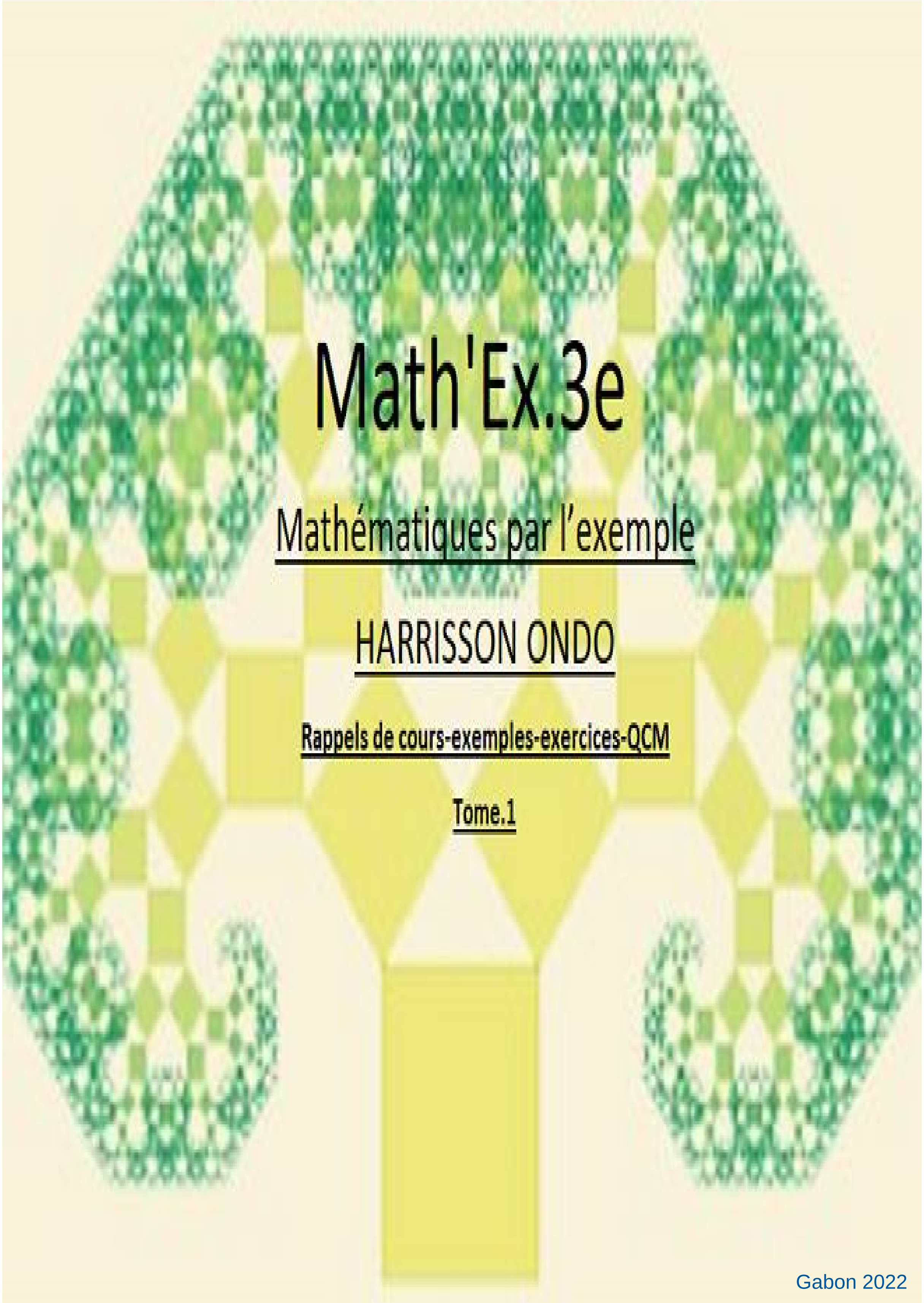

Math'Ex.3e
Mathématiques par l'exemple
HARRISSON ONDO
Rappels de cours-exemples-exercices-QCM
Tome.1

Gabon 2022

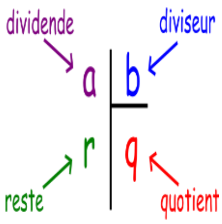
TABLE DES THEMES

Thème 1 : Le PGCD

I.PGCD par l'algorithme d'Euclide

Méthode :

_Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers naturels a et b , donnant un quotient entier q et un reste entier r non nul tel que r est inférieur à b .



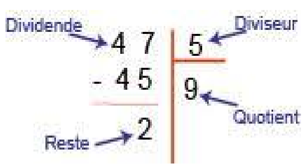
_Puis effectuer la division euclidienne de b par r

_On continue ainsi de suite jusqu'à une division euclidienne donnant un reste égal à 0.

_Le PGCD de a et b est le dernier reste non nul.

EXEMPLES :

Division euclidienne :



Algorithme d'Euclide :

PGCD de 1428 et 210 par l'algorithme d'Euclide :

1 4 2 8	2 1 0
1 6 8	6

2 1 0	1 6 8
4 2	1

1 6 8	4 2
0	4

Le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives est 42 donc le

PGCD (1428 et 210) = 42

$\begin{array}{r|l} 759 & 552 \\ \hline \mathbf{207} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 552 & 207 \\ \hline \mathbf{138} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 207 & 138 \\ \hline \mathbf{69} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 138 & 69 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$

Le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives est 69 donc le

PGCD (759 et 552) = 69

Exercice 1.1 :Par l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD de :

1) 60 et 42
2) 450 et 198
3) 126 et 34
4) 25872 et 484
5) 10920 et 8316

II.PGCD par l'algorithme des différences

Propriété :

Si un nombre divise deux nombres, a et b alors il divise aussi leur différence.

Méthode :

_Effectuer les différences successives jusqu'à obtenir une différence nulle.

_On prendra soin à chaque étape de prendre les deux nombres les plus petits.

_Le PGCD est la dernière différence non nulle .

EXEMPLE :

Le PGCD de 56 et 24 par l'algorithme des différences :

$56 - 24 = 32$

$32 - 24 = 8$

$24 - 8 = 16$

$16 - 8 = 8$

$8 - 8 = 0$

La dernière différence non nulle des soustractions successives est 8 donc le

PGCD (56 et 24) = 8

Exercice : Par l'algorithme des différences déterminer le PGCD de :

1) 60 et 36
2) 295 et 177
3) 351 et 208
4) 210 et 126
5) 210 et 1428

Thème 2 : Les identités remarquables

Le carré d'une somme :

$a^2 + 2ab + b^2 \quad = a^2 + ab + ab + b^2$

$= a(a+b) + b(a+b)$, ici $(a+b)$ est le facteur commun

$= (a+b)(a+b)$

$\underline{a^2 + 2ab + b^2 \ = (a+b)^2}$

Le carré d'une différence :

$a^2 - 2ab + b^2 \quad = a^2 - ab - ab + b^2$

$= a(a-b) - b(a-b)$, ici $(a-b)$ est le facteur commun

$= (a-b)(a-b)$

$\underline{a^2 - 2ab + b^2 \ = (a-b)^2}$

La différence de deux carrés : $a^2 - b^2$

On a $\quad a^2 - b^2 = a^2 + 0 - b^2$ et $0 = -ab + ab$

D'où $\quad a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$,

$= a(a-b) + b(a-b)$, ici $(a-b)$ est le facteur commun

$\underline{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

EXEMPLES :

A l'aide des identités remarquables calculer :

$29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2(30)(1) + 1^2$

$= 900 - 60 + 1$

$= 840 + 1$

$\underline{29^2 = 841}$

$61^2 = (60+1)^2 = 60^2 + 2(60)(1) + 1^2$

$= 3600 + 120 + 1$

$= 3600 + 121$

$$\underline{\ 61^2 = 3721}$$

$$102 \times 98 = (100+2)(100-2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$61^2 - 60^2 = (61+60)(61-60) = 121 \times 1 = 121$$

Simplifier la fraction :

$A = \frac{63^2-27^2}{78^2-30^2}$

$A = \frac{(63+27)(63-27)}{(78+30)(78-30)}$

$A = \frac{90\times36}{108\times48}$ on a $A = \frac{6\times15\times 36}{36\times3\times6\times8} = \frac{6\times15\times 36\times1}{36\times3\times6\times8} = \frac{6}{6}\times\frac{15}{3}\times\frac{36}{36}\times\frac{1}{8} = 1\times5\times1\times\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\mathrm{A} = \frac{5}{8}$

Exercice 2.1 :

A l'aide des identités remarquables calculer :

$E = 501 \times 499$; $F = 2015^2 - 2005^2$; $G = 1002^2$; $Q = 99^2$;

$S = 17^2 + 13^2 + 26 \times 17$ on donne $(26 = 2 \times 13)$

Exercice 2.2 :

A l'aide des identités remarquables Simplifier :

$I = \frac{49^2-21^2}{57^2-15^2}$; $H = \frac{85^2-17^2}{85^2+2\times85\times17+17^2}$; $T = \frac{53^2-27^2}{31^2-25}$; $C = \frac{53^2-27^2}{58^2-22^2}$

Thème 3 : La factorisation(1)

Factoriser

$A = 18x - 12$

On remarque que $12 = 6 \times 2$ et $18 = 6 \times 3$ donc 6 est le facteur commun de notre différence.

$A = 18x - 12$

$A = 6(3x) - 6(2)$

$\underline{\mathrm{A} = 6(3\mathrm{x} - 2)}$

$B = 3x(a + b) + 2y(a + b)$, $(a + b)$ est le facteur commun on a :

$\underline{\mathrm{B} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(3\mathrm{x} + 2\mathrm{y})}$

$P = (3x + 1)(x - 2) - (2x + 5)(x - 2)$, $(x - 2)$ est le facteur commun on a

$P = (x - 2)[(3x + 1) - (2x + 5)]$

$P = (x - 2)(3x + 1 - 2x - 5)$

$P = (x - 2)(3x - 2x + 1 - 5)$

$\underline{\mathrm{P} = (\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x} - 4)}$

$T = (2x + 7)(3x - 8) + 2x + 7$,

On a l'impression qu'il ''manque'' un facteur , il faut donc multiplier $2x + 7$ par 1, ainsi ;

$T = (2x + 7)(3x - 8) + (2x + 7) \times 1$

$T = (2x + 7)[(3x - 8) + 1]$

$T = (2x + 7)(3x - 8 + 1)$

$\underline{\mathrm{T} = (2\mathrm{x} + 7)(3\mathrm{x} - 7)}$

$Q = (7x - 2)(x - 1) - 7x + 2$

Le facteur commun est ''caché'' , mais on remarque une ''ressemblance'' entre $7x - 2$ et $-7x + 2$ on factorise $-7x + 2$; en mettant (-1) en facteur puis on change les signes des termes dans les parenthèses ;

$-7x + 2 = -1 \times (7x - 2)$ on a :

$Q = (7x - 2)(x - 1) - 7x + 2$

$Q = (7x - 2)(x - 1) - 1 \times (7x - 2)$

$Q = (7x - 2)[(x - 1) - 1]$

$Q = (7x - 2)(x - 1 - 1)$

$\underline{Q = (7x - 2)(x - 2)}$

$G = 4x^2 - 20x + 25$

$G = (2x)^2 - 20x + 5^2$,

calculons $2 \times 2x \times 5 = 20x$, G est bien une identité remarquable ainsi,

$G = (2x)^2 - 20x + 5^2$

$G = (2x)^2 - 2(2x)(5) + 5^2$

$\underline{G = (2x - 5)^2}$

$B = 16x^2 + 8x + 1$

$B = (4x)^2 + 8x + 1^2$

$B = (4x)^2 + 2(4x)(1) + 1^2$

$\underline{B = (4x + 1)^2}$

$C = 25x^2 - 9$

$C = (5x)^2 - (3)^2$

$\underline{C = (5x + 3)(5x - 3)}$

$F = (x - 4)^2 - 121$

$F = (x - 4)^2 - (11)^2$

$F = (x - 4 - 11)(x - 4 + 11)$

$\underline{F = (x - 15)(x + 7)}$

Exercice 3.1 : Factoriser

$A = (8x - 5)(8x + 5) + (8x - 5)(x + 3)$

$T = (2x + 1)(x + 5) - 2x - 1$

$G = (8 - x)(5x + 2) + (x - 8)(x + 3)$

Exercice 3.2 : Factoriser

$B = 16x^2 - 81$

$E = (x - 3)^2 - 64$

$Q = x^2 - 8x + 16$

$H = x^2 + 20x + 100$

$Z = (5x - 3)^2 - (x - 2)^2$

Thème 4 : La factorisation(2)

Factoriser : $A = (8x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x) - 1$

$A = (8x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x) - 1$

$A = (8x^2 - 1) - 1 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 8x^2 - 1 - 1 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 8x^2 - 2 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 2(4x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) - (4x + 22)(-2x - 1)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) - (-1) \times (2x + 1)(4x + 22)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)(4x + 22)$

$A = (2x + 1)[2(2x - 1) + (4x + 22)]$

$A = (2x + 1)(4x - 2 + 4x + 22)$

$A = (2x + 1)(4x + 4x - 2 + 22)$

$\underline{A = (2x + 1)(8x + 20)}$ ou $\underline{A = 4(2x + 5)(2x + 1)}$

Factoriser :

$P = 4x^2 + 12x + 5$, P n'est pas une identité remarquable on pose

$12x = 2x + 10x$

$P = 4x^2 + 2x + 10x + 5$

$P = 2x(2x + 1) + 5(2x + 1)$

$\underline{P = (2x + 1)(2x + 5)}$

$Q = 3x^2 - 2x - 1$, Q n'est pas une identité remarquable on pose

$-2x = -3x + x$

$Q = 3x^2 - 3x + x - 1$

$Q = 3x(x - 1) + (x - 1) \times 1$

$\underline{Q = (x - 1)(3x + 1)}$

$T = x^2 + 2x - 8$, T n'est pas une identité remarquable on pose

$-8 = +1 - 9$

$T = x^2 + 2x + 1 - 9$, on a $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

D'où $T = (x + 1)^2 - 9$

$T = (x + 1)^2 - (3)^2$

$T = (x + 1 + 3)(x + 1 - 3)$

$\underline{\mathrm{T = (x + 4)(x - 2)}}$

Factoriser , $A = (2x - 1)(2x + 1) - (1 - 3x) - 2x(3x - 1)$

$A = (2x - 1)(2x + 1) - (\mathbf{1 - 3}\boldsymbol{x}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x - 1)(2x + 1) - (-\mathbf{1}) \times (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x - 1)(2x + 1) + \mathbf{1} \times (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x - 1)(2x + 1) + (3x - 1)(\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})$

$A = (2x - 1)(2x + 1) + (-\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\ (3x - 1)$

$A = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\ (3x - 1)$

$\mathrm{A = (2x - 1)[(2x + 1) -}\ (3x - 1)]$

$\mathrm{A = (2x - 1)(2x + 1 -}\ 3x + 1)$

$\mathrm{A = (2x - 1)(2x - 3x + 1 + 1)}$

$\underline{\mathrm{A = (2x - 1)(-x + 2)}\ \text{ ou }\ \mathrm{A = (2x - 1)(2 - x)}}$

Exercice 3.3 : Factoriser

$Q = 2x^2 - 7x + 5 - x(5 - 2x)$

$G = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

$B = 2x^2 - 50 + (x - 5)^2 + (x - 5)(3x - 8)$

$F = (9x^2 - 25)(4x - 1) + (16x^2 - 8x + 1)(6x - 10)$

$S = (3x - 5)[(5x - 1)^2 - 4(3x + 2)^2]$

Thème 5 : Fractions

Règles :

I. Les opérations entre parenthèses sont prioritaires sur La multiplication, la division, l'addition et la soustraction.
II. La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.
III. Les puissances sont prioritaires sur toutes les autres opérations.
IV. Dans une suite d'opérations contenant multiplication et division, sans parenthèses, le calcul est effectué de la gauche vers la droite.

Rappels

$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{a+c}}{\mathrm{b}}$ avec $b \neq 0$; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$\frac{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\div\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$ avec $b \neq 0\,,c \neq 0$ et $d \neq 0$

EXEMPLES :

$\frac{4}{7}-\frac{12}{49}=\frac{4\times\ldots}{7\times\ldots}-\frac{12}{49}=\frac{4\times7}{7\times7}-\frac{12}{49}=\frac{28}{49}-\frac{12}{49}=\frac{28-12}{49}=\frac{16}{49}$

$\frac{6}{11}+\frac{1}{11}=\frac{6+1}{11}=\frac{7}{11}$

$7-\frac{5}{3}=\frac{7\times3-5}{3}=\frac{21-5}{3}=\frac{16}{3}$ et $\frac{4}{15}-2=\frac{4-2\times15}{15}=\frac{4-30}{15}=\frac{-26}{15}$

$\frac{15}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15\times3}{4\times2}=\frac{45}{8}$ et $6\times\frac{3}{4}=\frac{6\times3}{4}=\frac{18}{4}=\frac{18\div2}{4\div2}=\frac{9}{2}$

$\frac{2}{13}\times8=\frac{2\times8}{13}=\frac{16}{13}$

$\frac{5}{9}\div\frac{3}{2}=\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{9\times3}=\frac{10}{27}$ et $12\div\frac{3}{4}=12\times\frac{4}{3}=\frac{12\times4}{3}=\frac{12}{3}\times4=4\times4=16$

$\frac{3}{5}\div15=\frac{3}{5}\div\frac{15}{1}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}=\frac{3\times1}{5\times15}=\frac{3}{75}=\frac{3\div3}{75\div3}=\frac{1}{25}$

$A=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times3$;

$A = \frac{1}{4} - \frac{1\times3}{4}$;

$A = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$;

$A = \frac{1-3}{4}$;

$A = \frac{-2}{4}$;

$A = \frac{-2\div2}{4\div2}$

$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$

Calculer :

$E = (5 + \frac{3}{4}) \times \frac{4}{5}$

$E = (\frac{5\times4+3}{4}) \times \frac{4}{5}$

$E = (\frac{20+3}{4}) \times \frac{4}{5} = \frac{23}{4} \times \frac{4}{5}$

$E = \frac{23}{5} \times \frac{4}{4}$

$E = \frac{23}{5} \times 1$

$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{5}}$

Exercice 5.1 calculer et simplifier (rendre irréductible)

$T = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$

$P = 5 - 4 \times (\frac{1}{4} + \frac{1}{2})$

$S = (\frac{2}{5} - 4) \div 3$

$A = 14 \div \frac{13}{2} - \frac{2}{13}$

Calculons : $2 \times 5 \times 7$

On a : $2 \times 5 = 3 + 7$ car $2 \times 5 = 10$ et $3 + 7 = 10$

$2 \times 5 \times 7 = (3 + 7) \times 7 = 10 \times 7 = 70$

$2 \times 5 \div \frac{1}{6} = (3 + 7) \div \frac{1}{6} = 10 \times \frac{6}{1} = 10 \times 6 = 60$

Calculer

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{2-\frac{1}{3}}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{2\times3-1}{3}}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{6-1}{3}}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{5}{3}}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+3\times\frac{3}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{9}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{1\times5+9}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{5+9}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{14}{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} - 3 \times \frac{5}{14}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3\times5}{14}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{15}{14}$$

$$S = \frac{1\times7}{2\times7} - \frac{15}{14}$$

$$S = \frac{7}{14} - \frac{15}{14}$$

$$S = \frac{7-15}{14}$$

$$S = \frac{-8}{14}$$

$$S = \frac{-8}{14} = \frac{-4\times2}{7\times2} = \frac{-4}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{-4}{7} \times 1 = \frac{-4}{7}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{\frac{-4}{7}}$$

Exercice 5.2 calculer et simplifier

$$P = \frac{(\frac{2}{3})^2 - 1}{\frac{2}{3} + 1} \qquad Q = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+3}} \qquad A = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} \qquad E = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}}$$

Thème 6 : Puissances et notation scientifique

La notation puissance

Si a est un nombre non nul et si n est entier naturel non nul alors , a puissance n ou encore a exposant n s'écrit : $a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$, le produit de n facteurs égaux à ''a'' ou encore '' a multiplié par lui-même n fois ''.

Par convention quel que soit le nombre a (non nul) : $a^0 = 1$

On a aussi : $a^1 = a$, la puissance 1 ne s'écrit pas .

Exemples :

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$-3^4 = -1 \times 3^4 = -1 \times 81 = -81$

$(-3)^0 = 1$ et $(1{,}5)^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

Exercice 6.1

Ecrire sous la forme d'une puissance :

1) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

2) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

3) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Exposant négatif

Si a est un nombre non nul et n un entier positif alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25}$; $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Propriétés des puissances d'exposant positif

Si a est un nombre , avec $m > 0$, $n > 0$ alors $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Si a est un nombre non nul et $m > n > 0$ alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Si a est un nombre , m et n des entiers positifs ($m > 0$ et $n > 0$), alors $(a^m)^n = a^{m\times n}$

Soients a et b des nombres et n un entier positif alors $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Soients a et b des nombres avec $b \neq 0$ et n un entier positif alors $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples :

$7^6 \times 7^4 = 7^{6+4} = 7^{10}$; $a^3 \times a = a^3 \times a^1 = a^{3+1} = a^4$;

$(1{,}3)^3 \times (1{,}3)^2 = (1{,}3)^{3+2} = (1{,}3)^5$

$\frac{(-5)^6}{(-5)^2} = (-5)^{6-2} = (-5)^3$; $\frac{4^9}{4^4} = 4^{9-4} = 4^5$; $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

$(\frac{1}{3})^7 \times (\frac{1}{3})^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{7+6} = (\frac{1}{3})^{13}$

$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2 = 49$

$(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

$(2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$; $(3 \times \frac{3}{5})^3 = 3^3 \times (\frac{3}{5})^3$

$25a^2 = 5^2 \times a^2 = (5a)^2$

$\frac{8^9}{5^9} = (\frac{8}{5})^9$

$2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

$10^{-5} \times 10^3 = 10^{-5+3} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

$(5^{-2})^3 = 5^{-2\times 3} = 5^{-6}$ et $(4^5)^{-1} = 4^{5\times(-1)} = 4^{-5}$

$(3 \times 5)^{-2} = \frac{1}{(3\times 5)^2} = \frac{1}{3^2\times 5^2}$

Soit n un entier naturel calculer $\frac{3^{n+3}}{3^{n+1}} = 3^{(n+3)-(n+1)} = 3^{n+3-n-1} = 3^{n-n+3-1} = 3^2$

Calculer $(a^3)^4 \times a^4 = a^{3\times 4} \times a^4 = a^{12} \times a^4 = a^{12+4} = a^{16}$

$\frac{(a^{11})^2}{a} = \frac{a^{11\times 2}}{a} = \frac{a^{22}}{a^1} = a^{22-1} = a^{21}$

$\frac{6^{12}\times 4^{12}}{3^{12}\times 8^{12}} = \frac{(6\times 4)^{12}}{(3\times 8)^{12}} = \frac{24^{12}}{24^{12}} = 24^{12-12} = 24^0 = 1$

$(\frac{35}{48})^3 \times (\frac{6}{7})^3 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \left(\frac{35}{48} \times \frac{6}{7}\right)^3 \times (\frac{8}{5})^2 = \left(\frac{35}{7} \times \frac{6}{48}\right)^3 \times (\frac{8}{5})^2 = (5 \times \frac{6 \div 6}{48 \div 6})^3 \times (\frac{8}{5})^2$

$(\frac{35}{48})^3 \times (\frac{6}{7})^3 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 = (5 \times \frac{6 \div 6}{48 \div 6})^3 \times (\frac{8}{5})^2 = (5 \times \frac{1}{8})^3 \times (\frac{8}{5})^2 = (\frac{5}{8})^3 \times (\frac{8}{5})^2 = \frac{5^3}{8^3} \times \frac{8^2}{5^2} =$ $(\frac{35}{48})^3 \times (\frac{6}{7})^3 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{5^3}{5^2} \times \frac{8^2}{8^3} = 5^{3-2} \times 8^{2-3} = 5 \times 8^{-1} = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\boldsymbol{(\frac{35}{48})^3 \times (\frac{6}{7})^3 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{5}{8}}$

Calculer

$A = \frac{2 \times 5^{22} - 9 \times 5^{21}}{25^{10}}$;

$A = \frac{2 \times 5 \times 5^{21} - 9 \times 5^{21}}{25^{10}}$;

$A = \frac{10 \times 5^{21} - 9 \times 5^{21}}{(5^2)^{10}}$;

$A = \frac{(10-9) \times 5^{21}}{(5^2)^{10}}$;

$A = \frac{(10-9) \times 5^{21}}{5^{2 \times 10}}$

$A = \frac{1 \times 5^{21}}{5^{2 \times 10}}$;

$A = \frac{5^{21}}{5^{20}}$

$A = 5^{21-20}$;

$A = 5^1$;

$\boldsymbol{A = 5}$

$B = 3 - 5 \times (\frac{1}{5} - 1)^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{1 - 1 \times 5}{5})^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{1-4}{5})^2$

$B = 3 - 5 \times (\frac{1-4}{5})^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{-3}{5})^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{-3}{5}) \quad \times (\frac{-3}{5})$

$B = 3 - 5 \times (\frac{9}{5\times5})$;

$B = 3 - \frac{5}{5} \times (\frac{9}{5})$;

$B = 3 - 1 \times (\frac{9}{5})$

$B = 3 - (\frac{9}{5})$

$B = \frac{5\times3- 9}{5}$;

$B = \frac{5\times3- 9}{5}$;

$B = \frac{15- 9}{5}$;

$\mathbf{B} = \mathbf{\frac{6}{5}}$

Exercice 6.1 Calculer à l'aide des propriétés de puissances

1) $3^5 \times 3^7$ 2) $(\frac{1}{4})^6 \times (\frac{1}{4})^8$ 3) $2^3 \times 2 \times 2^8$

4) $\frac{3^{10}}{27}$ 5) $\frac{27}{3}$ 6) $\frac{(-8)^{12}}{(-8)}$ 7) $\frac{(3{,}4)^8}{(3{,}4)^7}$

Exercice 6.2 Calculer à l'aide des propriétés de puissances

$A = \frac{5^3\times8^2}{8^3\times5^2}$; $E = (\frac{5^3}{6^2})^4 \times (\frac{2}{5})^5 \times (\frac{3}{5})^7$; $Q = \frac{(4\times3^{22}+7\times3^{21})\times57}{(19\times27^4)^2}$

$P = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \div (1 - \frac{1}{10})^2$; $P = \frac{24}{25} \times \frac{10^{-n+3n}}{10^{2n}}$, n est un entier naturel.

