 63, p. 280)

$$M(x, y) \in \mathscr{P}_1 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad 2x + 3y - 6 < 0.$$

De ce qui précède on déduit :

$$M(x, y) \in \mathscr{P}_2 \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad 2x + 3y - 6 > 0.$$

Compléter le tableau et vérifier :

$\mathscr{P}_2$	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
(x, y)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(0 ; 3)	(− 1 ; 3)	(2 ; 1)	(2 ; 5)	(5 ; − 1)
$f(x, y)$								

2) Cas général

D'une façon générale, on démontre que, dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J), toute droite (Δ) d'équation $ax + by + c = 0$ réalise une partition du plan en trois régions :

— un demi-plan ouvert de bord (Δ) : les coordonnées des points de ce demi-plan vérifient l'inéquation $ax + by + c < 0$,

— l'autre demi-plan ouvert de bord (Δ) : les coordonnées des points de ce demi-plan vérifient l'inéquation $ax + by + c > 0$,

— la droite (Δ) : les coordonnées des points de (Δ) vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

Exercice

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J), soit (Δ) la droite d'équation $5x - 2y + 7 = 0$.
On donne $A(4 ; - 1)$. Vérifier que $A \notin (\Delta)$.
On désigne par $\mathscr{P}_1$ le demi-plan ouvert de bord (Δ) comprenant A et par $\mathscr{P}_2$ l'autre demi-plan ouvert de bord (Δ).
Les points de $\mathscr{P}_1$ ont des coordonnées qui vérifient l'une de ces deux inéquations :

$$(I_1) \quad 5x - 2y + 7 > 0 ; \qquad (I_2) \quad 5x - 2y + 7 < 0.$$

Laquelle ?
Le point $B(- 2 ; 4)$ est-il élément de $\mathscr{P}_1$?
A quelle région appartiennent les points suivants ?

$Q_1(2 ; 3)$ $\quad Q_2(1 ; 7)$ $\quad Q_3(- 1 ; 3)$ $\quad Q_4(0 ; 5)$
$Q_5(- 1 ; 1)$ $\quad Q_6(2 ; 0)$ $\quad Q_7(- 2 ; 0)$ $\quad Q_8(0 ; 1)$
$Q_9(1 ; 6)$.

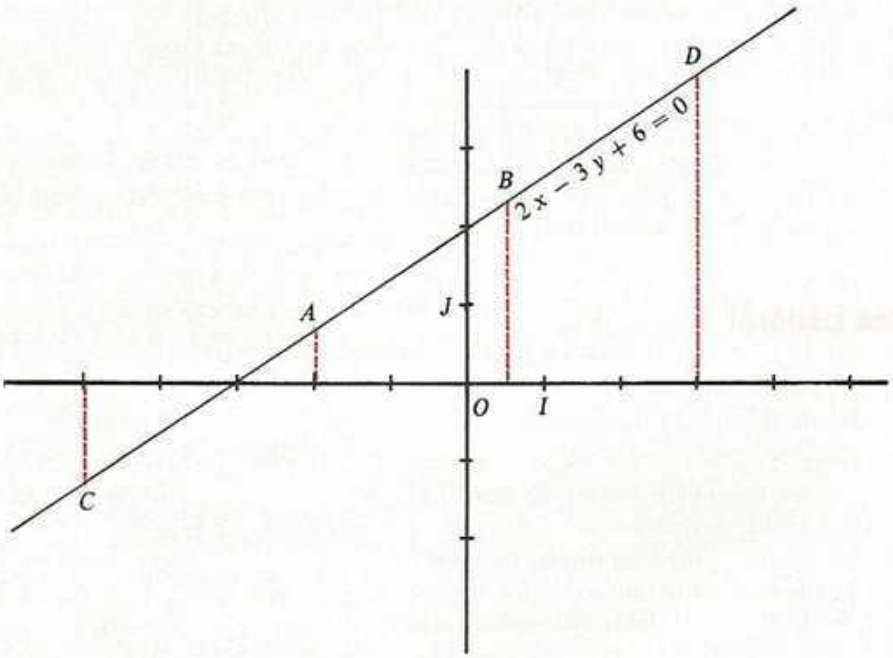
A quelle région appartient le point O ?

3) Caractérisation d'une demi-droite et d'un segment

a) **Caractérisation d'une demi-droite.**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (Δ) d'équation

$$2x - 3y + 6 = 0.$$



Placer sur (Δ) les points A, B, C et D ayant pour abscisses respectives -2; 0,5; -4 et 3.
Calculer l'ordonnée de chacun de ces points.
Hachurer en rouge l'ensemble $\mathscr{P}_1$ des points du plan dont les abscisses vérifient $x < -2$.
Compléter : $\mathscr{P}_1 \cap (\Delta) =$
La demi-droite ouverte $]AC)$ est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x < -2. \end{cases}$$

On dit que $]AC)$ est caractérisée par ce système.
Caractériser $]AD)$ par un système.
Quel est l'ensemble des points du plan caractérisé par le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x \geqslant 0{,}5 \qquad ? \end{cases}$$

b) **Caractérisation d'un segment.**

Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ -2 \leqslant x \leqslant 0{,}5\,. \end{cases}$$

Caractériser $]CD]$ par un système.
Quel est l'ensemble des points du plan caractérisé par le sytème

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ -4 \leqslant x < 0{,}5 \quad ? \end{cases}$$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système :

1) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -\dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 4\,. \end{cases}$

Exercices

Calculer et Construire

1 (1). Soit un parallélogramme $ABCD$.

a) Parmi les vecteurs : $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BD}$, quels sont ceux qui sont vecteurs directeurs de (CD) ? Quels sont ceux qui sont vecteurs directeurs de (BC) ?

b) Les droites (CD) et (BC) ont-elles un même vecteur directeur ? Pourquoi ?

2 (1). Construire un quadrilatère $ABEF$ tel que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AF}$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils vecteurs directeurs d'une même droite ?
On désigne par (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{u}$. (Δ) coupe la droite (BE) au point I. Que représente ce point I pour le bipoint (B, E) ?
Construire le point F' tel que $\overrightarrow{FF'} = 2\vec{u}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $FEF'B$?

3 (1). On désigne par $E_{\overrightarrow{AB}}$ l'ensemble des droites ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

a) Soit (Δ) un élément de $E_{\overrightarrow{AB}}$. Que représente le vecteur $7\overrightarrow{BA}$ pour la droite (Δ) ?

b) Par un point M n'appartenant pas à la droite (AB), construire la droite (Δ') de vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$.
— Que peut-on dire de (Δ) et (Δ') ?
— Quelle est l'intersection des ensembles $E_{\overrightarrow{AB}}$ et $E_{\overrightarrow{AM}}$?

4 (1). Sur une droite graduée d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$, on donne les points B et P d'abscisses respectives b et p. Compléter :

$$\overrightarrow{AB} = \ldots\vec{u}$$
$$\overrightarrow{AP} = \ldots\vec{u}$$
$$\overrightarrow{BP} = \ldots\vec{u}.$$

En déduire $\overrightarrow{BP} = \overline{BP}\vec{u}$.

5 (1). Soit une droite (Δ) munie d'une graduation f de repère (A, B). On donne $f(C) = \frac{5}{3}$ et $f(D) = -\frac{3}{4}$.
Soit g la graduation de repère (C, D). Calculer :
a) $g(A)$ et $g(B)$;
b) la mesure algébrique de (C, D) pour la graduation f et la mesure algébrique de (A, B) pour la graduation g.

6 (1). Sur une droite (D) on considère la graduation f_1 de vecteur unitaire $\vec{u}$ et d'origine A. Soit M le point de (D) tel que $f_1(M) = 3$.
Sur cette droite, on considère une nouvelle graduation f_2 d'origine A et de vecteur unitaire $5\vec{u}$. Calculer $f_2(M)$.

7 (1). Sur une droite (D), on considère la graduation f_1 d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$; soit M un point de (D) tel que $f_1(M) = 6$. On considère une nouvelle graduation f_2 d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $f_2(M) = 4$. Faire une figure : placer le point R tel que $\overrightarrow{AR} = \vec{v}$
On définit une nouvelle graduation f_3 d'origine A et de vecteur unitaire $2\vec{u} + 3\vec{v}$. Calculer $f_3(M)$.

8 (1). Sur une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$, on considère la graduation f d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$. Marquer les points B et C d'abscisses respectives 3 et -2.
Calculer le réel $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
$\vec{v}$ étant un autre vecteur directeur de la droite (D), démontrer que l'égalité $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0$ est vraie pour la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{v}$.

9 (2). Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$, tels que :

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$
$$\vec{v} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$
$$\vec{w} = -3\vec{j}$$
$$\vec{z} = \frac{7}{5}\vec{i}.$$

Construire un représentant de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{w} + \vec{z}$.

10 (2). Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$$
$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$
$$\vec{w} = \frac{5}{2}\vec{i} + \vec{j}.$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$; $2\vec{u}-\vec{v}$ et $2\vec{v}+2\vec{w}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$?

11 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\vec{i}'=\frac{2}{5}\vec{i}\ ,\quad \vec{j}'=\frac{3}{2}\vec{j},$$

$$\vec{u}=-3\vec{i}'+2\vec{j}' \text{ et } \vec{v}=5\vec{i}'+\vec{j}'.$$

a) Donner les coordonnées de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ et de $\vec{u}+\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
b) Donner les coordonnées de $2\vec{u}$, de $2\vec{v}$ et de $2\vec{u}+2\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}',\vec{j}')$.

12 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$.

Donner les coordonnées des vecteurs $\frac{5}{2}\vec{u}$; $4\vec{v}$; $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $\frac{5}{2}\vec{u}+\vec{v}$; $\frac{5}{2}\vec{u}-4\vec{v}$.

13 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ on donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ tels que :

$$\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{i}-2\vec{j}$$
$$\vec{v}=-3\vec{i}+2\vec{j}$$
$$\vec{w}=6\vec{i}-8\vec{j}$$
$$\vec{z}=\frac{9}{4}\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}.$$

Parmi ces vecteurs, indiquer ceux qui ont même direction. Justifier.

14 (2). Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(-2;5)$.
Donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans chacune des bases suivantes :
$(\vec{j};\vec{i})$; $(-\vec{i};\vec{j})$; $(-\vec{j};-\vec{i})$; $(2\vec{i};\vec{j})$;
$(-2\vec{i};4\vec{j})$; $(-2\vec{i};5\vec{j})$.

15 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{a}(-3;-1)$; $\vec{b}(-2;-5)$;

$$\vec{c}(3;1)\ ;\ \vec{d}\left(-6;-\frac{15}{2}\right)\ ;\ \vec{e}\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)\ ;$$

$$\vec{f}(0;-4)\ ;\ \vec{g}(0;2)\ .$$

Parmi ces vecteurs indiquer ceux qui ont même direction. Justifier.

16 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ on donne le vecteur $\vec{u}\left(-\frac{5}{2};-\frac{2}{3}\right)$. Pour quelle valeur de y le vecteur $\vec{v}(4;-y)$ a-t-il même direction que $\vec{u}$?

17 (2). Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ on donne le vecteur $\vec{u}\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. Trouver trois couples de réels (x,y) tels que $\vec{v}(x,y)$ ait même direction que $\vec{u}$.

18 (2). Dans un repère (O,I,J) on donne les points $A(3;5)$, $B(2;-7)$, $C(-4;-2)$.

a) Calculer dans la base $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer les coordonnées des milieux M, N et P des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

19 (2). Dans un repère (O,I,J) on donne les points $A(-1;2)$ et $B(2;5)$.
Placer les points C et D tels que : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DB}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
Calculer leurs coordonnées.

20 (2). Dans un repère (O,I,J) on donne les points $A(-1;2)$, $B(3;5)$, $C(-3,5;-1,5)$ et $D(0,5;\ 1,5)$.

a) Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

b) Calculer les coordonnées du milieu de $[AD]$.

21 (2). Dans un repère (O,I,J), on donne les points $A(-3,2;-1,4)$, $B(2,1;-0,7)$, $C(16,5;-0,9)$ et $D(0,6;-3)$.
Démontrer que $ABCD$ est un trapèze; préciser ses bases.

22 (2). Dans un repère (O,I,J) on donne les points $A(-2,5;-3)$, $B(1,5;5)$ et $C(-5;-1)$.

a) Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) Calculer les coordonnées de E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.

c) Faire une figure. Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.

23 (2). Le plan est muni d'un repère (O,I,J). Marquer les points $A(-3;4)$, $B(5;2)$, $C(-2;-4)$.

a) Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Marquer le point D.

b) Calculer l'ordonnée du point M sommet du trapèze $ABMC$ de bases $[AB]$ et $[MC]$, sachant que l'abscisse de ce point est 2.
Que peut-on dire des points M, C et D ?

24 (2). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(2; -3)$, $B(-1; -1)$ et $C\left(\frac{1}{5}; -\frac{9}{5}\right)$. Démontrer que A, B, C sont alignés.

25 (2). Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(-3; 2)$ et $B(1,5; -3)$.
On considère la symétrie de centre O. Sachant que $A' = S_0(A)$ et $B' = S_0(B)$, calculer les coordonnées de A' et B'. Faire une figure.

26 (2). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(5; 2)$ et $B(-1; 7)$.
On considère la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$. Sachant que $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$, calculer les coordonnées de A' et B'. Faire une figure.

27 (2). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(-1,4; -2)$ et $B(3,1; 1,5)$.
Calculer les coordonnées du point C tel que B soit le milieu de $[AC]$.

28 (2). Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(4; -2)$, $B(-3; 0)$, $C(0; -2)$, $D(-2; -1)$ et $E(3,5; 4,5)$.
On considère la symétrie de centre E.
Soit $A' = S_E(A)$; $B' = S_E(B)$; $C' = S_E(C)$ et $D' = S_E(D)$.
Faire une figure.
Calculer les coordonnées des points A', B', C' et D'.

29 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(2,5; -1,3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Écrire une équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Faire une figure.

30 (3). On considère un triangle ABC.

a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Construire le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Construire le point L tel que $\overrightarrow{BL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$.
Exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{ML}$.
En déduire que les points L, M, N sont alignés.

c) On mène par B la parallèle à la droite (MN) qui coupe la droite (AC) en Q. Montrer que Q est le milieu de (A, C).
(On pourra calculer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs $\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{QA}$.)

d) Construire P et R tels que $\overrightarrow{CP} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{BR} = -\vec{j}$.
Montrer que les points R, A, P sont alignés.

31 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $M\left(\frac{3}{2}; -2\right)$. $N(2; 1)$ et $P(-4; -1)$.

a) Écrire une équation de la droite (MN).

b) Construire la droite passant par P et de vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$. Trouver une équation de cette droite.

32 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne le point $A(2,5; -1,3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Construire la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Écrire une équation de cette droite.

33 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(2; -1)$ et $B(-3; 4)$. Écrire une équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$. Écrire une équation de la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{OJ}$.
Donner une équation de la droite (OI).
Donner une équation de la droite (OJ).

34 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$ et $C(0; -2)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$. Construire la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Écrire une équation de cette droite.
Calculer les coordonnées de E tel que $\overrightarrow{BE} = \vec{u}$, puis celles de F tel que $\overrightarrow{CF} = -\vec{u}$.

35 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(-1; -1)$ et $B(-1; 1)$. Écrire une équation de chacune de droites (OA), (OB) et (AB). Faire une figure.

36 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(1; 0,5)$, $B(1; 1)$, $C(1; 1,5)$, $D(1; 2)$, $E(1; -0,5)$, $F(1; -1)$, $G(1; -1,5)$.
Écrire une équation de chacune des droites (OA), (OB), (OC), (OD), (OE), (OF), (OG).
Faire une figure.

37 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(-3; 0)$, $B(0; 2,5)$, $C(3; 0)$ et $D(0; -4)$.

a) Trouver une équation de chacune des droites (AB), (BC), (CD) et (DA).

b) Trouver une équation de la droite (Δ) passant par C et parallèle à (AB).

c) Trouver une équation de la droite (Δ') passant par D et parallèle à (BC).

d) Démontrer que les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point E. Trouver graphiquement les coordonnées du point E.

38 (3). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne le point $A(-4; 5)$.

a) Tracer la droite (D) d'équation : $3x - 2y - 11 = 0$.

b) Par A on mène la droite (D') parallèle à (D). Trouver une équation de (D').

39 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(-5; -1)$, $B(-2; 3)$ et $C(4; 1)$.
Écrire une équation de la droite passant par C et parallèle à (AB).
Écrire une équation de la droite passant par A et parallèle à (BC).
Tracer ces droites.
Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
Écrire une équation de chacune des droites (AC) et (BD).
Trouver les coordonnées du point d'intersection des diagonales de $ABCD$.

40 (3). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne le point $A(3; -2)$; tracer la droite (D_1) d'équation $2x - y + 4 = 0$.

a) Le point A est-il élément de la droite (D_1) ?

b) $B(-3; y)$ et $C(x, 6)$ sont deux points de la droite (D_1). Calculer l'ordonnée y de B et l'abscisse x de C. Marquer les points A, B et C.

c) (D_2) est la droite passant par A et parallèle à (D_1). Trouver une équation de (D_2).

d) B' étant le milieu de $[AC]$, trouver une équation de la médiane (BB') du triangle ABC.

e) Les droites (BB') et (D_2) se coupent en un point E. Quelles sont les coordonnées de E ?

41 (3). Dans un repère (O, I, J) on donne les points :

$$A(-2; 4), \quad B(4; 1), \quad C(1; -5) :$$

Faire la figure et compléter au fur et à mesure.

a) Vérifier que les points A et B appartiennent à la droite (D_1) d'équation $x + 2y - 6 = 0$. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes.

b) Écrire une équation de la droite (D_2) passant par B et C.

c) Écrire une équation de la droite (D_3) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) Écrire une équation de la droite (D_4) passant par C et parallèle à la droite (AB).

e) On donne les droites d'équations respectives $2x - y - 7 = 0$ et $7x + y + 10 = 0$. Trouver un vecteur directeur de chacune d'elles. Ces droites sont-elles parallèles ? sécantes ? Pourquoi ?

f) Déterminer approximativement à l'aide de la figure les coordonnées du point d'intersection de (D_2) et (D_3).

N.B. : Toutes les inéquations des exercices suivants sont dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

42 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient l'inéquation $x > -3$.
Même question pour l'inéquation $x < 2$.
Même question pour l'inéquation $x \geqslant 3$.
Faire une figure pour chaque question.

43 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient l'inéquation $y < 0$.
Même question pour l'inéquation $y \geqslant -2$.
Même question pour le système $\begin{cases} y < 0 \\ y \geqslant -2. \end{cases}$
Faire une figure pour chaque question.

44 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient $x < 3$ et $y \geqslant -2$.
Même question pour $x > 1$ et $y < 0$.
Même question pour $x \leqslant -1$ et $y > -3$.
Même question pour $x \leqslant -4$ et $y \geqslant 1{,}5$.
Faire une figure pour chaque question.

45 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
Même question pour $0 < x \leqslant 0{,}5$.
Même question pour $-2{,}5 \leqslant x < 1$.
Même question pour $-3 < x < -1$.
Faire une figure pour chaque question.

46 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient $4 \leqslant y \leqslant 4{,}5$.
Même question pour $0{,}5 < y \leqslant 2$.
Même question pour $-4 < y < -1$.
Faire une figure pour chaque question.

47 (4). Dans un repère (O, I, J), hachurer en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient $-3 \leqslant x \leqslant -2$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$.

Même question pour $0 < x < 5$ et $-1 < y < 1$.
Même question pour $-2 \leqslant x < -1$ et $-1 < y \leqslant 0$.
Faire une figure pour chaque question.

48 (4). Dans un repère (O, I, J), représenter en bleu l'ensemble des solutions de l'équation $2x + 3y - 5 = 0$, en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 3y - 5 > 0$.

49 (4). Dans un repère (O, I, J), représenter en bleu l'ensemble des solutions de l'équation $-\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$, en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation $-\frac{1}{2}x + y - 1 < 0$.

50 (4). Dans un repère (O, I, J), représenter en rouge l'ensemble des solutions de $4x - 2y - 1 > 0$, en bleu l'ensemble des solutions de $x + y - 4 \leqslant 0$.

51 (4). Dans un repère (O, I, J), représenter en rouge l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x - y - \frac{1}{2} \geqslant 0 \\ x + 2y + 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

52 (4). Même exercice avec le système

$$\begin{cases} 5x - 2y + 1 \leqslant 0 \\ 3x - \frac{6}{5}y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

53 (4). Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ et $B(-3; -5)$. Faire une figure.

a) Trouver une inéquation qui caractérise le demi-plan $]OA, B)$; même question pour le demi-plan $[OA, B)$.

b) Trouver une inéquation qui caractérise le demi-plan $]OB, A)$; même question pour le demi-plan $[OB, A)$.

c) Trouver une inéquation qui caractérise le demi-plan $]AB, O)$; même question pour le demi-plan $[AB, O)$.

d) Trouver un système caractérisant le secteur saillant $[OA, OB]$; même question pour les secteurs saillants $[BO, BA]$ et $[AO, AB]$.

54 (4). Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(-3; 2)$, $B(5; 4)$ et $C(-1; -2)$. Faire une figure. On note :
$\mathscr{P}_1$ le demi-plan $[AB, C)$
$\mathscr{P}_2$ le demi-plan $[AC, B)$
$\mathscr{P}_3$ le demi-plan $[BC, A)$.

Caractériser $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$ par un système de trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

55 (4). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne $A(-3; 4)$ et $B(1{,}5; -2)$.

Soit $C \in (AB)$ et soit 3 l'abscisse de C.

a) Calculer l'ordonnée de C.
b) Caractériser par un système la demi-droite $[BC)$.
c) Même question pour le segment $[AC]$.
d) Même question pour la demi-droite $]BA)$.

56 (4). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représenter :

a) l'ensemble S_1 des solutions du système :

$$\begin{cases} 17x - 5y - 42 = 0 \\ -5 \leqslant y \leqslant 3{,}5 \ ; \end{cases}$$

b) l'ensemble S_2 des solutions du système :

$$\begin{cases} 4x + 5y + 21 = 0 \\ -4 \leqslant x \leqslant 1 \ . \end{cases}$$

c) l'ensemble S_3 des solutions du système :

$$\begin{cases} 9x - 15y + 21 = 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 3{,}5 \ ; \end{cases}$$

d) Quelle est la figure géométrique représentée par $S_1 \cup S_2 \cup S_3$?

57 (4). Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points $A\left(3; \frac{1}{3}\right)$, $B(-2; -5)$ et $C\left(-2; \frac{4}{3}\right)$.

a) Caractériser algébriquement le segment $[AB]$.

b) Caractériser algébriquement le segment $[BC]$.

c) Caractériser algébriquement le segment $[AC]$.

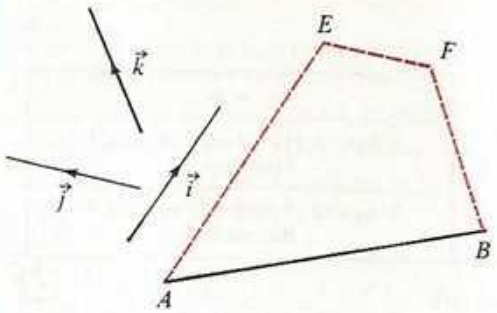
Réfléchir

58 (1). Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont respectivement $(-2; 1)$, $(3; 2)$.

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont-ils même direction ?
b) Calculer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

59 (1). *Deux c'est assez, trois c'est trop* !

Étant donné trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de directions toutes différentes et un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B),



voici une décomposition de $\vec{u}$ en une somme de trois vecteurs dont le premier a même direction que $\vec{i}$, le second a même direction que $\vec{j}$ et le troisième a même direction que $\vec{k}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$$

donc $$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Montrer à l'aide d'une figure que $\vec{u}$ peut être décomposé de plusieurs manières différentes en une somme de trois vecteurs dont le premier a même direction que $\vec{i}$, le second a même direction que $\vec{j}$ et le troisième a même direction que $\vec{k}$. Pour caractériser les vecteurs de $\mathcal{V}$ à l'aide de réels, vaut-il mieux utiliser deux vecteurs ou trois vecteurs ?

60 (1). Étant donné une droite (D), $\vec{u}$ un de ses vecteurs directeurs et A un point de cette droite, on note g la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\vec{u}$.

On place sur cette droite les points P, Q, M, N et B d'abscisses respectives p, q, m, n et b pour cette graduation. On note ensuite :

a) g_1 la graduation d'origine A et de vecteur unitaire $\lambda\vec{u}$ de cette droite, où λ est élément de $\mathbb{R}^*$. Calculer $g_1(P)$; $g_1(Q)$; $g_1(N)$; $g_1(M)$.

b) g_2 la graduation d'origine B et de vecteur unitaire $\vec{u}$ de cette droite.
Calculer $g_2(P)$; $g_2(Q)$; $g_2(N)$; $g_2(M)$.

c) g_3 la graduation d'origine B et de vecteur unitaire $\lambda\vec{u}$ de cette droite où λ est élément de $\mathbb{R}^*$.
Calculer $g_3(P)$; $g_3(Q)$; $g_3(N)$; $g_3(M)$.

Compléter le tableau suivant :

Graduation Origine Vecteur unitaire	g A $\vec{u}$	g_1 A $\lambda\vec{u}$	g_2 B $\vec{u}$	g_3 B $\lambda\vec{u}$
Abscisse de P	p			
Abscisse de Q	q			
Abscisse de M	m			
Abscisse de N	n			
$\overline{PQ}$				
$\overline{MN}$				
$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}}$				

THÈME D'ÉTUDE N° 1

61 (2). Démontrons que : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant deux vecteurs non nuls de directions différentes, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$, il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.
Supposons qu'il existe deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) associés au vecteur $\vec{u}$.
Cela signifie que

$$\vec{u} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} \quad \text{et} \quad \vec{u} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

donc $$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

ou $$x_1\vec{a} - x_2\vec{a} = y_2\vec{b} - y_1\vec{b}$$

$$(x_1 - x_2)\vec{a} = (y_2 - y_1)\vec{b} \qquad (1)$$

— si $x_1 = x_2$, alors $(x_1 - x_2)\vec{a}$ est le vecteur nul,

— si $x_1 \neq x_2$, alors $(x_1 - x_2)\vec{a}$ a même direction que $\vec{a}$

— si $y_1 = y_2$, alors $(y_2 - y_2)\vec{b}$ est le vecteur nul,

— si $y_1 \neq y_2$ alors, $(y_2 - y_1)\vec{b}$ a même direction que $\vec{b}$

d'où le tableau

	$x_1 = x_2$	$x_1 \neq x_2$
$y_1 = y_2$	L'égalité (1) est-elle vérifiée ? Pourquoi ?	L'égalité (1) est-elle vérifiée ? Pourquoi
$y_1 \neq y_2$	L'égalité (1) est-elle vérifiée ? Pourquoi ?	L'égalité (1) est-elle vérifiée ? Pourquoi ?

Dans quel(s) cas l'égalité (1) est-elle vérifiée ? Conclure.

THÈME D'ÉTUDE N° 2

62 (3) • *Ensemble E des points du plan $\mathscr{P}$ dont le couple de coordonnées (x, y) vérifie l'équation* : $ax + by + c = 0$.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) On suppose $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$. Montrer que $E = \varnothing$.

2) On suppose $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$. Montrer que $E = \mathscr{P}$.

3) On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$.

a) Montrer que $E \neq \varnothing$.

b) Soit $A(x_A, y_A)$ un élément de E.
Démontrer que $c = -ax_A - by_A$.

Trouver une équation de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

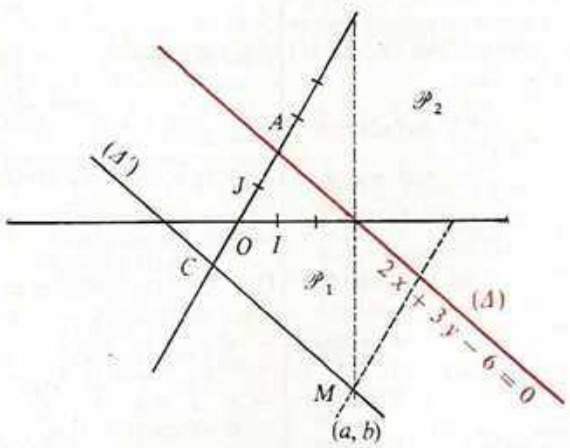
En déduire que $E = (D)$.

THÈME D'ÉTUDE N° 3

63 (4). Pour les esprits curieux :

Régionnement du plan :

Nous avons vu que la droite (D) d'équation $2x + 3y - 6 = 0$ détermine une partition de $\mathscr{P}$ formée des ensembles : $\mathscr{P}_1$ (demi-plan ouvert de bord (D) et contenant 0), (D) et $\mathscr{P}_2$ (demi-plan ouvert de bord (D) et ne contenant pas 0).
Nous avons admis (p. 271) que si $M(a, b) \in \mathscr{P}_1$ alors $2a + 3b - 6 < 0$.



Montrons-le.
Pour cela remarquer que toute parallèle à (Δ) menée par un point de $\mathscr{P}_1$ est incluse dans $\mathscr{P}_1$.
De cette proposition, on déduit que :

Toute parallèle à (Δ) menée par un point de $\mathscr{P}_1$ coupe (OJ) en un point de $\mathscr{P}_1$.

Ensemble des points de (OJ) qui appartiennent à $\mathscr{P}_1$

On démontre que c'est la demi-droite $]AO)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de (OJ) qui ont une ordonnée inférieure à 2.

Démontrons que :

si $M(a, b) \in \mathscr{P}_1$ alors $2a + 3b - 6 < 0$.

Soit $M(a, b)$ un point de $\mathscr{P}_1$. Par M, menons (Δ'), parallèle à (Δ).

Équation de (Δ')

$$2x + 3y - 2a - 3b = 0.$$

C'est une équation de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui passe par $M(a, b)$.

Coordonnées du point d'intersection C de (Δ') avec (OJ)
C'est le couple solution du système

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y - 2a - 3b = 0 \end{cases} \qquad C\left(0; \frac{2a + 3b}{3}\right).$$

Nous savons que C est un point de $]AO)$.
Son ordonnée est donc inférieure à 2

$$\frac{2a + 3b}{3} < 2$$

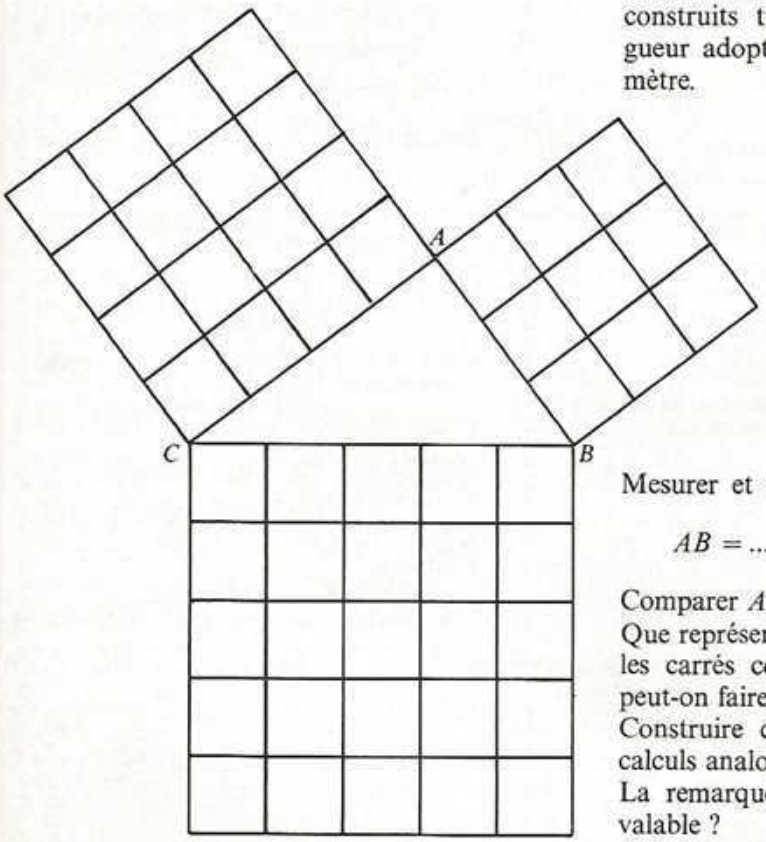
$$2a + 3b < 6$$

$$2a + 3b - 6 < 0.$$

Les coordonnées de M vérifient donc l'inéquation $2x + 3y - 6 < 0$.

5 Le triangle rectangle

Leçon 1 : PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU TRIANGLE RECTANGLE
Leçon 2 : APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU TRIANGLE RECTANGLE



Voici un triangle ABC ; sur ses côtés sont construits trois carrés. L'unité de longueur adoptée sur la figure est le centimètre.

Mesurer et compléter :

$$AB = \ldots ; \quad AC = \ldots ; \quad BC = \ldots$$

Comparer $AB^2 + AC^2$ et BC^2.
Que représentent AB^2, AC^2 et BC^2 pour les carrés construits ? Quelle remarque peut-on faire ?
Construire d'autres triangles. Faire des calculs analogues.
La remarque précédente est-elle encore valable ?

1 Propriétés métriques du triangle rectangle

Dans toute la suite du cours, le plan mathématique utilisé sera le plan métrique muni de l'axiome suivant adopté en classe de Quatrième :

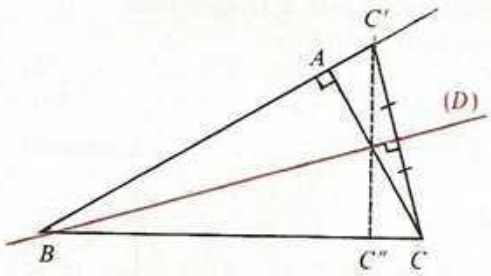
« Pour tout point A et tout point B d'images respectives A' et B' par une symétrie orthogonale, on a : $d(A', B') = d(A, B)$. »
Un tel plan est parfois appelé : *plan euclidien.* Dans un plan euclidien, les droites sont graduées de manière que les distances soient conservées par symétrie orthogonale.

En conséquence, on adoptera dans les dessins, la même unité de longueur sur toutes les droites physiques.

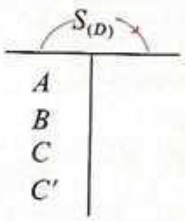
1) Une première propriété métrique du triangle rectangle

a) On donne un triangle ABC rectangle en A.
Marquons sur la demi-droite $[BA)$ le point C' tel que

$$d(B, C') = d(B, C). \qquad ①$$



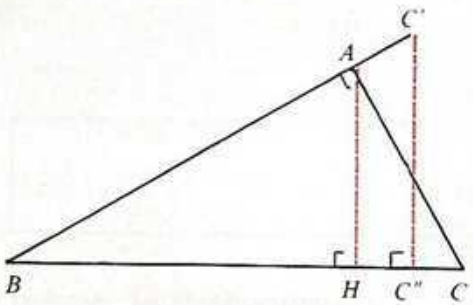
On appelle (D) la médiatrice de $[CC']$.
Soit $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D).
Désignons par C'' l'image de A par $S_{(D)}$.
Compléter le tableau :



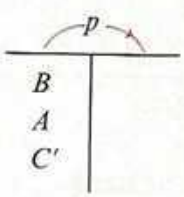
En déduire que :

$$d(B, C'') = d(B, A) \qquad ②$$
$$C'' \in [BC] \qquad ③$$
$$(C''C') \perp (C''B). \qquad ④$$

Soit p la projection orthogonale sur (BC) et H l'image de A par p.
Montrer que $H \in [BC]$; de ③ et ④ on déduit que C'' est l'image de C' par p.



Compléter le tableau :



Par application de l'axiome de Thalès, on obtient :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC''}}.$$

En déduire que

$$d(B, A) \times d(B, C'') = d(B, H) \times d(B, C').$$

En utilisant ① et ② on obtient $[d(B, A)]^2 = d(B, H) \times d(B, C)$.
On écrira plus simplement $d^2(B, A) = d(B, H) \times d(B, C)$ et on énonce :

Théorème 1

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,

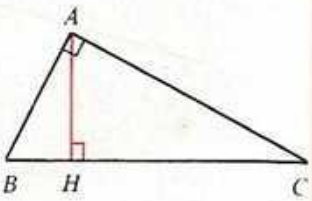
si ABC est rectangle en A alors $d^2(B, A) = d(B, H) \times d(B, C)$.

Exercice Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $d(B, A) = 4$; $d(B, C) = 10$; H est le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse. Calculer $d(B, H)$. Faire une figure.

b) **Remarque.**

Soit un triangle ABC rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne :

$$d(B, H) = 3 \quad \text{et} \quad d(B, C) = 12.$$



Calculons $d(B, A)$,

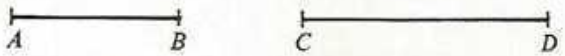
$$d^2(B, A) = 3 \times 12 = 36$$

d'où $$d(B, A) = \sqrt{36}$$

$$d(B, A) = 6.$$

On dit que 6 est la *moyenne géométrique* de 3 et 12.
(Quelle est la moyenne arithmétique de 3 et 12 ?)

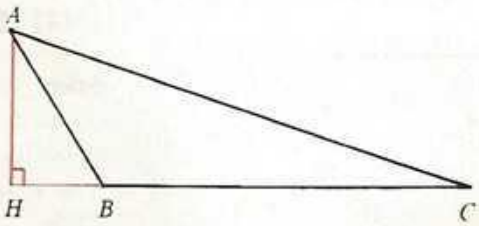
Problème de construction



Construire un segment dont la mesure est moyenne géométrique des mesures de $[AB]$ et $[CD]$.

c) **Comment pourrait-on énoncer la réciproque du théorème 1 ?**

Exercice Sur la figure suivante :

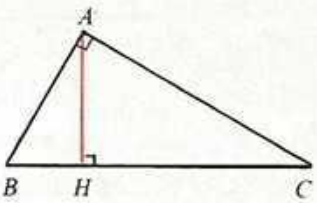


$d(A, B) = 3$
$d(B, C) = 6$
$d(H, B) = 1{,}5$
et $H \notin [BC]$.

Vérifier que $d^2(B, A) = d(B, H) \times d(B, C)$.
Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Rappel : Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le pied H de la hauteur issue de A appartient à $[BC]$.
La réciproque du théorème 1 est-elle vraie ?

d) Soit un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$. D'après le théorème 1, on a :



$$d^2(B, A) = d(B, H) \times d(B, C).$$

On sait que $H \in [BC]$.
On en déduit que $\overline{BH} \times \overline{BC} > 0$ et donc que

$$d(B, H) \times d(B, C) = \overline{BH} \times \overline{BC}.$$

On a aussi $d^2(B, A) = \overline{BA}^2$. On énonce :

Théorème 2

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,
si ABC est rectangle en A alors $\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

Exercice

Soit un triangle IRK rectangle en R et Z le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.
Compléter en utilisant le théorème 2 :

$$\overline{IR}^2 = \ldots \times \ldots$$
$$\overline{KR}^2 = \ldots \times \ldots$$

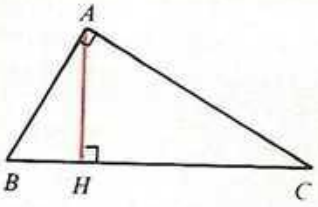
Quel est l'énoncé de la réciproque du théorème 2 ?
On peut démontrer que cette réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'elle est un théorème (voir ex. n° 44, p. 300).
On regroupe le théorème 2 et son théorème réciproque en un seul théorème qui s'énonce :

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,
ABC est rectangle en A équivaut à $\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

2) Théorème de Pythagore (*)

Soit un triangle rectangle ABC d'hypoténuse $[BC]$; soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

(*) *Pythagore de Samos* (vers − 572 ; − 507 ?) : mathématicien grec. Il fonda une École qui faisait reposer la géométrie sur des définitions précises et faisait appel à des preuves rigoureuses. Pythagore prouva que le rapport de la mesure d'un côté d'un carré à celle d'une diagonale n'est pas un nombre rationnel. On lui attribue le célèbre théorème qui porte son nom.



D'après le théorème 2, on a :

$$\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$$

et

$$\overline{CA}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$$

d'où

$$\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} + \overline{HC} \times \overline{BC}.$$

On en déduit : $d^2(A, B) + d^2(A, C) = d^2(B, C)$.

On énonce

Théorème de Pythagore

Étant donné un triangle *ABC*,

si *ABC* est rectangle en *A* alors $d^2(A, B) + d^2(A, C) = d^2(B, C)$.

Exercices

① L'unité étant le centimètre, construire un triangle ABC tel que $(AB) \perp (AC)$, $d(A, B) = 5$ et $d(A, C) = 12$. Calculer $d(B, C)$. Vérifier sur la figure.

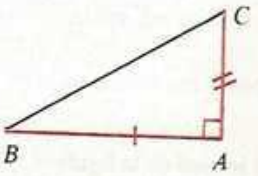
② Dans le triangle rectangle IKR d'hypoténuse $[RI]$, on a : $d(I, K) = 2$ et $d(I, R) = 3$. Calculer $d(K, R)$.

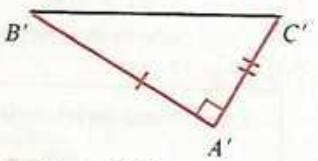
③ Un rectangle a 12 m de largeur sur 16 m de longueur. Combien mesure chacune de ses diagonales ?

④ Soit un triangle ABC rectangle en A et un triangle $A'B'C'$ rectangle en A'.

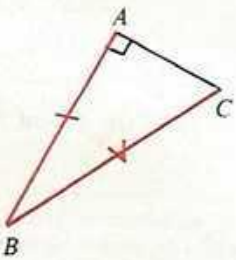
Démontrer que :

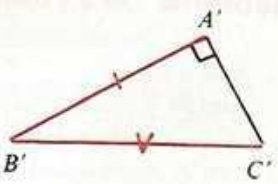
si $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$ alors $BC = B'C'$





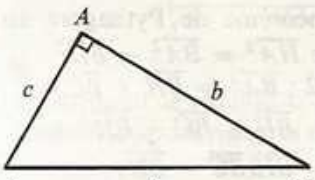
si $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ alors $AC = A'C'$





Énoncer les propriétés démontrées.

Remarque 1. ABC est un triangle rectangle en A.



On note :

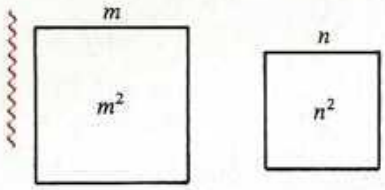
$$d(B, C) = a$$
$$d(A, B) = c$$
$$d(A, C) = b.$$

D'après le théorème de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$. Voir l'illustration en début de chapitre.

On remarque que a^2 est la mesure de l'aire d'un carré dont le côté mesure a ; que représente b^2 ? que représente c^2 ?
Le théorème de Pythagore s'énonce parfois ainsi :

Dans un triangle rectangle, la mesure de l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Exercice



a) Construire un carré dont l'aire mesure $m^2 + n^2$.

b) Construire un carré dont l'aire mesure $m^2 - n^2$.

Remarque 2. Quel est l'énoncé de la réciproque du théorème de Pythagore ?
On peut démontrer que cette réciproque est vraie (voir ex. n° 46, p. 300).
On peut donc regrouper le théorème de Pythagore et son théorème réciproque en un seul théorème :

Étant donné un triangle ABC,

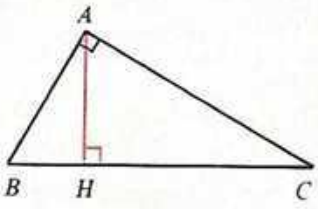
ABC est rectangle en A (équivaut à) $d^2(A, B) + d^2(A, C) = d^2(B, C)$.

Exercice

Les nombres a, b, c désignent les mesures de trois segments.
Existe-t-il un triangle rectangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ?

1. $a = 3$; $b = 5$; $c = 4$;
2. $a = 5$; $b = 3$; $c = 2$;
3. $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{2}$;
4. $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{2}$; $c = 2$;
5. $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$;
6. $a = 8$; $b = 17$; $c = 15$.

3) Une autre propriété métrique du triangle rectangle

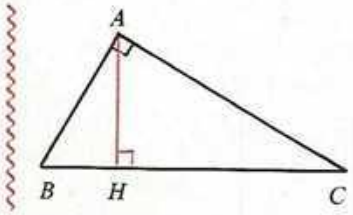


En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABH, démontrer que $\overline{HA}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{BH}^2$.
D'après le théorème 2 : $\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
D'où $\overline{HA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} - \overline{BH}^2$
$\overline{HA}^2 = \overline{BH}(\overline{BC} - \overline{BH})$.
Démontrer que : $\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.
On énonce :

Théorème

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,
si ABC est rectangle en A alors $\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Exercice



Soit un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$\overline{AH} = 3 ; \quad \overline{HC} = 4 .$$

Calculer $d(H, B)$.

Remarque 1. Quel est l'énoncé de la réciproque du théorème précédent ?
On peut démontrer que cette réciproque est vraie (voir ex. n° 45, p. 300).
On regroupe le théorème précédent et sa réciproque en un seul théorème qui s'énonce :

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,
ABC est rectangle en A équivaut à $\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Remarque 2. De $\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$ on peut déduire $d^2(H, A) = d(H, B) \times d(H, C)$.
Soit un triangle ABC rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne :

$$d(H, B) = 2 ; \quad d(H, C) = 8 .$$

Calculons $d(H, A)$

$$d^2(H, A) = 2 \times 8 = 16$$

d'où

$$d(H, A) = \sqrt{2 \times 8}$$
$$d(H, A) = 4 .$$

Quelle est la moyenne géométrique des nombres 2 et 8 ?

Problème de construction



En utilisant le résultat ci-dessus, construire un segment dont la mesure est moyenne géométrique des mesures de segments $[AB]$ et $[CD]$.

Remarque 3. Le théorème ci-dessus et la remarque 2 précédente permettent d'énoncer le théorème suivant :

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$

si ABC est rectangle en A alors $d^2(A, H) = d(H, B) \times d(H, C)$.

Comment pourrait-on énoncer la réciproque du théorème précédent ?

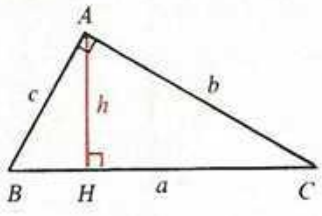
Attention : Cette réciproque est fausse.

Le prouver en construisant un triangle ABC tel que :

— H soit le projeté orthogonal de A sur (BC),
— $d^2(H, A) = d(H, B) \times d(H, C)$,
— ABC ne soit pas rectangle en A.

4) Une propriété métrique connue depuis la Sixième

Soit un triangle ABC rectangle en A, H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.



Par abus de langage, $[AH]$ sera aussi appelé *hauteur* du triangle ABC.
Soit h sa mesure.
On a : $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
$\overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$.

Calculer le produit $\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2$.
Montrer que $\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 = \overline{HA}^2 \times \overline{BC}^2$. En déduire que $d(A, B) \times d(A, C) = d(A, H) \times d(B, C)$.

D'où le théorème :

Théorème

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur relative à $[BC]$,

si ABC est rectangle en A alors $d(A, B) \times d(A, C) = d(B, C) \times d(A, H)$.

Exercice On donne un triangle dont les côtés mesurent 9, 12 et 15 (en cm). Vérifier que ce triangle est rectangle. Calculer la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse.

Remarque. Avec les notations de la figure précédente, on a :

$$bc = ah\,.$$

On en déduit $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ah$.

Que représente le nombre $\frac{1}{2}bc$ pour le triangle rectangle ABC ?

Dans cette leçon, quatre propriétés importantes des triangles rectangles ont été démontrées.

Elles font intervenir des **mesures** de segments remarquables de ces triangles. C'est pourquoi elles ont été appelées **propriétés métriques.**

2 Applications des propriétés métriques du triangle rectangle

1) Comment reconnaître un triangle rectangle

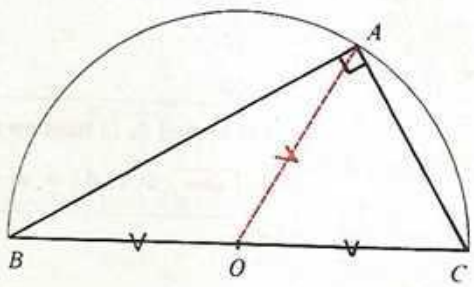
Nous avons rencontré en classe de Quatrième deux moyens d'identifier un triangle rectangle.

a) **La définition**

Un triangle dans lequel deux côtés sont perpendiculaires est appelé triangle rectangle. Si les côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC sont perpendiculaires, on dit que ABC est rectangle en A.

b) **Un théorème.**

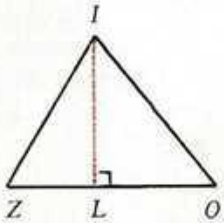
Tout triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ est rectangle en A.



c) Parmi les théorèmes vus dans la leçon précédente, retrouver ceux qui permettent de montrer qu'un triangle est rectangle.

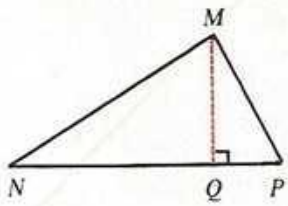
Exercices

1) On donne les triangles suivants :



$\overline{ZL} = 12$; $\overline{ZO} = 27$;
$\overline{IZ} = 22$.

Le triangle IZO est-il rectangle ?



$\overline{PQ} = -9$; $\overline{NP} = 36$;
$\overline{MP} = -18$.

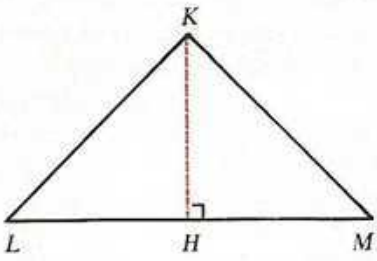
Le triangle MNP est-il rectangle ?

2) Nous avons déjà rencontré plusieurs triangles rectangles dont les côtés sont mesurés par des naturels :

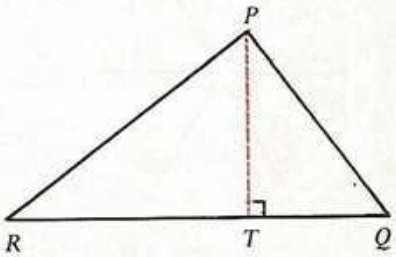
3; 4; 5;
5; 12; 13;
8; 15; 17.

Comment en trouver d'autres ?

3) On donne les triangles suivants :



$\overline{HK} = -24$; $\overline{HL} = 24$;
$\overline{MH} = 24$;

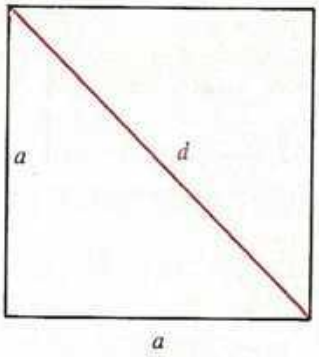


$\overline{TP} = -24$; $\overline{RT} = -32$;
$\overline{QT} = 18$.

Les triangles KLM et PQR sont-ils rectangles ?

2) Mesure de segments remarquables

a) **Diagonale d'un carré.**

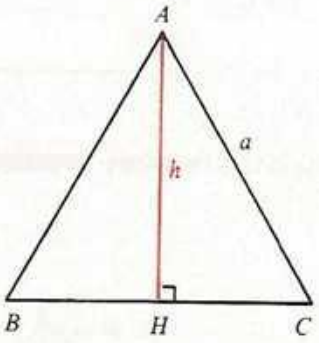


Soit a la mesure du côté d'un carré ; soit d la mesure de chacune des diagonales.
D'après le théorème de Pythagore :

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2\,a^2$$
$$d = \sqrt{2\,a^2}$$

$$\boxed{d = a\sqrt{2}.}$$

b) **Hauteur d'un triangle équilatéral.**



Soit a la mesure du côté d'un triangle équilatéral ABC, soit $[AH]$ une hauteur.

La mesure de $[BH]$ est $\frac{a}{2}$, pourquoi ?

Calculons la mesure h de $[AH]$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABH :

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

d'où

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\,a^2}{4}$$

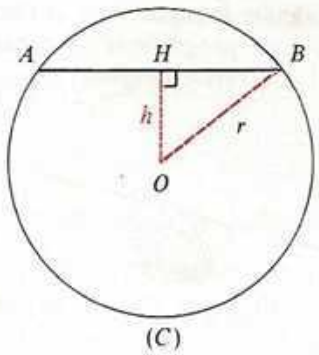
$$h = \sqrt{\frac{3\,a^2}{4}}$$

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$$

Quelle est la mesure des autres hauteurs du triangle équilatéral ABC ?

c) **Corde d'un cercle.**

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon r et une corde $[AB]$ de ce cercle.
Soit H le pied de la perpendiculaire à (AB) contenant O.
Montrer que H est le milieu de $[AB]$.
Soit h la distance du centre du cercle à (AB) ; $h < r$, pourquoi ?



Calculons la mesure du segment $[HB]$, puis celle de la corde $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OHB :

$$d^2(H, B) + h^2 = r^2 .$$

D'où : $d(H, B) = \sqrt{r^2 - h^2}$.

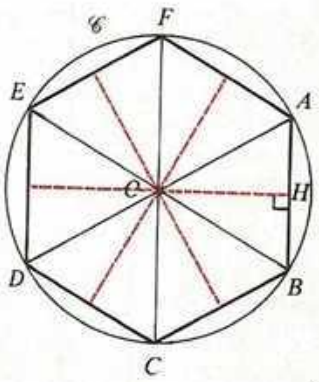
Donc : $\boxed{d(A, B) = 2\sqrt{r^2 - h^2}.}$

Examiner le cas particulier où h est nul.

Exercice Soit a la mesure d'une corde $[AB]$ d'un cercle de centre O et de rayon r. Quelle est la distance du centre O à cette corde ?

d) **Polygones réguliers.**

Un polygone régulier est un polygone :
— qui a tous ses côtés de même mesure
et
— qui est inscriptible dans un cercle.
Le centre du cercle est appelé aussi centre du polygone.



Exemple

Sur la figure ci-contre, le polygone $ABCDEF$ a ses six côtés de même mesure, c'est un hexagone régulier.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OA ; $ABCDEF$ est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. En joignant les sommets au centre O, on détermine six triangles isocèles de sommet O dont les bases ont même mesure. Soit AOB l'un de ces triangles et H le pied de la hauteur issue de O. Montrer que dans les six triangles, les hauteurs issues de O ont même mesure. La mesure de $[OH]$ est appelée *apothème* (*) de l'hexagone.

(*) Le mot « apothème » est d'origine grecque, le préfixe « apo » signifie : loin de ou à partir de. On dit *un* apothème.

Exercices

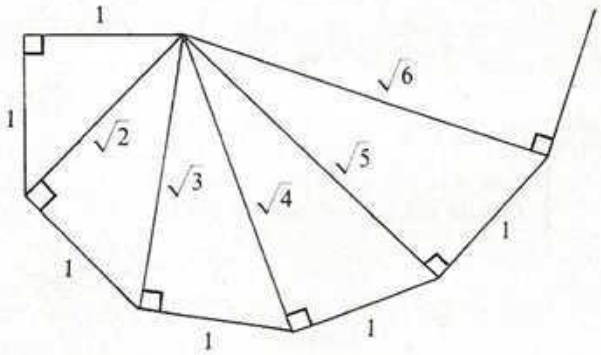
1. Comment s'appelle un polygone régulier de quatre côtés ?
Soit O un point du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. Construire un carré $ABCD$ tel que $\{A; B; C, D\} \subset \mathscr{C}$.
Calculer la mesure des côtés et l'apothème de $ABCD$ en fonction de R.

2. Comment s'appelle un polygone régulier de trois côtés ?
Construire un triangle équilatéral ABC tel que $AB = a$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC. Calculer le rayon de $\mathscr{C}$ et l'apothème de ABC en fonction de a. En déduire un programme de construction d'un triangle équilatéral connaissant son cercle circonscrit.

e) **Problème.**

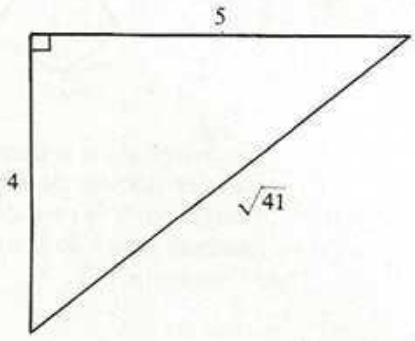
Construire un segment de mesure $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

— Un premier procédé.



Observer la figure précédente ; en déduire un programme de construction d'un segment de mesure $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$, ... etc.

— Un second procédé.



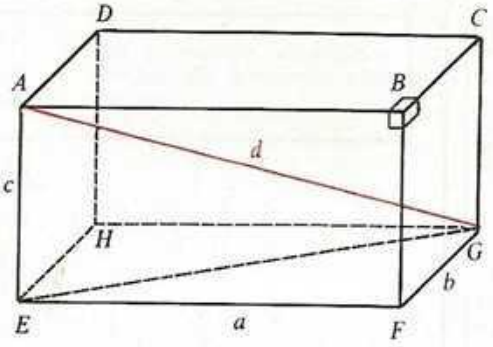
Observer la figure ci-contre.

Chercher un programme de construction simple d'un segment de mesure : $\sqrt{45}$; $\sqrt{46}$.

3) Applications des propriétés métriques du triangle rectangle à l'espace physique

a) **Pavé et cube.**

L'espace physique qui nous entoure a été étudié en Cinquième.
La figure ci-dessous est la représentation en perspective d'un pavé.



On a : $d(E, F) = a$
$d(F, G) = b$; $d(A, E) = c$.

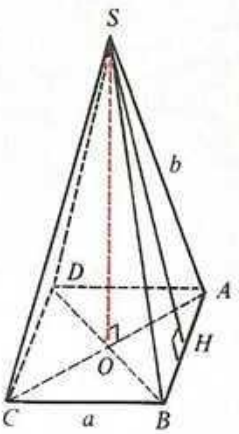
Le triangle EFG est rectangle en F, le triangle AEG est rectangle en E.
$[EG]$ est une diagonale du rectangle $EFGH$; $[AG]$ est une diagonale du pavé $ABCDHGFE$.
Appliquer le théorème de Pythagore aux triangles EFG et AEG et montrer que la diagonale $[AG]$ a pour mesure d telle que :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Examiner le cas particulier d'un cube dont l'arête mesure a.

b) **Pyramides régulières.**

Nous avons vu en Cinquième qu'une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont le sommet se projette orthogonalement au centre du polygone régulier.
La figure ci-contre représente une pyramide régulière à base carrée.
Toutes les arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$ ont la même mesure.
Soit a la mesure de $[AB]$ et b la mesure de $[SA]$.
Dans le triangle SAB, soit H le pied de la hauteur issue de S. Démontrer que dans les quatre faces latérales : SAB, SBC, SCD, SDA les hauteurs issues de S ont même mesure.
Cette mesure est appelée apothème de la pyramide (ne pas confondre avec l'apothème d'un polygone régulier).
Calculer l'apothème en fonction de a et b.



Le triangle SOA est rectangle en O ; $[SO]$ est appelé la hauteur de la pyramide.
Calculer la mesure h de la hauteur en fonction de a et b.

Exercices

Construire et Calculer

1 (1). Construire un triangle ABC rectangle en A dans les cas suivants :

a) $d(A, B) = 3$ $d(A, C) = 5$;

b) $d(A, B) = 2{,}5$ $d(B, C) = 6$;

c) $d(A, C) = 4{,}2$ $d(B, C) = 8{,}5$.

2 (1). Étant donné un triangle MNP rectangle en N, et H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse, sachant que $d(H, M) = 2$ et $d(M, P) = 8$

a) construire le triangle MNP,

b) calculer $d(M, N)$ et $d(N, P)$.

3 (1). Soit un triangle MNP rectangle en N, et H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse. Sachant que

$$d(M, N) = 5 \quad \text{et} \quad d(M, P) = 10,$$

a) construire le triangle MNP,

b) calculer $d(M, H)$ et $d(N, P)$.

4 (1). Soit un triangle MNP rectangle en N, et H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse. Sachant que $d(N, P) = 6$ et $d(H, P) = 4$,

a) construire le triangle NHP, puis le triangle MNP,

b) calculer $d(M, P)$ et $d(N, M)$.

5 (1). Construire un triangle ABC rectangle en A dans les cas suivants (H désigne le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse) :

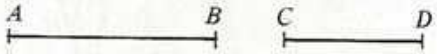
a) $d(A, B) = 5$ $d(B, H) = 3$;

b) $d(H, B) = 4$ $d(H, C) = 3$;

c) $d(H, B) = 1{,}5$ $d(B, C) = 5$.

6 (1). Construire un segment dont la mesure est moyenne géométrique des mesures de $[AB]$ et $[CD]$ dans les cas suivants :

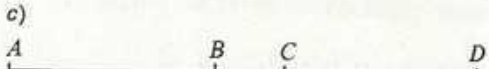
a)



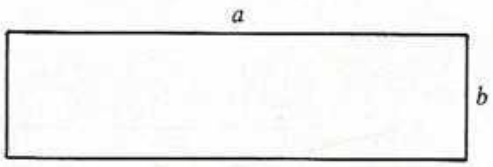
b)



c)

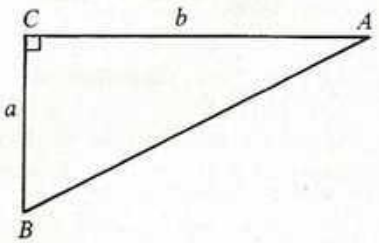


7 (1). Voici un rectangle : les mesures de ses côtés sont les réels a et b.



Construire un carré qui a même aire que ce rectangle.

8 (1). Voici un triangle rectangle ABC; les mesures de ses côtés orthogonaux sont les réels a et b.



Construire un carré qui a même aire que ce triangle.

9 (1). Dans un triangle ABC, H est le pied de la hauteur relative à $[BC]$. Dans les différents cas suivants, préciser la nature du triangle ABC et le construire.

a) $\overline{BA} = -9$, $\overline{BH} = 3$ et $\overline{BC} = 27$;

b) $\overline{BA} = 8$, $\overline{BH} = 6{,}5$ et $\overline{BC} = 10$;

c) $\overline{BA} = -6$, $\overline{BH} = -4$ et $\overline{BC} = 9$;

d) $\overline{BA} = -6$, $\overline{BH} = -4$ et $\overline{BC} = -9$.

10 (1). Calculer la mesure de l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en A sachant que :

a) $d(A, B) = 1$ et $d(A, C) = 1$;

b) $d(A, B) = 1$ et $d(A, C) = \sqrt{2}$;

c) $d(A, B) = 1$ et $d(A, C) = \sqrt{3}$;

d) $d(A, B) = \sqrt{3}$ et $d(A, C) = \sqrt{2}$;

e) $d(A, B) = 2$ et $d(A, C) = \sqrt{2}$.

Construire ABC dans chacun des cas.

11 (1). Calculer la mesure de l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en A sachant que :

a) $d(A, B) = \frac{3}{5}$ et $d(A, C) = \frac{4}{5}$;

b) $d(A, B) = \frac{8}{7}$ et $d(A, C) = \frac{6}{7}$;

c) $d(A, B) = 1{,}2$ et $d(A, C) = 0{,}5$.

12 (1). ABC est un triangle rectangle en A. Calculer la mesure du troisième côté du triangle, sachant que :

a) $d(A, B) = 1$ et $d(B, C) = \sqrt{5}$;

b) $d(A, C) = 2$ et $d(B, C) = \sqrt{7}$;

c) $d(A, B) = 0{,}3$ et $d(B, C) = \frac{1}{2}$;

d) $d(A, C) = \frac{3}{2}$ et $d(B, C) = \frac{5}{2}$;

e) $d(A, B) = 4$ et $d(A, C) = 7$;

f) $d(A, B) = 1 + \sqrt{2}$ et $d(B, C) = 5\sqrt{2}$;

g) $d(A, B) = 5\sqrt{2}$ et $d(A, C) = 3\sqrt{2}$;

h) $d(A, B) = 3 + \sqrt{2}$ et $d(A, C) = 3 - \sqrt{2}$.

13 (1). Examiner dans chacun des cas suivants s'il existe un triangle ABC vérifiant les conditions données; si ce triangle existe, indiquer sa nature.

a) $d(A, B) = 3$, $d(B, C) = 8$ et $d(A, C) = 4$;

b) $d(A, B) = 13\sqrt{5}$, $d(B, C) = 5\sqrt{5}$ et $d(A, C) = 12\sqrt{5}$;

c) $d(A, B) = 0{,}5$, $d(B, C) = 0{,}3$ et $d(A, C) = 0{,}4$;

d) $d(A, B) = \sqrt{5}$, $d(B, C) = 2$ et $d(A, C) = 1$;

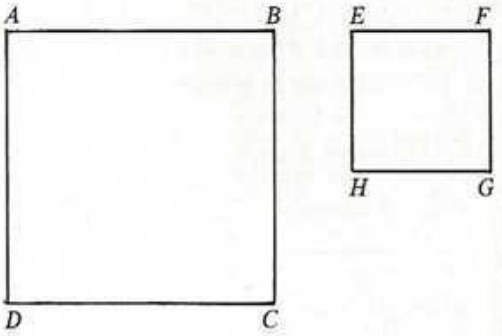
e) $d(A, B) = \sqrt{2} + 1$, $d(A, C) = \sqrt{2} - 1$ et $d(B, C) = 2$;

f) $d(A, B) = 2\sqrt{2}$, $d(A, C) = \sqrt{3} + 1$ et $d(B, C) = \sqrt{3} - 1$;

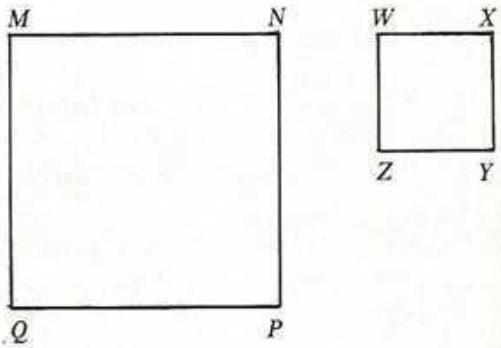
g) $d(A, B) = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $d(B, C) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $d(A, C) = \sqrt{14}$;

h) $d(A, B) = \sqrt{2} + 3$, $d(A, C) = 3 - \sqrt{2}$ et $d(B, C) = \sqrt{10}$.

14 (1). Construire un carré dont la mesure de l'aire est égale à la somme des mesures des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.



15 (1). Construire un carré dont la mesure de l'aire est égale à la différence des mesures des aires des carrés $MNPQ$ et $WXYZ$.



16 (1). On donne un triangle ABC rectangle en A, de hauteur $[AH]$.
Calculer la mesure de la hauteur de ce triangle dans chacun des cas suivants :

a) $\overline{HB} = -8$ et $\overline{HC} = 6$;

b) $\overline{BH} = 4$ et $\overline{HC} = 16$;

c) $\overline{BC} = 7{,}5$ et $\overline{BH} = 2{,}5$;

d) $\overline{AB} = 5$ et $\overline{BH} = 3$;

e) $\overline{AC} = 8$ et $\overline{BC} = 10$;

f) $\overline{AB} = 5$ et $\overline{BC} = 5\sqrt{5}$;

g) $\overline{BH} = \sqrt{3} - 1$ et $\overline{HC} = \sqrt{3} + 1$;

h) $\overline{BH} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ et $\overline{HC} = \sqrt{2} - 1$;

i) $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ et $\overline{HB} = -4$.

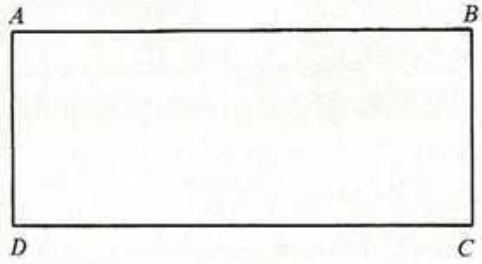
17 (1). On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 et $[BD]$ un diamètre. Soit M le milieu de $[OD]$.
Tracer la droite (Δ) perpendiculaire à (BD) en M. (Δ) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et E.

a) Calculer $d(A, M)$.

b) Calculer $d(A, B)$ et $d(A, E)$.

c) En déduire que le triangle BAE est équilatéral.

18 (1). Donner deux méthodes de construction d'un carré ayant même aire que le rectangle $ABCD$.



19 (1). Étant donné un triangle ABC rectangle en A, déterminer la mesure de la hauteur issue de A sachant que :

1) $d(A, B) = 0{,}6$ $\quad d(A, C) = 0{,}8$;

2) $d(B, C) = \sqrt{5}$ $\quad d(A, B) = 2$;

3) $d(A, B) = \frac{8}{5}$ $\quad d(A, C) = \frac{6}{5}$;

4) $d(A, B) = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ $\quad d(A, C) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$;

5) $d(A, C) = 2\sqrt{3}$ $\quad d(B, C) = 2\sqrt{6}$.

20 (2). On donne un carré $ABCD$. Sachant que $d(A, B) = 3$, calculer $d(B, D)$.

21 (2). On donne un segment $[BC]$ tel que $d(B, C) = 8$.
Soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$; H le milieu de $[BC]$ et A un point de (Δ) tel que

$$d(A, B) = 2\, d(B, H)\,.$$

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Calculer $d(A, H)$.

22 (2). On donne un triangle équilatéral ABC. Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Sachant que $d(A, H) = 8$, calculer $d(A, B)$.

23 (2). Construire un segment $[BC]$ dont la mesure est $\sqrt{2}$ (unité le dm). Soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ et I le point d'intersection de (Δ) avec (BC).
On considère le point A de (Δ) tel que $d(B, C) = 2\, d(A, I)$.

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

b) On désigne par A' et C' les images respectives de A et C par la symétrie de centre B. Calculer $d(A', C')$.

24 (2). On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2. Sur le support d'un diamètre $[BD]$ on considère un point A tel que

$$d(O, A) = 3\,.$$

Par A on mène une droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ en T.

a) Calculer AT.

b) Vérifier que $AT^2 = AB \times AD$.

25 (2). Soit un triangle équilatéral ABC de hauteur (AH). Calculer la mesure du côté $[AB]$ dans les cas suivants :

a) $d(A, H) = \sqrt{3}$;

b) $d(A, H) = 5$;

c) $d(A, H) = \sqrt{2}$;

d) $d(A, H) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

26 (2). Sur un cercle de centre O et de rayon 2, on considère deux points A et B tels que $d(A, B) = \sqrt{2}$. Calculer la distance du point O à la corde $[AB]$.

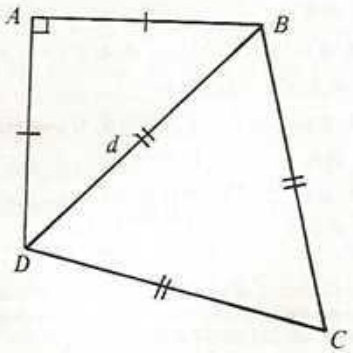
27 (2). On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5, et un diamètre $[MN]$ de ce cercle. Soit A un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $d(A, M) = 5$.

a) Quelle est la nature du triangle AMO ?

b) Calculer $d(A, N)$.

28 (2). On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et un point A du plan tel que $d(O, A) = 3r$.
Par A on construit une droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ en T.
Calculer $d(A, T)$ en fonction de r.

29 (2). Sur une carte, un terrain a la forme ci-dessous. d est la mesure du segment $[BD]$. Calculer la mesure de l'aire du quadrilatère $ABCD$, en fonction de d.



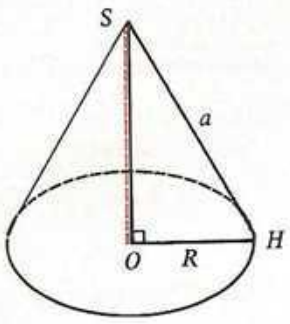
Application numérique : $d = 6$ (en cm).
Échelle de la carte $\frac{1}{20\,000}$.
Calculer la superficie du terrain.

30 (2). Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $\{A, B, C\} \subset \mathscr{C}$. Calculer l'apothème et la mesure des côtés de ABC en fonction de r.

31 (2). Soit $SABC$ une pyramide régulière à base triangulaire ; S est le sommet, les arêtes latérales et les côtés de la base ont pour mesure commune a. Calculer l'apothème et la mesure de la hauteur de cette pyramide.

32 (2). Dans une pyramide régulière à base hexagonale
— les arêtes latérales ont pour mesure commune b,
— le rayon du cercle circonscrit à la base est R.
Calculer la mesure de la hauteur de cette pyramide.

33 (2). La figure ci-dessous représente un cône de révolution de rayon R et d'apothème a. Calculer la mesure de la hauteur $[SO]$ en fonction de R et a.



34 (2). Donner un programme de construction (unité : 1 cm) :
a) d'un segment de mesure $\sqrt{10}$,
b) d'un segment de mesure $\sqrt{20}$,
c) d'un segment de mesure $\sqrt{30}$,
d) d'un segment de mesure $\sqrt{40}$.

Démontrer

35. Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[BC]$, $BC = 6$. On considère le point A de la demi-droite $[OB)$ tel que $d(A, O) = 6$. Par A, on mène une droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ en T.
Calculer $d(B, T)$, $d(C, T)$, $d(A, T)$.
Quelle est la nature du triangle ATC ?
On désigne par T' l'image de T par la symétrie orthogonale $S_{(AC)}$.
Montrer que T' est un point du cercle $\mathscr{C}$ et que (AT') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en T'.
Calculer $d(T, T')$ et $d(A, T')$.
En déduire la nature du triangle ATT'.

36. Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Par H on mène les perpendiculaires à (AB) et (AC). Ces perpendiculaires coupent respectivement (AB) et (AC) en L et L'.
a) Quelle est la nature du quadrilatère $ALHL'$?
b) K et K' sont les projetés orthogonaux respectifs de L et L' sur (BC). Démontrer que H est le milieu de $[KK']$.
c) Sachant que $d(A, C) = 8$ et $d(B, C) = 10$, calculer :
$d(A, B)$, $d(A, H)$, $d(B, H)$, $d(H, C)$, $d(H, L)$, $d(H, L')$ et $d(K, K')$.

37. On considère un triangle ABC rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
a) Démontrer que $AH^2 = \frac{AB^2 \times AC^2}{BC^2}$.
b) En déduire que $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

38. Soit un triangle ABC isocèle en A tel que $d(A, B) = 10$ et $d(B, C) = 12$; $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont les trois hauteurs de ce triangle.
a) Calculer $d(A, A')$.
b) Démontrer que $d(B, B') = d(C, C')$.
c) On considère le cercle de diamètre $[AA']$ qui recoupe (AB) en M et (AC) en H. Calculer $d(B, M)$ et $d(A', H)$. Démontrer que
$$d(C, C') = 2 \times d(A', H).$$

39. ABC est un triangle équilatéral. On appelle a la mesure des côtés. Le cercle de diamètre $[BC]$ recoupe la droite (AB) en C', et la droite (AC) en B'. (BB') et (CC') se coupent en G.
Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ABC ; calculer AG en fonction de a.

40. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4{,}5$ et $AC = 6$. H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
a) Calculer BC ; BH ; AH ; HC.
b) E, K et F sont les images respectives des points B, H et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$. Quelle est la nature du quadrilatère $BCFE$?

c) Que représente la droite (EH) pour le triangle AEC ?

d) Les droites (BC) et (AF) se coupent en G. Calculer FG.

41. $ABCD$ est un carré. On appelle a la mesure des côtés. Placer le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Les droites (BE) et (AD) se coupent en F.
Calculer BF en fonction de a.

42. $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r. Sur la tangente en A au cercle, placer un point E tel que $AE = 2r$. La droite (EB) recoupe le cercle en H.

a) Démontrer que les droites (HO) et (AB) sont perpendiculaires.

b) Soit K le point du cercle diamétralement opposé à H. Quelle est la nature du quadrilatère $AHBK$?

c) Calculer EK.

43. $[AB]$ est un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon r. E est un point du cercle tel que $d(A, E) = r$.

a) Quelle est la nature du triangle AOE ?

b) La tangente en A au cercle coupe (OE) en F. Démontrer que : $d(A, F) = r\sqrt{3}$.

c) La droite (FB) recoupe le cercle en G. Calculer $d(B, F)$ puis $d(B, G)$ en fonction de r.

d) H est le symétrique de E par rapport à (AB). Quelle est la nature du quadrilatère $AHOE$? Démontrer que : $d(F, H) = d(F, B)$.

Des réciproques à démontrer (n° 44 et n° 45)

44. On donne trois points A, B, C non alignés ; on appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on suppose que l'on a :

$$\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}.$$

a) Montrer que (BA) n'est pas orthogonale à (BC). En déduire que la perpendiculaire à (BA) en A est sécante à (BC) ; soit C' le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (BC).

b) Montrer que $\overline{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC'}$. En déduire que $C = C'$ et que le triangle ABC est rectangle en A.
Énoncer le théorème ainsi démontré.

45. On donne trois points A, B, C non alignés ; on appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on suppose que l'on a :

$$\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}.$$

a) Montrer que (BA) n'est pas orthogonale à (BC). En déduire que la perpendiculaire à (BA) en A est sécante à (BC) ; soit C' le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (BC).

b) Montrer que $\overline{HA}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC'}$. En déduire que $C = C'$ et que le triangle ABC est rectangle en A.
Énoncer le théorème ainsi démontré.

Réfléchir

46. *Réciproque du Théorème de Pythagore*

On donne trois points distincts A, B, C tels que : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

a) Démontrer que : $d(B, C) > d(A, B)$ et $d(B, C) > d(A, C)$; en déduire que $C \notin [AB]$ et $B \notin [AC]$.
Démontrer qu'il n'est pas possible que A appartienne à $[BC]$. En déduire que A, B, C déterminent un triangle.

b) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Appliquer le théorème de Pythagore à chacun des deux triangles rectangles BHC et BHA. En déduire que : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + (\overline{HC}^2 - \overline{HA}^2)$. Écrire $\overline{HC}^2 - \overline{HA}^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs. Montrer que

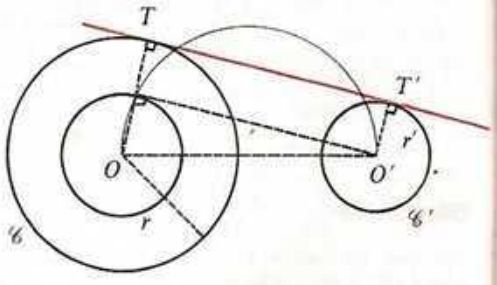
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}(\overline{HC} + \overline{HA}).$$

Comparer cette égalité avec celle de l'hypothèse, en déduire que $H = A$.
Énoncer le théorème ainsi démontré.

47. *Tangente commune à deux cercles*

On considère deux cercles $\mathscr{C}(O, r)$ et $\mathscr{C}'(O', r')$ tels que : $OO' > r + r'$ et $r > r'$.
La figure ci-dessous suggère un procédé de construction d'une tangente commune aux deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. La droite (TT') est appelée tangente commune extérieure.