L'écriture scientifique

Rappels

Calculer

$10^3 \times 10^5$; $10^{-3} \times 10^{-2}$; $10^8 \times 10^{-3}$; $\frac{10^{-5}}{10^{-9}}$

Notation ou écriture scientifique

Ecrire un nombre en notation scientifique c'est l'écrire sous la forme de deux facteurs : $a \times 10^n$

Avec $1 \leq a < 10$ ou $-10 \leq a < -1$ et n est un entier relatif .

Exemples :

Déterminer l'écriture scientifique de :

$60000 = 60000, = 6 \times 10^4$ (car la virgule ''dépasse'' 4 chiffres vers la gauche , l'exposant de 10 sera +4 ou 4).

$856{,}12 = 8{,}5612 \times 10^2$ (car la virgule ''dépasse'' 2 chiffres vers la gauche , l'exposant de 10 sera +2 ou 2) .

$0{,}0000123 = 1{,}23 \times 10^{-5}$ (car la virgule ''dépasse'' 5 chiffres vers la droite , l'exposant de 10 sera -5) .

0,0000008= 8×10^{-7} , (car la virgule ''dépasse'' 7 chiffres vers la droite , l'exposant de 10 sera -7) .

De la notation scientifique à l'écriture décimale :

$3 \times 10^4 = 30000$ (car l'exposant de 10 est 4, on a donc 3 suivi de 4 zéros)

$8{,}7 \times 10^{-2} = 0{,}087$ (car l'exposant de 10 est -2 un nombre négatif, on a donc 0,0 suivi de 8 et 7)

$7 \times 10^{-1} = 0{,}7$ (car l'exposant de 10 est -1 un nombre négatif, on a donc 0, suivi de 7)

Exercice 6.3 Déterminer l'écriture scientifique de :

1) 5200000 2) 0,0000015 3) 0,0081 4) 29856 5) 368,25

Exercice 6.4 Déterminer l'écriture décimale de :

2) $1{,}3 \times 10^4$ 2) $7{,}9 \times 10^{-5}$ 3) 4×10^4 4) 3×10^{-2}

Ecriture scientifique et opération :

$\mathrm{E} = 9{,}2 \times 10^{12} \times 1{,}8 \times 10^{-3}$

$\mathrm{E} = 9{,}2 \times 1{,}8 \times 10^{12} \times 10^{-3}$

$E = 16{,}56 \times 10^{12-3} = 16{,}56 \times 10^9$

Remarque en notation scientifique $16{,}56 = 1{,}656 \times 10^1$ on a :

$E = 16{,}56 \times 10^9 = 1{,}656 \times 10^1 \times 10^9$

$E = 1{,}656 \times 10^{1+9}$

$\mathbf{E = 1,656 \times 10^{10}}$

$A = \frac{7{,}8 \times 10^{-3}}{1{,}6 \times 10^{-8}}$

$A = \frac{7{,}8}{1{,}6} \times \frac{10^{-3}}{10^{-8}}$

$A = 4{,}875 \times 10^{-3+8}$

$\mathbf{A = 4,875 \times 10^{5}}$

$P = 5{,}6 \times 10^6 - 4{,}42 \times 10^6$

$P = (5{,}6 - 4{,}42) \times 10^6$ (en mettant 10^6 en facteur)

$\mathbf{P = 1,18 \times 10^{6}}$

$Q = 3{,}1 \times 10^{-4} + 7{,}2 \times 10^{-5}$

On fera ressortir un facteur commun à cette différence : $3{,}1 = 31 \times 10^{-1}$

$Q = 31 \times 10^{-1} \times 10^{-4} + 7{,}2 \times 10^{-5}$

$Q = 31 \times 10^{-1-4} + 7{,}2 \times 10^{-5}$

$Q = 31 \times 10^{-5} + 7{,}2 \times 10^{-5}$

On factorise avec 10^{-5}

$Q = (31 + 7{,}2) \times 10^{-5}$

$Q = 38,2 \times 10^{-5}$

On a $38,2 = 3,82 \times 10^{1}$ ainsi

$Q = 3,82 \times 10^{1-5}$

$\mathbf{Q = 3,82 \times 10^{-4}}$

Déterminer l'écriture décimale et scientifique de T

$T = \frac{-2,4\times10^{7}\times8\times10^{-9}}{3\times10^{-3}}$

$\mathrm{T} = \frac{-2,4\times8}{3} \times \frac{10^{7}\times10^{-9}}{10^{-3}}$

$\mathrm{T} = \frac{-19,2}{3} \times \frac{10^{7-9}}{10^{-3}}$

$\mathrm{T} = -6,4 \times \frac{10^{-2}}{10^{-3}}$

$T = -6,4 \times 10^{-2+3}$

$\mathbf{T = -6,4 \times 10^{1}}$ (écriture scientifique de T)

$\mathbf{T = -64}$ (écriture décimale de T)

<u>Exercice 6.5 Déterminer l'écriture scientifique de :</u>

$\mathrm{A} = 5 \times 10^{2} \times 0,3 \times 10^{-5}$

$B = \frac{7,5\times10^{-2}}{25\times10^{-4}}$

$Q = \frac{-3\times10^{3}\times1,2\times10^{-5}}{15\times10^{2}}$

$P = \frac{6\times10^{3}\times28\times10^{-2}}{14\times10^{-3}}$

$G = (4 \times 10^{-3})^{2}$

<u>Exercice 6.6 Déterminer l'écriture décimale et scientifique de :</u>

$S = 83 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-1}$

$A = 3 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-4}$

$T = \frac{8\times(10^{2})^{3}+15\times10^{5}}{10^{7}}$

<u>Thème 7 : Probabilités</u>

<u>I – Vocabulaire</u>

Une **expérience aléatoire** est un phénomène dont on ne peut prédire le résultat d'une manière certaine.

Une **issue** est le résultat possible d'une expérience aléatoire

Un regroupement d'une ou plusieurs issues est un **événement**.

Un **événement impossible** est un événement qui ne peut pas se réaliser.

Un événement qui se réalise toujours est un **événement certain**.

Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont dit incompatibles.

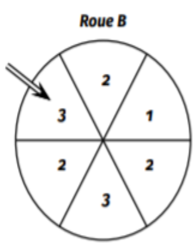
L'événement contraire d'un événement **A** est celui qui se réalise lorsque l'évènement **A** ne se réalise pas. L'événement contraire de **A** est noté $\bar{A}$.

<u>II – Probabilité</u>

Activité :

On réalise une expérience aléatoire en faisant tourner une roue avec une flèche ne pouvant indiquer qu'un seul chiffre du cadran.

La roue contient 6 cadrans avec les chiffres 1 , 2 et 3 .



En faisant tourner la roue on a **3 chances sur 6** que la flèche s'arrête sur le chiffre 2 , on dit que la probabilité que l'évènement ''2'' se réalise est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

En faisant tourner la roue on a **une chance sur 6** que la flèche s'arrête le chiffre 1 , on dit que la probabilité que l'évènement ''1'' se réalise est de $\frac{1}{6}$.

En faisant tourner la roue on a **2 chances sur 6** que la flèche s'arrête sur le chiffre 3 , on dit que la probabilité que l'évènement ''3'' se réalise est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

<u>Propriétés :</u>

En situation d'équiprobabilité, la probabilité $p(A)$ d'un évènement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables \text{ à } l'évenement\ A}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Une probabilité est comprise entre 0 et 1 ou $0 \leq p(A) \leq 1$.

La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire de la roue on a :

P(''2'')+ P(''1'')+ P(''3'') = $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Propriété :

L'événement contraire de **A** est $\bar{A}$ on a p(**A**) + p($\bar{A}$) =1 ou p($\bar{A}$) =1 − p(**A**) .

Exemples :

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré constitué de six faces numérotées de 1 à 6 . Si la face obtenue est un nombre premier , le joueur gagne . Sinon , le joueur perd.

1) Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier.
2) Soit A l'évènement : $\ll le\ joueur\ gagne \gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A , puis calculer la probabilité de l'évènement A .
3) Ecrire l'ensemble des résultats de l'évènement $\bar{A}$, évènement contraire de A , puis calculer $p(\bar{A})$ la probabilité que le joueur perde .

* * *

1) Un nombre premier est un nombre qui ne possède que deux diviseurs 1 et lui-même . Le nombre 1 ne possède qu'un seul diviseur lui-même , donc 1 n'est pas un nombre premier.

2)

Le joueur gagne si la face obtenue est un nombre premier, c'est-à-dire 2,3 et 5 on a $\mathbf{A} = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

probabilité de l'évènement A ; l'ensemble des cas favorables est $\mathrm{A} = \{2; 3; 5\}$ et l'ensemble des cas possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

d'où $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

3)

L'ensemble des résultats de l'évènement $\bar{A}$ est $\overline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}.$

Probabilité de $\bar{A}$, évènement contraire de A on a $P(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$

On a $P(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; $\boldsymbol{P}(\overline{\mathbf{A}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Exemple :

Un sac vert contient trois boules numérotées 1 ;2 et 3 . un sac gris contient 4 boules numérotées 0 ;1 ;2 et 3. On tire une boule dans chaque sac et on calcule la somme des deux numéros obtenus.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Sac vert			
Sac gris	Somme	1	2	3
	0			
	1			
	2			
	3			

2) Quelles sont les issues possibles ?
3) Soit A l'évènement : $\ll$ *obtenir une somme égale* à 4 $\gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A , puis calculer la probabilité de l'évènement A .
4) Soit B l'évènement : $\ll$ *obtenir une somme paire* $\gg$

Ecrire l’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement B , puis calculer la probabilité de l’évènement B .

5) Soit C l’évènement : $\ll obtenir\ une\ somme\ \acute{e}gale$ à 7 $\gg$

Ecrire l’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement C , puis calculer la probabilité de l’évènement C .

*   *   *

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Sac vert			
Sac gris	Somme	1	2	3
	0	(0+1) **1**	(0+2) **2**	(0+3) **3**
	1	(1+1) **2**	(1+2) **3**	(1+3) **4**
	2	(2+1) **3**	(2+2) **4**	(2+3) **5**
	3	(3+1) **4**	(3+2) **5**	(3+3) **6**

2) L’ensemble des issues possibles :

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (0+1); (0+2); (0+3);\ (1+1); (1+2); (1+3); (2+1); (2+2); \\ (2+3); (3+1); (3+2); (3+3) \end{matrix} \right\}$$

3) L’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement A

$$A = \left\{ (1+3); (2+2);\ (3+1) \right\}$$

Probabilité de A l’évènement : $\ll obtenir\ une\ somme\ \acute{e}gale$ à 4 $\gg$

On a 3 cas favorables avec l’ensemble A et 12 cas possibles avec l’ensemble Ω

d’où $\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$

4) L’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement

5) B : $\ll obtenir\ une\ somme\ paire \gg$

$$B = \left\{ (0+2);\ (1+1); (1+3); (2+2);\ \ (3+1); (3+3) \right\}$$

Probabilité de l’évènement B : $\ll obtenir\ une\ somme\ paire \gg$

L’ensemble B donne 6 cas favorables et l’ensemble Ω donne 12 cas possibles , d’ où

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

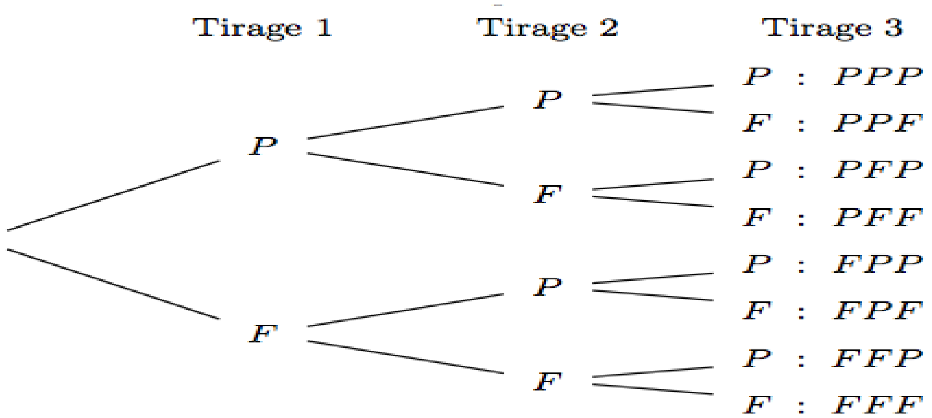
6) L’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement C : ≪ $obtenir\ une\ somme\ égale$ à 7 ≫ c’est un évènement impossible car le tableau ne contient aucune somme égale à 7 donc l’ ensemble C ne contient aucun élément.
   La probabilité de l’évènement impossible est nulle on écrit :
   $\boldsymbol{P(C) = 0}$

Exemple :

1) Dans un sac on tire trois pièces de monnaies non truquées avec un côté pile ʻʻ P ʼʼ et un côté face ʻʻ F ʼʼ à l’aide d’un arbre de probabilité déterminer les différentes issues possibles.
2) Soit A l’évènement : ≪ $obtenir\ trois\ tirages\ identiques$ ≫
   Ecrire l’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement A , puis calculer la probabilité de l’évènement A .
3) Soit B l’évènement : ≪ $obtenir\ pile\ au\ deuxième\ lancé$ ≫
   Ecrire l’ensemble des résultats qui permettent de réaliser l’évènement B , puis calculer la probabilité de l’évènement B .

* * *

1) Arbre de probabilité



L'ensemble des issues possibles :

$$\Omega = \left\{ (\mathbf{PPP});\ (\mathbf{PPF}); (\mathbf{PFP});\ (\mathbf{PFF}); (\mathbf{FPP}); (\mathbf{FPF}); (\mathbf{FFP}); (\mathbf{FFF}) \right\}$$

2) L'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement

A $\ll$ *obtenir trois tirages identiques* $\gg$ est :

$$\mathbf{A} = \left\{ (\mathbf{PPP}); (\mathbf{FFF}) \right\}$$

Probabilité de l'évènement A : $\ll$ *obtenir trois tirages identiques* $\gg$

On a 2 cas favorables avec l'ensemble A et 8 cas possibles avec l'ensemble Ω

d'où $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

4) L'ensemble B des résultats $\ll$ *obtenir pile au deuxième tirage* $\gg$

$$\mathbf{B} = \left\{ (\mathbf{PPP});\ (\mathbf{PPF});\ (\mathbf{FPP}); (\mathbf{FPF}) \right\}$$

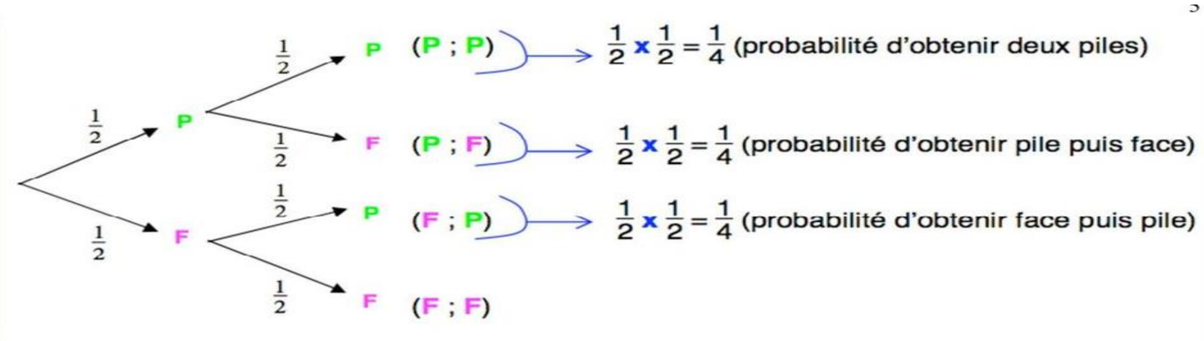
Probabilité de l'évènement B $\ll$ *obtenir pile au deuxième tirage* $\gg$

On a 4 cas favorables avec l'ensemble B et 8 cas possibles avec l'ensemble Ω

d'où $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truqué, la probabilité d'avoir le côté pile à chaque lancé est de ½ et la probabilité d'avoir le côté face à chaque lancé est aussi ½ .

Cette situation est traduite par l'arbre de probabilité suivant qui permet aussi de déterminer les probabilités que les évènements suivants se réalisent : (P,P) (P,F) (F,P)



Sur un même chemin, on multiplie les probabilités.

Exercice 7.1

On lance une pièce de monnaie non truqué trois fois de suite. Par analogie à l'arbre de probabilité ci-dessus, déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois face.

Exercice 7.2

Dans un sac on mélange 6 jetons indiscernables au touché : 3 jaunes , 2 bleus et un jeton rouge .

On tire un jeton au hasard, on note sa couleur et on le remet dans le sac. On re-mélange puis on tire une seconde fois et on note sa couleur.

1) Construire un arbre de probabilité et indiquer les probabilités de chaque issue sur cet arbre.
2) Calculer la probabilité de tirer uniquement un jeton bleu.

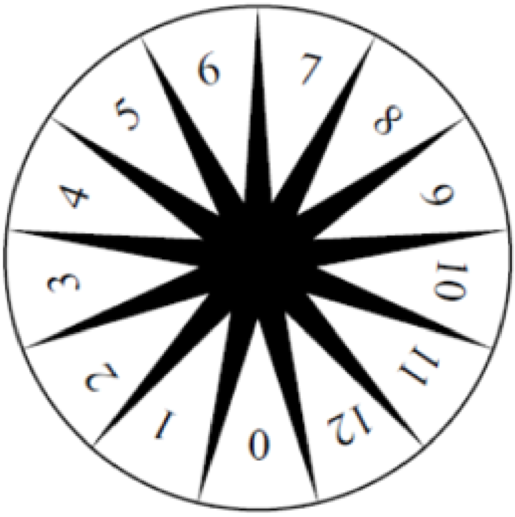
Exercice 7.3

Un sac contient 10 boules rouges, 6 boules noires et 4 boules jaunes. Chacune de ces boules a la même probabilité d'être tirée. On tire une boule au hasard.

1. Calculer la probabilité pour que cette boule soit rouge.
2. Calculer la probabilité pour que cette boule soit noire ou jaune.
3. Calculer la somme des deux probabilités trouvées aux deux questions précédentes.
   Le résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?
4. On ajoute dans ce sac des boules bleues. Le sac contient alors 10 boules rouges, 6 boules noires, 4 boules jaunes et les boules bleues.
   On tire une boule au hasard. Sachant que la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{1}{5}$, calculer le nombre de boules bleues.

Exercice 7.4

On considère un jeu composé d'un plateau tournant et d'une boule. Représenté ci-contre, ce plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12.



On lance la boule sur le plateau. La boule finit par s'arrêter au hasard sur une case numérotée.

La boule a la même probabilité de s'arrêter sur chaque case.

1. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8 ?
2. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre impair ?
3. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre premier ?

Exercice 7.5

Dans une classe de collège , après la visite médicale , on dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes
Fille	3	15
Garçon	7	5

Combien cette classe compte –elle d'élèves ?

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

1. Si l'infirmière en ramasse une au hasard, quelle est la probabilité que cette fiche soit :
   a. celle d'une fille qui porte des lunettes ?
   b. celle d'un garçon ?

2. Les élèves qui portent des lunettes dans cette classe représentent 12,5% de ceux qui en portent dans tout le collège.
   Combien y a-t-il d'élèves qui portent des lunettes **dans le collège** ?

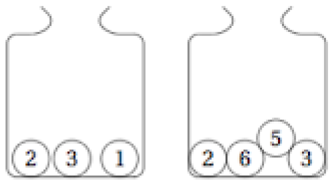
Exercice 7.6

Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.

On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :

— le chiffre des dizaines est le numéro de la boule issue de l'urne D;

— le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.



Urne D   Urne U

Exemple : en tirant la boule 1 de l'urne D et ensuite la boule 5 de l'urne U, on forme le nombre 15.

1. A-t-on plus de chance de former un nombre pair que de former un nombre impair?
2. a. Sans justifier, indiquer les nombres premiers qu'on peut former lors de cette expérience.

   b. Montrer que la probabilité de former un nombre premier est égale à $\frac{1}{6}$.
3. Définir un évènement dont la probabilité de réalisation est égale à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7.7

Un sac contient 10 boules rouges, 6 boules noires et 4 boules jaunes. Chacune de ces boules a la même probabilité d'être tirée. On tire une boule au hasard.

1. Calculer la probabilité pour que cette boule soit rouge.
2. Calculer la probabilité pour que cette boule soit noire ou jaune.
3. Calculer la somme des deux probabilités trouvées aux deux questions précédentes.

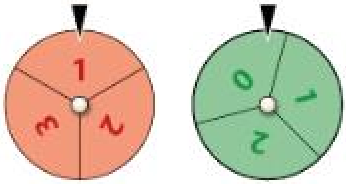
   Le résultat était-il prévisible? Pourquoi?
4. On ajoute dans ce sac des boules bleues. Le sac contient alors 10 boules rouges, 6 boules noires, 4 boules jaunes et les boules bleues.

   On tire une boule au hasard. Sachant que la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{1}{5}$, calculer le nombre de boules bleues.

Exercice 7.8

a)

On fait tourner chacune des roues ci-dessous découpées en trois secteurs identiques et on note la somme des résultats obtenus.



c) complète le tableau ci-dessous

Somme	1	2	3
0			
1			
2			

c) complète le tableau ci-dessous

Issue(somme)	1	2	3	4	5
probabilité					

<u>Thème 8 : Racines carrées(1)</u>

<u>I. Racines carrées</u>

Soit a un nombre positif on écrit racine carrée de a le nombre noté : $\sqrt{a}$

$\sqrt{a}$ désigne le nombre positif qui élevé au carré donne a .

$(\sqrt{a})^2 = a$ ou $\sqrt{a^2} = a$

Propriétés :

$\sqrt{a} = b \;\; avec \; b \geq 0$ et $b^2 = a$

$(\sqrt{a})^2 = a \quad avec \; a \geq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b > 0$

Exemples

$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$; $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{4^2} = 5 \times 4 = 20$

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{\frac{100}{225}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{10^2}}{\sqrt{15^2}} = \frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$

$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

Calculer :

$\sqrt{81} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{9^2} + \sqrt{(\frac{2}{3})^2} = 9 + \frac{2}{3} = \frac{9 \times 3 + 2}{3} = \frac{29}{3}$

$2\sqrt{36} - \frac{\sqrt{64}}{4} = 2\sqrt{6^2} - \frac{\sqrt{8^2}}{4} = 2 \times 6 - \frac{8}{4} = 12 - 2 = 10$

$\frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{450}{2}} = \sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

Exercice 8.1

1) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

$\sqrt{72}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{27}$

2) Calculer

$\sqrt{\frac{9}{16}} - \sqrt{36}$; $(\sqrt{3})^2 + \sqrt{169}$; $\sqrt{49 \times 64}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Quelques carrés parfaits

$0^2 = 0$
$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$
$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$

Les nombres 0 ; 1 ; 4 , 9 ; 16 ;25…. sont appelés des carrés par parfaits.
Soient a et b deux nombres positifs si $a^2 = b$ on dit que b est un carré parfait.

Réduction des sommes

Activité

$3a + 4a = 7a$, remplaçons a par $\sqrt{3}$ on a
$3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$9a - 6a = 3a$, remplaçons a par $\sqrt{7}$ on a
$9\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

$A = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
$A = (5-2)\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
$A = 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
$A = (3-8)\sqrt{3}$
$\mathbf{A = -5\sqrt{3}}$
$B = \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = 1\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = (1+5)\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = 6\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = (6-8)\sqrt{7}$
$\mathbf{B = -2\sqrt{7}}$

$T = 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
$\mathrm{T} = 2\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}$
$T = 2\sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3}$
$T = 2 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
$T = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
$T = (4-5)\sqrt{3}$
$\mathbf{T = -\sqrt{3}}$

$S = (\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})$ (on a la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)
$S = (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{7})^2$
$S = 8 - 7$
$\mathbf{S = 1}$

$Q = (\sqrt{12} + \sqrt{3})^2$ (on a la forme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)
$Q = (\sqrt{12})^2 + 2(\sqrt{12})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$
$Q = 12 + 2(\sqrt{12 \times 3}) + 3$
$Q = 12 + 3 + 2(\sqrt{36})$
$Q = 15 + 2(\sqrt{6^2})$
$Q = 15 + 2 \times 6$
$Q = 15 + 12$
$\mathbf{Q = 27}$

$\mathrm{G} = (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2$ (On a la forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)

$G = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(\sqrt{8}) + (\sqrt{8})^2$
$G = 2 - 2\left(\sqrt{2 \times 8}\right) + 8$
$G = 2 + 8 - 2\left(\sqrt{16}\right)$
$G = 10 - 2\left(\sqrt{4^2}\right)$
$G = 10 - 2(4)$
$G = 10 - 8$
$\boldsymbol{G = 2}$

<u>Exercice 8.2 :</u> Ecrire sous la forme $a\sqrt{\mathrm{b}}$;

$A = \sqrt{121} - 2\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{81}$

$D = -4\sqrt{18} + 2\sqrt{128} - 3\sqrt{32}$

$E = \sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 64\sqrt{48}$

$G = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$

$T = 7\sqrt{15} \times 2\sqrt{35} \times \sqrt{3}$

<u>Exercice 8.3 :</u> A l'aide des identités remarquables déterminer la valeur exacte.