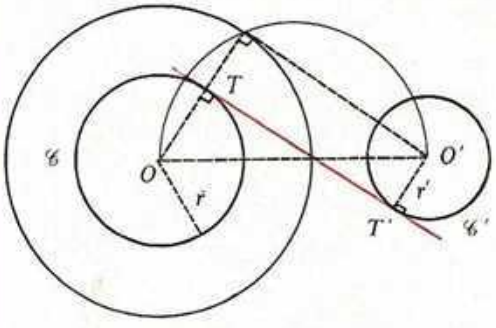
a) Écrire un programme de construction de (TT') et justifier ce programme.



b) Sachant que $r = 5$, $r' = 2$ et $d(O, O') = 8$, calculer $d(T, T')$.

48. On considère deux cercles $\mathscr{C}(O, r)$ et $\mathscr{C}'(O', r')$ tels que : $OO' > r + r'$ et $r > r'$.
La figure ci-dessous suggère un procédé de construction d'une tangente commune aux deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. La droite (TT') est appelée tangente commune intérieure.

a) Écrire un programme de construction de (TT') et justifier ce programme.



b) Sachant que :

$$r = 4, \quad r' = 2 \quad \text{et} \quad d(O, O') = 10,$$

calculer $d(T, T')$.

49. On considère deux cercles $\mathscr{C}(O, r)$ et $\mathscr{C}'(O', r')$ tangents extérieurement en B tels que $r > r'$.

a) Construire une tangente commune extérieure (TT') à ces deux cercles telles que : $T \in \mathscr{C}$ et $T' \in \mathscr{C}'$.
Calculer $d(T, T')$ en fonction de r et r'.

b) On pose $(TT') \cap (OO') = \{A\}$. Calculer en fonction de r et r' : $d(O', A)$; $d(O, A)$; $d(A, T)$; $d(A, T')$.

c) Soit (Δ) la tangente en B aux deux cercles, elle coupe (TT') en I. Montrer que I est le milieu de $[TT']$ et que le triangle TBT' est rectangle en B.

50. *Triplets pythagoriciens*

On appelle triplet pythagoricien tout triplet de naturels $\{a, b, c\}$ tel que : $a^2 = b^2 + c^2$.

a) Vérifier que les triplets $\{5; 3; 4\}$, $\{10; 8; 6\}$, $\{25; 7; 24\}$, $\{53; 45; 28\}$... sont pythagoriciens.

b) Trouver, si possible, d'autres triplets pythagoriciens.

c) $\{a, b, c\}$ étant un triplet pythagoricien et m un naturel non nul, montrer que : $\{ma, mb, mc\}$ est un triplet pythagoricien.

d) p et q étant des naturels, tels que $p > q$. Vérifier que : $\{p^2 + q^2 ; p^2 - q^2 ; 2pq\}$ triplet pythagoricien.

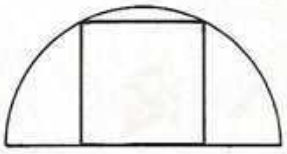
e) En donnant à p les valeurs 2, 3, 4, ... et à q les valeurs 1, 2, 3, ... dresser le début d'un tableau qui permettra de trouver des triplets pythagoriciens.

f) Est-il possible de trouver un triplet pythagoricien dont l'un des éléments est 342 ?

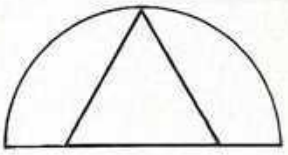
g) Est-il possible de trouver un triplet pythagoricien dont l'un des éléments est 46 ?

h) a étant un naturel, montrer que si $a > 1$, $2a$ est un des éléments d'un triplet pythagoricien. Quels pourraient être les deux autres éléments ?

51. Un carré est inscrit dans un demi-cercle de rayon r comme l'indique la figure ci-dessous. Calculer la mesure de ses côtés en fonction de r.

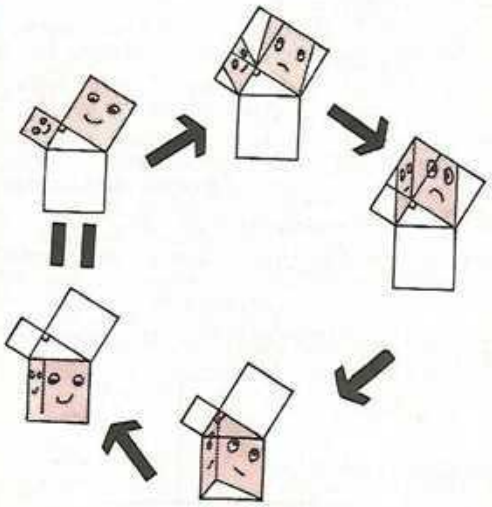


52. Un triangle équilatéral est inscrit dans un demi-cercle de rayon r comme l'indique la figure ci-dessous. Calculer la mesure de ses côtés en fonction de r.



Se distraire

53. Examiner le schéma suivant et, en utilisant les formules d'aires des quadrilatères, vérifier le théorème de Pythagore.

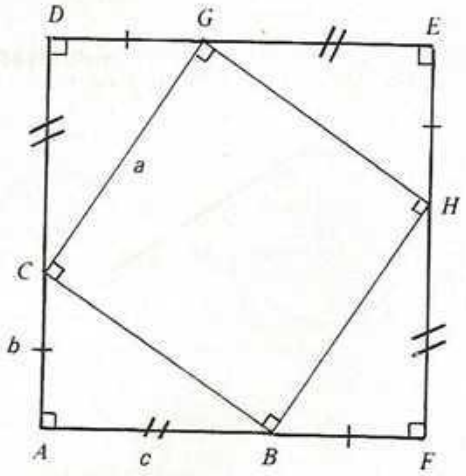


54. Examiner la figure suivante. Vérifier que :

mes (aire $ADEF$) =

mes (aire $BCGH$) + 4 mes (aire ABC),

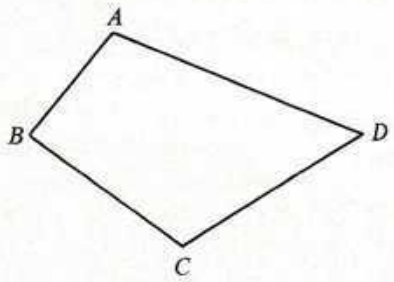
et en déduire que $a^2 = b^2 + c^2$.



6 Transformations du plan

Leçon 1 : ISOMÉTRIES. COMPOSITION D'ISOMÉTRIES
Leçon 2 : PARTIES ISOMÉTRIQUES DU PLAN
Leçon 3 : HOMOTHÉTIES

Comment reproduire le quadrilatère $ABCD$ dans le cadre ci-dessous à l'aide de la règle et du compas ?

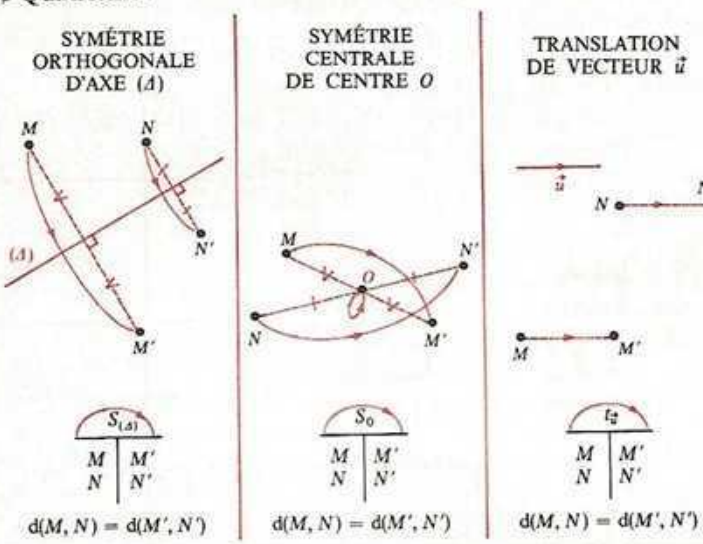




1 Isométries. Composition d'isométries

1) Définition

a) **Rappels de Quatrième.**



Les translations, les symétries orthogonales et les symétries centrales sont des BIJECTIONS de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$ qui conservent la distance.

b) **Définition.**

On appelle isométrie **du plan, toute bijection du plan sur lui-même qui conserve la distance.**

Exercices

1) Soit A et A' deux points donnés.
Trouver trois isométries telles que l'image de A par chacune d'elles soit le point A'.

2) Montrer que l'application $I : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$
$M \mapsto M$
appelée « application identique de $\mathscr{P}$ » est une isométrie.

3) Une projection orthogonale n'est pas une isométrie. Pourquoi ? (Deux justifications sont possibles.)

2) Réciproque d'une isométrie

a) Une isométrie i étant une bijection, sa réciproque i^{-1} est aussi une bijection.

b) Soit M et N deux points quelconques du plan, K et L leurs images respectives par i^{-1} ; i^{-1} est une bijection donc :

$$K = i^{-1}(M) \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad M = i(K)$$
$$L = i^{-1}(N) \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad N = i(L).$$

Or i est une isométrie, donc $d(K, L) = d(M, N)$: i^{-1} conserve la distance.

Conclusion : i^{-1} est une bijection de $\mathscr{P}$ sur lui-même qui conserve la distance, c'est donc une isométrie.
On énonce :

Théorème

La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

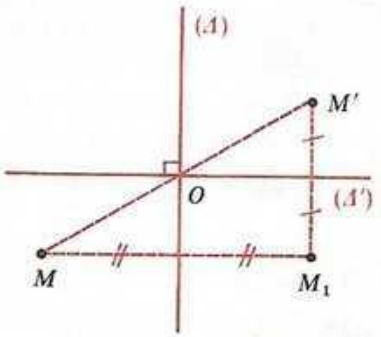
Exercice

Quelle est la réciproque d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), d'une symétrie centrale de centre O, d'une translation de vecteur $\vec{u}$?

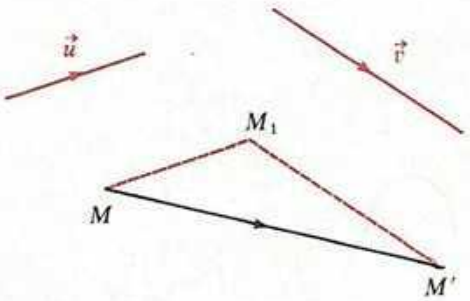
3) Composée de deux isométries

a) **Rappels de quatrième.**

1. La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en O est la symétrie de centre O.

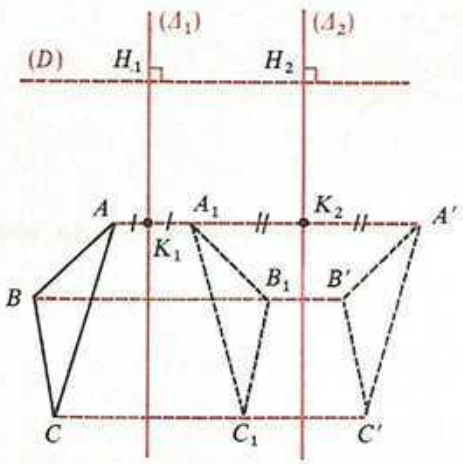


2. La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



b) **Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.**

Considérons les droites parallèles (Δ_1) et (Δ_2) et trois points A, B, C du plan $\mathscr{P}$.



Construire les images A', B', C' de A, B, C par $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.

Soit (D) une perpendiculaire commune à (Δ_1) et (Δ_2) coupant ces droites respectivement en H_1 et H_2.

Comparons $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{H_1H_2}$.

Soit A_1 l'image de A par $S_{(\Delta_1)}$, K_1 et K_2 les points d'intersections respectifs de (AA') avec (Δ_1) et (Δ_2). Montrer que (AA') est parallèle à (D), et que $\overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{H_1H_2}$.

Montrer que $\overrightarrow{AA_1} = 2\,\overrightarrow{K_1A_1}$, et que

$$\overrightarrow{A_1A'} = 2\,\overrightarrow{A_1K_2}.$$

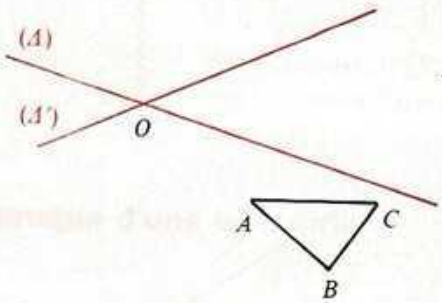
En déduire que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$.
A' est donc l'image de A par la translation de vecteur $2\overrightarrow{H_1H_2}$. On énonce :

Théorème

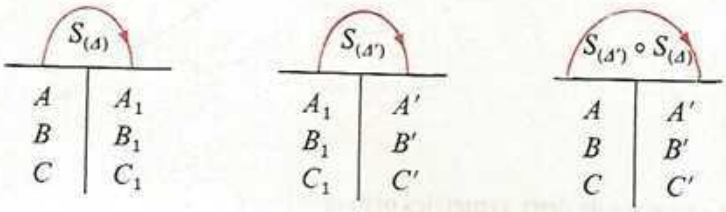
La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.

Exercice Démontrer que la composée $S_B \circ S_A$ des deux symétries centrales de centres A et B est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.
Que peut-on dire de $S_A \circ S_B$?

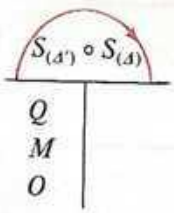
c) **Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants.**



Soit deux droites (Δ) et (Δ') sécantes non perpendiculaires.
Construire l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par $S_{(\Delta)}$, puis l'image $A'B'C'$ de $A_1B_1C_1$ par $S_{(\Delta')}$.



— Montrer que $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ est une bijection, et qu'elle conserve la distance.
— Soit O le point d'intersection de (Δ) et (Δ'), M un point de (Δ) et P un point de (Δ'). Construire l'image N du point M par $S_{(\Delta')}$ et l'image Q du point P par $S_{(\Delta)}$.
Compléter :



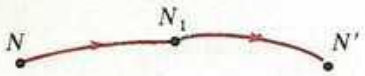
Montrer que $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ n'est ni une translation ni une symétrie orthogonale, ni une symétrie centrale.

Remarque. Dans le cas particulier où $(\Delta) \perp (\Delta')$, on sait que $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie centrale.

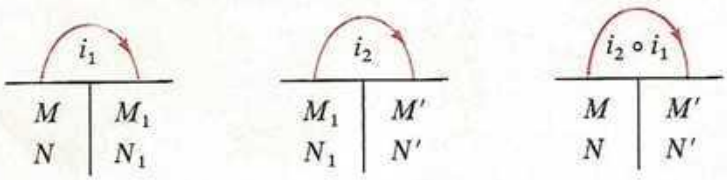
d) **Cas général.**

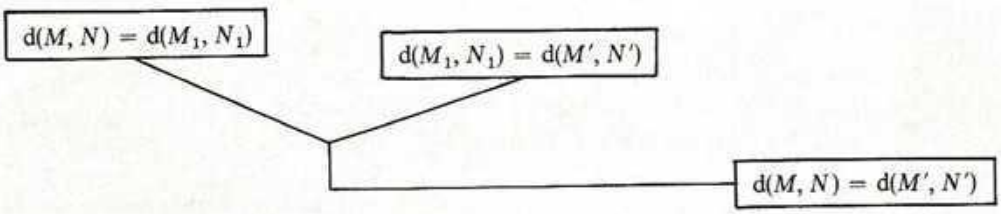
Soit i_1 et i_2 deux isométries, M et N deux points quelconques de $\mathscr{P}$, M_1 et N_1 leurs images respectives par i_1, M' et N' les images de M_1 et N_1 par i_2.





La composée de deux bijections est une bijection donc $i_2 \circ i_1$ est une bijection.
Démontrons que $i_2 \circ i_1$ conserve la distance.





$i_2 \circ i_1$ conserve donc la distance.

On énonce :

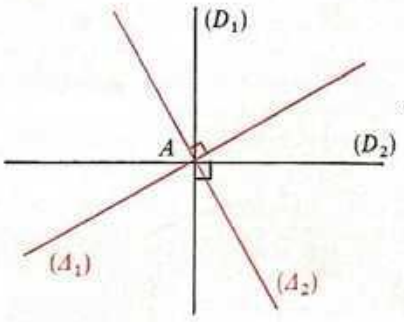
Théorème

La composée de deux isométries est une isométrie.

4) Décomposition d'isométries

a) **Rappel de Quatrième : Décomposition d'une symétrie centrale.**

Toute symétrie centrale est une composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.



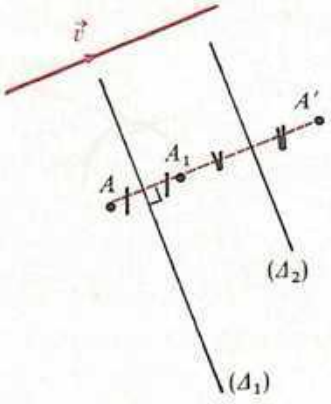
Soit S_A la symétrie de centre A.
Pour un des axes, on choisit une droite quelconque passant par le centre A de la symétrie ; l'autre axe est alors la perpendiculaire au premier en ce point,

$(D_1) \perp (D_2)$ d'où $S_A = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$,

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ d'où $S_A = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$.

Donner deux autres décompositions de la symétrie centrale S_A.

b) **Décomposition d'une translation.**



Considérons la translation de vecteur non nul $\vec{v}$.
Soit A un point quelconque de $\mathscr{P}$ et A' son image par $t_{\vec{v}}$.
Soit (Δ_1) une perpendiculaire quelconque à (AA').
Construire l'image A_1 de A par la symétrie $S_{(\Delta_1)}$.
Construire (Δ_2) parallèle à (Δ_1) et passant par le milieu de (A_1, A').
Démontrer que $t_{\vec{v}} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.
En s'inspirant de ce qui précède, trouver une autre décomposition de $t_{\vec{v}}$.
Construire la droite (Δ) telle que $t_{\vec{v}} = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta)}$.
Étudier le cas où t est la translation de vecteur nul.

Théorème

Toute translation est une composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

c) **Plus généralement,** on démontre que :

Théorème

Toute isométrie du plan est :
— **ou une symétrie orthogonale,**
— **ou une composée de deux symétries orthogonales,**
— **ou une composée de trois symétries orthogonales.**

2 Parties isométriques du plan

1) Images de figures simples par une isométrie

a) **Image de la réunion et de l'intersection de deux parties du plan.**

Soit i une isométrie, P et Q deux parties du plan.
On peut démontrer les égalités suivantes :

$$\boxed{i(P \cup Q) = i(P) \cup i(Q)} \quad \text{et} \quad \boxed{i(P \cap Q) = i(P) \cap i(Q).}$$

Ces propriétés seront utilisées fréquemment.

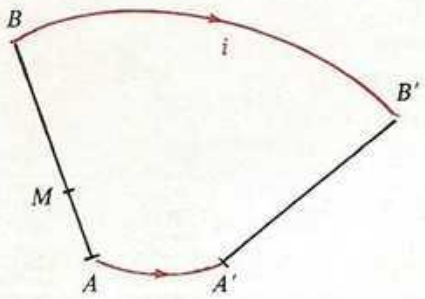
b) **Image d'un segment, d'une demi-droite, d'une droite, d'un cercle par une isométrie.**

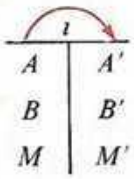
Image d'un segment

Soit A et B deux points du plan, A' et B' leurs images par une isométrie i.
Soit M un point du segment $[AB]$.
Nous savons que :

$$d(A, M) + d(M, B) = d(A, B). \qquad ①$$

Soit M' l'image de M par i. L'isométrie i conserve les distances :





$d(A, M) = d(A', M')$
$d(M, B) = d(M', B')$
$d(A, B) = d(A', B')$

Compte tenu de ① :

$$d(A', M') + d(M', B') = d(A', B')$$

ce qui prouve que $M' \in [A'B']$.
Tout point de $[AB]$ a pour image un point de $[A'B']$.

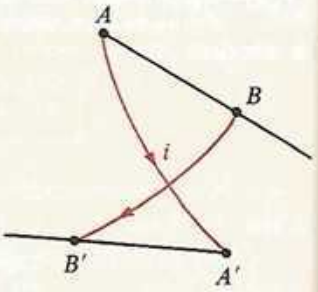
Réciproque : On sait que tout point N' de $[A'B']$ possède un antécédent unique N ; on montre de la même manière que N appartient à $[AB]$.

Tout point de $[A'B']$ est donc l'image d'un point de $[AB]$. D'où

Théorème

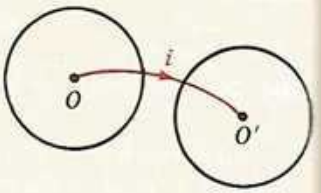
L'image d'un segment $[AB]$ par une isométrie est le segment $[A'B']$, A' et B' étant les images respectives de A et B.

En s'inspirant des démonstrations faites en Quatrième dans le cas d'une symétrie orthogonale, démontrer les théorèmes suivants :



L'image d'une demi-droite $[AB)$ par une isométrie est la demi-droite $[A'B')$, A' et B' étant les images respectives de A et B.

L'image d'une droite par une isométrie est une droite.



L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une isométrie est le cercle de centre O' et de rayon r, O' étant l'image de O.

Exercices

1. Démontrer que l'image par une isométrie du point d'une demi-droite $[AB)$ situé à la distance r de A est le point de $[A'B')$ situé à la distance r de A' ; $[A'B')$ étant l'image de $[AB)$.

2. Démontrer que si trois points alignés A, B, C sont tels que $\overline{AC} = k\overline{AB}$, alors leurs images A', B', C' par une isométrie sont telles que

$$\overline{A'C'} = k\overline{A'B'}.$$

En particulier, démontrer le théorème :

L'image du milieu d'un segment par une isométrie est le milieu de l'image de ce segment.

2) Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

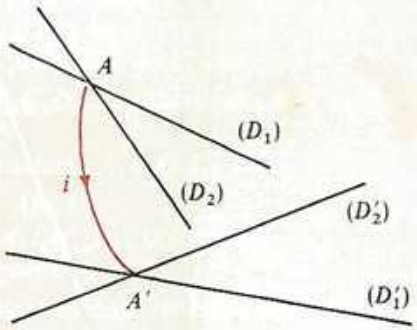
a) **Conservation du parallélisme.**

(D_1) et (D_2) étant deux droites du plan, i une isométrie, nous avons vu que

$$i((D_1) \cap (D_2)) = i((D_1)) \cap i((D_2)).$$

1er *cas* : Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en A.
Soit A' l'image de A par i.
Soit (D'_1) et (D'_2) les images respectives de (D_1) et (D_2) par i

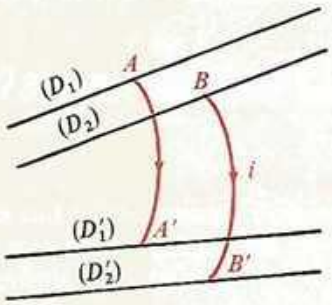
$$i((D_1) \cap (D_2)) = i(\{A\}) = \{A'\} = (D'_1) \cap (D'_2).$$



On énonce :

> Les images de deux droites sécantes en A par une isométrie sont deux droites sécantes en A', A' étant l'image de A.

2e *cas* : Les droites (D_1) et (D_2) sont disjointes.
Leurs images (D'_1) et (D'_2) peuvent-elles avoir un point A' commun ? Quel serait l'antécédent de ce point ?
On en déduit que (D'_1) et (D'_2) sont disjointes.



Remarque. Dans le cas où $(D_1) = (D_2)$, il est évident que $i(D_1)$ est parallèle à $i(D_2)$.
On énonce :

Théorème

> **Toute isométrie conserve le parallélisme.**

Exercice Démontrer que l'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.

b) **Conservation de l'orthogonalité.**

Soit (AB) et (AC) deux droites perpendiculaires.
Le triangle ABC est rectangle en A. En vertu du théorème de Pythagore,

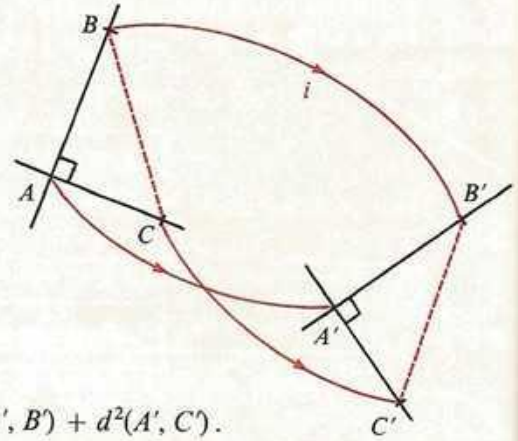
$$d^2(B, C) = d^2(A, B) + d^2(A, C). \qquad ①$$

Soit A', B', C' les images respectives de A, B, C par une isométrie i.



A	A'
B	B'
C	C'

$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(A', B')$
$\mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(B', C')$
$\mathrm{d}(A, C) = \mathrm{d}(A', C')$



Compte tenu de ① :

$$d^2(B', C') = d^2(A', B') + d^2(A', C').$$

En vertu de la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A' ; les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ images par i de (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires.
On énonce :

Théorème

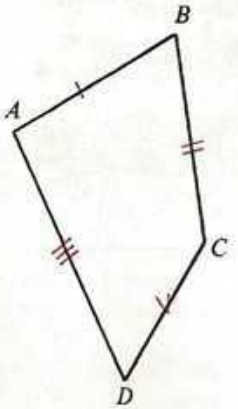
Toute isométrie conserve l'orthogonalité.

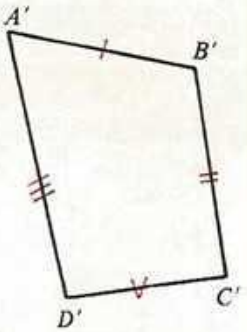
3) Parties isométriques du plan

a) **Figures isométriques.**

Manipulations :

1. Voici deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$.





Ces deux quadrilatères sont tels que

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CD = C'D' \quad \text{et} \quad DA = D'A';$$

on dit que leurs côtés ont même mesure deux à deux.
Parmi les applications du plan dans le plan qui, aux points A, B, C, D font correspondre respectivement A', B', C', D', en est-il une qui soit une isométrie ?
A l'aide du compas, comparer $d(B, D)$ et $d(B', D')$.

2. Construire l'image $A_1B_1C_1D_1$ du quadrilatère $ABCD$ par une isométrie (une symétrie orthogonale par exemple).
Les côtés des deux quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$ et $ABCD$ ont même mesure deux à deux.

3. Réaliser un calque de $ABCD$.
On peut le superposer à $A_1B_1C_1D_1$; on ne peut le superposer à $A'B'C'D'$, ni par glissement, ni par retournement.

Remarque. Deux quadrilatères dont les côtés ont même mesure deux à deux ne sont pas nécessairement superposables à un même calque.

Définition

On dit qu'une figure E est *isométrique* à une figure F s'il existe une isométrie i telle que $i(E) = F$.

Remarque. Considérons une figure E isométrique à une figure F. Soit i une isométrie telle que $i(E) = F$. Nous avons vu que l'isométrie i^{-1} est telle que $i^{-1}(F) = E$ donc la figure F est isométrique à la figure E.
On dira donc que les figures E et F sont isométriques et on écrit :

$$E \text{ iso } F.$$

Reproduire une figure E c'est construire une figure F qui lui est isométrique.

b) **Segments isométriques.**

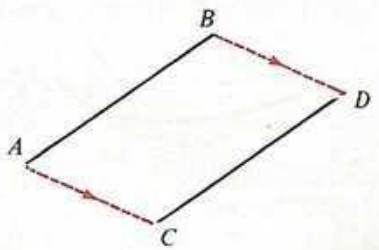
Deux segments isométriques ont même mesure. Pourquoi ?
Réciproquement, montrons que deux segments de même mesure sont isométriques.
Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux segments tels que :

$$AB = CD.$$

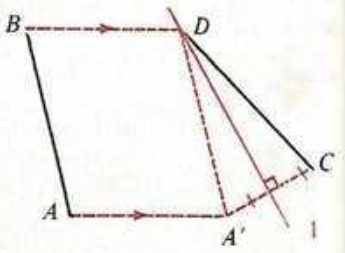
Cherchons une isométrie i telle que $i([AB]) = [CD]$. Considérons, par exemple, la translation $t_{\overrightarrow{BD}}$; deux cas sont possibles :

1er *cas* : $t_{\overrightarrow{BD}}(A) = C$.

La translation $t_{\overrightarrow{BD}}$ est donc une isométrie qui applique $[AB]$ sur $[CD]$.



2e *cas* : $t_{\overrightarrow{BD}}(A) \neq C$; appelons A' l'image de A par $t_{\overrightarrow{BD}}$.



Comparer $A'D$ et AB. En déduire que $A'D = DC$ et que D appartient à la médiatrice (Δ) de $[A'C]$.
Quelle est l'image de $[A'D]$ par $S_{(\Delta)}$?
En déduire que $S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est une isométrie i telle que $i([AB]) = [CD]$.

On énonce :

$$[AB] \text{ iso } [CD] \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad AB = CD\,. \qquad (*)$$

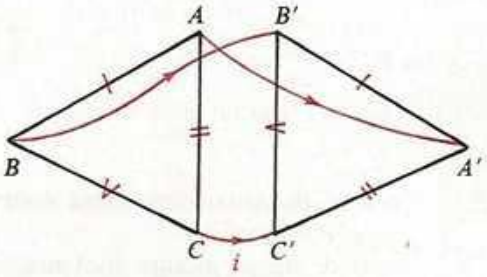
c) **Triangles isométriques.**

Les côtés de deux triangles isométriques ont même mesure deux à deux. Pourquoi ? Nous allons montrer que, réciproquement, si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que

$$AB = A'B'\,; \quad BC = B'C' \quad \text{et} \quad CA = C'A'\,,$$

ils sont isométriques ; c'est-à-dire qu'il existe une isométrie qui, au triangle ABC, associe le triangle $A'B'C'$.
Puisque $AB = A'B'$, nous savons qu'il existe au moins une isométrie i telle que

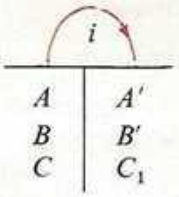
$$i([AB]) = [A'B']\,.$$



Deux cas sont possibles :

1er *cas* : L'image de C est C', alors l'isométrie i est l'isométrie cherchée.

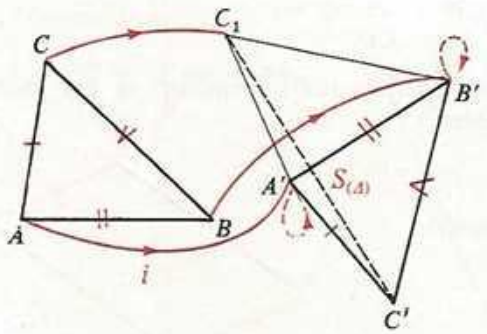
2e *cas* : L'image de C est un point C_1 différent de C'.



Du tableau ci-contre, on déduit

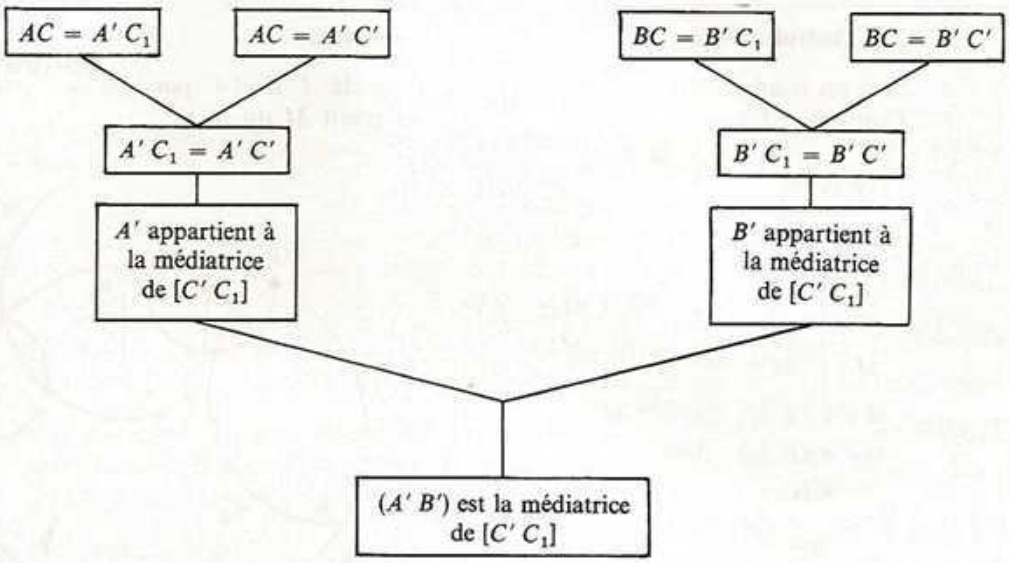
$$AC = A'C_1 \quad \text{et} \quad BC = B'C_1\,.$$

Or, par hypothèse $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.

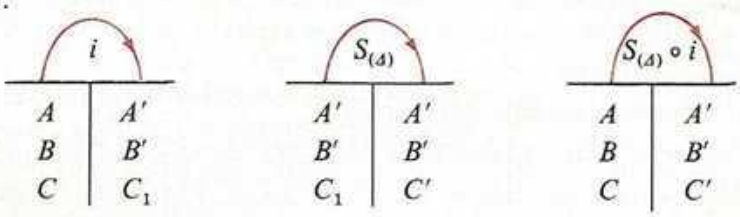


(*) Isométrique : du grec *isos* (égal) et *metron* (mesure).

Raisonnons :



Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe $(A'B')$; on a : $S_{(\Delta)}(A') = A'$, $S_{(\Delta)}(B') = B'$ et $S_{(\Delta)}(C_1) = C'$. Pourquoi ?
Résumons :



Dans ce second cas, nous trouvons donc aussi une isométrie qui au triangle ABC associe le triangle $A'B'C'$.
En conclusion, on énonce :

Théorème

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques. équivaut à **Les côtés de ABC et ceux de $A'B'C'$ ont même mesure deux à deux.**

Peut-on énoncer un théorème analogue pour les quadrilatères ?

Remarque. Étant donné deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$, on peut démontrer que l'isométrie i telle que : $i(A) = A'$, $i(B) = B'$ et $i(C) = C'$ est unique.

Conséquence :

Une isométrie est déterminée par trois points non alignés et leurs images.

4) Problème

a) **Construire l'image d'un point par une isométrie.**

Soit un triangle ABC et A', B', C' les images de A, B et C par une isométrie i. Construire l'image par i de n'importe quel point M du plan.

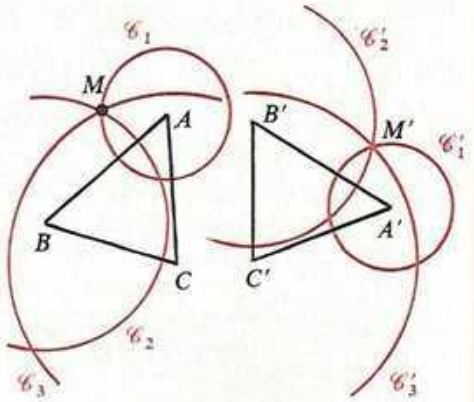
i	
A	A'
B	B'
C	C'
M	M'

Posons :

$d(A, M) = r_1$
$d(B, M) = r_2$
$d(C, M) = r_3$

$M \in \mathscr{C}_1(A, r_1)$
$M \in \mathscr{C}_2(B, r_2)$ donc
$M \in \mathscr{C}_3(C, r_3)$

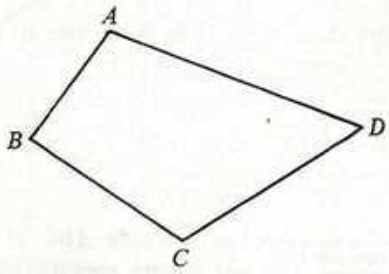
$M' \in \mathscr{C}'_1(A', r_1)$
$M' \in \mathscr{C}'_2(B', r_2)$
$M' \in \mathscr{C}'_3(C', r_3)$.

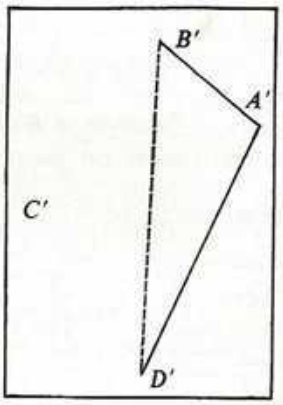


Le programme de construction se déduit des résultats précédents.

b) **Dessinons.**

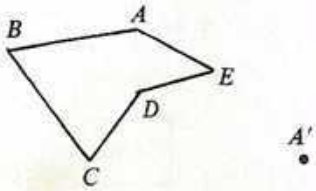
Appliquons le programme au problème posé en début de chapitre. La diagonale $[BD]$ étant plus longue que la largeur du cadre imposé, construisons d'abord un triangle isométrique à ABD en prenant A' le plus à droite possible et $(B'D')$ approximativement parallèle au grand côté du cadre.





Traçons maintenant les cercles de centre A', B' et D' et de rayons respectifs : AC, BC et DC; leur point d'intersection est le point C' cherché.

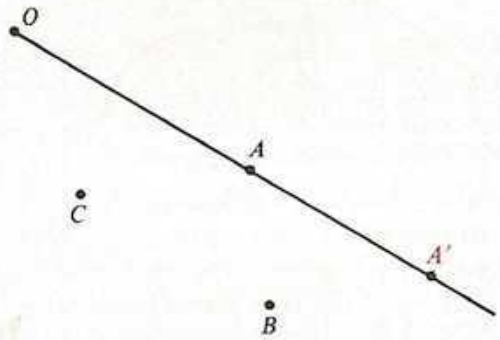
Exercice Soit un pentagone $ABCDE$ et un point A'. Construire un pentagone $A'B'C'D'E'$ isométrique au pentagone $ABCDE$ ci-contre.



3 Homothéties

1) Définition

a) **Manipulations.**



— Marquons les points O, A, B, C.
— Construisons le point A' tel que

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OA}.$$

A' est le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OA}$, par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel ; c'est également le point d'abscisse $\frac{7}{4}$ pour la graduation de repère (O, A). Pourquoi ?
— Construire le point B' tel que

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OB}.$$

— Construire sur (OC) le point C' d'abscisse $\frac{7}{4}$ pour la graduation de repère (O, C).

— A chaque point M du plan peut-on associer un point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OM}$? Pourquoi ?
Ce point est-il unique ? Quel est le point associé à O ?
L'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à chaque point M associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OM},$$

est appelée HOMOTHÉTIE de centre O et de rapport $\frac{7}{4}$.

— Les droites (AB) et $(A'B')$ semblent parallèles ; en est-il de même de (AC) et $(A'C')$? de (BC) et $(B'C')$?

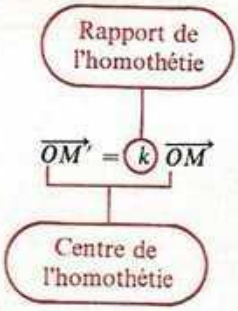
— $d(O, A') = \frac{7}{4}d(O, A)$; comparer $d(A', B')$ et $d(A, B)$.

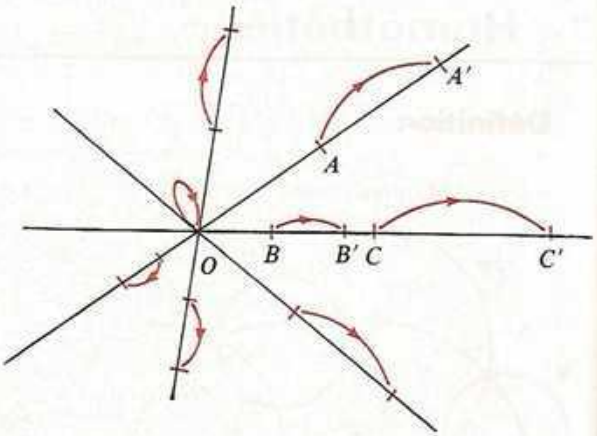
b) **Définition.**

Étant donné un point O et un réel non nul k, on appelle homothétie **de centre O et de rapport k, l'application :**

$$h : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M \mapsto M'$$

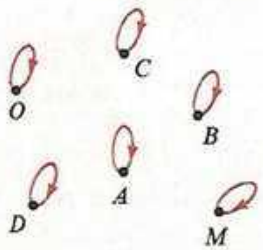
qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.





Exercice Marquer trois points I, J, K non alignés. Construire les images I_1, J_1, K_1 de ces points par l'homothétie de centre I et de rapport 4 ; construire les images J_2, K_2 de J_1, K_1 par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$, puis les images de J_2, K_2 par cette même homothétie.

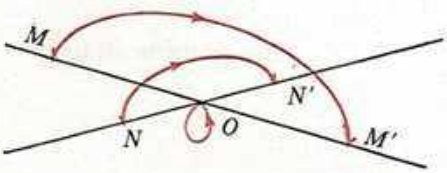
Remarque : $h(O) = O$, le point O est donc invariant.



c) **Homothéties particulières.**

— L'homothétie de centre O et de rapport 1 est l'application identique du plan ; justifier.

Chaque point de $\mathscr{P}$ est donc invariant par cette homothétie.



— L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O ; justifier.

2) Homothétie réciproque

Par définition, toute homothétie est une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

Soit $h : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$

$M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ $\quad k \in \mathbb{R}^*$.

Tout point N' du plan est-il l'image d'un point N du plan par cette homothétie ?

Si un tel point N existe, alors on a : $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$, or $k \neq 0$, donc $\frac{1}{k}\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON}$. Cette égalité permet d'affirmer :

— que le point N' a un antécédent N unique par h,

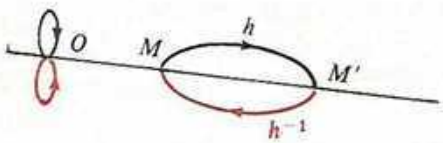
— que ce point N est l'image de N' par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

En conclusion :

Toute homothétie est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$.

De plus :

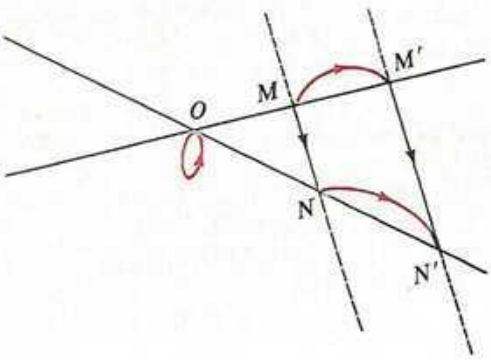
La réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport k est l'homothétie de même centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.



3) Propriétés

a) **Points invariants.**

Dans toute homothétie, le centre est un point invariant. On peut montrer que toute homothétie différente de l'application identique admet un seul point invariant : son centre.



b) **Propriété fondamentale.**

Soit M et N deux points quelconques du plan, M' et N' leurs images par l'homothétie h de centre O et de rapport k

$h(M) = M'$ ⟨équivaut à⟩ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (1)

$h(N) = N'$ ⟨équivaut à⟩ $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$. (2)

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{ON'}$.

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$. Des égalités (1) et (2) on déduit :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM}$$
$$\overrightarrow{M'N'} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$$
$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Théorème

> ***h* étant l'homothétie de centre *O* et de rapport *k*, quels que soient les points *M* et *N***
>
> si $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

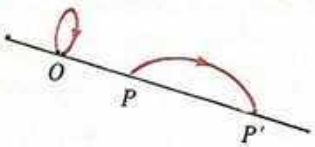
En déduire que :

$$(M'N') /\!/ (MN) \qquad ①$$

$$d(M', N') = |k|\, d(M, N). \qquad ②$$

Exercices

1) Démontrer qu'*en général*, une homothétie h n'est pas une isométrie. Préciser les valeurs du rapport k pour lesquelles h est une isométrie.



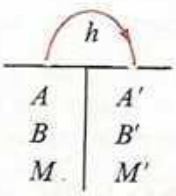
2) Connaissant trois points O, P et P' tels que P' soit l'image de P par une homothétie de centre O, déduire de la propriété ① ci-dessus un programme de construction de l'image d'un point M, dans les deux cas suivants :

a) $M \notin (OP)$;

b) $M \in (OP)$.

4) Images de figures simples

a) **Image d'un segment.**



Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.
Soit A' l'image de A par h, B' celle de B.
Montrons que si M appartient à $[AB]$, son image M' appartient à $[A'B']$,

$$M \in [AB] \text{ équivaut à } d(A, M) + d(M, B) = d(A, B). \qquad ③$$

Or dans une homothétie h de rapport k : $d(h(M), h(N)) = |k|\, d(M, N)$.
On a donc : $d(A', M') = |k|\, d(A, M)$; $d(M'B') = |k|\, d(M, B)$; $d(A', B') = |k|\, d(A, B)$.
En multipliant les deux membres de l'égalité ③ par $|k|$, on obtient :

$$|k|\,[d(A, M) + d(M, B)] = |k|\, d(A, B)$$

$$|k|\, d(A, M) + |k|\, d(M, B) = |k|\, d(A, B)$$

c'est-à-dire :

$$d(A', M') + d(M', B') = d(A', B'),$$

ce qui signifie que $M' \in [A'B']$.
On montre de même que tout point de $[A'B']$ est l'image par h d'un point de $[AB]$.

On énonce :

Théorème

L'image d'un segment $[AB]$ par une homothétie est le segment $[A'B']$, A' et B' étant les images de A et de B.

b) **Images d'une demi-droite, d'une droite, d'un cercle.**

On démontrerait de même que :

— l'image d'une demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$, A' et B' étant les images de A et B;

— l'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$.

De plus, la propriété ① permet d'affirmer que $(A'B')$ est parallèle à (AB).

On énonce :

L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite parallèle à (D).

En déduire qu'une homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Remarque. Si le centre de l'homothétie appartient à la droite (D) :

— chaque point de (D) *a* pour image un point de (D),

— chaque point de (D) *est* l'image d'un point de (D).

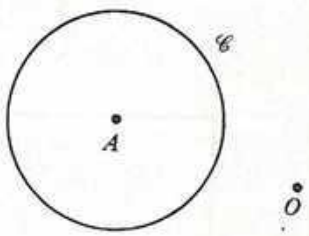
On dit que :

— Toute droite qui passe par le centre d'une homothétie est *globalement* invariante par cette homothétie.

Exercices

— Démontrer que l'image du cercle $\mathscr{C}(A, r)$ par une homothétie h de rapport k est le cercle $\mathscr{C}'(A', r')$ tel que $A' = h(A)$ et $r' = |k|\,r$.

— Construire l'image du cercle $\mathscr{C}(A\,;2)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{5}{2}$.



c) **Image d'un triangle par une homothétie.**

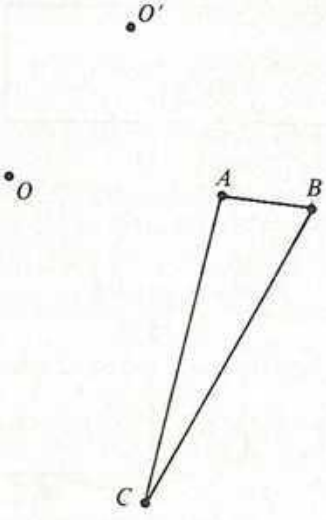
1. Exercice :

Montrer que l'image d'un triangle par une homothétie est un triangle.

2. Définition :

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que l'un est l'image de l'autre par une homothétie, ils sont dits homothétiques.

Exercice :



On donne deux points O, O' et un triangle ABC.

Construire l'image de ce triangle :

- par l'homothétie h_1 de centre O et de rapport $\frac{7}{4}$; soit $A_1B_1C_1$ cette image ;
- par l'homothétie h_2 de centre O et de rapport $-\frac{7}{4}$; soit $A_2B_2C_2$ cette image ;
- par l'homothétie h'_1 de centre O' et de rapport $\frac{7}{4}$; soit $A'_1B'_1C'_1$ cette image.

h_1	
O	O
A	A_1
B	B_1
C	C_1

h_2	
O	O
A	A_2
B	B_2
C	C_2

h'_1	
O'	O'
A	A'_1
B	B'_1
C	C'_1

Trouver des couples de droites parallèles.

- Les suites AB, BC, CA et A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sont proportionnelles. Justifier puis vérifier en mesurant sur la figure.
- Les suites AB, BC, CA et A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 sont également proportionnelles. Quel est le coefficient de proportionnalité de la seconde à la première suite ?
- Comparer les triangles $A_1B_1C_1$ et $A'_1B'_1C'_1$; trouver une transformation g_1 telle que

$$g_1(A_1)=A'_1,\quad g_1(B_1)=B'_1,\quad g_1(C_1)=C'_1.$$

- Comparer les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$; trouver une transformation g_2 telle que

$$g_2(A_1)=A_2,\quad g_2(B_1)=B_2 \text{ et } g_2(C_1)=C_2.$$

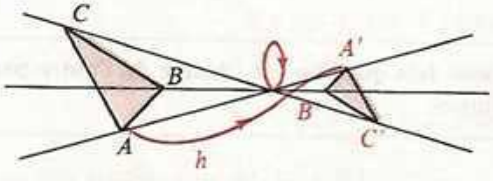
3. Démontrer le théorème suivant :

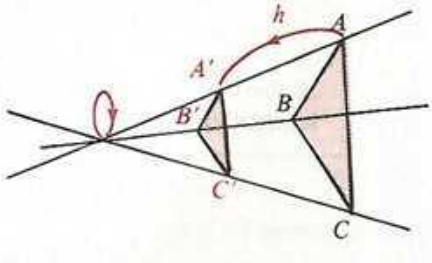
Si deux triangles homothétiques ABC et $A'B'C'$ sont tels que A, B, C aient pour images respectives A', B', C' par une homothétie de rapport k, alors :

1) $(AB)\parallel(A'B')$, $(AC)\parallel(A'C')$ et $(BC)\parallel(B'C')$

et

2) $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}=|k|$.





Exercices

Construire

1 (2). Soit ABC un triangle rectangle en A. Sur une même figure, construire les images du triangle ABC par :

a) la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$,

b) la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$,

c) la symétrie centrale S_A.

Soit F l'image de B par $t_{\overrightarrow{AB}}$ et E l'image de C par $t_{\overrightarrow{AC}}$. Construire l'image du triangle AEF par la symétrie centrale S_A.

2 (2). On donne deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2).
Soit A un point n'appartenant à aucune d'elles. Construire un triangle ABC tel que (Δ_1) soit la médiatrice de $[AB]$ et (Δ_2) la médiatrice de $[BC]$.

3 (2). Soit (Δ_1), (Δ_2) et (D) trois droites concourantes en un point O. Soit A un point de (D).

— Construire les images de (Δ_1), (Δ_2) et (D) par l'isométrie $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$.
— Construire l'image du cercle de centre O et de rayon OA par cette même isométrie.

4 (2). Soit un triangle ABC. Construire l'image de ce triangle par l'isométrie $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
Construire l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par cette isométrie.

5 (2). Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.
Construire l'image de ce cercle par l'isométrie $S_B \circ S_A$.
Soit (Δ_1) la tangente en A à $\mathscr{C}$ et (Δ_2) la tangente en B à ce même cercle.
Construire l'image de $\mathscr{C}$ par l'isométrie $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.

6 (2). On donne un triangle ABC.
Soit (Δ_1) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ_2) la médiatrice de $[BC]$.
Construire l'image du triangle ABC par l'isométrie $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$.
Quelle est l'image du sommet A ?
Quelle est l'image du cercle circonscrit au triangle ABC, par cette isométrie ?
Quelle doit être la nature du triangle ABC pour que l'isométrie $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ soit une symétrie centrale ?

7 (2). On donne un triangle ABC.
Soit K, R, T les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et (Δ) la médiatrice de $[BC]$.

a) Construire l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par l'isométrie $S_{(TR)} \circ S_K$.

b) Construire l'image $A_2B_2C_2$ du triangle ABC par l'isométrie $t_{\overrightarrow{HA}} \circ S_{(\Delta)}$. Que constate-t-on ?

8 (2). On donne un triangle équilatéral ABC.
Soit (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les médiatrices respectives de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Quelle est l'image du triangle ABC par l'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(\Delta_3)}$?
Quelle est l'image de (Δ_2) par cette isométrie ?
Vérifier à l'aide d'une figure.

9 (2). On donne un triangle équilatéral ABC.
Soit A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Quelle est l'image du triangle ABC par l'isométrie $S_{A'} \circ S_{B'} \circ S_{C'}$.
Quelle est la nature de cette isométrie ?
Vérifier à l'aide d'une figure.

10 (2). Soit un quadrilatère $XYZT$. Construire l'image de T par l'isométrie $S_X \circ S_Y \circ S_Z$.
Construire l'image de T par l'isométrie $S_Z \circ S_Y \circ S_X$.
Que constate-t-on ?

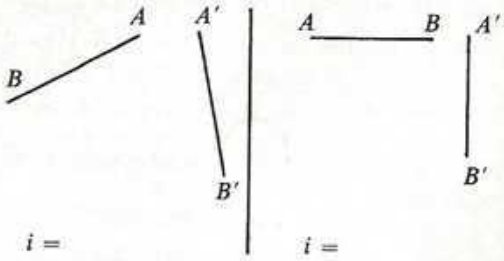
11 (2). On donne un parallélogramme $ABCD$.
Soit G le centre de gravité du triangle ACD.
Construire l'image du parallélogramme $ABCD$ par la symétrie centrale S_G.
Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par cette symétrie.
Démontrer que :

a) $(AC') \parallel (BD')$.

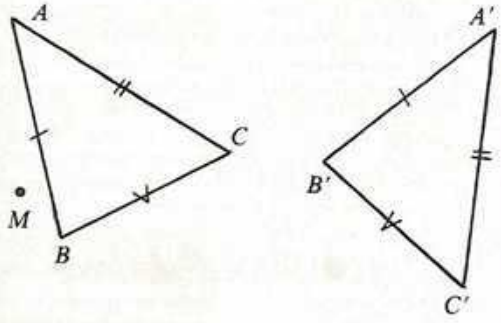
b) $AC' = \frac{1}{3} BD$.

Soit O le centre du parallélogramme $ABCD$.
Quelle est l'image de $ABCD$ par l'isométrie $S_G \circ S_O$?

12 (2). Voici deux figures représentant deux segments isométriques $[AB]$ et $[A'B']$.
Déterminer dans chacune des figures une isométrie i telle que $i([AB]) = [A'B']$.



13 (2). On donne un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par une isométrie i. Soit M un point du plan. Construire $i(M)$.



14 (2). On considère un triangle équilatéral ABC.
On désigne par :
(D_1) la médiatrice de $[BC]$,
(D_2) la médiatrice de $[AC]$ et
(D_3) la médiatrice de $[AB]$.
Faire la figure. Compléter les tableaux :

$S_{(D_1)}$	
A	
B	
C	

$S_{(D_2)}$	
A	
B	
C	

$S_{(D_3)}$	
A	
B	
C	

Soit i l'isométrie telle que :

$$i = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)} \circ S_{(D_3)}.$$

Compléter le tableau :

i	
A	
B	
C	

Montrer que i est une symétrie orthogonale, en indiquer l'axe.

15 (2). On donne un triangle équilatéral ABC. Soit M le symétrique de A par rapport au point B.

a) Construire l'image $A'B'C'$ de ABC par la symétrie centrale de centre M.

b) Soit (D_1) la médiatrice de $[A'B']$. Compléter :

$S_{(D_1)}$	
A'	
B'	
C'	

c) Soit i l'isométrie définie par le tableau suivant :

i	
A	B'
B	A'
C	C'

Déterminer des axes de symétries orthogonales dont la composée est l'isométrie i.

16 (2). On donne deux droites disjointes (Δ_1) et (Δ_2). Soit (D) une sécante commune qui coupe (Δ_1) en A et (Δ_2) en B. Construire l'image (D_1) de (D) par la symétrie orthogonale $S_{(\Delta_1)}$ et l'image (D_2) de (D) par la symétrie orthogonale $S_{(\Delta_2)}$.

a) Quelle est la nature de l'isométrie $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$?

b) Quelle est l'image de (D_1) par $S_{(\Delta_1)}$?

c) Démontrer que $(D_1) \parallel (D_2)$.

d) Construire les images de (D), (D_1), (D_2), (Δ_1) et (Δ_2) :

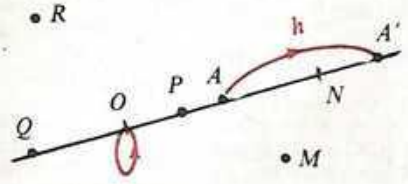
1) par l'isométrie $S_{(D)} \circ S_{(\Delta_1)}$
2) par l'isométrie $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(D)} \circ S_{(\Delta_2)}$.

Que constate-t-on ?

17 (3). Soit un triangle ABC. Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

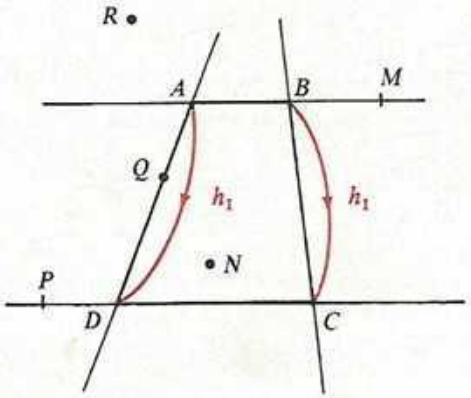
18 (3). Soit un parallélogramme $ABCD$ et G le centre de gravité du triangle ACD.
Quelle est l'image du parallélogramme $ABCD$ par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$?

19 (3). On donne trois points alignés O, A, A'. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Construire les images par h des points M, N, P, Q, R représentés sur la figure ci-contre.



20 (3). Soit un trapèze $ABCD$ tel que $(AB) \parallel (CD)$. On désigne par S le point d'intersection de (AD) et (BC) et par T le point d'intersection de (AC) et (BD).

1) Quel est le centre de l'homothétie h_1 telle que $h_1(A) = D$ et $h_1(B) = C$?
Construire les images par h_1 des points M, N, P, Q, R représentés sur la figure ci-dessous



2) Quel est le centre de l'homothétie h_2 telle que $h_2(A) = C$ et $h_2(B) = D$?
Construire les images par h_2 des points M, N, P, Q, R représentés sur la figure ci-contre.

21 (3). On donne quatre points alignés A, B, C, D (voir figure).
Soit h_1 l'homothétie telle que

$$h_1(A) = B \quad \text{et} \quad h_1(C) = D.$$

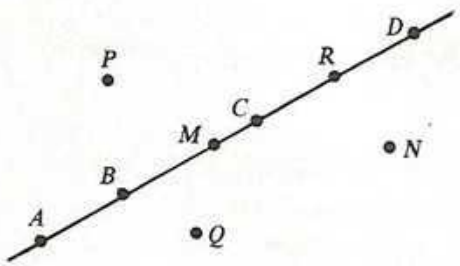
Soit h_2 l'homothétie telle que

$$h_2(A) = C \quad \text{et} \quad h_2(B) = D.$$

Soit h_3 l'homothétie telle que

$$h_3(A) = D \quad \text{et} \quad h_3(B) = C.$$

Trouver le centre de chacune de ces homothéties. Construire les images par chacune d'elles des points M, N, P, Q, R représentés sur la figure ci-contre.



Démontrer

22 (2). Démontrer que toute translation est une composée de deux symétries centrales.

23 (2). Démontrer que la composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

24 (2). On donne une droite (Δ) et un point A n'appartenant pas à (Δ).
Soit (D) la perpendiculaire à (Δ) passant par A.
Trouver une décomposition de S_A en symétries orthogonales qui permette de montrer qu'il existe une translation t telle que

$$S_{(\Delta)} \circ S_A = t \circ S_{(D)}.$$

25 (2). Soit quatre points A, B, C, D. Démontrer que si $S_B \circ S_A = S_D \circ S_C$, alors

$$S_C \circ S_A = S_D \circ S_B.$$

26 (2). Soit un parallélogramme $ABCD$.
Démontrer que l'isométrie $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ est l'application identique du plan dans lui-même.

27 (2). Démontrer que la composée de deux symétries centrales peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales.
Trouver un exemple qui montre que la réciproque est fausse.

28 (2). On donne trois droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) de même direction. Construire une droite (X) telle que

$$S_{(\Delta_3)} \circ S_{(\Delta_2)} = S_{(X)} \circ S_{(\Delta_1)}.$$

Construire sur la même figure une droite (Y) telle que

$$S_{(\Delta_3)} \circ S_{(\Delta_2)} = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(Y)}.$$

Démontrer que

$$S_X \circ S_Y = S_{(\Delta_3)} \circ S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_3)} \circ S_{(\Delta_2)}.$$

29 (3). Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Sur la demi-droite $[HB)$ on marque le point B' tel que $d(H, B') = d(A, B)$.
Construire l'image du triangle ABH par l'homothétie h de centre H telle que $h(B) = B'$.
Démontrer que le triangle obtenu est isométrique au triangle ABC.
En déduire que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{BH}{AB}$.

30 (3). Soit un trapèze quelconque non croisé $ABCD$ tel que $(AB) \parallel (CD)$.

a) Trouver le centre de l'homothétie h telle que $h(A) = D$ et $h(B) = C$. Justifier. Construire l'image $A'B'C'D'$ de $ABCD$ par cette homothétie.

b) Trouver le centre de l'homothétie h' telle que $h'(A) = C$ et $h'(B) = D$.
Construire l'image $A''B''C''D''$ de $ABCD$ par cette homothétie.

c) Démontrer que les trapèzes $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$ sont isométriques.

31 (3). Soit un triangle ABC et G son centre de gravité.

1) Quelle est l'image $A'B'C'$ de ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$?

2) Quelle est l'image de l'orthocentre du triangle ABC par cette homothétie ?

3) En déduire que l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés.

4) Compléter $d(H, G) = \ldots \times d(H, O)$.

5) Construire l'image par h du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

6) Construire l'image $A''B''C''$ du triangle ABC par l'homothétie h^{-1}.

7) Démontrer que les points B'', C'' et A sont alignés.

8) Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle $A''B''C''$ est l'orthocentre du triangle ABC.

Réfléchir

32 (2). Soit un triangle AOB.

a) Trouver la solution de l'équation

$$X \in \mathscr{P}, \quad S_O(X) = t_{\overrightarrow{AB}}(X).$$

b) Trouver la solution de l'équation

$$X \in \mathscr{P}, \quad S_O(X) = t_{\overrightarrow{BA}}(X).$$

Vérifier à l'aide d'une figure.

33 (2). Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires.
Soit A et B deux points de (Δ').
Trouver des solutions de l'équation

$$X \in \mathscr{P}, \quad S_{(\Delta)}(X) = t_{\overrightarrow{AB}}(X).$$

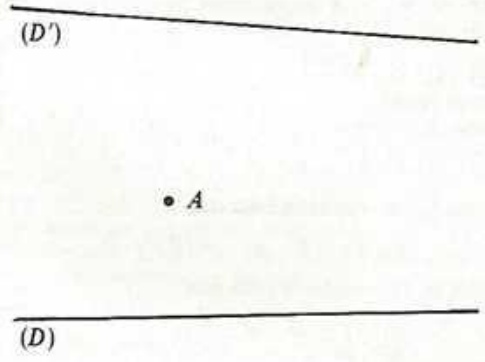
34 (2). On donne trois points A, B et C.
Trouver la solution de chacune des équations

$$X \in \mathscr{P}, \quad S_A \circ t_{\overrightarrow{BC}}(X) = X$$
$$X \in \mathscr{P}, \quad t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_A(X) = X.$$

35 (3). On donne un triangle ABC.
Construire un carré $KLMN$ tel que

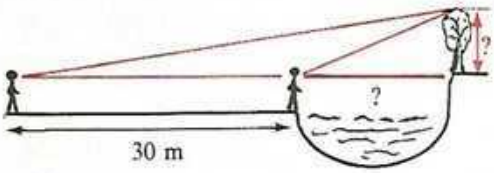
$$K \in [AB], \quad L \in [AC] \quad \text{et} \quad (MN) = (BC).$$

36 (3). La figure ci-dessous représente deux droites (D) et (D') sécantes en un point P situé en dehors de la feuille et un point A.
Trouver un moyen de construire la droite (AP).



7 Les angles

Leçon 1 : ANGLES
Leçon 2 : MESURE DES ANGLES
Leçon 3 : ANGLES ET TRIGONOMÉTRIE



Au cours d'une promenade au bord du Bandama, Koffi s'arrête et regarde un arbre situé sur l'autre rive. En reculant de 30 m, il voit cet arbre sous un autre angle et il dit à son ami :
« La largeur du Bandama est de 16 m et la hauteur de l'arbre est de 6,5 m. »
Comment a-t-il procédé ?

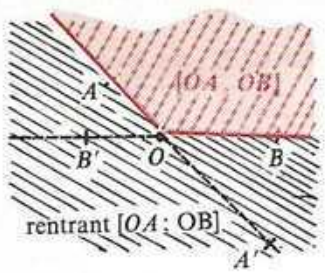
1 Angles

1) Définition d'un angle

a) **Rappel sur les secteurs angulaires.**

Considérons deux demi-droites $[OA)$, $[OB)$ de même origine O.

1er *cas* : Leurs supports sont distincts.

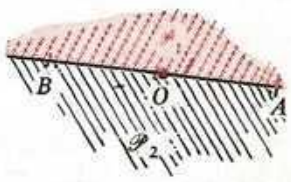


L'intersection des demi-plans $[(OA), B)$ et $[(OB), A)$ est un secteur angulaire saillant noté $[OA ; OB]$.
Soit A' un point de (OA) n'appartenant pas à $[OA)$.
Soit B' un point de (OB) n'appartenant pas à $[OB)$.
La réunion des demi-plans $[(OA), B')$ et $[(OB), A')$ est un secteur angulaire rentrant noté : *rentrant* $[OA ; OB]$.

Remarque.

$[OA ; OB] \cap$ rentrant $[OA ; OB] = [OA) \cup [OB)$;
$[OA ; OB] \cup$ rentrant $[OA ; OB] = \mathscr{P}$.

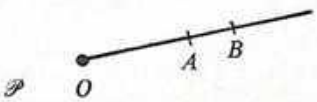
2e *cas* : Les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont opposées.
La droite (AB) définit deux secteurs angulaires plats, les demi-plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de bord (AB).



Remarque.

$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = [OA) \cup [OB)$;
$\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}$.

3e *cas* : $[OA) = [OB)$.



La demi-droite $[OA)$ définit :
— un secteur angulaire plein : le plan $\mathscr{P}$,
— un secteur angulaire nul : la demi-droite $[OA)$.

Remarque. Dans ce cas on a également :

$\mathscr{P} \cap [OA) = [OA) \cup [OB)$;
$\mathscr{P} \cup [OA) = \mathscr{P}$.

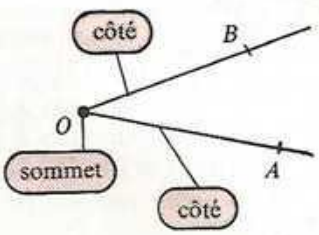
Conclusion : Deux demi-droites de même origine déterminent deux secteurs angulaires :

un secteur angulaire saillant, plat ou nul,
un secteur angulaire rentrant, plat ou plein.

La réunion de ces deux secteurs est le plan ; leur intersection est la figure formée par la réunion des deux demi-droites considérées.
Cette réunion de deux demi-droites de même origine à laquelle on peut associer un secteur angulaire saillant (plat ou nul) et un secteur angulaire rentrant (plat ou plein), sera désormais appelée angle des deux demi-droites ou plus simplement angle.

b) **Définition.**

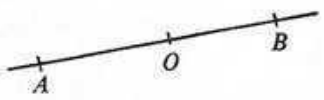
On appelle angle, **la réunion de deux demi-droites de même origine.**



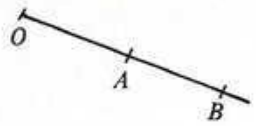
L'origine commune des deux demi-droites est appelée sommet de l'angle.
Les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont les côtés de l'angle.

Notations : On désigne par $\widehat{AOB}$ l'angle de sommet O ayant pour côtés $[OA)$ et $[OB)$; la lettre désignant le sommet est placée entre les deux autres lettres.
Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on désigne parfois un angle par la lettre désignant son sommet et surmontée du signe $\widehat{\ }$.
Au lieu de $\widehat{RST}$ on pourra écrire $\widehat{S}$.
L'ensemble des angles du plan sera désigné par $\mathscr{A}$.
Remarque Par définition d'un angle on a $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$.

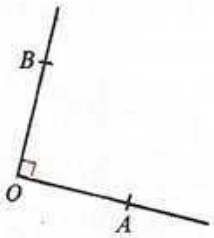
c) **Angles particuliers.**



Un *angle plat* est un angle dont les côtés sont deux demi-droites opposées.



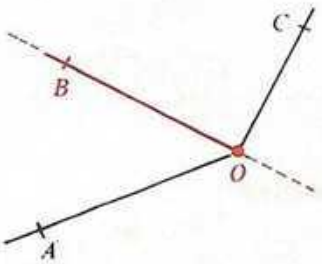
Un *angle nul* est un angle dont les côtés sont égaux (on dit aussi que les côtés sont confondus).



Un *angle droit* est un angle dont les supports des côtés sont perpendiculaires.

2) Angles adjacents

a) **Définition.**



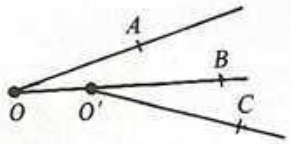
Deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ ni nuls ni plats, tels que :
— O soit leur sommet commun,
— $[OB)$ soit un côté commun,
— les côtés $[OA)$ et $[OC)$ soient situés de part et d'autre du support du côté commun $[OB)$,
sont appelés angles adjacents.

Remarque.

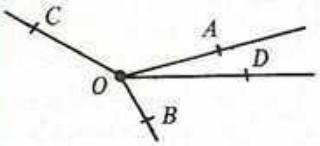
$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ n'étant ni nuls ni plats,

$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents équivaut à $[OA\,;OB] \cap [OB\,;OC] = [OB)$.

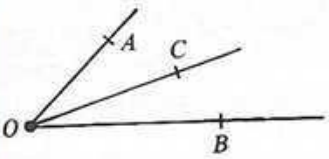
b) **Exercice**



$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BO'C}$ ne sont pas adjacents. Pourquoi ?

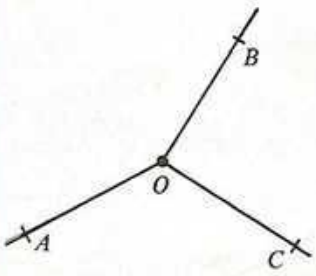


$\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ne sont pas adjacents. Pourquoi ?



$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ ne sont pas adjacents. Pourquoi ?

Sur cette dernière figure, quels sont les deux angles adjacents ?



Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont-ils adjacents ?

Trouver, sur cette figure, d'autres angles adjacents.

3) Comparaison des angles

a) **Angles isométriques.**

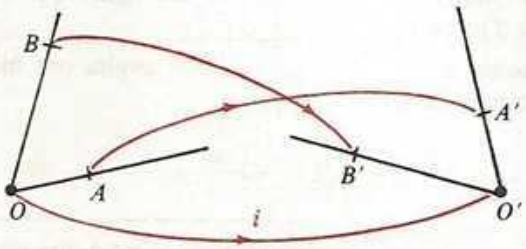
Rappels :

— l'image d'une demi-droite par une isométrie est une demi-droite,
— l'image par une isométrie, de la réunion de deux ensembles est la réunion des images de ces deux ensembles.

On en déduit que :

> L'image d'un angle $\widehat{AOB}$ par une isométrie est l'angle $\widehat{A'O'B'}$; A', O' et B' étant les images respectives de A, O et B.

On dit que l'angle $\widehat{AOB}$ est isométrique à l'angle $\widehat{A'O'B'}$.



Exercice Démontrer que la relation « est isométrique à » dans l'ensemble des angles du plan est :

— réflexive (utiliser : « l'application identique du plan est une isométrie »)

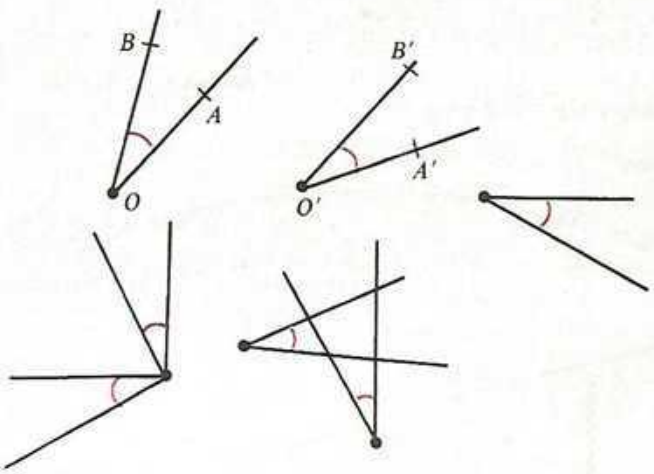
— symétrique (utiliser : « la réciproque d'une isométrie est une isométrie »)

— transitive (utiliser : « la composée de deux isométries est une isométrie »).

En déduire que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{A}$ des angles du plan.

Vocabulaire : Cette relation étant symétrique, si $\widehat{AOB}$ est isométrique à $\widehat{A'O'B'}$ alors $\widehat{A'O'B'}$ est isométrique à $\widehat{AOB}$. On dira que $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$ **sont** isométriques.

La figure ci-dessous représente quelques angles isométriques à $\widehat{AOB}$.



Pour caractériser deux angles isométriques $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$, on dit souvent : $\widehat{AOB}$ a la *même ouverture* que $\widehat{A'O'B'}$ ou $[OA)$ fait avec $[OB)$ le *même angle* que $[O'A')$ avec $[O'B')$.

Convention :

1. Depuis la Quatrième, on indique sur une figure que deux segments ont même longueur à l'aide d'un petit trait.
2. Pour indiquer sur une figure que deux angles ont même ouverture on utilise un petit arc de cercle.

Définition

L'ensemble des angles de même ouverture (c'est-à-dire isométriques à un angle donné) est appelé angle géométrique.

Notation : On notera un angle géométrique par une lettre de l'alphabet grec surmontée du signe $\wedge$.

Soit $\hat{\alpha}$ l'ensemble des angles isométriques à $\widehat{AOB}$. Justifier les trois affirmations suivantes :

— $\widehat{AOB} \in \hat{\alpha}$.
— Si $\widehat{A'O'B'}$ iso $\widehat{AOB}$ alors $\widehat{A'O'B'} \in \hat{\alpha}$.
— Si $\widehat{COD} \in \hat{\alpha}$ et $\widehat{KSR} \in \hat{\alpha}$ alors $\widehat{COD}$ iso $\widehat{KSR}$.

Soit $\widehat{AOB}$ un représentant de l'angle géométrique $\hat{\alpha}$
$\widehat{RST}$ un représentant de l'angle géométrique $\hat{\beta}$.

Théorème

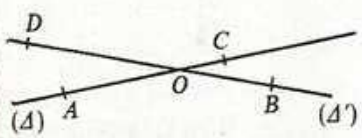
$\widehat{AOB} \in \hat{\alpha}$ et $\widehat{RST} \in \hat{\beta}$

$\widehat{AOB}$ iso $\widehat{RST}$ (équivaut à) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

Remarque.

— Le mot **ANGLE** *employé SEUL* désigne la réunion de deux demi-droites de même origine.
— L'expression **ANGLE GÉOMÉTRIQUE** désigne l'ensemble de tous les angles isométriques à un angle donné.

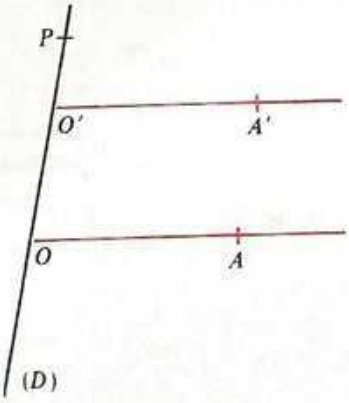
Exercices



1) On donne deux droites (Δ) et (Δ') sécantes en O. Sur (Δ) on marque de part et d'autre de O deux points A et C. Sur (Δ') on marque de part et d'autre de O deux points B et D.

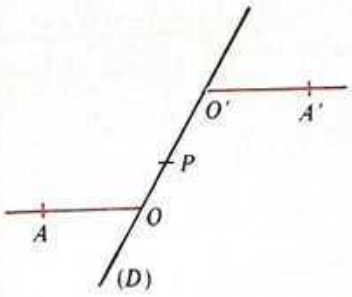
On dit que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont **opposés par le sommet.**

Démontrer que $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont isométriques.



2) Sur une droite (D) on marque trois points O, O' et P tels que $P \notin [OO']$. Construire deux demi-droites $[OA)$ et $[O'A')$ de supports parallèles et incluses dans un même demi-plan de bord (D).

Démontrer que les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{A'O'P}$ sont isométriques.

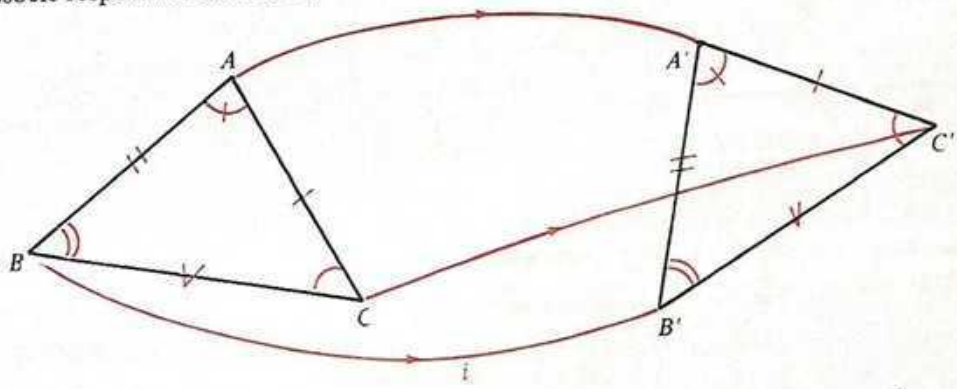


3) Sur une droite (D) on marque trois points O, O' et P tels que $P \in [OO']$. Construire deux demi-droites $[OA)$ et $[O'A')$ de supports parallèles et non incluses dans un même demi-plan de bord (D).

Démontrer que les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{A'O'P}$ sont isométriques.

b) **Angles de triangles isométriques.**

Dans un triangle ABC, les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ sont appelés angles du triangle et généralement notés $\hat{B}$, $\hat{C}$ et $\hat{A}$, du nom de leur sommet.
Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ isométriques et i l'isométrie qui, aux points A, B, C associe respectivement A', B', C'.



Il résulte de la définition d'un angle isométrique à un angle donné que : $i(\hat{A}) = \hat{A}'$, $i(\hat{B}) = \hat{B}'$ et $i(\hat{C}) = \hat{C}'$.