$P = (2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$

$Q = (5 - 3\sqrt{2})^2$

$B = (4 + 5\sqrt{2})^2$

$I = (\sqrt{3} + 3)^2 - 3$

$H = (7 - 4\sqrt{3})^2 - (4 + 3\sqrt{3})^2$

<u>II.Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient</u>

Soit a un nombre positif non nul , pour rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$.

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Exemples : rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{3}\times\sqrt{3} = 1\times\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5\times3} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

En rendant rationnel un dénominateur on le transforme en nombre entier non nul .

Exercice 8.4 :

Rendre rationnel le dénominateur de :

$\frac{-2}{\sqrt{5}}$; $\frac{7}{2\sqrt{7}}$; $\frac{4}{\sqrt{8}}$;

Produit des facteurs

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

Exemples :

$A = (12-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$

$A = 12\times3 + 12(2\sqrt{7}) - 3(\sqrt{7}) - (2\sqrt{7})(\sqrt{7})$

$A = 36 + 24\sqrt{7} - 3(\sqrt{7}) - 2(\sqrt{7})^2$

$A = 36 + (24-3)\sqrt{7} - 2\times7$

$A = 36 + 21\sqrt{7} - 14$

$A = 36 - 14 + 21\sqrt{7}$

$\boldsymbol{A = 22 + 21\sqrt{7}}$

$T = \left(\sqrt{99} - \sqrt{44}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(\sqrt{9 \times 11} - \sqrt{4 \times 11}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(3\sqrt{11} - 2\sqrt{11}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(3\sqrt{11}\right)(\sqrt{11}) \ - 2(\sqrt{11})(\sqrt{11})$

$T = 3(\sqrt{11})^2 - 2(\sqrt{11})^2$

$T = 3 \times 11 - 2 \times 11$

$T = 33 - 22$

$\mathbf{T = 11}$

<u>Exercice 8.5 :</u> Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$ les expressions suivantes :

$E = \sqrt{3}\left(5 + \sqrt{3}\right) - (\sqrt{3} - 3)$

$G = (4\sqrt{6} - \sqrt{54} + \sqrt{18})\sqrt{6}$

$S = \left(9\sqrt{5} + 7\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2} - 9\sqrt{5}\right) - (6\sqrt{10} - 2\sqrt{5})^2$

<u>Exercice 8.6 :</u> A l'aide des identités remarquables simplifier les expressions suivantes :

1) $\sqrt{104^2 - 40^2}$
2) 2) $\sqrt{61^2 - 60^2}$
3) 3) $\sqrt{23^2 + 2 \times 23 \times 67 + 67^2}$
4) $\sqrt{226^2 - 226 \times 202 + 101^2}$
5) $\sqrt{(\frac{25}{49})^2 - (\frac{24}{49})^2}$

Thème 9 : Calcul littéral

Développer

Développer une expression c'est l'écrire comme une somme.

Produit des facteurs

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ et $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

Méthode pour développer

$A = -2(x+3)$

$A = -2 \times x - 2(+3)$

$\mathbf{A = -2x - 6}$

$\mathrm{B} = (3+\mathrm{x})(2-\mathrm{x})$

$\mathrm{B} = (+3+\mathrm{x})(2-\mathrm{x})$

$B = +3 \times 2 + 3(-x) + (x)(2) + x(-x)$

$B = 3 \times 2 + 3(-1)(x) + 2(x) + (-x)x$

$B = 6 - \boldsymbol{3x} + \boldsymbol{2x} - x^2$

$\mathbf{B = 6 - x - x^2}$ (Ecriture de B suivant les puissances croissantes de x)

$\mathbf{B = -x^2 - x + 6}$ (Ecriture de B suivant les puissances décroissantes de x)

$E = (2x+3)(x-5)$

$E = (+2x+3)(x-5)$

$E = +2x(x) + 2x(-5) + 3(x) + 3(-5)$

$E = +2x^2 + 2(-5)x + 3x - 15$

$E = 2x^2 - \mathbf{10x} + \mathbf{3x} - 15$

$\boldsymbol{E = 2x^2 - 7x - 15}$

Développer avec des identités remarquables

$F = (3x-2)(3x+2)$ (on a la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$F = (3x)^2 - (2)^2$

$\mathbf{F = 9x^2 - 4}$

$\mathrm{P} = (4\mathrm{x}-5)^2$ (on a la forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)

$P = (4x)^2 - 2(4x)(5) + (5)^2$

$P = 4 \times 4 \times (x)^2 - 2(4)(5)(x) + (5)^2$

$\boldsymbol{P = 16x^2 - 40x + 25}$

$\mathrm{T} = (3 + \frac{\mathrm{x}}{4})^2$ (on a la forme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

$T = 3^2 + 2(3)\left(\frac{x}{4}\right) + (\frac{x}{4})^2$

$T = 9 + 6 \times \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2}$

$T = 9 + \frac{6}{4} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{6 \div 2}{4 \div 2} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{3}{2} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{16}$

Ordonnons T suivant les puissances décroissantes de x

$\mathbf{T = \frac{x^2}{16} + \frac{3}{2}x + 9}$

Somme ou différence d'un produit de facteurs

$P = (5x-3)(2x-3) - (x+6)(2x-5)$

Développer, réduire et ordonner P suivant les puissances, décroissantes de x

$P = (+5x-3)(2x-3) - (+x+6)(2x-5)$

$P = (+5x)(2x) + 5x(-3) - 3(2x) - 3(-3) - (+x(2x) + x(-5) + 6(2x) + 6(-5))$

$P = 10x^2 \boldsymbol{- 15x - 6x} + 9 - (2x^2 \boldsymbol{- 5x + 12x} - 30)$

$P = 10x^2 \boldsymbol{- 21x} + 9 - (2x^2 + \boldsymbol{7x} - 30)$

$P = 10x^2 - \mathbf{21x} + 9 - 2x^2 - \mathbf{7x} + 30$

$P = 10x^2 - 2x^2 - \mathbf{21x} - \mathbf{7x} + 9 + 30$

$\boldsymbol{P = 8x^2 - 28x + 39}$

Développer, réduire et ordonner J suivant les puissances, décroissantes de x .

$J = (x+5)^2 - (2x-1)^2$

$J = (x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2) - ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2)$

$J = (x^2 + 10x + 25) - (4x^2 - 4x + 1)$

$J = x^2 + 10x + 25 - 4x^2 + 4x - 1$

$J = x^2 - 4x^2 + 10x + 4x + 25 - 1$

$\mathbf{J = -3x^2 + 14x + 24}$

<u>Exercice 9.1</u>

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances, décroissantes de x .

$G = (3x+4)(1-2x) + (2x-3)(3x-1)$

$H = 2x^2(2-3x^2) - 3x^2(4+2x^2)$

$S = (3x-4)(2x+1) - (x-2)(6x+3)$

$Q = (3x^2 - 3x + 1)(5x+4) + 9(x-1)^2$

$A = \frac{-1}{3}(9x^2 - 1) + (3x+6)(x-1)$

Calcul d'une valeur numérique

Exemple :

Calcul d'une valeur numérique de A pour $x = -2$, $A = 2x^2 - 3x + 1$

Méthode : On remplace x par -2 dans A

On a $A = 2(\ )^2 - 3(\ ) + 1$, puis on placera -2 dans les parenthèses vides.

$A = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1$

$A = 2(4) - 3(-2) + 1$

$A = 8 + 6 + 1$

$\mathbf{A = 15}$

Exercice 9.2

1) Calculer la valeur numérique de P pour $x = -1$, $P = 2x^2 - 7x + 5$
2) Calculer la valeur numérique de T pour $x = -\frac{1}{2}$, $T = 4x^2 - 12x + 9$
3) Calculer la valeur numérique de S pour $x = \frac{1}{4}$,
   $S = -14x + (4x - 1)(3 - 2x)$

(ici , il faudra d'abord développer et réduire S avant de calculer la valeur numérique)

Equations :

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité du type :

$ax + b = cx + d$, x est l'inconnue à déterminer.

Méthode :

Si a et b sont deux nombres , alors : $x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

Si a et b sont deux nombres avec $\neq 0$, alors $ax = b$ équivaut à $x = \frac{b}{a}$.

Exemples :

Résoudre l'équation suivante : $x + 5 = 8$

$$x + 5 = 8$$

équivaut à $x = 8 - 5$

d'où $x = 3$

L'ensemble solution S de l'équation est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{3}\}$

Vérification au brouillon

Dans l'égalité $x + 5 = 8$ *on remplace* x *par* 3 *dans le membre de gauche de notre égalité on a* $3 + 5 = 8$ *, notre égalité est vérifié donc* 3 *est bien la solution de notre équation .*

Exemple : Résoudre l'équation $3x = -12$

$$3x = -12$$

Équivaut à $\quad x = \frac{-12}{3}$

D'où $\quad \boldsymbol{x = -4}$

<u>Vérification au brouillon</u>

$Dans\ l'égalité\quad 3x = -12\quad on\ remplace\ x\ par\ -4\ \ dans\ le\ membre$

$de\ gauche\ \ de\ notre\ égalité\ \ on\ a\ \ 3(-4) = -12\ \ notre\ égalité\ est\ vérifié$

$donc\ -4\ \ est\ bien\ la\ solution\ de\ notre\ équation\ .$

<u>Remarques :</u>

Une équation du type $0x = 2$ n'admet pas de solution on écrit S est égal l'ensemble vide : $S = \emptyset$.

Une équation du type $0x = 0$ est une équation qui admet une infinité de solution .

<u>Méthodes</u>

$$ax + b = cx + d$$
$$ax - cx = d - b$$
$$x\,(a - c) = d - b$$
$$\frac{(a - c)\,x}{a - c} = \frac{d - b}{a - c}$$
$$\boxed{x = \frac{d - b}{a - c}}$$

$$ax + b = c$$
$$ax = c - b$$
$$\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$$
$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}}$$

$$\mathbf{15x + 1 = -\,7x - 6;}$$
$$\mathbf{15x + 7x = -\,6 - 1;}$$

$$22x = -7$$

$$\frac{22x}{22} = \frac{-7}{22}$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{22}}$$

Résoudre l'équation :

$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$

$\frac{5x-4x}{4\times5} = 1$

$\frac{x}{20} = 1$

$\frac{x}{20} \times 20 = 1 \times 20$

$\mathbf{x = 20}$

On écrit l'ensemble solution $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{20}\}$

Résoudre l'équation : $5x - 1 = 2a - 2$

$5x - 1 = 2a - 2$

$5x = 2a - 2 + 1$

$5x = 2a - 1$

$x = \frac{2a-1}{5}$

L'ensemble solution : $\mathbf{S} = \left\{ \frac{2a-1}{5} \right\}$

Attention, on écrit pas $\boldsymbol{S} = \{\emptyset\}$ lorsqu'une équation n'admet pas de solution.

<u>Exercice 9.3 :</u> Résolution des équations du premier degré à une inconnue :

1) $5x = -35$
2) $\frac{1}{6}x = 7$
3) $4x - 6 = -x - 2$
4) $7(x + 2) - 3(5x + 4) = 0$
5) $-4(x - 3) + 2x = 1 - 2(x + 1)$
6) $-(2x - 3) - (10x + 12) = -2(6x + 4) - 1$
7) $8(3x - 4) = 4 - (x + 6)$
8) $\frac{5x-1}{3} - \frac{4x+3}{6} = 2x$
9) $3\left(2x - \frac{1}{3}\right) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x$

Mise en équation :

Il est souvent utile d'employer le calcul littéral pour déterminer la solution d'un problème : On appelle cela une mise en équation.

Exemple :

Problème 1 :

pierre et paul ont ensemble 50 billes. pierre en a 8 de plus que paul.

Combien en ont-ils de billes chacun?

Choix des inconnues :

Appelons x le nombre de billes que possède paul.

Nombre de billes de pierre ''='' au nombre de billes de paul ''+'' 8.

Pierre possède alors $(x+8)$ billes.

Ensemble ils ont 50 billes c'est-à-dire :

(nombre de billes de pierre)+(nombre de billes de paul) ''='' 50

$$(x+8) \quad + \quad x \quad = \quad 50$$

Résolution de l'équation : $(x+8) + x = 50$

$$(x+8) + x = 50$$

$$x+8 + x = 50$$

$$2x+8 = 50$$

$$2x = 50-8$$

$$2x = 42$$

$$2 \times x = 42$$

$$x = \frac{42}{2}$$

$$\mathbf{x = 21}$$

la solution du problème: **Paul a 21 billes et pierre en a (21+8) soit 29 billes .**

Vérification au brouillon

Paul a 21 billes et pierre a 29 billes ensembles ils ont 21+29 = 50

Problème 2 : Trouver un nombre dont le quadruple diminué de 9 est 11.

Choix des inconnues :

Appelons x le nombre cherché.

Mise en équation :

Un doublé : fois 2

Un triplé : fois 3

Un quadruplé : fois 4

Un quintuplé : fois 5

Le quadruple d'un nombre c'est le nombre fois 4 : $x \times 4$

le quadruple du nombre diminué de 9 est : $4x - 9$

le quadruple du nombre diminué de 9 donne 11

$$(4x) \qquad - \qquad 9 \quad = \quad 11$$

Résolution d l'équation : $4x - 9 = 11$

$4x - 9 = 11$

$4x = 11 + 9$

$4x = 20$

$4 \times x = 20$

$x = \frac{20}{4}$

$\mathbf{x = 5}$

Solution du problème **: le nombre cherché est 5 .**

Problème 3 : Le double d'un nombre est 34. Quel est ce nombre ?

Problème 4 : Quel est le nombre dont les deux tiers sont égaux à 16 ?

Problème 5 : On augmente un nombre de 25 et on trouve 49. Quel est ce

Ce nombre ?

Problème 6 : Partager 4800 F entre deux personnes de telle sorte que la part de la seconde soit égale au triple de la part de la première.

Problème 7 : En multipliant un nombre par 5 puis en enlevant 15, on obtient le même résultat que si on lui avait ajouté 13.

Problème 8 : Un enfant a 12 ans, alors que son père est trois fois plus âgé.

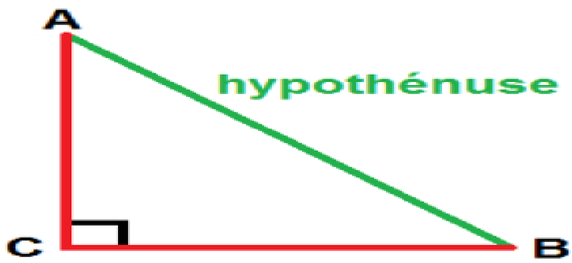
Décider s'il est possible qu'un jour ce père soit seulement deux fois plus âgé que son enfant.

Si c'est possible, trouver dans combien d'années ce sera le cas.

Thème 10 : Pythagore et racines carrées

I.Le triangle rectangle

Rappel : Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse, c'est aussi le côté le plus long du triangle rectangle.



ACB est un triangle rectangle en C . [AC] et [CB] sont les côtés de l'angle droit.

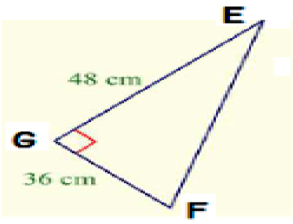
II. Propriété (théorème) de Pythagore

La propriété (théorème) de Pythagore permet de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si on connaît les longueurs des deux autres côtés.

Propriété : Dans un triangle rectangle , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés de l'angle droit .

Exemple 2

EFG est triangle rectangle en G .Calculer la longueur EF



EGF est rectangle en G d'après la propriété de Pythagore .

$EF^2 = EG^2 + GF^2$

On a EG=48 cm et GF=36 cm

D'où $EF^2 = 48^2 + 36^2$

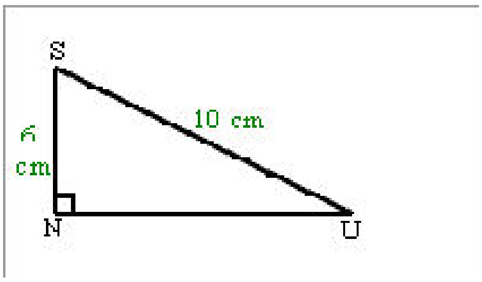
$EF^2 = 2304 + 1296$

$EF^2 = 3600$

Ainsi $EF = \sqrt{3600}$ avec la calculatrice on obtient $\boldsymbol{EF} = \mathbf{60}$ **cm**

Exemple 3

SNU est triangle rectangle en N .Calculer la longueur NU



SNU est rectangle en N d'après la propriété de Pythagore .

$NU^2 + NS^2 = SU^2$

On a NS=6 cm et SU=10 cm

Ainsi $NU^2 + NS^2 = SU^2$

$NU^2 + 6^2 = 10^2$

$NU^2 + 36 = 100$

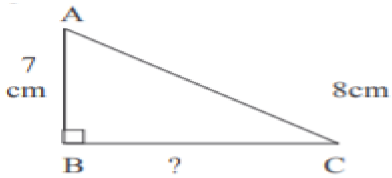
$NU^2 = 100 - 36$

$NU^2 = 64$

$NU = \sqrt{64}$; $NU = \sqrt{8^2}$; **NU=8**

Exemple 4

ABC est triangle rectangle en B .Calculer la longueur BC



ABC est triangle rectangle en B d'après la propriété de Pythagore .

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

On a AB=7 cm et AC=8 cm

Ainsi $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$7^2 + BC^2 = 8^2$

$49 + BC^2 = 64$

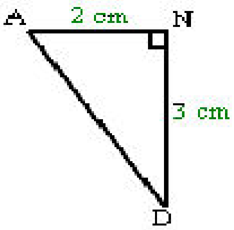
$BC^2 = 64 - 49$

$BC^2 = 15$

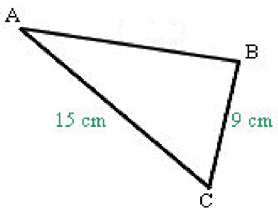
$\boldsymbol{BC = \sqrt{15}}$ (valeur exacte) ; $\boldsymbol{BC = 3,87}$**cm** (valeur approchée)

Exercice 10.1

1) Calculer AD

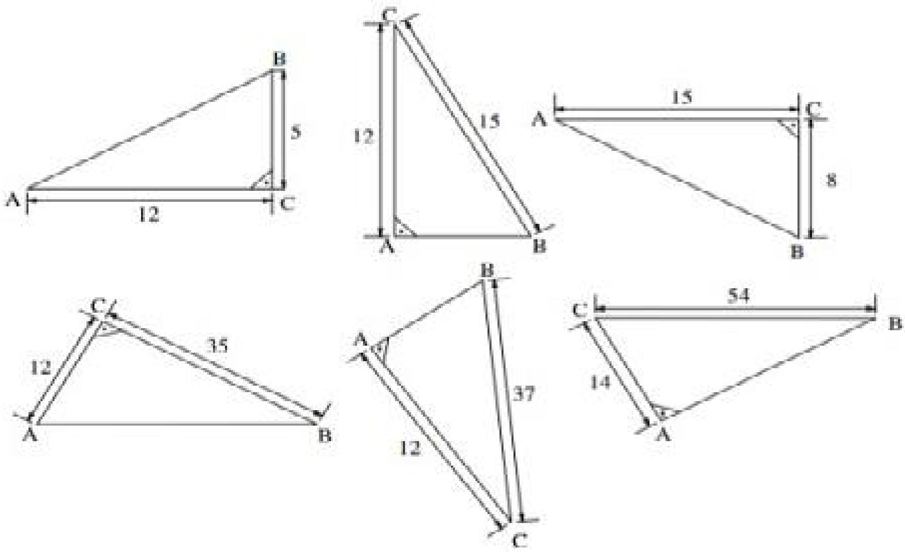


2) ABC rectangle en B , Calculer AB



Exercice 10.2

Calculer la longueur du côté [AB] de chacun des triangles rectangles suivants:



Réciproque de la propriété (théorème) de Pythagore

Activité : Voici les mesures des côtés d’un triangle : 20 cm, 25 cm et 15 cm. S’agit-il d’un triangle rectangle?

Voyons si le triangle vérifie la relation de Pythagore: a-t-on ?

$20^2 + 15^2 = 25^2$

En calculant séparément on a $20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$ et $25^2 = 625$

Puisque $20^2 + 15^2 = 25^2$

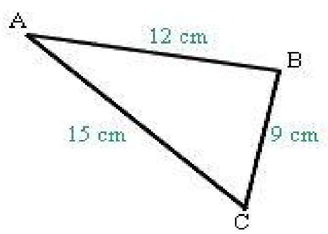
Ce triangle vérifie la relation de Pythagore. Donc, il s’agit d’un triangle rectangle.

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si dans un triangle le carré du plus grand coté est égal à la somme des carrés des deux petits cotés alors le triangle est rectangle.

Remarque : si la réciproque de la propriété de Pythagore n’est pas vérifiée alors le triangle n’est pas rectangle (c’est la contraposée de la propriété de Pythagore) .

Exemple réciproque de la propriété (théorème) de Pythagore



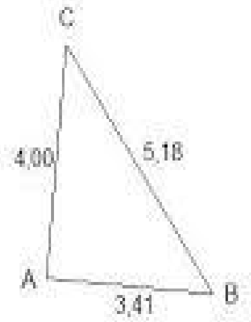
Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle, on calcule séparément AC^2 et $AB^2 + BC^2$.

$AC^2 = 15^2 = 225$

$AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, donc

$AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Phytagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exemple la contraposée de la propriété (théorème) de Pythagore



$BC^2 = 5,18^2 = 26,8324$

$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3,41^2 = 16 + 11,6281 = 27,6281$

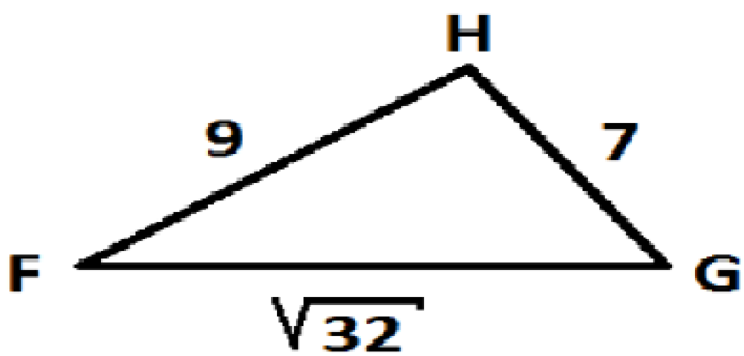
Comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Attention : il n y a pas d'arrondie possible !

Exercice 10.2

1)

Le triangle FGH est-il un triangle rectangle ?



3) Un triangle ABC est tel que : AB=6cm , BC=4,5 cm et AC=7,5cm . Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
4) Un triangle MNP est tel que : MN= 3cm , MP= 5 cm et NP= 5,8cm . MNP est –il un triangle rectangle ?
5) Un triangle IJK est tel que : IJ=21cm , JK=34 cm et KI=28cm . IJK est –il un triangle rectangle ?

III. Les racines carrées

Rappels

A l'aide des identités remarquables développer :

$(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2(1)\left(\sqrt{2}\right) + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \ 5 - 2\sqrt{5\times 3} + 3$

$= 8 - 2\sqrt{15}$

$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$

L'expression conjuguée

Règle : Le conjugué de l'expression a + b est a- b et le conjugué de l'expression a-b est a+b.

Exemple

Le conjugué de $1+\sqrt{2}$ est $1-\sqrt{2}$.

Le conjugué de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ est $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Le conjugué de $2+3\sqrt{2}$ est $2-3\sqrt{2}$.

L'expression conjuguée permet de rendre rationnel le dénominateur d'une fraction contenant des radicaux.

En règle générale on n'écrit pas les racines carrées au dénominateur des fractions.

Lorsqu'il y a une racine carrée au dénominateur d'une fraction, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

Le conjugué de $\sqrt{2}+1$ est $\sqrt{2}-1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \frac{10}{2}\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 5\times(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 5\sqrt{5}+5\sqrt{3}$$

Exercice 10.3 Rendre rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes

$A = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$; $B = \frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$; $C = \frac{6}{2-\sqrt{3}}$; $E = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; $G = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Thème 11 : Equations dans IR et IR x IR

I. Equations de type Produit nul

Un produit des facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0 \quad ou \;\; B = 0$

$A \times B \times C = 0$ si et seulement si $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$

Exemple :

Résoudre l'équation : $(x + 5)(8x + 2) = 0$

Ce produit de facteur est nul si et seulement si :

$$x + 5 = 0 \;\; ou \;\; 8x + 2 = 0$$

La résolution de cette équation se fait en ligne

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8x = 0 - 2$$

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8x = -2$$

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8 \times x = -2$$

$$x = 0 - 5 \quad ou \quad x = \frac{-2}{8}$$

$$x = 0 - 5 \quad ou \quad x = \frac{-2 \div 2}{8 \div 2}$$

$$x = -5 \quad ou \quad x = \frac{-1}{4}$$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{-5}\, ; \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}\right\}$

Exemple : Résoudre l'équation $(x^2 - 4x) + x - 4 = 0$

Factorisons d'abord l'équation :

$(x^2 - 4x) + (x - 4) \times 1 = 0$

$x(x - 4) + (x - 4) \times 1 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

Nous obtenons une équation de type produit nul , $(x - 4)(x + 1) = 0$

Ainsi $x - 4 = 0 \;\; ou \;\; x + 1 = 0$

$x = 0 + 4 \quad ou \;\; x = 0 - 1$

$x = 4 \qquad\quad ou \;\; x = -1$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{4\ ;\ -1\}}$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2(x-3) - 2x(x-3) = 0$

On a $(x-3)(x^2-2x) = 0$

en factorisant $x^2 - 2x = x(x-2)$ l'équation devient :

$x(x-2)(x-3) = 0$

On a $x = 0\ ;\ x - 2 = 0\ ;\ x - 3 = 0$

$x = 0\ ; \qquad x = 0 + 2\ ; \quad x = 0 + 3$

$x = 0\ ; \qquad x = 2\ ; \qquad x = 3$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{0\ ; 2;\ 3\}}$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$

On a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ équivaut à $(x-1)^2 \quad = 0$

Soit $(x-1)(x-1) = 0$

On a $x - 1 = 0\ ;\ x = 1$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{1\}}$

Exercice 11.1 Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x-1)(x-5) = 0$

2) $(4x-5)(6x+5) = 0$

3) $(x+5)(x^2-4) = 0$

4) $x(x+1) + 2(x+1) = 0$

5) $8x(x-3) + 2(3-x) = 0$

II. Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Une équation du premier degré à deux inconnues x et y est une équation de la forme $ax + by = c$.

En général cette équation possède plusieurs solutions.

Résolution d'un système d'équation à deux inconnues.

Méthode d'addition : $\begin{cases} x+y=7 \\ -2x+3y=11 \end{cases}$

On a $\begin{cases} x+y=7 & (L1) \\ -2x+3y=11 & (L2) \end{cases}$

Eliminons x , pour cela on s'arrange à ce que les valeurs (ou coefficients) devant x des deux lignes soient opposés.

$$2 \times L1 \ \ donne\ 2 \times x + 2 \times y = 2 \times 7$$

$$\underline{1 \times \mathrm{L2}\ \ \mathrm{donne}\ \ -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$2L1 \quad donne \quad 2x + 2y = 14$$

$$\underline{1\mathrm{L2} \quad \mathrm{donne} \quad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$2L1 + L2 \quad donne \quad 0 + 5y = 14 + 11$$

Soit $5y = 25$

$$y = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{5}}$$

$$y = 5$$

Eliminons y , pour cela on s'arrange à ce que les valeurs (ou coefficients) devant y des deux lignes soient opposés.

$$-3 \times L1\ donne \quad -3 \times x + (-3) \times y = -3 \times 7$$

$$\underline{1 \times \mathrm{L2}\ \ \mathrm{donne} \quad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

On a $-3L1 \quad donne \quad -3x - 3y = -21$

$$\underline{1\mathrm{L2} \quad \mathrm{donne} \quad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$-3L1 + 1L2\ \ donne \quad -5x + 0 = -21 + 11$$

Soit $-5x = -10$

$$x = \frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{-5}}$$

$$x = 2$$

Vérifions que le couple $(x = 2\ ;\ y = 5)$ est solution de chaque équation du

Système :

Première ligne : $x + y = 7$ on remplace x par 2 et y par 5 on a

2+5 =7

Deuxième ligne : $-2x + 3y = 11$ on remplace x par 2 et y par 5 on a

-2(2)+3(5) = -4+15 = 11

Le couple $(\boldsymbol{x = 2}\ ;\ \boldsymbol{y = 5})$ doit vérifier chaque équation du système.

L'ensemble solution du système est : $\mathbf{S} = \{(\mathbf{x = 2}\ ; \mathbf{y = 5})\}$

Exercice 11.2 Résoudre les systèmes d'équations à deux inconnues, par méthode d'addition :

1) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 5y = 48 \\ 7x + y = 132 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x + y) - 2(x - y) = 48 \\ 4(x + y) + 3(x - y) = 132 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{2}\, x + \sqrt{3}\, y = -10 \\ x + \sqrt{2}\, y = 2 \end{cases}$

III. Mise en équation d'un problème :

Problème : Pierre dit à Jean : « Si tu me donnes 5 billes, j'en aurai autant que toi. » Jean lui répond : « Si c'est toi qui m'en donnes 5, j'en aurai le double de toi. » Combien ont-ils de billes chacun?

Résolution : Choix des inconnues

p : Nombre de billes de pierre

j : Nombre de billes de jean

Jean donne 5 billes à pierre il en a donc j -5 et pierre en a maintenant p+5

Après cet échange :

Nombre de billes de pierre = Nombre de billes de jean

p+5 = j -5

On a l'équation p- j = - 5-5

p-j = -10 (1)

Jean répond : « Si c'est toi qui m'en donnes 5, j'en aurai le double de toi.

Pierre donne 5 billes à jean , pierre en a P-5 et jean en a J+5

Après cela jean possède le double de pierre c'est-à-dire : J+5= 2× (P-5) ou

2× (P-5) = J+5

On obtient le système suivant : $\begin{cases} p - j = -10 \\ 2 \times (p-5) = j + 5 \end{cases}$

Système équivalent : $\begin{cases} p - j = -10 \\ 2p - 10 - j = 5 \end{cases}$ on a $\begin{cases} p - j = -10 \\ 2p - j = 5 + 10 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} p - j = -10 \\ 2p - j = 15 \end{cases}$

Résolution par la méthode d'addition :

$$\begin{cases} p - j = -10 & (l1) \\ 2p - j = 15 & (l2) \end{cases}$$

Eliminons j :

$-1 \times (l1) \quad donne \quad -p + j = 10$

$\underline{1 \times (\mathrm{l}2) \quad \text{donne} \quad 2\mathrm{p} - \mathrm{j} = 15}$

$-1 \times (l1)$ +$(\mathrm{l}2)$ donne $-p + 2p + 0 = 10 + 15$

$$p = 25$$

Eliminons p :

$-2 \times (l1) \quad donne \quad -2p + 2j = -2(-10)$

$\underline{1 \times (\mathrm{l}2) \quad \text{donne} \quad 2\mathrm{p} - \mathrm{j} = 15}$

$-2 \times (l1)$ +$(\mathrm{l}2)$ donne $0 + j = 20 + 15$

$$j = 35$$

Solution : pierre a 25 billes et jean en a 35.

Exercice 11.3

Dans mon coffre, j'ai des pièces de 25 fr et des pièces de 50 fr, soit 150 pièces en tout. Combien ai-je de pièces de chaque sorte, sachant que j'ai 5400 fr?.

Exercice 11.4

Il y a 6 ans, Jean avait 4 fois l'âge de Marie. Dans 4 ans, Jean aura 2 fois l'âge de Marie. Quel âge ont-ils maintenant?

Exercice 11.5

Un rectangle a 76 cm de périmètre. Si sa largeur était diminuée de 3 cm et sa longueur augmentée de 1 cm, son aire diminuerait de 65 cm^2 . Calculer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 11.6

Charles a 10 ans de plus que Diane. Dans 5 ans, Diane aura les 2/3 de l'âge de Charles. Déterminer l'âge de Charles et celui de Diane.

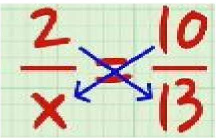
Thème 12 : Equations dans IR et Thales

I. Le produit en croix

Soient a, b, c et des nombres relatifs non nul

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$

Présentation :



on a $10 \times x = 2 \times 13$; $10 \times x = 26$; $x = \frac{26}{10}$; $x = \frac{13}{5}$

Exemples : Résoudre les équations suivantes

$\frac{7}{x} = \frac{49}{28}$ équivaut à $49 \times x = 7 \times 28$

$$49 \times x = 196$$

$$x = \frac{196}{49}$$

On a $x = 4$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{4}\}$

$\frac{15}{60} = \frac{x}{11}$ équivaut à $60 \times x = 15 \times 11$

$$60 \times x = 165$$

$$x = \frac{165}{60}$$

On a $x = 2{,}75$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{2{,}75}\}$

$\frac{7}{x+4} = \frac{21}{60}$ équivaut à $21 \times (x + 4) = 7 \times 60$

$$21 \times x + 21 \times 4 = 7 \times 60$$

$$21x + 84 = 420$$

$$21x = 420 - 84$$

$$21x = 336$$

$$x = \frac{336}{21}$$

On a $x = 16$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{16}\}$

Exercice 12.1 : Résoudre les équations suivantes

1) $\frac{x}{5} = 50$

2) $\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$

3) $\frac{5}{4} = \frac{25}{x}$

4) $\frac{x}{6} = \frac{9}{54}$

5) $\frac{x-5}{23} = \frac{36}{92}$

6) $\frac{5x-8}{5} = \frac{18}{45}$

7) $\frac{4}{3x-11} = \frac{36}{63}$

8) $\frac{2x+5}{x-7} = 2$

9) $\frac{x+3}{2} = \frac{x+1}{4}$

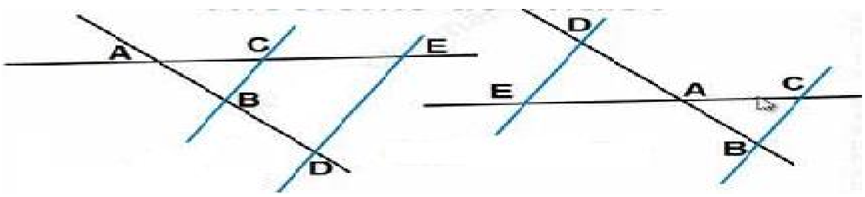
10) $\frac{3-x}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{5x}{4}$

II. Propriété (théorème) de Thales .

La propriété de Thales permet de calculer les longueurs dans certaines configurations géométriques.

Propriété de Thales dans le triangle.

Types de figures :



<u>Propriété de Thales .</u>

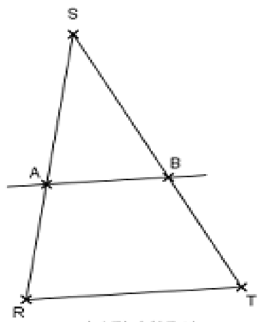
Si les points A , B , D sont alignés et si A , C et E sont alignés et si les droites (BC) et (DE) sont parallèles alors :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

1) $\frac{\text{cotés du petit triangle}}{\text{cotés du grand triangle}}$

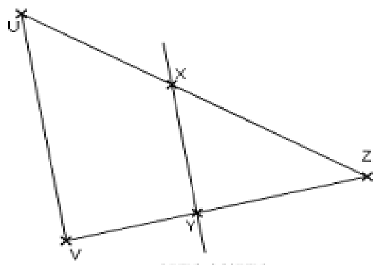
2) S'assurer de l'alignement des points.

Exercice 12.2 : Compléter les égalités ci-dessous



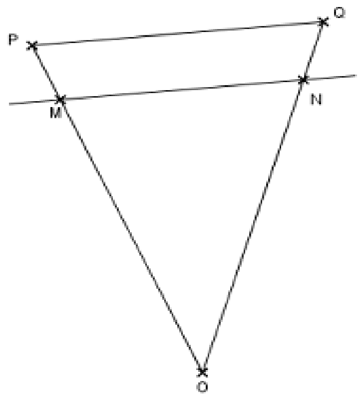
$(AB)//(RT)$

$$\frac{SA}{SR} = \frac{SB}{...} = \frac{...}{RT}$$



$(XY)//(UV)$

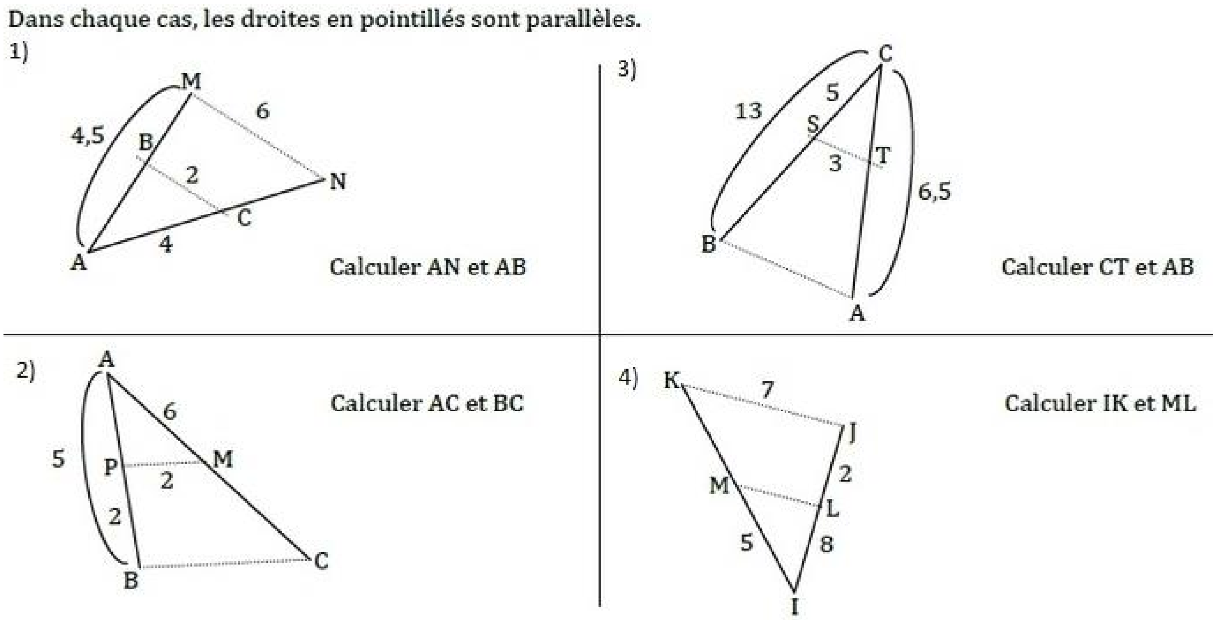
$$\frac{ZY}{ZV} = \frac{ZX}{...} = \frac{...}{UV}$$



$(MN)//(PQ)$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{...} = \frac{...}{PQ}$$

Exemples : l’unité de longueur est le centimètre



Exemples : l’unité de longueur est le centimètre

1) dans le triangle AMN on a :

$B \in (AM)$,

$C \in (AN)$

(BC) // (MN)

On a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$ d’après la propriété de Thales relative aux triangles.

$\frac{AB}{4,5} = \frac{4}{AN} = \frac{2}{6}$ on a $\frac{AB}{4,5} = \frac{2}{6}$ et $\frac{4}{AN} = \frac{2}{6}$

$$6 \times AB = 2 \times 4,5 \quad \text{et} \quad 2 \times AN = 4 \times 6$$

$$6 \times AB = 9 \quad \text{et} \quad 2 \times AN = 24$$

$$AB = \frac{9}{6} \qquad \text{et} \qquad AN = \frac{24}{2}$$

$$AB = 1,5 \quad \text{et} \quad AN = 12$$

2) dans le triangle ABC on a :

$P \in (AB)$,

$M \in (AC)$

(PM) // (BC)

On a $\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{PM}{BC}$ d'après la propriété de Thales relative aux triangles.

$\frac{AP}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC}$; $\frac{5-2}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC}$; $\frac{3}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC}$

on a $\frac{3}{5} = \frac{6}{AC}$ et $\frac{3}{5} = \frac{2}{BC}$

$3 \times AC = 5 \times 6$ et $3 \times BC = 2 \times 5$

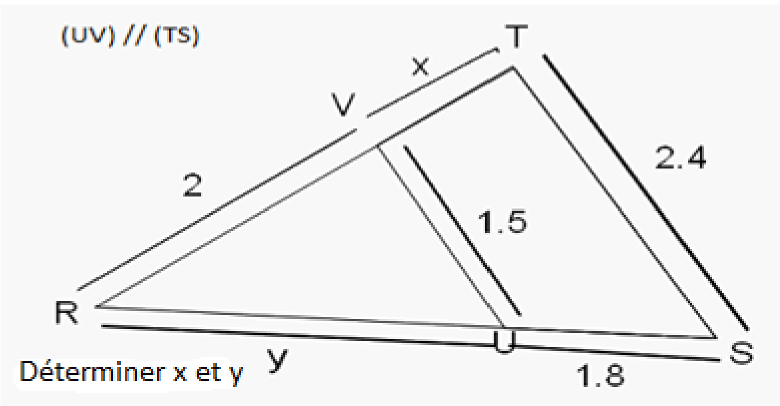
$3 \times AC = 30$ et $3 \times BC = 10$

$AC = \frac{30}{3}$ et $BC = \frac{10}{3}$

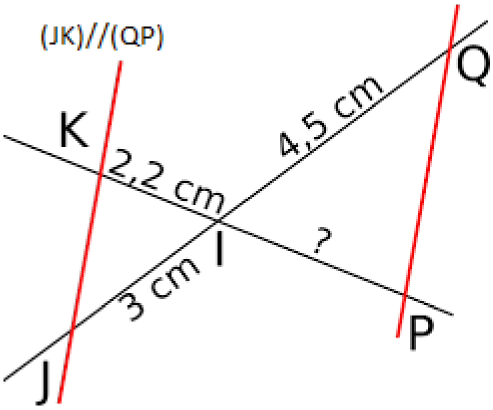
$\boldsymbol{AC = 10}$ **et** $\boldsymbol{BC = \frac{10}{3}}$

Exercice 12.3 : Traiter les questions 3) et 4) .

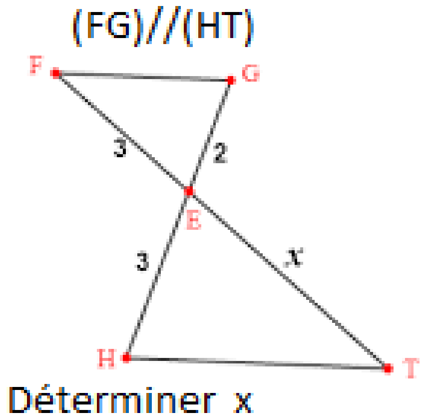
Exercice 12.4 : l'unité de longueur est le centimètre

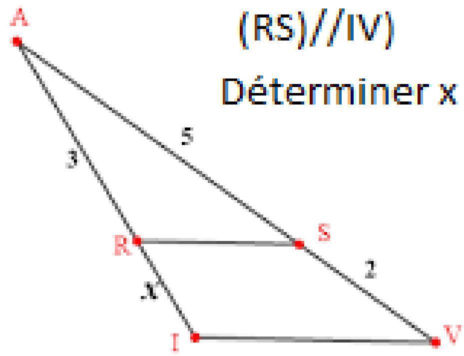


Exercice 12.5 :



Exercice 12.6 : l'unité de longueur est le centimètre





Exercice 12.7 :

Soit ABC un triangle tel que : AB= 10 cm ; AC= 7,5 cm et BC=12,5 cm.

1) Montrer que ABC est rectangle en A.

2) Soit E un point du segment [AB] tel que AE= 2 cm .

La perpendiculaire à (AB) passant par E coupe (BC) en F.

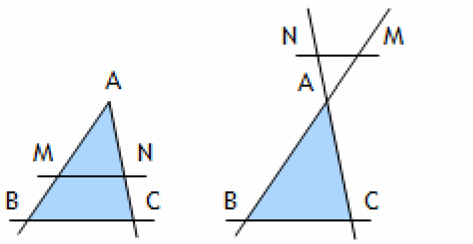
a) Montrer que (AC) et (EF) sont parallèles .

b) Calculer les distances BE, EF et BF .

III. Réciproque de la Propriété (ou théorème) de Thales dans le triangle.

Propriété :

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N un point de (AC).



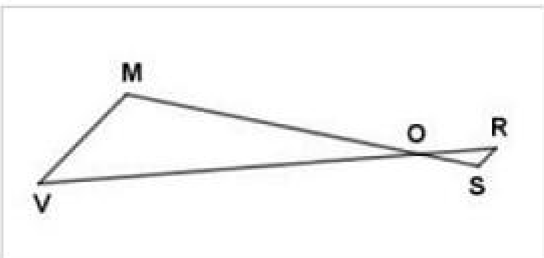
Si l'égalité suivante est vérifiée $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M , B d'une part et les points A ; N et C sont alignés dans le même ordre, alors (MN)// (BC)

Si la réciproque de la propriété de Thales n'est pas vérifiée on dit les droites ne sont pas parallèles (c'est la contraposée de la propriété de Thales)

Pour la contraposée on prendra soin de vérifier l'égalité des quotients ou l'ordre d'alignement des points.

Exemples

Sur la figure ci-dessous,



$MO = 7.5\ cm$, $OV = 18\ cm$, $OS = 1.5\ cm$ et $OR = 3.6\ cm$, $RS = 3\ cm$.

1) Montre que les droites (MV) et (RS) sont parallèles.

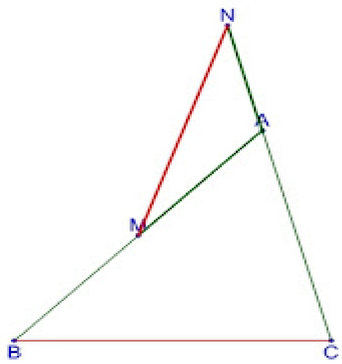
Parallélisme de (MV) et (RS)

Calculons $\frac{RO}{OV} = \frac{3,6}{18} = \frac{1}{5}$ et $\frac{SO}{OM} = \frac{1,5}{7,5} = \frac{1}{5}$ ainsi $\frac{RO}{OV} = \frac{SO}{OM} = \frac{1}{5}$

Les points R, O , V sont alignés dans cet ordre et les points S, O, M sont aussi dans cet ordre et comme $\frac{RO}{OV} = \frac{SO}{OM} = \frac{1}{5}$ **d'après la réciproque de la propriété de Thales les droites (MV) et (RS) sont parallèles.**

Exemple : l'unité de longueur est le centimètre

AM=6,55 , AN= 4,9 puis AB=13,1 et AC= 9,8



Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles

Calculons $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{AM}{AB}$

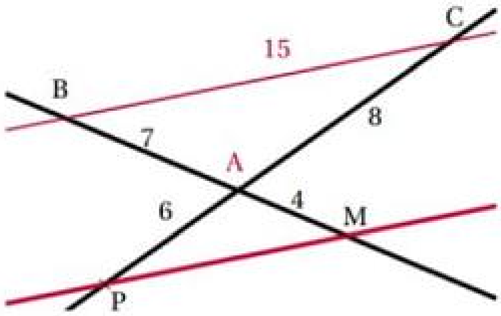
$\frac{AN}{AC} = \frac{4,9}{9,8} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{6,55}{13,1} = \frac{1}{2}$ on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ les points A, M, B et les points A, N, C ne sont pas alignés dans le même ordre , d'après la contraposée de la propriété de Thales les droites (MN) et (BC) ne sont parallèles .

Exemple : l'unité de longueur est le centimètre

Les droites (BM) et (PC) sont sécantes en A .

AB=7 , AM=4 , AP=6 , AC=8

Les droites (BC) et (PM) sont-elles parallèles ?



Calculons

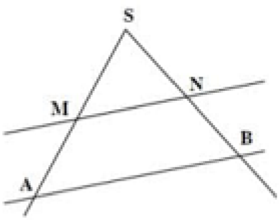
$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7}$ et $\frac{AP}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{4}{7} \neq \frac{3}{4}$ donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$.

Les points M,A, B sont alignés dans cet ordre , les points P, A , C sont alignés dans le même ordre et $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$ d'après la contraposée de la réciproque de la propriété de Thales les droites (BC) et (PM) ne sont pas parallèles .

Exercice 12.8 : l'unité de longueur est le centimètre.

On donne SM=4, SA=12, SN=6 et SB=18

Les droites (AB) et (MN) sont –elles parallèles ?



Exercice 12.9 : l'unité de longueur est le centimètre.

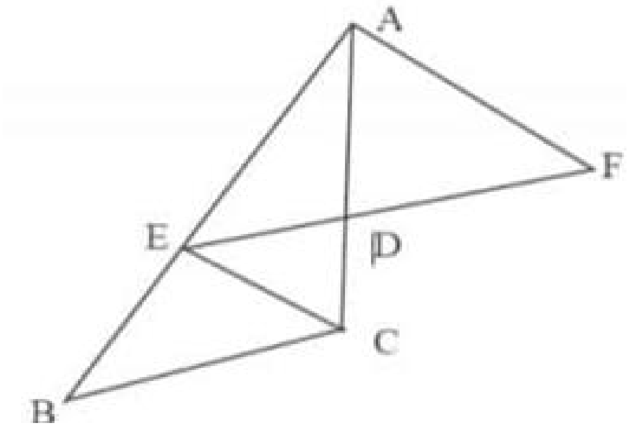
1) Soit ABC un triangle , la droite (ED) est parallèle à la droite (BC).

2) On donne AE=BC=3 et EB=AD=2.

Calculer AC, DC et ED.

3) F est un point de (DE) tel que DF= 2,7

Les droites (EC) et (AF) sont-elles parallèles ?



Exercice 12.10 : l'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre

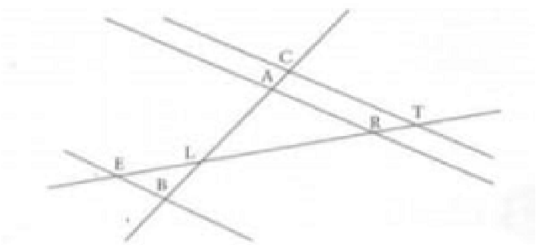
Les droites (AR) et (CT) sont parallèles.