On énonce :

Théorème

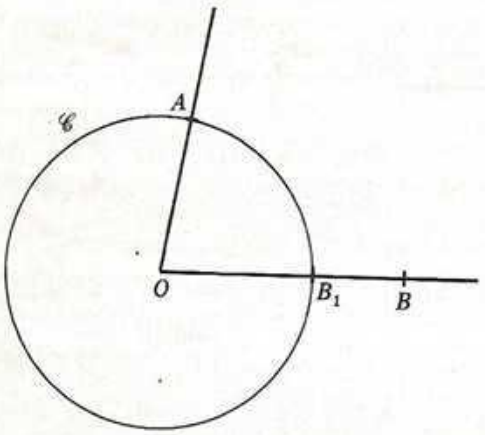
Si deux triangles sont isométriques, alors leurs angles sont isométriques deux à deux.

Attention : vérifier que la réciproque du théorème précédent est fausse.

c) **Reproduire un angle.**

Étant donné un angle $\widehat{AOB}$, ni plat, ni nul, construire un angle qui lui est isométrique.

Construction pratique :



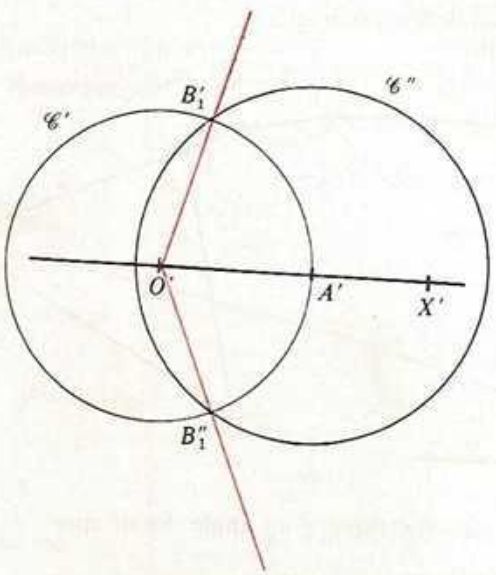
Choisir un point O'.

Le sommet est fixé.

Choisir une demi-droite $[O'X')$.

Un côté est fixé.

Construire le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon OA.
B_1 est le point d'intersection de $[OB)$ avec $\mathscr{C}$.



Construire le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O', de même rayon OA.
A' est le point d'intersection de $[O'X')$ avec $\mathscr{C}'$.

Construire le cercle $\mathscr{C}''$ de centre A', de rayon AB_1. $\mathscr{C}''$ coupe $\mathscr{C}'$ en deux points B'_1 et B''_1. (Justifier.)

Démontrer que :

— les angles $\widehat{A'O'B'_1}$ et $\widehat{A'O'B''_1}$ sont isométriques à l'angle $\widehat{AOB}$.

— les angles $\widehat{A'O'B'_1}$ et $\widehat{A'O'B''_1}$ sont symétriques par rapport à $(O'X')$.

Ces deux angles, symétriques par rapport à $(O'X')$ sont inclus respectivement dans chacun des demi-plans de bord $(O'X')$.

Démontrer qu'il n'existe pas d'autre angle de sommet O', de côté $[O'X')$ isométrique à $\widehat{AOB}$.

Étudier les cas où :

— $\widehat{AOB}$ est un angle plat,

— $\widehat{AOB}$ est un angle nul.

On énonce :

Théorème

Étant donné :

- **un angle $\widehat{AOB}$**
- **une demi-droite $[O'X)$**
- **un demi-plan $\mathscr{P}_1$ de bord $(O'X)$**

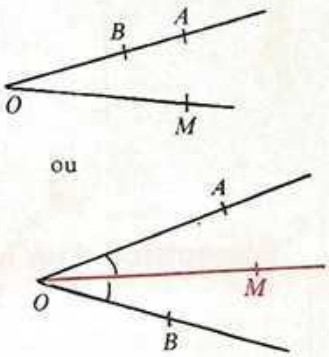
il existe un angle et un seul

- **isométrique à $\widehat{AOB}$**
- **dont un côté est la demi-droite $[O'X)$**
- **inclus dans le demi-plan $\mathscr{P}_1$.**

On en déduit le théorème :

$\widehat{AOM}$ iso $\widehat{MOB}$ (équivaut à)

- $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$
  ou
- $\widehat{AOM}$ est symétrique de $\widehat{MOB}$ par rapport à (OM).



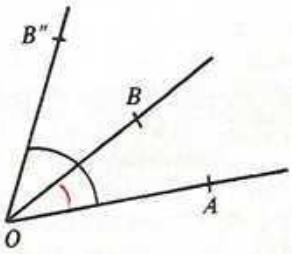
Conclusion : Un angle géométrique $\hat{\alpha}$ étant donné par un de ses représentants, en appliquant le programme de construction qui précède, on obtient un autre représentant du même angle géométrique.

d) **Angles aigus. Angles obtus.**

On se propose de comparer deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$. Dans le demi-plan $[(OA), B)$, construisons l'angle $\widehat{AOB''}$ isométrique à $\widehat{A'O'B'}$.

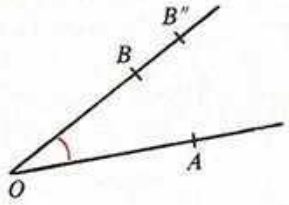
Trois cas peuvent se présenter :

1er cas



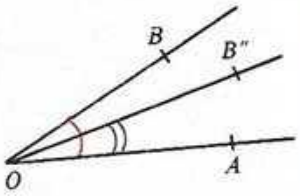
$[OA\,;OB] \subset [OA\,;OB'']$ et $\widehat{AOB} \neq \widehat{AOB''}$.
On dit alors que $\widehat{AOB}$ est *plus petit que* $\widehat{A'O'B'}$.

2e cas



$\widehat{AOB} = \widehat{AOB''}$
Dans ce cas, les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B''}$ sont isométriques. Pourquoi ?

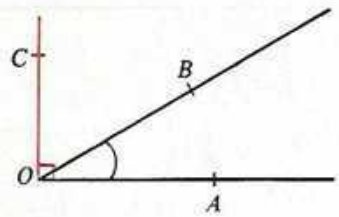
3e cas



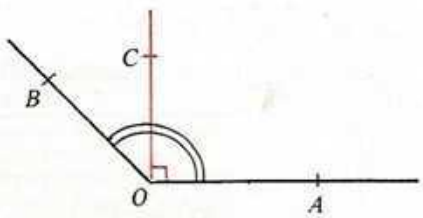
$[OA\,;OB''] \subset [OA\,;OB]$ et $\widehat{AOB''} \neq \widehat{AOB}$.
On dit alors que $\widehat{AOB}$ est *plus grand que* $\widehat{A'O'B'}$.

Définitions

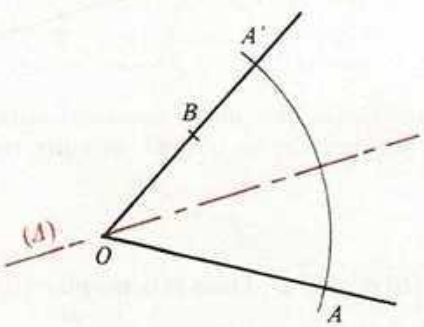
Un angle non nul, plus petit qu'un angle droit, est appelé **angle aigu.**



Un angle plus grand qu'un angle droit et différent de l'angle plat est appelé **angle obtus.**



4) Bissectrice d'un angle



a) Considérons un angle $\widehat{AOB}$ ni nul ni plat.

On désigne par A' le point de $[OB)$ tel que :

$$d(O, A) = d(O, A')\,.$$

Soit (Δ) la médiatrice de $[AA']$. $O \in (\Delta)$. Pourquoi ?

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ)

$S_{(\Delta)}$	
O	O
A	A'
A'	A

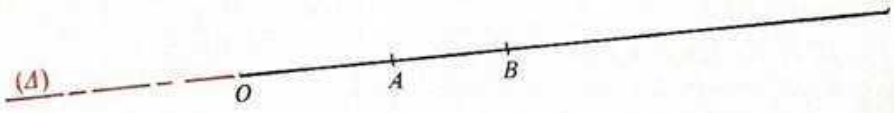
$S_{(\Delta)}([OA)) = [OB)$
$S_{(\Delta)}([OB)) = [OA)$
$S_{(\Delta)}(\widehat{AOB}) = \widehat{AOB}$

(Δ) est donc un axe de symétrie de $\widehat{AOB}$.
On admettra que cet axe de symétrie est unique.

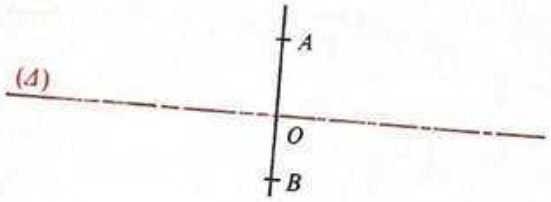
Cas particuliers :

1. Si $\widehat{AOB}$ est un angle nul, la symétrie d'axe (OA) est telle que

$$S_{(OA)}(\widehat{AOB}) = \widehat{AOB}.$$



2. Si $\widehat{AOB}$ est un angle plat, toute droite perpendiculaire à la droite (AB) est un axe de symétrie de cette droite ; la droite (AB) en est un également ; toutefois seule la symétrie ayant pour axe la perpendiculaire en O à (AB) fait correspondre à la demi-droite $[OA)$ la demi-droite $[OB)$.



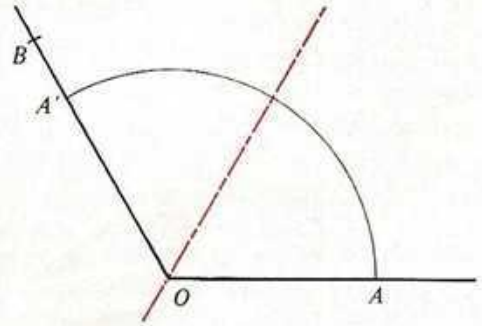
Définition

On appelle bissectrice **d'un angle l'axe de la symétrie qui à chaque côté de l'angle fait correspondre l'autre côté.**

Conséquences :

— La bissectrice d'un angle passe par le sommet de cet angle.
— La bissectrice d'un angle non plat est l'axe de symétrie de cet angle.
— La bissectrice d'un angle plat $\widehat{AOB}$ est la perpendiculaire en O à (AB).

b) **Construction de la bissectrice d'un angle.**



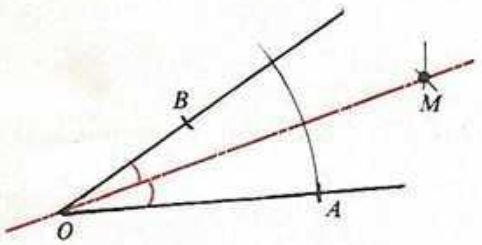
On donne un angle $\widehat{AOB}$ non nul.
A' étant le point de $[OB)$ tel que

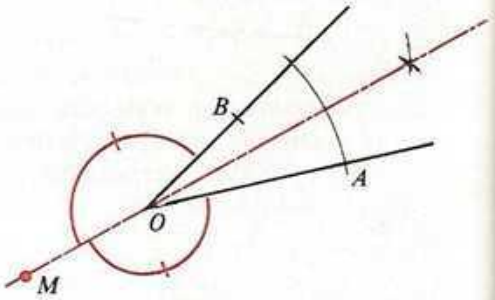
$$d(O, A) = d(O, A'),$$

on a vu que la bissectrice de $\widehat{AOB}$ est la médiatrice de $[AA']$.
Rédiger un programme de construction de la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

c) **Propriétés de la bissectrice d'un angle.**

1. Si M est un point de la bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$ distinct de O, démontrer que les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{MOB}$ sont isométriques.





2. Étant donné un angle non nul $\widehat{AOB}$, montrer que si M est un point tel que $\widehat{AOM}$ iso $\widehat{MOB}$, alors M appartient à la bissectrice de $\widehat{AOB}$ (utiliser le théorème du paragraphe 3 *c*).
En conclusion, on énonce :

Théorème

$\widehat{AOB}$ non nul

(OM) est bissectrice de $\widehat{AOB}$ (équivaut à) **$\widehat{AOM}$ iso $\widehat{MOB}$.**

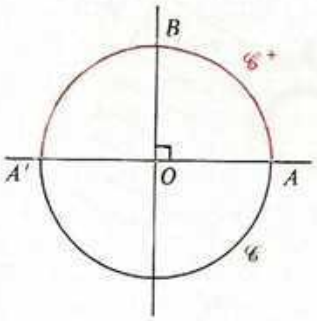
Exercices

1. Soit ABC un triangle isocèle en A.
Démontrer que la hauteur issue de A est la bissectrice de l'angle $\hat{A}$.

2. Démontrer que tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des supports des côtés de cet angle.

3. Démontrer que la figure formée par deux droites sécantes admet deux axes de symétrie perpendiculaires ; préciser leur nature. Examiner le cas où les deux droites sécantes sont perpendiculaires.

2 Mesure des angles



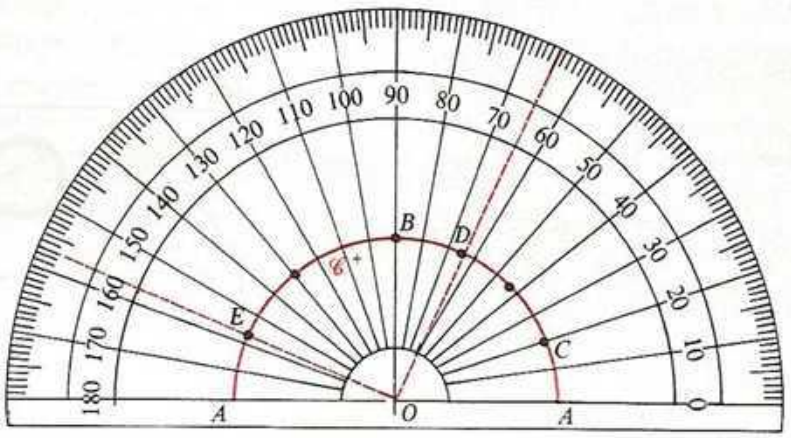
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, A, B), considérons le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Soit A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.
Le demi-cercle de diamètre $[AA']$ contenant B est l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ dont les ordonnées dans le repère (O, A, B) sont positives; on le notera $\mathscr{C}^+$.

1) Graduation de $\mathscr{C}^+$

a) **Manipulations.**

1. *Division régulière de* $\mathscr{C}^+$

A l'aide d'un rapporteur centré en O, graduons $\mathscr{C}^+$ comme sur la figure suivante. On joint chaque point de la graduation du rapporteur au centre O de $\mathscr{C}$. Chaque droite ainsi tracée coupe $\mathscr{C}^+$ en un point. L'ensemble des points ainsi obtenus est appelé DIVISION RÉGULIÈRE du demi-cercle $\mathscr{C}^+$.



Pour repérer les points de cette division, on leur associe les entiers indiqués sur le rapporteur. Au point A est associé le nombre 0, au point A' le nombre 180. Indiquer les nombres correspondant aux points B, C, D, E de la figure. Marquer les points F, G repérés respectivement par 43 et 126.

2. *Affinage de la division*

Agrandissons le dessin de $\mathscr{C}^+$. Soit (Δ) la médiatrice du segment qui joint A (repéré par zéro) au point repéré par 5. Au point d'intersection de (Δ) et $\mathscr{C}^+$ est associé 2,5.
La médiatrice du segment qui joint ce nouveau point au point A coupe $\mathscr{C}^+$ en un point auquel on associe 1,25.
En appliquant systématiquement ce procédé, on marquera les points repérés par :

0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; ...
puis 0,25 ; 0,75 ; 1,25 ; 1,75 ; ...
puis 0,125 ; 0,375 ; ...

On peut imaginer ainsi des divisions régulières de $\mathscr{C}^+$ de plus en plus fines, de sorte qu'à tout point M de $\mathscr{C}^+$ on associe un réel unique p de [0 ; 180] et à tout réel de cet intervalle un point unique de $\mathscr{C}^+$.



3. *Vérification de la régularité des divisions obtenues*

Soit M et N deux points de $\mathscr{C}^+$ repérés respectivement par 42 et 5.
Soit P et Q deux autres points de $\mathscr{C}^+$ repérés respectivement par 60,5 et 23,5.
Remarquons que $42 - 5 = 60{,}5 - 23{,}5$. Prendre un compas et comparer $d(M, N)$ et $d(P, Q)$.
Dans l'intervalle [0, 180], prendre quatre réels a, b, c et d tels que $|a - b| = |c - d|$.
Marquer sur $\mathscr{C}^+$ les points E, F, G et H repérés respectivement par a, b, c et d. Prendre un compas et comparer $d(E, F)$ et $d(G, H)$.
Marquer sur $\mathscr{C}^+$ quatre points X, Y, Z et W repérés respectivement par x, y, z et w et tels que $d(X, Y) = d(Z, W)$.
Comparer $|x - y|$ et $|z - w|$.

b) **Mathématisation.**

Les manipulations précédentes nous amènent à *adopter* l'axiome suivant :

Axiome 1

Il existe une bijection g de $\mathscr{C}^+$ sur l'intervalle [0 ; 180].
Cette bijection possède la propriété suivante :

M, N, P, Q appartenant à $\mathscr{C}^+$

$$|g(M) - g(N)| = |g(P) - g(Q)| \quad \text{équivaut à} \quad d(M, N) = d(P, Q).$$

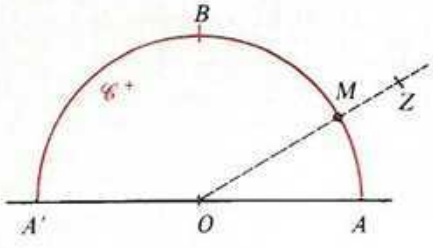
La bijection g est appelée graduation en degrés **de $\mathscr{C}^+$ (pour rappeler qu'elle a été introduite à l'aide d'un rapporteur gradué en degrés).**

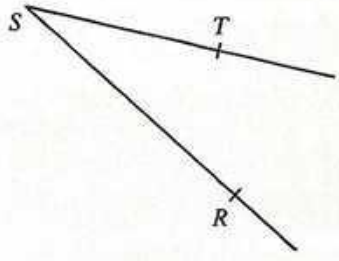
Remarque. Il existe d'autres graduations de $\mathscr{C}^+$, nous en rencontrerons en fin de leçon.

2) Mesure d'un angle

a) **Application de l'ensemble des angles dans $\mathscr{C}^+$.**

Considérons un angle $\widehat{RST}$. Le plan étant muni du repère orthonormé (O, A, B), nous avons vu dans la leçon précédente qu'il existe un angle $\widehat{AOZ}$ et un seul inclus dans le demi-plan $[(OA), B)$ et isométrique à $\widehat{RST}$.





Soit M le point d'intersection de $[OZ)$ et $\mathscr{C}^+$.
On voit que cette construction permet de faire correspondre à un angle $\widehat{RST}$ un point M unique de $\mathscr{C}^+$.
On définit ainsi une application :

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{C}^+$$
$$\widehat{RST} \mapsto M.$$

Nous dirons que M est **l'image sur $\mathscr{C}^+$** de l'angle $\widehat{RST}$.

Exercice Quelle est l'image sur $\mathscr{C}^+$ d'un angle droit, d'un angle plat, d'un angle nul ?

Par définition de l'application f :

$$f(\widehat{RST}) = M \quad \text{signifie que} \quad M \in \mathscr{C}^+ \text{ et } \widehat{RST} \text{ iso } \widehat{AOM}.$$

Propriétés de f :

— Deux angles isométriques ont la même image par f. Pourquoi ?

— Si deux angles ont la même image par f, ils sont isométriques.

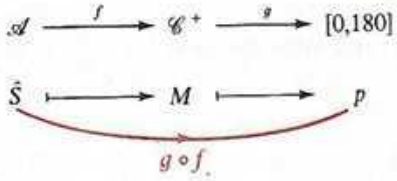
Pourquoi ?

$$f(\hat{S}) = f(\hat{T}) \quad \text{équivaut à} \quad \hat{S} \text{ iso } \hat{T}.$$

b) **Mesure d'un angle en degrés.**

1. *Définition*

A chaque angle de $\mathscr{A}$, f associe un point unique de $\mathscr{C}^+$.
A chaque point de $\mathscr{C}^+$, g associe un réel unique de [0 ; 180].



La composée de ces deux applications permet d'associer à chaque angle $\hat{S}$ du plan, un réel p de [0 ; 180] que nous appellerons : **MESURE en degrés de l'ANGLE $\hat{S}$.**
On note : mes $\hat{S} = p$.
On dit également que $\hat{S}$ est un angle de p degrés.

2. *Propriétés*

— Des propriétés de f et g, on déduit que :

deux angles isométriques ont la même mesure,
deux angles de même mesure sont isométriques,

$$\hat{S} \text{ iso } \hat{K} \quad \text{équivaut à} \quad \text{mes } \hat{S} = \text{mes } \hat{K}.$$

3. *Manipulations* : Marquer sur $\mathscr{C}^+$ les points R, S, T, N tels que $g(R) = 12$, $g(S) = 35$, $g(T) = 121$, $g(N) = 133$.

— Donner les mesures des angles $\widehat{AOR}$, $\widehat{ROS}$, $\widehat{SOT}$, $\widehat{TON}$, $\widehat{NOA'}$, $\widehat{RON}$, $\widehat{SON}$.

— Comparer les angles $\widehat{ROS}$ et $\widehat{RON}$; comparer leurs mesures.

— Comparer la somme des mesures de $\widehat{ROS}$ et $\widehat{SON}$ et la mesure de $\widehat{RON}$.

4. *Mathématisation* : On admettra que la mesure des angles a les propriétés suivantes :

Axiome 2

1. $\hat{R}$ est plus petit que $\hat{T}$ (équivaut à) **mes $\hat{R}$ < mes $\hat{T}$.**

2. $\widehat{RKS}$ et $\widehat{SKT}$ étant deux angles adjacents inclus dans un même demi-plan,

$$\text{mes } \widehat{RKS} + \text{mes } \widehat{SKT} = \text{mes } \widehat{RKT}.$$

Remarque. Dans de nombreux domaines pratiques (géographie, astronomie, navigation aérienne et maritime) on utilise des sous-multiples sexagésimaux du degré (°) : la minute (′) et la seconde (″) d'angle telles que :

$$1° = 60' \quad \text{et} \quad 1' = 60''.$$

Mais l'emploi des calculatrices a développé l'utilisation de sous-multiples décimaux, ainsi au lieu de :

$$63° 30', \quad 115° 15', \quad 28° 12',$$

les calculatrices affichent respectivement :

$$63{,}5°, \quad 115{,}25°, \quad 28{,}2°.$$

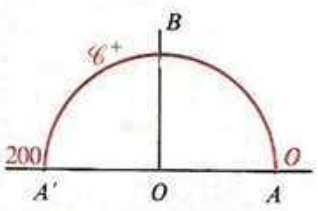
Exercice Compléter le tableau suivant :

Degrés sexagésimaux	9° 45′		5° 20′	37° 5′		56° 15′ 27″	
Degrés décimaux		7,1°			8,666 6°...		23,76°

c) **Changement d'unité de mesure.**

1. *Mesure d'un angle en grades*

Au paragraphe 1 de cette leçon nous avons introduit une bijection du demi-cercle $\mathscr{C}^+$ sur l'intervalle [0 ; 180] ; nous pouvons, tout aussi bien manipuler avec un rapporteur gradué en *grades* de 0 à 200 et introduire une bijection g' de $\mathscr{C}^+$ sur [0 ; 200], ayant des propriétés analogues à celles de g.



On a :

$$g'(A) = 0 \qquad g'(A') = 200.$$

Compléter : $g'(B) = \cdots$

En composant g' avec l'application $f : \mathscr{A} \to \mathscr{C}^+$
$\hat{S} \mapsto M$
on obtient l'application $g' \circ f$ qui à chaque angle $\hat{S}$ associe un réel q de $[0 ; 200]$ que nous appellerons **MESURE en grades** de l'angle $\hat{S}$. On dit également que $\hat{S}$ est un angle de q grades.
On a :

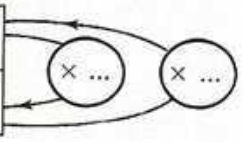
$$\text{mes (grades) } \hat{S} = \frac{200}{180} \times \text{mes (degrés) } \hat{S}$$

ou plus simplement :

$$\text{mes (gr) } \hat{S} = \frac{10}{9} \text{ mes (°) } \hat{S}.$$

Compléter le tableau suivant :

Mesure en °	0	180	1		45		30		
Mesure en gr	0	200		1		150		25	



Remarque. En raison de leur caractère décimal, les mesures d'angles en grades tendent à supplanter les mesures d'angles en degrés dans certains domaines tels que l'arpentage, ...

2. *Mesure d'un angle en radians*

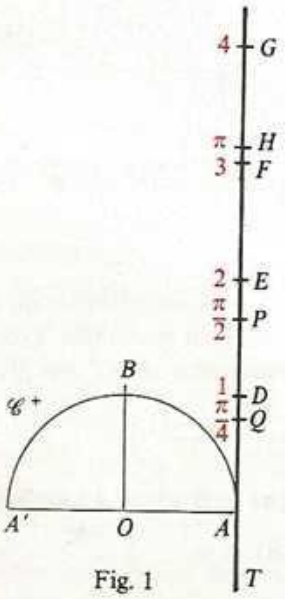


Fig. 1

Considérons le demi-cercle $\mathscr{C}^+$ et la tangente (AT) au cercle en A (Fig. 1). Soit D le point de la droite (AT) situé dans le demi-plan $[(AA'), B)$ et tel que $d(A, D) = 1$. Graduons (AT) en prenant (A, D) comme repère.
Marquons sur (AT) les points E, F, G, H, P et Q d'abscisses respectives 2 ; 3 ; 4 ; π ; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.
Sur $[AD)$, on place un fil sur lequel on marque d'un trait les points du fil coïncidant avec A, D, E, F, G, H, P et Q.

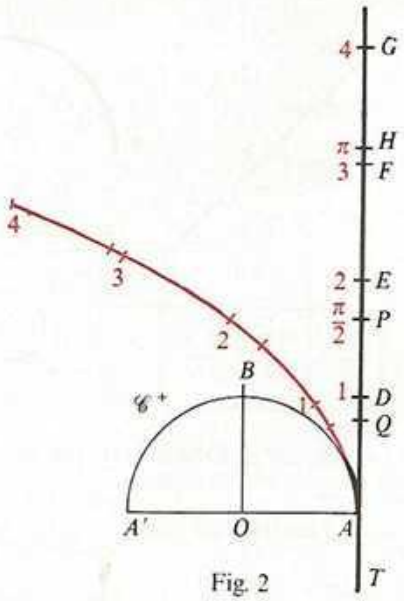


Fig. 2

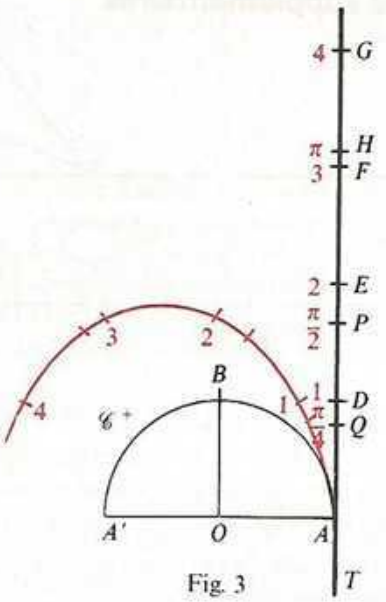


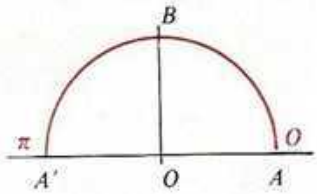
Fig. 3

Les figures 2 et 3 montrent ce fil que l'on enroule autour du demi-cercle $\mathscr{C}^+$. Ainsi on remarque que l'on va faire coïncider des points du fil avec des points de $\mathscr{C}^+$.
Avec quel point de $\mathscr{C}^+$ va coïncider le point du fil d'abscisse π ? Celui d'abscisse 0 ?
Par l'enroulement du fil autour de $\mathscr{C}^+$, on fait ainsi correspondre à chaque point de $\mathscr{C}^+$ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.
Quel est le réel de $[0, \pi]$ qui va correspondre au point B ?
Trouver un moyen de placer avec le plus de précision possible les points de $\mathscr{C}^+$ auxquels correspondent les nombres $\frac{\pi}{4}$, 1, 2 et 3. (Rappel : lorsque le cercle est gradué en degrés, au point A' correspond le nombre 180 et au point B le nombre 90.)

A la suite de ces manipulations, comme nous l'avons fait pour les degrés et les grades, nous admettrons qu'il existe une bijection g'' de $\mathscr{C}^+$ sur $[0\,;\pi]$ ayant des propriétés analogues à celles de g et g'.
En composant g'' avec f, on obtient une application de $\mathscr{A}$ dans $[0\,;\pi]$ qui, à chaque angle $\hat{S}$ associe un réel r de cet intervalle, appelé *MESURE en radians* de l'angle $\hat{S}$. On dit également que S est un angle de r radians (en abrégé : rd).

On a :

$$\text{mes (radians) } \hat{S} = \frac{r}{180} \text{ mes (degrés) } \hat{S}.$$



Compléter le tableau suivant :

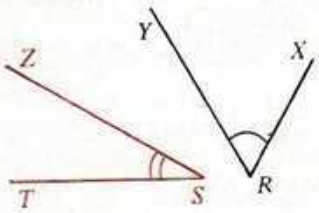
Mesures en °	0	30	45	60	90				180
Mesures en rd	0					$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	

d) **Exercices**

1. Soit un triangle ABC isocèle en A. Démontrer que les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont même mesure.
2. Démontrer que les angles d'un triangle équilatéral ont même mesure.

3) Angles complémentaires. Angles supplémentaires

a) **Angles complémentaires.**



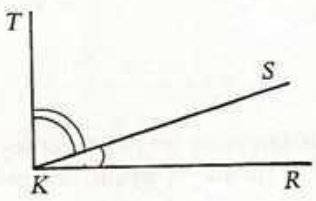
Définition

On appelle angles complémentaires **deux angles dont la somme des mesures est égale à la mesure d'un angle droit.**

Soit $\hat{R}$ et $\hat{S}$ deux angles complémentaires. La mesure de $\hat{R}$ en degrés est 32. Quelle est la mesure de $\hat{S}$?

— Si deux angles sont complémentaires, l'un d'eux peut-il être obtus?

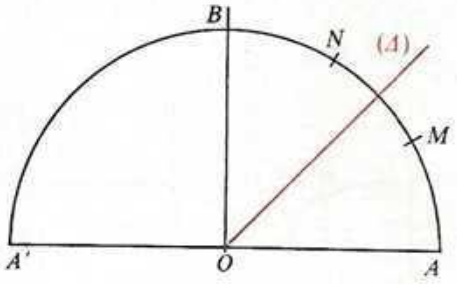
— Si α est la mesure en degrés d'un angle aigu $\hat{R}$ et si $\hat{S}$ est un angle complémentaire de $\hat{R}$, quelle est la mesure de $\hat{S}$?



Considérons deux angles $\widehat{RKS}$ et $\widehat{SKT}$, adjacents et complémentaires.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RKT}$?

On énonce :

Si deux angles $\widehat{RKS}$ et $\widehat{SKT}$ sont adjacents et complémentaires, l'angle $\widehat{RKT}$ est droit.

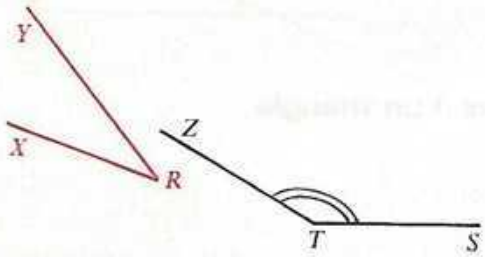


— Soit $\hat{R}$ et $\hat{S}$ deux angles complémentaires.
Soit M l'image de $\hat{R}$ sur $\mathscr{C}^+$ et N celle de $\hat{S}$ sur $\mathscr{C}^+$. On désigne par (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.
Que représente (Δ) pour le segment $[MN]$?

On énonce :

> Si deux angles sont complémentaires, leurs images sur $\mathscr{C}^+$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

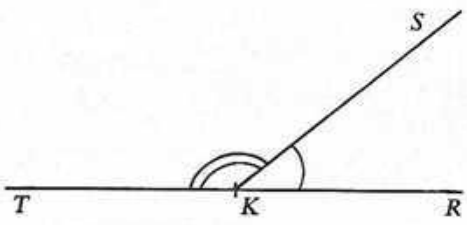
b) **Angles supplémentaires.**



Définition

> **On appelle** angles supplémentaires **deux angles dont la somme des mesures est égale à la mesure d'un angle plat.**

— Soit $\hat{R}$ et $\hat{T}$ deux angles supplémentaires. La mesure de $\hat{R}$ en degrés est 32. Quelle est la mesure de $\hat{T}$?
— Deux angles aigus peuvent-ils être supplémentaires ?
Si α est la mesure en degrés d'un angle $\hat{R}$ et si $\hat{T}$ est un angle supplémentaire de $\hat{R}$. Quelle est la mesure de $\hat{T}$?

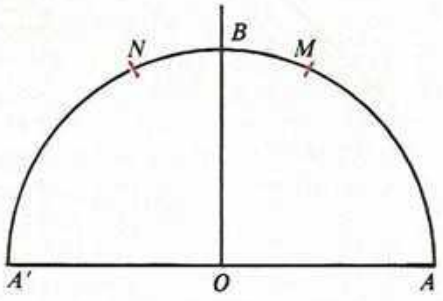


Considérons deux angles $\widehat{RKS}$ et $\widehat{SKT}$ adjacents et supplémentaires.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RKT}$?

On énonce :

> Si deux angles $\widehat{RKS}$ et $\widehat{SKT}$ sont adjacents et supplémentaires, l'angle $\widehat{RKT}$ est plat.

Soit $\hat{R}$ et $\hat{T}$ deux angles supplémentaires.
Soit M l'image de $\hat{R}$ et N l'image de $\hat{T}$ sur $\mathscr{C}^+$. Que représente (OB) pour le segment $[MN]$?

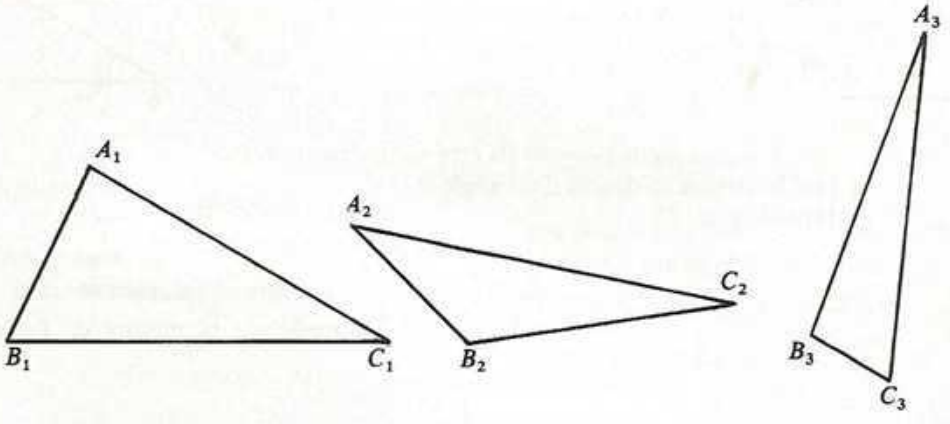


On énonce :

> Si deux angles sont supplémentaires, leurs images sur $\mathscr{C}^+$ sont symétriques par rapport à (OB).

4) Somme des mesures des angles d'un triangle

a) **Manipulations.**

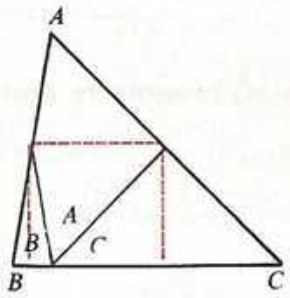


1. Sur le dessin ci-dessus, mesurer à l'aide d'un rapporteur gradué en degrés chacun des angles des trois triangles représentés.

Calculer alors :

1) mes $\hat{A}_1$ + mes $\hat{B}_1$ + mes $\hat{C}_1$
2) mes $\hat{A}_2$ + mes $\hat{B}_2$ + mes $\hat{C}_2$
3) mes $\hat{A}_3$ + mes $\hat{B}_3$ + mes $\hat{C}_3$.

Que constate-t-on ?



2. Dans une feuille de papier, découper un triangle reproduisant le dessin ci-contre.

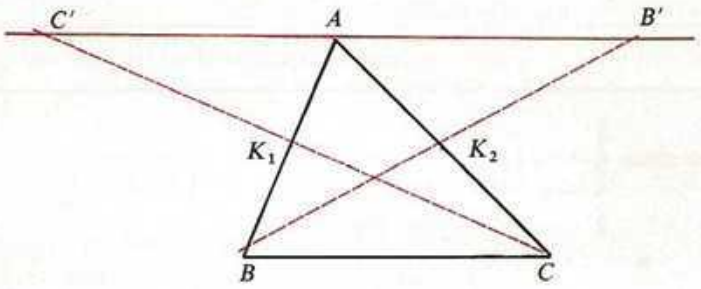
— Tracer la droite passant par les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

— Plier la feuille selon cette droite de façon à amener le point A sur (BC). Plier ensuite cette feuille de façon à amener B sur A. Plier enfin la feuille de façon à amener C sur B.

On remarque « expérimentalement » que la réunion des trois secteurs angulaires marqués A, B, C est un secteur angulaire plat.

b) **Raisonnons.**

Soit un triangle ABC.
Soit K le milieu de $[AB]$ et K_2 le milieu de $[AC]$.



On considère les symétries centrales de centres K_1 et K_2. On a :

S_{K_1}

A	B
B	A
C	C'

et

S_{K_2}

A	C
B	B'
C	A

En déduire que :

— $(BC) /\!/ (AC')$ ①
— mes $\widehat{CBA}$ = mes $\widehat{C'AB}$ ②
— $[CC'] \cap [AB] = \{ K_1 \}$. ③

En déduire que :

— $(BC) /\!/ (B'A)$ ④
— mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{CAB'}$ ⑤
— $[BB'] \cap [AC] = \{ K_2 \}$. ⑥

Déduire de ① et ④ que C', A et B' sont alignés. Montrer que A est le milieu de $[B'C']$ et que l'angle $\widehat{C'AB'}$ est un angle plat.
Déduire de ③ que $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{BAC}$ sont adjacents et inclus dans le demi-plan de bord (C', B') et contenant B.

On a donc

$$\text{mes } \widehat{C'AB} + \text{mes } \widehat{BAC} = \text{mes } \widehat{C'AC}. \quad ⑦$$

Montrer que $\widehat{C'AC}$ et $\widehat{CAB'}$ sont adjacents et inclus dans le demi-plan de bord $(B'C')$ et contenant B.
En déduire que

$$\text{mes } \widehat{C'AC} + \text{mes } \widehat{CAB'} = \text{mes } \widehat{C'AB'}. \qquad ⑧$$

En utilisant les égalités ②, ⑤, ⑦ et ⑧ on obtient :

$$\text{mes } \widehat{CBA} + \text{mes } \widehat{BAC} + \text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{C'AB'}.$$

Or l'angle $\widehat{C'AB'}$ est plat, sa mesure en degrés est donc 180.
En conclusion : l'unité étant le degré,

$$\text{mes } \widehat{ABC} + \text{mes } \widehat{CAB} + \text{mes } \widehat{BCA} = 180$$

$$\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{C} = 180.$$

On énonce :

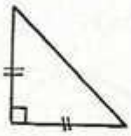
Théorème

La somme des mesures en degrés des angles d'un triangle est égale à 180.