Les points E, L, R, T et C, A, L, B sont alignés dans l'ordre respectif

On a également, LC = 6 ; LT = 9 ; LA = 4,8 ; LB = 1,5 et LE = 3

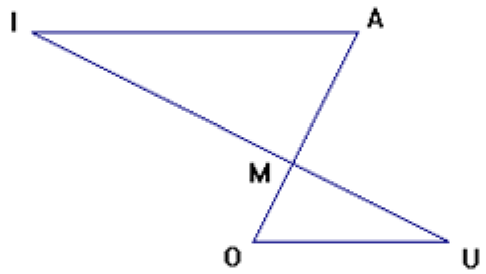
1) Calculer LR

2) Déterminer si les droites (EB) et (CT) sont parallèles



Exercice 12.11 :

Sur la figure ci-dessous :
Les segments [OA] et [UI] se coupent en M.
MO = 21, MA = 27, MU = 28, MI = 36 et AI = 45.
L'unité de longueur est le millimètre.



1° Prouver que les droites (OU) et (AI) sont parallèles.
2° Calculer la longueur OU.
3° Prouver que le triangle AMI est rectangle.

Exercice 12.12 :

1° Construire un triangle ABC tel que
AB = 6 cm AC = 7,2 cm et BC = 10 cm
Placer les points R, T et E tels que :
R $\in$ [AB] et AR = 4,5 cm
T $\in$ [AC] et (RT) // (BC)
E $\in$ [AB) et E $\notin$ [AB] et BE = 2 cm

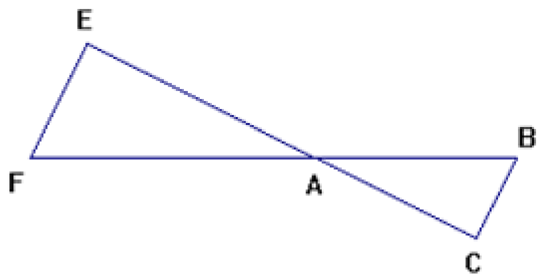
2° Calculer, en justifiant chaque réponse, les longueurs AT, TR et AE.

3° Les droites (BT) et (CE) sont elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercice 12.13 :

On considère la figure ci-dessous pour laquelle :
Les points E, A et C sont alignés ;
Les points F, A et B sont alignés ;
AF = 12 cm, AC = 5 cm, AB = 7,5 cm et AE = 8 cm.

La figure n'est pas à reproduire.



1° Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
2° Calculer la longueur EF sachant que BC = 5,5 cm.
Justifier la réponse.
3° Le triangle ABC est-il rectangle en C ? Justifier la réponse.

<u>Thème 13 : Ordre et inéquations</u>

I. Les signes d'inégalités

$\leq$: Lire inférieur ou égal à

$\geq$: Lire supérieur ou égal à

$<$: Strictement inférieur à

$>$: strictement supérieur à

Remarque :

Le signe inférieur peut-être symbolisé par « le bras gauche coudé »

Le signe supérieur peut-être symbolisé par « le bras droit coudé »

II. Propriétés des inégalités.

1- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ ou encore $a - c \leq b - c$

2- si $a \leq b \;\; et \;\; c > 0$ alors $a \times c \leq b \times c$

3- Si $a \leq b \;\; et \;\; c < 0$ alors $a \times c \geq b \times c$ ou encore $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Ces propriétés sont aussi valables avec les signes " $\geq$ " , " $>$ " et " $<$ "

Applications :

$-6 \leq 9$

ajoutons 4 à chaque membre on a $-6 + 4 \leq 9 + 4$

d'où $\mathbf{-2 \leq 13}$ **.**

$-6 \leq 9$

En soustrayant 2 à chaque membre on a $-6 - 2 \leq 9 - 2$

d'où $\mathbf{-8 \leq 7}$ **.**

$-6 \leq 9$

Multiplions chaque membre par 3 on a $3 \times (-6) \leq 3 \times 9$

d'où $-18 \leq 27$

$-6 \leq 9$

Multiplions chaque membre par (-1) on a $-1 \times (-6) \geq -1 \times 9$

d'où $\mathbf{6} \geq -\mathbf{9}$

On donne $-6 \leq 9$

Divisons chaque membre par (-3) : $\frac{-6}{-3} \geq \frac{9}{-3}$

d'où $2 \geq -3$

III. Les inéquations du premier degré dans IR

Présentation :

L'inégalité suivante $2x + 3 < x - 4$ est une inéquation .

Résolution de l'inéquation (méthode) :

$2x + 3 < x - 4$

$2x - x < -4 - 3$

$x < -7$

[/////////// ,

-7

On déduit que l'ensemble solution est l'intervalle ouvert de moins l'infini $(-\infty)$ à -7

Noté **S=]**$-\infty$ **; -7[**

Résoudre l'inéquation $x + 4 \leq 2x - 2$

$x + 4 \leq 2x - 2$

$x - 2x \leq -2 - 4$

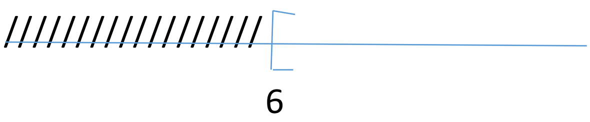
$-x \leq -6$

$-1 \times x \leq -6$

On va multiplier l'inégalité par (-1)

On a $-1 \times (-1) \times x \geq -1 \times (-6)$

$x \geq 6$



L'ensemble solution est l'intervalle fermé-ouvert de 6 à $(+\infty)$, noté :

$\mathbf{S} = [\mathbf{6}\,; +\infty[$

Exemple : Résoudre l'inéquation $2x + 2 < 2x - 4$

$2x + 2 < 2x - 4$

$2x - 2x < -4 - 2$

$0 < -6$, impossible

Donc l'inéquation n'admet pas de solution on note $\boldsymbol{S} = \emptyset$ **.**

Exemple : Résoudre l'inéquation $2x + 2 > 2x - 4$

$2x + 2 > 2x - 4$

$2x - 2x > -4 - 2$

$0 > -6$, toujours vraie

L'ensemble des nombres réels noté IR est l'ensemble solution de l'inéquation.

On écrit **S= IR .**

$IR =]-\infty\,;\, +\infty[$

Rappel :

Quand on doit additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quand on doit multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quand on doit multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif on change le sens de l'inégalité.

Avant de donner l'ensemble solution, penser à tracer un axe gradué.

Hachurer la partie ne correspondant pas à l'ensemble solution.

L'ensemble solution est donné sous forme d'intervalle.

Exercice : 13.1 Résoudre les inéquations suivantes dans IR

1) $x + 1 \geq -4$

2) $2x \geq 6$

3) $-3x < 12$

4) $-3x + 5 < 0$

5) $2x + 3 \geq 5x + 7$

6) $2x + 5 \geq x - 1$

7) $-x + 5 > 2x - 7$

8) $\frac{x}{2} \leq 3x + 5$

9) $2(x + 1) > 8 + 3x$

III. Mise en inéquation d'un problème.

Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens.

On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens.

Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre

de mathématiciens soit au moins égal au deux tiers du nombre d'informaticiens.

Résolution.

Choix de l'inconnu :

Soit x le nombre de mathématiciens et d'informaticiens de chaque sorte.

Informaticien : 27

Mathématicien : 15

On embauche x informaticiens et mathématiciens, on aura donc :

Informaticien : 27+x

Mathématicien : 15 +x

Après embauche :

Nombre de mathématicien $\geq \frac{2}{3}$ du nombre d'informaticien

$$(15 + x) \geq \frac{2}{3} \times (27 + x)$$

Résolution de l'inéquation :

$(15 + x) \geq \frac{2}{3} \times (27 + x)$

Multiplions chaque membre par trois .

$3 \times (15 + x) \geq 3 \times \frac{2}{3}(27 + x)$

$45 + 3x \geq \frac{6}{3}(27 + x)$

$45 + 3x \geq 2(27 + x)$

$45 + 3x \geq 54 + 2x$

$3x - 2x \geq 54 - 45$

$x \geq 9$

Solution :

Le bureau doit embaucher au moins 9 mathématiciens et 9 informaticiens.

Exercice : 13.2 Mise en inéquation.

1) Un camion pèse à vide deux tonnes et doit passer sur pont limité à 6 tonnes.

Combien de caisses de 118kg chacune peut-il transporter ?

2) Paul a 32 ans et Jean a 5 ans. Pendant combien d'années l'âge de Paul restera-t-il plus grand que quatre fois celui de Jean ?.

3) Un père a deux enfants. Le fils a 5 ans de moins que sa sœur, qui a 20ans de moins que son père. La somme de leurs âges dépasse 70 ans. L'âge du père est plus du double de celui de sa fille.

Quel est l'âge de chacun? (Les âges sont exprimés en nombres entiers).

IV. Comparaison.

Propriété soient a et b deux nombres positifs si $a^2 \geq b^2$ alors $a \geq b$.

Exemples :

Comparer $5\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$.

Calculons $(3\sqrt{5})^2$=$3^2(\sqrt{5})^2 = 9(5) = 45$

$(5\sqrt{2})^2 = 5^2(\sqrt{2})^2 = 25(2) = 50$

On a $50 \geq 45$ on a $(5\sqrt{2})^2 \geq (3\sqrt{5})^2$ donc $\mathbf{5\sqrt{2} \geq 3\sqrt{5}}$

<u>Encadrement d'une somme :</u>

On donne $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$

$$\begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ \underline{c \leq y \leq d} \end{array}$$

Addition membre à membre : $a + c \leq x + y \leq b + d$

<u>Encadrement de l'opposé :</u>

On donne $a \leq x \leq b$ encadrement $-x$

Multiplions l'inégalité par -1 .

$-1 \times a \geq -1 \times x \geq -1 \times b$ on a $-a \geq -x \geq -b$

On en déduit que $\boldsymbol{-b \leq -x \leq -a}$

Exemples :

On donne $5{,}66 \leq x \leq 5{,}67 \quad et \quad 4{,}66 \leq y \leq 4{,}67$ encadrer $x + y \quad et$ $x - y$.

$$5{,}66 \leq x \leq 5{,}67 \qquad (1)$$

$$\underline{4{,}66 \leq y \leq 4{,}67 \qquad (2)}$$

(1)+(2) : $5{,}66 + 4{,}66 \leq \mathrm{x} + \mathrm{y} \leq 5{,}67 + 4{,}67$

On a $\mathbf{10,32 \leq x + y \leq 10,34}$

Pour l'encadrement $x - y$ on doit d'abord encadrer $-y$

Mais on remarquera que $x - y = x + (-y)$.

$$4{,}66 \leq y \leq 4{,}67$$

Multiplier par -1 on a

$$-1 \times 4{,}66 \geq -1 \times y \geq -1 \times 4{,}67$$

$$-4{,}66 \geq -y \geq -4{,}67$$

Soit $-4{,}67 \leq -y \leq -4{,}66$

On a $5{,}66 \leq x \leq 5{,}67 \qquad (1)$

Et $\underline{-4{,}67 \leq -y \leq -4{,}66 \qquad (2)}$

(1) +(2) $5{,}66 - 4{,}67 \leq x + (-y) \leq 5{,}67 - 4{,}66$

$\mathbf{0,99 \leq x - y \leq 1,01}$

Exercice : 13.3

1) Comparer $2\sqrt{5} \quad et \quad 5\sqrt{3}$; $2\sqrt{3} \quad et \quad 2\sqrt{2}$; $3\sqrt{5} \quad et \quad 5\sqrt{2}$; $11\sqrt{3} \quad et \quad 7\sqrt{5}$; $\sqrt{3} + \sqrt{5} \ \ et \ \sqrt{7 + 2\sqrt{15}}$; $-8\sqrt{6} \quad et \quad -3\sqrt{17}$; $2 - \sqrt{2} \ \ et \ \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

2) On donne $2 < x < 3$ et $-1 < y < 7$ **;** encadrer $x + y$ puis $x - y$ et $y - x$.

3) On donne $5 < a < 9$ et $-3 \leq b < 8$; encadrer $a + b$, $b - a$ et $5b - a$.

Encadrement du produit et du quotient :

Soient x et y des nombres strictements positifs de meme a, b, c et d .

Encadrement du produit xy :

$$a \leq x \leq b$$

$$\underline{c \leq y \leq d}$$

Produit membre à membre : $a \times \mathrm{c} \leq \mathrm{x} \times \mathrm{y} \leq \mathrm{b} \times \mathrm{d}$

Encadrement de l'inverse $\frac{1}{x}$:

On donne $a \leq x \leq b$ on a $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{b}$ ainsi $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

Remarque : $\frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}$

Exemple : $2 < x < 3{,}5$ et $2{,}5 < y < 4$, déterminer l'encadrement de xy , $\frac{1}{x}$ et $\frac{y}{x}$.

L'encadrement de xy

$$2 < x < 3{,}5$$

$$\underline{2{,}5 < y < 4}$$

$$2 \times 2{,}5 < x \times y < 3{,}5 \times 4$$

On a $\mathbf{5 < xy < 14}$

L'encadrement de $\frac{1}{x}$;

On a $2 < x < 3{,}5$ d'où $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{3{,}5}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{10}{35}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{2}{7}$

Ansi $\boldsymbol{\frac{2}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}}$

.

L'encadrement de $\frac{y}{x}$.

$2{,}5 < y < 4$ de $2 < x < 3{,}5$ on a $\frac{2}{7} < \frac{1}{\mathrm{x}} < \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\underline{\quad\quad 2{,}5 < y < 4}$$

Produit membre à membre $\quad 2{,}5 \times \frac{2}{7} < y \times \frac{1}{x} < 4 \times \frac{1}{2}$

On a $\quad \mathbf{\frac{5}{7} < \frac{y}{x} < 2}$

Exemple : On donne $-3{,}5 < x < -2$ de $2{,}5 < y < 4$,encadrer $xy \ et \ \frac{x}{y}$.

L'encadrement de xy

Encadrons d'abord $-x$ (car dans l'encadrement ci-dessus on constate que x est négatif)

$-3{,}5 < x < -2$ on a $-1 \times (-3{,}5) > -x > -1 \times (-2)$

$3{,}5 > -x > 2$; $2 < -x < 3{,}5$

$$2 < -x < 3{,}5$$

$$\underline{\quad 2{,}5 < y < 4}$$

Produit membre à membre $\quad 2 \times 2{,}5 < -x \times y < 3{,}5 \times 4$

$$5 < -xy < 14$$

Multiplions par -1 on a $\quad -14 < -1 \times (-xy) < -1 \times 5$

On obtient $\quad \mathbf{-14 < xy < -5}$

L'encadrement de $\frac{x}{y}$.

$-3{,}5 < x < -2$ on a $2 < -x < 3{,}5$

On a $2{,}5 < y < 4$ d'où $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2{,}5}$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1(2)}{(2{,}5)(2)}$; $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{2}{5}$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{2}{5}$$

$$\underline{2 < -x < 3{,}5}$$

$$2 \times \frac{1}{4} < -x \times \frac{1}{y} < \frac{2}{5} \times 3{,}5$$

$$\frac{2}{4} < \frac{-x}{y} < \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{-x}{y} < \frac{7}{5}$$

multiplions l'inégalité par -1 on a $\frac{-7}{5} < \frac{-1(-x)}{y} < \frac{-1}{2}$

On a $\boldsymbol{\frac{-7}{5} < \frac{x}{y} < \frac{-1}{2}}$

Exemple on donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, déterminons l'encadrement $17 - 21\sqrt{3}$.

$17 - 21\sqrt{3} = 17 - 21 \times \sqrt{3}$ on commence par encadrer le produit $-21 \times \sqrt{3}$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ on a $-21 \times 1{,}733 < -21 \times \sqrt{3} < -21 \times 1{,}732$

$-36{,}393 < -21 \times \sqrt{3} < -36{,}372$

Ajoutons 17 à chaque membre : $17 - 36{,}393 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < 17 - 36{,}372$

$-19{,}393 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19{,}372$

Encadrement d'ordre 0 par deux nombres décimaux consécutifs de $17 - 21 \times \sqrt{3}$

On a donc $\boldsymbol{-20 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19}$

Encadrement d'ordre 1 par deux nombres décimaux consécutifs de $17 - 21 \times \sqrt{3}$

On a $\boldsymbol{-19{,}4 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19{,}3}$

Encadrement d'ordre 2 par deux nombres décimaux consécutifs de $17 - 21 \times \sqrt{3}$

Exercice : 13.4

1) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, déterminer un encadrement de $18\sqrt{2} - 27$, puis en déduire l'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 .

2) Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, déterminer un encadrement de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puis en déduire l'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 .

Exercice : 13.5

Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$ et $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) comparer $a \;\; et \;\; a^2 - 1$.

c) Encadrer a^2 par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Thème 14 : Valeur absolue et inéquations(2)

14.1 Valeur absolue

Présentation.

On appelle valeur absolue d'un réel x le nombre réel noté $|x|$, tel que :

$|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif .

Une valeur absolue est toujours positive .

Exemples :

$|5| = 5$; $|-6| = -(-6) = 6$; $|2{,}3| = 2{,}3$ et $|-7{,}2| = 7{,}2$.

- La valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre.
- La valeur absolue d'un nombre négatif est égale à son opposé.
- La valeur absolue de zéro est égale à zéro.

Activité :

$\sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ on a la propriété suivante : Pour tout nombre réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples :

$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$; $\sqrt{(-5{,}3)^2} = |-5{,}3| = 5{,}3$; $\sqrt{9^2} = |9| = 9$

$\sqrt{2^2} = 2$

Exercice 14.1 Simplifier

1) $\sqrt{5^2}$ 2) $\sqrt{(7,2)^2}$ 3) $\sqrt{(-8,4)^2}$ 4) $\sqrt{(\frac{-7}{5})^2}$

Application :

1) Développer et réduire , $(1+\sqrt{3})^2$ et $(1-\sqrt{3})^2$.

2) Déterminer le signe de $1 + \sqrt{3}$ et celui de $1 - \sqrt{3}$.

3) Simplifier $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

***

1) $(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

$$\boldsymbol{(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}}$$

$(1-\sqrt{3})^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$

$\boldsymbol{(1-\sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}}$

2) Signe de $1 + \sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{3}$.

Signe de $1 + \sqrt{3}$:

$1 > 0$ et $\sqrt{3} > 0$ donc $\boldsymbol{1 + \sqrt{3} > 0}$

Signe de $1 - \sqrt{3}$

Calculons $1^2 = 1$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$ on a $1 < 3$ donc $1^2 < (\sqrt{3})^2$

ainsi $1 < \sqrt{3}$ et donc $\boldsymbol{1 - \sqrt{3} < 0.}$

3) Simplifions $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = \left|1 + \sqrt{3}\right| = 1 + \sqrt{3}$ car $1 + \sqrt{3} > 0$

$\boldsymbol{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}}$

$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \left|1 - \sqrt{3}\right| = -(1 - \sqrt{3})$ car $1 - \sqrt{3} < 0.$

Donc $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -\left(1 - \sqrt{3}\right) = -\mathbf{1} + \sqrt{3}$

on a $\boldsymbol{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1}$

Exercice 14.2

1) Comparer $4\sqrt{2}$ *et* 12 .

2) Déterminer le signe $4\sqrt{2} - 12$

3) Ecrire sans valeur absolue le nombre $\left|4\sqrt{2} - 12\right|$

Exercice 14.3

1) Comparer $2\sqrt{3}$ *et* $\sqrt{7}$.

2) Déterminer le signe $2\sqrt{3} - \sqrt{7}$ et simplifier $\left|2\sqrt{3} - \sqrt{7}\right|$.

3) Développer et réduire $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})^2$

4) Simplifier $\sqrt{\mathbf{19 - 4\sqrt{21}}}$

Exercice 14.4

1) Développer et réduire $(\sqrt{2} - 3)^2$.

2) Comparer $\sqrt{2}$ *et* 3 puis simplifier $\left|\sqrt{2} - 3\right|$.

3) On pose $Y = \frac{5\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, rendre rationnel le dénominateur de Y.

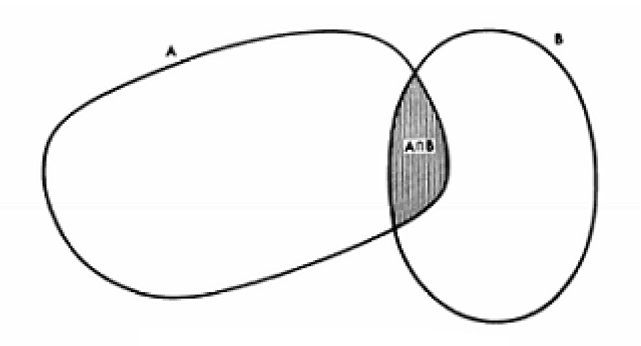
4) Montrer que $\sqrt{Y} = 3 - \sqrt{2}$

5) Montrer que résoudre l'équation $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 5\sqrt{2} + 1 = 0$ équivaut à Résoudre l'équation $x^2 - Y = 0$, puis résoudre cette équation .

<u>14.2 Intersection et réunion.</u>

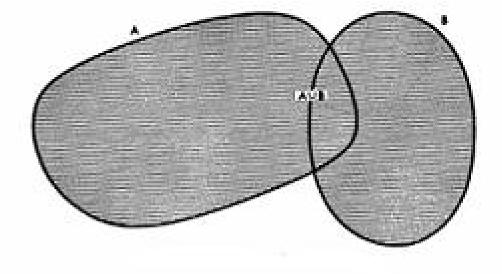
<u>Présentation.</u>

On peut représenter l'intersection de deux ensembles A et B par un diagramme de Venn.



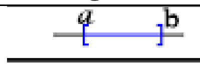
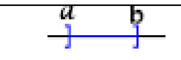
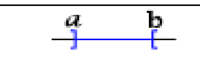
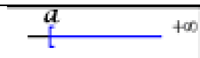
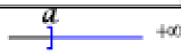
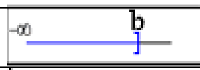
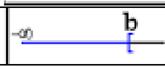
Hachuré ci-dessus l'intersection de deux ensembles A et B , cette intersection représente les éléments appartenant simultanément aux deux ensembles A et B .

A ∩ B : Lire A inter B , l'intersection des ensembles A et B .



Entièrement hachuré ci-dessus la réunion des ensembles A et B , noté A ∪ B .

A ∪ B représente tous les éléments des deux ensembles A et B .

inégalité	intervalle	Représentation sur l'axe gradué
$a \leq x \leq b$	$[a\,;b]$ Intervalle fermé	
$a \leq x < b$	$[a\,;b[$ Intervalle semi-ouvert à droite	
$a < x \leq b$	$]a;b]$ Intervalle semi-ouvert à gauche	
$a < x < b$	$]a\,;b[$ Intervalle ouvert	
$x \geq a$	$[a\,;\,+\infty[$	
$x > a$	$]a\,;\,+\infty[$	
$x \leq b$	$]-\infty\,;b]$	
$x < b$	$]-\infty\,;b[$	

Intervalle semi-ouvert à droite: intervalle fermé-ouvert.
Intervalle semi-ouvert à gauche: intervalle ouvert-fermé.
Intersection de deux intervalles :

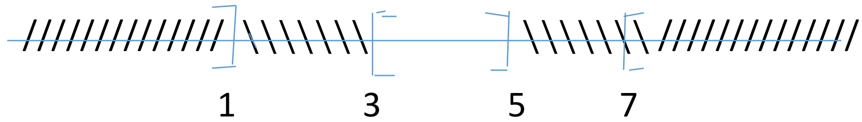
Déterminons $]1;5] \cap [3;7[$

<u>Méthode pour déterminer l'intersection de deux intervalles</u>

1) On place les nombres dans l'ordre croissant sur un axe gradué.

2) On hachure à l'extérieur des intervalles.

3) La partie non hachurée représente l'intersection des intervalles.



On en déduit que $]1;5] \cap [3;7[= [3\,;5]$

Réunion de deux intervalles :

Déterminons $[0;4] \cup [1\,;5]$

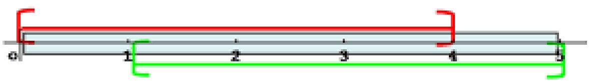
<u>Méthode pour déterminer la réunion de deux intervalles</u>

1) On place les nombres dans l'ordre croissant sur un axe gradué.

2) On colorie à l'intérieur des intervalles.

3) La partie entièrement colorée représente la réunion des intervalles.

En rouge l'intervalle $[0;4]$ et en vert l'intervalle $[1\,;5]$.



On en déduit que $[\mathbf{0};\mathbf{4}] \cup [\mathbf{1}\,;\mathbf{5}] = [\mathbf{0}\,;\mathbf{5}]$

Exercice 14.5

1) On donne $I = [3;7]$ et $J = [5\,;\,+\infty[$, déterminer $I \cap J$.

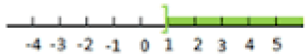
2) On donne $I = [-2\,;5]$ et $J = [1\,;7]$, déterminer $I \cup \boldsymbol{J}$.

3) On donne $I = [-1\,;5]$ et $J = [2\,;9]$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$.

4) On donne $I =]0\,;3]$ et $J = [5;7[$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$.

5) On donne $I = [1;4[$ et $J =]7\,;+\infty\,[$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$.

Exercice 14.6 : Recopier et compléter le tableau suivant .

Intervalle	Encadrement	Droite graduée
$x \in]-\infty\,;0]$		
	$-2 \leq x < 2$	
		

14.3 Système d'équations à une inconnue.

Activité :

Résolution des systèmes d'inéquations :

1) $\begin{cases} x < 8 \\ x > -1 \end{cases}$ et 2) $\begin{cases} 2x - 15 < 0 \\ 12 - 3x < 0 \end{cases}$

Avec le système 1) on a $x < 8$ et $x > -1$.

On déduit que l'ensemble solution est **:** $\boldsymbol{S} =]-\mathbf{1}\,;\mathbf{8}[$

Avec le système 2) on a $2x - 15 < 0$ et $12 - 3x < 0$

$2x - 15 < 0$ et $12 - 3x < 0$

$2x < 15$ et $-3x < 12$

$x < \frac{15}{2}$ et $x > \frac{12}{-3}$

$x < \frac{15}{2}$ et $x > -4$

On déduit que l'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \left]-\mathbf{4}\,;\,\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}\right[$

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 3 \\ 2x + 1 \geq -2x + 5 \end{cases}$$

On a $\quad 2x - 3 \leq 3 \quad$ et $\quad 2x + 1 \geq -2x + 5$

D'où $\quad 2x \leq 3 + 3 \quad$ et $\quad 2x + 2x \geq 5 - 1$

ainsi $\quad 2x \leq 6 \quad$ et $\quad 4x \geq 4$

donc $\quad x \leq \frac{6}{2} \quad$ et $\quad x \geq \frac{4}{4}$

alors $\quad x \leq 3 \quad$ et $\quad x \geq 1$

Représentation graphique :

On en déduit donc que l'ensemble solution est : $\mathbf{S} = [\mathbf{1}\,;\,\mathbf{3}]$

<u>Exercice 14.5</u>

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 8 > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 4 \leq 2x + 1 \\ -2x + 5 \geq 5x - 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2} < \frac{4x-3}{3} \\ \frac{5x+4}{5} \geq \frac{6x+5}{10} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 16(2 - x) - 4x > 3 \\ -3(6x - 1) - 2x < x \end{cases}$

6) $\begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x \\ 5x + 4 \geq 12 - (x - 3) \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x > 4 \\ x > 7 \\ x < 15 \end{cases}$

<u>Exercice 14.6</u>

La somme de trois entiers consécutifs est plus grande que 367, mais plus petite que 372. Quels sont ces trois entiers?

Thème 15 : Statistique

15.1Présentation :

Au cours d'une étude statistique, on étudie, sur une **population**, un **caractère** qui peut prendre plusieurs valeurs.

Vocabulaire :

Population : C'est l'ensemble étudié.
Individu : C'est un élément de la population.
Effectif total : C'est le nombre total d'individus de la population étudiée.
L'effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois où cette valeur apparaît.
Caractère : C'est la propriété étudiée.
On distingue *les caractères qualitatifs* et les *caractères quantitatifs*.
Un *caractère est dit quantitatif,* quand les valeurs prises sont des nombres. Un *caractère est dit qualitatif lorsqu'il n'est pas quantitatif.*

15.2 Les séries statistiques

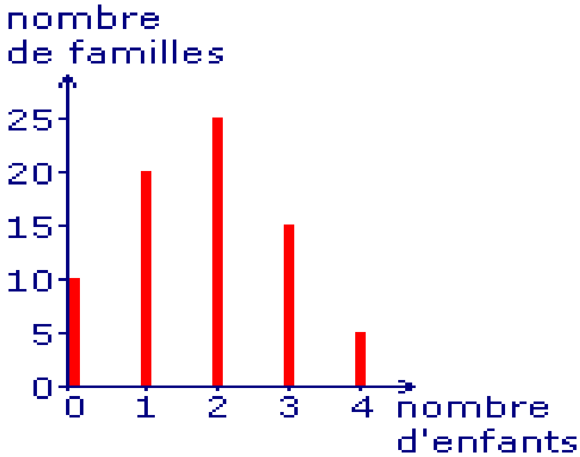
Le diagramme en bâtons

On étudie ici le nombre d'enfants par famille dans un quartier de Libreville.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4
Nombre de familles	10	20	25	15	5

1) La population étudiée est le nombre de famille.
2) Le caractère étudié c'est le nombre d'enfants, ce caractère prends des valeurs numériques, il est donc de nature quantitatif.
3) On dénombre 10 familles n'ayant aucun enfant.
Construction du diagramme en bâtons : L'effectif est proportionnel à la hauteur

- sur l'axe horizontal on place dans l'ordre croissant les valeurs du caractère étudié (le nombre d'enfants par famille) ;
- sur l'axe vertical, on place dans l'ordre croissant les effectifs (on prend 1 cm pour 5 familles).



L'effectif le plus élevé est 25 , le caractère 2 associé à cette effectif est appelé le mode de la série.

On retiendra donc que le mode d'une série statisque est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

Moyenne pondérée

comment déterminer la moyenne m de cette série statistique.

$$m = \frac{\text{Somme des produits de chaque valeur du caractère par l'effectif correspondant}}{\text{l'effectif total de la série statistique .}}$$

$m = \frac{0\times10+1\times20+2\times25+3\times15+4\times5}{10+20+25+15+5}$, d'où $m = \frac{135}{75}$ on a $\mathbf{m = 1,8}$

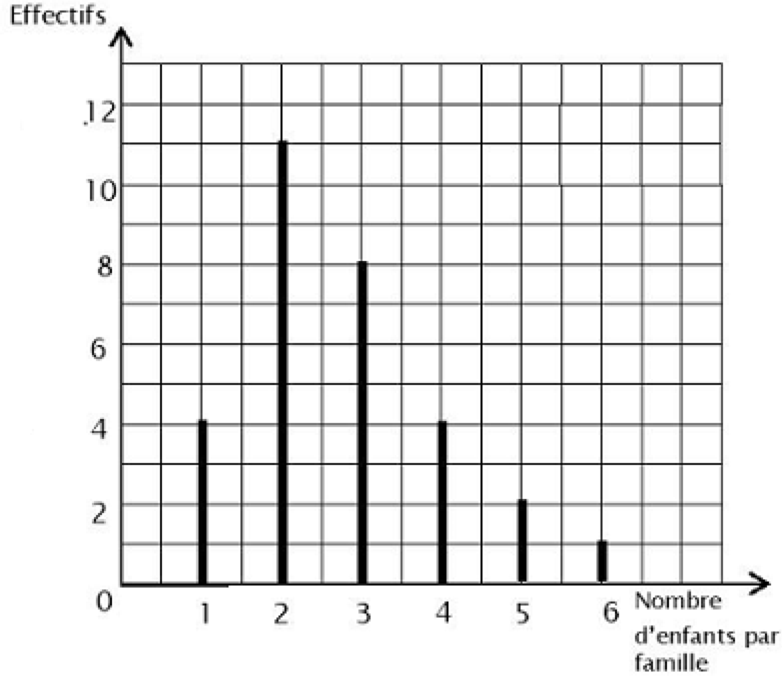
Le nombre moyen d'enfants par famille est de 1,8.

Exemple

On étudie ici un autre tableau statistique donnant le nombre d'enfants par famille dans un autre quartier de Libreville.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6
Nombre de familles	4	11	8	4	2	1

Diagramme en bâton de la série statistique



Exemple :
On interroge 25 élèves d'une classe au sujet de leur sport préféré.
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

sport	football	Basket-ball	handball	tennis	danse	total
effectif	8	6	2	3	6	25

La population étudiée : 25 élèves d'une classe.
Le caractère étudié : le sport préféré.
Nature du caractère : Ce caractère ne prends pas des valeurs numériques ont dit qu'il est de nature qualitatif.

Regroupement en classes et histogramme

On construit un histogramme quand les valeurs de la variable sont regroupées en classes. Une classe est l'intervalle dans lequel sont prises les valeurs pour le caractère étudié. A chaque classe de la variable, correspond la surface d'un rectangle qui a pour base l'amplitude de cette classe.

Lorsque les classes ont la même amplitude, les rectangles ont la même largeur qui est donné par l'amplitude de chaque classe. La hauteur du rectangle est alors proportionnelle à l'effectif de la classe.

L'amplitude est la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de la classe.

Le centre d'une classe est la demi-somme des valeurs de la borne supérieure et de la borne inférieure de la classe.

Exemple d'une classe : [a;b[

Amplitude : b-a

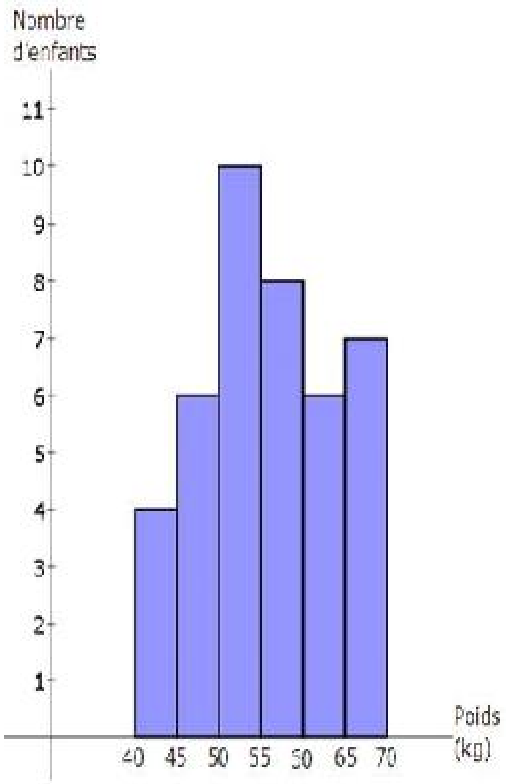
Centre de la classe : $\frac{a+b}{2}$

La série suivante représente le nombre d'enfants en fonction de leurs poids en kilogramme (kg).

Poids en kg (axe horizontal)	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Nombre d'enfants (axe vertical)	4	6	10	8	6	7

Construction de l'histogramme de la série statistique.

Les différentes classes ont la même amplitude (b-a=5), on construit un rectangle dont la hauteur correspond à l'effectif de la classe et dont la largeur correspond à la classe .



Moyenne de la série statistique :

Construction du tableau complété des centres de chaque classe

Poids en kg	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
centre	$\frac{40+45}{2}$ 42,5	$\frac{45+50}{2}$ 47,5	$\frac{50+55}{2}$ 52,5	$\frac{55+60}{2}$ 57,5	$\frac{60+65}{2}$ 62,5	$\frac{65+70}{2}$ 67,5
Nombre d'enfants	4	6	10	8	6	7

Déterminons la moyenne m de ce regroupement en classe.

$$m = \frac{\text{Somme des produits de la valeur chaque centre par l'effectif correspondant}}{\text{l'effectif total de la série statistique .}}$$

$m = \frac{42{,}5\times4+47{,}5\times6+52{,}5\times10+57{,}5\times8+62{,}5\times6+67{,}5\times7}{4+6+10+8+6+7}$, d'où $m = \frac{1825}{41}$

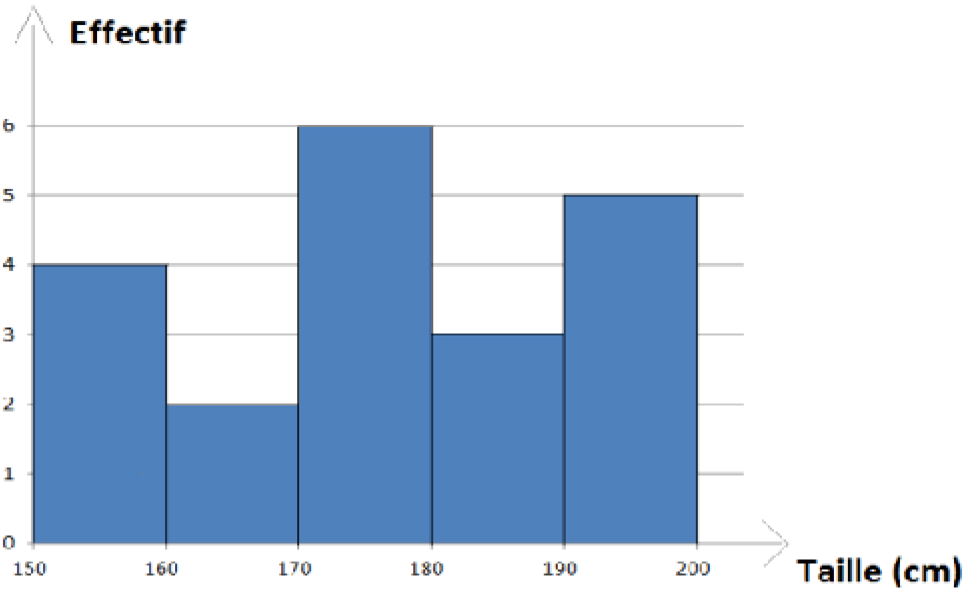
on a $\mathbf{m = 44{,}51}$

Le poids moyen par enfant est de 44,51 kg.

Exemple : La série suivante représente la taille en centimètre (cm) des hommes d'un quartier.

Taille (cm)	[150;160[	[160;170[	[170;180[	[180;190[	[190;200[
Effectif	4	2	6	3	5

Construction de l'histogramme de la série statistique.
Les différentes classes ont la même amplitude.



Exercice 15.1 On considère le regroupement en classe suivant, dont il faut construire l'histogramme :

Classe	[10;15[	[15;20[	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[
effectif	5	10	15	20	25	30

Calculer la moyenne de cette série statistique.

Diagramme circulaire

Définition

Un diagramme circulaire est un disque partagé en secteurs .Les effectifs sont proportionnels aux angles et l'effectif total correspond à l'angle plein de 360°.

$$mes.angle \rightarrow effectif\ corresp$$

$$360 \quad \rightarrow effectif\ total$$

On a $mesure\ angle \times effectif\ total = effect.corresp\ \times 360$

D'où $$mesure\ de\ l'angle = \frac{effectif\ correspondant}{effectif\ total} \times 360$$

Exemple : L'enquête sur les loisirs 30 élèves d'une classe de troisième a donné les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

Loisir	TV	Sport	Musique	Lecture	Total
Effectif	12	9	6	3	30
Angle du secteur en degré	$\frac{12}{30} \times 360$ 144	$\frac{9}{30} \times 360$ 108	$\frac{6}{30} \times 360$ 72	$\frac{3}{30} \times 360$ 36	360

Diagramme circulaire

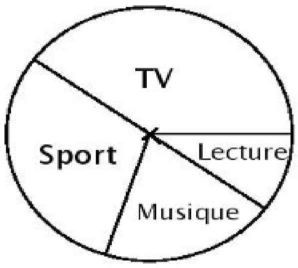


Diagramme semi-circulaire

Définition

Un diagramme semi-circulaire est un demi-disque partagé en secteurs .Les effectifs sont proportionnels aux angles et l'effectif total correspond à l'angle semi-plein de 180°.

$$mes.angle \rightarrow effectif\ corresp$$

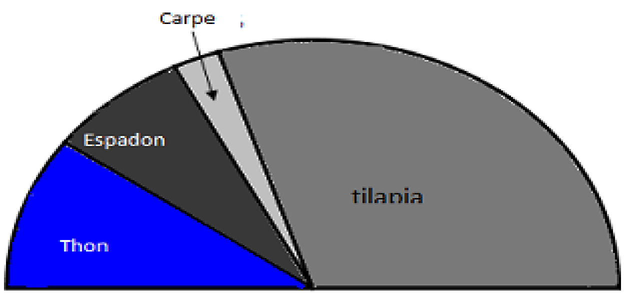
$$180 \quad \rightarrow effectif\ total$$

On a $mesure\ angle \times effectif\ total = effect.corresp \times 180$

D'où $mesure\ de\ l'angle = \frac{effectif\ correspondant}{effectif\ total} \times 180$

Exemple : On considère le tableau statistique suivant dont on doit construire le diagramme semi-circulaire.

Espèce	Thon	Espadon	carpe	tilapia	total
Prise en kg	144	108	36	432	720
Secteur angulaire en degrés	$\frac{144}{720} \times 180$ 36	$\frac{108}{720} \times 180$ 27	$\frac{36}{720} \times 180$ 9	$\frac{432}{720} \times 180$ 108	180



Etendue et médiane :

On considère la série statique suivante : 20,09 ; 20,12 ; 20,19 ; 20,25 ; 20,38 ; 20,48 ; 20,69

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

L'étendue, $\boldsymbol{E_t}$ = **20,69 – 20,09 = 0,6**

La médiane : Dans une série statisque la médiane est une valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif.

Pour déterminer la médiane, on ordonne les données de la série statistiques dans l'ordre croissant.

Si l'effectif total, N de la série est impair (N= 2n + 1), la médiane est la valeur du terme de rang (n + 1) dans cette série ordonnée.

Si l'effectif total N de la série est pair (N= 2n), la médiane est la moyenne des valeurs des termes de rang n et (n + 1) dans cette série ordonnée.

Médiane de la série : 20,09 ; 20,12 ; 20,19 ; 20,25 ; 20,38 ; 20,48 ; 20,69

L'effectif total est de 7 et $7 = 2(\mathbf{3}) + 1$ la médiane, M_e sera donc le (3+1)° terme c'est-à-dire la 4^e valeur de la série rangée dans l'ordre croissant, soit $\boldsymbol{M_e} =$ **20,25.**

Médiane de la série : 7;9;9;10;11;12;13;13;13;14;14;15

L'effectif total est de 12 et $12 = 2(\mathbf{6})$ la médiane sera donc la moyenne du 6° et (6+1)° c'est-à-dire la moyenne du 6^e terme ; 12 et du 7^e terme ; 13 de la série rangée dans l'ordre croissant $\boldsymbol{M_e} = \frac{\mathbf{12+13}}{\mathbf{2}} = \mathbf{12,5}$ **.**

Exercice 15.2

1) Déterminer l'étendue et la médiane des séries statistiques suivantes :

a) On donne les notes d'un groupe de 9 élèves lors d'un devoir de mathématiques.

5-6-11-13-6-14-12-8-13

b) On donne les notes d'un groupe de 6 élèves lors d'un devoir d'anglais : 6-13-18-16-14-5

3) Déterminer la moyenne et médiane des séries statistiques suivantes :

a) 16-17-10-13-20-18-13-14-18

b) 23-24-26-26-28-29-33-31-30-34

Calcul de fréquences

La fréquence d'une valeur en statistique est le quotient de l'effectif de cette valeur sur l'effectif total

On écrit : $(\text{fréquence de la valeur}) = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

On peut ramener la fréquence en pourcentage, c'est-à-dire ramener les données à un effectif fictif de 100 individus .La fréquence d'une valeur peut aussi s'exprimer en pourcentage noté : % .

$$(\text{fréquence de la valeur en } \%) = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}} \times 100$$

Espèce	Thon	Espadon	carpe	tilapia	total
Prise en kg	144	108	36	432	720
Fréquence en %	$\frac{144}{720} \times 100$ 20	$\frac{108}{720} \times 100$ 15	$\frac{36}{720} \times 100$ 5	$\frac{432}{720} \times 100$ 60	100

<u>Les effectifs cumulés croissants (ECC)</u>

<u>Exemple :</u> Effectifs cumulés croissants d'une série statistique

effectif	13	7	4	6
Effectifs cumulés croissants	↓ 13	(13+7) 20	(20+4) 24	(24+6) 30

Exercice 15.3

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».

Pour cela, on a pesé le cartable de 48 élèves du collège.

Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous :

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1) Quelle est la population étudiée ? Donner le caractère étudié et sa nature.

2) Calculer l'étendue de cette série statistique.

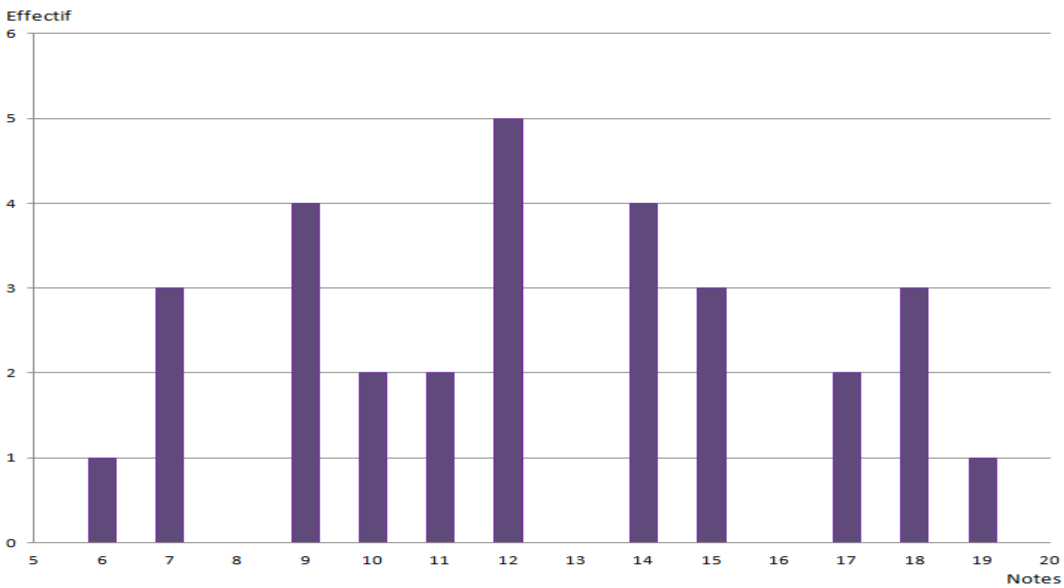
3) Déterminer la médiane de cette série statistique.

4) Déterminer, la moyenne de cette série statisque.

5) construire le diagramme en bâtons de cette série statistique

Exercice 15.4

Le diagramme en bâtons suivant représente les notes obtenues par une classe de troisième au dernier contrôle de mathématiques :



Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif																

2) Quelle est la nature du caractère étudié ?
3) Quelle est l'étendue de la série ?
4) Déterminer la note médiane.
5) Calculer la note moyenne.
6) Quelle est la fréquence en pourcentage des élèves n'ayant pas obtenu la moyenne ?

Exercice 15.5

La série suivante représente les âges de 150 employés d'une entreprise.

Ages	$20 \leq age < 24$	$24 \leq age < 28$	$28 \leq age < 32$	$32 \leq age < 36$	$36 \leq age < 40$	$40 \leq age < 44$
Centre des classes						
effectifs	12	30	45	36	21	6
Fréquence en %						

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus .

2) Quelle est la classe modale de cette série statistique ?

3) Calculer la moyenne de cette série statistique. Que représente cette valeur ?

4) Quel est le pourcentage d'employés qui ont strictement moins de 36 ans ?

5) Construire l'histogramme de cette série statistique.

Exercice 15.6

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Sport favori	Basket-ball	Tennis	Football	Judo	Total
Effectif	6	9	6	9	30
Mesure (en degré)					360

2) Donner le caractère étudié et préciser sa nature.

3) Construire le diagramme circulaire des effectifs.

Exercice 15.7

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Elève	Céline	Patrick	Thomas	Yann	Total
Fréquences (%)	4	8	0	88	**100**
Angle (Degrés)					180

2) Construire le diagramme semi-circulaire des fréquences en pourcentage de cette série statistique.

Thème 16 : Equations dans IR×IR (2) –Applications affines

Les systèmes d'équations à deux inconnues

Exemple : Résolution d'un système d'équations à deux inconnues par la méthode de substitution.

Considérons maintenant deux équations du 1er degré à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + 5y = 48 \\ 7x + y = 132 \end{cases}$$

Méthode de substitution : On emploie une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre. Puis on substitue le résultat dans l'autre équation.

$$\begin{cases} x + 5y = 48 \quad (1) \\ 7x + y = 132 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) on a $x + 5y = 48$ on exprime x en fonction de y .

$x + 5y = 48$ on a $x = 48 - 5y$

Substituons cette expression de x dans (2) : $7x + y = 132$

$$7(48 - 5y) + y = 132$$

$$336 - 35y + y = 132$$

$$336 - 34y = 132$$

$$-34y = 132 - 336$$

$$-34y = -204$$

$$y = \frac{-204}{-34}$$

$$y = 6$$

On a $x = 48 - 5y$ et $y = 6$

Remplaçons maintenant y par 6 dans $x = 48 - 5y$ on trouve

$$x = 48 - 5(6)$$

$$x = 18$$

La solution du système est donc le couple (18 ; 6) .

Exercice 16.1 Résoudre par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12 \\ -9x + 9y = 54 \end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+3y=-4\\6x+5y=-7\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x+3y=5\\3x-4y=-1\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x+y=5\\6x+2y=5\end{cases}$ 7) $\begin{cases}2|x|-y=1\\x+y=5\end{cases}$

Exercice 16.2 Résoudre par la méthode de combinaison les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=2+\sqrt{2}\\x+\sqrt{2}y=-2+\sqrt{2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{5}x-\sqrt{3}y=2\\\sqrt{3}x+\sqrt{5}y=2\sqrt{15}\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{2}x+y=4\\2x+\sqrt{2}y=2\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{x}{2+\sqrt{2}}+\frac{y}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}\\\frac{x}{\sqrt{2}-1}+\frac{y}{\sqrt{2}+1}=6\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{2}-1}+\frac{y}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}\\(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y=2\end{cases}$

Les applications linéaires ou fonctions linéaires.

Les applications linéaires

Soit a un nombre réel non nul. La fonction f qui a tout nombre x associe le nombre $f(x)$ tel que $f(x)=a\times x$ est appelée fonction linéaire ou application linéaire, a est appelé le coefficient de l'application linéaire.

Déterminons une application linéaire :

Vocabulaire :

On pose $f(x)=y$, cela équivaut à dire que y est l'image de x ou encore que x est l'antécédent de y .

Exemple : Pour une application linéaire 3 est l'image de 1. Déterminer cette application linéaire.