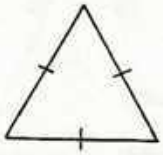
Exercice Dans un triangle ABC, désignons par X un point de (BC) n'appartenant pas à $[BC]$. Démontrer que :

$$\text{mes } \widehat{ABX} = \text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{C}.$$

c) **Conséquences.**



1. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
Cas particulier : Démontrer que les angles aigus d'un triangle rectangle isocèle sont des angles de 45°.



2. Démontrer que les angles d'un triangle équilatéral sont des angles de 60°.

Exercices

1. Démontrer que si un triangle a deux angles complémentaires, ce triangle est rectangle.
2. Démontrer que si les deux angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ d'un triangle ABC ont même mesure, ce triangle est isocèle en A. (Utiliser la symétrie orthogonale par rapport à la hauteur (AH).)
3. Démontrer que si un triangle a deux angles de 60°, ce triangle est équilatéral.
4. Démontrer que si un triangle isocèle a un angle de 60°, ce triangle est équilatéral.
5. Un triangle peut-il avoir deux angles obtus ? Pourquoi ?

3 Angles et Trigonométrie (*)

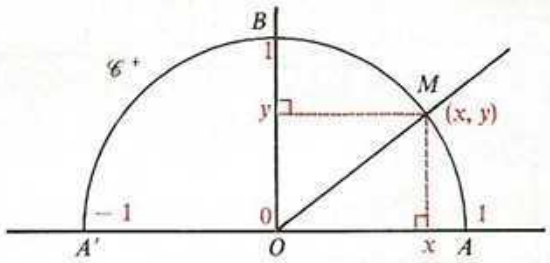
1) Cosinus et sinus d'un angle

a) **Application de $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.**

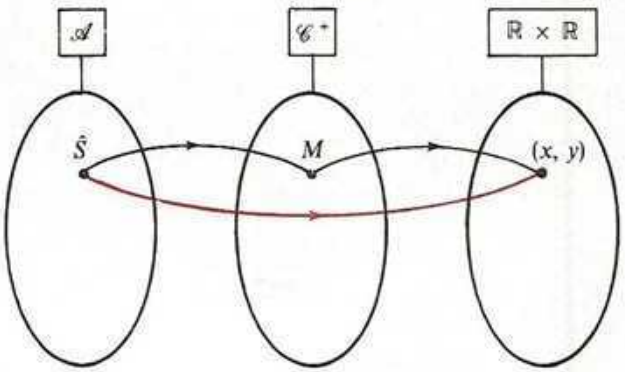
Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, A, B) ; $\mathscr{C}^+$ est le demi-cercle defini précédemment. $\mathscr{C}^+$ est appelé *demi-cercle trigonométrique.*

Rappels :

— A chaque angle $\hat{S}$ on peut associer un point unique M de $\mathscr{C}^+$.
— A chaque point de $\mathscr{P}$ est associé un couple unique de réels, les coordonnées de ce point dans le repère (O, A, B) ; en particulier, à tout point de $\mathscr{C}^+$, on peut associer le couple unique de ses coordonnées (x, y).



Conséquence : A chaque angle $\hat{S}$ on peut donc associer un couple unique de réels (x, y), qui est le couple de coordonnées du point M de $\mathscr{C}^+$, selon le schéma suivant :



Remarque. A chaque angle $\hat{S}'$ isométrique à $\hat{S}$ est associé ce même couple de réels (x, y). Pourquoi ?

(*) Le mot trigonométrie provient du grec trigonon (triangle) et metron (mesure). La trigonométrie est née de l'étude des phénomènes astronomiques ; le problème mathématique essentiel étant celui-ci : trouver les mesures des éléments d'un triangle (côtés et angles) quand on connaît certaines d'entre elles.
La première table de trigonométrie semble être due à l'astronome grec Hipparques (– 180 ; – 125).

Exercice Quel est le couple de réels associé à un angle nul ?
Quel est le couple de réels associé à un angle droit ?
Quel est le couple de réels associé à un angle plat ?

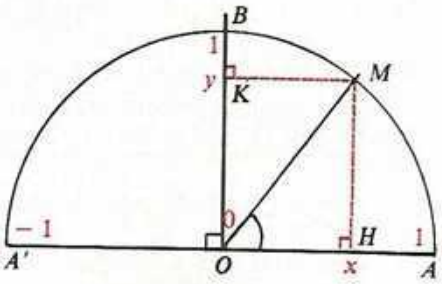
Ainsi se trouve définie une application de l'ensemble des angles $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathscr{A} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\hat{S} \mapsto (x, y).$$

Cette application n'est pas bijective. Pourquoi ?

b) **Définitions.**

On appelle cosinus **d'un angle $\hat{S}$ l'abscisse de son image sur le demi-cercle $\mathscr{C}^+$.**
On appelle sinus **d'un angle $\hat{S}$ l'ordonnée de son image sur le demi-cercle $\mathscr{C}^+$.**



On note :

$$\cos \hat{S} = x \qquad \sin \hat{S} = y .$$

On lit : « cosinus S égale x », « sinus S égale y ».

Exercices

1. *a*) Quelle est la nature de l'angle $\widehat{AOA}$?
Quel est le cosinus d'un angle nul ?
Quel est le sinus d'un angle nul ?

b) Quelle est la nature de l'angle $\widehat{AOB}$?
Quel est le cosinus d'un angle droit ?
Quel est le sinus d'un angle droit ?

c) Quelle est la nature de l'angle $\widehat{AOA'}$?
Quel est le cosinus d'un angle plat ?
Quel est le sinus d'un angle plat ?

2. Démontrer que :

$$\hat{S} \text{ iso } \hat{S}' \quad \text{(équivaut à)} \quad \begin{cases} \text{et} & \cos \hat{S} = \cos \hat{S}' \\ & \sin \hat{S} = \sin \hat{S}' . \end{cases}$$

3. *a*) Démontrer que pour tout point $M(x, y)$ de $\mathscr{C}^+$, on a : $x^2 + y^2 = 1$.
En déduire que pour tout angle $\hat{S}$ on a :

$$(\cos \hat{S})^2 + (\sin \hat{S})^2 = 1$$

plus simplement, on écrira :

$$\cos^2 \hat{S} + \sin^2 \hat{S} = 1 .$$

b) Démontrer que : quel que soit l'angle $\hat{S}$,

$$-1 \leqslant \cos \hat{S} \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \sin \hat{S} \leqslant 1.$$

Compléter le tableau suivant :

$\hat{S}$	$\cos \hat{S}$	$\sin \hat{S}$
nul	...	0
aigu	$0 < \cos \hat{S} < 1$	$... < \sin \hat{S} < ...$
droit	0	...
obtus	$... < \cos \hat{S} < ...$	$... < \sin \hat{S} < ...$
plat	...	...

4. *a*) Placer sur $\mathscr{C}^+$ l'image M d'un angle $\hat{S}$ tel que $\cos \hat{S} = -\frac{1}{2}$.

b) Placer sur $\mathscr{C}^+$ l'image N d'un angle aigu $\hat{T}$ tel que $\sin \hat{T} = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos \hat{T}$. Existe-t-il un angle obtus dont le sinus est $\frac{3}{5}$? Si oui, calculer le cosinus de cet angle.

c) **Cosinus et sinus d'un angle mesuré en degrés (en grades ou en radians).**

Conventions : Soit p la mesure en degrés d'un angle $\hat{S}$ on écrit

$$\cos \hat{S} = \cos p^0 ;$$
$$\sin \hat{S} = \sin p^0 .$$

Soit q la mesure en grades d'un angle $\hat{S}$ on écrit

$$\cos \hat{S} = \cos q \text{ gr} ;$$
$$\sin \hat{S} = \sin q \text{ gr} .$$

Soit r la mesure en radians d'un angle $\hat{S}$ on écrit

$$\cos \hat{S} = \cos r \text{ rd} ;$$
$$\sin \hat{S} = \sin r \text{ rd}.$$

On note uniquement dans le cas où la mesure de $\hat{S}$ est donnée en radians :

$$\cos \hat{S} = \cos r ;$$
$$\sin \hat{S} = \sin r .$$

Exemples

Le cosinus d'un angle de 35° est noté cos 35°.
Le cosinus d'un angle de 2 radians est noté cos 2

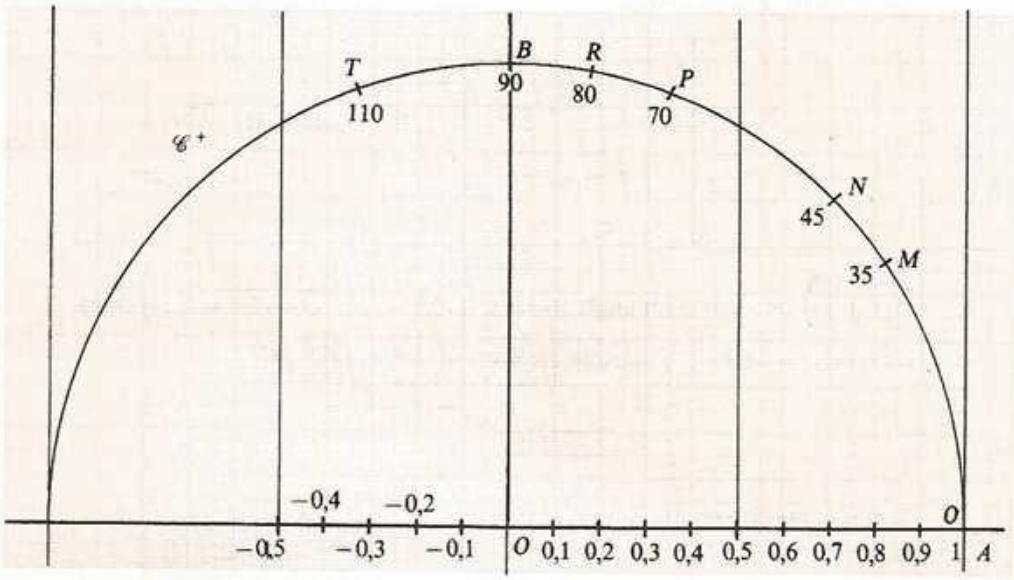
$$\cos 45^\circ = \cos 50 \text{ gr} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Exercices

1. Compléter : cos 0° = sin 0° =
cos 90° = sin 90° =
cos 180° = sin 180° = .

2. Lecture du cosinus et du sinus d'un angle mesuré en degré à l'aide du demi-cercle $\mathscr{C}^+$.

p étant la mesure de $\widehat{AOM}$, pour avoir une lecture plus précise de cos p^0 et de sin p^0, agrandissons le dessin de $\mathscr{C}^+$ sur du papier millimétré. Marquons sur $\mathscr{C}^+$ les points M, N, P, R et T tels que mes $\widehat{AOM} = 35$, mes $\widehat{AON} = 45$, mes $\widehat{AOP} = 70$, mes $\widehat{AOR} = 80$ et mes $\widehat{AOT} = 110$.



Compléter le tableau :

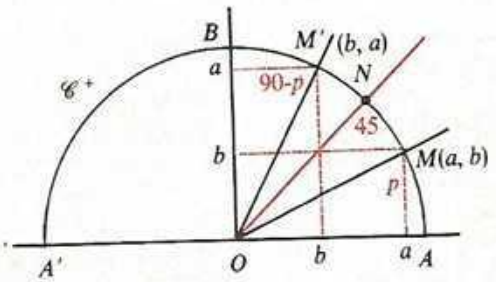
Mesure de $\hat{S}$ en degrés	Arrondi à la deuxième décimale de cos $\hat{S}$	Arrondi à la deuxième décimale de sin $\hat{S}$
35 45 70 80 110		

2) Sinus et cosinus de deux angles complémentaires

Rappel : L'unité de mesure des angles étant le degré, $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont **complémentaires** si

$$\text{mes } \hat{R} + \text{mes } \hat{S} = 90 .$$

Si mes $\hat{R} = p$ alors mes $\hat{S} = 90 - p$.
Soit M et M' les images respectives de $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sur $\mathscr{C}^+$. Nous savons que si $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont deux angles complémentaires, leurs images sur $\mathscr{C}^+$ sont symétriques par rapport à la bissectrice (ON) de l'angle $\widehat{AOB}$.



Soit (a, b) le couple de coordonnées de M dans le repère (O, A, B) ; montrer que (b, a) est le couple de coordonnées de M' dans le repère (O, A, B).
Compléter :

$$\cos \hat{R} = \qquad \sin \hat{R} =$$
$$\cos \hat{S} = \qquad \sin \hat{S} = .$$

Conclusion :

> Pour tout réel p élément de $[0 ; 90]$
> $$\cos p^0 = \sin (90 - p)^0$$
> $$\sin p^0 = \cos (90 - p)^0 .$$

Remarque. « **co**sinus » signifie « sinus du **co**mplément ».

Exercices

1) Compléter : $\cos 30^o = \sin \ldots$ $\quad \cos 70^o = \sin \ldots$
$\sin 46^o = \cos \ldots$ $\quad \sin 10^o = \cos \ldots$

2) Calculer $\cos 45^o$ et $\sin 45^o$ (on utilisera $\cos^2 \hat{S} + \sin^2 \hat{S} = 1$).

3) Écrire les formules encadrées ci-dessus en prenant le radian comme unité.

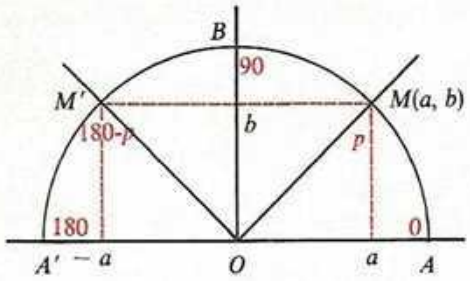
3) Sinus et cosinus de deux angles supplémentaires

Rappel : L'unité de mesure étant le degré, $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont **supplémentaires** si

$$\text{mes } \hat{R} + \text{mes } \hat{S} = 180 .$$

Si mes $\hat{R} = p$, quelle est la mesure de $\hat{S}$?

Soit M et M' les images respectives de $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sur $\mathscr{C}^+$. Nous savons que si $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont supplémentaires, leurs images sur $\mathscr{C}^+$ sont symétriques par rapport à (OB).



Si (a, b) est le couple de coordonnées de M, quel est le couple de coordonnées de M' ?

Compléter : $\cos \hat{R} =$ $\sin \hat{R} =$

$\cos \hat{S} =$ $\sin \hat{S} =$

Conclusion :

> Pour tout réel p élément de $[0 ; 180]$
> $\cos p^0 = -\cos (180 - p)^0$
> $\sin p^0 = \sin (180 - p)^0$.

Exercices

1) Compléter : $\cos 115^o = -\cos \ldots$
$\sin 91^o = \sin \ldots$
$\sin 180^o = \sin \ldots$
$\cos 180^o = -\cos \ldots$.

2) Écrire les formules encadrées ci-dessus en prenant le radian comme unité.

4) Tables trigonométriques

a) Recherche de $\cos p^0$ et $\sin p^0$.

Nous avons vu :

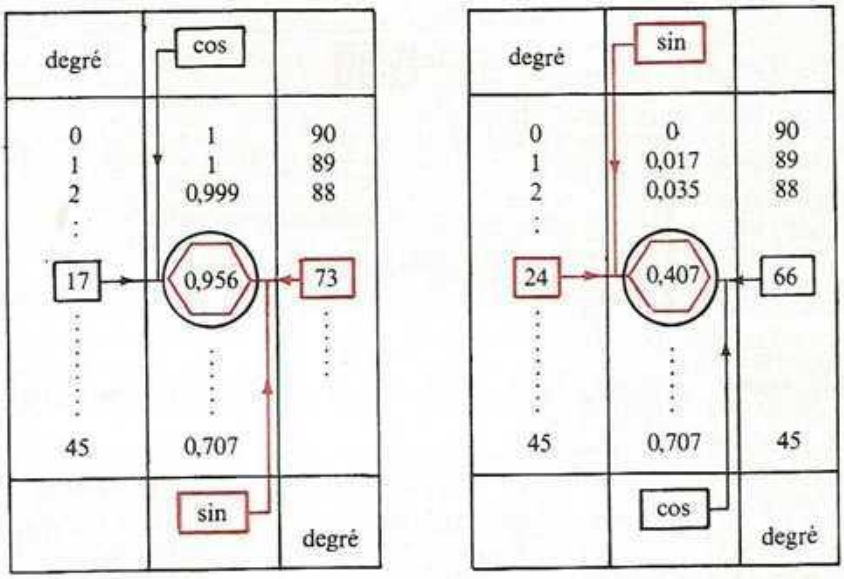
— que le dessin de $\mathscr{C}^+$ sur papier millimétré permet de trouver des valeurs approchées de $\cos p^0$ et de $\sin p^0$, pour $p \in [0 ; 180]$ (paragraphe 1 précédent),

— que si l'on connaît le cosinus et le sinus d'un angle aigu de p degrés, on peut trouver le cosinus et le sinus d'un angle de $(180 - p)$ degrés (paragraphe 3 précédent),

— que si l'on connaît le cosinus et le sinus d'un angle dont la mesure p en degrés est inférieure à 45, on peut trouver le cosinus et le sinus d'un angle de $(90 - p)$ (paragraphe 2 précédent).

Il existe des tables appelées **tables trigonométriques** qui donnent les arrondis à la troisième décimale de $\cos p^0$ et $\sin p^0$ pour chaque entier p de l'intervalle $[0 ; 45]$.

Ces tables évitent d'avoir à faire des mesures sur papier millimétré et permettent d'obtenir le cosinus et le sinus de n'importe quel angle dont la mesure en degrés est un naturel compris entre 0 et 180.
En effet, si nous connaissons cos 44°, nous connaissons aussi sin 46° ; pourquoi ?
De même, si nous connaissons sin 23°, nous connaissons cos 67°.
Si nous connaissons sin 23°, nous connaissons aussi sin 157° ; pourquoi ?
Enfin, si nous connaissons cos 44°, nous pouvons affirmer que cos 136° = − cos 44°.
Pourquoi ?
Une table trigonométrique (voir p. 360) s'utilise comme l'indiquent les schémas ci-dessous.



On lit :

$$\cos 17^\circ \simeq 0{,}956 \qquad \sin 24^\circ \simeq 0{,}407$$
$$\sin 73^\circ \simeq 0{,}956 \qquad \cos 66^\circ \simeq 0{,}407\,.$$

b) **Tangente d'un angle.**

Nous découvrons dans la table de nouveaux nombres : tg 1° ; tg 2° ; tg 3°, ...
« tg p^0 » se lit tangente p degrés.

Définition

Si $\cos p^0 \neq 0$, c'est-à-dire si $p \neq 90$, $\operatorname{tg} p^0 = \dfrac{\sin p^0}{\cos p^0}$.

La table donne pour sin 43° et cos 43° les valeurs approchées respectives 0,682 et 0,731, vérifier que le quotient $\dfrac{0{,}682}{0{,}731}$ donne une valeur approchée de tg 43°.

Remarque : si $p \in]0\,;\,90[$,

$$\text{tg}\,(90 - p)^0 = \frac{\sin\,(90 - p)^0}{\cos\,(90 - p)^0}$$

$$\text{tg}\,(90 - p)^0 = \frac{\cos p^0}{\sin p^0}$$

$$\boxed{\text{tg}\,(90 - p)^0 = \frac{1}{\text{tg}\,p^0}.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } p \text{ de }]0\,;\,90[\,,\quad \text{tg}\,p^0 \times \text{tg}\,(90 - p)^0 = 1\,.}$$

Exercices

1) Compléter $\text{tg}\,43^o = \frac{1}{\text{tg}\,...}$; $\text{tg}\,70^o = \frac{1}{\text{tg}\,...}$.

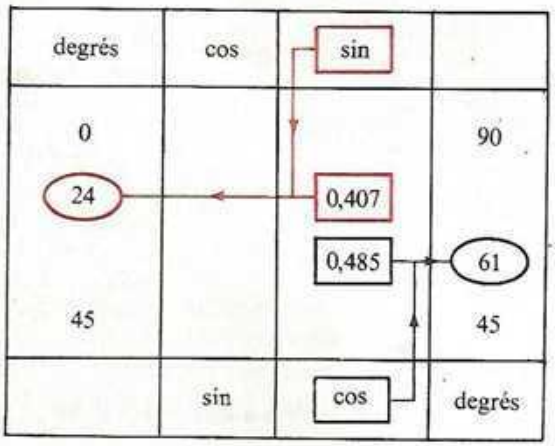
2) Traduire la formule précédente en radians.

3) A l'aide de la table, trouver des valeurs approchées de : tg 13° ; tg 46° ; tg 70° ; tg 89°.

c) **Trouver la mesure en degrés d'un angle aigu connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente.**

Un angle étant donné par sa mesure p en degrés, on peut lire dans la table les valeurs approchées de $\cos p^0$, $\sin p^0$ et $\text{tg}\,p^0$; réciproquement, connaissant $\cos p^0$, $\sin p^0$ ou $\text{tg}\,p^0$, on peut trouver dans la table une valeur de p à 1° près par simple lecture de la table, si p appartient à $[0\,;\,90[$.

Exemple 1



— Un angle aigu dont le sinus est 0,407 a pour mesure 24 à 1 degré près. On écrit : si $\sin p^o = 0{,}407$ alors $p \simeq 24$.

— Un angle aigu dont le cosinus est 0,485 a pour mesure 61 à 1 degré près.
On écrit : si $\cos p^o = 0{,}485$ alors $p \simeq 61$.

Exercices

1. Trouver la mesure d'un angle obtus dont le sinus est 0,407.
2. Trouver la mesure d'un angle obtus dont le cosinus est $-0{,}485$.

Exemple 2

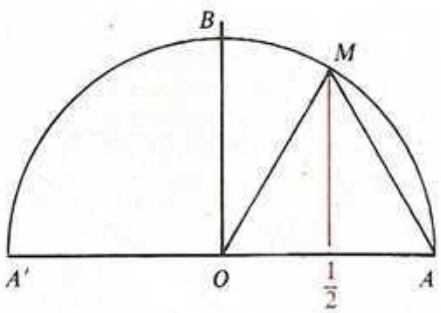
Cherchons la mesure en degrés d'un angle aigu dont le cosinus est 0,329.
Cette valeur ne figure pas dans la table mais elle est comprise entre deux valeurs qui s'y trouvent : $0{,}326 < 0{,}329 < 0{,}342$.

degrés	cos	sin	
19	0,329	0,326	71
20		0,342	70
	sin	cos	degrés

La mesure cherchée est donc comprise entre 70 et 71.

Comme 0,329 est bien plus proche de 0,326 que de 0,342, on prendra 71 pour valeur approchée, de la mesure cherchée.

d) **Sinus, cosinus et tangentes d'angles remarquables.**



1. On a vu que (paragraphe 2 exercice 2) : $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos 135^\circ$ et $\sin 135^\circ$.

On donne la figure ci-contre où M a pour abscisse $\frac{1}{2}$.

Démontrer que le triangle OAM est équilatéral.
En déduire les valeurs exactes de $\cos 60^\circ$ et $\sin 60^\circ$.
Déduire des valeurs précédentes les valeurs exactes de $\cos 30^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\sin 150^\circ$.

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES

Degrés	Sin	tg	$\frac{1}{tg}$	Cos	
0	0,000	0,000	—	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cos	$\frac{1}{tg}$	tg	Sin	Degrés

Compléter le tableau suivant :

degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radians									
sin		$\frac{1}{2}$							
cos		$\frac{\sqrt{3}}{2}$							
tg		$\frac{\sqrt{3}}{3}$							

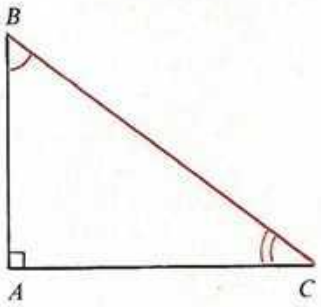
2. A l'aide du tableau de l'exercice précédent, représenter les couples $(p, \sin p^o)$ dans un repère orthonormé. Les suites 0, 30, 45, 60, 90 et sin 0°, sin 30°, sin 45°, sin 60° et sin 90° sont-elles proportionnelles ?

5) Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

a) **Quatre problèmes classiques.**

Dans les quatre problèmes qui suivent les unités sont : le cm pour les mesures des côtés et le degré pour les mesures des angles.

Problème n° 1



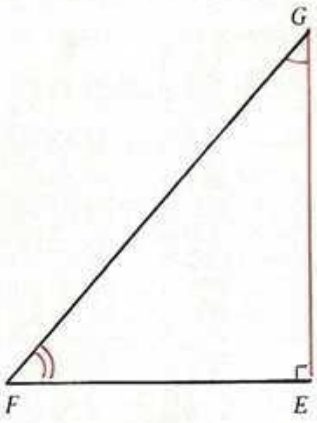
ABC est un triangle rectangle en A. On donne :
— la mesure du côté $[AB]$: $AB = 3$,
— la mesure du côté $[AC]$: $AC = 4$.

Trouver :
— la mesure du troisième côté $[BC]$,
— la mesure de l'angle $\hat{B}$,
— la mesure de l'angle $\hat{C}$.

Calcul
Le théorème de Pythagore permet de **calculer** la mesure de l'hypoténuse $[BC]$.

Manipulation
Sur le dessin de ABC, **mesurer** à l'aide d'un rapporteur, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

Problème n° 2



EFG est un triangle rectangle en *E*. On donne :
— la mesure de l'hypoténuse $[FG]$: $FG = 6$,
— la mesure du côté $[EF]$: $EF = 4$.

Trouver :
— la mesure du troisième côté $[EG]$,
— la mesure de l'angle $\hat{F}$,
— la mesure de l'angle $\hat{G}$.

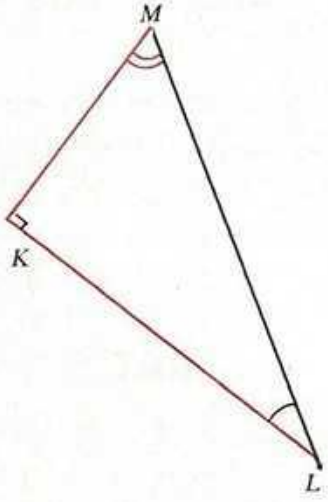
Calcul

Le théorème de Pythagore permet de **calculer** la mesure du côté $[EG]$.

Manipulation

Sur le dessin de *EFG*, **mesurer** à l'aide d'un rapporteur les angles $\hat{F}$ et $\hat{G}$.

Problème n° 3



MKL est un triangle rectangle en *K*. On donne :
— la mesure de l'hypoténuse $[LM]$: $LM = 6$,
— la mesure de l'angle $\hat{L}$: mes $\hat{L} = 30$.

Trouver :
— la mesure du côté $[KM]$,
— la mesure du côté $[KL]$,
— la mesure de l'angle $\hat{M}$.

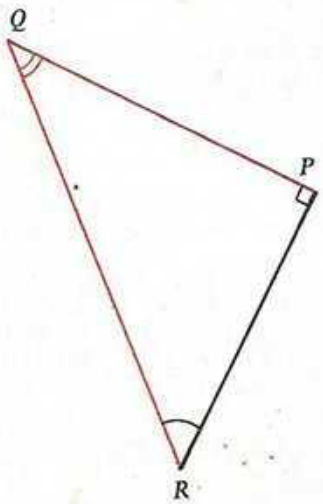
Calcul

On sait que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. On peut donc **calculer** mes $\hat{M}$.

Manipulation

Sur le dessin de *KLM*, **mesurer** avec une règle graduée les côtés $[KM]$ et $[KL]$.

Problème n° 4



PQR est un triangle rectangle en *P*. On donne :
— la mesure du côté $[PR]$: $PR = 4$,
— la mesure de l'angle $\hat{R}$: mes $\hat{R} = 50$.

Trouver :
— la mesure du côté $[PQ]$,
— la mesure de l'hypoténuse $[QR]$,
— la mesure de l'angle $\hat{Q}$.

Calcul

Comme dans le problème qui précède, on peut **calculer** mes $\hat{Q}$.

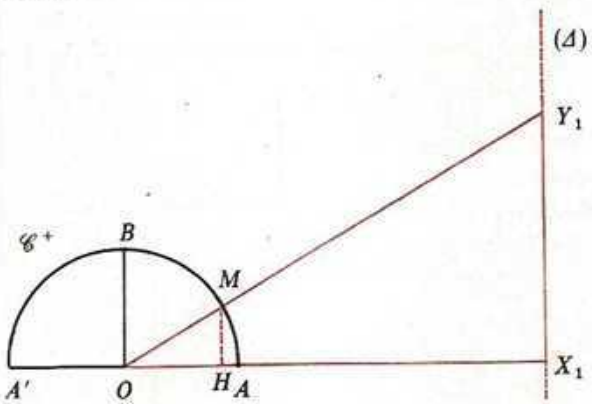
Manipulation

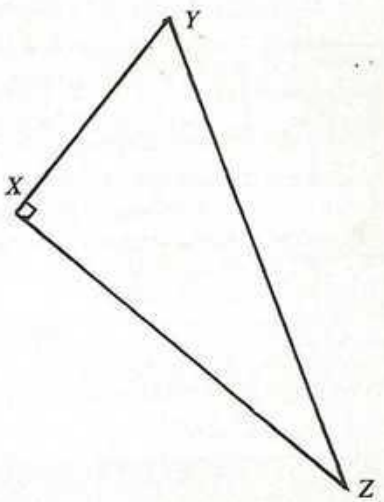
Sur le dessin de *PQR*, **mesurer** avec une règle graduée les côtés $[PQ]$ et $[QR]$.

b) **Relations dans les triangles rectangles.**

Dans ces quatre problèmes, remarquons que la résolution comporte deux parties :
— une partie « calcul »,
— une partie « manipulation ».
Cette dernière partie ne peut donner que des approximations plus ou moins précises des mesures recherchées. Dans ce qui suit, on se propose de rechercher une méthode permettant d'obtenir ces mesures par calcul.

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, A, B), considérons un triangle XYZ, rectangle en X.





— Soit X_1 le point de $[OA)$ tel que $d(O, X_1) = d(Z, X)$.
— Par X_1, menons (Δ) perpendiculaire à (OA).
X_1 détermine sur (Δ) deux demi-droites opposées dont l'une est incluse dans le demi-plan de $\mathscr{C}^+$.
Sur celle-ci, on marque Y_1 tel que $d(X_1, Y_1) = d(X, Y)$.
— Les triangles XYZ et X_1Y_1O sont rectangles, l'un en X, l'autre en X_1. De plus : $OX_1 = ZX$ et $X_1Y_1 = XY$. Ces deux triangles sont donc isométriques (voir chapitre 5, p. 286) ; les éléments qui se correspondent sont isométriques. En particulier on a : $\widehat{XZY}$ iso $\widehat{X_1OY_1}$ donc mes $\widehat{XZY}$ = mes $\widehat{X_1OY_1}$.
(OY_1) coupe $\mathscr{C}^+$ en M ; ce point est donc l'image sur $\mathscr{C}^+$ de $\widehat{XZY}$.
— Soit H le projeté orthogonal de M sur (OA).
De $(MH) \perp (OH)$ et $(X_1Y_1) \perp (OA)$, on déduit que $(MH) /\!/ (X_1Y_1)$. Les triangles OMH et OY_1X_1 sont homothétiques. Justifier.
Soit h l'homothétie de centre O définie par le tableau suivant :

h	
O	O
X_1	H
Y_1	M

donc $$\frac{OX_1}{OH} = \frac{X_1Y_1}{HM} = \frac{OY_1}{OM}. \qquad ①$$

Or l'angle $\hat{Z}$ est aigu (pourquoi ?) ; $\sin \hat{Z}$ et $\cos \hat{Z}$ sont donc des réels positifs.

Justifier :

$OH = \cos \hat{Z}$
$HM = \sin \hat{Z}$
$OM = 1$.

Justifier :

$OX_1 = ZX$
$Y_1X_1 = YX$
$OY_1 = ZY$.

Substituons dans ① :

On obtient :

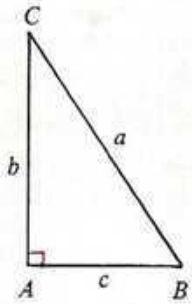
$$\frac{ZX}{\cos \hat{Z}} = \frac{XY}{\sin \hat{Z}} = \frac{ZY}{1}. \qquad ②$$

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires ; le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre : $\cos \hat{Z} = \sin \hat{Y}$, $\sin \hat{Z} = \cos \hat{Y}$.

On obtient :

$$\frac{ZX}{\sin \hat{Y}} = \frac{XY}{\sin \hat{Z}} = \frac{ZY}{1}.$$

Conclusion : ABC étant un triangle rectangle en A.



a la mesure du côté opposé à l'angle $\hat{A}$.
b la mesure du côté opposé à l'angle $\hat{B}$.
c la mesure du côté opposé à l'angle $\hat{C}$; on a

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{1}.$$

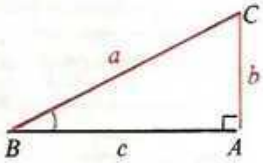
On en déduit :

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a}.$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a}.$$

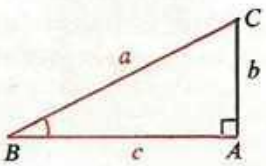
On sait que $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$ et $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ donc $\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$ et $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$.

ABC étant un triangle rectangle en A, on retiendra les résultats suivants :



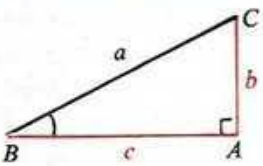
(sin) $\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$.

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la mesure du côté opposé par la mesure de l'hypoténuse.



(cos) $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$.

Dans un triangle rectangle, le cosinus de l'angle formé par l'hypoténuse et un côté de l'angle droit est égal au quotient de la mesure de ce côté par la mesure de l'hypoténuse.



(tg) $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$.

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient de la mesure du côté opposé à cet angle par la mesure de l'autre côté de l'angle droit.

Exercices

1. En utilisant les notations de la figure ci-dessus, compléter :

$$\sin \hat{C} = \quad ; \quad \cos \hat{C} = \quad ; \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \quad .$$

2. Reprendre les quatre problèmes donnés de la p. 361 à la page 363 et calculer les mesures des côtés et des angles qui avaient été obtenues par manipulation.

Exercices

Construire

1 (1). On donne un angle $\widehat{AOB}$. Construire l'image de cet angle :

1) par la symétrie orthogonale d'axe (AO),
2) par la symétrie centrale, de centre O,
3) par la symétrie centrale, de centre A,
4) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2 (1). On donne un angle $\widehat{AOB}$ et une demi-droite $[CD)$. Construire un angle $\widehat{DCE}$ isométrique à $\widehat{AOB}$.

3 (1). Construire les bissectrices des angles d'un triangle ABC donné.

4 (2). Étant donné deux points A, H et un angle $\widehat{XRY}$, construire un triangle ABC, isocèle en A tel que mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{XRY}$ et que H soit le milieu de $[BC]$.

5 (2). Soit $\hat{S}$ un angle de 83° et $\hat{R}$ un angle de 47°. Placer les images M et N de $\hat{S}$ et $\hat{R}$ sur le demi-cercle trigonométrique $\mathscr{C}^+$.

6 (2). Même exercice pour un angle $\hat{S}$ de 123° et un angle $\hat{R}$ de 147°.

7 (2). Même exercice pour un angle $\hat{S}$ de 75° et un angle $\hat{R}$ de 25°.

8 (2). Même exercice pour un angle $\hat{S}$ de $\frac{\pi}{6}$ et un angle $\hat{R}$ de $\frac{\pi}{8}$.

9 (2). Même exercice pour un angle $\hat{S}$ de $\frac{4\pi}{3}$ et un angle $\hat{R}$ de $\frac{\pi}{4}$.

10 (3). Sur du papier millimétré, représenter le demi-cercle $\mathscr{C}^+$ (unité : 1 dm).
Marquer sur $\mathscr{C}^+$ les images M, N, P, Q, R des angles ayant pour mesure en degrés respectivement 20, 40, 60, 120 et 140.
Donner les coordonnées (arrondies à la première décimale) des points M, N, P, Q et R dans le repère (O, A, B).

Compléter ensuite le tableau :

degrés	0	20	40	60	90	120	140	180
cos								
sin								

11 (3). Sur $\mathscr{C}^+$, marquer les points M, N, P et Q images respectives des angles $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sachant que :

$\cos \hat{D} = 0{,}8$; $\cos \hat{E} = 0{,}6$; $\cos \hat{F} = 0{,}4$ et $\cos \hat{G} = -0{,}4$.

12 (3). Sur $\mathscr{C}^+$, marquer les points M, N, P et Q images respectives des angles aigus $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sachant que $\sin \hat{D} = 0{,}3$; $\sin \hat{E} = 0{,}4$; $\sin \hat{F} = 0{,}6$ et $\sin \hat{G} = 0{,}7$.

13 (3). Sur $\mathscr{C}^+$, marquer les points M, N, P et Q images respectives des angles obtus $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sachant que $\sin \hat{D} = 0{,}25$; $\sin \hat{E} = 0{,}5$; $\sin \hat{F} = 0{,}75$ et $\sin \hat{G} = 0{,}7$.

Calculer

14 (3). On donne p_1 et p_2 deux éléments de l'intervalle [0, 90]. Compléter par $\leqslant$ ou par $\geqslant$:
si $p_1 \leqslant p_2$ alors $\cos p_1^0 \ldots \cos p_2^0$
si $p_1 \leqslant p_2$ alors $\sin p_1^0 \ldots \sin p_2^0$.

15 (2). Compléter les tableaux suivants :

mesure en grades	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mesure en degrés											

mesure en radians	0	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{2}$	2	3	π
mesure en degrés							

mesure en grades	0	25	50	75	100	110
mesure en radians						

16 (2). Dans le tableau suivant, $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont deux angles complémentaires. Compléter :

mesure de $\hat{R}$ en degrés	4			33		14
mesure de $\hat{S}$ en degrés		69	39		17	

17 (2). Dans le tableau suivant, $\hat{R}$ et $\hat{S}$ sont deux angles supplémentaires. Compléter :

mesure de $\hat{R}$ en radians	$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi-2}{2}$	
mesure de $\hat{S}$ en radians		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{8}$

18 (2). Dans un triangle ABC, les mesures des angles sont proportionnelles à 2, 3 et 5. Quelles sont les mesures en degrés de ces angles ?

19 (2). Dans un triangle ABC, rectangle en A, les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ se coupent en I. Calculer la mesure en degrés de $\widehat{BIC}$.

20 (2). Dans un cercle de centre O et de rayon r, on trace un diamètre $[AB]$ et une corde $[AC]$ telle que $AC = r$.

1) Donner les mesures des angles des triangles AOC et ABC.

2) Calculer BC en fonction de r.

3) On désigne par E le symétrique de A par rapport à (BC). Quelle est la nature du triangle EAB ?

21 (2). Dans un triangle ABC, la mesure de $\hat{B}$ est le double de la mesure de $\hat{A}$; la mesure de $\hat{C}$ est le double de la mesure de $\hat{B}$.
Calculer les mesures de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ (unité : le degré).

22 (2) Dans un triangle ABC, la mesure de $\hat{A}$ est le double de la mesure de $\hat{B}$ et le triple de la mesure de $\hat{C}$.
Calculer les mesures de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ (unité : le radian).

23 (2). Dans un triangle ABC rectangle en A, le triple de la mesure de $\hat{B}$ est le double de la mesure de $\hat{C}$.
Calculer les mesures de $\hat{B}$ et $\hat{C}$ (unité : le degré).

24 (2). Dans un triangle ABC isocèle en A, $\hat{A}$ est un angle de 32°.
Calculer les mesures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

25 (2). Dans un triangle ABC isocèle en A, $\hat{B}$ est un angle de 51°.
Calculer les mesures des angles $\hat{C}$ et $\hat{A}$.