On écrit $f(1)=3$ par définition de l'application linéaire on a : $f(x)=ax$

$f(1)=a\times 1=3$ d' où $a\times 1=3$ et $a=3$ on obtient donc la fonction linéaire

$\boldsymbol{f(x)=3x}$ **.**

Exemple : Pour une application linéaire 1 est l'antécédent de $\frac{1}{3}$. Déterminer cette application linéaire.

On écrit $f(1)=\frac{1}{3}$, par définition de l'application linéaire on a : $f(x)=ax$

$f(1)=a\times 1=\frac{1}{3}$ **,** d'où $a\times 1=\frac{1}{3}$ et $a=\frac{1}{3}$ on obtient donc la fonction linéaire

$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x}$ **.**

Déterminons l'image de 6 par la fonction linéaire $f(x)=-2x$: On remplace x par 6 on a

$f(6)=-2\times 6$ d'où $\boldsymbol{f(6)=-12}$, donc -12 est l'image de 6 par cette fonction linéaire.

Déterminons l’antécédent de 1,5 par la fonction linéaire $f(x) = 3x$:

On cherche x tel que $f(x) = 1{,}5$; on a $3x = 1{,}5$ d’où $x = \frac{1{,}5}{3}$; $x = 0{,}5$

L’ antécédent de $\mathbf{1,5}$ par f est $\mathbf{0,5}$.

Exercice 16.3

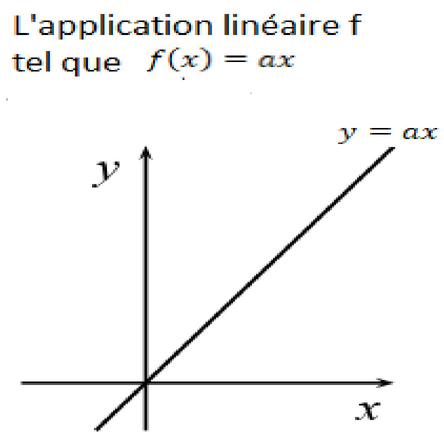
1) Déterminer l’application linéaire f tel que -5 à pour image 3.

2) Déterminer l’application linéaire f tel que 5,8 est l’antécédent de 3,4 .

3) Déterminer l’image de 6 par la fonction linéaire $f(x) = -\frac{1}{2}x$.

4) Déterminer l’antécédent de 6,3 par la fonction linéaire $f(x) = \frac{3}{2}x$

La représentation graphique d’une fonction linéaire est une droite passant par l’origine du repère. C’est la droite d’équation $y = ax$.



Repérage dans le plan :

Un repère orthonormé (O,I,J) est formé par deux droites perpendiculaires (OI) et (OJ) , les droites sont appelées des axes , elles sont graduées avec la même unité, on a OI=OJ=1 .

Le point M de coordonnées x et y se note $M(x; y)$ ou $M\binom{x}{y}$.

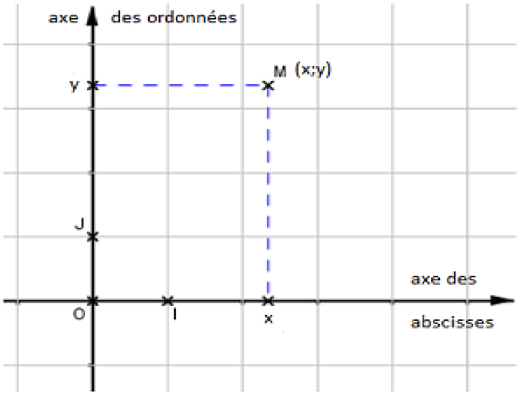
Le premier point est l’abscisse x

Le deuxième point est l’ordonnée y

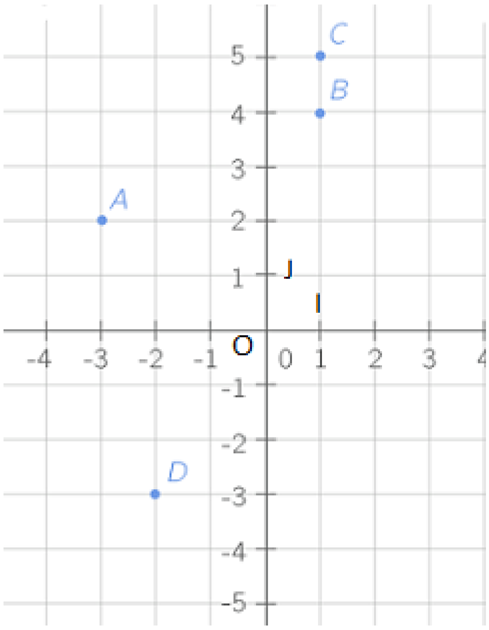
Un repère orthonormé (O,I,J) on a $O(0; 0)$ $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$. Le point O est l’origine du repère .

Exemple : $A(2; 3)$ ou $A\binom{2}{3}$ on a $x = 2$ et $y = 3$

Repérage du point $M(x; y)$



Exemple : Représentation graphique des points $B(1; 4)$, $C(1; 5)$, $A(-3; 2)$ et $D(-2; -3)$ dans un repère orthonormé (O ;I ;J).



Exercice 16.4

Tracer un repère orthonormé (O ;I ;J) ,puis les points $A(-2; -4)$, $B(2; -3)$, $C(0; 3)$ et $D(-4; 0)$

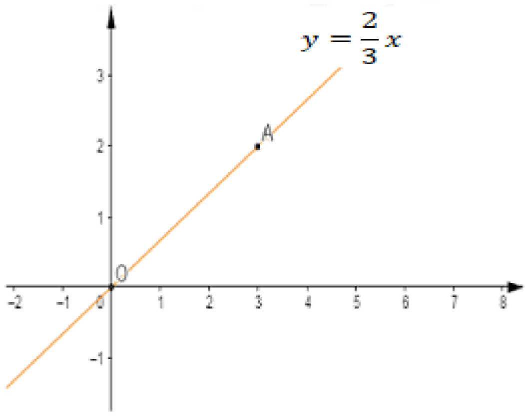
Exemple : Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{3}x$ dans un repère orthogonal.

On doit tracer la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$

Pour tracer cette droite on donne à x des valeurs '' subtils'' choisies par nous même

x	$y = \frac{2}{3}x$	$(x; y)$
$x = 0$	$y = \frac{2}{3}(0)\ ;\ y = 0$	$(0; 0)$
$x = 3$	$y = \frac{2}{3}(3)\ ;\ y = \frac{6}{3}\ ; y = 2$	$(3; 2)$

La droite passe par les points O $(0; 0)$ et $A(3; 2)$



Exercice 16.5

Dans un repère orthonormé tracer les fonctions linéaires f définies par :

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x$

2) $f(x) = 2x$

Exercice 16.6

Un capital de x francs est placé pendant une année au taux de 5 % . Enfin d'année , l'intérêt s'ajoute au capital de départ .

1) Exprimer le nouveau capital y en fonction x .

2) Définir l'application ainsi obtenue .

Exercice 16.7

Un magasin annonce une baisse de 15 % sur les friandises .

1) Calculer le montant de la réduction sur une friandise marqué x francs.

2) Exprimer le nouveau prix y en fonction x .

2) Représenter graphiquement l'application ainsi obtenue.

On prendra en abscisses et ordonnées 1 cm pour 200 unités.

3) Calculer le nouveau prix quand l'ancien est de 900 f.

4) Calculer l'ancien prix quand le nouveau prix est de 500 f.

Les applications affines.

La relation qui à tout nombre réel x associe le nombre $f(x)$ tel que

$f(x) = a \times x + b$ ou $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine ou application affine, a est appelé le coefficient de l'application affine.

Rôle du coefficient a

Dans une fonction affine de la forme $ax + b$

Si a est positif la fonction affine f est croissante, la droite d'équation $y = ax + b$ ''monte''.

Si a est négatif la fonction affine f est décroissante, la droite d'équation $y = ax + b$ ''descend''.

Exemple :

La fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 2$ est croissante car le coefficient $a = 3$ est positif.

La fonction affine f définie par $f(x) = -x - 2$ est décroissante car le coefficient $a = -1$ est négatif.

Représentation graphique d'une fonction affine :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = ax + b$,

Cette droite coupe l'axe des ordonnées en b et a est le coefficient directeur de la droite.

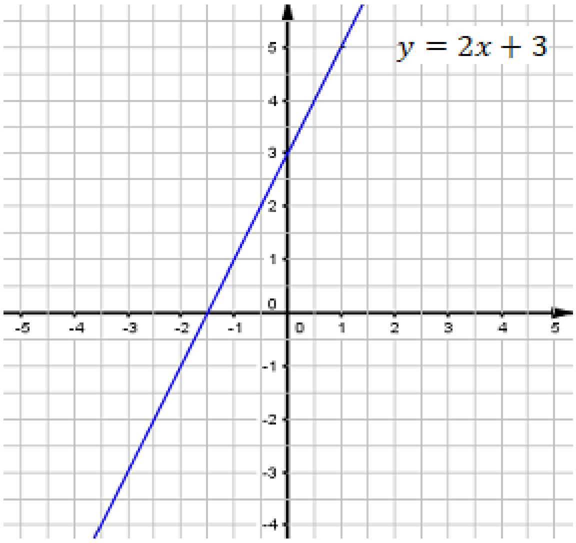
Exemple :

La fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 3$.

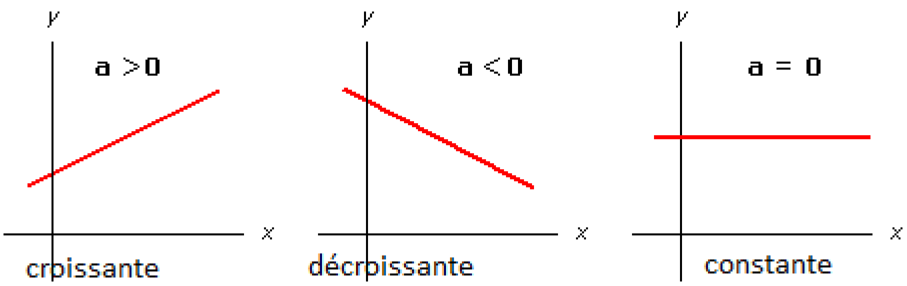
La représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 3$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$.

x	$y = 2x + 3$	$(x; y)$
$x = 0$	$y = 2(0) + 3$; $y = 3$	$(0; 3)$
$x = 1$	$y = 2(1) + 3$; $y = 5$;	$(1; 5)$

La droite passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(1; 5)$



Différents graphes de la fonction affine f(x)=ax+b



Exercice 16.8

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 2$

1) Donner le sens de variation de la fonction affine f

2) La droite dont-elle est la représentation graphique, va-t-elle monter ou descendre ?

3) Tracer cette droite dans un repère orthonormé.

Exercice 16.8

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

1) Donner le sens de variation de la fonction affine f

2) La droite dont-elle est la représentation graphique, va-t-elle monter ou descendre ?

3) Tracer cette droite dans un repère orthonormé.

Détermination d’une fonction affine.

Exemple : Déterminer la fonction affine g tel que $g(1) = 3$ et $g(3) = 1$.

Par définition $g(x) = ax + b$

On a $g(1) = 3$ donc $a(1) + b = 3$ et $g(3) = 1$ donc $a(3) + b = 1$

$a + b = 3$ et $3a + b = 1$

On a le système suivant $\begin{cases} a + b = 3 & (1) \\ 3a + b = 1 & (2) \end{cases}$

Déterminons a et b par la méthode de substitution :

De (2) $3a + b = 1$ on a $b = 1 - 3a$; de $a + b = 3$, on remplace b par $1 - 3a$

$$a + (1 - 3a) = 3$$

$$a + 1 - 3a = 3$$

$$a - 3a = 3 - 1$$

$$-2a = 2$$

$$a = \frac{2}{-2}$$

$$a = -1$$

On a $b = 1 - 3a$ et $a = -1$ on remplace a par -1 dans l’expression de b

On a $b = 1 - 3(-1)$; $b = 1 + 3$; $b = 4$

Ainsi $a = -1$ et $b = 4$, par définition $g(x) = ax + b$ on remplace $a\ par\ -1$ et $b\ par\ 4$, nous obtenons $\boldsymbol{g(x) = -x + 4}$ **.**

Exercice 16.9

1) Déterminer la fonction affine g tel $g(0) = 1$ et $g(2) = -3$.

2) Déterminer la fonction affine f tel $f(1) = 2$ et $f(-3) = -2$.

Exercice 16.10 : Déterminer l’expression de la fonction affine du graphe ci-dessous .

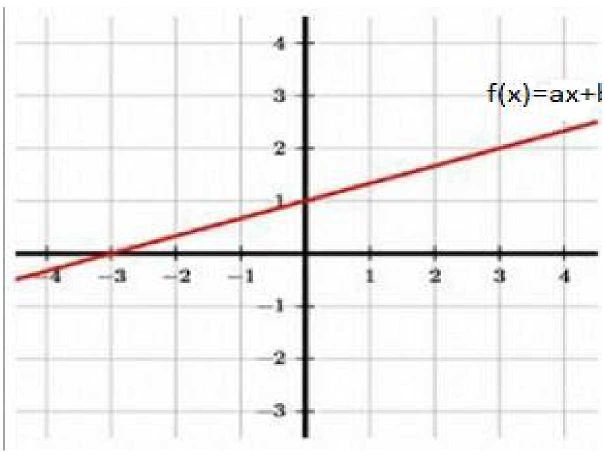


Image et antécédent.

Exemple : Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 2$

Calculons l'image de 0 : On doit déterminer $f(0)$.

$f(0) = -3(0) + 2 = 0 + 2 = 2$, donc $\boldsymbol{f(0) = 2}$ **, 2 est l'image de 0 par la fonction f .**

Déterminons l'antécédent de 5 par la fonction f ci-dessus .

On pose $(x) = 5$, on doit donc déterminer x en posant $-3x + 2 = 5$

$$-3x + 2 = 5$$

$$-3x = 5 - 2$$

$-3x = 3$ on a $x = \frac{3}{-3}$; $x = -1$

Ainsi $\boldsymbol{f(-1) = 5}$ **, l'antécédent de 5 par la fonction f est $\boldsymbol{-1}$.**

Exercice 16.11 :

1) Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -x + 3$, calculer l'image de -2 .

2) Soit la fonction affine g définie par $g(x) = 3x - 1$, déterminer l'antécédent de 4 .

3) Dans un même repère orthonormé (O, I, J)

a) Tracer les représentations graphiques des fonctions affines f et g .

b) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

c) Pouvait-on déduire ce résultat par lecture graphique ?

Exercice 16.12

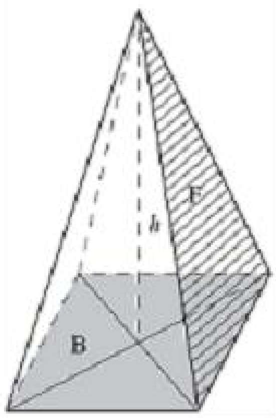
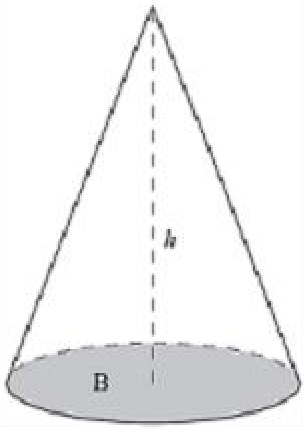
La fonction f est définie par : $f : x \mapsto -5x + 2$.

a. Calculer f(2) ;f(- 3) ; f(0).
b. Calculer l'image de 4.
c. Calculer le nombre x tel que :

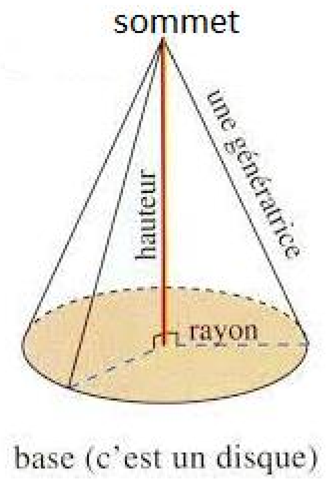
$$f(x) = \frac{5}{3}.$$

Thème 17 : Pyramides et cônes (1)

Présentation

	pyramide régulière	Cône de révolution
		
Hauteur (h)	Le centre de la base est le pied de la hauteur issue du sommet.	
Base (B)	Polygone régulier	Disque
Faces (F)	Triangles isocèles	

Cône de révolution



Propriétés :

La hauteur du cône est perpendiculaire au diamètre du disque de base.

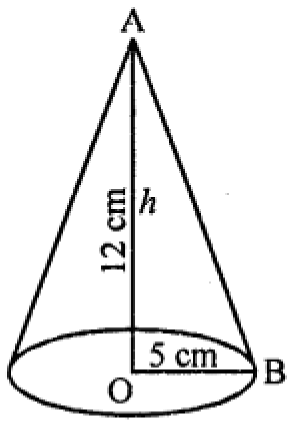
Volume du cône = $\frac{1}{3} \times surface\ de\ base\ \times hauteur\ du$ cône

Volume V d'un cône de révolution de rayon R : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

Surface latérale du cône = $\pi \times rayon\ \times génératrice$

Surface latérale L d'un cône rayon R et de génératrice g : $L = \pi \times R \times g$

Exemple :



1) Déterminer la longueur de la génératrice AB du cône.

3) Calculer le volume du cône.

4) Calculer la surface latérale du cône.

***

1) La hauteur [OA] du cône est perpendiculaire au rayon [OB] du disque de base, ainsi le triangle AOB est rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore :

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 12^2 + \pi$

$AB^2 = 144 + 25$

$AB^2 = 169$, $AB = \sqrt{169}$; $\boldsymbol{AB}$ =**13 cm**

2) Volume V du cône.

OA , hauteur du cône et OB , rayon du cône .

$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$

$V = \frac{1}{3} \times \pi OB^2 \times OA$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12$

$V = \frac{1 \times \pi \times 25 \times 12}{3}$

$V = \pi \times 25 \times 4$;

$\boldsymbol{V = 100\pi \ cm^3}$ (valeur exacte du volume du cône)

Pour $\pi = 3{,}14$ on détermine la valeur approchée du volume V du cône

$V = 100 \times 3{,}14$ on a $\boldsymbol{V = 314 \ cm^3}$

4) Surface latérale L du cône.

L = $\pi \times rayon \times génératrice$

Rayon=OB et génératrice =AB

$L = \pi \times OB \times AB$

$L = \pi \times 5 \times 13$

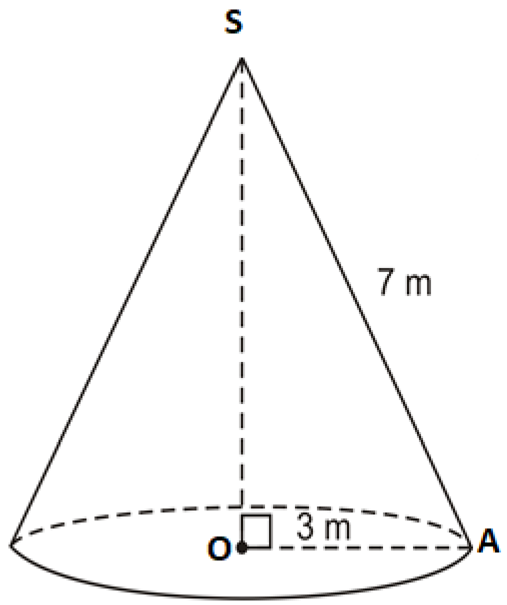
$L = \pi \times 65$;

$\boldsymbol{L = 65\pi \ cm^2}$ (valeur exacte de la surface latérale du cône)

Avec $\pi = 3{,}14$ on détermine la valeur approchée $L = 65 \times 3{,}14$

on a $\boldsymbol{L = 204{,}1 \ cm^2}$ (valeur approchée de la surface latérale du cône)

Exercice 17.1

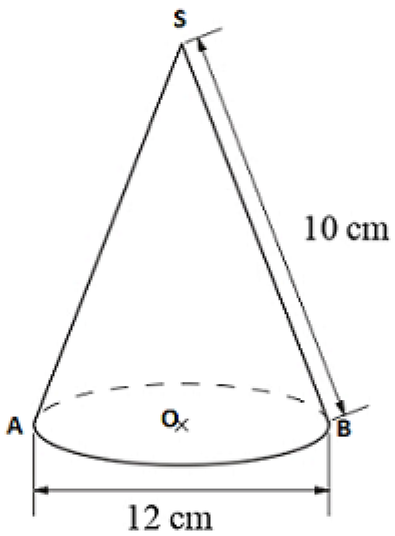


1) Déterminer la hauteur du cône de révolution ci-dessus.

2) Déterminer la surface latérale du cône (valeur exacte et approchée).

3) Déterminer le volume v du cône (valeur exacte et approchée).

Exercice 17.2



1) Calculer le rayon du disque de base du cône ci-dessus.

2) Calculer la hauteur du cône.

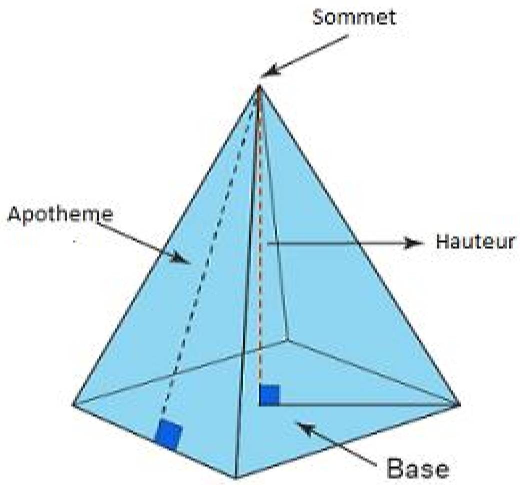
3) Calculer le volume du cône.

4) Calculer la surface latérale du cône .

Exercice 17.3

Un cône de révolution à une hauteur de 27 cm et un volume de 452,16 cm^3 . Calculer le rayon de son disque de base.

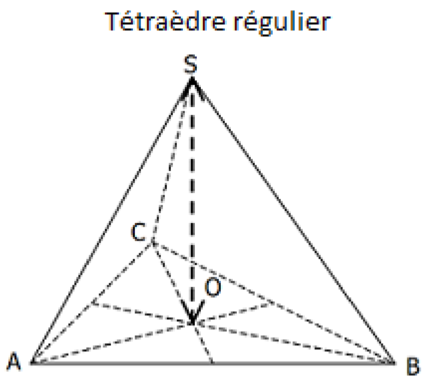
Pyramide régulière



Une pyramide est dite régulière si elle a pour base est un polygone régulier (carré ,triangle équilatéral, hexagone régulier…) et la hauteur passe par le centre de la base.

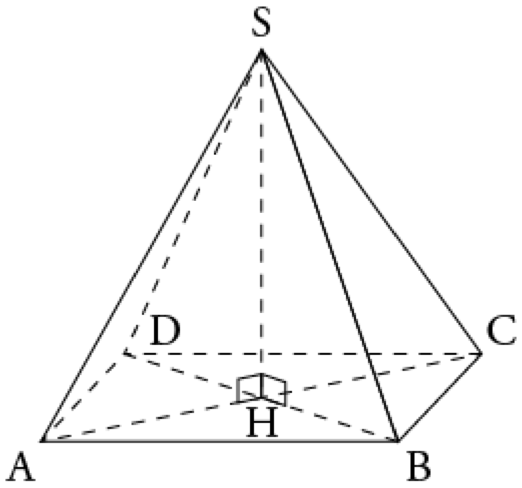
Dans une pyramide régulière les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Si la base est un triangle équilatéral, la pyramide est un tétraèdre régulier, les différentes faces latérales et la base sont identiques.



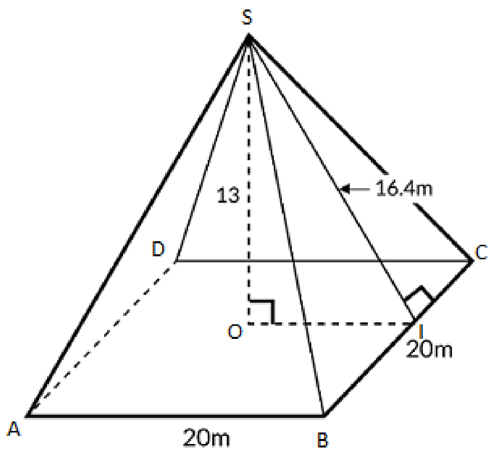
$$Volume\ de\ la\ pyramide = \frac{1}{3} \times surface\ de\ base\ \times hauteur$$

Exemple : Volume V de la pyramide de sommet S à base carré ABCD



$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SH$

Exemple : SABCD est une pyramide régulière de sommet S de base le carré ABCD.



1) Calculer le volume V de la pyramide SABCD.

2) Calculer la surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SBC, en déduire la surface latérale L de la pyramide.

3) Calculer la surface totale T de la pyramide.