26 (3). On donne p_1 et p_2 deux éléments de l'intervalle [90 ; 180]. Compléter par $\leqslant$ ou par $\geqslant$:

si $p_1 \leqslant p_2$ alors $\cos p_1^0 \ldots \cos p_2^0$
si $p_1 \leqslant p_2$ alors $\sin p_1^0 \ldots \cos p_2^0$.

27 (3). Un angle $\hat{S}$ a pour cosinus $\frac{1}{2}$.

Calculer $\sin \hat{S}$.

28 (3). $\hat{S}$ est un angle aigu. Son sinus est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer $\cos \hat{S}$.

29 (3). *a*) Un angle $\hat{S}$ a pour cosinus $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Calculer $\sin \hat{S}$.

b) $\hat{S}$ est un angle obtus. Son sinus est égal à $\frac{1}{2}$.

Calculer $\cos \hat{S}$.

30 (3). Compléter en utilisant les formules des angles complémentaires :

$\sin 10° = \cos \ldots$	$\cos 18° = \sin \ldots$
$\sin 15° = \cos \ldots$	$\cos 22° = \sin \ldots$
$\sin 20° = \cos \ldots$	$\cos 69° = \sin \ldots$
$\sin 30° = \cos \ldots$	$\cos 80° = \sin \ldots$
$\sin 89° = \cos \ldots$	$\cos 90° = \sin \ldots$

31 (3). Compléter en utilisant les formules des angles supplémentaires :

$\cos 35° = -\cos \ldots$	$\sin 25° = \sin \ldots$
$\cos 100° = -\cos \ldots$	$\sin 30° = \sin \ldots$
$\cos 0° = -\cos \ldots$	$\sin 91° = \sin \ldots$
$\cos 135° = -\cos \ldots$	$\sin 60° = \sin \ldots$
$\cos 90° = -\cos \ldots$	$\sin 180° = \sin \ldots$

32 (3). Donner à l'aide de la table les arrondis à la seconde décimale de cos 10° ; cos 20°, cos 30° ; cos 40° ; cos 50°. Même question pour $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{3}$.

33 (3). Donner à l'aide de la table les arrondis à la seconde décimale de sin 15° ; sin 30° ; sin 45° et sin 60°. Même question pour $\sin \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{3\pi}{4}$.

34 (3). Donner les arrondis à la 3e décimale de cos 100° ; cos 110° ; cos 120° ; cos 130° et cos 140°.

35 (3). Donner les arrondis à la 3e décimale de sin 105°; sin 115°; sin 125°; sin 135°.

36 (3). Donner les arrondis à la 2e décimale de cos 25°, de 2 × cos 25° et de cos 50°. Comparer 2 × cos 25° et cos 50°.

37 (3). Donner les arrondis à la 2e décimale de sin 32° de 2 × sin 32° et de sin 64°. Comparer 2 × sin 32° et sin 64°.

38 (3). On sait que $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donner la valeur exacte de cos 135°, sin 45° et sin 135°, tg 45° et tg 135°.

39 (3). Trouver la mesure en degrés d'un angle aigu dont l'arrondi à la troisième décimale du sinus est : 0,225; 0,309; 0,454; 0,500; 0,643; 0,788; 0,883; 0,978.

40 (3). Trouver la mesure en degrés d'un angle aigu dont l'arrondi à la troisième décimale du cosinus est : 0,996; 0,906; 0,819, 0,766; 0,602; 0,469; 0,276.

41 (3). Trouver la mesure en degrés d'un angle obtus ayant pour sinus (arrondi à la 3e décimale) : 0,438; 0,616; 0,829; 0,978.

42 (3). Trouver la mesure en degrés d'un angle obtus ayant pour cosinus (arrondi à la 3e décimale) : − 0,993; − 0,866; − 0,731; − 0,545; − 0,156.

43 (3). Trouver une valeur approchée de la mesure en degrés d'un angle aigu dont le sinus a pour arrondi à la 3e décimale : 0,145; 0,318; 0,480; 0,904.

44 (3). Trouver une valeur approchée de la mesure en degrés d'un angle aigu ayant pour cosinus (arrondi à la 3e décimale) : 0,944; 0,815; 0,601; 0,340; 0,121.

45 (3). Construire un angle aigu ayant pour cosinus : 0,2; 0,4; $\frac{2}{3}$; 0,8.

46 (3). Construire un angle aigu ayant pour sinus : 0,2; 0,4; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$.

47 (3). Construire un angle aigu ayant pour tangente : $\frac{3}{5}$; 2; 3; 4.

48 (3). MNP est un triangle rectangle en M. Compléter en utilisant les mesures des côtés :

$\sin \hat{N} = \ldots$; $\cos \hat{N} = \ldots$; $\operatorname{tg} \hat{N} = \ldots$;
$\sin \hat{P} = \ldots$; $\cos \hat{P} = \ldots$; $\operatorname{tg} \hat{P} = \ldots$.

49 (3). XYZ est un triangle rectangle en Z. Compléter en utilisant les mesures des côtés

$\sin \hat{X} = \ldots$; $\cos \hat{X} = \ldots$; $\operatorname{tg} \hat{X} = \ldots$;
$\sin \hat{Y} = \ldots$; $\cos \hat{Y} = \ldots$; $\operatorname{tg} \hat{Y} = \ldots$.

50 (3). ABC est un triangle rectangle en B. On sait que $AB = 3$ et $BC = 4$.

Calculer AC, $\cos \hat{A}$; $\sin \hat{A}$ et $\operatorname{tg} \hat{A}$.
Trouver une valeur approchée de la mesure en degrés de $\hat{A}$.
En déduire une mesure approchée de $\hat{C}$.

51 (3). MNP est un triangle rectangle en M. Sachant que $MN = 6$ et $MP = 10$, calculer NP, $\cos \hat{N}$, $\sin \hat{N}$ et $\operatorname{tg} \hat{N}$.
Trouver une valeur approchée de la mesure en degrés de $\hat{N}$. En déduire une mesure approchée de $\hat{P}$.

52 (3). RST est un triangle rectangle en S. tel que $RS = 2$ et $ST = 4$.
Calculer RT.
Donner la valeur exacte de $\cos \hat{R}$, $\sin \hat{R}$, $\operatorname{tg} \hat{R}$. En déduire des mesures approchées en degrés de $\hat{R}$ et $\hat{T}$.

53 (3). ABC est un triangle rectangle en A.
$AB = 3$ et $\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer BC, $\sin \hat{B}$ et AC.

54 (3). ABC est un triangle rectangle en B.
$AC = 5$ et $\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Calculer BC, $\cos \hat{A}$ et BA.

55 (3). MNP est un triangle rectangle en P.
$NP = 5$ et $\operatorname{tg} \hat{N} = \sqrt{3}$.
Calculer MP et NM.

56 (3). ABC est un triangle rectangle en A et $[AH]$ la hauteur relative à l'hypoténuse. $BC = 10$ et $AH = 2{,}5$.
Calculer les mesures en degrés de $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
Calculer AB et AC.

57 (3). a, b et c sont les mesures respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ d'un triangle ABC rectangle en A. Calculer les mesures des côtés inconnus (unité : le centimètre) et les mesures des angles (unité : le degré) inconnus dans les cas suivants :

— mes $\hat{B} = 24$ et $a = 5$
— $b = 15$ et $c = 8$
— $b = \sqrt{2} - 1$ et $c = 1 + \sqrt{2}$
— mes $\hat{B} = 30$ et $a = 2$

— mes $\hat{C} = 35$ et $a = 2\sqrt{2}$
— $b = 8$ et $c = 18$
— $c = 4$ et mes $\hat{C} = 72$
— $a = 4{,}8$ et $\text{tg}\,\hat{C} = 0{,}6$.

58 (3). Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 5 (unité : le centimètre). A et B deux points de $\mathscr{C}$ tels que $d(AB) = 7{,}5$ et I le milieu de $[AB]$.
Montrer que $(OI) \perp (AB)$.
Trouver la mesure en degrés de $\widehat{AOI}$ puis de $\widehat{AOB}$.

59 (3). Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon 5 (unité : le centimètre). On marque sur $\mathscr{C}$ deux points A et B tels que $\widehat{AOB}$ soit un angle de 40°. Calculer AB.
$[OH]$ est la hauteur du triangle AOB. Calculer OH.

60 (3). Un octogone régulier non croisé $ABCDEFGH$ est inscrit dans un cercle de rayon r. Calculer la mesure de son côté et de son apothème en fonction de r.

61 (3). Un décagone régulier non croisé $ABCDEFGHIJ$ est inscrit dans un cercle de rayon r. Calculer la mesure de son côté et de son apothème en fonction de r.

62 (3). ABC est un triangle isocèle de sommet A.
Sachant que $AB = 3$, $AC = 3$ et $BC = 3\sqrt{2}$, trouver les mesures en degrés des angles du triangle ABC.

Démontrer

63 (3). Soit AOB un triangle équilatéral de côté 3 (unité : le centimètre).
Construire AOF image de AOB par la symétrie orthogonale d'axe (OA). Construire BOC image de AOB par la symétrie orthogonale d'axe (OB).
Démontrer que les points F, O et C sont alignés. Construire E et D images respectives de A et B par la symétrie orthogonale d'axe (FC). Montrer que $ABCDEF$ est un hexagone régulier. Calculer son apothème.

64 (1). Démontrer que deux angles opposés par le sommet ont la même bissectrice.

65 (1). Soit un trapèze $ABCD$ dans lequel les côtés parallèles sont $[AB]$ et $[CD]$. La bissectrice de l'angle $\hat{A}$ coupe (CD) en N. Démontrer que ADN est un triangle isocèle.

66 (1). Soit le triangle AOB, isocèle en O tel que mes $\widehat{AOB} = 120$ (unité : le degré). Soit B' le symétrique de B par rapport à (OA). Démontrer que le triangle ABB' est équilatéral.

67 (1). Démontrer que le support de la diagonale $[AC]$ du losange $ABCD$ est la bissectrice des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$.

68 (1). Soit un parallélogramme $ABCD$.
Démontrer que $\widehat{DAB}$ iso $\widehat{BCD}$ et que $\widehat{ABC}$ iso $\widehat{CDA}$.

69 (1). Dans un triangle ABC rectangle en A, on désigne par I le milieu de $[BC]$ et par H le projeté orthogonal de A sur (BC). Démontrer que $\widehat{BAH}$ iso $\widehat{IAC}$.

70 (1). Sur le côté $[AB]$ d'un angle $\widehat{BAC}$ on marque deux points M_1 et M_2. Sur le côté $[AC]$, on marque les points N_1 et N_2 tels que

$$d(A, N_1) = d(A, M_1)$$
et $$d(A, N_2) = d(A, M_2)\,.$$

Démontrer que les droites (N_1M_2) et (N_2M_1) se coupent sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
En déduire une construction de la bissectrice d'un angle à l'aide d'une règle graduée.

71 (2). Démontrer que la somme des mesures en degrés des angles d'un trapèze non croisé est 360.

72 (1). On donne un parallélogramme $ABCD$. Démontrer que les bissectrices des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont perpendiculaires. En déduire que les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont parallèles.

73 (1). Démontrer que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont orthogonales.

74 (1). Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes non perpendiculaires et C un point n'appartenant à aucune de ces deux droites. Par C on mène la perpendiculaire à (Δ) qui coupe cette droite en B et (Δ') en E; par C on mène la perpendiculaire à (Δ') qui coupe cette droite en D et (Δ) en A. Démontrer que

$$\widehat{BAC} \text{ iso } \widehat{CED}\,.$$

75 (1). On donne un triangle ABC et (Δ) la bissectrice de $\widehat{BAC}$. (Δ) coupe (BC) en D. Par C on mène la parallèle à (Δ) qui coupe (AB) en E.

a) Démontrer que la bissectrice de $\widehat{EAC}$ est axe de symétrie du triangle ACE.

b) Démontrer que $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

76 (1). Soit ABC un triangle rectangle en A et $[AH]$ sa hauteur. Démontrer que $\widehat{BAH}$ iso $\widehat{HCA}$ et que $\widehat{ABH}$ iso $\widehat{HAC}$.

77 (2). Soit un parallélogramme $ABCD$. Démontrer que les triangles ABC et CDA sont isométriques. En déduire que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires.

78 (2). Démontrer que si les bissectrices de deux angles adjacents sont perpendiculaires alors ces angles sont supplémentaires.

79 (2). On donne un triangle ABC. Construire les hauteurs $[AM]$, $[BN]$ et $[CP]$. Démontrer que (AM), (BN) et (CP) sont les bissectrices des angles du triangle MNP.

80 (2). Soit un triangle ABC isocèle en A. (D_1) et (D_2) sont les bissectrices respectives des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. On désigne par E et E' les points d'intersection de (D_1) avec (AC) et de (D_2) avec (AB). Soit I le point d'intersection de (D_1) avec (D_2).

Démontrer que :

1) BIC est un triangle isocèle ;

2) (AI) est la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice de $\hat{A}$;

3) EIE' est un triangle isocèle ;

81 (2). On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r. Sur $\mathscr{C}$ on marque les points A et A' non diamétralement opposés. Soit (Δ) et (Δ') les tangentes en A et A' au cercle $\mathscr{C}$.

1) Montrer que (Δ) et (Δ') sont sécantes.

2) Soit P le point d'intersection de (Δ) avec (Δ') et K le milieu de $[AA']$.

a) Quelle est l'image de A par la symétrie orthogonale S d'axe (OK) ?
b) Quelle est l'image de (Δ) par $S_{(OK)}$?
c) Montrer que P est élément de (OK).
d) Montrer que (OP) est la bissectrice de $\widehat{APA'}$.

e) Montrer que $\widehat{APA'}$ et $\widehat{AOA'}$ sont supplémentaires.

82 (2). Dans un triangle ABC, on désigne par (Δ) la bissectrice de $\widehat{ABC}$ qui coupe (AC) en D.
Par A, on mène (Δ') parallèle à (Δ) qui coupe (BC) en B'.

a) Démontrer que $\frac{\overline{BC}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$.

b) Démontrer que le triangle ABB' est isocèle. En déduire que $\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{DA}$.

83 (2). Étant donné un angle $\widehat{BAC}$ ni plat ni nul et un point M à égale distance des droites (AB) et (AC).
Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) et K le projeté orthogonal de M sur (AC).
a) Démontrer que les triangles AMK et AMH sont isométriques. En déduire que le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{HAK}$.
b) Démontrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{HAK}$ est :

— soit la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$,
— soit la perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

84 (2). Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène :

— la droite (Δ_1) parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$; (Δ_1) coupe (BC) en B' ;
— la droite (Δ_2) parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, (Δ_2) coupe (BC) en C'.

Démontrer que $B'C'$ est la mesure du périmètre de ABC.

85 (3). p étant la mesure d'un angle en degré ($p \neq 90$) démontrer que $1 + \text{tg}^2 p^0 = \frac{1}{\cos^2 p^0}$.

86 (3). p et q étant les mesures respectives (en degrés) de deux angles complémentaires. Montrer que :

$$\cos^2 p^0 + \cos^2 q^0 = 1$$

et que $$\sin^2 p^0 + \sin^2 q^0 = 1 .$$

87 (3). On donne $p \in]0 ; 90[$, simplifier les écritures :
$\text{tg}\, p^0 \times \cos p^0$;
$\cos^3 p^0 + \cos p^0 \times \sin^2 p^0$
$1 - \cos^2 p^0$
$1 - \frac{1}{\sin^2 p^0}$.

88 (3). Un triangle ABC a ses trois angles aigus.
Soit $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
$[AH_1]$ est la hauteur issue de A et $[BH_2]$ est la hauteur issue de B (faire une figure).

1) Exprimer le réel $\sin \hat{B}$ dans le triangle rectangle ABH_1 et le réel $\sin \hat{C}$ dans le triangle rectangle ACH_1.
2) Exprimer le réel $\sin \hat{A}$ dans le triangle rectangle ABH_2 et le réel $\sin \hat{C}$ dans le triangle rectangle CBH_2.

3) Déduire des réponses aux questions 1) et 2) que

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Pourquoi la formule trouvée dans le triangle rectangle est-elle un cas particulier de cette formule ?

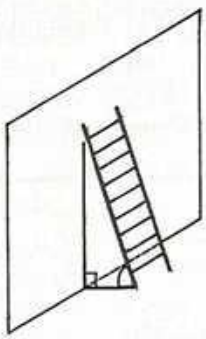
89 (3). ABC est un triangle quelconque. $[AH]$ est la hauteur issue de A et telle que $H \in [BC]$. Faire une figure.
On pose $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

a) Démontrer que $b \times \sin \hat{C} = AH$ et que $a - b \times \cos \hat{C} = BH$

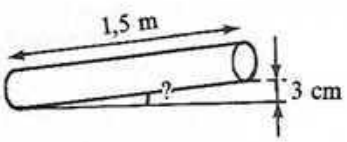
b) Démontrer en utilisant le théorème de Pythagore que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

Problèmes

90. Une échelle de 4,5 m est appuyée contre un mur vertical, son pied est à 1,25 m du mur. Quelle est son inclinaison (mesure de l'angle en degrés que fait cette échelle avec le sol).

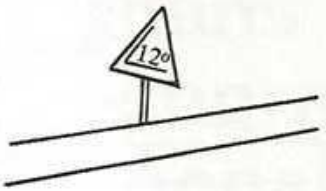


91. Afin d'assurer l'écoulement, une canalisation cylindrique est disposée comme l'indique la figure ci-dessous.

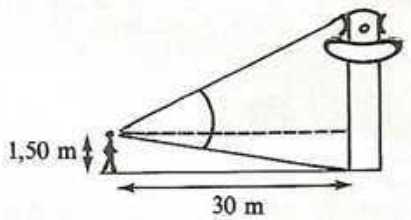


Quel est l'angle de la canalisation avec l'horizontale ?

92. Un chemin fait un angle moyen de 12° avec l'horizontale. De quelle altitude monte-t-on après une marche de 5 km ?



93. Koffi s'est placé à 30 m de la tour de Bouaké. Il mesure 1,50 m et voit la tour sous un angle compris entre 72° et 73°. Donner un encadrement de la hauteur de la tour de Bouaké.



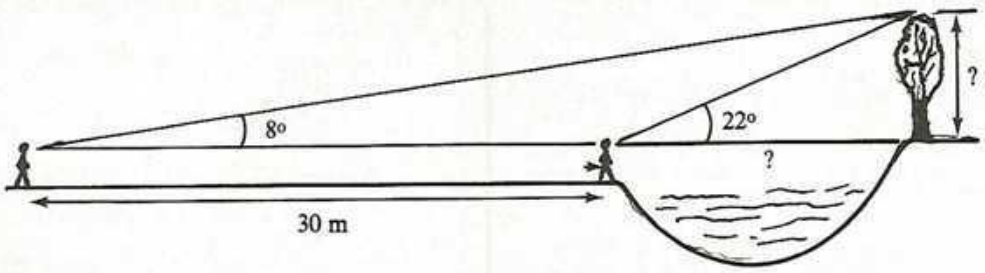
94. Sur les routes on rencontre différents panneaux mis en place pour la sécurité des automobilistes.
Sur les routes à forte pente, des panneaux tels que les suivants servent à indiquer la pente de la route.



Une pente de 15 % indique qu'un automobiliste s'élève de 15 m après un parcours de 100 m. On suppose les routes rectilignes : calculer pour chacun des panneaux donnés l'angle de la route avec l'horizontale.

95. Koffi qui se trouve au bord du Bandama voit un arbre situé sur l'autre rive, au bord de la rivière, sous un angle de 22°. Il recule de 30 m perpendiculairement à la rivière et voit alors cet arbre sous un angle de 8°. Quelle est la largeur du Bandama à cet endroit ? Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Indication : Prendre comme inconnues la hauteur de l'arbre et la largeur du Bandama exprimées en mètres.
Le problème revient à résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues.



96. La figure suivante représente un cercle méridien de la sphère terrestre ; (NS) est l'axe des pôles, O est le centre de la terre ; E est l'un des points d'intersection de ce cercle méridien avec l'équateur, M est un point quelconque de ce cercle. La mesure en degrés de l'angle $\widehat{EOM}$ est la latitude de M (nord dans le cas de la figure), soit α cette mesure. Soit H le projeté orthogonal de M sur (NS) : HM est le rayon du parallèle géographique de M.

1) Démontrer que : $HM = OM \times \cos \alpha^0$.

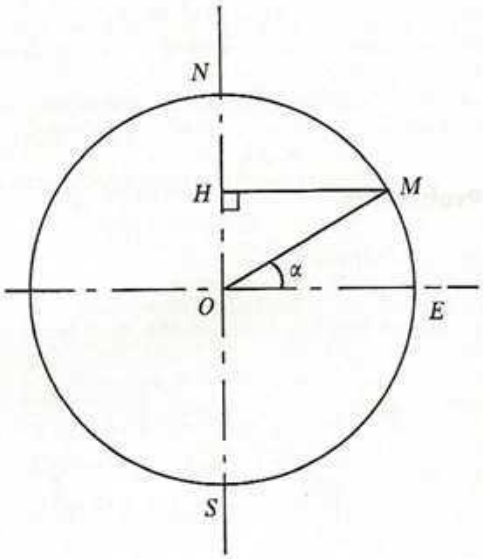
2) Le périmètre terrestre étant de 40 000 km, montrer que la mesure l en km du parallèle de M est donnée par la formule : $l = 40\,000 \cos \alpha^0$.

Applications numériques

a) Calculer la mesure du parallèle de Dakar (15° Nord environ).

b) Calculer la mesure du Tropique du Cancer (23° Nord environ).

c) Quels sont les parallèles ayant un périmètre de 20 000 km ?



THÈME D'ÉTUDES

Bissectrices des angles d'un triangle

1) *Manipulation* : Construire les bissectrices des angles d'un triangle. Que constate-t-on ? On se propose de démontrer le résultat constaté.

2) *Mathématisation* : Soit un triangle non isocèle ; on appelle $[AB]$ le plus petit des côtés ; le triangle sera noté ABC.

— Démontrer que la bissectrice (Δ) de l'angle $\hat{B}$ n'est pas parallèle à la bissectrice (Δ') de l'angle $\hat{C}$.
Soit I le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

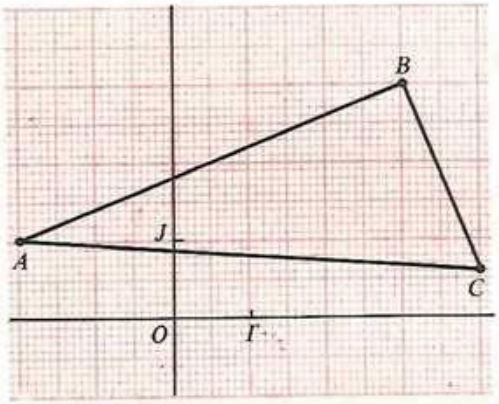
— Démontrer que l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) est un point de $[BC]$.
— Démontrer que A'' image de A par la composée $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ est un point de $[AC]$.

Démontrer que $\widehat{IA''A}$ iso $\widehat{IAB}$ et que $A''IA$ est un triangle isocèle.

En déduire que $\widehat{IAC}$ iso $\widehat{IAB}$ et que (IA) est la bissectrice de $\hat{A}$.
Démontrer que I est le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle ABC. (Ce cercle est appelé cercle inscrit du triangle.)

— Examiner le cas particulier d'un triangle isocèle.

8 Distance dans un repère orthonormé. Orthogonalité de deux vecteurs



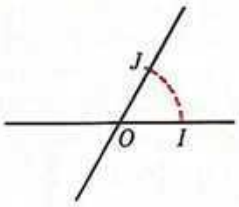
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-2; 1)$; $B(3; 3)$ et $C(4; 0{,}6)$. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?

1) Rappel

Nous avons vu que seuls deux types de repères sont adaptés au plan métrique (voir chapitre 4, p. 258).

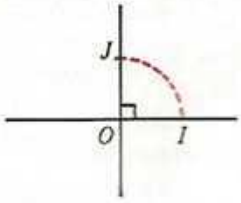
a) **Les repères normés.**

Exemple



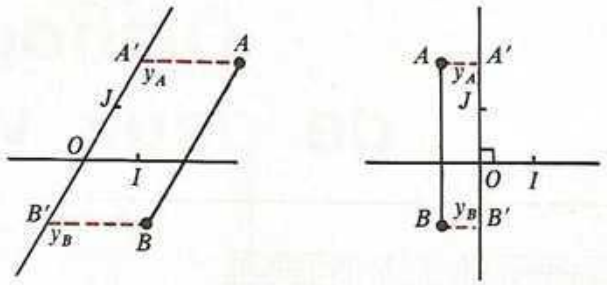
b) **Les repères orthonormés.**

Exemple



2) Distance de deux points situés sur une parallèle à l'un des axes

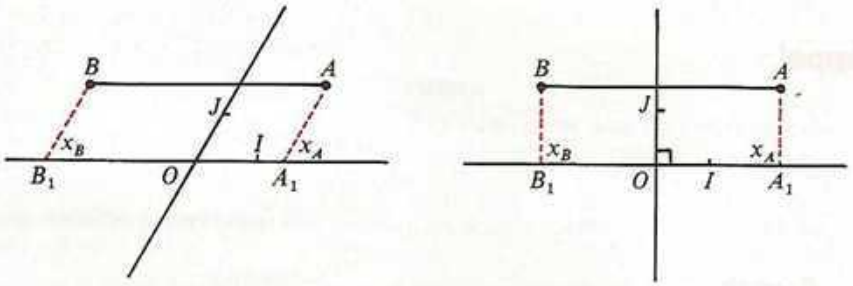
1er *cas* : Les points A et B ont même abscisse.
Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $x_A = x_B$.



A et B ayant même abscisse, (AB) est parallèle à (OJ).
A' et B' étant les projetés de A et B sur (OJ) parallèlement à (OI), le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme.
Donc $d(A, B) = d(A', B')$.
Sur (OJ) on a : $d(A', B') = |y_B - y_A|$
donc : $$d(A, B) = |y_B - y_A|.$$

Exercice Sachant que $A(-3; 1{,}5)$ et $B(-3; -4{,}1)$, calculer $d(A, B)$.

2e *cas* : Les points A et B ont même ordonnée.
Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $y_A = y_B$.

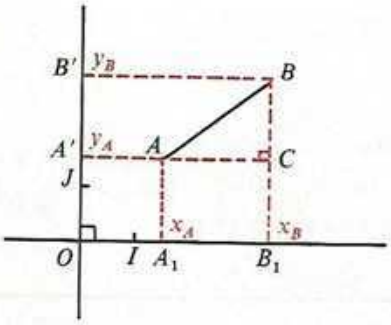


A et B ayant même ordonnée, (AB) est parallèle à (OI).
A_1 et B_1 étant les projetés de A et B sur (OI) parallèlement à (OJ), le quadrilatère ABB_1A_1 est un parallélogramme.
Donc : $d(A, B) = d(A_1, B_1)$.
Sur (OI) on a : $d(A_1, B_1) = |x_B - x_A|$,
donc : $$d(A, B) = |x_B - x_A|.$$

Exercice Sachant que $A(-3; -1)$ et $B(1{,}6; -1)$, calculer $d(A, B)$.

3) Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé

Cas général : Dans un repère orthonormé, on donne $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.



Soit A' et B' les projetés de A et B sur (OJ) parallèlement à (OI).
Soit A_1 et B_1 les projetés de A et B sur (OI) parallèlement à (OJ).
Compléter : $d(A', B') =$

$d(A_1, B_1) =$

Posons $(AA') \cap (BB_1) = \{ C \}$.

Compléter : $d(A, C) =$

$d(B, C) =$

Le triangle ABC est rectangle en C. Pourquoi ?
Compléter alors : $d^2(A, B) =$
En remplaçant et en remarquant que $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ on a :

$$d^2(A, B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

donc $$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On a :

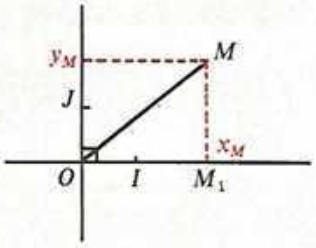
$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque. La méthode de calcul précédente aurait-elle été applicable dans un repère non orthonormé ? Pourquoi ?

Exercice Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-1; 2)$, $B(-4; 6)$ et $C(-0{,}7; 2{,}4)$. Calculer $d(A, B)$, $d(B, C)$ et $d(A, C)$. Faire la figure.

Cas particulier : *Distance d'un point à l'origine d'un repère orthonormé.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne $M(x, y)$.
Calculons $d(O, M)$.
Soit M_1 le projeté orthogonal de M sur (OI).



Dans le triangle OM_1M on a :

$$d^2(O, M) = d^2(O, M_1) + d^2(M_1, M).$$

Pourquoi ?

On sait que $d(O, M_1) = |x|$

et $d(M_1, M) = |y|$

donc : $d^2(O, M) = x^2 + y^2$

et $d(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit le point $M(x, y)$. On a :

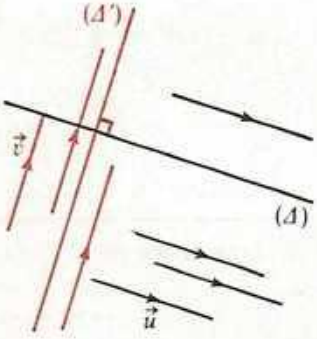
$$d(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Retrouver la formule précédente en partant de la formule générale.

Exercice Soit $M(-8; 6)$. Calculer $d(O, M)$.

4) Vecteurs orthogonaux

a) **Définition.**



On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on lit « $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$. »

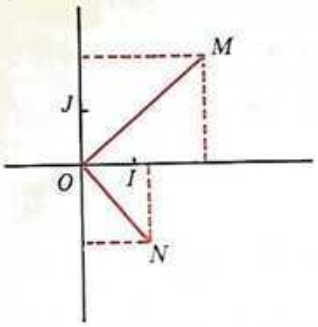
Exercice k et k' étant deux réels non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, démontrer que si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $k\vec{u} \perp k'\vec{v}$.

b) **Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs.**

Soit un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit deux vecteurs orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base associée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux par définition. On dit que la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une *base orthonormée.*



Soit M et N les points du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, on a : $M(x, y)$ et $N(x', y')$ dans le repère (O, I, J) et $(OM) \perp (ON)$.
Ainsi, OMN est un triangle rectangle en O donc :

$$d^2(M, N) = d^2(O, M) + d^2(O, N)$$

d'où :

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

développons :

$$x'^2 - 2x'x + x^2 + y'^2 - 2y'y + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

d'où : $\quad -2x'x - 2y'y = 0$

c'est-à-dire : $\quad x'x + y'y = 0$.

D'où le théorème :

Dans une base orthonormée, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ étant deux vecteurs non nuls,

si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $xx' + yy' = 0$.

Réciproquement : On peut démontrer en utilisant les propriétés (ég., +) et (ég., ×) que :

Dans une base orthonormée, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ étant deux vecteurs non nuls,

si $xx' + yy' = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Théorème

Dans une base orthonormée, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ étant deux vecteurs non nuls,

$\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Exemple

(O, I, J) étant un repère orthonormé, posons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Montrer que les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ vérifient l'égalité $xx' + yy' = 0$.

Exercices

Tous les vecteurs suivants sont donnés dans une base orthonormée.

1) Parmi les vecteurs suivants, indiquer ceux qui sont orthogonaux :

$$\vec{a}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix};\quad \vec{b}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\0{,}5\end{pmatrix};\quad \vec{c}\begin{pmatrix}6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix};\quad \vec{d}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\2\end{pmatrix};$$

$$\vec{e}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};\quad \vec{f}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

2) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$. Trouver les coordonnées de trois vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

3) Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

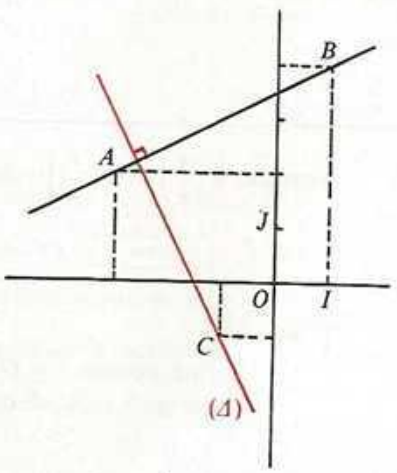
4) Déterminer y pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

5) Équation d'une droite orthogonale à une droite donnée et passant par un point donné

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$ et $C(-1; -1)$. Écrire une équation de la droite (Δ) passant par C et orthogonale à (AB).

Nous savons écrire une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné.

Il suffit alors de déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de (Δ), c'est-à-dire un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.



Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$ ⟨équivaut à⟩ $4a + 2b = 0$.

Déterminons un couple non nul solution de l'équation $4a + 2b = 0$.
Si $a = 1$ alors $b = -2$.
Un couple solution de cette équation est donc $(1, -2)$.
Ainsi $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

Il faut maintenant écrire une équation de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$. Soit $M(x, y)$.

On a : $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

M appartient à la droite contenant C et de vecteur directeur $\vec{v}$ équivaut à

$$-2(x+1) - 1(y+1) = 0$$
$$-2x - 2 - y - 1 = 0$$
$$-2x - y - 3 = 0$$

$-2x - y - 3 = 0$ est une équation de la droite passant par C et orthogonale à (AB).

a) Donner un nouveau vecteur directeur de (Δ). Vérifier que ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (AB).

Exercice Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les droites d'équation $y = 5$ et $x = -2$ sont-elles orthogonales ? Pourquoi ?

6) Condition d'orthogonalité de deux droites dans le plan muni d'un repère orthonormé

Soit les droites (Δ) d'équation $y = ax + b$ et (Δ') d'équation $y = a'x + b'$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ),

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ'), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$\vec{u} \perp \vec{v}$ ⟨équivaut à⟩ $1 \times 1 + a \times a' = 0$

d'où $\vec{u} \perp \vec{v}$ ⟨équivaut à⟩ $aa' = -1$

Théorème

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit (Δ) et (Δ') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$:

$$(\Delta) \perp (\Delta') \quad \langle \text{équivaut à} \rangle \quad aa' = -1.$$

Exercice

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les droites (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4), (Δ_5) et (Δ_6) d'équations respectives :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\,; \quad y = x - 5\,; \quad y = 2x + 2\,; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1\,;$$

$$y = -x \quad \text{et} \quad y = -2\sqrt{2}\,x.$$

Trouver les couples de droites orthogonales.

2) Déterminer le réel a pour que les fonctions affines

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \qquad x \mapsto ax - 5$$

soient représentées graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé par deux droites orthogonales.

3) On donne la fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -4$
représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) par la droite (Δ).
Existe-t-il une fonction affine g représentée graphiquement dans (O, I, J) par une droite (Δ') telle que (Δ') et (Δ) soient orthogonales ?
Si oui, laquelle ? Faire une figure.

Exercices

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne : $A(-0{,}8;\ 0{,}6)$ et $B(0{,}6\,;\,0{,}8)$.
Calculer $d(A, B)$, $d(O, A)$ et $d(O, B)$.
Montrer que (OA) $\quad$ (OB).
Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-3\,;-3)$; $B(4\,;2)$; et $C(2\,;4)$.
Montrer que ABC est un triangle isocèle de sommet A.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $A(-1\,;2)$; $B(-2\,;-1)$; $C(1\,;-2)$ et $D(2\,;1)$.
Montrer que $ABCD$ est un carré.

4. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad \vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \vec{w}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \dfrac{-\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}.$$

Quels sont les vecteurs orthogonaux ?
Quels sont les vecteurs de même direction ?

5. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2{,}5\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \vec{v}\begin{pmatrix}4\\y\end{pmatrix}.$$

Déterminer y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

6. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \vec{v}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}.$$

Déterminer x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

7. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne le vecteur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{5}{2}\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées de trois vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

8. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représenter la droite (Δ) d'équation $3x - 2y + 1 = 0$. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ associée au repère (O, I, J), donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ). Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$.
Soit $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Placer les points M et N dans le repère (O, I, J).

9. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $A(-2\,;\ 1)$ et $B(2\,;\ -1)$. Écrire une équation de la médiatrice de $[AB]$.

10. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $A(-3\,;2)$ et $B(-4\,;\ 5)$. Écrire une équation de la médiatrice de $[AB]$.

11. Rappel : soit (Δ) la médiatrice d'un segment $[AB]$,

$M \in (\Delta)$ $\quad$ équivaut à $\quad$ $d(M, A) = d(M, B)$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $A(4\,;\ 2)$ et $B(-6\,;\ -2)$. Soit un point $M(x\,;\ y)$.
Exprimer la condition pour que M appartienne à la médiatrice de $[AB]$. En déduire une équation de la médiatrice de $[AB]$.

12. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $A(4\,;2)$, $B(2\,;6)$ et $C(-1\,;\ -3)$.
Donner une équation de la médiatrice (Δ) de $[AB]$.
Donner une équation de la médiatrice (Δ') de $[AC]$.
Déterminer les coordonnées de R point d'intersection de (Δ) et (Δ').
Vérifier par le calcul que R appartient à la médiatrice de $[BC]$. Faire une figure.

13. On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les points : $A(-2; 0)$ et $B(0; 6)$.

a) Soit C un point de (OI). Déterminer son abscisse pour que $d(C, A) = d(C, B)$.

b) Donner une équation de la droite (Δ) passant par C et orthogonale à (AB).

c) Déterminer les coordonnées de E point d'intersection de (Δ) et (AB).

14. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la droite (Δ) d'équation $y = -x$ et les points : $A(-1; 2{,}5)$ et $B(-4; 1{,}5)$.
On pose $A' = S_{(\Delta)}(A)$ et $B' = S_{(\Delta)}(B)$.

a) Déterminer les coordonnées de A' et B'.

b) Vérifier que $d(A, B) = d(A', B')$.

15. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on donne la droite (Δ) d'équation $y = x$ et les points $A(5; 4)$ et $B(7; 6)$. On pose $A' = S_{(\Delta)}(A)$ et $B' = S_{(\Delta)}(B)$.

a) Déterminer les coordonnées de A' et B'.

b) Démontrer que $ABB'A'$ est un rectangle.

Sujets d'examens

BEPC — 1981

Exercice I

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $R(1 ; 3)$, $S(7 ; 6)$ et la droite (Δ) d'équation $4x + 2y - 25 = 0$.

1) Placer les points R et S et construire la droite (Δ).

2) Montrer que (Δ) est la médiatrice du segment $[RS]$.

Exercice II

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - |x - 1|.$$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 2x - 4$.

3) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère (O, I, J).

4) Résoudre graphiquement les équations : $f(x) = 3$; $f(x) = 6$.

5) Utiliser le graphique pour écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) > 3$.

Exercice III

Soit un triangle OAB rectangle en O tel que $OA = 4$; $OB = 5$. On construit le cercle de diamètre $[AB]$ et la tangente (T) en A à ce cercle qui coupe (OB) en K.

1) Calculer AB; OK; KA.

2) Soit I le centre de ce cercle et I' le symétrique de I par rapport à A.
L est l'image de I' dans la translation de vecteur $\overrightarrow{KI}$.
Montrer que $KI'LI$ est un parallélogramme.
En déduire que L est un point de la droite (T) et que $KI'LI$ est un losange.

3) Montrer que $BK = BL$.
La droite (BL) recoupe le cercle en H.
Montrer que O et H sont symétriques par rapport à (AB).
En déduire que (OH) est parallèle à (T).
Soit $\{J\} = (OH) \cap (BA)$, déterminer le réel k tel que $\dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BA}} = k$.

4) Montrer que $\widehat{OBA}$ iso $\widehat{OAK}$ et encadrer par deux entiers consécutifs la mesure commune de ces deux angles en degrés.

BEPC — 1980 —

Exercice 1

Deux entiers naturels distincts sont tels que :

a) Leur somme diminuée de 1 est égale au double de leur différence.

b) Leur différence diminuée de 1 est égale au plus petit des deux nombres.

Trouver ces deux nombres. (On pourra appeler a le plus grand des deux nombres et b l'autre.)

Exercice 2

On donne les fonctions polynômes f et g définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (12x^2 - 3)(x + 3) + (x^2 - 9)(2x - 1) \qquad g(x) = 4x^3 - x.$$

a) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

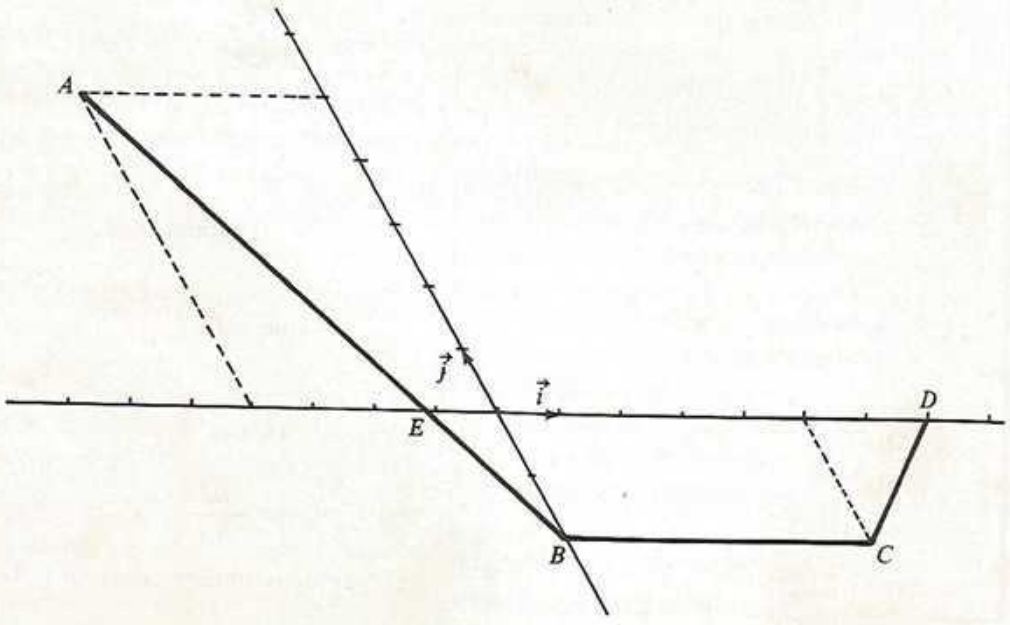
b) Chercher l'ensemble de définition de la fonction rationnelle q de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

c) Simplifier l'écriture de $q(x)$ sur son ensemble de définition.

Exercice 3

On considère la figure ci-dessous :



1) *a*) Donner les coordonnées des points A, B, C, D.

b) Écrire une équation de chacune des droites (AB), (BC), (CD).

c) Calculer les coordonnées du point E.

d) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\vec{i}$. En déduire les coordonnées de F.

2) On suppose que la ligne brisée $ABCD$ est la représentation graphique d'une fonction f affine par intervalles.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Lire sur le graphique les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4

Tracer un cercle de centre O et de rayon r.
Soit $[AB]$ un diamètre de ce cercle. On appelle (Δ) la tangente en B au cercle.
Une droite passant par A coupe le cercle en C et la droite (Δ) en D, distinct de B. On désigne par α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAD}$.

1) *a*) Démontrer que les triangles ABC et ABD sont des triangles rectangles.

b) Calculer $d(A, D)$ et $d(B, C)$ en fonction de r et de α.

2) On suppose que $AD = 3r$.

a) Calculer $\cos \alpha$. Donner une valeur approchée, à un degré près, de α.

b) La perpendiculaire en A à (AC) coupe (Δ) en E. Démontrer que $\widehat{AED}$ iso $\widehat{BAD}$. En déduire que $BE = \frac{2}{3}AE$.

BEPC — 1979 — (Extraits)

Exercice 2

1) Dans un repère orthonormé (O, I, J), tracer la droite (D) d'équation : $3x + 2y = 24$.

2) Dans le même repère tracer la droite (D') orthogonale à (D) et passant par le point $A(-2; -1)$. Déterminer une équation de (D').

3) (D) et (D') se coupent en M. Calculer les coordonnées du point M.

Exercice 3

[Faire une figure soignée en prenant le cm pour unité.]
Dans un plan euclidien, ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$d(A, B) = 2 \quad \text{et} \quad d(B, C) = 4.$$

1) Calculer $d(A, C)$.

2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer $d(C, H)$.

3) Soit B' l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (CA).
Quelle est la nature du triangle $BB'C$? Justifier la réponse.
En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$.

4) Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{CA}$, puis construire le point E, projeté orthogonal de D sur (CB).
Calculer $d(C, D)$ puis $d(C, E)$.

5) Construire les images A' et D' des points A et D par la symétrie orthogonale d'axe (CB).

a) Montrer que la droite $(A'D')$ passe par C.

b) Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle $AA'D$ se trouve sur la droite (CB), construire ce centre et prouver que le point D' se trouve également sur ce cercle.

BEPC — 1978

Exercice 1

On désigne par A l'ensemble des couples de réels (x, y), solutions de l'équation $5x - 3y = 4$.

1) Soit E l'ensemble des couples de réels, tel que :

$$E = \left\{ \left(\frac{4}{3} ; \frac{8}{9}\right), (1;3), (0;5) \right\}.$$

Quels sont les éléments de E qui sont éléments de A ?

2) Calculer le réel y pour que le couple $\left(\frac{4}{5}, y\right)$ soit élément de A.

3) Calculer le réel x pour que le couple $(x, -3 + \sqrt{5})$ soit élément de A.

Exercice 2

Deux élèves, Konan et Koffi, discutent. Konan dit : « Dans ma classe, il y a 30 élèves. Si je multiplie le nombre a de garçons par 3, puis le nombre b de filles par 2 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 85. »
Koffi lui dit alors : « Dans la mienne, il y a 35 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 2, puis le nombre y de filles par 5 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 55. »
Mais un professeur de mathématique, qui les écoute, affirme que ce que dit Konan est vrai et que ce que dit Koffi est faux.

1) Trouver le nombre de garçons et de filles de la classe de Konan.

2) Pourquoi ce que dit Koffi ne peut-il pas être vrai ?

Exercice 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan euclidien $\mathscr{P}$, placer les points $A(-4, 3)$ et $B(-5, 1)$.

1) Calculer l'ordonnée du point C d'abscisse -1 pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

2) On considère l'application f du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$x' = x + 5 ; \quad y' = y - 1 .$$

a) Calculer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives par l'application f des points A, B et C.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

3) Démontrer que l'application f est une translation ; donner les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ de cette translation ; indiquer un ou plusieurs représentants de $\vec{v}$.
Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$?

4) Soit S la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

a) Calculer les coordonnées des points A'', B'' et C'', images respectives par la symétrie S des points A', B' et C'.

b) M désigne un point quelconque du plan $\mathscr{P}$, de coordonnées (x, y). Calculer en fonction de x et de y les coordonnées (x'', y'') du point M'', image de M par l'application $S \circ f$.

BEPC — 1977

ALGÈBRE

I. — Soit les réels a et b tels que $a = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$.

1) Calculer le produit $a.b$. Que peut-on en déduire pour les nombres a et b ?

2) Calculer les réels a^2 et $\dfrac{a}{b}$. (Mettre les réponses sous la forme la plus simple possible.)

— Que constate-t-on ? Pouvait-on prévoir ce résultat d'après le 1) ? Justifier.

II. — Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 9}.$$

1) Dites pourquoi f n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) Simplifier $f(x)$ dans D.

3) Calculer $f(-0{,}6)$.

III. — A l'occasion de la fête d'un collège, le foyer proposait des jus de fruits à 45 F la bouteille et des limonades à 60 F la bouteille.
La recette a été de 18 000 F pour 350 bouteilles vendues.
Combien de bouteilles de chaque sorte ont été vendues ?

GÉOMÉTRIE

1) Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) placer les points B et C tels que :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{OC} = -4\vec{i}.$$

2) Calculer les coordonnées du point A sachant que A est l'image de B par la symétrie de centre I.

3) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

4) Soit (Δ) la médiatrice de $[AC]$; (Δ) coupe (AC) en K et (BC) en P. Montrer que P est le milieu de $[BC]$. Calculer les coordonnées de P.

5) Construire la droite (Δ') ayant pour équation :

$$-x + 3y + 6 = 0.$$

Montrer que (Δ') est tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC.

6) (Δ') coupe l'axe des abscisses en un point appelé D. Calculer la mesure à un degré près par défaut de l'angle $\widehat{ODA}$.

BEPC — 1976

I. — Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (3x - 6)^2 - 4(x - 1)^2.$$

1) Factoriser $f(x)$.

2) Utiliser cette factorisation pour répondre à la question suivante :
existe-t-il une valeur entière de x qui annule $f(x)$?

3) Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
Utiliser la forme réduite pour vérifier l'exactitude du résultat précédent.

4) Soit la fonction rationnelle h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$h(x) = \frac{(x^2 + x) + (x + 1)(4x - 8)}{(5x - 8)(x - 4)}$$

Donner son ensemble de définition D_h puis simplifier l'écriture de $h(x)$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a)\ h(x) = 0 ; \quad b)\ h(x) = -\frac{13}{12} ; \quad c)\ h(x) = 1.$$

6) Calculer $h(\sqrt{15})$ puis encadrer $h(\sqrt{15})$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2, sachant que :

$$3{,}872\,9 < \sqrt{15} < 3{,}873\,0.$$

II. — Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan euclidien et $(\vec{i}, \vec{j})$ la base associée.

1) Placer les points A, B, C sachant que

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{j}; \quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 8\vec{j}; \quad \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Calculer les coordonnées du point D image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2) Calculer les coordonnées du point M milieu de (A, C).
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que les droites (AC) et (BM) sont orthogonales. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

3) Donner une équation de la droite (AB). Soit K le point de la droite (AB) dont l'ordonnée est nulle, calculer son abscisse.
Quelle est la nature du triangle BKD ?

4) Donner une valeur approchée par défaut à 1° près de la mesure de $\widehat{BKD}$.

5) Démontrer que la mesure de $\widehat{BAD}$ est le double de la mesure de $\widehat{BKD}$.

BEPC — 1975

1) Calculer la valeur numérique de chacune des expressions suivantes :

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{x.y} \quad \text{pour} \quad x = \sqrt{7} + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

$$\frac{2x}{2-x} - \frac{2-x}{x} \quad \text{pour} \quad x = 1 - \sqrt{3}.$$

2) Sur une droite on considère les points A, B et M d'abscisses respectives 2, -3 et x.

a) Calculer $\overline{MA}$, $\overline{AB}$, puis $d(M, A)$ et $d(A, B)$.

b) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(M, A) + d(A, B)$. Représenter graphiquement la fonction f.

c) Pour quelles positions du point M par rapport aux points A et B a-t-on :

$$d(M, A) + d(A, B) = d(M, B).$$

Quelles sont les valeurs correspondantes de x ?

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J); soit $(\vec{i}, \vec{j})$ la base associée.

a) Construire la droite d'équation $-3x + 2y = 12$. On appellera (D) cette droite. Préciser les coordonnées du point A, intersection de (D) avec l'axe des abscisses et celles du point B, intersection de (D) avec l'axe des ordonnées.

b) On donne :

$$\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -5\vec{i} - \vec{j}.$$

Calculer les coordonnées du point A', image du point A dans la translation de vecteur $\vec{v}$.
Calculer les coordonnées du point B', image du point B dans la translation de vecteur $\vec{w}$.

c) Démontrer que les droites (AA') et (D) sont orthogonales.

d) Soit le point H milieu du bipoint (A, B), montrer que $\overrightarrow{B'H} = \vec{v}$. En déduire la nature du quadrilatère $AA'HB'$.

e) Soit le point C, symétrique du point O par rapport à la droite (D). Montrer que les quatre points A, O, B et C sont sur un cercle de centre H dont on calculera le rayon.

f) Calculer tg $\widehat{OAB}$; donner une valeur approchée à 1° près des mesures de $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$.

Remarque. La question *f*) peut être traitée aussitôt après la question *a*).

BEPC — 1974

I. — On donne dans le plan muni d'un repère (O, I, J) le point $K(0, 6)$.
Soit le vecteur $\vec{u}(2\,;\,-3)$ dans la base associée au repère donné.

1) Trouver une équation de la droite (D) passant par K et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) Montrer que le point $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ appartient à la droite (D).

3) Tracer la droite (D) puis la droite (Δ) d'équation $3x - y - 3 = 0$.

4) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites et vérifier ensuite graphiquement le résultat obtenu.

II. — On considère les applications :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 25 - x^2 \qquad x \mapsto x - 3\,.$$

Calculer $f(\sqrt{3} - 2)$; $g\left(\frac{2}{3}\right)$; $f \circ g\left(\frac{2}{3}\right)$.

Donner une valeur approchée de chacun des réels $f(\sqrt{3} - 2)$ et $g\left(\frac{2}{3}\right)$ à 10^{-2} près (on rappelle : $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$).

III. — Dans un plan euclidien, on considère un cercle de centre O et de rayon 3. A est un point de ce cercle et H le point tel que :

$$H \in [OA] \quad \text{et} \quad d(O, H) = 1\,.$$

La droite perpendiculaire à (OA) en H est sécante au cercle en B et C. La tangente au cercle en B coupe la droite (OA) en D.

1) Faire la figure.
Calculer $d(H, B)$.

2) Montrer que la droite (OD) est médiatrice de $[BC]$.
Déterminer les images des points O, B et D par la symétrie orthogonale d'axe (OA).
En déduire que les droites (OC) et (CD) sont perpendiculaires.

3) Calculer $d(O, D)$.

IV. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

$$|x - 2| + 9 = 10$$

$$\frac{x}{3} - 4 < 2 - \frac{3x - 1}{9}.$$

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1981

ALGÈBRE

Soient f, g et h les trois fonctions qui, au réel x associent respectivement, lorsque cela est possible, les réels $3x - 6$, x^2 et $\sqrt{x}$.

1) Quelles sont, parmi ces trois fonctions, celles qui sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier.

2) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Quelle est son application réciproque ?

3) Calculer, pour tout réel x, $(g \circ f)(x)$ puis $[h \circ (g \circ f)](x)$.

4) Montrer que l'application k qui à tout réel x, associe le réel $|3x - 6|$ est une fonction affine par intervalles que l'on représentera graphiquement dans un repère (O, I, J).

5) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$: *a)* l'équation $k(x) = 6$
b) l'inéquation $k(x) < 3$.

GÉOMÉTRIE

1) Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J), placer les points A et B définis par leurs coordonnées : $A(1 ; 7)$ et $B(4 ; 3)$.
Le point C étant défini par $\overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OB}$, trouver les coordonnées de C.

2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. En déduire, sans faire de nouveaux calculs, que le triangle OAC est isocèle.

3) Montrer que $d(O, B) = d(A, B)$. En déduire, sans faire de nouveaux calculs, que le triangle OAC est rectangle en A.

4) On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre B qui a pour rayon la distance $d(O, B)$. Ce cercle coupe l'axe des abscisses en O et E et l'axe des ordonnées en O et F.
Quelle est la nature du quadrilatère $OECF$? Justifier.
En déduire les coordonnées des points E et F.

5) On trace la tangente (Δ) en O au cercle $\mathscr{C}$.
Trouver une équation de (Δ) dans le repère (O, I, J).

6) Soit f l'application qui, à tout point $M(x, y)$ du plan, associe le point $M'(x', y')$ de ce plan tel que :

$$\begin{cases} x' = -y + 7 \\ y' = x - 1 \end{cases}.$$

Quelles sont les images O', A' et B' des points O, A et B ?
Comparer les distances $d(B, A)$ et $d(B', A')$ ainsi que $d(A, O)$ et $d(A', O')$. f est-elle une isométrie ?

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1980

Exercice 1

a et b étant deux nombres réels non nuls, on pose :

$$A = (ab)^2\left(\frac{1}{b}\right)^4 \quad \text{et} \quad B = a^2\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{1}{b^2}\right)^0.$$

1) Simplifier A et B.

2) Calculer la valeur numérique de AB et de $\frac{A}{B}$ pour :

$$a = 4.10^{-3} \quad \text{et} \quad b = 2.10^{-2}.$$

Exercice 2

On donne l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x < 0 & f(x) = 2x + 5 \\ \text{Si } 0 \leqslant x \leqslant 3 & f(x) = 5 \\ \text{Si } x > 3 & f(x) = -x + 8. \end{array}$$

1) Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J), représenter f.

2) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 3$ et vérifier par le calcul les résultats obtenus.

3) Démontrer que f n'est pas bijective.

Exercice 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère la droite (D) d'équation :

$$x - 2y + 6 = 0.$$

1) Vérifier que le point $A(-1 ; 1)$ n'appartient pas à (D). Le point $B(2 ; 4)$ appartient-il à (D) ?

2) Écrire une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A et parallèle à (D).

3) Démontrer que la droite (D') d'équation $2x + y - 1 = 0$ est perpendiculaire à (D).

4) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) et de (D').

Exercice 4

Soit EFG un triangle rectangle en F et soit O le milieu de l'hypoténuse. La bissectrice de $\widehat{FOG}$ coupe (FG) en I.

1) Démontrer que (OI) est parallèle à (EF).

2) Démontrer que mes $\widehat{FOI}$ = mes $\widehat{FEO}$.

3) Le point O a pour image le point T par la symétrie orthogonale d'axe (FG). Démontrer que (FT) est parallèle à (EG) et préciser la nature du quadrilatère $OGTF$.

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1979

I. — Écrire le plus simplement possible les réels a et b tels que :

$$a = \frac{32}{35} - \frac{16}{42} + \frac{12}{45}; \quad b = \frac{5 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{27} - \sqrt{12}}.$$

II. — Soit f et g les deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout réel x par :

$$f(x) = -x + 2; \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 2.$$

1) *a*) Représenter graphiquement f et g dans un plan rapporté à un repère (O, I, J).

b) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

2) Soit h l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = f(x) \times g(x).$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $h(x) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}.$$

c) Quelles sont les solutions de l'inéquation : $h(x) \leqslant 0$?

III. — L'unité de longueur choisie est le centimètre. Sur une droite (Δ) du plan euclidien, on choisit un point O.

1) Faire les constructions suivantes :
Placer un point D sur (Δ) tel que $d(O, D) = 5$ puis placer le point A du segment $[OD]$ tel que $d(O, A) = 3$.

Construire une demi-droite $[Oy$ perpendiculaire à (Δ) puis tracer dans le demi-plan de bord (Δ) et contenant $[Oy$: le demi-cercle de centre O et passant par A, le demi-cercle de diamètre $[OD]$.

2) Les deux demi-cercles précédents se coupent en M.

a) Quelle est la nature du triangle OMD ? Justifier.

b) Calculer $d(D, M)$.

c) Soit H l'image du point M dans la projection orthogonale sur (Δ).
Calculer $d(O, H)$ et $d(M, H)$.

3) La droite (DM) coupe $[Oy$ en B. Calculer $d(O, B)$.

IV. — Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $D(5\,;\,0)$ et $B\left(0\,;\,\frac{15}{4}\right)$. On appelle M l'image du point O dans la projection orthogonale sur la droite (BD).

1) Quelles sont les coordonnées de M ? Justifiez votre réponse.

2) Calculez la tangente de l'angle $\widehat{DOM}$ et celle de l'angle $\widehat{ODM}$.
Quelle remarque pouvez-vous faire sur les deux nombres trouvés ?
Expliquez ce résultat.

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1978

I. — Calculer les réels a, b et c sachant que :

$$\frac{3}{a} = \frac{1 + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3}}\,; \quad b = \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}\,; \quad c = 14\,a - 12\,b\,.$$

II. — Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + |\,2\,x - 4\,|\,.$$

1) Exprimer $f(x)$ pour x élément de $]\leftarrow, 2]$ puis pour x élément de $[2, \mapsto[$.

2) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère quelconque (O, I, J).

3) Utiliser le graphique précédent pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$f(x) = 5\,;\; f(x) = 1\,.$$

III. — Soit $\hat{A}$ un angle obtus ; on donne $\sin \hat{A} = 0{,}60$.

1) Calculer $\cos \hat{A}$.

2) Dans un plan euclidien rapporté au repère orthonormé (O, I, J), construire le point M du demi-cercle trigonométrique tel que : mes $\widehat{IOM}$ = mes $\hat{A}$.

IV. — Dans un plan euclidien, on donne 3 points distincts A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad d(A, C) = 6\,a,$$

où a est un réel strictement positif donné.
On appelle (D) et (Δ) les droites passant respectivement par B et C et perpendiculaires à la droite (AB).

1) Soit E un point de (Δ) tel que $d(C, E) = 3\,a$.
La droite (AE) coupe (D) en F. Calculer $d(A, E)$ et $d(E, F)$ en fonction de a.

2) Construire les images E' et F' des points E et F par la composée de la symétrie orthogonale par rapport à (D) suivie de la symétrie orthogonale par rapport à (Δ).

3) Calculer $d(E', F')$ en fonction de a.

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1977

A. — Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(3x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

1) Démontrer que f est une application affine. Est-elle croissante ou décroissante ? Expliquer pourquoi.

2) On considère une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = ax + b.$$

a) Calculer a et b sachant que $g(0) = 1$ et $g(b) = 7$.

b) Vérifier que $f(x) = -2 \times g(x)$.

3) On considère les fonctions h et k définies par :

$$h(x) = f(x) \times g(x) \qquad \text{et} \qquad k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

a) Calculer $h(x)$ et $k(x)$ et préciser leur ensemble de définition.

b) Calculer $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puis $k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Sachant que $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}415$, trouver un encadrement de $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 2| = 2x - 5$.

C. — Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan euclidien, soit les points $A(2; -1)$, $B(3; 2)$ et $C(0; 3)$.

1) Calculer $d(A, B)$, $d(B, C)$ et $d(A, C)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Déterminer les coordonnées du point D tel que (A, B) et (D, C) soient équipollents. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3) Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre K passant par les points A, B et C.

a) Que représente la droite (AC) pour le cercle $\mathscr{C}$? Expliquer.

b) Déterminer les coordonnées de K et calculer le rayon r de $\mathscr{C}$.

c) Démontrer que D est élément de $\mathscr{C}$.

4) Soit la droite (Δ) tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B. Elle coupe les axes de coordonnées (OI) et (OJ) aux points E et F.

a) Trouver une équation de (Δ).

b) Déterminer les coordonnées de E et de F.

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1976

I. — Soit f_1 et f_2 deux applications affines définies par :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x + 3 \qquad\qquad x \mapsto 1 - 2x.$$

1) Quelle est l'image d'un nombre réel x par $f_1 \circ f_2$ et par $f_2 \circ f_1$?

2) Déterminer l'ensemble $\left\{x / x \in \mathbb{R}; (f_1 \circ f_2)\left(\frac{1}{3}\right) + (f_2 \circ f_1)(x) = \frac{1}{2}\right\}$.

II. — 1) Développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x)$

$$P(x) = (x - 3)(2x - 3).$$

2) *a*) Factoriser le polynôme $Q(x)$

$$Q(x) = 4x^2 - 25 - (x + 6)(2x - 5).$$

b) Développer, réduire et ordonner le polynôme $Q(x)$.

3) On considère les deux applications g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$g : x \mapsto 2x^2 - 9x + 9 \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto 2x^2 - 7x + 5.$$

a) Déterminer l'élément de $\mathbb{R}$ dont les deux images par g et h sont égales.

b) Déterminer les éléments de $\mathbb{R}$ dont l'image par g est le nombre 0.

4) a étant un élément quelconque de $\mathbb{R}$, montrer que

$$g\left(a + \frac{1}{2}\right) = h(a).$$

III. — Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $(\vec{i}, \vec{j})$ étant la base associée.

1) Déterminer les coordonnées de A, puis les coordonnées de B.
Représenter les points A et B dans le repère donné.

2) A un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x, y) on associe le vecteur $\vec{v}'$ de coordonnées $(y, -x)$.

C'est-à-dire : $$x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto y\vec{i} - x\vec{j}.$$

Déterminer le vecteur $\vec{v}'$ sachant que $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$, puis les coordonnées du point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{v}'$.
Représenter le point C dans le repère donné.

3) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$. En déduire la nature du quadrilatère $OABC$.

4) Montrer que la droite (AC) est orthogonale aux droites (AB) et (OC).

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1975

I. — On définit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 3(x + 1)^2 - 12.$$

1) Calculer $h\left(-\frac{1}{3}\right)$ et $h(\sqrt{3})$.
Écrire $h(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré. Pour quelles valeurs de x a-t-on $h(x) = 0$?

2) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = \frac{1}{h(x)}.$$

Quel est l'ensemble de définition de g ?
Calculer $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ et $g(\sqrt{3})$; donner dans chaque cas un encadrement du résultat par deux décimaux consécutifs d'ordre 3. On donne : $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

II. — Résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x) \geqslant \frac{x + 1}{3} + 3 \\ 0{,}2(x - 4) < 2 + 0{,}7\,x. \end{cases}$$

III. — Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points A, B, C définis par

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{OB} = 4\vec{i} - \vec{j}$ $\quad \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{7}{4}\overrightarrow{OB}$, $(\vec{i}, \vec{j})$ étant la base associée.

A. — 1) Écrire $\overrightarrow{OC}$ sous la forme $a\vec{i} + b\vec{j}$.
Marquer les points A, B, C.

2) Soit H l'image de B dans la symétrie de centre A.
Calculer $d^2(B, H)$; $d^2(H, C)$; $d^2(B, C)$.
Que peut-on dire du triangle HBC ?

3) La médiatrice du segment $[BH]$ coupe la droite (BC) en K. Montrer que K est le milieu de (B, C) et donner ses coordonnées.

B. — On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' dont les coordonnées sont :

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \qquad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y).$$

Calculer les coordonnées des points A', B' et H' images de A, B et H par f.
Vérifier que A' est le milieu de (B', H') et que $d(A', B') = d(A, B)$. Peut-on, de cette dernière égalité seulement, déduire que f est une isométrie ?

EXAMEN DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DE FIN DE TROISIÈME — 1974

1) On considère les applications affines f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = 2x - 3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x + b.$$

a) Déterminer le réel b de telle sorte que l'on ait : $g \circ f = f \circ g$.

b) b étant égal à la valeur trouvée en *a*), construire dans un repère (O, I, J) les représentations graphiques des applications f et g.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > g(x)$, b ayant la valeur trouvée en *a*).

2) Soit (O, A, B) un repère du plan, non orthonormé.

a) Construire le point E de coordonnées $(3 ; 1)$. Calculer les coordonnées du point F tel que : $F = S_O(E)$ (où S_O est la symétrie centrale de centre O).

b) Calculer les coordonnées du point G tel que : $G = t_{\overrightarrow{AB}}(F)$ (où $t_{\overrightarrow{AB}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$).

c) Démontrer que les points A, O, G sont alignés.

d) Soit I le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$; montrer que $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IG}$. Que peut-on en déduire ?

3) Déterminer les ensembles E et F définis par :

a) $$E = \left\{ x / x \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{x} = \frac{x}{9(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \right\}$$

$$F = \{ x / x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x - \sqrt{x^2} = 0 \}.$$

4) Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A et B de coordonnées respectives $(2 ; 0)$ et $(0 ; 1)$.

a) Écrire une équation de la droite (AB).

b) Déterminer une équation de la droite (D) orthogonale à (AB) et passant par le point C de coordonnées $(1 ; 3)$.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) et (AB).

d) Calculer $d(A, B)$ et $d(B, C)$. Quelle est la nature du triangle BCA ?

e) Calculer $\cos \widehat{BAC}$.

f) Déterminer $\operatorname{tg} \widehat{OAB}$; en déduire une valeur approchée à un degré près de la mesure de $\widehat{OAB}$.

CONCOURS GÉNÉRAL — SESSION DU 26 MARS 1981

Soit O un point du plan euclidien et r un réel strictement positif. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon r ; $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres orthogonaux de $\mathscr{C}$.

1) Soit P le demi-plan de bord (AB) et contenant C ; soit I le milieu de $[OA]$; la droite orthogonale en I à (AB) coupe l'arc $\overset{\frown}{AC}$ inclus dans P en M.

a) Démontrer que le triangle OAM est équilatéral.

b) La droite (OC) coupe le segment $[MB]$ en J. Calculer en fonction de r les distances suivantes :

$$d(M, I) \; ; \quad d(M, B) \; ; \quad d(B, J) \; ; \quad d(M, J) \; ; \quad d(O, J).$$

c) En déduire que la droite (AJ) est la médiatrice du segment $[OM]$.

2) On désigne par $\mathscr{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle OJB et par K son centre. Démontrer que la droite (MO) est tangente à $\mathscr{C}_1$.

3) Les droites (MI) et (AJ) se coupent en N.

a) Démontrer que les droites (ON) et (AM) sont orthogonales.

b) Démontrer que le quadrilatère $OJMN$ est un losange.

c) Démontrer que les points O, J, M, A sont situés sur un même cercle et que N est le centre de ce cercle ; exprimer son rayon en fonction de r.

4) Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ se coupent en B et Q.

a) Démontrer que les points A, J et Q sont alignés.

b) Démontrer que les points M et Q sont symétriques par rapport à la droite (CD).

CONCOURS GÉNÉRAL — SESSION DU 27 MARS 1980

I. — On donne les applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

1) Calculer, si cela est possible, les images des nombres 0 ; 1 et − 1 par les applications : f, g, h, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $h \circ g \circ f$.

2) Indiquer les ensembles de départ et d'arrivée de chacune des applications suivantes : $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $h \circ g \circ f$.
Calculer pour chacune l'image d'un réel x appartenant à l'ensemble de départ de l'application considérée.

3) Le réel 4 possède-t-il un antécédent, ou plusieurs, ou aucun par l'application g ?

Résoudre l'équation :

$$(g \circ f)(x) = 4\,.$$

4) Résoudre l'équation :

$$(h \circ g \circ f)(x) = \frac{4}{3}.$$

5) Représenter dans deux repères orthonormés distincts l'application $h \circ g$ et l'application $g \circ h$.

6) Résoudre les équations :

$$(h \circ g)(x) = 4 \qquad (g \circ h)(x) = 4\,.$$

II. — Soit ABC un triangle ; soit O le milieu de (A, B). A tout point M de (BC) on fait correspondre, s'il existe, le point d'intersection M' de (OM) et (AC) ; on définit ainsi une fonction f de (BC) vers (AC) telle que : $M' = f(M)$.

1) Quelles sont les images respectives de B et C ?

2) Y-a-t-il des points de (BC) n'ayant pas d'image par f ? Pourquoi ?

3) Y-a-t-il des points de (AC) n'ayant pas d'antécédent par f ? Pourquoi ?
f est-elle une bijection ? Pourquoi ?

4) On appelle P le milieu de (B, C) et Q le milieu de (A, C).

Représenter, avec quatre couleurs différentes :

— l'ensemble des images par f de $[BP[$,
— l'ensemble des images par f de $[CP[$,
— l'ensemble des antécédents par f de $[AQ[$,
— l'ensemble des antécédents par f de $[CQ[$.

5) M étant un point de (BC) qui possède une image M', on trace la parallèle à (MM') passant par B, montrer qu'elle coupe (AC) en un point I et que M' est le milieu de (A, I).

En déduire que : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'C}}$.

6) Soit D' le symétrique de C par rapport à A et E' le symétrique de A par rapport à C. Soit D l'antécédent de D' et E l'antécédent de E' par f.

Calculer $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ et $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$. Comparer $\overline{BE}$, $\overline{ED}$ et $\overline{DC}$.

CONCOURS GÉNÉRAL — SESSION DU 15 MARS 1979

Soit (Δ) une droite et A, I, O, J des points distincts de (Δ) tels que

$$d(A, I) = d(I, O) = d(O, J) = a \qquad (a > 0).$$

1) Construire un point E tel que le triangle AIE soit équilatéral. On appelle M le milieu du segment $[IE]$ et F le projeté de O sur la droite (AM) suivant la direction de la droite (IE).

a) Montrer que les quatre points A, E, F, O appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}_1$ dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que M est le milieu de $[AF]$. Calculer en fonction de a : $d(A, M)$; $d(A, F)$; $d(O, F)$.
Démontrer que la droite (AM) est tangente en F au cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[IJ]$.

2) La droite (EM) coupe le cercle $\mathscr{C}_2$ en I et en un second point N.

a) Montrer que le triangle INJ est rectangle en N. Que peut-on dire des droites (AF) et (JN) ?

b) Montrer que $\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \dfrac{\overline{IA}}{\overline{IJ}}$. Calculer $d(I, N)$. En déduire que la droite (JN) est tangente en N au cercle $\mathscr{C}_1$.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $OFIN$? Montrer que (Δ) est la médiatrice du segment $[FN]$.

3) Tracer la droite (Δ') perpendiculaire en A à (Δ). La droite (Δ') coupe la droite (JF) en K et la droite (JN) en L.

a) On considère la symétrie orthogonale S d'axe (Δ). Quelle est l'image par S du point F ? de la droite (FJ) ? En déduire que (Δ) est un axe de symétrie du triangle JKL.

b) On considère maintenant la symétrie orthogonale S' d'axe (MN).
Quelle est l'image par S' du point A ? de la droite (AI) ?
En déduire l'image par S' de la droite (Δ') (on pourra utiliser le fait que la symétrie orthogonale transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales). Montrer que la droite (MN) est un axe de symétrie du triangle JKL.

c) Montrer que le triangle JKL est équilatéral. Trouver le centre et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

CONCOURS GÉNÉRAL — SESSION DU 16 MARS 1978

I. — Dans un plan euclidien, on donne deux points A et B. On appelle $\mathscr{C}$ l'ensemble des points P du plan tels que le triangle APB soit rectangle en P.

1) Quelle est la nature de $\mathscr{C}$? Préciser tous les éléments qui le définissent. Tracer $\mathscr{C}$.

2) Soit J le milieu de (A, B). Une droite quelconque distincte de (AB) et contenant J coupe $\mathscr{C}$ en deux points M et N.
Quelle est la nature de $AMBN$?

3) On considère les droites (D_A) et (D_B) passant respectivement par A et B et orthogonales à (AB) ; ainsi que les droites (Δ_M) et (Δ_N) passant respectivement par M et N et orthogonales à (MN)

$$(D_A) \cap (\Delta_M) = \{ Q \}; \qquad (D_B) \cap (\Delta_M) = \{ R \}$$
$$(D_B) \cap (\Delta_N) = \{ S \}; \qquad (D_A) \cap (\Delta_N) = \{ T \}.$$

a) Démontrer que $QRST$ est un losange.

b) Comment doit-on choisir la droite (MN) pour que $QRST$ soit un carré ? Soit (M_0N_0) la droite répondant à la question.

4) *a*) Quelle que soit la droite (MN), telle qu'elle a été définie au 2), montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{QA} = k\overrightarrow{QT}$. (On ne demande pas de calculer sa valeur.)

Montrer que $\overrightarrow{SB} = k\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{QM} = k\overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{RM} = (1 - k)\overrightarrow{RQ}$.

Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{QS}$ et de k.

b) Lorsque $QRST$ est un carré, quelle est la valeur k_0 de k ?
Vérifier l'exactitude des égalités précédentes dans ce cas particulier.

II. — Soit (O, I, J) un repère orthonormé. On place $A(3 ; 0)$ et B de façon que J soit le milieu de (A, B). On considère alors toute la figure précédemment étudiée.
On note (x, y) les coordonnées d'un point P quelconque de $\mathscr{C}$.

1) *a*) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PJ}$ en fonction de x et y.

b) Trouver une égalité vérifiée par les coordonnées de tout point de $\mathscr{C}$.

Application numérique : Montrer que les points

$$C(0 ; 1 + \sqrt{10}) \quad \text{et} \quad D(0 ; 1 - \sqrt{10}) \quad \text{appartiennent à } \mathscr{C}.$$

2) Calculer les coordonnées des points M_0 et N_0.

N.B. : On peut résoudre la partie II, 1) sans avoir rien traité de la partie I.
Une fois la partie I, 3) terminée, on peut résoudre la partie II, 2).

CONCOURS GÉNÉRAL — SESSION DU 24 MARS 1977

ALGÈBRE

On dit qu'une application f dans $\mathbb{R}$ possède la propriété P si et seulement si, quels que soient les réels x_1 et x_2 :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

On dit qu'une application f dans $\mathbb{R}$ possède la propriété Q si et seulement si, quels que soient les réels x_1 et k :

$$f(kx_1) = kf(x_1).$$

1) Soit f_1 une application dans $\mathbb{R}$ telle que $f_1(x) = 2x$.

a) Calculer $f_1(2)$, $f_1(3)$, $f_1(5)$ et vérifier que $f_1(2) + f_1(3) = f_1(2 + 3)$.
Calculer $3f_1(2)$ et $f_1(6)$ et vérifier que $3f_1(2) = f_1(3 \times 2)$.

b) Calculer $f_1(x_1)$, $f_1(x_2)$, $f_1(x_1 + x_2)$ et démontrer que f_1 possède la propriété P.
Démontrer que f_1 possède la propriété Q.

c) Démontrer que, d'une façon générale, toute application f dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) possède les propriétés P et Q.

2) L'application f_2 dans $\mathbb{R}$ telle que $f_2(x) = -3x + b$ ($b \in \mathbb{R}$) possède-t-elle la propriété P ? Possède-t-elle la propriété Q ? Sinon existe-t-il une ou plusieurs valeurs de b pour lesquelles f_2 possède les propriétés P et Q ?

3) L'application f_3 dans $\mathbb{R}$ telle que $f_3(x) = x^2$ possède-t-elle la propriété P ? la propriété Q ?

4) L'application f_4 dans $\mathbb{R}$ telle que $f_3(x) = \sqrt{x^2}$ possède-t-elle la propriété P ? la propriété Q ?

5) On donne deux applications g et h dans $\mathbb{R}$ telles que

$$g(x) = 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad h(x) = cx + d$$

où c et d désignent deux réels.
Comment choisir les réels c et d pour que l'application $g \circ h$ dans $\mathbb{R}$ possède les propriétés P et Q ?

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J), placer le point A de coordonnées (4, 0).
Soit M un point du segment $[OA]$ et m l'abscisse de M.
Soit N le point de la droite (OJ) tel que son ordonnée soit égale à $\overline{AM}$.

1) Faire la figure et calculer $d(M, N)$ dans le cas où $m = 1$.

2) Trouver :

— l'ensemble des valeurs de m,

— l'ensemble des valeurs de $\overline{AM}$; en déduire l'ensemble des points N.

3) *a*) m ayant une valeur non précisée, calculer MN^2. L'expression trouvée peut être mise sous la forme

$$2[(a-b)^2+4] \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}).$$

Trouver la valeur de m pour laquelle MN^2 a la plus petite valeur possible.

b) Sachant que $1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$, donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de la plus petite valeur possible de MN.

4) On désigne par S_O la symétrie de centre O.
Le point M étant pris quelconque sur $[OA]$ on construit le point N correspondant, puis les images M' et N' telles que $M' = S_O(M)$ et $N' = S_O(N)$.

a) Quelle est la nature de $MNM'N'$?

b) Pour quelle valeur de m les quatre points M, N, M' et N' sont-ils sur un même cercle ? On précisera alors le centre et le rayon de celui-ci.

5) Dans la translation définie par le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ les points M, N, M' et N' ont pour images respectives les points P, Q, R et S.
Les construire sur la figure du *a*) du 4).
Quelle est la nature de $PQRS$?

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Achevé d'imprimer en juin 1995
N° d'édition 10028884-(XII)-(120)-OSBV 80
N° d'impression P 49269
Dépôt légal juin 1995 / Imprimé en France



-7124-0226-X