***

1) Volume v de la pyramide

Pyramide à base carré ABCD , $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SO$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20^2 \times 13$

$V_{SABCD} = \frac{1\times400\times13}{3} = \frac{5200}{3}$

$\boldsymbol{V_{SABCD} = \frac{5200}{3}\ m^3}$ (valeur exacte du volume de la pyramide)

2) Surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SBC

SBC est un triangle de base BC et de hauteur SI on a donc :

$\mathcal{B} = \frac{SI \times BC}{2} = \frac{16{,}4 \times 20}{2} = 16{,}4 \times 10 = 164$

La surface du triangle SBC est , $\boldsymbol{\mathcal{B} = 164\ m^2}$

La pyramide SABCD est une pyramide régulière donc les 4 faces latérales, SAB, SBC, SDC et SAD sont identiques. L'aire latérale de la pyramide est la somme des aires des faces latérales, d'où :

$L = 4 \times 164 = 656\,;$ $\boldsymbol{L = 656\ m^2}$

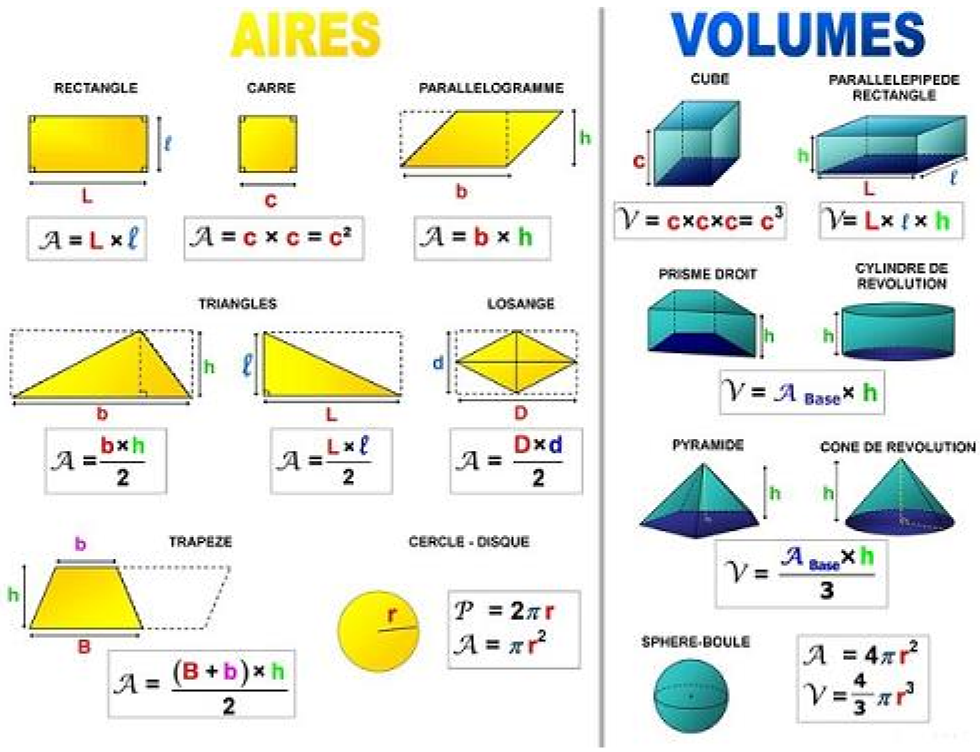
3) Surface totale T de la pyramide

La surface totale de la pyramide est la somme de la surface latérale et de la surface de base de la pyramide .

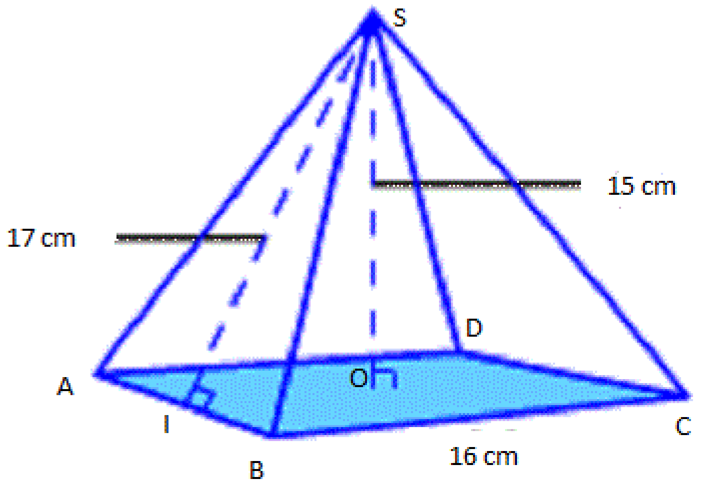
$T = L + AB^2$

$T = 656 + 20^2$; $T = 656 + 400\,;$ $T = 1056$ on a $\boldsymbol{L = 1056\ m^2}$

<u>Formulaire :</u>



Exercice 17.4



1) Calculer le volume V de la pyramide SABCD.

2) Calculer la surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SAB, en déduire la surface latérale L de la pyramide.

3) Calculer la surface totale T de la pyramide.

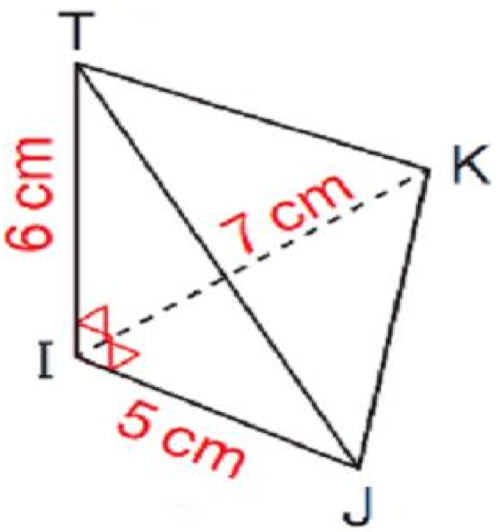
Exercice 17.5

1) Donner la nature de la base du tétraèdre ci-dessous.

2) Calculer la surface $\mathcal{A}$ du triangle IJK.

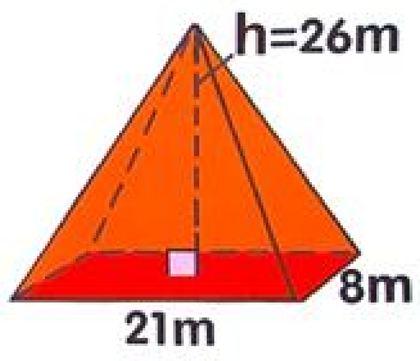
3) Nommer la hauteur du tétraèdre TIJK.

4) Calculer le volume V de la pyramide ci-dessous.

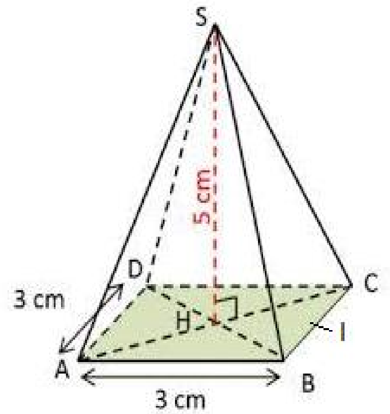


Exercice 17.6

Calculer le volume de la pyramide à base rectangulaire ci-dessous



Exercice 17.7



Sur la pyramide à base carré ci-dessus, I est le milieu de [BC].

1) Calculer HI.

2) Calculer SI .

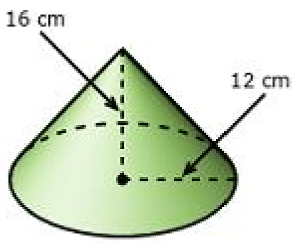
3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

4) Calculer la surface latérale L de la pyramide.

5) Calculer la surface totale T de la pyramide.

Exercice 17.8

cône de révolution



1) Déterminer la mesure de la génératrice

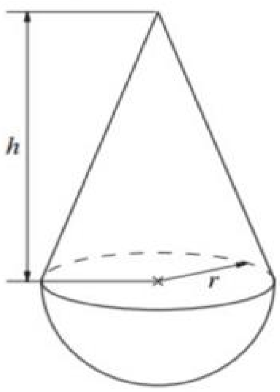
2) Déterminer le volume V du cône

3) Déterminer la surface latérale L cône

4) Déterminer la surface totale T du cône

Exercice 17.9

On donne r=10 cm ; h=12 cm



1) Calculer le volume V’ de la demi-boule.

2) Calculer le volume V’’ du cône.

3) Calculer le volume V du solide constitué du cône et de la demi-boule.

Exercice 17.10

Un cône de révolution est tel que le rayon du disque de base et sa hauteur ont la même longueur , h=r=a. La génératrice du cône mesure 6 cm.

1) Faire une esquisse du cône de révolution.

2) Calculer a.

3) Calculer la surface latérale du cône.

4) Calculer la surface totale du cône.

5) Calculer le volume du cône.

Thème 18 : Les questions à choix multiples (QCM)

Pour chaque QCM ci-dessous , une seule réponse est exacte. Pour chaque question, indiquer le numéro de la bonne réponse.

Aucune justification n'est exigée .

On pourra s'aider de la calculatrice chaque fois qu'on en aura besoin.

QCM 1.

		A	B	C
1	$\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}$ est égal à ….	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	Le nombre décimal 0,246 s'écrit aussi	$2{,}46\times10^{-1}$	$2{,}46\times10^{1}$	$24{,}6\times10^{1}$
3	$6-4(x-2)$ est égal à :	$2x-4$	$14-4x$	$-2-4x$
4	Quelle est l'expression factorisée de $4x^2-12x+9$	$(2x+3)(2x-3)$	$(2x+3)^2$	$(2x-3)^2$
5	Pour $x=-2$, l'expression $5x^2+2x-3$ est égale à	13	-27	17

***

Recherche au brouillon

1) Avec la calculatrice $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, C)

2) Avec la calculatrice $2{,}46\times10^{-1}=0{,}246$, A)

3) $6-4(x-2)=6-4x+8=6+8-4x=14-4x$, B)

4) $4x^2-12x+9=(2x)^2-2(2x)+3^2=(2x-3)^2$, C)

5) $5(-2)^2+2(-2)-3=5(4)-4-3=20-7=13$, A)

Réponses au QCM 1

1)_C ; 2)_A ; 3)_B ; 4_C) ; 5)_A

QCM 2.

		A	B	C
1	$\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{27}{24}$ est égal à ….	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$
2	$3x(5x-4)$ est égal à :	$12x-15x$	$15x^2-12x$	$5x^2$
3	On lance un dé bien équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.La probabilité de l'évènement « on obtient un nombre supérieur ou égal à 5 » est :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$
4	L'image de -1 par la fonction f définie par $f(x)=3x+2$ est :	-1	2	3
5	Le système $\begin{cases}3x+2y=0\\ x+y=0\end{cases}$	Admet une infinité de solutions	N'admet pas de solution	Admet le couple (0 ;0) comme solution

***

Au brouillon :

1) Avec la calculatrice $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{27}{24}=-\frac{1}{6}$, C)

2) $3x(5x-4)=15x^2-12x$, B)

3) L'ensemble des cas possible : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ et L'ensemble des cas favorables : $\{5;6\}$ la probabilité cherché est de : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, B)

4) $f(x)=3x+2$, l'image de -1 , $f(-1)=3(-1)+2=-3+2=-1$, A)

5) $\begin{cases}3x+2y=0\\ x+y=0\end{cases}$ test avec (0 ;0) on a $\begin{cases}3(0)+2(0)=0\\ 0+0=0\end{cases}$, C)

Réponses au QCM 2

1)_C ; 2)_B ; 3)_B ; 4_A) ; 5)_C

QCM 3.

		A	B	C
1	82×10^{-3} est égal à ….	$0{,}820$	$0{,}082$	82000
2	$\sqrt{48}$ est égal à ….	$16\sqrt{3}$	$3\sqrt{4}$	$4\sqrt{3}$
3	$(\frac{4}{3})^2 - \frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$
4	$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + 1$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{7}{6}$	0
5	L'équation $\frac{x}{2} = \frac{6}{5}$ a pour solution	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{5}$

***

Au brouillon :

1) Avec la calculatrice $82 \times 10^{-3} = 0{,}082$, B)

2) Avec la calculatrice $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, C)

3) Avec la calculatrice $(\frac{4}{3})^2 - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$, C)

4) Avec la calculatrice , $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{6}$, A)

5) $\frac{x}{2} = \frac{6}{5}$; $5 \times x = 6 \times 2$; $5 \times x = 12$; $x = \frac{12}{5}$, C)

Réponses au QCM 3

1)_B ; 2)_C ; 3)_C ; 4_A) ; 5)_C

QCM 4.

		A	B	C
1	La forme développée de $(3x+5)^2$ est :	$3x^2+25$	$9x^2+25$	$9x^2+30x+25$
2	$\frac{\sqrt{48}}{2}$ est égal à ….	$\sqrt{24}$	$3{,}464$	$2\sqrt{3}$
3	L'expression qui est égale à 10 si on choisit la valeur $x=4$ est :	$x(x+1)$	$(x+1)(x-2)$	$(x+1)^2$
4	Le nombre solution de l'équation $2x-(8+3x)=2$ est :	10	-10	2
5	Le volume d'un cône de révolution de hauteur 4 cm et de base un disque de rayon 6 cm est :	$75{,}36cm^3$	$150{,}72\ cm^3$	$152{,}16cm^3$

***

Au brouillon :

1) $(3x+5)^2 = 9x^2+30x+25$, C)

2) Avec la calculatrice $\frac{\sqrt{48}}{2} = 2\sqrt{3}$, C)

3) $x(x+1) = 4(4+1) = 4(5) = 20$;

$(x+1)(x-2) = (4+1)(4-2) = 5(2) = 10$, B)

4) $2x-(8+3x) = 2$, $2x-8-3x = 2$; $-x-8 = 2$; $-x = 2+8$; $-x = 10$; $x = -10$, B)

5) Volume du cône , $\frac{3{,}14\times6^2\times4}{3} = 150{,}72$, B)

Réponses au QCM 4

1)_C ; 2)_C ; 3)_B ; 4_B ; 5)_B

QCM 5.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Le nombre $\sqrt{6^2}$ est égal à</td><td>12</td><td>6</td><td>36</td></tr>
<tr><td>2</td><td>L'application linéaire f définie par : $f(x) = -5x$ est</td><td>croissante</td><td>décroissante</td><td>constante</td></tr>
<tr><td>3</td><td>L'amplitude de l'intervalle [2 ; $\sqrt{5}$] est égale à</td><td>$\sqrt{5}-2$</td><td>$2+\sqrt{5}$</td><td>$2-\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>On donne le tableau des effectifs d'une série statistique:
<table>
<tr><td>Notes</td><td>[0;5[</td><td>[5;10[</td><td>[10;15[</td><td>[15;20]</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Effectifs</td><td>17</td><td>25</td><td>9</td><td>9</td><td>60</td></tr>
</table>
La classe modale de cette série statistique est</td><td>[15; 20]</td><td>25</td><td>[5; 10[</td></tr>
</table>

***

Au brouillon :

1) $\sqrt{6^2} = 6$. B)

2) L'application linéaire f définie par : $f(x) = -5x$ est décroissante car -5 est négatif . B)

3) L'amplitude de l'intervalle $[2\ ; \sqrt{5}]$ est $\sqrt{5} - 2$ .A)

4) L'effectif le plus grand de cette série est 25 , donc la classe modale est la classe [5 ; 10[.C)

Réponses au QCM 5

1)_B ; 2)_B ; 3)_A ; 4_C

QCM 6.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
Question 1	Les diviseurs communs à 30 et 42 sont :	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 et 7.	1 ; 2 ; 3 et 6.	1 ; 2 ; 3 ; 5 et 7
Question 2	Un sac contient 10 boules blanches et 5 boules noires. On tire une boule au hasard. La probabilité de tirer une boule noire est égale à :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
Question 3	La représentation graphique des solutions de l'inéquation $7x-5<4x+1$ est :	solutions 0 2	solutions 0 2	solutions −2 0
Question 4	$\frac{(10^{-3})^2\times 10^4}{10^{-5}}$ est égal à	10^{-7}	10^{-15}	10^3

***

Au brouillon :

1) $30 \div 1 = 30$

$30 \div 2 = 15$

$30 \div 3 = 10$

$30 \div 5 = 6$

$30 \div 6 = 5$

Div(30)=$\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

$42 \div 1 = 42$

$42 \div 2 = 21$

$42 \div 3 = 14$

$42 \div 6 = 7$

$42 \div 7 = 6$

Div(42)=$\{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

$Div(30) \cap div(42) = \{1; 2; 3; 6\}$ .B)

2) Nombre total de billes 10+5=15, probabilité de tirer une noire $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. A)

3) $7x - 5 < 4x + 1$; $7x - 4x < 1 + 5$; $3x < 6$; $x < 2$ .A)

4) Avec la calculatrice $\frac{(10^{-3})^2 \times 10^4}{10^{-5}} = 1000 = 10^3$ .C)

Réponses au QCM 6

1)_B ; 2)_A ; 3)_A ; 4_C

QCM 7.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$D = (x-3)(x+5)$ La forme développée de D est :	$x^2 + 8x - 15$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 - 2x - 15$
2	$F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)^2$ La forme factorisée de F est :	$(x-1)(3x+9)$	$(x-1)(x-9)$	$-(x-1)(3x-9)$
3	$E = -2\sqrt{63} + 8\sqrt{7}$ L'expression simplifiée de E est :	$2\sqrt{7}$	$6\sqrt{7}$	$-2\sqrt{7}$
4	Si dans un triangle MNP on l'égalité $MN^2 = MP^2 + PN^2$ alors MNP est :	Rectangle en M	Rectangle en N	Rectangle en P
5	$A = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \div \frac{1}{2}$. La forme irréductible de a est :	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2
6	Le pgcd de 990 et 1890 est :	90	6930	20790

***

Au brouillon :

1) $D = (x-3)(x+5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$. B)

2) $F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)^2$

$F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)(x-1)$

$F = (x-1)[(x+5) - 4(x-1)]$

$F = (x-1)(x+5-4x+4)$

$F = (x-1)(-3x+9) \quad ou \;\; F = -(3x-9)(x-1)$. C)

3) Avec la calculatrice $E = -2\sqrt{63} + 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ .A)

4) Si dans un triangle MNP on l'égalité $MN^2 = MP^2 + PN^2$ alors MNP est rectangle en P . C)

5) Avec la calculatrice $A = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{-11}{2}$ .A)

6) pgcd de 990 et 1890 : Avec l'algorithme d'Euclide, le pgcd (990 et 1890) =90 . A)

Réponses au QCM 7

1)_ B ; 2)_C ; 3)_A ; 4)_C ; 5)_A ; 6)_A

QCM 8.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\times\frac{12}{5}$ est égal à :	$\frac{-5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$
2	On pose $A=12\sqrt{5}-9\sqrt{45}+\sqrt{125}$ L'écriture simplifiée de A est :	$-10\sqrt{5}$	$5\sqrt{10}$	$10\sqrt{5}$
3	La distance de 1 *à* $\sqrt{3}$ est égal à :	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$
4	La base de la pyramide régulière SABC de sommet S est :	Un triangle équilatéral	Un triangle isocèle	Un carré
5	L'intersection des intervalles [-1 ; 5[et]-3 ; 2[est :	[-1 ; 2]	[-1 ; 2[	] ← ; -1]

***

Au brouillon :

1) Calculatrice $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\times\frac{12}{5}=-\frac{5}{2}$. A)

2) Calculatrice $A=12\sqrt{5}-9\sqrt{45}+\sqrt{125}=-10\sqrt{5}$. A)

3) La distance de 1 à $\sqrt{3}$ est $\sqrt{3}-1$ $=-1+\sqrt{3}$. C)

4) La base d'un tétraèdre régulier est un triangle équilatéral . A)

5) / / / / /]/ / / / / /[[/// [//////////

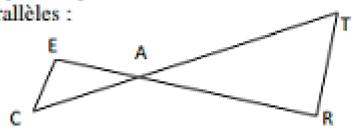
-3 -1 2 5

La réponse est [-1 ; 2[. B)

Réponses au QCM 8

1)_ A ; 2)_A ; 3)_C ; 4)_A ; 5)_B ;

QCM 9.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Soit A= 0,27×0,2×10^4 La notation scientifique de A est :	$5{,}4 \times 10^2$	$5{,}4 \times 10^{-1}$	$5{,}4 \times 10^{-2}$
2	On donne $F = (x+2)^2 - (2x-1)^2$ L'expression factorisée de F est :	$(x-3)(3x+1)$	$(3-x)(3x+1)$	$(x+3)(3x+1)$
3	L'écriture sans radical au dénominateur du nombre $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ est :	$-2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$-2+\sqrt{5}$
4	Sur la figure ci-dessous, les droites (ER) et (CT) se coupent au point A les droites (CE) et (RT) sont parallèles :  D'après la propriété de Thalès :	$\frac{RT}{EC} = \frac{AT}{TC}$	$\frac{AT}{AC} = \frac{AR}{AE}$	$\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{TC}$
5	Si a est un réel , alors $\sqrt{a^2} =$	a	a ou -a	$\boldsymbol{a^2}$

***

Au brouillon :

1_

$A = 0{,}27 \times 0{,}2 \times 10^4 = 0{,}054 \times 10^4 = 0{,}054 \times 10000 = 540 = 5{,}4 \times 10^2$

1 _A)

2_ $F = (x+2)^2 - (2x-1)^2 = [(x+2)+(2x-1)][(x+2)-(2x-1)]$

$F = (x+2+2x-1)(x+2-2x+1)$

$F = (3x+1)(-x+3) \quad ou \quad F = (3-x)(3x+1)$. B)

3_ Calculatrice $\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}$. C)

4_ En appliquant la propriété de Thales on a $\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{AT} = \frac{EC}{TR}$; $\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{AT}$. C)

5_ $\sqrt{a^2} = |a|$; $|a| = a$, $si\ a\ est\ positif$, $|a| = -a$ $si\ a\ est\ n\acute{e}gatif$,
la réponse est a ou –a .

5_B)

Réponses au QCM 9

1)_ A ; 2)_B ; 3)_C ; 4)_C ; 5)_B ;

QCM 10.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	Quelle est la forme factorisée de $(x+1)^2-9$?	$(x-2)(x+4)$	x^2+2x-8	$(x-8)(x+10)$
2.	Que vaut $5^n \times 5^m$?	5^{nm}	5^{n+m}	25^{n+m}
3.	À quelle autre expression le nombre $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\div\frac{5}{2}$ est-il égal?	$\frac{3}{3}\div\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$	$\frac{27}{15}$
4.	Quels sont les nombres premiers entre eux?	774 et 338	63 et 44	1 035 et 774
5.	Quel nombre est en écriture scientifique?	$17{,}3\times10^{-3}$	$0{,}97\times10^{7}$	$1{,}52\times10^{3}$

***

Au brouillon :

1_ Factorisation de :

$(x+1)^2-9=(x+1)^2-3^2=(x+1+3)(x+1-3)=(x+4)(x-2)$
1_A)

2_$5^n\times5^m=5^{n+m}$. B)

3) $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\div\frac{5}{2}=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}$. B)

4) Rappel : deux nombres a et b sont premiers entre eux si le pgcd (a et b)=1.

$\frac{774}{338}=\frac{387}{169}$; $\frac{63}{44}=\frac{63}{44}$; $\frac{1035}{774}=\frac{115}{86}$ Réponse .B car la fraction $\frac{63}{44}$ est irréductible .

4_B)

5_C

Réponses au QCM 10

1)_ A ; 2)_B ; 3)_B ; 4)_B ; 5)_C ;

QCM 11 .

Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1) Si E=$\frac{2}{5}+\frac{5}{12}-\frac{1}{15}$, alors E est égal à :	$\frac{23}{30}$	3	0,75
2) Si $P=(2x-5)^2$ alors P est égal à :	$4x^2-20x+25$	$4x^2-14x+25$	$4x^2-25$
3) (-2) est solution de l'équation :	$(x-2)(2x+4)=0$	$x^2+4=0$	$-2x+4=0$
4) Si MNOP est un carré de côté $=a$, alors :	$OM=2\sqrt{a}$	$OM=2a$	$OM=a\sqrt{2}$

QCM 12.

		Réponse n°1	Réponse n°2	Réponse n°3
A	Le nombre $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{27}{24}$ est égal à :	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	$\mathbf{-\frac{1}{6}}$
B	Quelle est l'expression factorisée de $25x^2-16$	$\mathbf{(5x-4)^2}$	$\mathbf{(5x-8)(5x+8)}$	$\mathbf{(5x+4)(5x-4)}$
C	$\frac{12\times10^4-22\times10^3}{(5\times10^3)^2}$ a pour notation scientifique :	**0,392**	$\mathbf{3,92\times10^{-3}}$	$\mathbf{3,92\times10^{3}}$
D	Le nombre réel $\sqrt{(-4)^2}$ est égal à :	$\mathbf{\sqrt{-4}}$	**4**	**-4**
E	$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$ est égal à :	$2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$	$30-12\sqrt{6}$	$\mathbf{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

QCM 13.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	$\frac{(10^{-3})^2 \times 10^4}{10^{-5}}$ est égal à :	10^{-7}	10^{-15}	10^3	10^4
2	Que vaut $5^n \times 5^m$?	5^{nm}	5^{n+m}	25^{n+m}	25^{nm}
3	A quelle autre expression le nombre $\frac{7}{3} - \frac{4}{3} \div \frac{5}{2}$ est-il égal ?	$\frac{3}{3} \div \frac{5}{2}$	$\frac{7}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$	$\frac{27}{15}$	-1
4	Quel nombre est en écriture scientifique ?	$17,3 \times 10^{-3}$	$0,97 \times 10^7$	$1,52 \times 10^3$	$10,03 \times 10^{-1}$
5	$3^{-2} \times 3^3 - 3 =$	0	3^0	-1	3^{-5}
6	$\frac{1}{9} + \frac{1}{6}$ est égal à :	$\frac{2}{15}$	0,277	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{15}$
7	$2 \times 10^{-3} \times 10^5$ est égal à :	2×10^{-15}	2×10^2	0,2	0,02
8	Le nombre $\frac{6 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}}$ est égal à :	12×10^{-9}	0,12	0,012	12×10^4
9	Le nombre $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{27}{24}$ est égal à :	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1
10	$\frac{5}{3} - \frac{6}{5}$ est égal à :	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{8}$	0,46